

Estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones *B-spline* cúbicas

Diego Mauricio Vásquez E., Luis Fernando Melo Velandia*

Unidad de Econometría, Banco de la República, Colombia.

Recibido: octubre 2004 - Aprobado: noviembre 2004

Resumen. En este documento se presenta la descripción y los resultados de la estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés en Colombia utilizando el método de funciones *B-spline* cúbicas. Adicionalmente, se llevan a cabo comparaciones entre los resultados obtenidos a través de esta metodología y los presentados por Arango, Melo y Vásquez (2002) respecto a los métodos de Nelson y Siegel, y de la Bolsa de Valores de Colombia. Se observa que el desempeño del método de estimación de funciones *B-spline* cúbicas es similar al de Nelson y Siegel, y estos dos métodos superan al de la Bolsa de Valores de Colombia.

Palabras clave: estructura a plazos de las tasas de interés, *spline*, funciones *B-spline* cúbicas.

Clasificación JEL: C14, C51, C52, E43.

Abstract. This paper presents a description and results of the estimation of the Colombian term structure using cubic B-spline functions. The results of this methodology are compared with those presented in Arango, Melo and Vásquez (2002). The performance of the B-spline estimation and the Nelson and Siegel method are similar, and both methods outperform the polynomial methodology of the Bolsa de Valores de Colombia.

Keywords: term structure of interest rates, spline, cubic B-spline.

JEL classification: C14, C51, C52, E43.

* Las opiniones expresadas en este documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de la República ni las de su Junta Directiva. Agradecemos a Luis Eduardo Arango por su colaboración y sus valiosos comentarios.

El lector interesado puede contactar a los autores para obtener el código computacional para la estimación de funciones *B-Spline* cúbicas.

Correo electrónico: lmelovel@banrep.gov.co (L. F. Melo)
dvasques@banrep.gov.co (D. Vásquez)

Rev. Econ. Ros. Bogotá (Colombia) 8 (1): 1-23, junio de 2005

1. Introducción

En Colombia se cuenta, en la actualidad, con tres metodologías que permiten la estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés: i) la metodología de Nelson y Siegel utilizada y descrita en Arango, Melo y Vásquez (2002); ii) el método polinomial de la Bolsa de Valores de Colombia “Curva TES-CETES”, y iii) el método “*spline*” de suavización aplicado por Julio, Mera y Reveiz (2002).

Teniendo en cuenta los resultados de Arango, Melo y Vásquez (2002), la aplicación de la metodología de Nelson y Siegel presenta un mejor desempeño que el método polinomial de la Bolsa de Valores de Colombia. Dada la importancia que tiene la estimación diaria de la estructura a plazos de las tasas de interés para fines de política económica y para el mercado financiero en general, se propone contar con una metodología alternativa de estimación tal como la de funciones *B-spline* cúbicas, la cual tenga tan buen desempeño como la de Nelson y Siegel en términos de ajuste y no esté sujeta a la complejidad que impone este último método en cuanto a estimación por máxima verosimilitud en un contexto no lineal.

El presente documento se divide en 4 partes; la primera realiza una breve descripción del problema a tratar y presenta en detalle el método basado en funciones B-Spline cúbicas. En la segunda parte se presenta la metodología de estimación, en la tercera sección se muestran los resultados obtenidos para la tasa “*spot*” de bonos TES clase B para Colombia entre enero 4 y octubre 4 de 2001; también se realiza una comparación con los resultados de las metodologías de la Bolsa de Valores de Colombia y de Nelson y Siegel, y, finalmente, en la cuarta sección se presentan algunas conclusiones.

2. Descripción del problema

La estructura a plazos de las tasas de interés puede ser definida como el vector de factores de descuento de un conjunto de bonos “*Cero-Cupón*” o libres de riesgo de “*default*” con fechas de vencimiento diferentes.

El precio de un bono de esta categoría es función del flujo de caja que genera a través de su periodo de maduración, descontado a una determinada tasa; es posible entonces expresar la relación precio a descuento mediante la siguiente ecuación:¹

$$P_i = \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{(1+R_{ij})^j} \quad (1)$$

donde, P_i es el precio observado del i -ésimo bono transado, con $i = 1, 2, \dots, m$; C_{ij} es el valor observado del cupón o pago que recibe el respectivo bono en cada momento t_j

¹ En este caso se supone que el valor facial es incluido en el último pago cupón.

del período de maduración, con $j=1,2,\dots,n$; $(1 + R_{ij})^{-1} = d_{ij}$ constituye el factor de descuento, equivalente al precio de un bono puro que paga \$100 en cada momento. Dicho factor es función de la tasa “spot” R_{ij} a la cual se debe componer el factor de descuento hasta t_j para lograr \$100. La estructura a plazos de las tasas de interés corresponde a la dinámica temporal de dicha tasa, sin embargo al no ser observable directamente en la realidad, es necesario estimarla a partir de la función de descuento y, por tanto, tener estimaciones de la estructura a plazos.

Así, para determinar el precio de un bono de las características mencionadas, de manera *ex ante* en determinado momento del tiempo, es necesario tener una aproximación a la función de descuento y, por tanto, una estimación de las tasas “spot” implícitas.²

2.1. Funciones de aproximación

Steeley (1991) señala que las estrategias de aproximación a la función de descuento más empleadas en la literatura son las lineales. Una primera estrategia para tener estimaciones de las tasas *spot* es llevar a cabo estimaciones puntuales de éstas para una determinada muestra de bonos, tal como en Carleton y Cooper (1976). Sin embargo, a partir de esta estrategia se obtienen curvas de tasa *spot* y *forward* inestables en el tiempo.³ Es conveniente expresar la ecuación (1) como:

$$P_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} d_{ij} \quad (2)$$

Como alternativa a la estimación puntual de cada factor de descuento d_{ij} , se plantea la siguiente aproximación lineal a la función continua de descuento:

$$d(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i f_i(t) \quad (3)$$

con α_i parámetros desconocidos asociados a cada una de las funciones continuas de aproximación $f_i(t)$, la constante L se define como el número de segmentos en que se divide el espacio de aproximación más el grado de la función *B-spline*.⁴ Al sustituir (3) en (2) se tiene:

² Siguiendo a Sevansson (1994) y a Steeley (1991), para el cálculo de la curva de rendimientos –y por ende de la estructura a plazos de las tasas de interés– se utiliza el precio de un bono cero cupón, el cual se estima en función de la relación entre el pago total al vencimiento y la tasa *spot* compuesta anualmente. Con base en dicho precio se define la estructura a plazo como la relación entre los rendimientos de títulos con similar calidad crediticia, libres de riesgo, pero con diferente maduración.

³ Estas inestabilidades se deben a que con este método solamente se tienen estimaciones puntuales discretas.

$$P_i = \sum_{l=1}^L \alpha_l \sum_{j=1}^n C_{ij} f_l(t) \quad (4)$$

Una vez seleccionado el tipo de función de aproximación $f_l(t)$ y luego de ser evaluada en cada (t) , los parámetros α_l de la ecuación (4) pueden ser estimados utilizando mínimos cuadrados ordinarios.

2.2. Selección del tipo de función spline (Funciones B-spline cúbicas)

La estrategia de aproximación a la función continua de descuento obtenida a partir de una base o combinación lineal de funciones *spline*, es decir *B-spline*, se basa en el teorema de Weierstrass según el cual es posible aproximar cualquier función continua y diferenciable en un intervalo dado mediante un polinomio. El nivel de precisión de la aproximación está directamente relacionado con el grado del polinomio; sin embargo, si se dispone de un número reducido de datos la aproximación puede resultar con mucha variabilidad.

En este sentido, para aproximar una función continua en un intervalo $[a, b]$ por medio de una combinación lineal de funciones *spline* (o polinomios), tal como se propone en la ecuación (3), se subdivide el intervalo en n^* subintervalos de tal forma que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n^*} = b$. Así, una función $f(t)$ sobre el segmento $[a, b]$ se denomina *spline* de tipo $k + 1$ (grado k) si:

1. Es un polinomio de grado k en $[a, b]$.
2. Es $k - 1$ veces continuamente diferenciable en el segmento $[a, b]$

En particular, una función polinomial de grado $k=3$ sobre cada segmento $\Delta_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n^* - 1$, puede expresarse como:

$$f_i(t) = \sum_{r=0}^3 a_r^i (t - t_{i+1})^r, i = 0, 1, \dots, n^* - 1$$

Como ejemplo, la figura 1 ilustra el caso de seis funciones “*spline*” cúbicas definidas entre $[a, b]$.

⁴ En la sección I.2 se amplía esta definición.

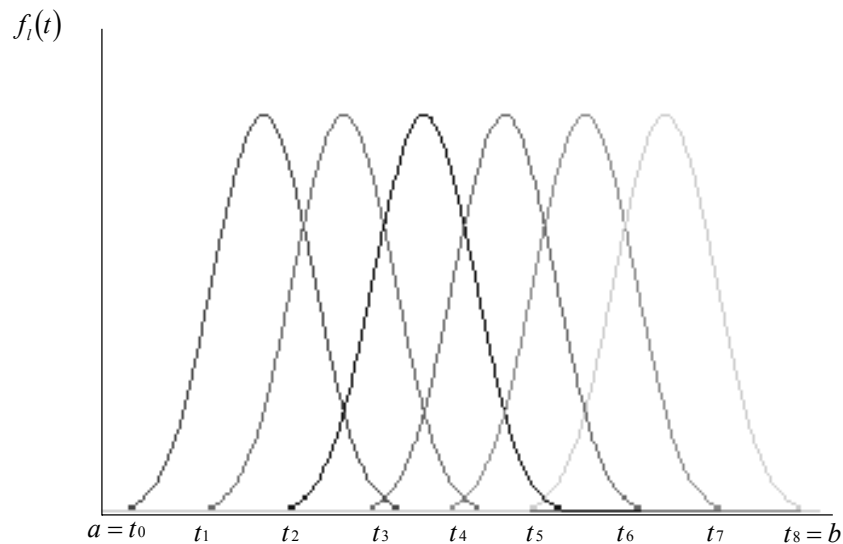


Figura 1. Funciones “spline” cúbicas definidas en el intervalo $[a, b]$

Según Steeley, la estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés se puede clasificar en dos técnicas fundamentales dependiendo de la estrategia de aproximación lineal a la función de descuento. La primera consiste en el uso de funciones *spline*, inicialmente propuesta por McCulloch (1971), y la segunda estrategia se basa en el uso de polinomios de Bernstein (Scheafer, 1973 y 1981).

La metodología utilizada por McCulloch (1971), caracterizada por el uso de funciones *spline*, las cuales a su vez están compuestas por funciones de potencia y funciones de potencia truncada, presenta problemas según varios autores. Según Powell (1981), una consecuencia de esta técnica es la generación de estimaciones con un alto grado de colinealidad. Steeley (1991) señala que el hecho de no seleccionar adecuadamente el tipo de función *spline* hace que algunas de las matrices que determinan el proceso de estimación presenten características denominadas “*ill-conditioned*” tal como en McCulloch (1971). Sin embargo, dichos problemas pueden evitarse utilizando el método de funciones *B-spline* cúbicas.

La ventaja principal del uso de funciones *B-spline* cúbicas es la prevención de los problemas señalados, gracias a las propiedades de convergencia que poseen y a que adoptan el valor de cero en una gran proporción del espacio de aproximación.

En general, una función *B-spline* de k -ésimo grado se puede definir de la siguiente forma:

$$B_p^k(t) = \sum_{l=p}^{p+k+1} \left[\prod_{h=p, h \neq l}^{p+k+1} \frac{1}{(t_h - t_l)} \right] (t - t_l)_+^k, \quad -\infty < t < \infty \quad (5)$$

El argumento t de la ecuación (5), definido en los números reales, corresponde a cada periodo t_{ij} en que el bono recibe su respectivo cupón, k es el grado de la función B -spline, p indica que la función $B_p^k(t) \neq 0$ cuando $t \in [t_p, t_{p+k+1}]$ con $p = -k, \dots, n^* - 1$ que corresponde al p -ésimo componente de la base, siendo n^* el número de segmentos en que se divide el espacio de aproximación, comprendido entre 0 y la fecha de maduración máxima observada entre todos los bonos. Los extremos de cada subsegmento comprendido entre 0 y $n^* - 1$ se denominan nodos internos, denotados por t_p con $p = 0, 1, \dots, n^* - 1$, en tanto que los nodos t_p con $p \in [-k, -k + 1, \dots, 0)$ se denominan nodos extras.⁵ El subíndice + indica que una función de potencia truncada, $(t - t_l)_+^k$ es igual a $\max[0, (t - t_l)^k]$. A partir de lo anterior se puede definir el número de funciones de aproximación B -spline que se utilizan en el proceso de estimación de los parámetros de la función de descuento como $L = n^* + k$.

2.3. Funciones B -spline lineales

En esta sección se considera la función B -spline lineal ($k = 1$), a manera de ilustración, tomando la misma notación y figuras presentadas por Steeley (1991). En este caso, la ecuación (5) puede expresarse de la siguiente forma, (ver detalles en Steeley (1991):

$$B_p(t) = \sum_{l=p}^{p+2} \left[\prod_{h=p, p \neq l}^{p+2} \frac{1}{(t_h - t_l)} \right] (t - t_l)_+, \quad -\infty < t < \infty \quad (6)$$

Dado que la función es diferente de cero únicamente en el intervalo $[t_p, t_{p+2}]$ a partir de la ecuación (6) y de la Figura 2 se observa que la función $B_p(t)$ adopta una forma creciente para $t \in [t_p, t_{p+1}]$ la cual está dada por el término $\left[\frac{(t - t_p)}{(t_{p+1} - t_p)} (t_{p+2} - t_p) \right]$. Para la porción del espacio de aproximación definido para $t \in [t_{p+1}, t_{p+2}]$ la forma decreciente de la función queda determinada por el término $\left[\frac{(t_{p+2} - t)}{(t_{p+2} - t_p)} (t_{p+2} - t_{p+1}) \right]$. La suma de ambos términos representa el valor de la función para $t \in [t_p, t_{p+2}]$.

⁵ Teniendo en cuenta que $B_p^k(t) \neq 0$ para $t \in [t_p, t_{p+k+1}]$, la función $B_{n^*-1}^k(t)$ correspondiente al nodo t_{n^*-1} es diferente de cero en el intervalo $[t_{n^*-1}, t_{n^*+k}]$. Por tanto, es necesario definir otro vector de nodos extras $(t_{n^*-1}, \dots, t_{n^*+k})$, para el cual no se construyen funciones B -spline.

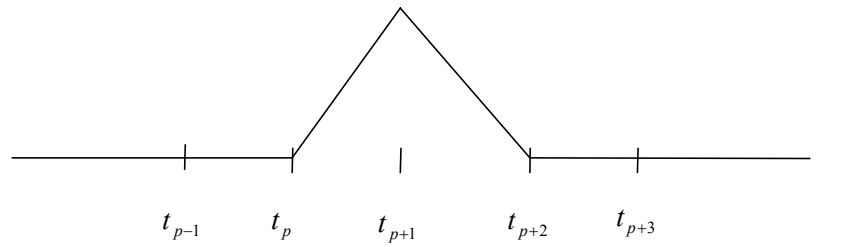


Figura 2. Función *B-Spline* lineal

En general, para cada nodo t_p , los tramos de la función *B-spline* lineal se calculan mediante:

$$B_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_p \\ \left(\frac{t - t_p}{(t_{p+1} - t_p)(t_{p+2} - t_p)} \right) & \text{si } t_p \leq t \leq t_{p+1} \\ \left(\frac{t_{p+2} - t}{(t_{p+2} - t_p)(t_{p+2} - t_{p+1})} \right) & \text{si } t_{p+1} \leq t \leq t_{p+2} \\ 0 & \text{si } t_{p+2} \leq t \end{cases} \quad (7)$$

Una vez especificado el conjunto de nodos $\{t_{-k}, t_{-k+1}, \dots, t_{n^*-1}\}$ es necesario calcular un conjunto de funciones *B-spline* dado por $\{B_p^k(t) : p = -k, -k+1, \dots, n^*-1\}$. Por ejemplo, suponiendo que $n^* = 2$, se tienen dos nodos internos $[t_0, t_1]$, un nodo externo a la izquierda de cero $[t_{-1}]$, dos nodos extras a la derecha de $n^* - 1 = 1$, dados por $[t_2, t_3]$, y $n^* + 1 = 3$ funciones *B-spline* $\{B_{-1}(t), B_0(t), B_1(t)\}$. Los tramos de la función $B_{-1}(t)$ correspondiente al nodo (t_{-1}) se calculan a partir de (7) así:

$$B_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_{-1} \\ \left(\frac{t - t_{-1}}{(t_0 - t_{-1})(t_1 - t_{-1})} \right) & \text{si } t_{-1} \leq t \leq t_0 \\ \left(\frac{t_1 - t}{(t_1 - t_{-1})(t_1 - t_0)} \right) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 \leq t \end{cases}$$

El valor de la función para $t \in [t_{-1}, t_1]$ se obtiene a partir de la ecuación (6) así:

$$B_{-1}(t) = \left[\frac{1}{(t_0 - t_{-1})(t_1 - t_{-1})} \right] (t - t_{-1})_+ + \left[\frac{1}{(t_{-1} - t_0)(t_1 - t_0)} \right] (t - t_0)_+ + \left[\frac{1}{(t_{-1} - t_1)(t_0 - t_1)} \right] (t - t_1)_+$$

Las tres funciones resultantes adoptan la siguiente forma (figura 3):

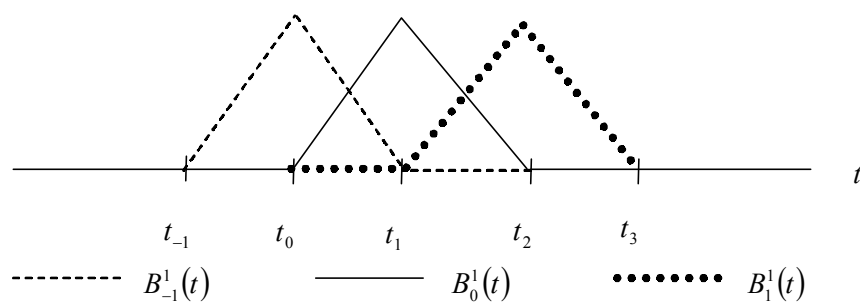


Figura 3. Funciones *B-Spline* lineales

2.4. Funciones *B-spline* de mayor grado (*k*)

Con el fin de lograr una estimación relativamente suave de la estructura a plazos de las tasa de interés, por medio de una aproximación lineal a la función de descuento, y evitar los problemas comentados anteriormente se utiliza el método de funciones *B-spline* cúbicas. Respecto al cálculo de dichas funciones, Steeley señala que aunque la definición de la función presentada en la ecuación (5) es lo suficientemente general para obtener la función de tercer grado, su cálculo es bastante complejo e inconveniente, incluso, a nivel computacional.

Como alternativa se plantea el uso de la fórmula recursiva propuesta por Powell (1981) que conduce a los mismos resultados y que facilita los cálculos. La redefinición de la función *B-spline* de *k*-ésimo grado para todo número real $t \in [t_p, t_{p+1}]$ está dada por:

$$B_p^k(t) = \frac{(t - t_p)B_p^{k-1}(t) + (t_{p+k+1} - t)B_{p+1}^{k-1}(t)}{(t_{p+k+1} - t_p)} \quad (7a)$$

Los valores de las funciones $B_p^{k-1}(t)$ y $B_{p+1}^k(t)$ se obtiene de manera recursiva mediante el siguiente esquema, calculando cada columna de izquierda a derecha:

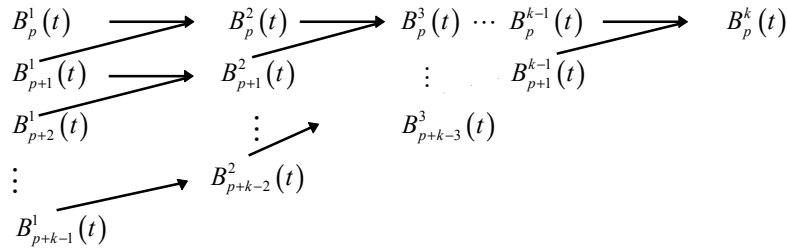


Figura 4

Los valores de las funciones que componen la primera columna de la Figura 4, para cualquier valor $t \in [t_p, t_{p+1}]$, se calculan de acuerdo con:

$$B_q^1(t) = 0 \text{ si } q \neq p-1 \text{ ó } q \neq p$$

$$B_{p-1}^1(t) = \frac{(t_{p+1} - t)}{[(t_{p+1} - t_{p-1})(t_{p+1} - t_p)]}$$

$$B_p^1(t) = \frac{(t - t_p)}{[(t_{p+1} - t_p)(t_{p+2} - t_p)]}$$

Para el caso de una función *B-spline* cúbica, $B_p^3(t) \neq 0$ cuando $t \in [t_p, t_{p+4}]$, gráficamente (Figura 5) se tiene:

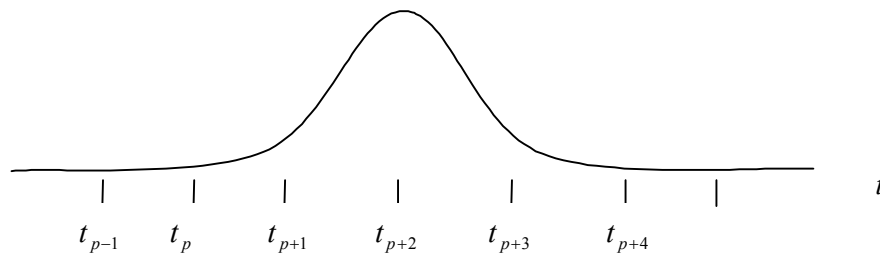


Figura 5. Función *B-spline* cúbica

Si $n^* = 2$, $k = 3$, el conjunto de nodos⁶ es $\{t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ y las $L = 5$ funciones *B-spline* cúbicas, $[B_{-3}^3(t), \dots, B_1^3(t)]$ para todo t tal que $(t_0 \leq t \leq t_1)$, se calculan en forma recursiva así:

⁶ En la descripción de la estimación se hace referencia al problema de ubicación de los nodos sobre el espacio definido por el periodo de vencimiento del bono.

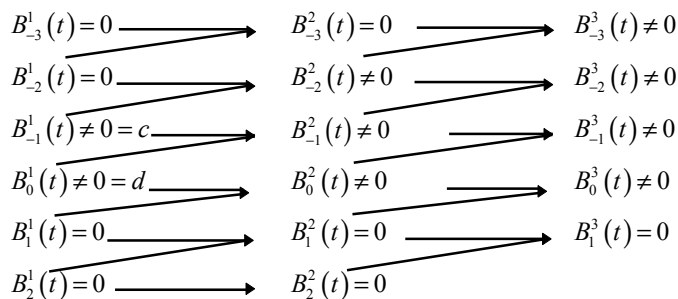


Figura 6. Cálculo de las 5 funciones *B-spline* cúbicas definidas en $t \in [t_0, t_1]$

con: $c = \frac{(t_1 - t)}{[(t_1 - t_{-1})(t_1 - t_0)]}$ y $d = \frac{(t - t_0)}{[(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)]}$, los restantes valores (diferentes de cero) de las funciones que componen las columnas 2 y 3 de la Figura 6 se calculan a partir de la ecuación (7a). La Figura 7 presenta las 5 funciones resultantes. En general, para cada valor de $t \in [t_p, t_{p+1}]$, con $p = -k, -k + 1, \dots, n^* - 1$, se calculan $L = n^* + k$ funciones *B-spline* dadas por $[B_{p-k}^k(t), \dots, B_{p+1}^k(t)]$ en forma recursiva mediante el procedimiento anterior.

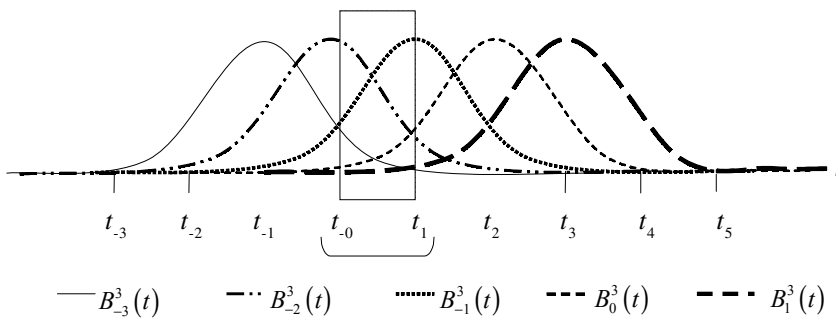


Figura 7. Funciones *B-spline* cúbicas definidas en $t \in [t_0, t_1]$

3. Estimación

Para la estimación de la ecuación (2) sobre un conjunto m de bonos con diferente vencimiento y transados en un determinado día se requieren los siguientes datos:⁷ el precio observado de cada bono (P_i), sus respectivos vencimientos o fechas de maduración y las tasas cupón. A partir de esta información se obtienen las matrices de tasas cupón (C_i) y de fechas (t_{ij}) en que se efectúan los pagos durante el periodo de vencimiento. La información requerida sobre estas variables es la misma que utilizan Arango, Melo y Vásquez (2002) para la estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés siguiendo las metodologías de Nelson y Siegel y de McCulloch. Los datos de transacciones de TES clase B en pesos son de periodicidad semanal (tomando las transacciones de los jueves) para el periodo comprendido entre el 4 de enero y el 4 de octubre de 2001.

A partir de los datos obtenidos y ordenados de manera creciente según vencimiento se conforma el siguiente sistema matricial:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} m_1^* \\ m_2^* \\ \vdots \\ m_m^* \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} f_1(t_{i1}) & f_2(t_{i1}) & \cdots & f_L(t_{i1}) \\ f_1(t_{i2}) & f_2(t_{i2}) & \cdots & f_L(t_{i2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_{in}) & f_2(t_{in}) & \cdots & f_L(t_{in}) \end{bmatrix}$$

$$C_i = [C_{i1} \quad C_{i2} \quad \cdots \quad C_{in}] \text{ y con } f_i(t_{ij}) = B_p^k(t_{ij}).$$

donde P es un vector ($m \times 1$) de precios observados de los bonos transados, M es el vector ($m \times 1$) de vencimientos,⁸ C_i es un vector fila ($1 \times n$) que contiene las tasas cupón que recibe cada i -ésimo bono durante su periodo de vencimiento con $i = 1, \dots, m$, T es una matriz ($m \times n$) de periodos de pagos asociados a cada cupón, y F_i es una matriz ($n \times L$) observable de funciones B -spline cúbicas evaluadas en cada periodo en el que los bonos reciben el cupón. Adicionalmente se definen los siguientes vectores:

⁷ Los datos se refieren al promedio diario de bonos transados según plazo de vencimiento. Por ejemplo, el precio de los bonos de un año de vencimiento corresponde al promedio ponderado de dichos bonos transados el respectivo día.

⁸ Tanto la fecha de transacción como las de vencimiento son transformadas, de manera aproximada, a números reales. Por ejemplo, enero 4 de 2001 expresada como $yyyy.mmdd$ (2001.0104) con $yyy = 2001$, $mm = 01$ y $dd = 04$ se calcula como número real redefiniendo sus componentes así: $mm_n = ent \left[100 (yyyy.mmdd - yyyy) \right]$ y $dd_n = 10000(yyyy.mmdd - yyyy - \frac{1}{100}mm_n)$, por último se expresa la fecha en números reales a partir de $m_i^* = yyyy + \frac{1}{12}(mm_n - 1) + \frac{1}{365}(dd_n - 1)$, donde “ent” representa el operador parte entera.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

donde: α es un vector ($L \times 1$) de parámetros desconocidos y e un vector ($m \times 1$) no observable de términos de perturbación estocástica. Dado lo anterior es posible redefinir la ecuación (4) en términos econométricos así:

$$P = D\alpha + e \quad (8)$$

La matriz de diseño D se define como $D = \begin{bmatrix} C_1 F_1 \\ \vdots \\ C_m F_m \end{bmatrix}$

Por tanto, los elementos que componen esta matriz son:

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n C_{1j} f_1(t_{1j}) & \sum_{j=1}^n C_{1j} f_2(t_{1j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n C_{1j} f_L(t_{1j}) \\ \sum_{j=1}^n C_{2j} f_1(t_{2j}) & \sum_{j=1}^n C_{2j} f_2(t_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n C_{2j} f_L(t_{2j}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n C_{mj} f_1(t_{mj}) & \sum_{j=1}^n C_{mj} f_2(t_{mj}) & \cdots & \sum_{j=1}^n C_{mj} f_L(t_{mj}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

3.1. Determinación del número y posición de nodos

Una vez obtenida la información, se elige una estrategia de aproximación lineal a la función continua de descuento a partir de una base de funciones *B-spline* cúbicas. El primer paso de dicha aproximación consiste en determinar el número de subintervalos (n^*) en que se divide el periodo comprendido entre 0 y la fecha máxima de vencimiento observada en el conjunto de bonos (m_m^*).

Siguiendo la estrategia de McCulloch (1971),⁹ se selecciona (n^*) en función del número (m) de bonos, para lo cual se calcula n^* como el entero más cercano a $\sqrt{m} - 1$.

⁹ Sepälä y Vietriö describen algunas ventajas y desventajas de las metodologías para la selección del número y posición de los nodos, entre las cuales señalan la de McCulloch (1971), los algoritmos de optimización propuestos por DeBoor (1978) y Powell (1981), así como las estrategias de Litzenger y Rolfo (1984) y Langetieg y Smoot (1989).

Después de obtener el número de segmentos se determina la ubicación de los nodos internos y del primer nodo extra a la derecha $[t_0, \dots, t_{n^*}]$ de tal forma que el número de observaciones por segmento sea aproximadamente igual, en el espacio de aproximación lineal, a la función continua de descuento. Las funciones obtenidas de esta forma reciben el nombre de *B-spline* Cardinales.¹⁰ En la metodología propuesta por McCulloch, los (n^*) subintervalos que conforman el intervalo $[0, m_m^*]$ son adyacentes, es decir $[t_{p-1}, t_p]$ y $[t_p, t_{p+1}]$ con $p = 1, \dots, n^*$, $t_p = M_{(t+1), 1} + \theta (M_{(t+1), 1} - M_{t, 1}) + \varepsilon$, siendo $M_{t, 1}$ el t -ésimo elemento del vector M ,¹¹ t es el entero más grande en $[(h-1)m/n^*]$, con $h = 1, \dots, n^* + 1$ y $\theta = [(h-1)m/n^*] - 1$ y $\varepsilon = 0.00001$, el cual se adiciona para permitir que $t_{ij} \geq t_p$ y que $t_{ij} \leq t_{p+1}$.

Siguiendo a Steeley (1991), la ubicación de los nodos extras a la izquierda de cero, es decir por fuera de muestra, se determina de tal forma que $t_{-3} = -3$, $t_{-2} = -2$ y $t_{-1} = -1$, y los nodos extras a la derecha de t_1 (igualmente por fuera de muestra) se ubican con base en la siguiente regla: $t_p = m_m^* \times (h + \lambda)$, con $p = n^* + 1, n^* + 2, \dots, n^* + k$, $h = 1, 2, 3$ y λ se selecciona entre los siguientes valores (0.94, 1.0, 1.2) de tal forma que resulte una función de descuento más suavizada.¹²

Con base en la posición de los nodos y los periodos en que cada bono recibe sus respectivos cupones se construye la matriz F de funciones *B-spline* cúbicas siguiendo el procedimiento recursivo de la Figura 6 y mediante la ecuación (7). Con base en las matrices F y C se construye la matriz D y se obtiene la estimación de los parámetros de la ecuación (4), es decir $\hat{\alpha}$, mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios.

3.2. Restricción sobre la función de descuento

Según Steeley, la única restricción pertinente sobre la función de descuento consiste en asegurar que ésta adopte un valor de uno en el periodo cero (como en McCulloch, 1971), es decir:

$$d(0) = \sum_{l=p-k}^{l=p+n} \alpha_l B_l^k(0) = 1 \quad (10)$$

¹⁰ Ver detalles en Hastie y Tibshirani (1991).

¹¹ Cuando $t = 0$ entonces $t_p = 0$.

¹² En cada vector de nodos (extras a la izquierda de cero, internos, y extras a la derecha de t_{n^*}) se tiene una distancia igual entre nodos lo cual define una base de tres conjuntos de funciones *B-spline* cúbicas cardinales uniformes. Véase Hastie y Tibshirani (1991).

Dicha restricción indica que en el caso de un bono que paga \$100 en cada momento t_{ij} , la tasa *spot* a la cual debe ser compuesto el factor de descuento en el momento $t_{ij} = 0$ para lograr \$100 es cero.

La restricción sobre la función de descuento puede ser expresada en forma matricial compacta como $W\alpha = w$, donde:

$$W = [f_1(0) \quad f_2(0) \quad \cdots \quad f_L(0)], \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix}, w = 1$$

El estimador de mínimos cuadrados ordinarios de α sujeto a dicha restricción¹³ es:

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} + (D'D)^{-1} W' [W(D'D)^{-1} W']^{-1} (w - W\hat{\alpha})$$

Sustituyendo α por $\hat{\alpha}^*$ y $f_i(t)$ por $B_p^3(t_{ij})$ en la ecuación (3) se obtiene la función de descuento estimada para la cual cada factor de descuento d_t tiene una tasa de interés *spo* asociada que puede ser calculada, según Stealy (1991), a partir de:

$$R_t = \left[\frac{1}{\hat{d}_t} \right]^{1/t} - 1 \quad (11)$$

4. Resultados

Con el objetivo de hacer una comparación gráfica, en la Figura 8 se presentan los valores observados y estimados de los precios, los rendimientos al vencimiento y la tasa *spot* para el 4 de octubre de 2001. Como puede apreciarse, la tasa *spot* resulta acorde con lo que se señala teóricamente respecto a su forma, es decir, en términos de su pendiente, curvatura y volatilidad. Así mismo, resulta similar a las que se obtienen por medio de otras metodologías. La curva adopta valores en un rango entre 12 y 15,5% (en ningún caso es negativa) para vencimientos hasta de 7 años, y no requiere imponer un valor *ad-hoc* de convergencia de la tasa. Sin embargo, se destaca una pendiente poco pronunciada en el tramo corto de la gráfica. Teniendo en cuenta la aproximación entre los valores observados y los estimados, puede decirse que el ajuste en términos de precios parece mayor que en cuanto a rendimientos. Esta comparación se establece en términos más formales en la Tabla 1.

¹³ Ver detalles en Judge et al. (1985).

En la Figura 9 se presenta la función de descuento estimada y la tasa *forward*. La forma *cuasi* lineal que adopta la función de descuento se debe al tipo de aproximación seleccionado. Sus valores en un rango entre 36 y 96,0% resultan intuitivos. Igualmente, en esta figura se puede apreciar la dinámica de la tasa *forward*, definida por Steeley como la tasa de crecimiento porcentual de la función de descuento, la cual fluctúa en un rango entre 3,1 y 4% y, al igual que la tasa *spot*, adopta una forma intuitiva y acorde con estimaciones obtenidas por medio de otras metodologías.

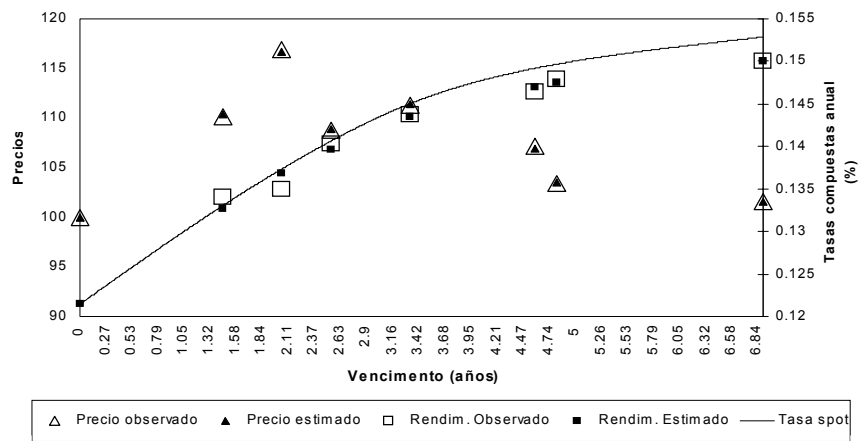


Figura 8. Tasa Spot, 4 oct. 01. Metodología B-Spline cúbica

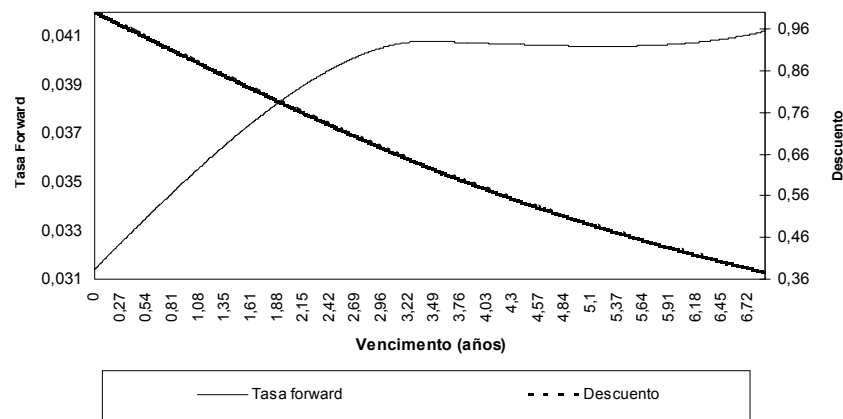


Figura 9. Tasa Forward y descuento. 4 oct 01. Metodología B-Spline cúbica

Rev. Econ. Ros. Bogotá (Colombia) 8 (1): 1-23, junio de 2005

En las Figuras 10, 11 y 12¹⁴ se presenta, para cada metodología considerada, la estimación semanal de la tasa *spot* para el periodo comprendido entre enero y octubre de 2001. Se presentan cuatro perspectivas diferentes del mismo gráfico con el fin de tener una mejor visualización del comportamiento de dicha tasa.

Como puede observarse, al igual que en Arango, Melo y Vásquez (2002), la tasa *spot* estimada con el método de regresión *B-spline* cúbica presenta patrones similares a los obtenidos bajo las otras dos metodologías. Sin embargo, en uno de los días al inicio de la muestra se presenta un comportamiento diferente con respecto a la metodología de Nelson y Siegel. Como hecho relevante, la menor volatilidad de la tasa *spot* se obtiene al utilizar la metodología de Nelson y Siegel.

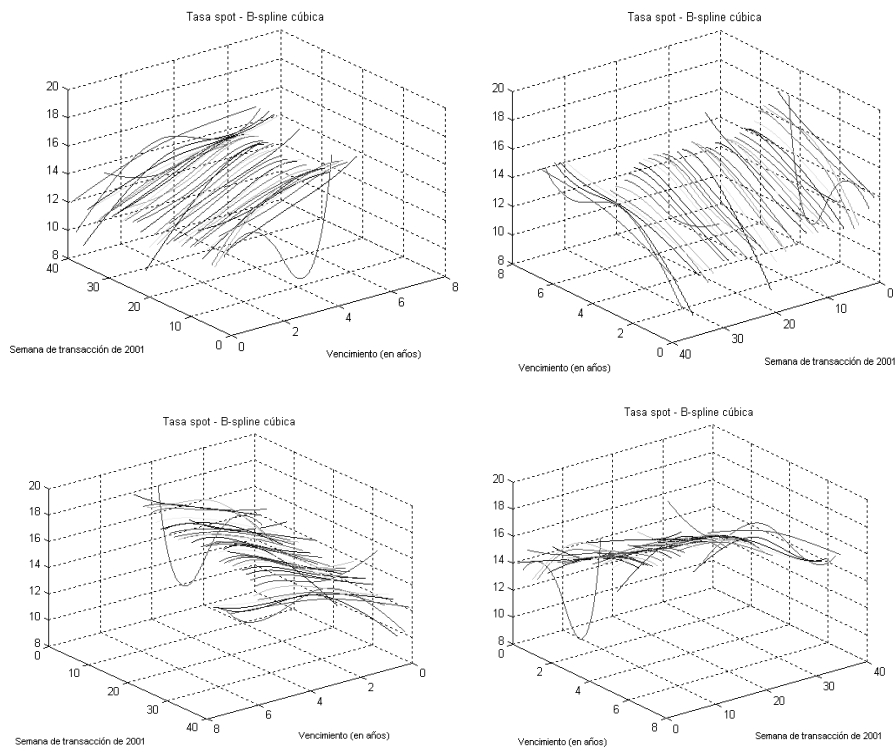


Figura 10. Curva *spot* – Metodología *B-spline* cúbica

¹⁴ En las Figuras 10, 11 y 12 se presentan las diferentes estimaciones de las tasas *spot* con datos que incluyen la tasa interbancaria (TIB).

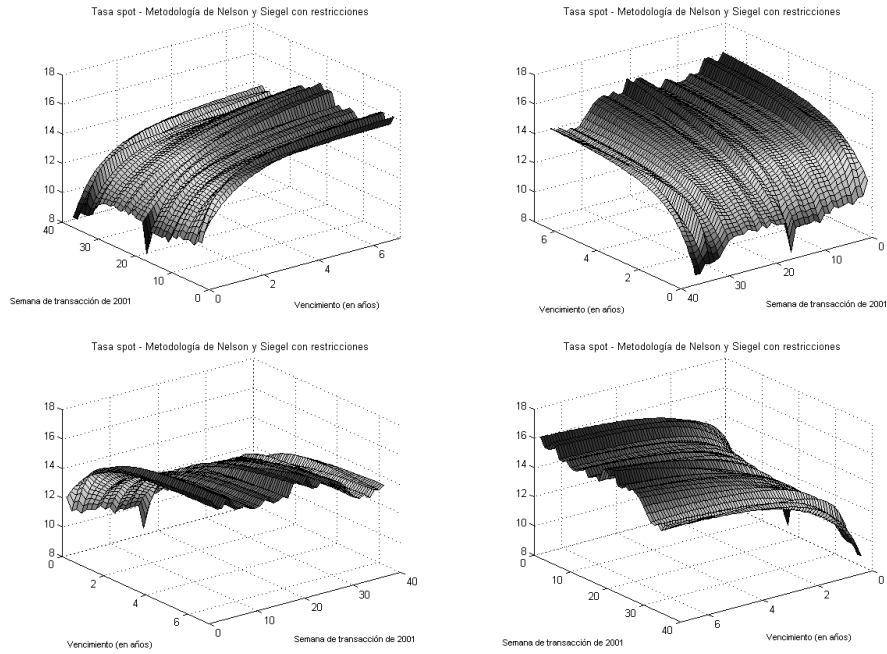


Figura 11. Curva spot – Metodología de Nelson y Siegel

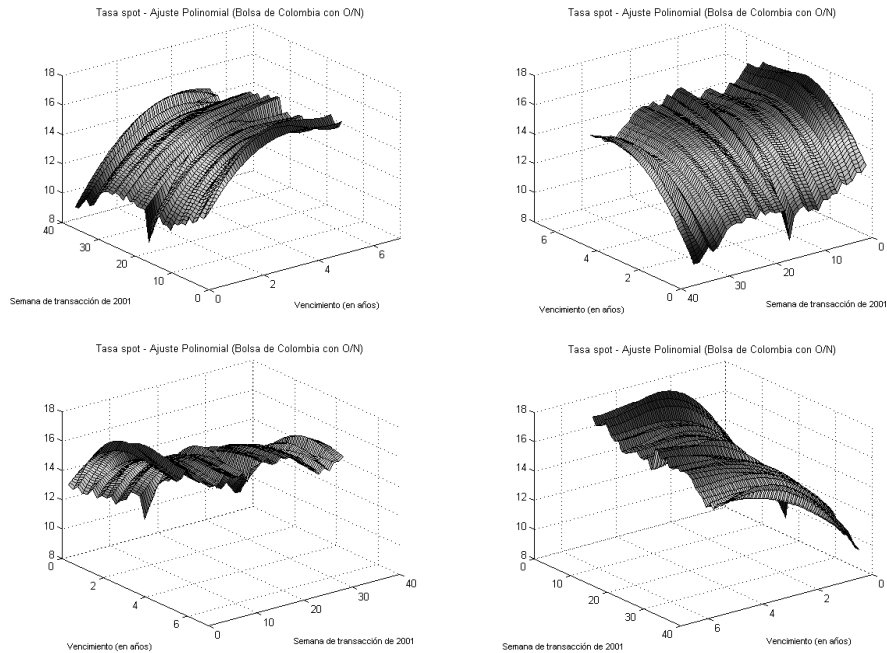


Figura 12. Curva spot - Metodología de la Bolsa de Valores de Colombia

Rev. Econ. Ros. Bogotá (Colombia) 8 (1): 1-23, junio de 2005

4.1. Criterios de comparación

En esta sección se presenta la comparación entre las estimaciones obtenidas a partir de la metodología de funciones *B-spline* cúbicas, la de Nelson y Siegel presentada en el documento de Arango, Melo y Vásquez (2002) y la polinomial que está en proceso de elaboración por parte de la Bolsa de Valores de Colombia.

Teóricamente, para que el método de estimación de curvas de rendimiento sea apropiado, la función estimada debe presentar las siguientes propiedades: buen ajuste, poca fluctuación, estabilidad de los parámetros e interpretabilidad económica.

Siguiendo los mismos criterios de comparación presentados en Arango, Melo y Vásquez (2002) se obtienen los siguientes resultados¹⁵ (Tabla 1):

Tabla 1. Estadísticas de ajuste promedio

Metodología	Precios		Rendimientos	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
Nelson y Siegel Con <i>overnight</i> , con restricciones	0,345	0,258	0,207	0,160
Nelson y Siegel Con <i>overnight</i> , sin restricciones	0,316	0,235	0,199	0,159
Bolsa de Colombia Con <i>overnight</i> <i>B-spline</i> Cúbica	0,646	0,468	0,319	0,268
Nelson y Siegel Con y sin <i>overnight</i> , sin restricciones	0,169	0,130	0,193	0,114
Bolsa de Colombia Con y sin <i>overnight</i>	0,251	0,201	0,138	0,115
Nelson y Siegel Sin <i>overnight</i> , sin restricciones	0,317	0,249	0,160	0,132
Nelson y Siegel Sin <i>overnight</i> , sin restricciones	0,269	0,217	0,146	0,121

Como puede observarse, la diferencia mínima promedio entre precios observados y estimados se obtiene en las estimaciones del método de funciones *B-spline* cúbicas; en tanto que al aplicar la metodología de Nelson y Siegel se logra el mejor ajuste en términos de tasas de rendimiento.

¹⁵ Las estadísticas MAE (promedio de los errores absolutos) y RMSE (raíz cuadrada del promedio de los errores al cuadrado) son definidas de la siguiente forma:

$$MAE(x) = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i|}{N} \quad RMSE(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

Los cálculos del criterio de suavización propuesto por Seppälä y Viertiö (1996)¹⁶ se presentan en la Tabla 2. Estos resultados indican que las curvas estimadas son más suaves cuando se utiliza la metodología de Nelson y Siegel. En el caso del método de funciones *B-spline* cúbicas este criterio no se presenta debido al alto grado de complejidad que demanda su cálculo. Sin embargo, las Figuras 10, 11 y 12 muestran que las curvas resultantes al utilizar la metodología de Nelson y Siegel son más suaves que las curvas estimadas por el método de funciones *B-spline* cúbicas.

Tabla 2. Criterios de suavización

Metodología	Curva <i>spot</i>	Curva <i>forward</i>
Nelson y Siegel con <i>overnight</i> , con restricciones	3,810	10,849
Nelson y Siegel con <i>overnight</i> , sin restricciones	3,375	9,698
Bolsa con <i>overnight</i>	13,936	-----
<i>B-spline</i> cúbica con <i>overnight</i>	-----	-----

La evaluación de la estabilidad de los parámetros estimados se puede lograr comparando las estimaciones de los parámetros del modelo para diferentes fechas de transacción y diferentes metodologías de estimación. En general, como se aprecia en las Figuras 13, 14 y 15, todos los métodos considerados muestran estabilidad relativa en los parámetros estimados con algunos periodos de volatilidad alta, esto se debe a que en estas fechas se cuenta con un número pequeño de observaciones.

Una de las ventajas del método de Nelson y Siegel sobre las demás metodologías es la interpretación de algunos de sus parámetros. En particular el parámetro β_0 , cuya dinámica es presentada en el primer panel de la Figura 14, muestra un comportamiento ligeramente decreciente en el periodo de muestra analizado lo cual, bajo algunos supuestos, podría interpretarse como una caída en las expectativas de inflación futura a lo largo del año 2001.

¹⁶ Este criterio se define como: $\int_0^T [t f''(t)]^2 dt$, donde $f(t)$ representa la función de la curva *spot* o *forward*.

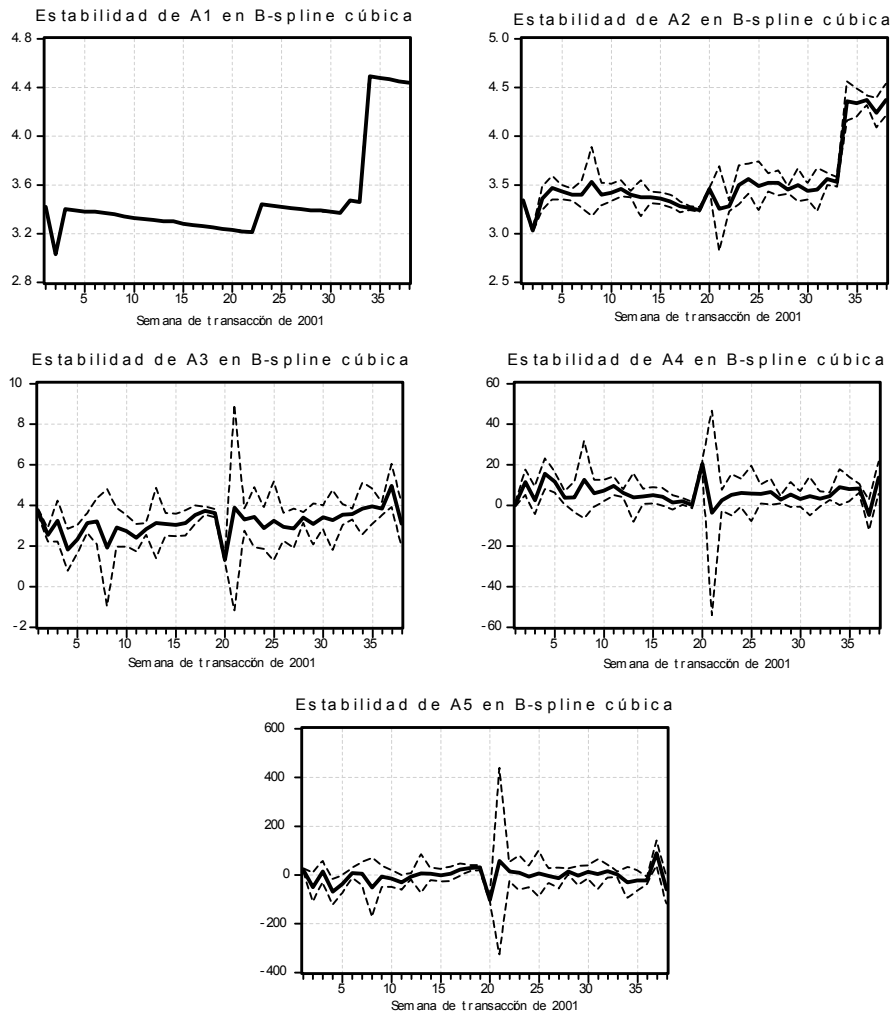


Figura 13. Estabilidad de los parámetros estimados del método de *B-spline* cúbica

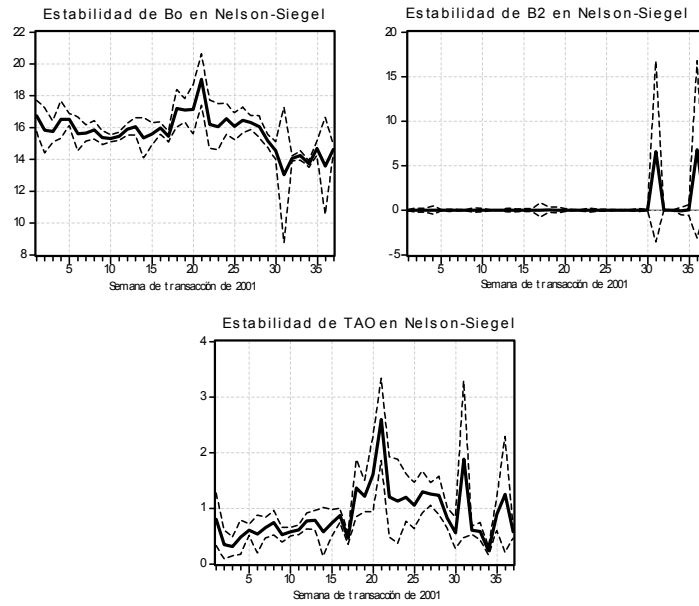


Figura 14. Estabilidad de los parámetros estimados del método de Nelson y Siegel

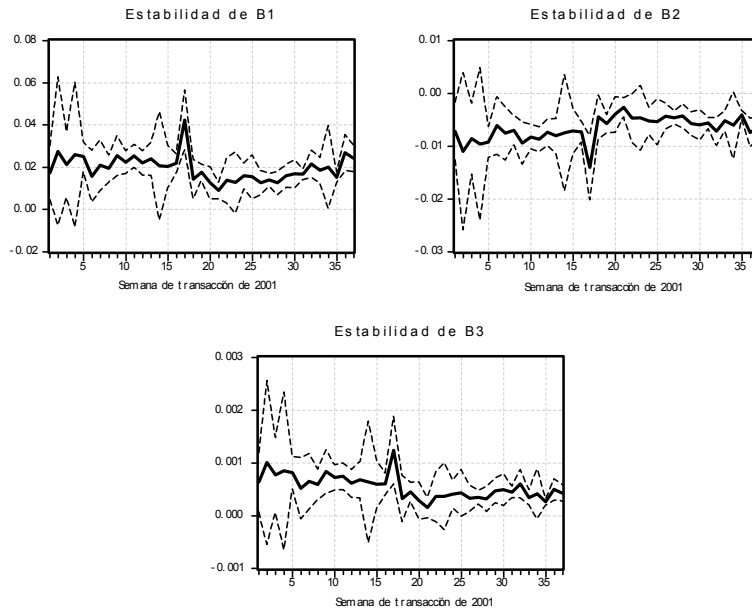


Figura 15. Estabilidad de los parámetros estimados en la metodología de la Bolsa de Valores de Colombia

Rev. Econ. Ros. Bogotá (Colombia) 8 (1): 1-23, junio de 2005

Finalmente, es importante anotar que los métodos de estimación polinomiales, como el que utiliza la Bolsa de Colombia, o el de funciones *B-spline* cúbicas, tienen el inconveniente de producir estimaciones no acotadas de la estructura a plazos. El método de Nelson y Siegel, en cambio, produce resultados acotados que tienen la posibilidad de ser interpretados económicamente.

Tabla 3. Comportamiento asintótico de los modelos

Modelo	$f(\infty)$
Nelson y Siegel	Asíntota: β_0
Metodología de la Bolsa	$\pm \infty$
<i>B-spline</i> cúbica	$\pm \infty$

En conclusión, siguiendo los resultados de los criterios de ajuste promedio, suavización e interpretabilidad económica, la metodología de Nelson y Siegel muestra los mejores resultados en comparación con los métodos de la Bolsa de Colombia y el de funciones *B-spline* cúbicas. Sin embargo, los resultados del ajuste en términos de precios son mejores bajo la técnica de funciones *B-spline* cúbicas.

5. Conclusiones

Aunque el método de Nelson y Siegel presenta el mejor desempeño en términos de los criterios analizados con respecto a las metodologías comparadas, la metodología de funciones *B-spline* cúbicas tiene las siguientes ventajas: i) presenta un mejor ajuste promedio en términos de precios; ii) como método de estimación es más sencillo que el de Nelson y Siegel, y iii) es menos exigente en cuanto a número de observaciones requeridas en comparación con el método de Nelson y Siegel. Sin embargo, este método presenta algunas desventajas, entre las cuales cabe mencionar: i) las tasas *spot* pueden resultar menos suaves respecto a las que arroja el método de Nelson y Siegel; ii) no se tiene un parámetro que permita inferir acerca de la dinámica de largo plazo de las tasas por fuera de muestra; iii) en términos de tasas de rendimiento el ajuste del método de Nelson y Siegel es mejor que el de funciones *B-spline* cúbicas, y iv) los resultados en cuanto a suavización de las curvas son sensibles a la ubicación de los nodos.

Teniendo en cuenta los resultados de las metodologías analizadas, el método de estimación con funciones *B-spline* cúbicas constituye la mejor alternativa de estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés respecto al método de Nelson y Siegel.

Referencias

- Arango, L. E., Melo, L. F. y Vásquez, D. M. (2003). “Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia”. *Coyuntura Económica* Vol. XXXIII No. 1. Fedesarrollo.
- Carleton, W. T. y Cooper, I. A. (1976). “Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates”. *Journal of Finance* 31, 1067-1083.
- DeBoor, C. (1978). *A practical Guide to Splines*. Springer-Verlag.
- Hastie, T. J. y Tibshirani, R. J. (1991). “Generalized Additive Models”. *Monographs on Statistics and Applied Probability* 43, Chapman & Hall.
- Judge, G., Griffiths, W., Hill, C., Lütkepohl, H. y Lee, T. (1985). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- Julio, J.M., Mera, S.J. y Revéiz A. (2002). La curva Spot (Cero Cupón): Estimación con splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos. *Borradores de Economía* No. 213. Banco de la República
- Langsetieg, T. C. y Smoot, J. S. (1989). “Estimation of the Term Structure of Interest Rates”. *Research in Financial Services: Private and Public Policy*, 1.
- Litzenberger, R. H. y Rolfo, J. (1984). “An International Study of Tax Effects on Government Bonds”. *Journal of Finance* 39, 1-22.
- McCulloch, J. H. (1971). “Measuring the Term Structure of Interest Rates”. *Journal of Business* 44, 19-31.
- Nelson, C. R. y Siegel, A. F. (1987). “Parsimonious Modelling of Yield Curves”. *Journal of Business* 60, 473-489.
- Powell, M. J. (1981). *Approximation Theory and Methods*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Scheafer, S. M. (1973). “On the Measuring the Term Structure of the Interest Rates”. *Discussion Paper* No. IFA-2-74. London Business School Institute of Finance and Accounting.
- Scheafer, S. M. (1981). “Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in The Market for British Government Securities”. *Economic Journal* 91, 415-438.
- Seppälä, J. y Viertiö, P. (1996). “The Term Structure of Interest Rates: Estimation and Interpretation”. *Bank of Finland, Discussion paper* 19/96.
- Steeley, J. M. (1991). “Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals”. *Journal of Business & Accounting* 18, 4, 513-528.
- Svensson, L.E.O. (1994), Estimating and Interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, *NBER Working paper* No. 4871.