« Note sur la théorie néo-keynésienne du producteur »

Marie Allard, Camille Bronsard et Gilles McDougall

L'Actualité économique, vol. 57, n° 2, 1981, p. 137-147.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: http://id.erudit.org/iderudit/600968ar

DOI: 10.7202/600968ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

NOTE SUR LA THÉORIE NÉO-KEYNÉSIENNE DU PRODUCTEUR

INTRODUCTION

Une théorie du producteur assujetti à des rationnements quantitatifs (ou théorie néo-keynésienne du producteur) ne saurait, en un sens, être nouvelle : d'un côté, elle est aussi vieille que la théorie usuelle puisque les *décisions de courte période* peuvent s'interpréter comme des décisions en présence d'un rationnement de la capacité de production (ce qui fonde la distinction entre la courbe de coût moyen à long terme et la courbe de coût moyen à court terme) ; de l'autre côté, une fois posée la théorie du consommateur avec rationnements quantitatifs [voir, par exemple, Bronsard et Salvas-Bronsard (1979), Neary et Roberts (1980)], on se doute bien qu'il existe un pendant naturel pour le producteur et que ce pendant peut se concevoir par simple dualité.

Ceci dit, le théoricien qui voudrait utiliser les propriétés de la statique comparative du producteur avec rationnements quantitatifs ou l'économètre qui voudrait imposer comme restrictions a priori les implications empiriques de cette théorie seraient sans doute mal venus de se reposer sur l'intuition mashallienne pour ce qui est de la validité de pareilles propriétés et de les postuler pour ainsi dire par extension. Il est donc bon qu'il existe quelque part une démonstration explicite de l'ensemble de ces résultats et qu'ils soient présentés sous une forme utile autant au théoricien qu'à l'économètre. C'est l'objet de cet article. On trouvera un exemple d'utilisation théorique dans Bronsard et Wagneur (1981). Il n'existe pas encore à notre connaissance d'utilisation économétrique mais on pourra replacer nos résultats dans la littérature économétrique en consultant Theil (1980) : en gros, la forme structurelle présentée ici contient les formes néo-classiques usuelles comme cas particuliers et s'en écarte pour permettre *l'erreur de court terme* ou le déséquilibre. On notera aussi un lien intéressant avec le calcul économique : notre forme structurelle permet l'estimation des *prix fictifs* des variables sous rationnement — en particulier du prix fictif du capital si l'on agrège les biens d'équipement en un seul et si leur rationnement formule une décision de court terme.

I— *Théorie néo-keynésienne du producteur*

Un équilibre keynésien est généralement interprété comme une situation où, ex ante, tous les marchés sont en offre excédentaire [(voir, par exemple, Malinvaud (1976)]. À ce déséquilibre ex ante correspond, ex post, un équilibre sous rationnements quantitatifs, l'équilibre keynésien. Ce dernier est donc caractérisé par du chômage et du rationnement des entreprises sur les marchés autres que ceux du travail. Ce que nous entendons par équilibre néo-keynésien, c'est une situation dans laquelle des agents économiques, autant consommateurs que producteurs, sont rationnés sur un ou plusieurs marchés. C'est pourquoi notre théorie néo-keynésienne du producteur se veut, en fait, une théorie du rationnement du producteur.

Le contexte institutionnel est donc différent du contexte néoclassique usuel. En effet, le producteur a non seulement une contrainte technologique mais aussi des contraintes de rationnements :

$$y_{-} \leq y \leq y^{+}, \tag{1}$$

où y_j symbolise l'extrant j s'il est positif ou l'intrant j s'il est négatif.

Pour fixer les idées, partitionnons le vecteur y en $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ et supposons que les contraintes (1) sont opératoires seulement pour les biens du groupe 1 [1]. On aura [2] :

$$y_1 = \bar{y}_1. \tag{2}$$

Le problème du producteur est donc de maximiser ses profits en tenant compte de la contrainte de rationnement (2) et d'une contrainte technologique :

$$g(y) \leq 0. \tag{3}$$

En se restreignant aux productions techniquement efficaces, la fonction de production s'écrit :

$$g(y) = 0.$$

La fonction g possède les propriétés usuelles. Elle est différentiellement strictement croissante et différentiellement strictement quasi-convexe. Symboliquement, on peut écrire [3] :

1. Le vecteur y_1 est un vecteur à n_1 composantes, y_2 à n_2 composantes, y à $n = n_1 + n_2$ composantes.

2. Ceci suppose qu'une partie du problème du producteur a déjà été résolue par le théorème de Kuhn-Tucker. Les contraintes (2) impliquent qu'une des bornes de la contrainte (1) est opératoire mais ne spécifient pas laquelle.

3. g_y désigne le gradient de la fonction g, G la hessienne de g.

$H1 : g \in C_2$

$H2 : g_y >> 0$

$H3 : \xi' G\xi > 0$ pour $\xi \neq 0, \xi' g_y = 0$.

Le problème du producteur revient à maximiser le Lagrangien suivant[4] :

$$L(y,\lambda,\mu_1) = p'y - \lambda g(y) - \mu_1'[y_1 - \bar{y}_1]. \tag{4}$$

L'équilibre du producteur se caractérise par :

$$p_1' - \lambda_{y1}' - \mu_1' = 0 \tag{5}$$

$$p'_2 - \lambda_{y2}' = 0 \tag{6}$$

$$-g(y) = 0 \tag{7}$$

$$-y_1 + \bar{y}_1 = 0 \tag{8}$$

Le système (5) à (8) est un système de $n + n_1 + 1$ équations à $2(n + n_1) + 1$ variables, soit y_1, y_2, λ, μ_1 d'une part et, p_1, p_2, $\bar{y}_1$ d'autre part. Il serait intéressant, à ce stade-ci, de se demander si on peut exprimer les premières en fonction des secondes.

Proposition 1: Sous les hypothèses *H1, H2, H3* les fonctions d'offre néo-keynésienne existent et sont continûment dérivables (pour la démonstration, voir l'annexe 1).

Les fonctions d'offre existent donc et peuvent s'écrire :

$$y_1 = \bar{y}_1 \tag{9}$$

$$y_2 = n_2(p_1, p_2, \bar{y}_1). \tag{10}$$

On a aussi

$$\lambda = \lambda(p_1, p_2, \bar{y}_1) \tag{11}$$

$$\mu_1 = \mu_1(p_1, p_2, \bar{y}_1). \tag{12}$$

Par une application du théorème des fonctions implicites (c'est-à-dire en substituant le système (9) à (12) dans le système (5) à (8), on obtient :

$$\lambda(p_1, p_2, \bar{y}_1)\, g_{y1}\, (\bar{y}_1, n_2(p_1, p_2, \bar{y}_1)) + \mu_1'(p_1, p_2, \bar{y}_1) \equiv p_1 \tag{13}$$

$$\lambda(p_1, p_2, \bar{y}_1)\, g_{y2}\, (\bar{y}_1, n_2(p_1, p_2, \bar{y}_1)) \equiv p_2 \tag{14}$$

$$g(\bar{y}_1, n_2(p_1, p_2, \bar{y}_1)) \equiv 0 \tag{15}$$

$$y_1 \equiv \bar{y}_1 \tag{16}$$

4. Ceci est possible car la jacobienne des contraintes est de rang maximal.

pour tout $(p_1, p_2, \bar{y}_1)$ appartenant au domaine où les fonctions sont définies. Ces identités et leurs dérivées vont nous permettre de caractériser la matrice jacobienne des fonctions d'offre.

Soit

$$J = \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial p_1 & \partial y_1/\partial p_2 & \partial y_1/\partial \bar{y}_1 \\ \partial y_2/\partial p_1 & \partial y_2/\partial p_2 & \partial y_2/\partial \bar{y}_1 \\ \partial \lambda/\partial p_1 & \partial \lambda/\partial p_2 & \partial \lambda/\partial \bar{y}_1 \\ \partial \mu_1/\partial p_1 & \partial \mu_1/\partial p_2 & \partial \mu_1/\partial \bar{y}_1 \end{bmatrix}$$

cette matrice où :

$[\partial y_1/\partial p_1]$, $[\partial y_1/\partial p_2]$, $[\partial y_2/\partial p_1]$ et $[\partial y_2/\partial p_2]$ sont des matrices d'effets-prix contraints. $[\partial y_2/\partial \bar{y}_1]$ est une matrice d'effets de débordement.

En dérivant les identités (13) à (16) par rapport à p_1, p_2 et $\bar{y}_1$, on trouve :

$$\begin{bmatrix} \lambda G_{11} & \lambda G_{12} & g_{y1} & I_{n1} \\ \lambda G_{21} & \lambda G_{22} & g_{y2} & 0 \\ g'_{y1} & g'_{y2} & 0 & 0 \\ I_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial p_1 & \partial y_1/\partial p_2 & \partial y_1/\partial \bar{y}_1 \\ \partial y_2/\partial p_1 & \partial y_2/\partial p_2 & \partial y_2/\partial \bar{y}_1 \\ \partial \lambda/\partial p_1 & \partial \lambda/\partial p_2 & \partial \lambda/\partial \bar{y}_1 \\ \partial \mu_1/\partial p_1 & \partial \mu_1/\partial p_2 & \partial \mu_1/\partial \bar{y}_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Remarque :

La différentielle de (9) et (10) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} dy_1 &= d\bar{y}_1 \\ dy_2 &= \left[\frac{\partial y_2}{\partial p_1}\right] dp_1 + \left[\frac{\partial y_2}{\partial p_2}\right] dp_2 + \left[\frac{\partial y_2}{\partial \bar{y}_1}\right] d\bar{y}_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Pour simplifier l'écriture, appelons T_{ij}, la matrice $\left[\frac{\partial y_i}{\partial p_j}\right]$, $i = 1, 2$;

$j = 1, 2$ et $\tilde{V}_{i1}$, la matrice $\left[\frac{\partial y_i}{\partial y_1}\right]$ $i = 1, 2$. Le système (18) s'écrit :

$$\begin{aligned} dy_1 &= d\bar{y}_1 \\ dy_2 &= T_{21}dp_1 + T_{22}dp_2 + \tilde{V}_{21}d\bar{y}_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Nous allons maintenant utiliser (17) pour caractériser les T_{ij} et les V_{i1}.

Proposition 2 : Sous les hypothèses $H1$, $H2$, $H3$, les dérivées des fonctions d'offre néo-keynésienne se caractérisent par les propriétés suivantes :

$$T_{11} \equiv 0 \tag{20}$$
$$T_{12} \equiv 0 \tag{21}$$
$$\tilde{V}_{11} \equiv I_{n\,1} \tag{22}$$
$$T_{21} \equiv 0 \tag{23}$$
$$T_{22} \equiv T'_{22} \tag{24}$$
$$T_{22}p_2 \equiv 0 \tag{25}$$
$$\lambda g'_{y1} + p'_2\tilde{V}_{21} \equiv 0 \tag{26}$$
$$\xi' T_{22}\xi > 0 \text{ pour } \xi \neq 0, \xi \neq \Theta p_2, \Theta \in \mathrm{R} \tag{27}$$

(La démonstration des propriétés (20) à (26) est évidente par le système (17). Pour la démonstration de la propriété (27), voir l'annexe 2).

Du point de vue de l'économètre, la proposition 2 est importante car les propriétés du système (19) sont presque toutes observables. La propriété (26) pourrait lui causer un problème. En effet, reprenons les équations (5) et interprétons-les :

$$-\lambda g'_{y1} = \mu'_1 - p'_1. \tag{28}$$

Les composantes du vecteur p_1 sont les prix des biens du groupe 1, c'est-à-dire les prix *observables* des biens rationnés. Les composantes du vecteur μ_1 sont les variables duales associées à chacune des contraintes de rationnement du producteur. Elles mesurent l'effet marginal du rationnement sur le profit du producteur à l'équilibre. On peut donc interpréter le vecteur $\lambda g'_{y1}$ comme étant les *prix fictifs* (ou les prix « personnels » des biens du groupe 1. Appelons ce prix $\tilde{p}_1$. (28) peut s'écrire :

$$\mu'_1 = p'_1 - \tilde{p}'_1. \tag{29}$$

Le vecteur μ_1 apparaît alors comme un péage fictif « personnalisé ». Mais (26) s'écrit aussi :

$$p'_2\tilde{V}_{21} \equiv -\lambda g'_{y1} = -\tilde{p}'_1. \tag{30}$$

Or $\tilde{p}_1$ n'est pas observable[5].

Revenons donc au système (19) où, en tenant compte de (23), on a :

$$dy_2 = T_{22}dp_2 + \tilde{V}_{21}d\bar{y}_1. \tag{31}$$

Additionnons et soustrayons à (31) le terme $\beta_2\tilde{p}'_1 d\bar{y}_1$, où β_2 est choisi de telle manière que $\beta'_2 p_2 \equiv 1$. On aura :

$$dy_2 = T_{22}dp_2 + (\tilde{V}_{21} + \beta_2\tilde{p}'_1)\, d\bar{y}_1 - \beta_2\tilde{p}'_1\, d\bar{y}_1. \tag{32}$$

Définissons $\bar{V}_{21} = \tilde{V}_{21} + \beta_2\tilde{p}_1$ et rappelons que $-\beta_2\tilde{p}'_1\, dy_1 = \beta_2 p'_2\, dy_2$.

5. Toutefois, on connaît p_2 et on peut trouver $\tilde{V}_{21}$ par l'estimation de l'équation (19). Par l'identité (30), on peut donc calculer la valeur des prix fictifs $\tilde{p}_1$. Par exemple, dans le cas où les biens du groupe 1 sont des biens d'équipement, l'identité (30) peut servir à calculer le *shadow price* des biens d'équipement.

Alors, $$dy_2 = T_{22}dp_2 + \overline{V}_{21}\, d\overline{y}_1 - \beta_2 p_2'\, dy_2. \tag{33}$$

et $$dy_1 = d\overline{y}_1$$

Nous allons maintenant caractériser les coefficients de la forme structurelle (33).

Proposition 3 : Sous les hypothèses $H1$, $H2$ et $H3$, les coefficients de (33) se caractérisent par les propriétés suivantes :

$$T_{11} \equiv 0 \tag{20}$$
$$\underset{\sim}{T}_{12} \equiv 0 \tag{21}$$
$$\overline{V}_{11} \equiv I_{n_1} \tag{22}$$
$$T_{21} \equiv 0 \tag{23}$$
$$T_{22} \equiv T_{22}' \tag{24}$$
$$T_{22}p_2 \equiv 0 \tag{25}$$
$$p_2'\overline{V}_{21} \equiv 0 \tag{26'}$$
$$p_2'\beta_2 \equiv 1 \tag{34}$$
$$\xi' T_{22}\xi > 0 \text{ pour } \xi \neq 0,\ \xi \neq \Theta p_2,\ \Theta \in \mathrm{R} \tag{27}$$

[Pour la démonstration des propriétés (20) à (25) et (27), voir la proposition 2. Pour celle de la propriété (26′), voir l'annexe 3].

La nouvelle propriété (26′) est alors observable. Le terme β_2 peut s'interpréter comme l'effet marginal d'une variation du revenu réel affecté aux biens du groupe 2 sur l'utilisation de ces biens. Ceci ressemble au concept d'effet-revenu chez le consommateur.

Les équations (29) sont importantes en ce sens qu'elles laissent entrevoir la possibilité d'un lien entre un comportement réel et un comportement fictif. Serait-il possible de « donner » des prix fictifs au producteur de telle façon qu'il se comporte comme s'il faisait face aux rationnements initiaux ? La réponse est oui. Par construction, la fonction d'offre néo-classique est un difféomorphisme global. On peut toujours trouver un système de prix $\tilde{p}$ fictifs tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1\,(\tilde{p}) &\equiv \overline{y}_1 \\ \tilde{\eta}_2\,(\tilde{p}) &\equiv \eta_2\,(p, \overline{y}_1). \end{aligned} \tag{35}$$

Ces équations permettent de faire le lien entre l'équilibre néo-keynésien et l'équilibre néo-classique fictif qui est « derrière ». En effet, appelons $\tilde{Y}_{ij}$ la matrice des dérivées de $\tilde{\eta}_i(\tilde{p})$ par rapport à $\tilde{p}_j$ (pour i = 1, 2, j = 1, 2). En différenciant le système (35) :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{11}d\tilde{p}_1 + \tilde{Y}_{12}d\tilde{p}_2 &\equiv d\overline{y}_1 \\ \tilde{Y}_{21}d\tilde{p}_1 + \tilde{Y}_{22}d\tilde{p}_2 &\equiv T_{22}dp_2 + \tilde{V}_{21}d\overline{y}_1. \end{aligned} \tag{36}$$

Mais par (6) et en définissant $\tilde{p}_2' = \lambda g_{y2}'$, on a $d\tilde{p}_2. = dp_2$. $d\tilde{p}_1$ est toujours non observable. En substituant dans (36):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{11}d\tilde{p}_1 + \tilde{Y}_{12}dp_2 &\equiv d\bar{y}_1 \\ \tilde{Y}_{21}d\tilde{p}_1 + \tilde{Y}_{22}dp_2 &\equiv T_{22}dp_2 + \tilde{V}_{21}d\bar{y}_1. \end{aligned} \tag{37}$$

Comme $\tilde{Y}_{11}$ s'inverse, (37) peut aussi s'écrire:

$$\tilde{Y}_{21}(\tilde{Y}_{11}^{-1}d\bar{y}_1 - \tilde{Y}_{11}^{-1}\tilde{Y}_{12}dp_2) + \tilde{Y}_{22}dp_2 \equiv T_{22}dp_2 + \tilde{V}_{21}d\bar{y}_1. \tag{38}$$

En regroupant les termes, (38) devient:

$$(T_{22} - \tilde{Y}_{22} + \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1}\tilde{Y}_{12})\, dp_2 + (\tilde{V}_{21} - \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1})\, d\bar{y}_1 \equiv 0. \tag{39}$$

Comme cette identité tient pour des dp_2 et $d\bar{y}_1$ quelconques

$$T_{22} \equiv \tilde{Y}_{22} - \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1}\tilde{Y}_{12} \tag{40}$$
$$\tilde{V}_{21} \equiv \tilde{Y}_{21}\tilde{Y}_{11}^{-1}. \tag{41}$$

Les propriétés s'appliquant aux matrices T_{22} et $\tilde{V}_{21}$ s'appliquent également aux matrices néo-classiques fictives correspondantes. Inversement, (40) et (41) «expliquent» T_{22} et $\tilde{V}_{21}$.

II— *Conclusion*

Selon l'interprétation que l'on donne aux contraintes (1), la théorie que l'on a appelée néo-keynésienne pourra être aussi bien une théorie du court terme et du long terme qu'une théorie des biens publics. En effet, imaginons que les contraintes (1) établissent la fixité, à court terme, de certains biens que l'on pourrait qualifier d'équipement, par exemple. Dans ce cas, la décision de court terme est une décision portant sur les conditions d'emplois d'une capacité de production déjà installée. Les variables duales μ_1 s'interpréteront alors comme la différence entre le coût marginal de long terme et celui de court terme (à l'équilibre).

Supposons maintenant que les contraintes (1) établissent la quantité (fixe si $y_- = y^+$) disponible *pour tous et chacun des producteurs* d'un ou de plusieurs biens. On peut vraisemblablement qualifier ces biens de publics. Dans le cas où ces biens ne sont pas échangés sur un marché (donc $p_1 = 0$), les variables duales μ_1 représentent la valeur de ces biens pour le producteur. La valeur de ces variables duales à l'équilibre, serait la même que la valeur des contributions qu'un organisme public aurait à fixer pour obtenir un équilibre politicoéconomique.

D'autres interprétations sont possibles. Par exemple, il pourrait s'agir d'une théorie des rendements croissants. Interprétons les biens du groupe 1 comme les biens produits par le producteur. Les contraintes (1) seraient alors déterminées par un organisme chargé d'établir une règle de gestion optimale pour les entreprises à rendements croissants. On obtient alors une règle qui est près de celle proposée par Malinvaud (1971).

Marie ALLARD
Camille BRONSARD
Gilles McDOUGALL*/**

ANNEXE 1

Preuve de la proposition 1

Les équations du système (5) à (8) sont des fonctions de classe c^1 sur un ouvert et possèdent une solution $(y_1^0, y_2^0, \lambda^0, \mu_1^0, p_1^0, p_2^0, \bar{y}_1^0)$. Soit la matrice G^*, la dérivée du système (5) à (8) par rapport à y_1, y_2, λ et μ_1 au point optimal :

$$G^* = \begin{bmatrix} -\lambda G_{11} & -\lambda G_{12} & -g_{y1} & -I_{n1} \\ -\lambda G_{21} & -\lambda G_{22} & -g_{y2} & 0 \\ -g'_{y1} & -g'_{y2} & 0 & 0 \\ -I_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si cette matrice est de rang maximal, alors le théorème des fonctions implicites nous assure l'existence des fonctions recherchées au voisinage du point $(p_1^0, p_2^0, \bar{y}_1^0)$. Supposons que cette matrice ne soit pas de rang maximal. Alors il existe un vecteur $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \neq 0$, avec $\alpha \in R^{n1}$, $\beta \in R^{n2}$, $\gamma \in R$ et $\delta \in R^{n1}$, tel que :

$$\begin{bmatrix} -\lambda G_{11} & -\lambda G_{12} & -g_{y1} & -I_{n1} \\ -\lambda G_{21} & -\lambda G_{22} & -g_{y2} & 0 \\ -g'_{y1} & -g'_{y2} & 0 & 0 \\ -I_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0$$

* Les auteurs sont respectivement étudiante au Ph.D., professeur et étudiant au Ph.D. au Département de science économique de l'Université de Montréal.

**Les auteurs remercient Sébastien Ahado pour les discussions intéressantes qu'ils ont eues avec lui.

Ceci implique :

$$
\begin{aligned}
&-I_{n1}\alpha &&= 0 &&\text{(A.1)}\\
&-g'_{y1}\alpha - g'_{y2}\beta &&= 0 &&\text{(A.2)}\\
&-\lambda G_{21}\alpha - \lambda G_{22}\beta - g_{y2}\gamma &&= 0 &&\text{(A.3)}\\
&-\lambda G_{11}\alpha - \lambda G_{12}\beta - g_{y1}\gamma - I_{n1}\delta &&= 0 &&\text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

De (A.1), on peut tirer : $\alpha = 0$. En prémultipliant (A.3) par β' et en tenant compte du fait que $\beta' g_{y2} = 0$ (par (A.2)), on trouve

$$-\lambda\beta' G_{22}\beta = 0 \qquad \text{(A.5)}$$

Or, par $H3$, $\boldsymbol{\xi}' G \boldsymbol{\xi} > 0$ pour $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ et $\boldsymbol{\xi}' g_y = 0$.

Ainsi, en particulier,

$$[\boldsymbol{\xi}_1' \ \boldsymbol{\xi}_2'] \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{bmatrix} > 0 \text{ pour } \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ et } [\boldsymbol{\xi}_1' \ \boldsymbol{\xi}_2'] \begin{bmatrix} g_{y1} \\ g_{y2} \end{bmatrix} = 0.$$

Fixons $\boldsymbol{\xi}_1 = 0$. On aura

$$\boldsymbol{\xi}_2' G_{22} \boldsymbol{\xi}_2 > 0 \text{ pour } \boldsymbol{\xi}_2 \neq 0 \text{ et } \boldsymbol{\xi}_2' g_{y2} = 0. \qquad \text{(A.6)}$$

Donc (A.5) n'est possible que si $\beta = 0$. Ce qui entraîne $\gamma = 0$ [par (A.3)] et $\delta = 0$ [par (A.4)], d'où la contradiction.

ANNEXE 2

Preuve de la propriété (27)

Par (17), on a

$$\lambda G_{21} T_{12} + \lambda G_{22} T_{22} + g_{y2} [\partial\lambda/\partial p_2] \equiv I_{n2}.$$

En prémultipliant par T'_{22} et en tenant compte de (21)

$$\lambda T'_{22} G_{22} T_{22} + T'_{22} g_{y2} [\partial\lambda/\partial p_2] \equiv T'_{22}.$$

De plus, les équations (6), (24) et (25) impliquent :

$$T'_{22} g_{y2} = 0.$$

D'où $$\lambda T'_{22} G_{22} T_{22} = T'_{22}.$$

On a aussi :

$$\lambda \boldsymbol{\xi}_2' T'_{22} G_{22} T_{22} \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_2' T'_{22} \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_2' T_{22} \boldsymbol{\xi}_2 \qquad \text{(A.7)}$$

Définissons $\psi_2 = T_{22}\boldsymbol{\xi}_2$ où ψ_2 est tel que $p_2'\psi_2 = 0$. (A.7) devient :

$$\lambda \psi_2' G_{22} \psi_2 = \boldsymbol{\xi}_2' T_{22} \boldsymbol{\xi}_2. \qquad \text{(A.8)}$$

Par (A.6), le terme de gauche est positif si $\psi_2 \neq 0$. Or $\psi_2 \neq 0 \Rightarrow T_{22}\boldsymbol{\xi}_2 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_2 \neq \Theta p_2$ car T_{22} est de rang $n_2 - 1$. En effet, le rang de T_{22} est au plus égal à $n_2 - 1$ car $T_{22} p_2 \equiv 0$. Nous allons maintenant montrer que le rang de T_{22} est au moins égal à $n_2 - 1$.

Pour cela, considérons le système (17). De ce dernier et en tenant compte de (21), on a:

$$\lambda G_{22} T_{22} + g_{y2}\,[\partial\lambda/\partial p_2] \equiv I_{n2}$$

ou

$$[\lambda G_{22}\ g_{y2}] \begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix} \equiv I_{n2} \tag{A.9}$$

Ceci entraîne que la matrice $\begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix}$ de dimension $(n_2 + 1) \times n_2$ est de rang maximal, c'est-à-dire, de rang n_2.

Remarque: Étant donné que la matrice $\begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix}$ n'est pas carré, le fait qu'elle soit de rang maximal implique deux résultats différents (suivant que l'on considère ses lignes ou ses colonnes):

a) $\exists\ \alpha \neq 0, \alpha \in R^{n2+1}$, tel que $\alpha' \begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix} = 0$

b) $\nexists\ \beta \neq 0, \beta \in R^{n2}$, tel que $\begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix}\beta = 0.$

Supposons que T_{22} soit de rang $n_2 - 2$. Alors, il existe deux vecteurs linéairement indépendants Φ_1 et $\Phi_2 \neq 0$, avec $\Phi_1, \Phi_2 \in R^{n2}$ tels que:

$$\Phi_1' T_{22} = 0 \text{ et } \Phi_2' T_{22} = 0.$$

Or, $\Phi_1' T_{22} = 0 \Leftrightarrow [\Phi_1'\ 0] \begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix} = 0$

et, $\Phi_2' T_{22} = 0 \Leftrightarrow [\Phi_2'\ 0] \begin{bmatrix} T_{22} \\ \partial\lambda/\partial p_2 \end{bmatrix} = 0.$

D'où la contradiction. Ainsi, par (A.8), $\xi_2' T_{22} \xi_2 > 0$ pour $\xi_2 \neq \Theta p_2$.

ANNEXE 3

Preuve de la propriété (26')

Nous avons défini $\overline{V}_{21}$ comme suit:

$$\overline{V}_{21} = V_{21} + \beta_2 \tilde{p}_1.$$

Ainsi

$$p_2' \overline{V}_{21} = p_2' V_{21} + p_2' \beta_2 \tilde{p}_1.$$

Or, en tenant compte de (30) et (34), on trouve directement la propriété (26').

BIBLIOGRAPHIE

BRONSARD, C., SALVAS-BRONSARD, L., (1979), « Sur l'estimation d'un système complet de demande sous rationnements quantitatifs », *L'Actualité Économique,* pp. 286-302.

BRONSARD, C., WAGNEUR, E., (1981), « Second rang et déséquilibre », *Cahiers du séminaire d'Économétrie,* à paraître.

MALINVAUD, E., (1971), *Leçons de théorie microéconomique,* Dunod, Paris.

MALINVAUD, E., (1976), *The Theory of Unemployment Reconsidered,* Yrjo Lectures at the University of Helsinki, Basil Blackwell, Oxford.

NEARY, J.P., ROBERTS, K.W.S. (1980), « The Theory of Household Behavior under Rationing », *European Economic Review,* 13, pp. 1-18.

THEIL, H., (1980), *The System-Wide Approach to Microeconomics,* The University of Chicago Press, Chicago.