

Article

« Séries codépendantes : application à l'hypothèse de parité du pouvoir d'achat »

Christian Gouriéroux et Irina Peaucelle

L'Actualité économique, vol. 68, n° 1-2, 1992, p. 283-304.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: <http://id.erudit.org/iderudit/602068ar>

DOI: 10.7202/602068ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter à l'URI <http://www.erudit.org/apropos/utilisation.html>

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche. Érudit offre des services d'édition numérique de documents scientifiques depuis 1998.

Pour communiquer avec les responsables d'Érudit : erudit@umontreal.ca

SÉRIES CODÉPENDANTES: APPLICATION À L'HYPOTHÈSE DE PARITÉ DU POUVOIR D'ACHAT

Christian GOURIÉROUX

CREST et CEPREMAP

Irina PEAUCELLE

CNRS et CEPREMAP

RÉSUMÉ — Nous étendons les idées de la cointégration au cas de séries stationnaires, en introduisant les notions de degré de persistance des chocs et de vecteurs de codépendance, directions peu sensibles à ces chocs. Ces notions sont ensuite appliquées à l'étude de la parité du pouvoir d'achat en relatif entre la France et l'Allemagne.

ABSTRACT — We extend the ideas of cointegration theory to the case of stationary series, by introducing the notions of persistence degree and of codependence vectors. These give the directions which are the less sensitive to the shocks. Then these notions are applied to the study of relative purchasing power parity hypothesis between France and Germany.

INTRODUCTION

La théorie de la cointégration introduite par Granger (1986) et développée ensuite par un grand nombre d'auteurs (Hendry, 1986; Engle-Granger, 1987; Johansen, 1988...) peut être vue comme une approche pour mettre en évidence des relations linéaires «stables» entre séries non stationnaires, relations souvent dites de «long terme» dans la littérature. Étant données des séries macroéconomiques $(Y_{1t}) \dots (Y_{nt})$, à caractère explosif, l'idée est de rechercher des combinaisons linéaires $\alpha' Y_t = \alpha_1 Y_{1t} + \dots + \alpha_n Y_{nt}$ pour lesquelles ce caractère explosif est moins marqué. Ces combinaisons particulières $u_t = \alpha' Y_t$ sont appelées «erreurs d'équilibre» et le jeu de coefficients associé $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)'$ constitue le «vecteur de cointégration».

En pratique la recherche de relations linéaires stables peut également se révéler intéressante, lorsque les séries initiales $(Y_{1t}), \dots (Y_{nt})$ sont stationnaires, des exemples typiques d'application étant les mises en évidence de propriétés de type parité du pouvoir d'achat [P.P.A] ou parité des taux d'intérêt en flux [voir la liste des références consacrées à ce problème]. C'est une extension à un tel cas stationnaire de la théorie de la cointégration que nous présentons dans cet article.

Dans la première section, nous commençons par préciser ce que nous entendons par combinaison linéaire des séries initiales plus stable qu'une autre. Cette définition est donnée en terme de multiplicateurs dynamiques par analogie avec le cas de la théorie de la cointégration. Nous nous plaçons dans un cadre moyenne mobile de sorte que les effets sur une combinaison linéaire (u_t) de chocs transitoires sur les séries initiales disparaissent après un certain délai. On peut alors associer à chacune de ces combinaisons l'ordre minimal d'annulation de ces effets, appelé ordre de persistance. Considérant des séries initiales (Y_{1t})... (Y_{nt}) de même ordre de persistance, on recherche alors des combinaisons linéaires $u_t = \alpha' Y_t$, dont l'ordre de persistance est strictement inférieur à cet ordre commun. S'il en existe, les séries initiales sont dites «codépendantes» et le vecteur α est appelé «vecteur de codépendance». Nous développons en détail dans cette première section la théorie de la codépendance.

Dans la deuxième section nous discutons l'aspect statistique en distinguant le cas où les directions potentielles de codépendance sont données, de celui où elles ne le sont pas. Ceci nous conduit dans le premier cas à une procédure de test et dans le second à la mise en œuvre d'une procédure d'analyse canonique beaucoup plus descriptive.

Dans la troisième section nous montrons comment en pratique cette théorie peut être utilisée de façon empirique pour mettre en évidence des relations stables. Nous considérons une application à la parité du pouvoir d'achat en flux entre la France et l'Allemagne. L'étude concerne les années 1978-1986 et est menée en distinguant deux sous-périodes, avant et après l'instauration du système monétaire européen. Ceci permet de voir que l'hypothèse est approximativement satisfaite sur la seconde sous-période. L'étude est poursuivie en montrant que le différentiel d'inflation entre les deux pays apparaît «très exogène» par rapport à l'écart à la parité du pouvoir d'achat.

1. CODÉPENDANCE

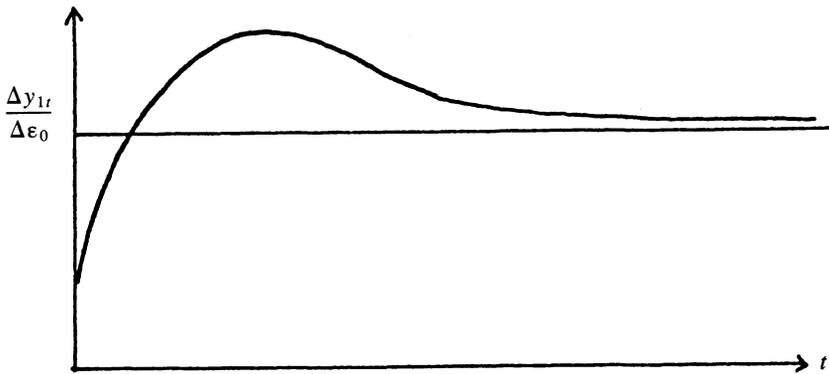
1.1 *Ordre de stabilité*

Afin d'introduire une mesure naturelle de stabilité dans le cas de séries stationnaires, il est utile de commencer par discuter la notion de «relation d'équilibre» telle qu'elle apparaît dans la théorie de la cointégration. La présentation usuelle consiste à considérer des séries (Y_{1t}) ... (Y_{nt}) non stationnaires intégrées d'ordre un. Ces séries présentent un caractère explosif au niveau de la variance, mais leurs différences premières $Y_{jt} - Y_{jt-1}$, $j = 1, \dots, n$ sont par hypothèses stationnaires : il y a donc stationnarité des flux, mais pas des niveaux. Un vecteur de cointégration α est alors associé à une série $u_t = \alpha' Y_t$ stationnaire en niveau [et aussi en flux]. Il se caractérise par une baisse de l'ordre d'intégration de la série¹. Il est clair qu'une

1. Rappelons qu'une série (Y_t) est dite intégrée d'ordre d , si d est le plus petit entier tel que $\Delta^d Y_t$ soit stationnaire, où Δ désigne l'opérateur différence première : $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$.

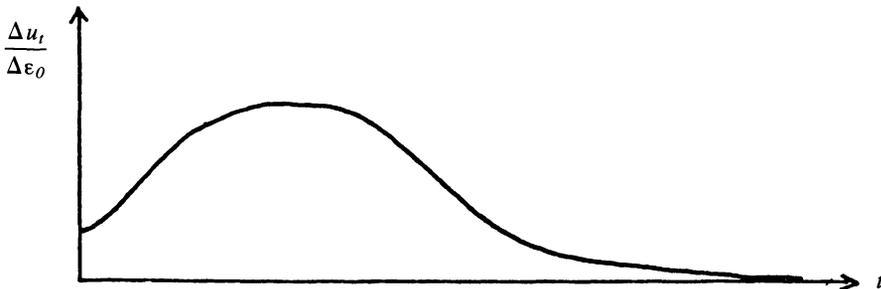
telle définition ne peut être étendue au cas, où les séries de base (Y_{1t}) ... (Y_{nt}) seraient déjà stationnaires en niveaux, puisque leur ordre alors égal à zéro ne pourrait être abaissé par combinaison linéaire. Il nous faut donc trouver une autre définition de la cointégration se prêtant mieux à une extension au cas de séries stationnaires. Celle-ci va être donnée en terme de multiplicateurs. Supposons qu'un choc ait lieu à la date $t = 0$ sur les innovations de Y_{1t} ... Y_{nt} . Comme les séries sont intégrées d'ordre 1 l'effet de ce choc sur les valeurs futures des séries Y_{jt} persistera à tous les délais. Le choc transitoire aura un effet permanent sur les niveaux :

FIGURE 1

EFFET SUR Y_{1t} D'UN CHOC SUR Y_{10} ... Y_{n0} 

En revanche, si nous considérons ce même effet sur une combinaison $u_t = \alpha' Y_t$ associée à un vecteur de cointégration, il résulte de la stationnarité du processus u , que cet effet tend, à disparaître lorsque le délai s'accroît :

FIGURE 2

EFFET SUR u_t D'UN CHOC SUR Y_{10} ... Y_{n0} 

Ainsi une combinaison associée à un vecteur de cointégration apparaît plus stable au sens où elle résorbe mieux les chocs. Dans la suite nous employons plutôt la terminologie: «relation stable», au lieu de «relation d'équilibre».

Il nous reste maintenant à étendre cette idée au cas où les séries de base $(Y_{1t}) \dots (Y_{nt})$ sont stationnaires. De façon à simplifier la présentation, nous supposons que la série $(Y_t) = (Y_{1t}, \dots, Y_{nt})'$ admet une représentation moyenne mobile pure d'ordre q ; un tel processus est défini par:

$$Y_t = m + \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \Theta_q \neq 0,$$

où ε est un bruit blanc, de matrice de variance-covariance Σ inversible et où m désigne la moyenne de Y_t . Les coefficients $\Theta_j, j = 1 \dots q$ sont matriciels, de dimension (n, n) . Les dépendances temporelles entre les composantes de (Y_t) sont résu- mées par l'intermédiaire des autocovariances: $\Gamma(h) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}), h = 0, 1, \dots$. Comme le processus Y a une représentation moyenne mobile pure, il est clair que les effets multiplicateurs sur Y d'un choc sur l'innovation de la date 0, $\Delta \varepsilon_0$ seront:

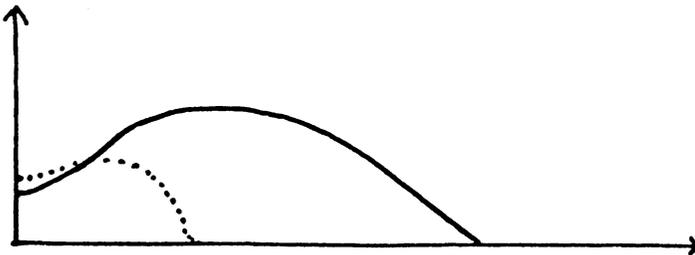
$$\Delta \varepsilon_0, \Theta_1 \Delta \varepsilon_0, \Theta_2 \Delta \varepsilon_0, \dots, \Theta_q \Delta \varepsilon_0, 0, 0, \dots$$

Ils s'annulent donc à partir du rang $q + 1$. Cette propriété peut d'ailleurs être décrite de façon équivalente en terme d'autocovariance [voir Gourieroux-Monfort, 1990]: $K = q + 1$ est le plus petit ordre à partir duquel la fonction d'autocovariance s'annule.

Considérons maintenant une combinaison linéaire donnée des séries de base: $u_t = \alpha' Y_t$. Cette combinaison peut être écrite par l'intermédiaire du bruit blanc initial:

$$u_t = \alpha' Y_t = \alpha' m + \alpha' \varepsilon_t + \alpha' \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha' \Theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

FIGURE 3



— effet sur Y_{jt} d'un choc sur $\varepsilon_0 \dots$
 effet sur u_t d'un choc sur $\varepsilon_0 \dots$

La série (u_t) admet aussi une écriture moyenne mobile dans le bruit blanc initial, d'ordre au plus q . Cet ordre peut être strictement inférieur à q ; par exemple si $\alpha' \Theta_q = \alpha' \Theta_{q-1} = \alpha' \Theta_{q-2} = 0$ et $\alpha' \Theta_{q-3} \neq 0$, il y a baisse de l'ordre

de 3 et l'ordre moyenne mobile de u_t est $q(u) = q - 3$. Nous appellerons ordre de persistance cet ordre moyenne mobile $q(u)$.

1.2 Vecteurs et degrés de codépendance

Cette mesure de la stabilité aux chocs par l'intermédiaire de l'ordre de persistance (ou moyenne mobile) nous conduit aux définitions suivantes analogues de celles données en théorie de la cointégration.

Définition 1 :

- 1) Les séries $(Y_{jt}), j = 1, \dots, n$ admettant une représentation moyenne mobile jointe $MA(q)$ sont codépendantes, s'il existe une combinaison linéaire $u_t = \alpha' Y_t$ d'ordre de persistance strictement inférieur à q , c'est-à-dire si et seulement si la matrice Θ_q est non inversible.
- 2) Un vecteur de codépendance α est un élément non nul du noyau de Θ'_q : $\text{Ker } \Theta'_q = \{\alpha : \alpha' \Theta_q = 0\}$.
- 3) Le degré de codépendance associé à ce vecteur α est l'entier b tel que $\alpha' \Theta_{q-b} \neq 0$ et $\alpha' \Theta_{q-k} = 0 \forall k < b$. Il est égal à l'ordre q diminué de l'ordre de persistance $q(u)$.

Remarque 1 :

Il est clair que les définitions que nous venons de donner reposent de façon importante sur le choix de $q(u)$ comme mesure de persistance. D'autres mesures auraient pu être introduites prenant en compte les importances des divers effets multiplicateurs. Ces dernières dépendent cependant du choc initial. Une normalisation possible de celui-ci consiste à prendre comme chocs ceux observés dans le passé. Une mesure de stabilité serait alors en pondérant de même manière tous les délais :

$$v(u) = \alpha' (\Theta_1 \Sigma \Theta'_1 + \dots + \Theta_q \Sigma \Theta'_q) \alpha,$$

Chercher à minimiser $v(u)$ revient à déterminer les directions les plus proches d'un bruit blanc. Une telle approche a été développée implicitement par [Tsay-Tiao, 1985]. Elle présente cependant le défaut de ne pas être adaptée à des idées de stabilité relative à des chocs exogènes; par ailleurs nous verrons que l'introduction d'ordres entiers a un intérêt propre lié à l'identification des processus moyennes mobiles.

En pratique les représentations moyennes mobiles pures sont considérées comme assez difficiles à estimer de sorte que la définition 1 donnée en terme de coefficients $\Theta_j, j = 1 \dots l$ est peu utilisable directement. Cependant dire que α est un vecteur de codépendance de degré b équivaut à dire que $\alpha' Y_t$ est non corrélé avec $\varepsilon_{t-q+b-1}, \varepsilon_{t-q+b-2}, \dots$ ou de façon équivalente avec $Y_{t-q+b-1}, Y_{t-q+b-2}, \dots$. Cette condition de non corrélation s'écrit :

$$\alpha' \Gamma(q-b+1) = \alpha' \Gamma(q-b+2) = \dots = \alpha' \Gamma(q) = 0,$$

et s'exprime donc en fonction des autocovariances qui sont elles facilement estimables.

Propriété 2 :

α est un vecteur de codépendance de degré b si et seulement si α appartient aux noyaux $\text{Ker } \Gamma' (q-h)$, $h = 0, \dots, b-1$, et n'appartient pas au noyau de $\text{Ker } \Gamma' (q-b)$.

Remarque 2 :

Les caractérisations de la codépendance mises en évidence à partir des coefficients moyennes mobiles ou des autocovariances montrent que l'hypothèse que le processus initial admet une représentation moyenne mobile pure pourrait être relâchée. On pourrait ainsi se demander lorsque $q = +\infty$, s'il n'existe pas des combinaisons admettant des représentations moyennes mobiles d'ordre fini. Il est clair cependant que du point de vue pratique et dès que la recherche est faite à partir de la fonction d'autocovariance cette généralisation est minime, les autocovariances étant proches de zéro pour h assez grand, et les autocovariances estimées ne pouvant être évaluées que pour un ordre fini.

1.3 Interprétation en terme de prévision

Si les séries (Y_{jt}) sont codépendantes, de vecteur de codépendance α et de degré b , nous pouvons introduire l'information relative au passé antérieur à $t-q+b-1$: $I_{t-q+b-1} = \{Y_{t-q+b-1}, Y_{t-q+b-2}, \dots\}$. L'existence d'une forme moyenne mobile pure d'ordre $q-b$ équivaut à la condition :

$$E[\alpha' (Y_t - m) / I_{t-q+b-1}] = 0.$$

Cette condition a été interprétée par Roll (1979) comme une «condition d'équilibre *ex ante*». Bien que $\alpha' (Y_t - m)$ ne soit pas rigoureusement nul, on anticipe que cette condition sera satisfaite. L'interprétation du degré de codépendance est alors la suivante :

si $b (b > 0)$ est proche de l'ordre initial q , on pourra considérer que la relation est satisfaite dans le court terme; ainsi dans le cas limite $b = q$, nous avons $\alpha' (Y_t - m) = 0$; pour $b = q - 1$, nous avons $\alpha' (Y_t - m) = u_t$, où (u_t) est un bruit blanc...

2. PROCÉDURES STATISTIQUES

2.1 Procédure de test

Un test de l'hypothèse de codépendance peut être facilement développé, lorsque le vecteur de codépendance α et le degré b potentiels sont donnés *a priori*. En pratique il arrive souvent qu'un vecteur de codépendance potentiel soit connu *a priori*. Nous en verrons un exemple dans l'application à la parité du pouvoir d'achat considérée à la fin de cet article. D'autres exemples importants peuvent être trouvés dans la détermination des équations d'évaluation d'actifs financiers,

où les directions de codépendance ont des interprétations en terme de portefeuille d'arbitrage (voir Gourieroux-Monfort-Renault, 1991a). L'hypothèse à tester peut alors être caractérisée par le système de contraintes :

$$H_0 = \{\alpha' \Gamma (q-b+1) = 0, \dots, \alpha' \Gamma (q) = 0\}.$$

Une idée naturelle est de construire le test à partir des statistiques :

$$\xi_t (q-b+1) = \alpha' \hat{\Gamma}_T (q-b+1), \dots \xi_t (q) = \alpha' \hat{\Gamma}_T (q),$$

où $\hat{\Gamma}$ désigne la fonction d'autocovariance empirique de la série (Y_t) . Il est connu (Hannan, 1970), que, si le processus initial (Y_t) admet une représentation ARMA stationnaire avec innovation gaussienne, les autocovariances empiriques sont asymptotiquement normales. Plus précisément introduisons l'élément d'ordre (i, j) de la matrice $\hat{\Gamma}_T (q-h)$, élément noté $\hat{\gamma}_{ij} (q-h)$. Le vecteur :

$$\{\sqrt{T} [\hat{\gamma}_{ij} (q-h) - \gamma_{ij} (q-h)], i, j = 1, \dots, n, h = 0, \dots, b-1\}$$

est asymptotiquement normal centré et admet une matrice de covariance, dont l'élément générique est :

$$\begin{aligned} & \text{Cov}_{as} \{ \sqrt{T} [\hat{\gamma}_{ij} (q-h) - \gamma_{ij} (q-h)], \sqrt{T} [\hat{\gamma}_{kl} (q-h') - \gamma_{kl} (q-h')] \} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \{ \gamma_{ik} (u) \gamma_{jl} (u+h-h') + \gamma_{il} (u+q-h') \gamma_{jk} (u-q+h) \}. \end{aligned}$$

De ces propriétés asymptotiques des covariances estimées on déduit la normalité asymptotique du vecteur :

$$\sqrt{T} [\xi'_T (q), \dots, \xi'_T (q-b+1)]'$$

sous l'hypothèse nulle. Sa loi limite est normale centrée, de covariance Ω , de terme général calculé par [voir annexe 1] :

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{as} [\sqrt{T} \xi_j (q-h), \sqrt{T} \xi_l (q-h')] = \\ \sum_{u=b-q}^{q-b} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k \hat{\gamma}_{ik} (u) \right] \hat{\gamma}_{jl} (u+h-h') \end{aligned}$$

Si $\hat{\Omega}$ désigne un estimateur convergent de cette matrice de covariance, nous pouvons alors utiliser la statistique de Wald associée à l'hypothèse nulle de codépendance :

$$\xi_w = T [\xi'_T (q), \dots, \xi'_T (q-b+1)] \hat{\Omega}^{-1} [\xi'_T (q), \dots, [\xi'_T (q-b+1)]'].$$

Sous l'hypothèse nulle, elle est asymptotiquement distribuée selon une loi du khi-deux à nb degrés de liberté.

La procédure de test consiste alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{accepter l'hypothèse de codépendance, si } \xi_w < \chi_{95}^2 (nb), \\ \text{sinon, refuser cette hypothèse,} \end{array} \right.$$

pour un risque d'erreur de 5 %.

2.2 *Corrélations canoniques*

Lorsque les directions potentielles de codépendance ne sont pas données *a priori*, nous sommes conduits à adopter une approche plus descriptive. Pour cela il est usuel de commencer par normaliser les matrices de covariance.

Les séries sont codépendantes si et seulement si la matrice $\Gamma(q)$ est non inversible ou, de façon équivalente, si la matrice : $\Delta(q) = \Gamma(0)^{-1/2} \Gamma(q) \Gamma(0)^{-1} \Gamma(q)' \Gamma(0)^{-1/2}$ est non inversible.

La matrice $\Delta(q)$ peut être vue comme une mesure matricielle de l'autocorrélation d'ordre q et coïncide d'ailleurs avec l'autocorrélation usuelle dans le cas unidimensionnel. Ses valeurs propres sont les carrés des corrélations canoniques entre les composantes de Y_t et les composantes de Y_{t-q} (voir Rao, 1965); ainsi sa plus grande (resp: plus petite) valeur propre mesure la liaison entre la combinaison linéaire des composantes de Y_t et la combinaison linéaire des composantes de Y_{tq} les plus corrélées (resp: les moins corrélées).

L'hypothèse de codépendance est alors satisfaite, si et seulement si la plus petite corrélation canonique λ est nulle. De plus si β_0 désigne un vecteur propre de $\Delta(q)$ associée à cette valeur minimale, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(q) \beta_0 &= \lambda_{\min}^2 \beta_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \Gamma(q) \Gamma(0)^{-1/2} \beta_0 &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que : $\alpha_0 = \Gamma(0)^{-1/2} \beta_0$ est un vecteur de codépendance avec un degré supérieur ou égal à 1.

Cette approche peut être généralisée pour permettre la détermination des degrés de dépendance. Pour cela nous pouvons introduire les matrices :

$$\wedge_k = \Gamma(0)^{-1/2} [\Gamma(q), \dots, \Gamma(k)] \begin{bmatrix} \Gamma(0)\Gamma(1) & \dots & \Gamma(q-k-1) \\ \Gamma(1)' & & \vdots \\ & & \Gamma(1) \\ \Gamma(q-k-1)' & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma(q)' \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma(k)' \end{bmatrix} \Gamma(0)^{-1/2}.$$

Cette matrice mesure la corrélation canonique entre le

vecteur Y_t et le vecteur $\begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix}$, puisque :

$$\wedge_k = (VY_t)^{-1/2} \text{Cov} \left(Y_t, \begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix} \right) V \begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix}^{-1} \text{Cov} \left(\begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix}, Y_t \right) (VY_t)^{-1/2}.$$

où $V(\cdot)$ et $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ désignent les matrices de variance et de covariance respectivement.

On remarque que cette matrice est non inversible, si et

seulement si $\text{Cov} \left(Y_t, \begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix} \right)$ est nul. Un vecteur α tel que

$$\text{Cov} \left(\alpha' Y_t, \begin{bmatrix} Y_{t-q} \\ \vdots \\ Y_{t-k} \end{bmatrix} \right) = 0, \quad \text{c'est-à-dire tel que :}$$

$\alpha' \Gamma(q) = \dots = \alpha' \Gamma(k) = 0$ est alors un vecteur de $\Gamma(0)^{-1/2} \text{Ker } \wedge_k$.

Il existe un ordre minimal k_0 pour lequel la matrice \wedge_{k_0} est non inversible. Le degré de codépendance est $b = q - k_0$ et les vecteurs de codépendances sont les éléments non nuls de $\Gamma(0)^{-1/2} \text{Ker } \wedge_{k_0}$.

Il peut évidemment exister d'autres combinaisons linéaires des séries possédant des propriétés de codépendance, mais alors avec un degré inférieur. Elles peuvent être obtenues par une analyse récursive des noyaux des matrices \wedge_k , $k > k_0$.

Ainsi il existe un plus petit ordre $k_1 > k_0$, pour lequel $\text{Ker } \wedge_{k_1} \neq \text{Ker } \wedge_{k_0}$. Si k_1 est strictement inférieur à q , on en déduit des vecteurs de codépendance de degré $q - k_1$; ce sont les éléments de $\Gamma(0)^{-1/2} \text{Ker } \wedge_{k_1}$ n'appartenant pas à $\Gamma(0)^{-1/2} \text{Ker } \wedge_{k_0}$. Et ainsi de suite...

Nous pouvons remarquer que les matrices \wedge_k sont symétriques, croissantes $\wedge_k \gg \wedge_{k'}$, si $k \geq k'$. Les noyaux sont alors emboîtés: $\text{Ker } \wedge_k \subset \text{Ker } \wedge_{k'}$, si $k' \geq k$ et l'approche précédente conduira à une décomposition orthogonale de l'espace \mathbb{R}^n en vecteurs de codépendance de divers ordres.

Comme les matrices sont croissantes, les ordres pourront être déterminés à partir des décompositions spectrales des matrices \wedge_k . Notons $\lambda_k^n \geq \dots \geq \lambda_k^1$, $k = 1, \dots, q$, les valeurs propres de \wedge_k rangées par ordre croissant. λ_k^j apparaît comme une fonction décroissante de k et croissante de j . Les ordres sont alors définis selon le schéma suivant:

On déduit du graphique donnant les valeurs propres, les ordres successifs $q_1 \leq \dots \leq q_j \leq \dots \leq q$ pour lesquels les diverses valeurs propres théoriques s'annulent. En fait l'existence de ces n ordres sous-jacents montre qu'une représentation moyenne mobile multivariée devrait avoir un ordre n multidimensionnel, c'est-à-dire être notée $\text{MA}(q_1, q_2, \dots, q)$.

D'un point de vue pratique, on remplacera les matrices d'autocovariances par leurs contreparties empiriques: ceci fournira une matrice $\hat{\wedge}_k$ estimée, dont on étudiera l'évolution des valeurs propres $\hat{\lambda}_k^1, \dots, \hat{\lambda}_k^n$ en fonction de k .

FIGURE 4
CORRÉLOGRAMME THÉORIQUE

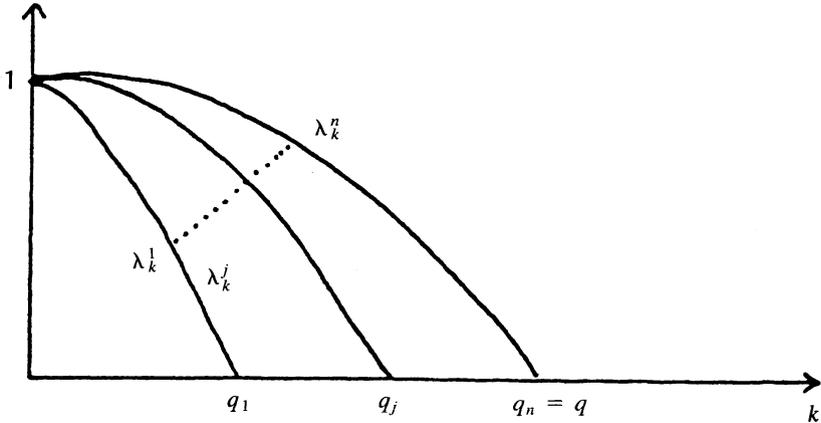
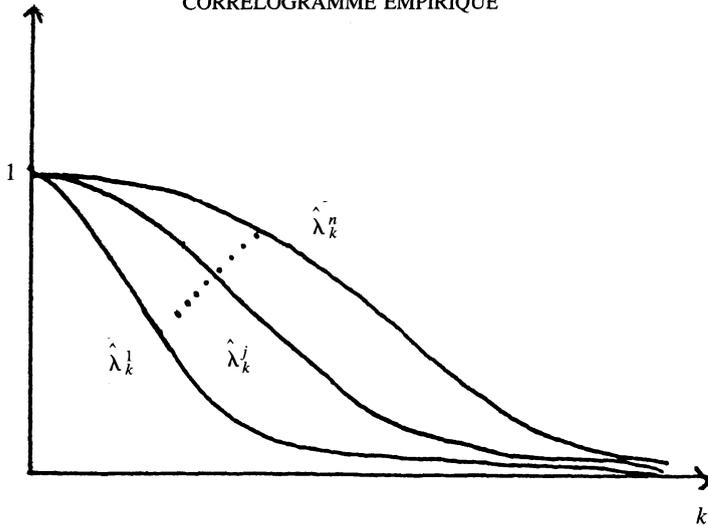


FIGURE 5
CORRÉLOGRAMME EMPIRIQUE



Le plus petit ordre de moyenne mobile \hat{q}_1 sera par exemple estimé par l'entier k à partir duquel $\hat{\lambda}_k^1$ devient non significatif ou d'un point de vue plus empirique comme l'entier à partir duquel on observe un «décrochement» dans les valeurs $\hat{\lambda}_k^1$.

La mise en œuvre d'une démarche rigoureuse de détermination des divers ordres nécessiterait d'étudier la distribution asymptotique des corrélations canoniques estimées. Cet aspect ne sera pas décrit dans cet article et nous renvoyons le lecteur à Tiao-Tsay (1989) et Gouriéroux-Monfort-Renault (1991b). Dans le

premier de ces articles les auteurs déterminent une statistique de test de nullité de certaines valeurs propres en appliquant à chaque $\hat{\lambda}_k^i$ un coefficient correctif. Dans le second article les auteurs développent une procédure de test asymptotiquement équivalente au rapport de maxima de vraisemblance et établissent ainsi un lien entre l'approche descriptive qui vient d'être décrite et les approches inférentielles fondées sur la théorie asymptotique.

3. APPLICATION À L'HYPOTHÈSE DE PARITÉ DU POUVOIR D'ACHAT

3.1 *Les hypothèses*

L'introduction des taux de change flexibles a entraîné des fluctuations plus importantes sur les marchés des changes et a conduit les économistes à étudier si ces fluctuations étaient ou non liées. De ce point de vue le critère de Parité du Pouvoir d'Achat (P.P.A.) apparaît comme une notion dominante et aussi comme un guide pour les organismes, banques centrales ou gouvernements, qui interviennent pour une certaine stabilisation des cours. Ce critère traduit l'idée que, du fait du commerce international, les prix des biens ne peuvent rester durablement plus élevés dans un pays que dans un autre. Comme ces prix doivent être comparés dans une unité commune (par exemple la devise du premier pays), la condition porte sur l'écart à la P.P.A. :

$$u_t = \log \tau_t - \log p_{1t} + \log p_{2t},$$

où p_{1t} , p_{2t} sont les prix (ou indices de prix) exprimés dans les devises respectives des pays 1 et 2 et où τ_t est le taux de change nominal. À long terme cet écart devrait avoir une tendance à revenir vers zéro, valeur correspondant à l'hypothèse P.P.A. stricte. Cependant dans le court terme une telle condition a peu de chances d'être satisfaite à cause des limites du commerce international (comme des fixations de prix oligopolistiques dans les économies nationales), des coûts de transport, de la spécialisation de certains pays dans des produits d'exportation spécifiques, de l'utilisation de certaines devises comme actifs financiers... Lorsque ces divers facteurs sont très importants, l'hypothèse P.P.A. peut même ne pas être satisfaite dans le long terme, ce qui est souvent le cas, lorsqu'on effectue des comparaisons bilatérales avec les États-Unis.

L'hypothèse P.P.A. a été très étudiée dans la littérature [voir la liste jointe des références], soit en niveau: la relation est alors :

$$\log \tau_t - \log p_{1t} + \log p_{2t} \approx 0 \text{ [P.P.A. en absolu], soit en différence première:}$$

$$\Delta \log \tau_t - \Delta \log p_{1t} + \Delta \log p_{2t} \approx 0 \text{ [P.P.A. en relatif].}$$

3.2 *Les données*

Nous allons analyser la validité de l'hypothèse P.P.A. en relatif en utilisant des données mensuelles pour l'Allemagne et la France. Ces données portent sur les indices de prix [Indices CEE] et sur la valeur du Mark à Paris pour la période

FIGURE 6

TAUX D'INFLATION FRANÇAIS ET ALLEMAND 1978-1982

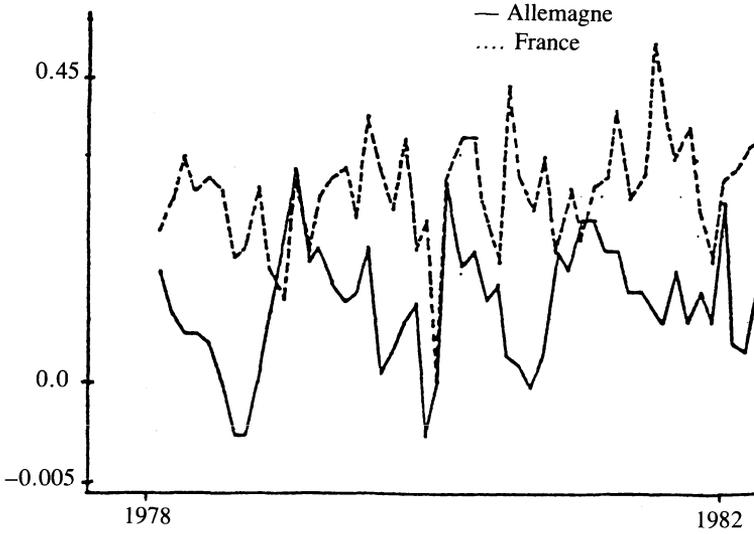
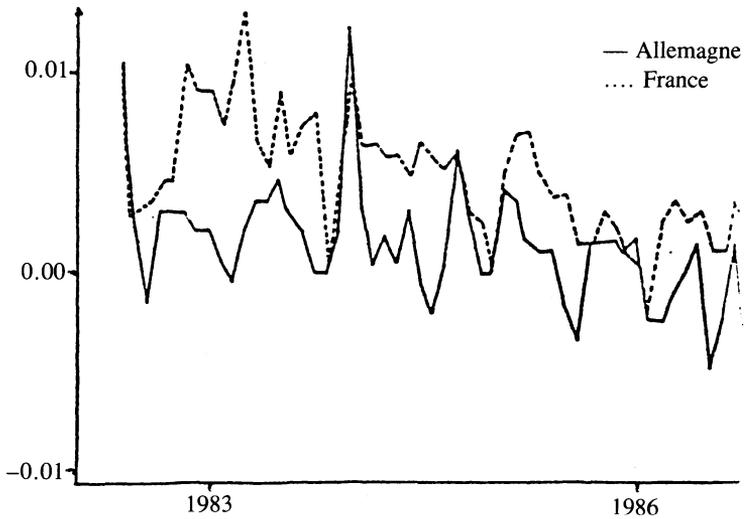


FIGURE 7

TAUX D'INFLATION FRANÇAIS ET ALLEMAND 1982-1986



1978-1986. Cette période a vu un accroissement des échanges internes à la communauté et une plus grande coordination des politiques économiques. En particulier, l'existence du Système Monétaire Européen implique des fluctuations des taux de

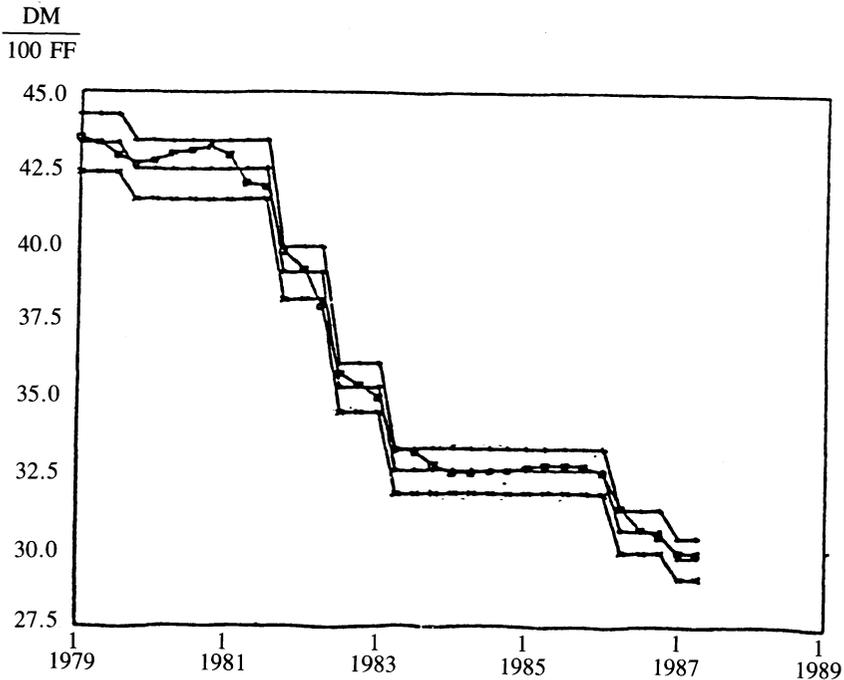
change à l'intérieur de certaines marges et la nécessité de modifier les taux pivots, lorsque ces fluctuations deviennent trop importantes, à cause par exemple d'un différentiel d'inflation persistant.

Il a paru nécessaire de diviser la période totale d'étude en deux sous-périodes 1978-1982 et 1982-1986, de façon à tenir compte des modifications structurelles de l'inflation en France et en Allemagne. Les taux d'inflation s'accroissent en effet durant la première sous-période et diminuent pendant la seconde [voir figures 6 et 7].

De plus les années 1981-1982 constituent des années charnières avec une instauration du contrôle des changes en France et une succession de réajustements de parité [voir figure 8]. De tels réajustements existent aussi à l'intérieur de chacune des sous-périodes, mais présentent une plus grande régularité et sont d'amplitude plus faible.

FIGURE 8

LE FRANC VIS-À-VIS DU MARK DANS LE S.M.E.



D'un point de vue statistique, ces corrections de parité devraient évidemment être prises en compte au niveau du test de l'hypothèse P.P.A.. De même il faudrait introduire des tendances déterministes pour modéliser la phase de croissance sur la seconde sous-période. Ces diverses non stationnarités paraissent cependant pouvoir être négligées en première approche. Ainsi si les corrections de parité

impliquent clairement une non stationnarité des taux de change, celle-ci est moins marquée au niveau de la modification relative de ces taux. Par ailleurs les effets tendanciels sont peu importants comparés aux variabilités des séries. Cette stationnarité approchée sera confirmée par l'étude des autocorrélations empiriques qui montrera par exemple que celles-ci sont négligeables à partir du rang dix sur la seconde sous-période.

3.3 Régressions

Les tests de l'hypothèse P.P.A. sont habituellement menés en effectuant des régressions [voir les références]. Dans le cas, où on s'intéresse à l'hypothèse en niveau, on peut par exemple effectuer la régression suivante :

$$\log \tau_t = a + b \log \frac{p_t^F}{p_t^G} + u_t,$$

et tester les contraintes $H_0 = \{a = 0, b = 1\}$ correspondant à l'hypothèse nulle. Comme les séries en niveau présentent des tendances [voir par exemple le graphique 8 relatif aux taux de change], cette pratique équivaut à un test de l'hypothèse de cointégration des trois séries, test qui pourrait être rendu plus efficace en utilisant une approche par maximum de vraisemblance. Les études menées précédemment sur ces données [voir références] conduisent au rejet de l'hypothèse en niveau.

Concernant l'hypothèse exprimée cette fois en flux, des approches similaires sont généralement employées, bien que les séries ne présentent plus de tendances. Ainsi on peut introduire une régression dynamique des flux du type :

$$\Delta \log \tau_t = a + \sum_{i=0}^p b_i \Delta \log (p_{t-i}^F / p_{t-i}^G) + \sum_{j=1}^p c_j \Delta \log \tau_{t-j} + u_t,$$

et par exemple comparer à 1 le multiplicateur de long terme $\sum_{i=0}^p b_i / \left(1 - \sum_{i=1}^p c_i\right)$.

Une telle approche bien qu'informatrice ne permet qu'une analyse approchée de l'hypothèse P.P.A., notamment parce qu'elle ne traite pas de façon symétrique les diverses séries. Implicitement les différentiels d'inflations sont dans l'équation considérés comme exogènes. Rappelons que cette remarque ne s'applique pas à l'équation en niveau, puisque dans le cas de séries avec tendance, les régressions du taux de change sur l'écart de prix ou de l'écart de prix sur le taux de change donnent des résultats compatibles [voir Engle-Granger, 1987].

Les régressions faites sur les deux sous-périodes conduisent à retenir un retard maximal égal à $p = 8$ et fournissent les coefficients de long terme suivants :

coefficients de long terme

| 1978-1982 | 1982-1986 |
|-----------|-----------|
| 6.10 | 0.93 |

Ces résultats montrent clairement que l'hypothèse P.P.A. n'a des chances d'être acceptée que sur la seconde sous-période.

Cette constatation est confirmée, lorsqu'on étudie directement les évolutions de l'écart à la parité du pouvoir d'achat, écart qui devrait intuitivement fluctuer autour de zéro, si l'hypothèse est satisfaite (voir figures 9 et 10). Cette condition n'est satisfaite que pour la seconde sous-période.

FIGURE 9

ÉCARTS À P.P.A. 1978-1982



FIGURE 10

ÉCARTS À P.P.A. 1980-1986



Dans la suite nous précisons l'étude de l'hypothèse pour 1982-1986.

3.4 Analyse des corrélations canoniques

Une étude de codépendance peut *a priori* être menée en supposant le vecteur potentiel de codépendance égal à $\alpha = (1, -1, 1)'$ ou bien en suivant la démarche de recherche directe des directions de codépendance et en vérifiant *a posteriori* que $(1, -1, 1)'$ est proche des solutions obtenues.

Nous allons par exemple développer l'approche descriptive présentée dans la section 1 qui est fondée sur l'analyse des corrélations temporelles du processus vectoriel :

$$Y_t = (\Delta \log \tau_t, \Delta \log p_t^E, \Delta \log p_t^G)'$$

L'ajustement d'une représentation moyenne mobile pure conduit à retenir un ordre maximal égal à 10, au sens où les covariances estimées $\hat{\Gamma}(h)$ ne sont plus significatives après ce rang. Les valeurs propres des matrices $(\hat{\Lambda}_h)$ estimées sont données dans le tableau ci-dessous :

TABLEAU 1
VALEURS PROPRES

| Ordre | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1 ^{re} valeur propre | 1.41* | 1.12* | 0.98* | 0.99* | 0.49* | 0.12 |
| 2 ^e valeur propre | 0.88* | 0.69* | 0.56* | 0.33* | 0.10 | 0.02 |
| 3 ^e valeur propre | 0.27* | 0.16 | 0.10 | 0.08 | 0.06 | 0.01 |

Les étoiles désignent dans le tableau les valeurs propres significatives. De ce tableau, qui s'interprète comme un corrélogramme multivarié, nous déduisons l'ordre multivarié du processus moyenne mobile pur, processus du type : MA(6, 9, 10).

Nous constatons donc une chute importante de l'ordre moyenne mobile dans une direction correspondant à l'ordre égal à 6. Afin de déterminer le vecteur de codépendance, nous devons maintenant examiner les sous-espaces propres associés aux valeurs propres non significatives. Ces espaces sont décrits dans la table ci-dessous par l'intermédiaire de systèmes de générateurs :

Afin de voir si le vecteur de codépendance est compatible avec l'hypothèse de parité du pouvoir d'achat, nous devons examiner si le vecteur $\alpha_0 = [1, -1, 1]'$ correspondant à l'hypothèse est proche de ces sous-espaces. Par analogie avec le coefficient de détermination R^2 , nous donnons ci-dessous les valeurs de $\text{Cos}^2 a$, où a désigne l'angle entre le vecteur α_0 et le sous-espace :

TABLEAU 2
GÉNÉRATEURS DES ESPACES DE CODÉPENDANCE

| Ordre | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|----------------|
| générateurs | | $\begin{bmatrix} 0.57 \\ -0.47 \\ 0.67 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.52 \\ -0.53 \\ 0.66 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.59 \\ -0.53 \\ 0.60 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.89 \\ 0.44 \\ 0.09 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.36 \\ -0.43 \\ 0.82 \end{bmatrix}$ | \mathbb{R}^3 |

TABLEAU 3
ÉCART À L'HYPOTHÈSE P.P.A.

| Ordre | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|------------------|------|------|-------|-------|----|
| $\text{Cos}^2 a$ | 0.98 | 0.99 | 0.996 | 0.998 | 1 |

À titre de comparaison le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre à l'ordre 6, valeur significative, est $[0,74, -0.33, 0.58]$, et donne un écart de $\text{Cos}^2 a = 0.91$. Cette analyse descriptive montre que le vecteur de codépendance peut être pris égal à $[1, -1, 1]'$, de sorte que l'hypothèse P.P.A. est acceptée à l'ordre 7. Bien que les durées d'ajustement relatives aux taux d'inflation et aux modifications de taux de change soient de dix mois, cette durée tombe à six mois pour l'écart à la parité du pouvoir d'achat.

3.5 Analyse de prédétermination

Comme pour la théorie de la cointégration, l'approche de la codépendance conduit à exhiber une (ou plusieurs) relation(s), ici : $\Delta \log \tau_t - \Delta \log p_t^F + \Delta \log p_t^G = u_t$, dans laquelle (lesquelles) les variables interviennent de façon symétrique. Du point de vue de l'interprétation d'une telle relation, il est utile d'examiner si certaines de ces variables peuvent être considérées comme «exogènes», au sens non corrélée avec le terme d'erreur. C'est ce problème que nous abordons maintenant en prenant en compte l'aspect dynamique. Nous allons chercher une combinaison des variables initiales «suffisamment» non corrélée avec le terme d'erreur.

Dans l'exemple précédent, nous avons établi que :

$u_t = \log \tau_t - \Delta \log (p_t^F / p_t^G)$ était tel que :

$$\text{Cov} [u_t, (\Delta \log \tau_{t-h}, \Delta \log p_{t-h}^F, \Delta \log p_{t-h}^G)] = 0, \forall h \geq 7.$$

et était non nul pour $h = 6$. Il se peut cependant qu'existe une combinaison linéaire $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$ telle que :

$$\text{Cov} (u_t, \beta_1 \Delta \log \tau_{t-h} + \beta_2 \Delta \log p_{t-h}^F + \beta_3 \Delta \log p_{t-h}^G) = 0,$$

pour des ordres h strictement inférieurs à 6. Si ces non-corrélations existent jusqu'à une valeur faible de h , la variable correspondante $\beta_1 \Delta \log \tau_t + \beta_2 \Delta \log p_t^F + \beta_3 \Delta \log p_t^G$ apparaît comme «très prédéterminée» pour l'équation P.P.A.

Trouver de telles directions β peut permettre de répondre à des questions du type: peut-on attribuer les mouvements du taux de change réel à un pays spécifique, France ou Allemagne?... Nous donnons ci-dessous les valeurs des corrélations entre l'écart à P.P.A. u_t et la modification des taux de change, les taux d'inflation et le différentiel d'inflation. Nous précisons à chaque fois par une étoile les corrélations significatives:

TABLEAU 4
CORRÉLATIONS

| Ordre Variable | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\Delta \log \tau_t$ | 0.95* | 0.37* | 0.00 | 0.08* | 0.00 | 0.09* | 0.08* |
| $\Delta \log p_t^F$ | 0.05 | 0.04 | 0.20* | 0.06 | 0.00 | 0.06 | 0.11* |
| $\Delta \log p_t^G$ | 0.28* | 0.00 | 0.17* | 0.00 | 0.09* | 0.11* | 0.08* |
| $\Delta \log(p_t^F/p_t^G)$ | 0.22* | 0.04 | 0.04 | 0.06 | 0.07 | 0.04 | 0.03 |

Parmi les diverses variables considérées, le différentiel d'inflation conduit à une baisse de 6 de l'ordre de non-corrélation, ce qui signifie que $\Delta \log(p_{t-1}^E/p_{t-1}^G)$ apparaît prédéterminée pour l'écart u_t de la date présente. Ainsi un choc sur le différentiel d'inflation n'a qu'un effet instantané sur l'écart à P.P.A., mais pas d'effet sur les valeurs futures de cet écart.

Cette étude des propriétés de prédétermination devrait évidemment être poursuivie par une analyse des mesures de causalité entre les séries, mais cette étude est en dehors du but de cet article.

CONCLUSION

L'étude qui précède a deux buts: 1) montrer qu'une analyse descriptive fine peut fournir des renseignements de type structurel sur les relations stables existant entre séries et sur le sens dans lequel doivent être regardées ces relations, c'est-à-dire sur les variables prédéterminées, 2) obtenir une procédure généralisant la théorie de la cointégration pour le cas de séries stationnaires. Elle peut alors comme nous l'avons fait être appliquée à des séries transformées approximativement stationnaires ou l'être à des résidus de régressions. Ainsi on aurait pu examiner la codépendance entre les séries de modifications corrigées préalablement de leur tendance déterministe. Elle demande à être prolongée dans deux directions. L'une est appliquée et consiste à vérifier son fonctionnement sur d'autres types de séries; on pourra

par exemple consulter Kugler-Neusser (1990) pour une application à la parité des taux d'intérêt. L'autre théorique concerne le lien avec les méthodes d'analyse canonique sur modèles dynamiques et avec les représentations à facteurs [Ahn-Reinsel, 1990; Tsay-Tiao, 1985; Tias-Tsay, 1989; Gouriéroux-Monfort-Renault, 1991,b)].

ANNEXE

$$\begin{aligned}
 & \text{Comme } \sqrt{T} \xi_j(q-h) = \sqrt{T} \sum_{i=0}^n \alpha_i \hat{\gamma}_{ij}(q-h), \text{ nous en déduisons que:} \\
 & \text{Cov}_{as} [\sqrt{T} \xi_j(q-h), \sqrt{T} \xi_l(q-h')] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k \text{Cov}_{as} [\sqrt{T} (\hat{\gamma}_{ij}(q-h) - \gamma_{ij}(q-h)), \sqrt{T} (\hat{\gamma}_{kl}(q-h') \\
 & \quad - \gamma_{kl}(q-h'))] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k \sum_{u=-\infty}^{+\infty} [\gamma_{ij}(u) \gamma_{jl}(u+h-h') + \gamma_{il}(u+q-h') \gamma_{jk}(u-q+h)] \\
 &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k \gamma_{ik}(u) \right] \gamma_{jl}(u+h-h') \\
 &+ \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_{il}(u+q-h') \right] \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \gamma_{jk}(u-q+h) \right].
 \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse générale le processus admet une représentation MA(q) de sorte que $\gamma_{ij}(u) = 0, \forall i, j, \forall u \geq q+1$.

De plus sous l'hypothèse nulle, nous avons :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_i \gamma_{ij}(u) = 0, \forall j, \forall u \geq q-b+1.$$

Ces deux contraintes impliquent aussi des restrictions pour les valeurs négatives de u , puisque : $\Gamma(-h) = \Gamma(h)'$. Prenant en compte ces contraintes, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}_{as} [\sqrt{T} \xi_j(q-h), \sqrt{T} \xi_l(q-h')] \\
 &= \sum_{u=b-q}^{q-b} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k \gamma_{ik}(u) \right] \gamma_{jl}(u+h-h')
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- ABUAF N. et P. JORION (1990), «Purchasing Power Parity in the Long Run» *Journal of Finance*, 45, pp. 157-174.
- ADLER, M. et B. LEHMAN (1983), «Deviations from Purchasing Power Parity in the Long Run», *Journal of Finance*, 38, pp. 1471-1487.
- AHN, S. et G. REINSEL (1988), «Nested Reduced Rank Autoregressive Models for Multiple Time Series», *JASA*, 83, pp. 849-856.
- ARDENI, P. et D. LUBIAN (1988), «Cointegration and Trend Reversion in Purchasing Power Parity», Berkeley Discussion Paper.

- BAILLIE, R. et D. SELOVER (1987), «Cointegration and Models of Exchange Rate Determination», *International Journal of Forecasting*, 3, pp. 43-53.
- BALASSA, B. (1964), «The P.P.P. Doctrine: A Reappraisal», *Journal of Political Economy* 6, pp. 584-596.
- CASSEL, G. (1918), «Abnormal Deviations in International Exchanges», *Economic Journal*.
- COUDERT, V. (1987), «Asymétries et coopération économique européenne: le cas France-Allemagne», *Économie et Prospective Internationale* 37.
- DARBY, M. (1980), «Does Purchasing Power Parity Work?», *NBER* n° 607.
- DAVUTGAN, N. et J. PIPPENGER (1985), «Purchasing Power Parity Did Not Collapse during the 1970's», *American Economic Review* 75, pp. 1151-1158.
- DORNBUSCH, R. (1976), «Expectations and Exchange Rate Dynamics», *Journal of Political Economy* 84, pp. 1161-1176.
- EDISON, H.J. (1985), «Purchasing Power Parity: A Quantitative Reassessment of the 1920's Experience», *Journal of International Money and Finance*, 4, pp. 361-376.
- ENGLE, R. et C. GRANGER (1987), «Cointegration and Error Correction: Representation Estimation and Testing», *Econometrica* 55, pp. 251-276.
- FRENKEL, J.A. (1978), «Purchasing Power Parity», *Journal of International Economics* 8, pp. 169-191.
- FRENKEL, J.A. (1981), «The Collapse of P.P.P. during the 1970's», *European Economic Review*, 16, pp. 145-165.
- GENBERG, H. (1978), «Purchasing Power Parity under Fixed and Flexible Exchange Rates», *Journal of International Economics*, 8, pp. 247-276.
- GIOVANETTI, G. (1988), «The Purchasing Power Parity in the Long Run: An Application of Cointegration», Discussion Paper, University of Cambridge.
- GOURIÉROUX C. et A. MONFORT (1990), «Series temporelles et modèles dynamiques», *Economica*.
- GOURIÉROUX, C., MONFORT, A. et E. RENAULT (1991,a), «A General Framework for Factor Models». INSEE Discussion Paper 9107.
- GOURIÉROUX, C., MONFORT, A. et E. RENAULT (1991,b), «Test sur le noyau, l'image et le rang de la matrice des coefficients de régression d'un modèle linéaire multivarié», à paraître *Annales d'Économie et de Statistique*.
- GOURIÉROUX, C. et I. PEAUCELLE (1988), «Detecting a Long Run Relationship», CEPREMAP Discussion Paper.
- GRANGER, C. (1986), «Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48, pp. 213-228.
- GRANGER, C., et C. LIN (1990), «Conjugate Processes», U.C.S.D. Discussion Paper.

- HAKKIO, C. et L. LEIDERMAN (1986), «Intertemporal Asset Pricing and the Term Structure at Exchange Rates and Interest Rates», *European Economic Review*, 30, pp. 325-344.
- HANNAN, E.J. (1970), *Multiple Time Series*, Wiley.
- HEITGER, B. (1987), «Purchasing Power Parity and Flexible Exchange Rates. The Impact of Structural Change», *Weltwirtschaftliches Archiv*, 123, pp. 149-156.
- HENDRY, D. (1986), «Econometric Modeling with Cointegrated Variables: an Overview», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48.
- HUANG, R. (1987), «Expectations of Exchange Rates and Differential Inflation Rates: Further Evidence on Purchasing Power Parity in Efficient Markets», *Journal of Finance*, 42, pp. 69-78.
- HUIZINGA, J. (1987), «An Empirical Investigation at the Long Run Behaviour of Real Exchange Rates», *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy*, BRUNNER, K. et MELTZER, A. (Eds), 27, North Holland, Amsterdam, pp. 149-214.
- JOHANSEN, S. (1988), «Statistical Analysis of Cointegration Vectors», *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, pp. 231-254.
- KOEDIJK, K. et P. SCHOTMAN (1988), «The Behaviour of Real Exchange Rates under Fixed and Floating Exchange Rate Regimes», Discussion Paper Erasmus Univ.
- KRAVIS, I. (1984), «Comparative Studies of National Incomes and Prices», *Journal of Economic Literature* XXII, pp. 1-39.
- KRUGMAN, P. (1978), «Purchasing Power Parity and Exchange Rates: Another Look at the Evidence», *Journal of International Economics* 8, pp. 397-497.
- KUGLER, P. et K. NEUSSER (1990), «International Real Interest Rate Equalization», Université de Vienne Discussion Paper.
- LOTHIAN, J.R. (1987), «The Behavior of Real Exchange Rates», *International Journal of Forecasting* 3, pp. 17-42.
- MACDONALD, R., (1985), «Are Deviations from P.P.P. Efficient? Some Further Answers», *Weltwirtschaftliches Archiv*. 12, pp. 638-645.
- MAGEE, S.P. (1978), «Contracting and Spurious Deviations from Purchasing Power Parity», in FRENKEL et JOHNSON (Eds), *The Economics of Exchange Rates*, Reading, M.A...
- MATHIS, J. et J. MAZIER (1987), «Niveaux de coûts de production et performances extérieures des grands pays industrialisés», *Note de l'IREES* 12, pp. 1-41.
- OFFICER, L. (1978), «The Relationship Between Absolute and Relative Purchasing Power Parity», *Review of Economics and Statistics*, 60, pp. 562-568.
- PIPPENGER, J. (1982), «Purchasing Power Parity: An Analysis of Predictive Error», *Canadian Journal of Economics* 15, pp. 335-346.

- ROLL, R. (1979), «Violations of P.P.P. and their Implications for Efficient International Commodity Markets», in SARNAT et SZEGO (Eds), *International Trade and Finance*, Vol. 1., pp. 133-176, Cambridge.
- RUSH, M. et S. HUSTED (1985), «Purchasing Power Parity in the Long Run», *Canadian Journal of Economics*, 18, pp. 137-145.
- STOCKMAN, A. (1983), «Real Exchange Rates under Alternative Nominal Exchange-Rate Systems», *Journal of International Money and Finance* 2, pp. 147-166.
- TAYLOR, M. et P. MACMAHON (1988) «Long Run Purchasing Power Parity in the 1920's», *European Economic Review* 32, pp. 179-197.
- TIAO, G. et R. TSAY (1989), «Model Specification in Multivariate Time Series», *J.R.S.S. B*, 51, pp. 157-213.
- TSAY, R. et G. TIAO (1985), «Use of Canonical Analysis in Time Series Model Identification», *Biometrika*, 72, pp. 299-316.
- VELU, R., REINSEL, G. et D. WICHERN (1986) «Reduced Rank Models for Multiple Time Series», *Biometrika* 73, pp. 105-118.