« De la variété de Patinkin-Malinvaud à l’optimum macroéconomique de court terme »

Camille Bronsard et Lise Salvas-Bronsard

L'Actualité économique, vol. 68, n° 1-2, 1992, p. 205-224.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 68, n[os] 1 et 2, mars et juin 1992

DE LA VARIÉTÉ DE PATINKIN-MALINVAUD À L'OPTIMUM MACROÉCONOMIQUE DE COURT TERME*

Camille BRONSARD
Université de Montréal
Lise SALVAS-BRONSARD
Université de Montréal

RÉSUMÉ — En éliminant certaines des conditions nécessaires à l'équilibre walrasien, on obtient une variété différentiable que nous avons appellée ici variété de Patinkin-Malinvaud puisque cette façon de faire revient à prendre la méthodologie de ces auteurs. En plus de fournir un modèle simple qui soit assez souple pour contenir, sans rupture structurelle, autant l'équilibre walrasien temporaire que l'équilibre keynésien, autant la théorie des cycles réels que celle de la stabilité keynésienne (du moins dans leur principe), elle permet d'étudier l'optimalité des équilibres mentionnés plus haut dans le contexte qui leur est propre, c'est-à-dire le contexte temporaire et ce du point de vue du premier comme du second rang.

ABSTRACT — When some necessary Walrasian conditions are eliminated, a differentiable manifold is obtained. Here, it is called the Patinkin-Malinvaud manifold since our device to define it amounts to recover the methodology of these authors. Such a methodology is sufficient to contain in the same logical structure the temporary Walrasian equilibrium, the Keynesian equilibrium, the real business cycle theory and the Keynesian stability theory (at least in their principle). Moreover, the optimality of the above equilibria is studied in their natural context, that is, the temporary one, from the first best viewpoint and the second best viewpoint.

* Plusieurs éléments de cet article proviennent de nos discussions avec Henry Tulkens (CORE). Sa conception (et même son plan) ont aussi été discutés avec Robert Deschamps (CORE), J.J. Laffont (GREMAQ), Philippe Michel (Paris I), Michel Moreaux et Yves Rochet (tous deux du GREMAQ). Des versions préliminaires ont été présentées au CEPREMAP, au GREQE, aux Journées de l'AFSE et à l'INSEE. Nous avons alors bénéficié des critiques de Jean-Pascal Bénassy (CEPREMAP), Louis-André Gérard-Varet (GREQE), Pierre-Yves Hénin et Guy Laroque (INSEE). Enfin les critiques d'un arbitre anonyme ont conduit à restructurer ce texte et incitent à plusieurs extensions dont certaines seront indiquées ici. Les auteurs sont seuls responsables des erreurs éventuelles. Ils reconnaissent le soutien financier du CRSH, du FCAR, de l'Université de Montréal, du CREST et du CEPREMAP.

INTRODUCTION

Malinvaud (1982, page 20) attribue à Patinkin (1965) l'idée d'étudier l'équilibre keynésien et l'équilibre walrasien «à l'intérieur d'une même structure logique». Dans son contexte (pages 15 et suivantes), cette structure logique est celle d'une variété différentiable (on étudie une surface dans un espace à trois dimensions, celui de la production, du niveau des prix et du taux d'intérêt). Cette façon de faire n'a pas seulement valeur de synthèse. Nous allons montrer ici qu'en plus de fournir un modèle simple qui soit assez souple pour contenir, sans rupture structurelle, autant l'équilibre walrasien temporaire que l'équilibre keynésien[1], autant la théorie des cycles réels[2] que celle de la stabilité keynésienne[3] (du moins dans leur principe), elle permet d'étudier l'optimalité des équilibres mentionnés plus haut dans le contexte qui leur est propre, le contexte temporaire, et du point de vue du premier comme du second rang.

Pour cela, on se donne d'abord une représentation du consommateur et du producteur en contexte temporaire en les dotant de fonctions d'anticipation (qui n'excluent pas l'hypothèse d'anticipations rationnelles) et on définit l'équilibre walrasien correspondant. On généralise ensuite cette notion en éliminant certaines de ses conditions nécessaires. On se trouve ainsi à étudier une variété différentiable que nous avons donc appelée variété de Patinkin-Malinvaud. On montre alors qu'il existe trois sortes de multiplicateurs sur cette variété et que tous trois concourent à caractériser en particulier un «optimum macroéconomique de court terme». Cet optimum macroéconomique peut s'inscrire dans un optimum économique «temporaire» — il se caractérise comme un agrégat des conditions de ce dernier. Ces divers points font l'objet de la section 1.

Dans la section 2, nous donnons d'abord une interprétation géométrique de ce qui précède et montrons en utilisant cette représentation que la politique économique (et même l'évolution économique) peut se concevoir comme une procédure MDP. Nous généralisons ensuite cette procédure pour permettre d'incorporer les pouvoirs de monopole et tenir compte des tensions entre les différents agents.

Dans un cas comme dans l'autre, la procédure se fractionne en deux sous-procédures, l'une d'ajustement macroéconomique, l'autre d'ajustement microéconomique. Ces deux sous-procédures peuvent s'interpréter de manière normative ou positive, hiérarchique ou simultanée, visqueuse ou instantanée. On dispose alors du modèle décrit au début, c'est-à-dire d'un modèle qui, parce qu'il fait abstraction

1. C'est aussi l'objectif poursuivi (et atteint) par l'approche des équilibres à prix fixes. Les références classiques sont celles de Clower (1965); Barro et Grossman (1971), Bénassy (1976, 1982), Drèze (1975), Malinvaud (1977). Laroque (1986) en donne une interprétation et une extension «macroéconomique» d'une remarquable densité. Sa démarche peut aussi souvent s'interpréter comme l'analyse d'une variété de Patinkin-Malinvaud avec «bords» — ces bords venant du rationnement. Ici, nous ne ferons pas appel systématiquement au rationnement quantitatif et accepterons d'autres causes de divergence entre TMS et TMT.

2. L'article initial est de Long et Plosser (1983). On trouvera une synthèse de cette littérature dans Plosser (1989).

3. On trouvera un examen approfondi dans Drèze (1990).

de certaines contraintes institutionnelles, recoupe de nombreux autres modèles et y ajoute la dimension de l'optimum.

1. LA VARIÉTÉ DE PATINKIN-MALINVAUD

1.1 *Le consommateur*

Les préférences et les anticipations du consommateur sont représentables par une fonction d'utilité induite ou temporaire[4]. Cette fonction (on la notera u) est le résultat de la composition d'une fonction d'utilité intertemporelle et d'une fonction d'anticipation de quantités futures (voir Annexe, partie a). Elle a pour arguments les quantités x_0 d'actif financier, x_1 de bien de consommation courante et x_2 de service de travail. x_0 peut être positif ou négatif, x_1 est toujours positif, x_2 toujours négatif. Par rapport à ces variables, la fonction u prend les propriétés usuelles :

a) $u \,\varepsilon\, C^2$ sur un ouvert contenant (x_0, x_1, x_2)

b) $D\, u(x_0, x_1, x_2) > 0$ (monotonicité forte)

c) $\zeta' \, [D^2 u] \, \zeta < 0$ pour tout vecteur $\zeta \neq 0$ orthogonal à Du (quasi concavité forte).

Cette dernière propriété revient à dire que la surface d'indifférence

$$\bar{u} = u(x_0, x_1, x_2) \tag{1.1.1}$$

est strictement convexe parce que possédant une hessienne définie positive en tout point.

Considérons le taux marginal de substitution $\frac{u_2}{u_0}$. Par hypothèse il est positif. Ceci implique que même en situation de sous-emploi, un consommateur attribue une valeur positive à son loisir. Cette dernière phrase revient à dire que le consommateur demande un taux de salaire positif pour travailler.

1.2. *Le producteur*

De même le producteur se représente par une fonction de production temporaire

$$f(y_0, y_1, y_2) = 0 \tag{1.2.1}$$

Le facteur financier y_0 apparaît dans cette fonction parce que le producteur doit financer «l'excès de travail utilisé par rapport à la production courante», c'est-à-dire son investissement (voir annexe, partie b où l'actif financier apparaît comme la contrepartie d'un bien d'équipement). La fonction f jouit de propriétés analogues

---

4. Il faut se garder de confondre myope et temporaire. Dans un contexte temporaire, précisément parce qu'il est doté de fonction d'anticipation, le consommateur envisage tout l'avenir et procède à une véritable optimation intertemporelle par rapport à l'avenir qu'il conçoit. La représentation qu'il se fait de l'avenir n'est pas nécessairement compatible avec celle des autres agents.

aux propriétés a), b) et c) précédentes. Elle est fortement quasi-convexe en (y_0, y_1, y_2).

On remarquera que, du seul fait qu'il soit doté d'anticipations, le producteur devient «actif», c'est-à-dire n'est plus nécessairement la simple émanation [des désirs] du consommateur.

1.3. *La conservation des quantités*

Les conditions de conservation des quantités s'écrivent

$$x_0 = y_0 + \omega_0 \tag{1.3.1}$$

$$x_1 = y_1 + \omega_1 \tag{1.3.2}$$

$$x_2 = y_2 \tag{1.3.3}$$

où ω_0 et ω_1 sont des dotations initiales données. Il n'y a pas de ressources initiales en travail. On écrira (1.3.1) à (1.3.3) sous forme vectorielle

$$x = y + \omega \tag{1.3.4}$$

1.4. *L'équilibre walrasien*

Un équilibre walrasien est alors un état où il existe un système de prix $p = (p_0, p_1, p_2)$ strictement positif et tel que

a) $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{p_1}{p_0}, \dfrac{u_2}{u_0} = \dfrac{p_2}{p_0}, p' x = p' y + p' \omega$

b) $\dfrac{f_1}{f_0} = \dfrac{p_1}{p_0}, \dfrac{f_2}{f_0} = \dfrac{p_2}{p_0}, f(y_0, y_1, y_2) = 0$

c) $x = y + \omega$

On a neuf équations pour huit inconnues (seuls importent les prix relatifs) mais, par la loi de Walras, on prouve facilement que l'une des équations est redondante. On a ainsi zéro degré de liberté.

1.5. *La variété de Patinkin-Malinvaud*

Pour définir une variété différentiable qui contienne l'équilibre walrasien et d'autres types d'équilibre il suffit de retrancher certaines équations du système walrasien. Admettons comme seule contrainte institutionnelle l'existence de prix à la consommation, c'est-à-dire réduisons-nous aux seules équations

a) $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{p_1}{p_0}$ (1.5.1)

b) $f(y_0, y_1, y_2) = 0$ (1.5.2)

c) $x = y + \omega$ (1.5.3)

On a maintenant cinq équations pour sept inconnues, donc deux degrés de liberté. Intuitivement, on a une surface dans un certain espace. Cette surface est non-vide puisqu'elle contient au moins le point walrasien. Par ailleurs on démontre facilement que la jacobienne de (1.5.1)-(1.5.3) est de rang cinq en tout point. On a donc bien une variété différentiable de dimension deux et de classe C^1. Nous l'appellerons variété de Patinkin-Malinvaud: ce sont ces auteurs qui ont défini l'approche résumée plus haut (voir Malinvaud, 1982, page 15 et suivantes) et utilisé une première surface contenant quantités et prix (sans que ce soit cependant équivalent à (1.5.1)-(1.5.3)).

Pour l'instant, remarquons le sens économique de la réduction. On admet comme seule contrainte institutionnelle l'existence d'un système de prix pour le bien de consommation et l'actif financier[5]. Autrement dit, c'est moins la démarche par l'équilibre que nous abandonnons que la surcharge institutionnelle qu'elle entraîne. Enfin, (1.5.1) n'est pas la négation de l'inflation (comme on le verra plus loin).

Soit π_1 le prix implicite défini par $\frac{u_1}{u_0}$. Les relations (1.5.1) à (1.5.3) se ramènent aux relations

$$\text{a)} \quad \pi_1 (y_0 + \omega_0, y_1 + \omega_1, x_2) = \frac{p_1}{p_0} \tag{1.5.4}$$

$$\text{b)} \quad f(y_0, y_1, x_2) = 0^6 \tag{1.5.5}$$

1.6. *Spécification de la variété de Patinkin-Malinvaud*

À partir de maintenant, nous allons montrer qu'il existe des multiplicateurs en tout point de la variété que nous venons de définir. Ces multiplicateurs nous serviront autant à caractériser l'optimum économique qu'à structurer les équations qui décrivent un cheminement éventuel vers l'optimum. Pour cela, les hypothèses suivantes (hypothèses de Kahn, 1935) ne sont pas nécessaires mais ont l'avantage de rendre les choses tout-à-fait simples. Nous posons donc

H1: $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_2} \equiv 0$

H2: $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_1}$ s'inverse

On remarquera que ce sont là deux hypothèses sur les préférences, en fait, deux hypothèses sur la matrice

---

5. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'autres prix dans l'économie. On peut imaginer qu'il y en a et qu'ils sont manipulables, par exemple, par le moyen de taxes. De même l'appropriation peut être manipulable par la distribution.

6. Il est immédiat que ces deux relations peuvent se perturber en introduisant des chocs technologiques ou des chocs sur les ressources initiales. On peut donc imaginer une théorie des cycles réels partout sur la variété considérée c'est-à-dire aussi en un équilibre walrasien.

$$\left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_0} \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial x_2}\right].$$

On savait déjà par l'hypothèse de quasi-concavité forte que cette matrice était de rang 1 (de rang n_1 si on multiplie le nombre de biens de consommation). Le fait d'ajouter H2 permet de résoudre (1.5.4) et (1.5.5) par rapport à y_1 et x_2. On a

$$y_1 = y_1^* \left(y_0, \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{1.6.1}$$

$$x_2 = x_2^* \left(y_0, \frac{p_1}{p_0}\right) \tag{1.6.2}$$

Rappelons que ce choix n'est pas nécessaire. Quitte à modifier légèrement H2, on pourrait tout aussi bien exprimer y_1 et y_0 en fonction de x_2 et $\frac{p_1}{p_0}$ (et il serait intéressant de le faire). Si nous choisissons d'étudier par (1.6.1) et (1.6.2) les solutions de (1.5.4) et (1.5.5), c'est pour faciliter les interprétations : à un niveau donné d'investissement y_0 et de prix relatifs $\frac{p_1}{p_0}$ correspond un couple unique de niveau de production de bien de consommation y_1 et de niveau d'emploi x_2 (donc un unique équilibre keynésien). La réciproque est également vraie mais ne sera pas utilisée ici.

Le fait de poser H1 permet d'étudier facilement les équations (1.6.1) et (1.6.2). Substituant (1.6.1) et (1.6.2) en (1.5.4) et (1.5.5), on obtient les identités

$$\text{a)} \quad \pi_1 (y_0 + \omega_0, y_1^* (\cdot) + \omega_1) \equiv \frac{p_1}{p_0} \tag{1.6.3}$$

$$\text{b)} \quad f(y_0, y_1^* (\cdot), x_2^*(\cdot)) \equiv 0 \tag{1.6.4}$$

La variété de Patinkin-Malinvaud se caractérise dès lors par les équations fondamentales

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} \equiv 0 \tag{1.6.5}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1^*}{\partial \pi_1} \equiv 1 \tag{1.6.6}$$

$$f_0 + f_1 \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial y_0} \equiv 0 \tag{1.6.7}$$

$$f_1 \frac{\partial y_1^*}{\partial \pi_1} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1} \equiv 0 \tag{1.6.8}$$

où $\frac{\partial y_1^*}{\partial \pi_1}$ et $\frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1}$ sont des abus de notation pour $\frac{\partial y_1^*}{\partial\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}$ et $\frac{\partial x_2^*}{\partial\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}$. Ce sont ces relations qui vont nous servir à dériver des multiplicateurs et à montrer leur rôle dans un cheminement éventuel vers l'optimum.

Une dernière hypothèse nous facilitera cette tâche. Nous allons renforcer H2 en supposant

$$\text{H3:}\quad \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_0} < 0.$$

Il s'agit là encore d'une hypothèse *sur les préférences*. Elle assure que consommation et épargne sont des biens supérieurs (au sens fort pour simplifier) et sont complémentaires quant aux goûts[7].

1.7. *Les multiplicateurs*

A) Nous allons montrer que le multiplicateur de l'investissement sur le PNB existe partout sur la variété précédemment définie, même au point walrasien.

Lemme α — Soit $Y = p_0 y_0 + p_1 y_1^*(\cdot)$ le PNB[8]. Sous les hypothèses précédentes, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\frac{\partial Y}{p_0 \partial y_0} = \frac{1}{1-\alpha} > 1^9.$$

Démonstration:

Considérons (1.6.5) sous la forme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} \end{bmatrix} = 0.$$

Par H3, le noyau de $\begin{bmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \end{bmatrix}$ peut s'engendrer par $\theta \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $k_0 > 0$, $k_1 > 0$ et $p_0 k_0 + p_1 k_1 \equiv 1$. On a donc

7. Il s'agit d'une hypothèse un peu complexe. Si elle portait sur tous les biens et que le problème du consommateur soit celui d'une maximation à prix et revenu donnés, elle impliquerait que tous les effets-revenu soient strictement positifs (voir Alarie, Bronsard et Ouellette, 1990). Dans un monde où le problème du consommateur contiendrait en plus des rationnements sur x_2, elle impliquerait que tous les effets-revenu contraints soient strictement positifs.

8. Cette définition du PNB se remène à la définition usuelle quand $p_0 y_0$ est la valeur du bien d'équipement.

9. Ce résultat découle fondamentalement de l'hypothèse H3. Évidemment, à partir du moment où le PNB est toujours croissant par rapport à y_0, il ne saurait être question de le maximiser. C'est parce que notre fonction d'utilité contient le travail que nous pouvons trouver un critère d'«optimum macroéconomique».

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\partial y_1^*}{\partial y_0} \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} \text{ et, par suite,}$$

$$\frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} = \frac{k_1}{k_0} > 0.$$

Posons $p_1 k_1 = \alpha$. On aura

$$\frac{p_1}{p_0} \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} = \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0$$

et

$$1 + \frac{p_1}{p_0} \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} = \frac{1}{1-\alpha} > 0$$

D'où

$$\frac{\partial Y}{p_0 \partial y_0} \equiv \frac{1}{1-\alpha} > 1.$$

B) De même, nous allons montrer que le multiplicateur de l'investissement sur l'emploi existe partout sur la variété précédemment définie, même au point walrasien.

Lemme β — Sous les hypothèses précédentes, il existe $\beta < 1$ tel que

$$-\frac{\partial x_2}{\partial y_0} \equiv \frac{1-\beta}{1-\alpha} \frac{f_0}{f_2} > \frac{f_0}{f_2} [10].$$

Démonstration :

Considérons (1.6.7) sous la forme

$$1 + \frac{f_1}{f_0} \frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} + \frac{f_2}{f_0} \frac{\partial x_2^*}{\partial y_0} \equiv 0.$$

On a

$$-\frac{f_2}{f_0} \frac{\partial x_2^*}{\partial y_0} \equiv 1 + \frac{f_1}{f_0} \frac{k_1}{k_0} > 1$$

10. On peut interpréter ce résultat en disant que la productivité marginale sociale de l'investissement $\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial y_0}\right)$ est plus grande que sa productivité marginale privée $\left(\dfrac{f_0}{f_2}\right)$. Ce résultat découle encore de l'hypothèse H3. Enfin β peut s'interpréter comme une marge bénéficiaire entre le prix des biens à la consommation et leurs coûts marginaux.

$$\equiv 1 + p_0 \frac{f_1}{f_0} \frac{k_1}{1-\alpha}$$

$$\equiv \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \alpha + p_0 \frac{f_1}{f_0} k_1 \right]$$

$$\equiv \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - (p_1 - p_0 \frac{f_1}{f_0}) k_1 \right]$$

$$\equiv \frac{1-\beta}{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \beta = \left[p_1 - p_0 \frac{f_1}{f_0} \right] k_1$$

Cette dernière relation s'écrit

$$- \frac{\partial x_2^*}{\partial y_0} \equiv \frac{1-\beta}{1-\alpha} \frac{f_0}{f_2}.$$

Puisque $\frac{1-\beta}{1-\alpha} > 1$, on a $1-\beta > 1 - \alpha$, $1 - \beta > 0$ et par suite $\beta < 1$.

(Donc, on a toujours $\frac{1-\beta}{1-\alpha} > 1$ même si $\beta = 0$).

C) Enfin, nous allons exprimer l'effet du prix relatif $\frac{p_1}{p_0}$ sur l'emploi.

Lemme γ – Sous les hypothèses précédentes, il existe $\gamma < 1$ tel que

$$\frac{u_2}{u_0} \frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1} = - (1-\gamma) \frac{f_1}{f_0} \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \right]^{-1}$$ [11]

Démonstration:

Considérons (1.6.6) et (1.6.8). Ces deux relations se résolvent pour donner

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1} = - \frac{f_1}{f_2} \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \right]^{-1}$$

Multiplions cette relation par $\frac{u_2}{u_0}$. On peut écrire le résultat sous la forme

$$\frac{u_2}{u_0} \frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1} = - \frac{u_2}{u_0} \frac{f_0}{f_2} \frac{f_1}{f_0} \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} \right]^{-1}$$

11. Le facteur γ peut s'interpréter comme un indicateur de tension entre la productivité marginale du travail et le taux de salaire implicite demandé pour faire ce travail, donc comme un indicateur de sous-emploi.

Posons $\gamma = 1 - \dfrac{u_2}{u_0}\,\dfrac{f_0}{f_2} = \dfrac{f_2/f_0 - u_2/u_0}{f_2/f_0}$.

On a $\gamma < 1$ et

$$\frac{u_2}{u_0}\,\frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1} = -(1-\gamma)\,\frac{f_1}{f_0}\left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1}$$

1.8 *Désirabilité et optimalité*

A) Sur la variété de Patinkin-Malinvaud, l'utilité prend les valeurs

$$S = u(y_0 + \omega_0, y_1^*(\cdot) + \omega_1, x_2^*(\cdot)). \tag{1.8.1}$$

Étudions le gradient pour mesurer la désirabilité d'une variation de prix relatifs et d'une variation d'investissement.

Lemme de la désirabilité — Sous les hypothèses précédentes le gradient de l'utilité «indirecte» peut s'écrire

$$\frac{S_0}{u_0} = -\frac{1-\beta}{1-\alpha}\,\frac{f_0}{f_2}\left[\frac{u_2}{u_0} - \frac{1}{1-\beta}\,\frac{f_2}{f_0}\right] = \frac{1-\gamma}{1-\alpha}\left[\beta - \frac{\gamma}{\gamma-1}\right]$$

$$\frac{S_1}{u_0} = \left[\frac{u_1}{u_0} - (1-\gamma)\frac{f_1}{f_0}\right]\left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1} = \frac{1}{p_0}\left[p_1 - (1-\gamma)\,p_0\,\frac{f_1}{f_0}\right]\left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1}.$$

Démonstration

a) On dérive (1.8.1) par rapport à y_0. On a

$$S_0 = u_0 + u_1\,\frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} + u_2\frac{\partial x_2^*}{\partial y_0}$$

$$= u_0\left[1 + \frac{p_1}{p_0}\,\frac{\partial y_1^*}{\partial y_0} + \frac{u_2}{u_0}\,\frac{\partial x_2^*}{\partial y_0}\right]$$

Les lemmes α et β impliquent

$$S_0 = u_0\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{u_2}{u_0}\,\frac{1-\beta}{1-\alpha}\,\frac{f_0}{f_2}\right]$$

$$= \frac{u_0}{1-\alpha}\,\frac{f_0}{f_2}\left[\frac{f_2}{f_0} - (1-\beta)\,\frac{u_2}{u_0}\right]$$

$$\frac{S_0}{u_0} = -\frac{1-\beta}{1-\alpha}\,\frac{f_0}{f_2}\left[\frac{u_2}{u_0} - \frac{1}{1-\beta}\,\frac{f_2}{f_0}\right]$$

La seconde égalité annoncée provient du Lemme γ.

b) On dérive (1.8.1) par rapport à $\frac{p_1}{p_0}$. On a

$$\frac{S_1}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} \frac{\partial y_1^*}{\partial \pi_1} + \frac{u_2}{u_0} \frac{\partial x_2^*}{\partial \pi_1}$$

Le lemme γ implique

$$\frac{S_1}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1} - (1-\gamma) \frac{f_1}{f_0} \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{u_1}{u_0} - (1-\gamma) \frac{f_1}{f_0}\right] \left[\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right]^{-1}$$

La seconde égalité provient de (1.5.1).

Dans ces relations $\frac{f_2}{f_0}$ est la productivité marginale du travail et $\frac{u_2}{u_0}$ le taux de salaire (implicite) demandé pour faire ce travail. Il y aura sous-emploi si $\frac{f_2}{f_0} > \frac{u_2}{u_0}$. Qu'il soit volontaire ou non dépend de l'information des agents. L'investissement est désirable si $\frac{f_2}{f_0} > (1-\beta) \frac{u_2}{u_0}$ c'est-à-dire si la productivité marginale du travail est plus grande que son coût multiplié par le facteur $1-\beta$, lequel est plus petit que l'unité dès lors que $\beta > 0$ (rappelons que $\beta < 1$ par le lemme β).

B) Nous pouvons maintenant caractériser l'optimum. Considérons d'abord l'optimation partielle par rapport à l'investissement. Nous appellerons optimum macroéconomique l'optimum ainsi obtenu. Considérant ensuite l'optimation partielle par rapport aux prix, nous appellerons optimum microéconomique l'optimum ainsi obtenu.

Proposition I

L'optimum macroéconomique se caractérise par les propriétés équivalentes

a) $$\frac{u_2}{u_0} = \frac{1}{1-\beta} \frac{f_2}{f_0}$$

b) $$\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

c) $$\left[\frac{u_0}{u_2} - \frac{f_0}{f_2}\right] k_0 + \left[\frac{u_1}{u_2} - \frac{f_1}{f_2}\right] k_1 = 0$$

Proposition II

L'optimum microéconomique se caractérise par les propriétés équivalentes

a) $\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{1-\gamma} \; \frac{u_1}{u_0}$

b) $\beta = \frac{\alpha\, \gamma}{\gamma - 1}$

c) $\frac{u_1}{u_2} = \frac{f_1}{f_2}$

Démonstration (des deux propositions)

Considérons I.

L'équivalence entre a) et b) est évidente vu le lemme de la désirabilité.

Pour passer de a) à c), on procède comme suit

$$\frac{u_0}{u_2} = (1-\beta)\,\frac{f_0}{f_2}$$

$$= (1 - p_1\, k_1 + p_0\, \frac{f_1}{f_0}\, k_1)\,\frac{f_0}{f_2}$$

$$= p_0\,(k_0 + \frac{f_1}{f_0}\, k_1)\,\frac{f_0}{f_2}$$

D'où

$$\frac{u_0}{u_2}(k_0 + \frac{u_1}{u_0} k_1) = \frac{f_0}{f_2}(k_0 + \frac{f_1}{f_0}\, k_1)$$

et

$$\left[\frac{u_0}{u_2} - \frac{f_0}{f_2}\right] k_0 + \left[\frac{u_1}{u_2} - \frac{f_1}{f_2}\right] k_1 = 0$$

Pour passer de c) à a), on procède à rebours.

La démonstration pour II est analogue.

La condition c) s'exprime comme une condition agrégée, macroéconomique : la somme pondérée des écarts entre les TMS et les TMT doit être nulle (les poids k_0 et k_1 ne sont pas arbitraires).

Considérons maintenant l'optimation simultanée par rapport aux deux variables d'investissement et de prix relatif.

Proposition III — Sous les hypothèses précédentes, l'optimum temporaire[12] de premier rang se caractérise par les propriétés équivalentes

a) $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{f_1}{f_0}, \quad \dfrac{u_2}{u_0} = \dfrac{f_2}{f_0}$

b) $\beta = 0, \quad \gamma = 0.$

Démonstration

Par le lemme de la désirabilité, $S_1 = 0$ implique

$$p_1 = (1-\gamma)\, p_0 \; \frac{f_1}{f_0}$$

c'est-à-dire

$$p_1\, k_1 = (1-\gamma)\, p_0 \; \frac{f_1}{f_0}\, k_1 .$$

Ceci peut s'écrire

$$p_1\, k_1 - p_0 \; \frac{f_1}{f_0}\, k_1 = -\,\gamma\, p_0 \, \frac{f_1}{f_0}\, k_1$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= -\,\gamma\,(\alpha-\beta) \\ &= \gamma\,\beta - \gamma\,\alpha \end{aligned}$$

D'où

$$\beta = \frac{\alpha\,\gamma}{\gamma-1} .$$

Or, par la proposition I, on a

$$\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

D'où

$\dfrac{\gamma}{\gamma-1} = \dfrac{\alpha\,\gamma}{\gamma-1}$ et $\gamma = \alpha\,\gamma$. Si $\gamma \neq 0$, on a $\alpha = 1$.

Donc on a $\gamma = 0$ et $\beta = 0$.

Pour passer de b) à a), il suffit de substituer b) dans le lemme de la désirabilité.

12. Les hypothèses de Wold-compatibilité forte sont ici essentielles, comme d'ailleurs dans la proposition précédente. D'une manière générale, l'équilibre temporaire n'est pas un optimum temporaire (voir Allard, Bronsard et Richelle, 1989, voir aussi la note 4).

La proposition III caractérise un optimum de premier rang de court terme puisque, sur la variété de Patinkin-Malinvaud, on a, à la fois, la conservation des quantités, le respect de la surface technologique et, finalement, la Wold-compatibilité forte des anticipations. Cet optimum peut s'implanter comme un équilibre walrasien.

La proposition I, pour sa part, peut s'interpréter comme un optimum de second rang, celui qu'on obtiendrait sous la contrainte de la fixité des prix des biens de consommation. Elle se généralise naturellement au cas où les prix sont rigides, «visqueux», c'est-à-dire, par exemple, contraints par des pouvoirs de monopole. Nous tiendrons compte de ce point dans la section 2. Pour l'instant, remarquons que l'optimum de la proposition I n'exclut pas l'équilibre walrasien mais ne s'y réduit pas non plus.

2. DÉTERMINATION D'UN OPTIMUM DE COURT TERME

2.1 *Interprétation géométrique*

Dans la sous-section 1.7, nous avons construit les multiplicateurs $\frac{1}{1-\beta}$ et $\frac{1}{1-\gamma}$ à l'aide des grandeurs

$$\beta = \left[p_1 - p_0 \frac{f_1}{f_0} \right] k_1 \tag{2.1.1}$$

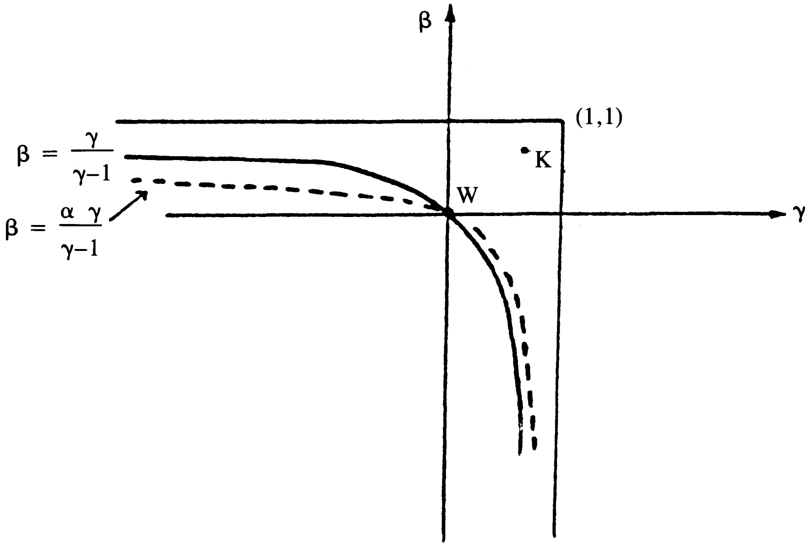
$$\gamma = \frac{\dfrac{f_2}{f_0} - \dfrac{u_2}{u_0}}{\dfrac{f_2}{f_0}} \tag{2.1.2}$$

Dans ces relations $p_1 - p_0 \frac{f_1}{f_0}$ peut s'interpréter comme une marge bénéficiaire *si les entreprises perçoivent les prix* p_1 *et* p_0. Par ailleurs $\frac{f_2}{f_0} - \frac{u_2}{u_0}$ peut s'interpréter comme un indicateur de tension sur un éventuel marché du travail. Nous avons également vu que β et γ étaient strictement inférieurs à un.

Les relations (2.1.1) et (2.1.2) peuvent aussi s'interpréter comme une transformation où chaque état économique a pour image un couple (β,γ). Nous pouvons donc illustrer et intérpréter les états économiques dans l'espace des (β,γ).

Considérons alors le diagramme 1.

DIAGRAMME 1



β et γ sont bornés supérieurement par le point (1,1) comme on l'a vu dans les lemmes β et γ. La courbe $\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ (en continu) représente les optima macroéconomiques de la proposition I: ils sont paramétrés par les prix relatifs $\frac{p_1}{p_0}$.

La courbe $\beta = \frac{\alpha\ \gamma}{\gamma-1}$ (en pointillé) représente les optima de distribution des biens de consommation de la Proposition II: ils sont paramétrés sur le niveau de l'investissement y_0. L'intersection de ces deux courbes détermine l'optimum de premier rang de la proposition III.

On a vu que si on avait simultanément $\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ et $\beta = \frac{\alpha\ \gamma}{\gamma-1}$, on avait aussi $\beta = 0$, $\gamma = 0$. L'intersection se fait donc à l'origine et l'optimum correspondant peut s'interpréter comme un équilibre walrasien. Considérons alors un point K situé dans le carré unitaire. En ce point le producteur «concurrentiel» voudrait produire d'avantage ($\beta > 0$) s'il était payé au prix $\frac{p_1}{p_0}$ et pour cela relever le niveau de l'emploi ($\gamma > 0$) même s'il doit payer le salaire $\frac{u_2}{u_0}$. De même le consommateur «concurrentiel» voudrait consommer davantage (même si pour cela il faut payer $\frac{p_1}{p_0}$) quitte à travailler davantage (même au salaire $\frac{u_2}{u_0}$). Ces divers éléments définissent implicitement une dynamique dans l'économie considérée. Nous allons l'expliciter.

2.2 *Procédure de convergence*

En fait, le lemme de la désirabilité suggère aussitôt la

Proposition IV

Sous les hypothèses précédentes et pour deux scalaires φ_1 et φ_2 non-négatifs, on pose

$$\text{a)}\quad dy_0 = -\varphi_1 \frac{1-\beta}{1-\alpha}\frac{f_0}{f_2}\left[\frac{u_2}{u_0} - \frac{1}{1-\beta}\frac{f_2}{f_0}\right]$$

ou

$$dy_0 = \varphi_1 \left[\beta - \frac{\gamma}{\gamma-1}\right]$$

$$\text{b)}\quad d\left[\frac{p_1}{p_0}\right] = \varphi_2 \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\left[\frac{u_1}{u_0} - (1-\gamma)\frac{f_1}{f_0}\right]$$

ou, si $\left[\dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_1}\right] < 0$ et si p_0 est constant

$$dp_1 = \varphi_2 \left[\frac{\alpha\gamma}{\gamma-1} - \beta\right].$$

Ces deux procédures sont monotones[13].

Démonstration

Si les procédures sont ainsi définies, on aura nécessairement

$$\frac{dS}{u_0} = \frac{S_0}{u_0} dy_0 + \frac{S_1}{u_0} d\left[\frac{p_1}{p_0}\right] \geqslant 0.$$

Suivant la manière (normative, positive, hiérarchique) d'interpréter les deux sous-procédures ainsi définies, on aura diverses théories macroéconomiques. En effet et par exemple, si les deux sous-procédures sont bloquées ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$), K est un équilibre keynésien (y_1 et x_2 sont bel et bien déterminées). Si les deux sous-procédures convergent, elles le font vers l'origine W qui peut s'interpréter comme un équilibre walrasien. Si seule la première sous-procédure converge («si on est réduit aux seuls moyens macroéconomiques»), on converge sur $\beta = \dfrac{\gamma}{\gamma-1}$ mais on peut se trouver à gauche ou à droite du point W.

13. Ceci n'est pas suffisant pour assurer la convergence mais la rend très plausible. Pour compléter l'analyse, se reporter par exemple à D'Aspremont et Tulkens (1981).

Cependant mieux vaut remettre à plus tard de pareilles interprétations car une légère généralisation du point de vue présenté jusqu'ici nous permettra à la fois de les approfondir et de les multiplier.

2.3 *Généralisation*

La procédure définie à l'intérieur de la proposition IV est spécialement conçue pour converger vers un optimum de Pareto de premier rang (c'est une procédure de type MDP).

Pour la généraliser, considérons les équations (2.1.1) et (2.1.2). Il y a toutes sortes de raisons de poser en principe que dans une économie réelle, les agents recherchent et obtiennent souvent des marges bénéficiaires positives et sont confrontés à des tensions non nulles sur le marché du travail

On peut évoquer à la fois le pouvoir de monopole, les coûts de catalogue, le rationnement quantitatif, les contrats de travail, le salaire d'efficience et ainsi de suite. Il n'est pas nécessaire que nous nous polarisions sur l'un de ces cas. Il nous suffit de généraliser les procédures considérées plus haut de manière à les admettre.

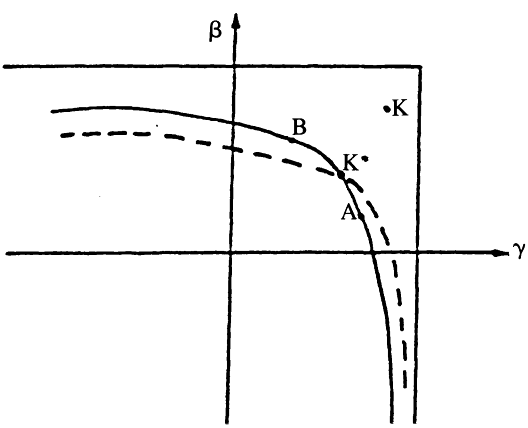
Pour cela, nous poserons simplement qu'il existe deux constantes positives m et n telles que

$$dy_0 = \varphi_1 \left[\beta - \frac{\gamma}{\gamma - 1} - m \right] \tag{2.3.1}$$

$$dp_1 = \varphi_2 \left[\frac{\alpha \ \gamma}{\gamma - 1} + n - \beta \right] \tag{2.3.2}$$

On admettra que les égalités $\beta = \frac{\gamma}{\gamma-1} - m$, $\beta = \frac{\alpha \ \gamma}{\gamma-1} + n$ caractérisent un optimum de second rang ou un optimum contraint. (m et n sont choisies de telle manière que β et γ demeurent plus petits que un). Considérons alors le diagramme 2

DIAGRAMME 2



et admettons que la procédure définie en (2.3.1) et (2.3.2) converge sur le point K*. Le point d'arrivée est alors un optimum de Pareto de second rang ou un optimum contraint et peut s'implanter comme un équilibre keynésien. En fait cet équilibre keynésien est une espèce d'équilibre de monopole doublement bilatéral si d'une part l'entreprise est payée au prix $\frac{p_1}{p_0}$ et d'autre part le travailleur est payé au taux de salaire $\frac{f_2}{f_0}$. D'autres interprétations sont possibles mais celle-ci est suffisante pour montrer la dualité entre l'équilibre keynésien et certains équilibres monopolistiques. Pour passer du point K au point K*, il faut d'une part *augmenter* l'investissement (puisqu'on est au-dessus de la courbe limite de (2.3.1)) et d'autre part *abaisser* les prix (puisqu'on est au-dessus de la courbe limite de (2.3.2)).

Ces ajustements de prix peuvent représenter autant la formation de marchés que l'ajustment sur ces marchés[14]. On peut cependant retarder leur mise en œuvre.

Considérons en effet une procédure hiérarchique où la sous-procédure (2.3.1) commence d'abord et où (2.3.2) prend la relève. Dans un premier temps on converge donc par exemple soit sur le point A soit sur le point B. Admettons qu'en A la dynamique des prix entre spontanément en action. Les prix haussent. On se trouve donc à la fois en situation de chômage et d'inflation. En B on aura chômage et déflation.

On pourrait ainsi multiplier les cas de figures de façon à retrouver les situations macroéconomiques usuellement considérées dans la littérature (voir par exemple Mankiw (1990))[15].

ANNEXE

LA REPRÉSENTATION DES AGENTS

A) Le consommateur

On part d'une fonction d'utilité intertemporelle $S(x, \tilde{x})$ où x est un vecteur des quantités présentes, $\tilde{x}$ un vecteur de quantités futures. On suppose que ces dernières sont anticipées à l'aide d'une fonction d'anticipation φ telle que $\tilde{x} = \varphi(x_0, x)$ où

14. Ceci est important dans la pensée de Keynes et dans celle de Samuelson : la politique d'investissement (public, disons) sert de support à la formation des marchés et d'encadrement à leur action efficace. Notre modèle comporte assez de recul par rapport à la notion même de marché pour pouvoir prendre ce point en compte. Il est évidemment fondamental si une politique macroéconomique est conçue pour un pays en voie de développement ou pour les actuels pays de l'Est.

15. De nombreux théorèmes d'impossibilités ont vu le jour en macroéconomie. En général, ils dépendent de l'endroit où l'on se situe dans l'espace des β et γ. Par exemple, si on se place sur la courbe $\beta = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ dans le diagramme 1, il est bien clair qu'une politique keynésienne n'est plus possible. De la même façon, il n'est pas du tout évident que l'introduction d'anticipations rationnelles (même en les ajoutant aux hypothèses de Wold-compatibilité) conduirait à un théorème d'impossibilité (voir Bronsard et Salvas-Bronsard, 1987).

x_0 est un actif financier (au sens très large: x_0 peut se définir par une promesse verbale de livraison). La fonction induite

$$u(x_0, x) = S(x, \varphi(x_0,x))$$

peut alors être parfaitement arbitraire (la démonstration de Polemarchakis (1983) peut se transposer à ce cas). Une axiomatisation conjointe des préférences et des anticipations, c'est-à-dire du couple (S, φ), s'impose.

En fait, la fonction u sera du type habituel (croissante, fortement quasi-concave) si la fonction φ ne perturbe pas trop la croissance et la forte quasi-concavité de S en x et même les étend à x_0 (il faut spécifier à la fois le premier et le second ordre). L'hypothèse faite ici est plus restrictive, c'est celle de la Wold-compatibilité forte. On trouvera les détails dans Bronsard et Salvas-Bronsard (1991) et une axiomatisation duale (hypothèse de Roy-compatibilité forte) dans Allard, Bronsard et Richelle (1990). Ces démarches généralisant les axiomatisations implicites de Arrow et Hahn (1971) et Grandmont (1983).

B) Le producteur

Au point de départ, on le représente à l'aide d'une fonction de production courante $g(y,\tilde{E}) = 0$ et d'une fonction de production future $h(-\tilde{E}, \tilde{y}) = 0$. y est le vecteur des inputs consommés aujourd'hui et des outputs rendus disponibles aujourd'hui. $\tilde{E}$ en tant qu'argument de g représente un output qui sera disponible demain (un bien d'équipement disons). En tant qu'argument de h, $\tilde{E}$ devient un input (d'où le signe –). $\tilde{y}$ est le vecteur des outputs et autres inputs de la seconde période. L'investissement physique est dès lors explicite.

On le rend implicite en éliminant Ẽ entre les relations g et h. On obtient alors une fonction de production intertemporele $F(y,\tilde{y}) = 0$. On procède alors comme en a) pour se ramener à une fonction de production temporaire $f(y_0,y) = 0$. L'actif financier $y_0 y$ apparaît parce que dans un monde «séquentiel» il faut bien financer les investissements.

BIBLIOGRAPHIE

ALARIE, Y., C. BRONSARD et P. OUELLETTE (1990), «Preferences and Normal Goods: A Necessary and Sufficient Condition», *Journal of Economic Theory.*

ALLARD, M., C. BRONSARD et Y. RICHELLE (1989), «Temporary Pareto Optimum Theory», *Journal of Public Economics*, 38, pp. 343-368.

ALLARD, M., C. BRONSARD et Y. RICHELLE (1990), «Roy-Consistent Expectations», *Review of Economic Studies*, 57, pp. 661-677.

ARROW, K. et F.H. HAHN (1971), *General Competitive Analysis*, San-Francisco: Holden Day.

BARRO, R. et H. GROSSMAN (1971), «A General Disequilibrium Model of Income and Employment», *American Economic Review*, 61, pp. 82-93.

BÉNASSY, J.P. (1976), «Théorie néokeynésienne du déséquilibre dans une économie monétaire», *Cahiers du Séminaire d'Économétrie du CNRS*, 17, pp. 81-113.

BÉNASSY, J.P. (1982), *The Economics of Market Disequilibrium*, N.Y : Academic Press.

BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD (1987), «Growth, Desirability, Profitability and Unemployment», *Annales d'économie et de statistique.*

BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD (1991), «La fonction d'anticipation primale», Communication au Séminaire Roy, Paris.

CLOWER, R. (1965), «The Keynesian Counterrevolution: A Theoretical Apparaisal», HAHN et BRECHLING Ed., *The Theory of Interest Rates*, London: Macmillan.

D'ASPREMONT C. et H. TULKENS (1980), «Commodity Exchanges as Gradient Processes», *Econometrica*, 48, pp. 387 à 399.

DRÈZE, J. (1975), «Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities», *International Economic Review*, pp. 301-320.

DRÈZE, J. (1990), «Stability of a Keynesian Adjustment Process», CDP n^{O} 9021.

GRANDMONT, J.M. (1983), *Money and Value: A Reconsideration of Classical Monetary Theories*, Cambridge: Cambridge University Press.

LAROQUE, G. (1986), *Fondements de l'analyse macroéconomique à court terme,* Paris: Éditions du CNRS

LONG, J.B. et C. PLOSSER (1983), «Real Business Cycles», *Journal of Political Economy,* 91, pp. 39-69.

MALINVAUD, E. (1977), *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Oxford: Basil Blackwell.

MALINVAUD, E. (1982), *Théorie macroéconomique*, 2e tome, Paris: Dunod.

PATINKIN, D. (1965), *Money, Interest and Prices, An Integration of Monetary and Value Theory*, Harper and Row, 2e édition.

PLOSSER, C. (1989), «Understanding Real Business Cycles, *Journal of Economic Perspectives*, 3, pp. 51-77.

POLEMARCHAKIS, H.M. (1983), «Expectations, Demand and Observability», *Econometrica*, 51, pp. 565-74.