

Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2009-06

Una Fórmula Alternativa de Valuar Opciones Americanas

Rocio Elizondo
Banco de México

Pablo Padilla
IIMAS, UNAM

Mogens Bladt
IIMAS, UNAM

Agosto 2009

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Una Fórmula Alternativa de Valuar Opciones Americanas*

Rocío Elizondo[†]
Banco de México

Pablo Padilla[‡]
IIMAS, UNAM

Mogens Bladt[§]
IIMAS, UNAM

Resumen

En este artículo proponemos una fórmula alternativa para estimar el precio de una opción americana basada en la metodología o fórmula de Samuelson. La idea principal radica en valuar una opción europea en cada paso del tiempo multiplicada por un ponderador muy especial, que representa la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor de S al tiempo t . Dicho ponderador está dado por la solución a la ecuación de Fokker-Planck (función de densidad). La principal utilidad de usar esta ecuación es que se puede introducir el efecto de n factores macroeconómicos de forma sistemática, dados por algún sistema dinámico de ecuaciones, y solo se tiene que resolver una sola ecuación diferencial parcial que dependa directamente de dicho sistema. En este contexto verificamos, sólo por consistencia, que dicha fórmula es válida en el marco log-normal.

Palabras Clave: Opciones americanas, Fokker-Planck, Black-Scholes, Samuelson, función de densidad.

Abstract

We give a new way to price American options using Samuelson's formula. We first obtain the option price corresponding to a European option at time t , weighing it by the probability that the underlying asset takes the value S at time t . This factor is given by the solution of the Fokker-Planck (Kolmogorov) equation for the transition probability density. The main advantage of this approach is that we can systematically introduce the effect of macroeconomic factors. If a macroeconomic framework is given by a dynamical system in the form of a set of ordinary differential equations we only have to solve a partial differential equation, for the transition probability density. In this context, we verify, for the sake of completeness, that this formula is consistent with the Black-Scholes model.

Keywords: American options, Fokker-Planck, Black-Scholes, Samuelson. density probability function.

MSC 2000: 62P20, 91B28, 35K40

* Los autores agradecemos los valiosos comentarios y sugerencias de Josué Cortés, Gonzalo Rangel, Patricia Saavedra, Alvaro Cartea, Gilberto Flores y de los participantes del seminario del Banco de México.

[†] Dirección General de Investigación Económica. Email: melizondo@banxico.org.mx.

[‡] IIMAS, UNAM. Email: pablo@mym.iimas.unam.mx.

[§] IIMAS, UNAM. Email: bladt@sigma.iimas.unam.mx.

1. Introducción

En la literatura existen diversos métodos para valuar opciones europeas y americanas. Nosotros estamos interesados en diferentes formas de estimar opciones americanas y nos enfocaremos en los métodos que son lo suficientemente flexibles, así como en aquéllos que pueden ser útiles en situaciones no estándares u ofrecer alternativas en ambientes estándares.

Nuestro principal objetivo es presentar una fórmula alternativa de valuar opciones americanas, la cual será fácil de calcular e implementar numéricamente. La ventaja de esta fórmula es que se puede introducir el efecto de los factores macroeconómicos que afectan los mercados financieros, también se pueden mostrar diferentes dinámicas para el activo subyacente, así como generalizar esta fórmula a procesos más complejos como son los procesos de Levy.

La nueva forma de valuar opciones americanas, no pretende ser mejor que los métodos ya existentes, en el contexto del modelo de Black-Scholes. Simplemente se desea mostrar que es consistente con éstos. Lo más interesante de este nuevo método es la técnica empleada (introducir la ecuación de Fokker-Planck), ya que por medio de ésta se pueden resolver problemas más complejos, en donde el activo subyacente no necesariamente sigue un proceso log-normal o no se conozca apriori la distribución de la densidad generada por la ecuación de Fokker-Planck, permitiendo incorporar modelos macroeconómicos más generales.

Nosotros proponemos una extensión de la fórmula de Samuelson para una reclamación contingente de tipo americano, porque uno de los aspectos más interesante de esta fórmula es que no hace referencia a la distribución neutral al riesgo, es decir trabajamos con la distribución física. (Ver 2 más adelante).

En este artículo nosotros presentamos una nueva forma de valuar opciones americanas aplicando la fórmula de Samuelson, generando la correspondiente densidad con la ecuación de Fokker-Planck. En este sentido, para un valor fijo del activo subyacente S definimos el precio de una opción americana como:

$$V_A(S, t) = E_{\rho_n}[V_{Eu}(S, t)] = \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) V_{Eu}(S, \tau) d\tau, \quad S \geq S_f$$

donde para cada tiempo τ , ρ_n es la solución a la ecuación de Fokker-Planck (función de densidad), S_f es la función que representa la frontera libre, $V_{Eu}(S, \tau)$ es la solución de la ecuación de Black-Scholes para una opción europea, T_S es el tiempo de expiración que depende de la ubicación de la frontera libre. Los detalles de la fórmula se proporcionan en la sección 3.

Para fines prácticos de este artículo, presentamos mediante un ejemplo teórico una forma muy general de introducir el efecto de los factores macroeconómicos a un modelo de derivados. Aquí nos concentraremos en verificar que al introducir la ecuación de Fokker-Planck en el marco más sencillo en donde se tiene un sólo activo y los parámetros son constantes, dicha ecuación funciona adecuadamente.

Por consistencia, nosotros probamos que esta fórmula satisface la desigualdad de Black-Scholes para el caso log-normal.

En lo que sigue, nosotros recordaremos algunos aspectos bien conocidos de las metodologías de estimación. Para ello definimos:

S : precio del activo subyacente, el cual sigue un proceso log-normal. También puede ser representado por S_t , cuando estamos hablando del proceso. En general nosotros lo representamos como S , pero implícitamente sabemos que depende de t .

E : precio de ejercicio.

T : tiempo de ejercicio o maduración de la opción.

t : tiempo antes de expirar.

r : tasa de interés libre de riesgo.

σ : volatilidad del activo subyacente.

$V_A(S, t)$: precio de una opción americana.

$C_A(S, t)$: precio de una opción de compra americana.

$P_A(S, t)$: precio de una opción de venta americana.

$V_{Eu}(S, t)$: precio de una opción europea.

$C_{Eu}(S, t)$: precio de una opción de compra europea.

$P_{Eu}(S, t)$: precio de una opción de venta europea.

A continuación se describen brevemente los modelos más comunes o clásicos:

1) **Fórmula de Black-Scholes** [38] y **Fórmula de Samuelson** [2]

La metodología de Black-Scholes puede ser aplicada tanto para opciones europeas como americanas. En este caso, sólo describiremos las opciones americanas.

Para analizar una opción americana hay que tener en mente que ésta puede ser ejercida antes de expirar, lo que lleva a resolver problemas de frontera libre. Al evaluar opciones americanas no se conoce a priori dónde se aplican las condiciones de frontera, es decir, el tiempo óptimo al que se ejerce la opción. Esta situación es común en muchos problemas físicos y como ejemplos canónicos mencionamos el problema del obstáculo y el problema de Stefan [38].

El problema de encontrar el precio de una opción americana es especificado por un conjunto de restricciones similares al problema del obstáculo [38], las cuales son:

i) El valor de la opción debe ser mayor o igual que su función de pago (payoff).

Sea $V_A(S, t)$ el valor de una opción americana de compra o venta y $\max(E - S, 0)$ su función de pago, entonces se debe cumplir que:

$$V_A(S, t) \geq \max(E - S, 0),$$

para toda t .

Si no se cumpliera esta restricción, se podrían dar oportunidades de arbitraje.

ii) La igualdad de Black-Scholes es reemplazada por una desigualdad.

Recordemos que $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \leq 0$.

iii) El valor de la opción debe ser una función continua de S .

En caso contrario, si V_A es discontinua, siempre existe la posibilidad de construir un portafolio en donde exista arbitraje.

iv) La razón de cobertura delta debe ser continua.

Para más detalle ver [38] y [8].

La fórmula de Samuelson está dada por el siguiente resultado.

Considere un proceso estocástico S_t con valor inicial S_0 definido en un espacio de probabilidad (Ω, P) , donde P es la medida física bajo la cual la distribución de las variables S_t son consideradas. Dicho proceso describe el desarrollo del precio del activo en un mercado financiero. Suponga que la tasa libre de riesgo es r .

El rendimiento esperado del activo en el intervalo de tiempo $[0, T]$ es $E_P(S_T)/S_0$, donde E denota la esperanza bajo la medida física P . Entonces el valor presente de S_T está dado por:

$$\frac{S_0}{E_P(S_T)} S_T.$$

Y su valor futuro libre de riesgo es entonces:

$$e^{rT} \frac{S_0}{E_P(S_T)} S_T.$$

Definición 1 El precio $V_{Eu}^S(g)$ de un derivado europeo $g(S_T)$ está dado por:

$$V_{Eu}^S(g) = e^{-rT} E_P \left[g \left(\frac{S_T}{E_P(S_T)} S_0 e^{rT} \right) \right], \quad (1)$$

donde E_P representa la esperanza con respecto a la medida física, r es la tasa de interés libre de riesgo y $E_P(S_T) = e^{\mu T} S_0$ con S_0 y S_T el valor inicial y final del activo subyacente y μ no es necesariamente la tasa instantánea del rendimiento. El superíndice S se refiere el precio de la opción europea con respecto a Samuelson.

El hecho importante de la fórmula de Samuelson es que no hace referencia a ninguna distribución específica.

En el caso particular donde S_t sigue un proceso log-normal (modelo de Black-Scholes), es decir,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma^2 S_t dW_t,$$

con valor inicial S_0 , μ corresponde a la tasa media en el crecimiento del activo, σ es la volatilidad del activo y W_t es el movimiento browniano.

La solución a la ecuación diferencial estocástica es:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

entonces el precio del derivado considerando que hay un ajuste de aversión al riesgo, es decir, el precio bajo una medida neutral al riesgo está dado por:

$$V_{Eu}^{BS}(g) = e^{-rT} E_Q \left[g \left(\frac{S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}}{S_0 e^{\mu T}} S_0 e^{rT} \right) \right] \quad (2)$$

$$= e^{-rT} E_Q [g(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T})], \quad (3)$$

con V_{Eu}^{BS} el precio de opción europea con respecto a Black-Scholes.

En este caso, transformamos el problema de calcular una esperanza con una medida física, P , en una esperanza con una medida neutral al riesgo, Q , considerando el descuento apropiado¹. Lo que quiere decir es que de acuerdo a la medida neutral al riesgo, se obtiene el precio de la opción como el valor esperado de la función de pago descontada a una tasa r libre de riesgo.

3) La fórmula de Feynman-Kac [33]

La representación básica del teorema de Feynman-Kac establece a grandes rasgos, que para un par de funciones acotadas $q, f : R \rightarrow R$ y para alguna solución acotada $u(x, t)$ del problema con valores iniciales

¹Para más detalles de la fórmula de Samuelson se puede ver [2]. La transformación formal de la medida física a la medida neutral al riesgo, se puede consultar en [25] y [26]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)u(x, t) \quad u(x, 0) = f(x), \quad (4)$$

podemos representar a $u(x, t)$ por la fórmula de Feynman-Kac como:

$$u(x, t) = E \left[f(x + W_t) \exp \left(\int_0^t q(x + W_s) ds \right) \right], \quad (5)$$

donde W_t representa el movimiento browniano.

La importancia de este resultado (así como sus generalizaciones) relaciona al problema analítico, de la solución de la ecuación diferencial parcial (6) y el problema probabilístico, de calcular la esperanza (5). El beneficio más importante de esta fórmula es que nos da una forma de obtener información del comportamiento global de la trayectoria del movimiento browniano.

Naturalmente, existen relaciones entre las ecuaciones (6) y (5) para procesos que son generalizaciones de movimientos brownianos y éstas pueden ser usadas para representar las soluciones de interés de las EDP. En particular, existe la versión de la fórmula de Feynman-Kac que da una nueva representación para la solución de la EDP de Black-Scholes y sus diversas extensiones, ver [33].

Para el caso de Black-Scholes: $u = V_{Eu}$, la condición inicial $u(x, 0)$ se transforma en condición final $u(x, T) = V_{Eu}(S, T) = f(S)$ con $x = S$ y $f(S)$ como función de pago, además $q(x + W_t) = r(S, t) = r$ es constante. La ecuación diferencial será:

$$\frac{\partial V_{Eu}(S, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2(S, t) S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}(S, t)}{\partial S^2} - r(S, t) S \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} + r(S, t) V_{Eu}(S, t), \quad (6)$$

y

$$V_{Eu}^{FK} = E \left[f(S) \exp \left(\int_t^T r(S, \tau) d\tau \right) \right], \quad (7)$$

donde $dS = r(S, \tau)Sdt + \sigma(S, \tau)dW_s$ y V_{Eu}^{FK} es el precio de la opción europea con respecto a Fokker-Planck.

4) Tiempos de Paro ([25], [26] y [35])

Consideramos el precio y ejercicio óptimo de opciones americanas en el conjunto más simple no trivial, el modelo de Black-Scholes, donde el activo subyacente no paga dividendos y el precio sigue un proceso S_t bien comportado, bajo la medida neutral al riesgo Q , como un simple movimiento browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp \left[\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right].$$

Aquí $r > 0$, es la tasa de rendimiento libre de riesgo, la cual es constante y W_t es el proceso estándar de Wiener bajo Q . Para alguna opción americana sobre el activo subyacente, las estrategias de ejercicio admisibles deben ser tiempos de paro, τ , con respecto a la filtración $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ del proceso de Wiener W_t^2 . Si $g(S)$ es la función de pago de una opción americana ejercida cuando el precio del activo es S y si T es la fecha de expiración de la opción, entonces su valor V_{A_t} al tiempo $t \leq T$ es:

$$V_{A_t}^{tp} = \sup_{t \leq \tau \leq T} E_Q(g(S_\tau)e^{r(\tau-t)} / F_t).$$

$V_{A_t}^{tp}$ es el precio de la opción americana con respecto a al tiempo de paro.

5) Aproximación actuarial [2]

Esta es otra forma de estimar el precio de las opciones europeas y americanas. En este artículo, los autores usan consideraciones probabilísticas y actuariales para estimar dichos precios. Ellos suponen que:

a) Hay dos activos en el mercado: un bono con tasa de interés (instantánea) r ,

²Una variable aleatoria τ que toma valores en $[0, \infty)$ es llamado tiempo de paro para la sucesión $\{F_n\}$ si

$$\{\tau \leq n\} \in F_n \quad \forall 0 \leq n < \infty.$$

donde F_n es una filtración.

la cual es también interpretada como la tasa libre de riesgo y un activo el cual es descrito por el proceso estocástico S_t al tiempo t .

- b) Se tiene un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde el cero representa el tiempo inicial y T el tiempo final.
- c) El precio del segundo activo al tiempo cero es denotado por S_0 .

Ellos estiman el precio de una opción de compra europea o americana, $C(a, T)$, escrita sobre el segundo activo con precio de ejercicio a y tiempo de maduración T .

La aproximación actuarial puede ser expresada en términos de proceso S_t como sigue:

$$V_{Eu}^{AA}(a, T) = S_0 P(S_T > ae^{(\mu-r-\sigma^2)T}) - ae^{rT} P(S_T > ae^{(\mu-r)T}),$$

donde P es función de distribución de S_T . La cual también puede escribirse como:

$$V_{Eu}^{AA}(a, T) = E_P \left((e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} a) I(e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} a) \right),$$

con P la medida física e I la función indicadora³

Este resultado es equivalente a la fórmula de Black-Scholes cuando S_T sigue un proceso log-normal.

6) Teoría racional de opciones de Merton [24]

La teoría racional de opciones de Merton se basa en fundamentos que permiten establecer algunas propiedades de monotonía en los precios de las opciones, a partir de supuestos débiles que proporcionan validez universal, es decir, sus supuestos son de tipo económico y financiero de dominación de portafolios.

³Esta función es representada por

$$I = \begin{cases} 1, & e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} a \\ 0, & e^{-\mu T} S_T \leq e^{-rT} a \end{cases}$$

Para establecer las restricciones en los precios, se necesita la noción de dominancia: el activo (o portafolio) A domina al activo (o portafolio) B si, en alguna fecha conocida en el futuro, el pago en A es mayor que el pago en B para algunos posibles estados de la naturaleza, entendiendo por éstos las condiciones que pueden darse en el mercado y es al menos igual al pago de B en todos los posibles estados de la naturaleza.

La teoría de Merton se basa en los siguientes supuestos:

- a) Un inversionista prefiere ganar más que menos, esto es para obtener una fórmula consistente.
- b) No hay costos de transacción, todas las ganancias están sujetas al mismo impuesto y es posible obtener y conceder préstamos con una tasa libre de riesgo.
- c) La tasa de interés a la que se obtiene un préstamo se llama tasa pasiva y la tasa a la que se concede éste es la tasa activa.

El supuesto más importante para Merton es que las opciones deben ser estimadas de tal forma que sus activos no son valores ni dominados ni dominantes. En el artículo [9] se da una aproximación analítica a la teoría racional de opciones de Merton usando técnicas de ecuaciones diferenciales parciales.

Para valuar opciones de tipo europeo, existen fórmulas explícitas, tal como se mostró anteriormente. En general, para las opciones americanas hay muchas formas de representarlas o estimarlas, pero no se conocen fórmulas cerradas sencillas. En el caso de que la fórmula exista puede ser muy complicada. La mejor manera de aproximar el valor de las opciones americanas es mediante el uso de métodos numéricos. En algunas ocasiones ellos resultan ser complicados también.

Las opciones en general son usadas para el desarrollo de productos estructurales, estrategias de especulación y para la cobertura de riesgos. La mayoría de las opciones negociadas en los mercados internacionales son de tipo americano, ya que éstas determinan el mejor tiempo para ejercer la opción de tal forma que se obtenga un mayor beneficio. Aunque las opciones americanas son más caras, por ejercerse en cualquier momento del tiempo antes de vencerse, dado que otorgan más derechos.

En todas las fórmulas mostradas aquí, los investigadores han demostrado que ellas satisfacen el caso log-normal, es decir, las fórmulas pueden ser reducidas a la fórmula de Black-Scholes cuando el activo subyacente sigue un proceso log-normal. Y este hecho ha dado consistencia a dichas fórmulas.

De la misma forma, nuestro objetivo es demostrar analíticamente que nuestra fórmula satisface la desigualdad de Black-Scholes para opciones americanas en el caso log-normal. También se compara numéricamente que esta propuesta da aproximaciones razonables respecto con algunos métodos numéricos ya existentes, tales como: el método de árboles binomiales y los métodos implícito y explícito.

El modelo binomial es un método en tiempo discreto, bajo los supuestos más simples este modelo es muy útil, fácil de aplicar e implementar. Debido a su simplicidad y convergencia, ha sido modificado dentro de un número de variantes, las cuales resultan buenas aproximaciones, pero en otras ocasiones se pierde velocidad en la convergencia y hay un gasto computacional excesivo. Su desventaja es que son poco eficientes cuando se evalúan opciones más complicadas.

Los métodos de Monte Carlo involucran la generación de un gran número de realizaciones, simulaciones numéricas de la caminata aleatoria seguida por el subyacente. Ellos tienen la desventaja de que las características del ejercicio temprano son difíciles o imposibles de implementar.

Los métodos de diferencias finitas son métodos numéricos en tiempo continuo, que sirven para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales usando ecuaciones de diferencias finitas para aproximar sus derivadas. Estos métodos son capaces de evaluar ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, así como ecuaciones diferenciales ordinarias. Dentro de estos métodos el implícito es muy estable.

Cualquiera de estos métodos también pueden ser usados para resolver opciones americanas desde el punto de vista de tiempos de paro, transformando la integral en ecuaciones diferenciales. Pero el método más común es el método de Montecarlo.

En la fórmula propuesta por nosotros, cuando a priori ya se conoce la frontera libre, es muy fácil de calcular, ya que nuestra fórmula depende del valor de una opción europea, de la cual ya existe una fórmula analítica y de la probabilidad de estancia, que también existe una fórmula cerrada en el caso lognormal. Así que la dificultad radica en encontrar la frontera libre, como en todos los métodos mencionados con anterioridad, para lo cual ya existen metodologías que pueden aproximar bien el

problema de la frontera y que se pueden utilizar eficientemente.

Finalmente, este artículo es dividido de la siguiente forma. En la sección dos se describen las ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante (ecuación de Fokker-Planck), esta última representa la probabilidad de transición $\rho(S, t)$ en nuestra fórmula. En la tercera sección se describe detalladamente la nueva forma de valorar opciones americanas, así como la comparación numérica. En la última sección concluimos.

2. Preliminares

2.1. La función de densidad de transición

Derivaremos una ecuación para la función de densidad de una variable aleatoria definida por una ecuación diferencial estocástica (EDE). Dicha densidad describe la evolución temporal de la posición (x) y el tiempo (t) del fenómeno en estudio.

Introducimos una variable aleatoria x , la cual satisface la EDE

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dW, \quad (8)$$

donde f y g son funciones que dependen de x y t , y W es un proceso de Wiener o movimiento browniano.

$f(x, t)dt$ corresponde a la parte determinística del proceso y

$g(x, t)dW$ es la parte aleatoria del mismo proceso.

Entonces, la función de densidad de transición $p(x^*, t^* | x, t)$ con x^* y t^* los valores futuros de x y t respectivamente, con $t \leq t^*$, para algún conjunto X , tiene las siguientes propiedades:

i) La probabilidad de que $x \in X$ al tiempo t dado x^* al tiempo t^* es:

$$\int_X p(x^*, t^* | x, t) dx.$$

ii) La probabilidad de que $x^* \in X$ al tiempo t^* dado que x al tiempo t es:

$$\int_X p(x^*, t^* | x, t) dx^*.$$

Para entender mejor las dos propiedades anteriores (i-ii) véase el siguiente ejemplo: supongamos que conocemos el valor de x en algún tiempo t , entonces a menos de que $g = 0$ en la EDE (8), existe incertidumbre en el valor futuro de x . El tiempo y valor futuro de la variable aleatoria se denota por t^* y x^* respectivamente. En el inciso ii), no se conoce el valor x con certeza, por lo cual se podría encontrar su función de densidad si después de todo (8) tiene toda la información del movimiento de x^* . A esta función de densidad se le llamará problema hacia atrás (backwards). Inversamente, si conocemos el valor de x y t , entonces podemos determinar la función de densidad para x^* en el tiempo futuro t^* . Este último será llamado el problema hacia adelante (forward). Las dos densidades anteriores están contenidas en la función de densidad de transición $p(x^*, t^* | x, t)$. Esta función p puede ser derivada como la solución de la ecuación diferencial parcial (EDP), que resultará de la deducción de las ecuaciones de Kolmogorov.

Determinamos la EDP para cada uno de dichos problemas. La deducción no es rigurosa pero está basada en una simple representación trinomial de una caminata aleatoria. Esta es una versión discreta de una caminata aleatoria para x , dado el proceso descrito en (8).

2.2. El problema hacia atrás (retrógrado o backwards)

En la figura 1 mostramos el diagrama de una caminata aleatoria trinomial en x .

Al tiempo futuro t^* la variable aleatoria toma el valor de x^* . Al tiempo anterior t , la variable tiene el valor de x . Si consideramos un lapso de tiempo δt , la variable tiene tres posibilidades de desplazarse una distancia δx : hacia arriba, hacia abajo o quedarse sobre la misma recta; con probabilidades $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$ y $1 - \alpha(x, t) - \beta(x, t)$ respectivamente. Si la variable puede tomar sólo uno de las tres nuevos valores al tiempo $t + \delta t$, es muy simple relacionar la probabilidad inicial de x al tiempo t a la probabilidad inicial con las otras x , $x + \delta x$ o $x - \delta x$ en un tiempo δt después. En otras palabras, se tiene el siguiente análisis.

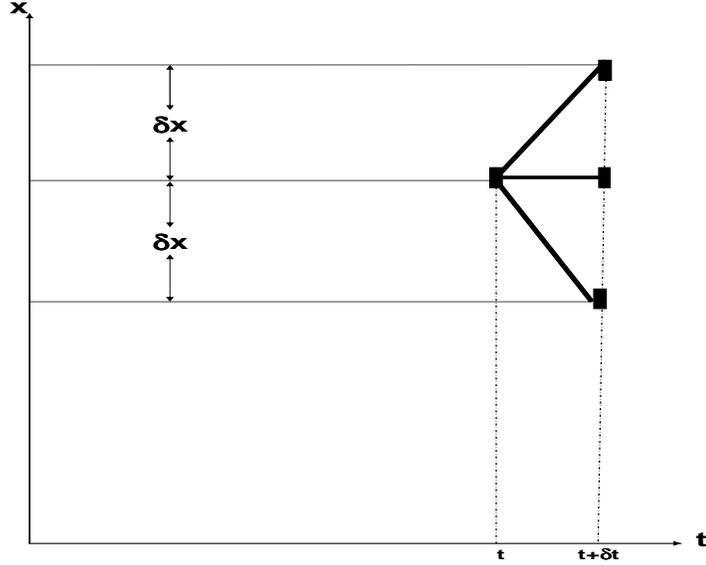


Figura 1: Caminata Aleatoria para el Problema hacia Atrás

La probabilidad de que la variable aleatoria esté en (x, t) es igual a la probabilidad de ir a $(x + \delta x, t + \delta t)$ multiplicada por la probabilidad de moverse hacia arriba, más la probabilidad de seguir en x multiplicada por la probabilidad de no movimiento, más la probabilidad de ir a $(x - \delta x, t + \delta t)$ multiplicada por la probabilidad de moverse hacia abajo.

Por simplicidad, no consideramos la dependencia de p en x^* y t^* , entonces la probabilidad de estar en x al tiempo t es:

$$p(x, t) = p(x + \delta x, t + \delta t)\alpha(x, t) + p(x, t + \delta t)(1 - \alpha(x, t) - \beta(x, t)) + p(x - \delta x, t + \delta t)\beta(x, t),$$

para δt y δx pequeños, podemos expandir todos los términos de la ecuación anterior en series de Taylor alrededor de (x, t) . Después de cálculos directos obtenemos:

$$(\alpha - \beta) \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial p}{\partial t} \delta t = 0. \quad (9)$$

Para encontrar los valores de las funciones α y β , consideramos las propiedades de la ecuación (8).

Así la media del salto en x debe ser $f(x, t)\delta t$ y la varianza del salto estará dada por $g^2(x, t)\delta t$. El proceso trinomial, sin embargo, tiene media de salto $(\alpha - \beta)\delta x$ y varianza $(\alpha + \beta - (\alpha - \beta)^2)\delta x^2$. Para encontrar α y β es importante considerar que $\delta x^2/\delta t = O(1)$, entonces queda:

$$\begin{aligned}\alpha(x, t) &= \frac{\delta t}{2\delta x^2}[g^2(x, t) + f(x, t)\delta x] \\ \beta(x, t) &= \frac{\delta t}{2\delta x^2}[g^2(x, t) - f(x, t)\delta x].\end{aligned}$$

Si sustituimos α y β en (9) y se divide por δt , obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{2}g^2(x, t)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(x, t)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, o como la ecuación diferencial parcial hacia atrás o retrógrada. Se le da este último nombre porque es un problema bien planteado⁴ con condiciones finales.

Las condiciones de frontera son determinadas mediante consideraciones específicas sobre la variable aleatoria, mientras que la condición final es más directa.

Si tomamos en cuenta la dependencia en x^* y t^* , entonces la condición final queda como:

$$p(x^*, t^* | x, t) = \delta(x - x^*), \quad \text{para } t = t^*.$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac⁵. Esta condición simplemente dice que al

⁴Es importante observar que la EDP retrógrada es un problema bien planteado, porque tiene una solución y es única [10], además de que la solución depende continuamente de los datos en el problema. También se deben de imponer condiciones de frontera y una condición final.

⁵La delta de Dirac puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto x_0 . En ocasiones se denomina también función de impulso.

Se escribe como

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0),$$

siendo $\delta(x)$ para el caso $x_0 = 0$.

tiempo t^* , la variable x puede tomar sólo el valor x^* .

Es importante mencionar que si la ecuación (10) es multiplicada por una función $q(x, t)$ y se integra por partes, se puede obtener directamente la ecuación de Kolmogorov hacia adelante (Fokker-Planck) y se hace el cambio de variable $t = t^* - \tau$ para transformar el problema de condiciones finales a un problema con condiciones iniciales.

2.3. El problema hacia adelante (forwards)

Análogamente al problema retrógrado, consideramos la caminata trinomial, con la misma elección para las probabilidades de cada rama de la caminata, α y β .

Haciendo el análisis y dejando a un lado la dependencia de p sobre x y t por simplicidad, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x^*, t^*) &= p(x^* - \delta x, t^* - \delta t)\alpha(x^* - \delta x, t^* - \delta t) \\ &+ p(x^*, t^* - \delta t)(1 - \alpha(x^*, t^* - \delta t) - \beta(x^*, t^* - \delta t)) \\ &+ p(x^* + \delta x, t^* - \delta t)\beta(x^* + \delta x, t^* - \delta t). \end{aligned} \quad (11)$$

Esto es similar a la ecuación hacia atrás. La diferencia principal radica en que las probabilidades α y β son ahora evaluadas en $x^* - \delta x$, $x^* + \delta x$ y x^* . Expandiendo en series de Taylor y haciendo un análisis similar al anterior, se tiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (g^2(x^*, t^*)p)}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial (f(x^*, t^*)p)}{\partial x^*} - \frac{\partial p}{\partial t^*} = 0, \quad (12)$$

También puede definirse por la integral

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } a < x_0 < b, \\ 0 & \text{si } x_0 < a \text{ o } x_0 > b. \end{cases}$$

o bien por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \right].$$

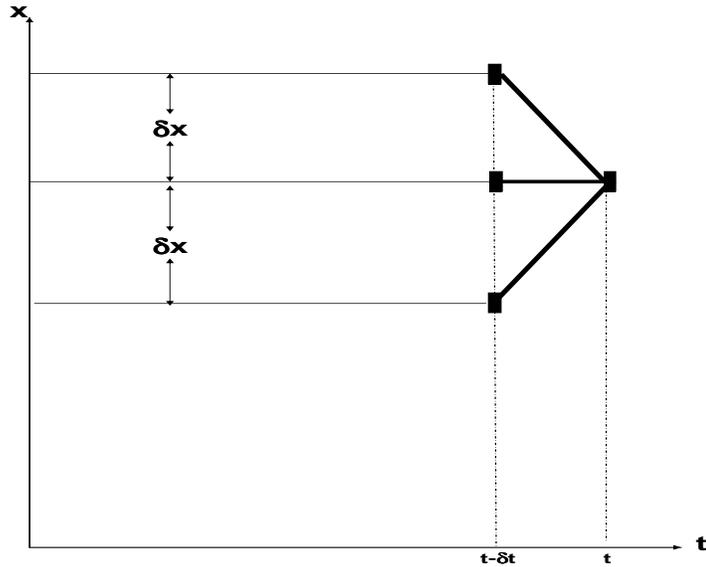


Figura 2: Caminata Aleatoria para el Problema hacia Adelante

la cual es conocida como la ecuación de Kolmogorov hacia adelante o bien como la ecuación de Fokker-Planck o como la ecuación parabólica hacia adelante. Se le da este nombre porque es un problema bien planteado con condiciones iniciales.

Introduciendo nuevamente la dependencia en x y t , la condición inicial es:

$$p(x^*, t^* | x, t) = \delta(x^* - x) \quad \text{para } t = t^*.$$

De aquí en adelante, nos enfocaremos en la nueva forma de valorar opciones americanas.

3. Una nueva forma de valorar opciones americanas

Deseamos valorar opciones americanas mediante la fórmula de Samuelson (1), usando un enfoque probabilístico generando la densidad correspondiente con la ecuación de Fokker-Planck ([37], [21], [29], [32] y [36]), de manera analítica y numérica. Por consistencia, haremos una comparación de esta nueva forma de obtener el precio de una opción de venta americana con las tradicionales en el marco de la teoría de Black-

Scholes, caso log-normal ([18], [21], [25], [26], [33], [34] y [38]). También comparamos esta propuesta con ejemplos específicos estimados con los métodos de árboles (binomial y Cox, Ingresoll y Rubinstein) y los método de diferencias finitas, más adelante se explica brevemente cada uno de ellos.

Es importante mencionar que el planteamiento del problema usando la fórmula de Samuelson y la ecuación de Fokker-Planck es probar que la última funciona eficientemente para resolver problemas de derivados financieros, en este caso se enfoca el estudio en las opciones americanas donde el activo subyacente sigue un proceso log-normal. Pero la idea principal detrás de esta formulación radica en poder utilizar la ecuación de Fokker-Planck en problemas más generales o complejos, como es el caso de poder introducir el efecto de factores macroeconómicos a diversos modelos de derivados financieros y de riesgo de crédito, en donde no se conozca a priori la distribución exacta de la densidad y en donde el activo subyacente no necesariamente tenga una distribución log-normal.

Para entender mejor el comportamiento de las opciones, en las Figuras (3) y (4) mostramos las opciones europeas y americanas con respecto a sus funciones de pago respectivas.

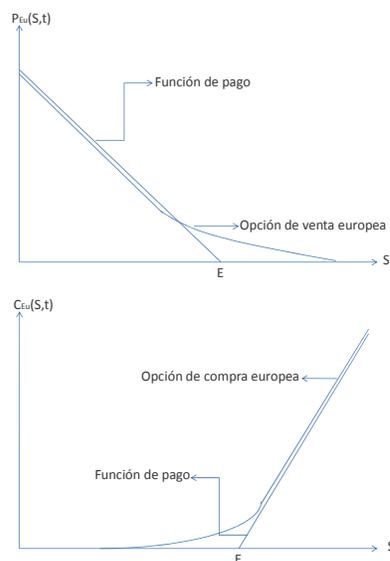


Figura 3: Comparación de las opciones europeas con respecto a su función de pago.

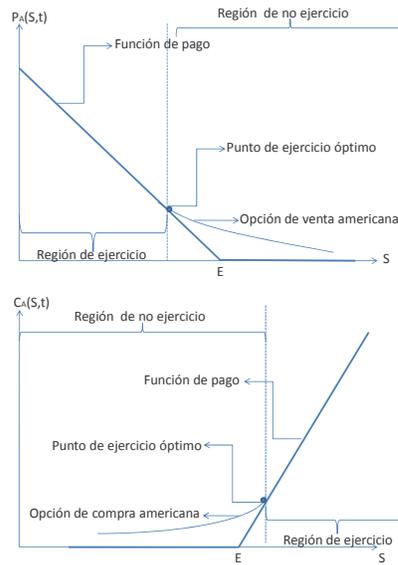


Figura 4: Comparación de las opciones americanas con respecto a su función de pago.

3.1. La nueva fórmula general: modelos con variables macroeconómicas

La importancia de considerar las variables o factores macroeconómicos que afectan los modelos tanto de productos derivados como de riesgo de crédito, radica en que si dichos factores no son considerados, los precios pueden variar significativamente (ver [28]).

Por ejemplo en el caso del modelo de Black-Scholes, para encontrar el precio de una opción, se considera que la tasa de rendimiento μ y la volatilidad σ del activo subyacente son constantes, lo cual no sucede en la realidad, ya que los movimientos en los precios del activo subyacente dependen de factores macroeconómicos que afectan el mercado financiero, lo cual hace al modelo poco realista.

La idea es extender este modelo, para el caso en que los parámetros puedan depender directamente de diferentes factores macroeconómicos o índices. Para ello usamos la técnica de generar la función de densidad de probabilidad por medio de la ecuación de Fokker-Planck, la cual nos permitirá introducir de manera sistemática el efecto de los factores macroeconómicos al modelo de valuación de opciones. Consideramos

un modelo financiero que toma en cuenta el efecto de los factores macroeconómicos y se mostrará la forma en que dicho modelo puede ser extendido o aplicado al caso específico del modelo del valor presente neto.

Supongamos que se desea calcular el valor de un derivado financiero con activo subyacente S , pero los parámetros μ y σ depende de n factores macroeconómicos.

Consideremos que el ambiente macroeconómico está formado por n variables macroeconómicas, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, las cuales están representadas por la siguiente dinámica:

$$dX = G(X, t)dt + \alpha F(X)d\tilde{W}, \quad (13)$$

donde $G(\cdot)$ es una función que depende de los n factores macroeconómicos, X , y del tiempo, t , α es una constante y $d\tilde{W}$ representa al movimiento browniano, el cual corresponde a la parte estocástica del proceso.⁶

Ahora supongamos que el activo subyacente, S , el cual puede ser representado por un proceso log-normal, en general sigue el proceso o la ecuación diferencial estocástica:

$$dS = \mu(X_1, \dots, X_n, t)Sdt + \sigma(X_1, \dots, X_n, t)SdW. \quad (14)$$

En este caso, la forma de introducir los factores macroeconómicos, así como la dependencia en el tiempo, es por medio de la tasa de rendimiento, μ , la volatilidad, σ , y la tasa de interés libre de riesgo, r . En este paso hay que calibrar el modelo (13) de tal forma que se determine el efecto que tienen dichos factores macroeconómicos en los parámetros μ y σ .

Por otro lado se calcula la probabilidad de transición vía la ecuación de Fokker-Planck, pero generalizada a n variables⁷. En este caso, $\rho(X, t)$ es la probabilidad de

⁶Por ejemplo se considera que el sistema depende de un solo factor macroeconómico tal que $X = r$, la tasa de interés libre de riesgo, entonces se puede considerar la dinámica de r dada por el modelo CIR o Vasicek, es decir, $dr = a(b - r)dt + \alpha r^\beta d\tilde{W}$.

⁷Si $F(X_i) = 1$ para toda i en la ecuación 13, entonces la ecuación de Fokker-Planck está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(G\rho) + \sqrt{2\alpha}\Delta\rho,$$

encontrar al sistema en el estado X al tiempo t .

La ventaja de usar esta ecuación radica en poder representar de forma concisa la dinámica del sistema de ecuaciones, que provienen de los factores macroeconómicos, por una sola ecuación diferencial parcial.

Posteriormente se puede aplicar la fórmula de Samuelson descrita en la ecuación (1), para obtener el precio de una reclamación americana contingente:

$$\begin{aligned} V_A^S(g) &= e^{-rt} E_\rho \left[g \left(\frac{S_t}{ES_t} S_0 e^{rt} \right) \right] \\ &= e^{-rt} \int_0^\infty g \left(\frac{S_t}{ES_t} S_0 e^{rt} \right) \rho(X, t) dS_t. \end{aligned} \quad (15)$$

Tanto la variable S_t , como la función de densidad ρ incorporan el efecto de los factores macroeconómicos por medio de su dinámica.

El modelo del valor presente neto generalizado

Supongamos ahora que la tasa de interés r es aleatoria, entonces el valor presente neto es:

$$E(VPN) = E \left(\int_0^t S(k) e^{-r(k)} dk \right). \quad (16)$$

En los casos en que la tasa de interés es aleatoria, comúnmente se utilizan modelos macroeconómicos de la tasa de interés de Vasicek o Cox, Ingersoll y Ross (CIR), en este caso aplicaremos el segundo por ser una generalización del modelo de Vasicek [32].

Supongamos que $r(t) = r_t$ es una función aleatoria del tiempo t , la cual corresponde al factor macroeconómico. Si r puede cambiar en todo instante del tiempo, r_t es también llamada la tasa instantánea de interés. El modelo CIR está dado por la ecuación diferencial estocástica:

$$\text{con } \text{div}(G\rho) = \sum \frac{\partial(G\rho)}{\partial X_i} \text{ y } \Delta\rho = \sum \frac{\partial^2 \rho}{\partial X_i^2}.$$

$$r_t = r_0 + c \int_0^t (\mu - r_s) ds + \sigma \int_0^t r_s^\beta dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

o en su representación diferencial:

$$dr_t = c(\mu - r_t)dt + r_t^\beta \sigma dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

donde c , μ y σ son constantes positivas, el exponente β contribuye a la determinación de las propiedades distribucionales de la tasa de corto plazo. En particular, $\beta = 0$ implica tasas “normales” (Vasicek), $\beta = 1/2$ da el modelo CIR y $\beta = 1$ implica tasas “log-normales” [31].

Entonces el modelo del valor presente neto generalizado (VPNG) está dado por:

$$\begin{aligned} E(VPNG) &= E \left(\int_0^t S(\tau) e^{-r\tau} d\tau \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^t S(\tau) e^{-r\tau} Q(r_\tau) d\tau dr, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $Q(r_t)$ corresponde a la función de densidad obtenida a partir de la ecuación diferencial estocástica (18).

La correspondiente ecuación de Kolmogorov hacia atrás para $Q(r_t)$ es:

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} = -c(\mu - r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^\beta \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}. \quad (20)$$

Análogamente, la ecuación de Fokker-Planck (Kolmogorov hacia adelante) es:

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} + \frac{\partial [c(\mu - r_t)Q(r_t)]}{\partial r_t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t^2}. \quad (21)$$

Haciendo los cálculos correspondientes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [c(\mu - r_t)Q(r_t)]}{\partial r} &= -cQ(r_t) + c(\mu - r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r} \\
\frac{\partial [\sigma r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t} &= \sigma \beta r_t^{\beta-1} Q(r_t) + \sigma r_t^\beta \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} \\
\frac{\partial^2 [\sigma^2 r_t^\beta Q(r_t)]}{\partial r_t^2} &= \sigma \beta (\beta - 1) r_t^{\beta-2} Q(r_t) + 2\sigma \beta r_t^{\beta-1} \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} + \sigma r_t^\beta \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo las parciales correspondientes en (21), obtenemos:

$$\frac{\partial Q(r_t)}{\partial t} + f(r_t) \frac{\partial Q(r_t)}{\partial r_t} - h(r_t) Q(r_t) = g(r_t) \frac{\partial^2 Q(r_t)}{\partial r_t^2}, \quad (22)$$

con

$$\begin{aligned}
f(r_t) &= c(\mu - r_t) - \sigma \beta r_t^{\beta-1} \\
g(r_t) &= \frac{1}{2} \sigma r_t^\beta \\
h(r_t) &= c + \frac{1}{2} \sigma \beta (\beta - 1) r_t^{\beta-2}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Por lo tanto, podemos concluir que se obtiene un modelo más general para calcular el valor presente neto. Tal vez resulte un poco más complicado resolver las ecuaciones de Kolmogorov⁸, pero también es cierto que los resultados pueden resultar mejores al considerar efectos externos que antes no se podían.

Como mostramos anteriormente, el usar la ecuación de Fokker-Planck puede ser muy útil para unir el mundo económico con el mundo financiero. Esta ecuación también puede ser utilizada en problemas de riesgo de crédito, entre muchos otros casos en donde la probabilidad de transición, dada por la ecuación de Fokker-Planck, sigue procesos más generales, tales como procesos de Lévy.

Para entender un poco más de cerca la importancia de aplicar la ecuación de Fokker-Planck a problemas financieros, veremos su utilidad en un problema particular

⁸En la mayoría de los casos no existen soluciones explícitas, pero siempre es posible aproximar dichas soluciones mediante algún método numérico.

aplicado a opciones americanas en el caso más sencillo en donde sólo se tiene un activo subyacente, el cual sigue un proceso log-normal. Aquí μ y σ son constantes.

3.2. La fórmula particular para el caso de opciones americanas

Introduciendo la nueva forma de valuar opciones americanas, definimos el precio de una opción americana cuyo activo subyacente no paga dividendos de la siguiente forma.

Para una S fija, se tiene:

$$V_A(S, t) = E_{\rho_n} [V_{Eu}(S, t)] = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) V_{Eu}(S, \tau) d\tau, & S > S_f; \\ PO, & S \leq S_f. \end{cases} \quad (24)$$

$$PO = \begin{cases} \max(S - E, 0), & \text{para una opción de compra;} \\ \max(E - S, 0), & \text{para una opción de venta.} \end{cases} \quad (25)$$

$S \in [0, \infty)$, S_f corresponde a la frontera libre, $0 \leq t \leq T_S$ es el tiempo antes de expirar, $0 \leq T_S \leq T$ es el tiempo de expiración en la frontera⁹, T es el tiempo de expiración (para ver la relación entre los tiempos T y T_S se muestra la figura 5), $\rho_n(S, t)$ es la probabilidad normalizada de que el activo tome el valor de S al tiempo t y V_{Eu} es la solución analítica a la ecuación de Black-Scholes, es decir,

$$V_{Eu}(S, \tau) = \begin{cases} SN(d_1) - Ee^{-r(\tau)}N(d_2), & \text{opción de compra;} \\ Ee^{-r(\tau)}N(-d_2) - SN(-d_1), & \text{opción de venta,} \end{cases} \quad (26)$$

donde

⁹Nótese que cuando se dice que T_S es el tiempo de expiración, se refiere al tiempo correspondiente de la frontera libre, es decir, para cada S existe un tiempo T_S sobre la frontera libre.

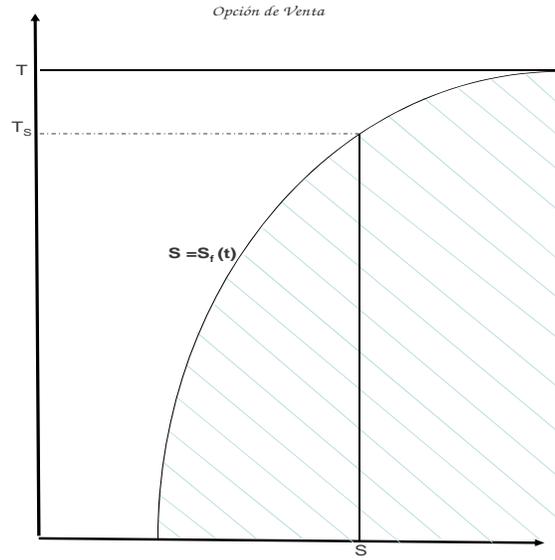


Figura 5: Relación entre los tiempos.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
 d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - \sigma^2/2)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de una normal con media cero y desviación estándar uno.

Las condiciones de consistencia están dadas por:

$$V_A(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{opción de compra;} \\ E, & \text{opción de venta,} \end{cases}
 \tag{28}$$

y

$$V_A(S, t) \rightarrow_{S \rightarrow \infty} \begin{cases} S, & \text{opción de compra;} \\ 0, & \text{opción de venta.} \end{cases} \quad (29)$$

Cabe mencionar que una fórmula alternativa para valuar opciones americanas, en donde la integración se hace con respecto al tiempo, puede verse en [5].

Antes de continuar con los detalles de la nueva forma de valuar opciones americanas, es necesario definir la ubicación de la frontera libre, para ello se muestran a continuación los siguientes resultados.

Frontera libre

El problema de encontrar el valor de una opción americana se traduce en hallar una solución a un problema de frontera libre. La estrategia para aproximarse a dicha solución es localizar dicha frontera libre S_f .

Entonces si V_A es continua y monótona, existe un valor $0 < S_f < E$, donde se encuentra localizada la frontera libre y $V_A(S_f, t) = E - S$ para una opción de venta y $V_A(S_f, t) = S - E$ para una opción de compra. Si S_f es calculada, se debe cumplir:

Opción de Compra (C_A).

$$\begin{cases} S < S_f, & \text{se mantiene;} \\ S \geq S_f, & \text{se ejerce.} \end{cases} \quad (30)$$

Opción de Venta (P_A).

$$\begin{cases} S < S_f, & \text{se ejerce;} \\ S \geq S_f, & \text{se mantiene.} \end{cases} \quad (31)$$

La curva S_f divide el dominio de S en dos partes tal como se muestra en la Figura 6. La curva $S = S_f(t)$ representa la frontera libre. Las partes sombreadas de ambas gráficas, representan el dominio donde la opción, de compra ($S < S_f$) o de venta ($S > S_f$), no es ejercida y su valor está dado por:

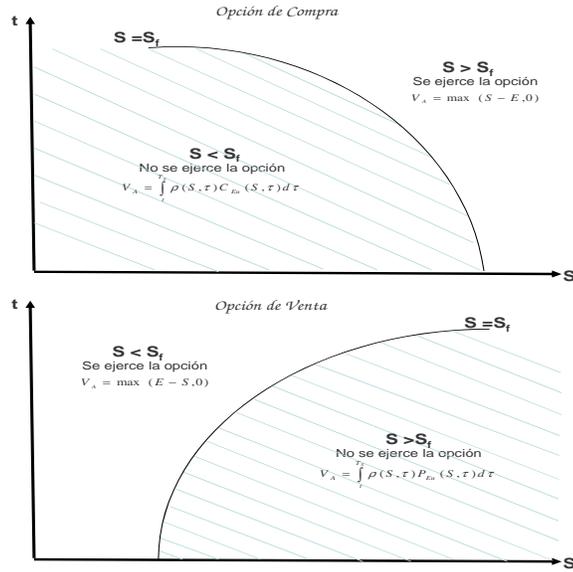


Figura 6: Región de solución de una opción americana

$$V_A = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n C_{Eu}(S, \tau) dt, & \text{opción de compra;} \\ \int_t^{T_S} \rho_n P_{Eu}(S, \tau) dt, & \text{opción de venta.} \end{cases} \quad (32)$$

La región fuera de la curva, $S = S_f(t)$, es donde la opción es ejercida. Dicha región para la opción de compra es $S > S_f$ y para la opción de venta es $S < S_f$, y su valor está dado por sus respectivas funciones de pago PO .

Un punto fuera de la curva para una opción de venta está dado por (S, t^*) , para $0 < t^* \leq T$ y $S < S_f$. Un punto sobre la curva está representado por (S_f, t) para $0 < t \leq T_S$ y $S = S_f$. Finalmente, un punto dentro de la curva es (S, t) para $0 < t \leq T_S$ y $S > S_f$. El caso de una opción de compra es similar, solo hay que invertir las desigualdades correspondientes a S respecto a S_f .§

Ya definida la región de solución de la opción americana, regresamos al problema de la nueva forma de valorar opciones americanas.

Entonces en palabras, definimos el precio de una opción americana en términos de calcular el precio de una opción europea para cada tiempo t , donde $t \in [0, T_S]$ (hay que observar que el tiempo de expiración corresponde al tiempo cuando se toca

la frontera libre T_S), multiplicada por un ponderador normalizado que representa la probabilidad de permanencia en S al tiempo t . Finalmente estos valores son integrados con respecto al tiempo.

Matemáticamente para cada t , dicho ponderador, ρ , corresponde a la función de densidad, la cual está determinada por la ecuación de Fokker-Planck siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2 S^2 \rho)}{\partial S^2} - \frac{\partial (rS\rho)}{\partial S}, \quad (33)$$

o bien calculando las parciales correspondientes, se llega a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} + (2\sigma^2 - r)S \frac{\partial \rho}{\partial S} + (\sigma^2 - r)\rho, \quad (34)$$

con condición de frontera:

- a) $\rho(0, 0) = 0$. Esta condición no es necesaria para el caso de una opción de venta americana.
- a) $\rho(S, 0) = \delta_{Dirac}(S - S_0)$ para $S \in [0, \infty)$.
- b) $\rho(S_f, t) = \tilde{\rho}(S_f, t)$, donde S_f representa la frontera libre.

La ecuación de Fokker-Planck con respecto a $\tilde{\rho}(S, t)$ se define en el rectángulo $[0, S] \times [0, T]$ y tiene condiciones de frontera $\tilde{\rho}(0, t) = 0$ y $\tilde{\rho}(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$. En el caso de la nueva fórmula, la región de solución está restringida por la curva resultante de la frontera libre S_f .

- c) $\rho(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$.

Otra condición de consistencia pero con respecto al parámetro es $\rho(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S_0 \rightarrow \infty$.

Nota 1 *Es muy importante tener en mente que la densidad ρ no satisface un problema de frontera libre. La frontera libre está dada por el precio de la opción, es decir, el dominio en el que se resuelve ρ está bien determinado y no depende de ρ misma.*

Nota 2 Cabe mencionar que dicha ecuación de Fokker-Planck con respecto a $\tilde{\rho}$ tiene una solución explícita en el caso log-normal (Black-Scholes)¹⁰, y dicha solución está dada como sigue.

Sean S_0 el valor inicial del activo subyacente y t_0 el tiempo inicial. S y t son los valores futuros correspondientes. Entonces la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor de S al tiempo t , dado que al tiempo inicial t_0 tuvo el valor de S_0 es:

$$\tilde{\rho}(S_0, t_0; S, t) = \frac{1}{\sigma S \sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\left[\log\left(\frac{S}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)\right]^2 \frac{1}{2\sigma^2(t-t_0)}}. \quad (35)$$

La demostración de que la ecuación (35) satisface la ecuación de Fokker-Planck, así como la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, se puede verificar en el apéndice H de [8].

Nota 3 La normalización para la función de densidad está dada por:

$$\int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau = 1,$$

de donde se obtiene que

$$\rho_n(S, t) = \frac{\rho(S, t)}{\int_t^{T_S} \rho(S, \tau) d\tau}. \quad (36)$$

Nota 4 Ejercer una opción de compra americana antes de la fecha de vencimiento no es óptimo, ya que su pago sería $S - E$, el cual es menor que $C_A(S, t)$. Así que el tiempo óptimo para ejercer este tipo de opciones es en su vencimiento, por lo tanto se dice que el valor de una opción de compra europea es igual al valor de una opción de compra americana. Este hecho puede verse en [9], [38], entre otros.

De acuerdo a esta última nota, el caso interesante a estudiar es el de una opción de venta americana, por lo tanto de aquí en adelante nos enfocaremos a estudiar dicho caso.

¹⁰En general la ecuación de Fokker-Planck no tiene soluciones explícitas.

3.3. Fórmula para una opción de venta

En lo que sigue y para efectos de los cálculos numéricos, se especifica el caso de una opción de venta americana. Además de que el valor de una opción de compra americana es igual al valor de una opción de venta europea.

Sea P_{Eu} y P_A el precio de una opción de venta europea y americana respectivamente, entonces la nueva forma de valorar una opción de venta americana está dada por

$$P_A(S, t) = \begin{cases} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau, & S > S_f; \\ \max(E - S, 0), & S \leq S_f, \end{cases} \quad (37)$$

La probabilidad ρ cumple las mismas condiciones antes mencionadas.

Las condiciones de consistencia para el caso de una opción de venta son:

a) $P_A(0, t) = \max(E - 0, 0) = E$

b) $P_A(S, t) \rightarrow 0$ cuando $S \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} P_A(S, t) &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau \\ &\leq \int_t^{T_S} \lim_{S \rightarrow \infty} \{ \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) \} d\tau \\ &\leq \int_t^{T_S} \lim_{S \rightarrow \infty} \rho_n(S, \tau) \lim_{S \rightarrow \infty} P_{Eu}(S, \tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Se pasa de la igualdad a la desigualdad por el lema de Fatou. $\int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau$ es acotada cuando $S \rightarrow \infty$. Además claramente $P_A \geq 0$.

c) Además $\frac{\partial P_A(S_f, t)}{\partial S} = -1$ para $S = S_f$.

El precio de una opción de venta de acuerdo a [5] cerca de la frontera en una vecindad de S_f y considerando que $S_f < E$ ¹¹ puede escribirse como:

¹¹Si V_A es continua y monótona, existe S_f tal que $0 < S_f < E$. En el caso contrario, $S_f > E$, se ejerce la opción. Para más detalles se puede consultar [38].

$$P_A = E - S + o(\text{dist}(S, S_f)), \quad (39)$$

con $d = \text{dist}(S, S_f)$. Esta ecuación corresponde a la condición que debe satisfacer una opción americana en la frontera libre $S = S_f$.

$$\begin{aligned} & \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau \\ &= \int_t^{T_S} [E - S + o(d)] \rho_n(S, \tau) d\tau \\ &= (E - S) \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau + o(d) \int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau \\ &= (E - S) + o(d). \end{aligned} \quad (40)$$

Si calculamos la parcial con respecto a S de la ecuación (40) obtenemos:

$$\frac{\partial P_A(S, t)}{\partial S} = \frac{\partial[E - S]}{\partial S} + o(1) = -1, \quad (41)$$

y como consecuencia al evaluar en $S = S_f$ tenemos:

$$\frac{\partial P_A(S_f, t)}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow S_f} \left[\frac{\partial[E - S]}{\partial S} + o(1) \right] = -1. \S \quad (42)$$

Del análisis anterior podemos observar que la nueva forma de valuar opciones americanas cumple con las condiciones necesarias de un problema americano (opciones de venta), en el caso de Black-Scholes.

A continuación se mostrará, por consistencia, que la nueva fórmula satisface la desigualdad de Black-Scholes.

3.4. Consistencia de la fórmula

La ventaja de usar esta nueva fórmula es que sólo se necesita determinar el valor de la función ρ , pues la solución para una opción europea ya es bien conocida (solución explícita de la ecuación de Black-Scholes para opciones europeas). Además de que podemos introducir de forma sistemática el efecto de factores macroeconómicos a la valuación¹². Obtendremos la función ρ numéricamente, pero antes de eso lo primero que queremos es verificar, por consistencia, que esta nueva forma de valorar opciones americanas es equivalente con la ya conocida en el caso log-normal.

Hay que recordar que la desigualdad de Black-Scholes para opciones americanas está dada por:

$$\frac{\partial V_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_A}{\partial S} - rV_A \leq 0. \quad (43)$$

Sea $\bar{\tau} = \tau + t$, entonces

$$V_A = \int_t^{T_S} \rho_n(S, \bar{\tau}) V_{Eu}(S, \bar{\tau}) d\bar{\tau} = \int_0^{T_S-t} \rho_n(S, \tau + t) V_{Eu}(S, \tau + t) d\tau. \quad (44)$$

Sin pérdida de generalidad y para simplificar los cálculos, tomamos a $\rho_n(S, \tau + t) = \rho$, $V_{Eu}(S, \tau + t) = V_{Eu}$ y como ya se mencionó anteriormente $0 \leq t \leq T_S$.

Ahora, de las ecuaciones (36) y(44) determinamos las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_n^2 \\ \frac{\partial \rho_n}{\partial S} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} - \frac{\rho_n}{I_\rho} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\ \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial S^2} &= \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} - \frac{2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{\rho_n}{I_\rho} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk + \frac{2\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 \end{aligned}$$

¹²Para este caso en particular, dicho efecto no es considerado, ya que sólo nos interesa ver que la ecuación de Fokker-Planck funciona bien en el caso más trivial.

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{4\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk - \frac{2\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\
& + \frac{2\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 - \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} \\
\frac{\partial V_A}{\partial t} &= \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} d\tau + \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} V_{Eu} d\tau + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) \\
\frac{\partial V_A}{\partial S} &= \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\
\frac{\partial^2 V_A}{\partial S^2} &= \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 4 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + 2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - 2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} d\tau + \frac{2}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \frac{2\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& - \frac{2\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \frac{2\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu}. \tag{45}
\end{aligned}$$

Si sustituimos (45) en la desigualdad (43) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_S-t} \rho_n \left[\frac{\partial V_{Eu}}{\partial t} + rS \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} - rV_{Eu} \right] d\tau + \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} V_{Eu} d\tau \\
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) + rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& - \sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0.
\end{aligned}$$

los términos que están dentro de los paréntesis cuadrados son cero, ya que dichos términos corresponden a la ecuación de Black-Scholes para opciones europeas. Además sabemos cuál es el valor de $\partial \rho / \partial t$, sólo hay que observar el hecho de que la ecuación de Black-Scholes es una ecuación hacia atrás o retrógrada. Entonces para hacer todos los cálculos consistentes, hay que considerar la ecuación de Kolmogorov hacia atrás para ρ . Por tal motivo tomamos la siguiente ecuación (haciendo el cambio de variable $\tau = T_S - t$ y abusando de la notación, volviendo a usar t en vez de τ)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -rS \frac{\partial \rho}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2}. \quad (46)$$

Substituyendo la ecuación anterior en la desigualdad tenemos:

$$-rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) + rS \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} V_{Eu} d\tau \\
& - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& - \sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0.
\end{aligned}$$

Podemos ver fácilmente que el primer término se elimina con el quinto y el segundo con el noveno, entonces los términos que quedan son:

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{T_S-t} \rho_n^2 V_{Eu} d\tau - \rho(S, T_S - t) V_{Eu}(S, T_S) \\
& - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau - rS \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau \\
& + rS \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial \rho}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} dk \right) V_{Eu} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + 2\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n^2}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} d\tau \\
& -\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho_n}{I_\rho} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^3}{(I_\rho)^3} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} d\tau \\
& -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} d\tau + \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& -\sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau - \sigma^2 S^2 \int_0^{T_S-t} \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau \\
& +\sigma^2 S^2 \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} V_{Eu} - \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{(I_\rho)^2} \frac{\partial T_S}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) V_{Eu} \\
& -\sigma^2 S^2 \frac{\rho^2}{(I_\rho)^2} \left(\frac{\partial T_S}{\partial S} \right)^2 V_{Eu} + \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \frac{\partial T_S}{\partial S} \\
& +\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\rho}{I_\rho} \frac{\partial^2 T_S}{\partial S^2} V_{Eu} \leq 0. \tag{47}
\end{aligned}$$

Sólo falta verificar que el lado izquierdo de la desigualdad es menor o igual que cero, lo cual se hará a continuación. La mayoría de los términos son negativos, así que sólo se necesitan estimar los términos con signo positivo. De hecho mostraremos que los términos positivos, después de un rescalamiento apropiado, son siempre de menor orden que los negativos. Antes hay que recordar algunos hechos importantes que serán útiles en la demostración. El término $\partial V_{Eu}/\partial S$, está dado por la letra griega Δ , que corresponde a la expresión

$$\Delta P_{Eu} = \frac{\partial P_{Eu}}{\partial S} = N(d_1) - 1 \quad \text{con} \quad d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{48}$$

la cual es negativa para el caso de la opción de venta europea cuyo activo subyacente no paga dividendos y

$$\Delta C_{Eu} = \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} = N(d_1) \quad \text{con} \quad d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{49}$$

es siempre positiva para una opción de compra europea, cuyo subyacente no paga dividendos (ver [38] y [13]). A continuación mostramos en la Figura 7 la variación de la delta de una opción de compra y venta con respecto al activo subyacente, así como

la variación de la delta con respecto al tiempo de maduración.

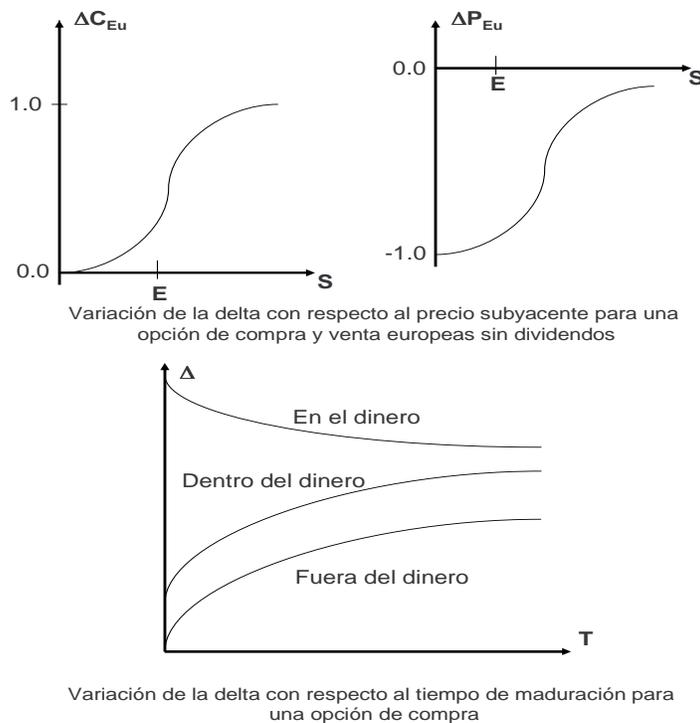


Figura 7: Variación de la Δ con respecto a las opciones europeas.

De aquí se desprende que

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow P_{Eu}(S_1, t) \geq P_{Eu}(S_2, t) \Rightarrow \frac{\partial P_{Eu}}{\partial S} \leq 0,$$

para una opción de venta y

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow C_{Eu}(S_1, t) \leq C_{Eu}(S_2, t) \Rightarrow \frac{\partial C_{Eu}}{\partial S} \geq 0,$$

para una opción de compra.

Por lo tanto, para el caso de una opción de venta, que es la que nos interesa para este análisis, se tiene $\partial P_{Eu}/\partial S \leq 0$.

Lema 1

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \leq 0.$$

Demostración

Procederemos por contradicción.

Para alguna S_0 se cumple que

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau > 0. \quad (50)$$

Por continuidad la integral sigue siendo positiva para alguna δ arbitraria y pequeña tal que $S \in [S_0 - \delta, S_0 + \delta]$, entonces:

$$\begin{aligned} & \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} d\tau dS = \int_0^{T_S-t} \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} dS d\tau \\ &= \int_0^{T_S-t} \left[- \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} dS \right] d\tau + \int_0^{T_S-t} \left[\left(\rho \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \right)_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \right] d\tau \\ & \quad + \int_0^{T_S-t} \left[\int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) dS \right] d\tau \\ &= \int_0^{T_S-t} (I_1 + I_2 + I_3) d\tau. \end{aligned}$$

Ahora analizaremos cada término por separado.

$$I_2 = \left(\rho \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \right)_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} = \rho(S_0 + \delta, t) \frac{\partial V_{Eu}(S_0 + \delta, t)}{\partial S} - \rho(S_0 - \delta, t) \frac{\partial V_{Eu}(S_0 - \delta)}{\partial S} \longrightarrow 0.$$

La diferencia I_2 tiende a cero, porque como δ es arbitraria y las funciones involucradas son continuas, puede tomarse tan pequeña como uno quiera, lo cual hace dicha diferencia despreciable.

Para el término I_1 se tiene que $\rho \geq 0$ por ser una función de densidad y por otro lado ya se vio que $\partial V_{Eu}/\partial S = N(d_1) - 1 \leq 0$, entonces

$$\frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} = N'(d_1) \geq 0 \quad \text{con} \quad N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2}.$$

Así que $\rho(\partial^2 V_{Eu}/\partial S^2) \geq 0$, entonces

$$I_1 = - \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \rho_n \frac{\partial^2 V_{Eu}}{\partial S^2} dS \leq 0.$$

Para I_3 de la relación en (48) sabemos que $\partial V_{Eu}/\partial S$ es negativa para una opción de venta y $\partial \rho/\partial S < 0$, así que

$$I_3 = \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{(I_\rho)^2} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \left(\int_{t+\tau}^{T_S} \frac{\partial \rho}{\partial S} dk \right) dS \geq 0. \quad (51)$$

Aunque el término sea mayor que cero, podemos hacerlo más pequeño que los términos negativos. Lo cual se explica con detalle en la Nota 5.

Finalmente llegamos a

$$\int_0^{T_S-t} \int_{S_0-\delta}^{S_0+\delta} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} dS d\tau \leq 0. \quad (52)$$

Lo cual es una contradicción que vino de suponer la desigualdad (50).

Por lo tanto se cumple que

$$\int_0^{T_S-t} \frac{1}{I_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{\partial V_{Eu}}{\partial S} \leq 0.$$

Además, $\rho(S, T_S - t) \geq 0$ y $V_{Eu}(S, T_S) \geq 0$ por lo cual

$$-\rho(S, T_S - t)V_{Eu}(S, T_S) \leq 0.$$

Nota 5 Es importante mencionar que el tiempo T_S depende de la frontera libre S_f , lo

que implica que la primera y segunda derivada con respecto a T_S también dependen de dicha frontera libre. Pero sabemos que la frontera libre es regular, concava, creciente y al menos es de clase C^2 , lo que nos garantiza que esta frontera exista y a su vez las derivadas de T_S también existen.

Nota 6 Para los términos positivos de la desigualdad (47), sea m un valor arbitrario muy grande tal que redefinimos

$$\int_{t+\tau}^{T_S} \rho(S, k) dk = m$$

Esto es posible porque la ecuación de Fokker-Planck es lineal. Observemos que también la fórmula de valuación propuesta es lineal con respecto a ρ . Por lo tanto podemos multiplicar y dividir por m sin alterar el resultado. En el cálculo arriba presentado, así como en la desigualdad (47), los términos positivos escalan al menos como $1/I_\rho$ y por lo tanto pueden hacerse más pequeños en relación a los términos negativos que son invariantes bajo dicho rescalamiento. Notemos que hay al menos uno de tales términos, por ejemplo, el segundo de la desigualdad (47), $-\rho(S, T_S - t)V_{Eu}(S, T_S)$.

Con esto finalmente acabamos de demostrar la afirmación de que la nueva forma de valuar opciones americanas dada por (37) satisface la desigualdad de Black-Scholes para el caso log-normal. Lo cual hace a esta nueva propuesta consistente. §

Nota 7 Otra forma de ver la consistencia de la fórmula es verificar que la fórmula de Carr, Jarrow y Myneni [5] es consistente con la de nosotros. Para ello a grandes rasgos se define la fórmula de Carr, Jarrow y Myneni como:

Teorema 1 En una región $C \equiv (B_t, \infty) \times [0, T]$, el valor de una opción de venta americana, P_τ , puede ser descompuesto en el precio de una opción de venta europea, p_τ , y una prima de ejercicio temprano, e_τ :

$$\begin{aligned} P_t &= p_t + e_t \\ e_t &= rE \int_t^T e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (53)$$

y $N(x) \equiv \int_0^x \exp(-z^2/2)/\sqrt{2\pi} dz$ es la función de distribución normal estándar. B_t es la frontera libre y $\rho_2 = r - \sigma/2$.

Entonces partiendo del teorema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
P_t &= p_t + e_t \\
&= p_t + rE \int_t^T e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) d\tau \\
&= \int_t^T 2\delta(\tau - t)p_\tau d\tau + \int_t^T rE p_\tau \frac{z_\tau}{p_\tau} d\tau \\
&= \int_t^T p_\tau \left[2\delta(\tau - t) + rE \frac{z_\tau}{p_\tau} \right] d\tau \\
&= \int_t^T p_\tau \rho_n(S, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{54}$$

Aquí, $p_t = P_{Eu}(S, t)$, $z_\tau = e^{-r\tau} N\left(\frac{\ln(B_\tau/S) - \rho_2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$ y $\rho_n(S, \tau) = 2\delta(\tau - t) + rE \frac{z_\tau}{p_\tau}$.

3.5. Aplicación de la nueva fórmula

Para verificar la eficiencia de la nueva forma de valorar opciones americanas, es necesario analizar su comportamiento con ejemplos específicos. Para ello consideramos diversos casos, en donde estimamos los precios de opciones de venta americanas con la nueva forma de valorar opciones americanas y comparamos con diferentes métodos, tales como: el métodos de árboles y el método de diferencias finitas (método explícito e implícito para EDP), esto por consistencia lo hacemos para el caso log-normal (Black-Scholes).

Antes de entrar en detalles sobre los métodos numéricos, presentamos a continuación el algoritmo por medio del cual calculamos los precios de las opciones de venta americanas, mediante la nueva forma de valorar opciones americanas.

Para $S \in [0, S_{max}]$ con $S_{max} = 2S$ fija:

1. En general, se estiman las probabilidades mediante la solución de la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck (33), para diferentes tiempos antes o iguales a expirar. Dichas probabilidades para el caso log-normal pueden encontrarse también mediante la solución explícita (35).

2. Se normalizan las probabilidades de tal forma que $\int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) d\tau = 1$.
3. Se calcula el precio de una opción de venta europea, mediante la fórmula explícita de Black-Scholes (26) con valor del activo subyacente S en los diferentes tiempos reales t ¹³.
4. a. Si se conoce la frontera libre por algún método, se toma $P = P_{Eu}$.
b. Si no se conoce la frontera libre, se verifica si el ejercicio temprano es óptimo en cada paso del tiempo, es decir, se toma el máximo entre la solución de la ecuación de Black-Scholes ($P_{Eu}(S, t)$) y la función de pago, $\max(E - S, 0)$. En otras palabras se considera la función $P(t) = \max(P_{Eu}(S, t), \max(E - S, 0))$.
5. Se multiplica la probabilidad normalizada ρ con la función $P(t)$ para cada t .
6. Se calcula la integral $\int_t^{T_S} \rho_n(S, \tau) P(S, \tau) d\tau$ para determinar el valor de una opción de venta americana.

El algoritmo puede entenderse mejor en la figura 8.

Ya teniendo el algoritmo general, describimos a continuación la forma numérica de resolver los ejemplos específicos que se mencionan más adelante, así como la comparación de algunos de ellos resueltos con métodos tradicionales y la nueva forma de valuar opciones americanas, para el caso de una opción de venta.

Para encontrar la solución numérica a la EDP de Fokker-Planck, utilizamos el paquete Finite Element Modeling LABORatory (FEMLAB Multiphysics in MATLAB), el cual es un paquete de software avanzado para el modelado y la simulación de cualquier proceso físico que se pueda describir a través de EDP's. La idea del método de elemento finito radica en dividir el dominio en estudio en un número finito de elementos, es decir, discretizar el dominio y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema, para después ensamblar la solución total. Una forma que se

¹³A priori no se sabe la ubicación de la frontera libre, lo que implica que el valor del tiempo de expiración en la frontera T_S tampoco se conoce, entonces para los cálculos numéricos en su lugar se toma el tiempo de expiración T .

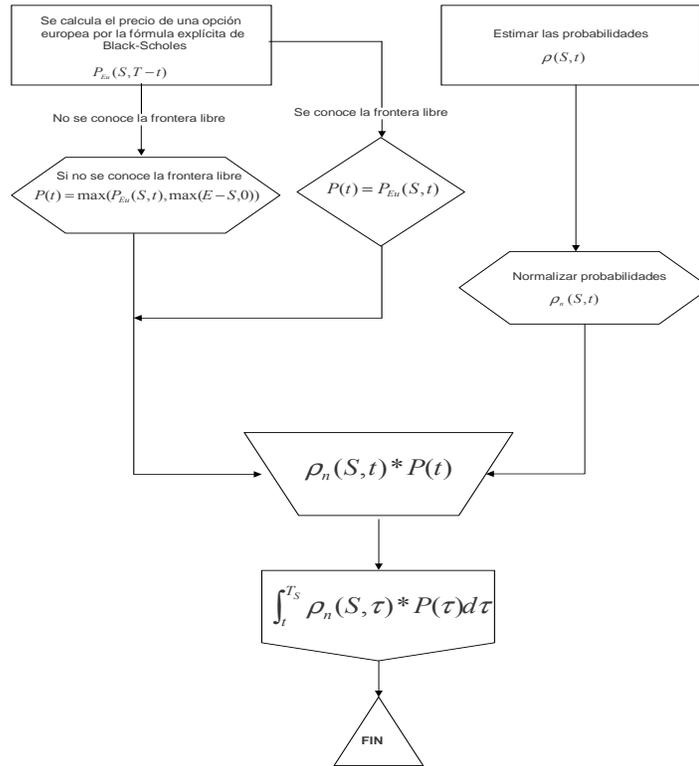


Figura 8: Diagrama de flujo para encontrar el precio de una opción de venta americana dada por la fórmula (37).

usa en el método para aproximar la solución de una EDP consiste en hacerlo mediante polinomios. Este método fue primeramente descrito por Clough en 1960.

Para obtener la solución de un problema mediante el método de elemento finito, se siguen los pasos genéricos

- a) Generación de la geometría.
- b) Discretización del sistema.
- c) Selección del tipo de elemento.
- d) Asignación de las propiedades del material o materiales.
- e) Definición de las cargas y de las condiciones de frontera.

f) Solución del conjunto de ecuaciones.

Para este caso en particular, donde S sigue un proceso log-normal (Black-Scholes), se puede utilizar la solución explícita (35) para determinar las probabilidades ρ . A continuación mostramos mediante el cuadro (1), la solución explícita de dichas probabilidades y la aproximación numérica. Consideramos $S = S_0 = 80$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ y $\Delta t = 0.0833$ para los doce meses de un año.

Cuadro 1: Comparación explícita y numérica de las probabilidades (ρ)

t_{meses}	ρ explícita	ρ numérica (EDP)
1	0.0432	0.0429
2	0.0305	0.0302
3	0.0249	0.0245
4	0.0216	0.0210
5	0.0193	0.0189
6	0.0176	0.0173
7	0.0163	0.0161
8	0.0153	0.0151
9	0.0144	0.0143
10	0.0136	0.0135
11	0.0130	0.0129
12	0.0125	0.0124

Como podemos observar, la aproximación numérica está muy cercana a los valores reales o explícitos de las probabilidades. Así que indistintamente podemos usar tanto la aproximación numérica o la fórmula explícita. Para fines prácticos y sólo en este caso para verificar que la nueva forma de valorar opciones americanas (37) es consistente con el caso log-normal (Black-Scholes), utilizamos la fórmula cerrada (35), la cual fue implementada en MATLAB.

A continuación mostramos con un ejemplo concreto, los pasos que sigue el algoritmo para valorar opciones americanas mediante la nueva fórmula (37). Siguiendo el orden del algoritmo se tienen los siguientes resultados.

Sea el precio del activo subyacente $S = S_0 = 50$, el precio de ejercicio $E = 50$, la tasa de interés libre de riesgo $r = 0.1$, la volatilidad $\sigma = 0.4$, fijamos el tiempo máximo que toma T en 5 meses que corresponde a $T = 0.41667$. En este caso no conocemos explícitamente la frontera libre.

1. Cálculo de las probabilidades ρ para una S fija (cuadro 2).

Cuadro 2: Probabilidades (ρ)

t_{meses}	0	1	2	3	4	5
ρ	0.9974	0.0691	0.0489	0.0399	0.0345	0.0305

2. Normalización de las probabilidades.

Se suman las ρ 's y el resultado se multiplica por Δt , es decir, se calcula $\rho_T = \int_0^T \rho(S, \tau) d\tau = \sum_{i=0}^5 \rho(S, i) \Delta t = 1.2203$. Después cada $\rho(S, i)$ se divide entre ρ_T , para obtener las $\rho_n(S, i)$ para $i = 0, \dots, 5$, con t el número de meses.

3. Cálculo del precio de una opción de venta europea con la fórmula explícita de Black-Scholes (cuadro 3).

Cuadro 3: Precio de una opción de venta europea para diferentes valores de t

t_{meses}	0	1	2	3	4	5
$P_{Eu}(S, t)$	5.4011	5.2747	5.1331	4.9738	4.7935	4.5881

Fuente: precios calculados en el paquete de MATLAB, mediante la función $blsprice(S, E, r, T - t_i, \sigma)$ con $t_i = 0, 0.08333, 0.16667, 0.25, 0.33333$ y 0.41667

4. Verificar si el ejercicio es óptimo, es decir, $P = \max(P_{Eu}(S, t), \max(E - S, 0))$.

En este caso la función de pago, $\max(E - S, 0)$, es cero, pues $E = S = 50$, así que la opción en cada paso del tiempo toma el valor que se deriva de la fórmula de Black-Scholes, $P = P_{Eu}$.

5. Se multiplican las probabilidades por el valor obtenido en 4, $\rho_n * P$.

6. Por último se determina el valor de la opción para las variables deseadas.

Se calcula $V_A(S, t) = \int_t^T P_{Eu}(S, \tau) \rho_n(S, \tau) d\tau$. En este caso se tomó $V_A(50, t) = \int_0^5 P_{Eu}(50, \tau) \rho(50, \tau) d\tau$. Los resultados se muestran en el cuadro 4.

Cuadro 4: Valores de una Opción de Venta Americana

t_{meses}	$V_A(S, t)$
1	5.3565
2	5.3087
3	5.2573
4	5.2019
5	5.1421

Fuente: cálculos propios utilizando como aproximación a la integral, el método del trapecio.

3.6. Comparación con otros métodos

Los métodos numéricos están basados en técnicas específicas que proporcionan resultados cuantitativos a modelos matemáticos que no tienen una solución analítica o cerrada¹⁴. La idea de los métodos numéricos es construir algoritmos que puedan ser implementados fácilmente y que sean computacionalmente eficientes.

Es importante estar consciente de que no todos los métodos numéricos se ajustan bien a todos los problemas.

Hay diferentes métodos para encontrar la solución numérica a los problemas de opciones financieras. Entre ellos se encuentran los métodos de Monte Carlo; éstos involucran la generación de un gran número de simulaciones numéricas del proceso aleatorio que sigue el activo subyacente. Estos métodos tienen la desventaja de que las características del ejercicio temprano son difíciles o imposibles de implementar.

Otra clase conocida de métodos son los métodos de lattice, los cuales incluyen el método binomial y trinomial. Estos modelos suponen que el proceso estocástico del subyacente es discreto. En estos casos, los modelos pueden escribirse directamente como conjuntos discretos de las ecuaciones en diferencia. Estos métodos son altamente eficientes cuando se estiman simples opciones de compra y venta, pero son menos eficientes cuando las estimaciones consideran opciones más complicadas. Otros métodos lattice comúnmente usados son casos especiales de esquemas de diferencias finitas explícitas.

Los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales par-

¹⁴Algunos modelos admiten soluciones exactas solo en términos de series infinitas o por funciones especiales muy complejas. En general es más eficiente resolver estos modelos numéricamente que aproximar por series infinitas.

ciales son las diferencias finitas y elementos finitos. Estos métodos se aplican a modelos cuyo activo subyacente supone un proceso estocástico continuo. Se basan en la discretización del problema de tal forma que la aproximación sea estable y convergente.

A continuación se describen brevemente los diferentes métodos más tradicionales utilizados para valorar o aproximar el valor de una opción de venta americana.

1. Método de árbol binomial (encontrada por Cox, Ross y Rubinstein). Supongamos que la vida de una opción de venta americana que no paga dividendos es dividida en N subintervalos de longitud Δt . Denotamos al j -ésimo nodo al tiempo $i\Delta t$ como el nodo (i, j) ($0 \leq N, 0 \leq j \leq i$). Definimos a f_{ij} como el valor de la opción en el nodo (i, j) . El precio del activo subyacente en dicho nodo es $S_0 u^j d^{i-j}$. Si el valor de una opción de venta en la fecha de expiración es $\max(E - S_T, 0)$ entonces

$$f_{N,j} = \max(E - S_0 u^j d^{N-j}, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N.$$

La probabilidad de movimiento del nodo (i, j) al tiempo $i\Delta t$, al nodo $(i+1, j+1)$ al tiempo $(i+1)\Delta t$ es p . Análogamente la probabilidad de movimiento del nodo (i, j) al tiempo $i\Delta t$, al nodo $(i+1, j)$ al tiempo $(i+1)\Delta t$ es $1 - p$. Suponiendo que no hay ejercicio temprano, la valuación neutral al riesgo da

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} [p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}],$$

para $0 \leq i \leq N - 1$ y $0 \leq j \leq i$. Cuando el ejercicio temprano es tomado en cuenta, el valor de $f_{i,j}$ debe ser comparado con el valor intrínseco, entonces

$$f_{i,j} = \max\{E - S_0 u^j d^{N-j}, e^{-r\Delta t} [p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}]\},$$

consideramos a $u = 1/d$, $p = (a - d)/(u - d)$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ y $a = e^{r\Delta t}$.

2. Método de diferencias finitas (explícito). Este método es utilizado cuando el precio de una opción es expresado en términos de una ecuación diferencial. Supongamos que el precio de la opción es representado por (43) y sin pérdida de generalidad tomamos a P_A como f .

Supongamos que la vida de la opción es T . Dividimos este tiempo en N intervalos iguales de longitud $\Delta t = T/N$, entonces tenemos $N + 1$ tiempos, es decir, $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$.

Supongamos que S_{max} es el precio del activo suficientemente grande tal que cuando es alcanzado, la opción de venta ya no tiene valor. Definimos $\Delta S = S_{max}/M$, lo que genera $M + 1$ precios del activo espaciados igualmente, es decir, $0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{max}$.

El nivel de S_{max} es escogido de tal forma que uno de éstos es el precio del activo actual.

Ambos conjuntos de puntos definen una malla que consiste de $(M + 1) \times (N + 1)$ puntos. El punto (i, j) en la malla corresponde al tiempo $i\Delta t$ y al precio del activo $j\Delta S$ y f_{ij} denota el valor de la opción en ese punto.

Para un punto (i, j) en la malla, las parciales pueden ser aproximadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}.\end{aligned}$$

Entonces la ecuación en diferencias queda como

$$\begin{aligned}rf_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}\end{aligned}$$

o

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right) \\
b_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right) \\
c_j^* &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left(\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \right).
\end{aligned} \tag{55}$$

3. Método de diferencias finitas (implícito). Análogo al método explícito tomamos las parciales como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \\
\frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}.
\end{aligned}$$

Ahora substituyendo las parciales en la igualdad tomada de (43), tenemos

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j},$$

para $j = 1, 2, \dots, M - 1$ e $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Reordenando términos obtenemos:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j},$$

donde

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t \\
b_j &= 1 + \sigma^2j^2\Delta t + r\Delta t \\
c_j &= \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t.
\end{aligned} \tag{56}$$

El valor de una opción de compra al tiempo T es $\max(E - S, 0)$, es decir,

$$f_{N,j} = \max(E - j\Delta S, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, M.$$

El valor de una opción de venta cuando $S = 0$ es E , es decir,

$$f_{i,0} = E, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

Suponemos que la opción de venta es cero cuando $S = S_{max}$, así que:

$$f_{i,M} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

Para más detalles del método se pueden consultar los libros [13] y [38].

Ya conociendo un poco la estructura de los métodos tradicionales con los cuales se va a comparar la nueva forma de valorar opciones americanas, a continuación presentamos algunos ejemplos.

En los siguientes cuadros, para estimar el valor de una opción de venta americana mediante los métodos *Binomial* y diferencias finitas (*Explícito e Implícito*), tomamos la implementación numérica de Bernt Arne Ødegaard (ver el sitio de internet: <http://finance.bi.no/bernt/>), mientras que para los métodos *CRR* (precio de una opción americana via árboles de Cox-Ross-Rubenstein calculado usando el método de diferencias finitas aplicado a la EDP de Black-Scholes), *FD* (precio de una opción americana via diferencias finitas aplicado a la EDP de Black-Scholes) utilizamos la implementación numérica de MATLAB (ver el sitio de internet <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=16476&objectType=file>). El método *Nuevo* corresponde a la nueva forma de valorar opciones americanas dada por la ecuación (37).

Consideraciones generales de la estimación numérica:

1. El tiempo es considerado en años, es decir 5 meses equivale a $5/12 = 0.4167$.
2. t_m es el tiempo mensual: 1,2,...,12 son los meses en donde estimamos la opción con respecto al Nuevo método.

3. En los otros métodos (Binomial, Explícito, Implícito, CRR y FD), el tiempo correspondiente es $\tau = T - t_m$, en donde $T = 1$ que equivale a 12 meses.
4. $S = S_0$ y $S_{max} = 2 * S_0$.
5. Consideramos $N = 100$ para el tiempo y $M = 100$ para el subyacente, excepto para el método explícito. En dicho método se utilizan $N = 11$ y $M = 20$.
6. $\Delta t = (t/12)/N$ y $\Delta S = (2 * S)/M$.
7. Nuevo a) es $\int_t^T \rho_n(S, \tau) \max(P_{Eu}(S, \tau), \max(E - S, 0)) d\tau$ y Nuevo b) es $\int_t^T \rho_n(S, \tau) P_{Eu}(S, \tau) d\tau$.

A continuación presentamos los cálculos numéricos, considerando las especificaciones antes mencionadas.

En el cuadro 5, en cada ejemplo cambian todas las variables involucradas en el modelo y como no se conoce T_S se toma como su aproximación a T .

Cuadro 5: Comparación de una opción de venta americana

VARIABLES	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
S_0	300	62	40
E	300	60	45
r	0.08	0.10	0.05
σ	0.3	0.2	0.2
t_m	4	5	7
Método	$V_A(S, t)$		
Nuevo a)	23.1808	1.6929	5.0000
Nuevo b)	23.1808	1.6929	4.8539
Binomial	22.9975	1.7652	5.1420
Explícito	22.8051	1.6504	5.0550
Implícito	22.9190	1.7535	5.1340
CRR	22.9970	1.7652	5.4720
FD	22.4680	1.5100	5.4030

Si en el ejemplo 3) consideramos que $t = 0.1$ y $T = 0.5833$, entonces Nuevo a) es igual a 5 y Nuevo b) es igual a 4.7936. Para el caso en que $t = 0.4$ y $T = 0.5833$, Nuevo a) es 5 y Nuevo b) es 4.8434.

Como ejemplo 4) se toman los valores $S = S_0 = 10$, $E = 13$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ y $T = 0.5(6meses)$. El método Binomial es 3.054.

Cuadro 6: Comparación de una opción de venta americana

Tiempo inicial t	Nuevo a)	Nuevo b)
$t = 0$	3.000	2.812
$t = 0.1$	3.000	2.835
$t = 0.4$	3.000	2.9351

La finalidad de presentar estos ejemplos, no es verificar si la propuesta de este artículo da mejores o peores estimaciones que los métodos tradicionales ya existentes. La idea básica consiste sólo en verificar que el nuevo método dado por la ecuación (37) da estimaciones congruentes.

El principal objetivo de la nueva metodología es que permite la incorporación sistemática del efecto de los factores macroeconómicos. El ejemplo numérico calibrado con datos reales para el caso en que exista el efecto de factores macroeconómicos se deja para trabajo posterior. Para fines de este trabajo nos quedamos con los modelos teóricos.

En conclusión podemos decir lo siguiente:

1. Matemáticamente demostramos que esta nueva propuesta para valorar opciones americanas satisface la ecuación de Black-Scholes.
2. Una aplicación de esta fórmula puede verse en la demostración analítica de que una opción de compra americana es igual a una opción de compra europea, es decir, el ejercicio temprano de una opción de compra americana no es óptimo y la probabilidad de permanencia ρ es una Delta de Dirac concentrada en $\{t = T\}$. Este resultado puede verse en [9].
3. Como una aplicación de la nueva forma de valorar opciones americanas mostramos numéricamente con diversos ejemplos, que esta nueva propuesta da aproximaciones aceptables en comparación con los métodos tradicionales, tales como: árboles (Binomial CRR) y diferencias finitas (Explícito e Implícito).

La ventaja de usar esta propuesta con respecto a las ya existentes es que para calcular el precio de cualquier opción americana, sólo se necesita aproximar el valor de la probabilidad de permanencia en el estado requerido, siempre y cuando ya se conozca

la ubicación de la frontera libre, pues el valor de una opción de venta europea ya se conoce explícitamente, lo cual hace al método más flexible y sencillo de estimar.

El hecho de que se tenga un sistema de ecuaciones dado por los factores macroeconómicos, no complica mucho el modelo, pues dicho sistema es representado por una sola ecuación de Fokker-Planck. En este caso ya no se tiene una solución cerrada a dicha ecuación. La solución será una aproximación numérica.

Además, al representar la probabilidad ρ por medio de las ecuaciones de Kolmogorov, se tiene la ventaja de poder incorporar sistemáticamente el efecto de los factores macroeconómicos, lo que haría el cálculo del precio de las opciones más realista.

Referencias

- [1] Bank, P. y H. Föllmer. (2003). *American Options, Multi-Armed Bandits, and Optimal Consumption Plans: A Unifying View*, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002, Vol.1814, pp. 1-47.
- [2] Bladt, M. y T. H. Rydberg. (1998). *An Actuarial Approach to Option Pricing under the Physical Measure and without Market Assumptions*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 22, pp. 65-73.
- [3] Boadie, M. y J. Detemple. (1996). *American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods*, The Review of Financial Studies, Vol.9, Núm. 4, pp. 1211-1250.
- [4] Carr, P. y A. Hirsa. (2002). *Why Be Backward? Forward Equations for American Options*, Morgan Stanley/ Courant Institute, NYU., pp. 1-25.
- [5] Carr P., Jarrow R. y R. Myneni. (2006). *Alternative Characterizations of American Put Options*, Mathematical Finance, Vol. 2, Núm. 2, pp. 87-106.
- [6] Chesney, M. y M. Jeanblanc. (2003). *Pricing American Currency Options in a Jump Diffusion Model*, France, pp. 1-19.
- [7] Christ Church College. (2004). *Nonlinear Black Scholes Modelling: FDM vs FEM*, A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for The MSc in Mathematical Finance, Oxford University.
- [8] Elizondo, R. (2009). *Incorporación de Factores Macroeconómicos en los Modelos de Valuación de Productos Derivados*, tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, IIMAS, UNAM .
- [9] Elizondo R. y P. Padilla. (2008). *An Analytical Approach to Merton's Rational Option Pricing Theory*, Analysis and Application, World Scientific Pub. Co. Inc., Vol.6, Núm.2, pp. 169-182.
- [10] Evans L.C. (1998). *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, U.S.A.

- [11] Geske, R. y H. E. Johnson. (1984). *The American Put Option Valued Analytically*, The Journal of Finance, Vol. 39, Núm.5, pp. 1511-1524.
- [12] Houde, H. y W. Xiaonan. *A Fast Numerical Method for the Black-Scholes Equation of American Options*, SIAM. J. NUMER. ANAL., Vol. 41, Núm.6, pp. 2081-2095.
- [13] Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall.
- [14] Hyungsok, A. y P. Wilmott. *On Trading American Options*, OCIAM, Oxford University.
- [15] Jarrow, R. A. (1998). *Preferences, Continuity and the Arbitrage Pricing Theory*, The Review of Financial Studies, Vol. 1, Núm. 2, pp. 159-172.
- [16] Leung, L. T. y W. S. Po-shing. (2002). *Valuation of American Options Via Basis Functions*, Technical Report No.2002-28, Department of Statistics, Stanford University, pp. 1-29.
- [17] Levendorskii, S. (2004). *The American Put and European Options Near Expiry, Under Lévy Processes*, University of Leicester, Department of Mathematics, pp. 1-30.
- [18] Llenera-Garcés, F. (2000). *Una Nota Sobre Valoración de Opciones Americanas y Arbitraje*, Investigaciones Económicas, Vol. XXIV(I), pp. 207-218.
- [19] Longstaff, F. y E. Schwartz. (2001). *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, this paper is posted at the scholarship repository, University of California, <http://repositories.edlib.org/anderson/fin/1-01>.
- [20] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*, Oxford University Press.
- [21] Lyuu, Y. (2000). *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics and Algorithms*, Cambridge University Press, U.S.A.
- [22] Matache A. M., Nitsche, P. A. y C. Schwab. (2003). *Wavelet Galerkin Pricing of American Options on Lévy Driven Assets*, Research Report Núm. 2003-06, Switzerland, pp. 1-26.

- [23] Méndez, R. E. (2007). *Correlación Temporal en la Valuación de Derivados*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas en proceso, UNAM.
- [24] Merton, R. C. foreword by P. A. Samuelson. (1995). *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Massachusetts.
- [25] Mikosch, T. (1999). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing, Singapore.
- [26] Musiela, M. y M. Rutkowski. (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin.
- [27] Odegaard, B. A. homepage <http://finance.bi.no/~bernt/>. Norwegian School of Management (BI), in Oslo, Norway. Department of Financial Economics.
- [28] Padilla, P. y M. Bladt. (2001). *Nonlinear Financial Models: Finite Markov Modulation and its Limits*, Quantitative Analysis in Financial Markets, Collected Papers of the New York University Mathematical Finance Seminar, Volume III, pp. 159-171.
- [29] Pontryagin, L., Andronov, A. y A. Vitt. *Appendix on the Statistical Treatment of Dynamical Systems*, pp. 329-349.
- [30] Protter, M. H. (1984). *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [31] Rebonato, R. (1996). *Interest-Rate Option Models*, John Wiley and Sons.
- [32] Risken, H. (1989). *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- [33] Steele, J. M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [34] Torres, S. *Monte Carlo Pricing of American Options*, Depto. Estadística, Facultad de Ciencias, Univ. de Valparaiso Chile, pp. 1-83.

- [35] Uys, N. (2005). *Optimal Stopping Problems and American Option*, A dissertation submitted to the Faculty of Science, University of the Witwatersrand, in fulfilment of requirements for the degree of Master of Science.
- [36] Wei-Bin, Z. (1991). *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [37] Werner, H. y R. Lefever. (1984). *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*, Springer-Verlag, Berlin.
- [38] Wilmott, P., Dewynne, J. y S. Howison. (1993). *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press.