Revista de Administración, Finanzas y Economía (*Journal of Management, Finance and Economics*), vol. 3, núm. 2 (2009), pp. 1-24.

Modelos Estocásticos para el Precio Spot y del Futuro de Commodities con Alta Volatilidad y Reversión a la Media

Víctor Manuel García de la Vega*
Antonio Ruiz Porras**

Recibido 14 de mayo de 2009, Aceptado 27 de julio de 2009

Resumen

La valuación de derivados de commodities (materias primas) requiere modelar el subyacente con reversión a la media y alta volatilidad. Desarrollamos fórmulas para obtener precio spot del commodity, del futuro, y el valor de "call" europeo sobre el spot y sobre el futuro, en mundo real y en mundo neutral al riesgo, utilizando modelo de un factor.

Abstract

The pricing of commodity derivatives requires that the underlying asset be modelled with mean reversion and high volatility. We develop closed formulas to price the spot of the commodity, its future, and to price a call option on the spot and on the commodity future, in the real world and under risk neutrality, by using a 1 factor model. Keywords: real world, risk-neutral world, mean reversion.

Clasificación JEL: G12, G13.
Palabras clave: Mundo Real, Mundo Neutral al Riesgo, Reversión a la Media.

* Director General de FINALITICA, S.A. de C.V. Av. Tecamachalco 159, piso 1 , Col. Reforma Social, México, D.F. 11650, México. Tel: (52-55) 5202 - 1834, E-mail: victor.garciav@finalitica.com

** Profesor-Investigador de la Universidad de Guadalajara, CUCEA. Periférico Norte 799, Módulo M, 1er Nivel, Núcleo Universitario los Belenes, C.P. 45100, Zapopan, Jalisco, México. Tel: (52-33) 3770-3300, Ext. 5291, E-mail: antoniop@cucea.udg.mx

1. Introducción

Los precios de los commodities (materias primas) se comportan de manera estocástica, y modelarlos de esta manera es muy importante para poder valuar productos financieros derivados cuyo activo subyacente es un commodity. Hace tiempo se asumía que para valuar derivados de commodities se podrían utilizar los mismos supuestos que para valuar opciones sobre acciones. Sin embargo, se ha demostrado que los precios de los commodities presentan reversión a la media y altas volatilidades, características que no presentan los precios de las acciones. En este artículo desarrollaremos un modelo de 1 factor de riesgo (variable de estado) ya que modelaremos el precio spot del commodity, incorporando reversión a la media y volatilidades que pueden ser funciones del tiempo (deterministas), lo cual permite incorporar una amplia gama de formas funcionales para la volatilidad. Adicionalmente, una de las contribuciones más importantes de este trabajo es que los desarrollos matemáticos se harán en el Mundo Real (MR) y en el Mundo Neutral al Riesgo (MNR). El MNR incorpora la aversión al riesgo que tiene un agente representativo del mercado (un inversionista). Adicionalmente, el MNR es el que nos permitirá valuar derivados sobre commodities.

Como puede observarse en la Tabla 1, los commodities son en su mayoría productos que son utilizados como materias primas en procesos productivos. Por tanto, sus precios son función de la oferta y demanda, y es bien sabido que en el largo plazo, estos precios tienden a regresar a niveles promedio históricos, lo que se conoce como reversión a la media. Algunos autores como Brennan (1991), Gibson y Schwartz (1990), Cortazar y Schwartz (1994), Bessembinder, Coughenour, Seguin y Smoller (1995), y Ross (1995), ya han tomado en cuenta la reversión a la media en los precios de los commodities.

Otra característica muy importante de los commodities es su alta volatilidad. Según la Futures Industry Association (2009), obsérvese la Tabla 1 para un comparativo de las volatilidades (anualizadas) en 2007 y 2008 de diferentes commodities agrícolas (trigo, maíz, soya), energéticos (gas natural, petróleo) y metálicos (cobre, oro). Podemos observar que todos los commodities presentaron una mayor volatilidad en el año 2008 que en 2007. La volatilidad del mercado accionario (no mostrada en la Tabla 1) en 2007 se reportó en 15.2% y fue menor que la de cualquiera de estos commodities, y en 2008 fue de 35.6%, solamente superando a la volatilidad del oro. La mayoría de los trabajos sobre commodities han modelado la volatilidad como constante. En Jaillet, Ronn y Tompaidis (2004) se modela el precio del gas natural en el MR (no se desarrolla el MNR) con 1 factor y usando reversión a la media y volatilidad constante. En nuestro artículo hemos desarrollado nuestro modelo basado en el modelo de estos autores, ya que nos ha permitido incorporar volatilidad determinista, nos ha permitido incluir el desarrollo en el MNR, y es un modelo que no permite precios spot negativos. Cabe notar que Geman y Nguyen (2003) han demostrado que la volatilidad de los commodities es variable. Eydeland y Geman (1998) propusieron un modelo de 2 factores con volatilidad estocástica para el gas natural y la electricidad. Desafortunadamente, este modelo resulta matemáticamente muy complejo ya que la volatilidad sigue procesos de Bessel. Por esta razón, para mantener los desarrollos matemáticos accesibles y no tener que modelar 2 factores, en este artículo hemos propuesto nuestro modelo de 1 factor con volatilidad determinista.

Tabla 1 Volatilidades de Commodities

Commodity	2007	2008
Trigo	33.4%	50.5%
Maíz	31.7%	41.4%
Soya	22.3%	42.8%
Gas Natural	45.1%	45.4%
Petróleo	29.2%	52.6%
Cobre	32.4%	42.1%
Oro	16.6%	29.3%

El resto de este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 desarrollamos las fórmulas cerradas para el precio spot de cualquier commodity, para la media y varianza condicional del spot, para el precio del futuro, y del precio del "call" (opción de compra) europeo sobre el precio spot del commodity, en el MR. En la sección 3 presentaremos las correspondientes fórmulas en el MNR, que es el mundo que nos permitirá valuar correctamente derivados sobre commodities. Demostraremos que las fórmulas cerradas del precio spot y del futuro en el MNR son idénticas a las fórmulas del MR, excepto por la aparición de un término constante. La sección 4 concluye.

2. Valuación en el Mundo Real

2.1 Proceso Propuesto para Obtener Precio Spot

El proceso propuesto para modelar el precio spot del gas natural está basado en el modelo de Jaillet, Ronn, y Tompaidis (2004). La diferencia fundamental es que estos autores modelaron su proceso en el MR y asumiendo volatilidad constante, y en este artículo desarrollamos el modelo tanto en el MR como en el MNR, y asumiendo volatilidad determinista (dependiente del tiempo), lo cual nos permite incorporar un gama amplia de formas funcionales para la volatilidad, sin necesidad de desarrollar un modelo de 2 factores con volatilidad estocástica, lo cual complica significativamente los desarrollos matemáticos.

Por tanto, el proceso propuesto para modelar el precio spot del commodity, S_t, es el siguiente,

$$S_t = F(t)e^{Y_t} \tag{1}$$

donde S_t es el precio spot del commodity en cuestión, $F(t)$ es el componente determinístico, y Y_t corresponde a la parte estocástica, misma que está representada por el proceso,

$$dY_t = \alpha(0 - Y_t)dt + \sigma(t)dW_t = -\alpha Y_t dt + \sigma(t)dW_t \tag{2}$$

La ecuación (2) es un proceso con reversión a la media tipo Vasicek (Ornstein - Uhlenbeck), cuyo valor de reversión a la media de largo plazo es cero, y con velocidad de reversión $\alpha > 0$. Intuitivamente, la expresión (2) lo que sugiere es que si Y_t es menor a cero, el cambio en el valor esperado de Y_t sería positivo, en otras palabras, dY_t sería positivo, y por tanto, Y_t tendería a subir hacia cero (su valor de largo plazo). Por el contrario, si Y_t es mayor a cero, el cambio en el valor esperado de Y_t sería negativo, en otras palabras, dY_t sería negativo, y por tanto, Y_t tendería a bajar hacia cero (su valor de largo plazo). Notemos de la ecuación (1) que si Y_t tiende a cero, S_t tiende a $F(t)$.

Adicionalmente, un proceso de Ornstein-Uhlenbeck es el proceso de reversión a la media más sencillo que existe de resolver matemáticamente, ya que su solución es similar a la solución de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden. La volatilidad determinista (dependiente del tiempo), está dada por $\sigma(t)$, y dW_t es el incremento de un movimiento browniano estándar. La función estocástica Y_t describe la desviación de S_t del nivel de equilibrio determinista (dependiente del tiempo) $F(t)$.[1]

Para obtener la solución de S_t, utilizamos el lema de Itô,

$$dS_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} - \alpha Y_t \frac{\partial S_t}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 S_t}{\partial Y_t^2}\right) dt + \sigma(t)\frac{\partial S_t}{\partial Y_t} dW_t$$

$$= S_t \left(\frac{dlnF(t)}{dt} - \alpha lnS_t + \alpha lnF(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right) dt + \sigma(t) S_t dW_t \tag{3}$$

asumiendo que $Y_t = lnS_t - lnF(t)$, que se obtuvo de despejar Y_t de la ecuación (1), y que,

$$\frac{dlnF(t)}{dt} = \frac{1}{F(t)}\frac{\partial F(t)}{\partial t}$$

Si asumimos que $\rho(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{dlnF(t)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right) + lnF(t)$, la expresión (3) queda así,

$$dS_t = \alpha(\rho(t) - lnS_t)S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t \tag{4}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable $r_t = lnS_t$ (nótese que r_t no es la tasa de interés instantánea libre de riesgo, es simplemente una variable auxiliar), para poder aplicar el lema de Itô a la ecuación (4),

$$dr_t = dlnS_t = \left(\frac{\partial lnS_t}{\partial t} + \alpha(\rho(t) - lnS_t)S_t \frac{\partial lnS_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) S_t^2 \frac{\partial^2 lnS_t}{\partial S_t^2}\right) dt$$

$$+\sigma(t) S_t \frac{\partial lnS_t}{\partial S_t} dW_t \tag{5}$$

$$= [\alpha(\rho(t) - r_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)]dt + \sigma(t) dW_t$$

[1] Cabe notar que la forma funcional de la ecuación (1) evita que se generen precios negativos del commodity, y nos permite utilizar una amplia gama de funciones para F(t), misma que incluye los efectos de estacionalidad presentes en los precios de los commodities.

Para facilitar el desarrollo matemático para encontrar la solución de S_t, usamos $\beta(t) = \alpha\rho(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) = \frac{dlnF(t)}{dt} + \alpha lnF(t)$.

Por tanto, obtenemos,

$$dr_t = \beta(t)dt - \alpha r_t dt + \sigma(t)dW_t$$

$$= [\beta(t) - \alpha r_t]dt + \sigma(t)dW_t$$

Es importante notar que esta última expresión es el modelo de Vasicek, y para proceder a su desarrollo matemático necesitamos transformar esta expresión a un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, para lo cual, definimos $m_t = \alpha r_t - \beta(t) = -[\beta(t) - \alpha r_t]$.

Por tanto, $dm_t = \alpha dr_t - d\beta(t)$, de donde obtenemos,

$$dr_t = \frac{1}{\alpha}[dm_t + d\beta(t)] = -m_t dt + \sigma(t)dW_t$$

Despejando dm_t obtenemos,

$$dm_t = -(\alpha m_t + \beta'(t))dt + \alpha\sigma(t)dW_t \tag{6}$$

Nótese como la expresión $dr_t = [\beta(t) - \alpha r_t]dt + \sigma(t)dW_t$, que es el modelo de Vasicek, se transformó a la expresión (6), misma que se conoce como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

La solución a (6) es similar a la solución de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden. Por tanto, procedemos a hacer el siguiente cambio de variable, $X_t = m_t e^{\alpha t}$, y aplicamos el lema de Itô a X_t utilizando el proceso estocástico de la ecuación (6), a saber,

$$dX_t = d(m_t e^{\alpha t}) = \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} - (\alpha m_t + \beta'(t))\frac{\partial X_t}{\partial m_t} + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2(t)\frac{\partial^2 X_t}{\partial m_t^2}\right)dt$$

$$+\alpha\sigma(t)\frac{\partial X_t}{\partial m_t}dW_t$$

$$= -e^{\alpha t}d\beta(t) + \alpha\sigma(t)e^{\alpha t}dW_t \tag{7}$$

Integramos la ecuación (7),

$$\int_t^{t+h} d(m_s e^{\alpha s}) = -\int_t^{t+h} e^{\alpha s}d\beta(s) + \int_t^{t+h} \alpha\sigma(s)e^{\alpha s}dW_s$$

$$= m_{t+h}e^{\alpha(t+h)} - m_t e^{\alpha t}$$

Despejando m_{t+h} de la ecuación anterior y recordando que $m_t = \alpha r_t - \beta(t)$, obtenemos,

$$m_{t+h} = m_t e^{-\alpha h} - \int_t^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)}d\beta(s) + \alpha\int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s$$

$$= \alpha r_{t+h} - \beta(t+h)$$

Despejando r_{t+h} de la ecuación anterior, obtenemos,

$$r_{t+h} = r_t e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[\beta(t+h) - \beta(t)e^{-\alpha h} - \int_t^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)} d\beta(s)\right]$$

$$= r_t e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \beta(s) e^{-\alpha(t+h-s)} ds + \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s$$

$$= r_t e^{-\alpha h} + \bar{r}_{t+h} - \bar{r}_t e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s \tag{8}$$

En consecuencia,

$$r_{t+h} - \bar{r}_{t+h} = (r_t - \bar{r}_t) e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s$$

$$= lnS_{t+h} - lnF_{t+h} = (lnS_t - lnF_t) e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s$$

Recordemos que en esta última expresión hemos utilizado que $r_t = lnS_t$ y que $\bar{r}_t = lnF_t$.

Despejando S_{t+h} de la ecuación anterior encontramos que,

$$S_{t+h} = F_{t+h} \left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}} e^{\int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s} \tag{9}$$

La integral en el exponente de la ecuación (9) es estocástica. El hecho de que el incremento dW_s siga una distribución de probabilidad normal ($dW_s \sim N(0, ds)$), nos indica que la integral estocástica también sigue una distribución de probabilidad normal. Esto a su vez hará posible obtener una representación más explícita de S_{t+h}. Empezamos por notar que esta integral estocástica es una variable aleatoria que definimos así,

$$X = \int_t^{t+h} \sigma(s) e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s$$

Asimismo, definimos,

$$A(t+h, t) = F_{t+h} \left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}}$$

Por tanto, la ecuación (9) se puede reescribir de la siguiente manera, dándonos una representación explícita del precio spot del commodity,

$$S_{t+h} = A(t+h,t)e^{X} \tag{10}$$

Observemos de la ecuación (10) que el precio spot del commodity S_{t+h} es una variable aleatoria, lo cual nos permitirá calcular su media condicional y su varianza condicional haciendo uso de la función generatriz de momentos de la distribución de probabilidad normal, para lo cual primero deberemos calcular la esperanza y la varianza de X.

$$E(X) = E\left[\int_{t}^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s\right] = 0$$

$$Var(X) = Var\left[\int_{t}^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s\right]$$

$$= \int_{t}^{t+h} \sigma^2(s)e^{-2\alpha(t+h-s)}ds = v(t+h,t)$$

Como resultado, entonces sabemos que $X \sim N(0, v(t+h,t))$.

Para facilitar los cálculos posteriores, asumimos que $F(t)$, que es el componente que modela la estacionalidad presente en los precios de los commodities, y que se incluye en la ecuación (1), y que $\sigma(t)$, que es la volatilidad determinista del proceso estocástico del precio spot del commodity, y que se incluye en la ecuación (2), son constantes, en otras palabras, asumimos que

$$F(t) \equiv F = constante$$

$$\sigma(t) \equiv \sigma = constante$$

y así recalculamos $A(t+h,t)$ y $v(t+h,t)$

$$A(t+h,t) = F_{t+h}\left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}}$$

$$= F\left(\frac{S_t}{F}\right)^{e^{-\alpha h}}$$

$$= F S_t^{e^{-\alpha h}} F^{-e^{-\alpha h}}$$

$$= S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} \tag{11}$$

$$v(t+h,t) = \int_{t}^{t+h} \sigma^2(s)e^{-2\alpha(t+h-s)}ds$$

$$= \sigma^2 e^{-2\alpha(t+h)} \int_t^{t+h} e^{2\alpha s} ds$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha h}) = Var(X) = v \tag{12}$$

Por tanto, sustituyendo la expresión (11) en la ecuación (10) obtenemos,

$$S_{t+h} = A(t+h,t)e^X = S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^X \tag{13}$$

donde sabemos que,

$$X \sim N(0, v(t+h,t))$$

La ecuación (13) es la fórmula cerrada para obtener el precio spot del commodity en cuestión S_{t+h} en el mundo real. Notemos de la expresión (13) que para obtener el precio spot del commodity del período de tiempo siguiente S_{t+h}, debemos utilizar el precio spot del período de tiempo anterior S_t, y así sucesivamente. Adicionalmente, no perdamos de vista que la varianza de la variable aleatoria X se ha vuelto constante según la expresión (12). Observemos que la varianza $v(t+h,t)$ dejó de depender del tiempo porque hemos asumido que la volatilidad determinista $\sigma(t)$ es constante y porque el incremento en el tiempo h es constante.

2.2 Media Condicional y Varianza Condicional de S_t

La fórmula explícita de la esperanza condicional de S_{t+h} se utilizará para obtener la fórmula cerrada del precio del futuro del commodity en la sección 2.3 de este artículo. Haciendo uso de la función generatriz de momentos de la distribución de probabilidad normal, en otras palabras, sabiendo que $E[e^X] = e^{E(X)+\frac{1}{2}Var(X)}$, y recordando las expresiones (11) y (12), la esperanza condicional de S_{t+h} está dada por,

$$E[S_{t+h} \mid S_t] = S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^{\frac{1}{2}v} \tag{14}$$

La varianza condicional de S_{t+h} está dada por,

$$Var[S_{t+h} \mid S_t] = \left(S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}}\right)^2 [e^{2v} - e^v] \tag{15}$$

2.3 Precio del Futuro (o Forward) del Commodity

Asumiendo que la tasa de interés libre de riesgo instantánea r es constante, los precios forward son iguales a los precios de los futuros, $\mathcal{F}(S_t, t, t+h)$.

El valor de un contrato futuro o forward se define así,

$$V_t = [\mathcal{F}(S_t, t, t+h) - K]e^{-rh} = \mathcal{F}(S_t, t, t+h)e^{-rh} - Ke^{-rh}$$

donde K es el precio de ejercicio del contrato futuro.

También se define como esperanza condicional, así,

$$V_t = E[S_{t+h} - K \mid S_t]e^{-rh} = E[S_{t+h} \mid S_t]e^{-rh} - Ke^{-rh}$$

donde S_{t+h} es el precio futuro del spot del commodity.

Igualando ambas expresiones de V_t, obtenemos,

$$\mathcal{F}(S_t, t, t+h)e^{-rh} - Ke^{-rh} = E[S_{t+h} \mid S_t]e^{-rh} - Ke^{-rh}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S_t, t, t+h) &= E[S_{t+h} \mid S_t] = A(t+h, t)e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)} \\ &= S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)} \end{aligned} \tag{16}$$

En la ecuación (16) hemos demostrado que el precio del futuro del commodity es igual a la esperanza condicional del precio futuro del spot del commodity. Esta ecuación valida la hipótesis de eficiencia en el mercado, lo cual significa que es imposible obtener ganancias sin riesgo (arbitraje) en el mercado de los spot y futuros de commodities. Si la relación en (16) tuviera signo de desigualdad en lugar de igualdad, los especuladores podrían comprar el activo (spot o futuro) barato y vender el activo caro, obteniendo una utilidad libre de riesgo. Esto no podría durar mucho tiempo y los precios del spot y del futuro tenderían a igualarse y cumplir la ecuación (16). En otras palabras, esta expresión nos indica que el precio del futuro es un estimador insesgado del precio esperado del spot en el futuro, o que podemos predecir correctamente el precio spot en el futuro utilizando el mercado de los futuros.

2.4 Cálculo del Precio del Call Europeo sobre el Precio Spot del Commodity

Utilizando la metodología de Black & Scholes (1973), a continuación desarrollamos una fórmula cerrada para valuar una opción europea de compra ("call") sobre el precio spot del commodity.

Sabemos que por definición, el precio de un call europeo se calcula de la siguiente manera,

$$c(S_t, t, t+h) = e^{-rh}E[max(S_{t+h} - K, 0) \mid S_t]$$

donde, K es el precio de ejercicio y se asume constante, r es la tasa de interés instantánea libre de riesgo y se asume constante, y S_{t+h} está dado por la ecuación (13).

$$c(S_t, t, t+h) = e^{-rh}E[max(Ae^x - K, 0) \mid S_t]$$

$$= Ae^{-rh}E[max(e^x - \frac{K}{A}, 0) \mid S_t]$$

$$= Ae^{-rh}\int_{ln\frac{K}{A}}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx - Ae^{-rh}\frac{K}{A}\int_{ln\frac{K}{A}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx$$

$$= I_1 - I_2 \tag{17}$$

Cabe notar que los límites de integración de arriba se obtuvieron así,

$$e^x - \frac{K}{A} > 0 \Rightarrow \quad e^x > \frac{K}{A} \Rightarrow \quad x > ln\frac{K}{A}$$

Ahora resolvemos I_1 e I_2, de la siguiente manera,

$$I_2 = Ae^{-rh}\frac{K}{A}\int_{ln\frac{K}{A}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx$$

$$= Ke^{-rh}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx$$

$$= Ke^{-rh}N(d_2) \tag{18}$$

donde hemos utilizado las siguientes expresiones,

$$x > ln\frac{K}{A} \Rightarrow \quad -x < -ln\frac{K}{A} \Rightarrow \quad -x < ln\frac{A}{K}$$

$$\Rightarrow \quad -\infty < x < ln\frac{A}{K} \quad , d_2 = ln\frac{A}{K}$$

$$I_1 = Ae^{-rh}\int_{ln\frac{K}{A}}^{\infty}e^x\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx$$

$$= Ae^{-rh}\int_{x-v>ln\frac{K}{A}-v}e^{x-v+v}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}}dx$$

Hacemos el siguiente cambio de variable, $u = x - v$, por tanto, $du = dx$, $x = u + v$, además,

$$x - v > ln\frac{K}{A} - v \Rightarrow \quad u > ln\frac{K}{A} - v \Rightarrow \quad -u < -ln\frac{K}{A} + v$$

$$\Rightarrow \quad -u < ln\frac{A}{K} + v \Rightarrow \quad -\infty < u < ln\frac{A}{K} + v,$$

$$d_1 = ln\frac{A}{K} + v$$

Entonces,

$$I_1 = Ae^{-rh}\int_{u>ln\frac{K}{A}-v}e^{u+v}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(u+v)^2}{v}}du$$

$$= Ae^{-rh}\int_{-\infty}^{ln\frac{A}{K}+v}e^{u+v-\frac{1}{2}\frac{u^2+2uv+v^2}{v}}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}du$$

$$= Ae^{-rh}e^{\frac{1}{2}v}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{v}}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}du$$

$$= Ae^{-rh}e^{\frac{1}{2}v}N(d_1) \tag{19}$$

Como consecuencia de estos cálculos, finalmente obtenemos la fórmula cerrada para valuar un call europeo cuyo activo subyacente es el precio spot del commodity modelado con un factor con reversión a la media,

$$c(S_t, t, t+h) = I_1 - I_2$$

$$= Ae^{\frac{1}{2}v-rh}N(d_1) - Ke^{-rh}N(d_2) \tag{20}$$

con,

$$d_1 = ln\frac{A}{K} + v \tag{21}$$

$$d_2 = ln\frac{A}{K} \tag{22}$$

donde debemos tomar en cuenta que,

$$N(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}dx$$

es la distribución normal acumulada con media $a = 0$ y varianza $b = v$.

3. Valuación Neutral al Riesgo

3.1 Proceso Propuesto para Obtener Precio Spot

Recordemos que la ecuación (1), dada por $S_t = F(t)e^{Y_t}$, es la expresión que hemos utilizado para modelar el precio spot del commodity. La ecuación (2), misma que hemos repetido abajo, es el proceso seguido por Y_t en el Mundo Real (MR), y además es una variable de estado que no representa ningún instrumento financiero que cotice en los mercados. El proceso seguido por Y_t es un proceso estocástico con reversión a la media tipo Vasicek (Ornstein-Uhlenbeck), cuyo valor de reversión a la media de largo plazo es cero, y con velocidad de reversión $\alpha > 0$. La volatilidad determinista (dependiente del tiempo), está dada por $\sigma(t)$, y dW_t es el incremento de un movimiento browniano estándar. La función estocástica Y_t describe la desviación de S_t del nivel de equilibrio determinista (dependiente del tiempo) $F(t)$. Cabe notar que $F(t)$ incluye los efectos de estacionalidad presentes en los precios de los commodities.

La teoría de valuación de derivados originada en la metodología de Black & Scholes (1973), dice que debemos utilizar argumentos de no arbitraje para encontrar el precio del derivado en el Mundo Neutral al Riesgo (MNR). Adicionalmente, Cox y Ross (1976), y Harrison y Kreps (1979), profundizaron en la metodología para valuar derivados bajo neutralidad al riesgo. Por tanto, técnicamente, debemos transformar la ecuación (2) del MR al MNR, y así podremos valuar correctamente cualquier derivado dependiente de S_t, como el valor esperado (bajo el MNR) de su función de pago, descontado al presente a la tasa de interés libre de riesgo r.

Partimos de la ecuación (2), la cual está representada en el MR, y misma que repetimos aquí,

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma(t) dW_t$$

Aun cuando Y_t sea una variable de estado que no cotice en los mercados, podemos construir un derivado que tenga como subyacente a Y_t, en otras palabras, construimos una opción de compra o "call", $c = c(Y_t, t)$, y utilizando el lema de Itô, obtenemos,

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha Y_t \frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2} \right) dt + \sigma(t)\frac{\partial c}{\partial Y_t} dW_t \tag{23}$$

Otra manera de expresar dc que nos ayudará en los cálculos posteriores es,

$$dc = \mu_c c dt + \sigma_c c dW_t \tag{24}$$

Por tanto, de las ecuaciones (23) y (24) podemos obtener las siguientes equivalencias,

$$\mu_c = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha Y_t \frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2} \right) \tag{25}$$

y

$$\sigma_c = \frac{1}{c}\sigma(t)\frac{\partial c}{\partial Y_t} \tag{26}$$

Siguiendo los argumentos de no arbitraje, debemos formar un portafolio con dos activos para poder eliminar dW_t, que es el único factor de riesgo presente en el portafolio. Debemos construir un portafolio con 2 activos, los cuales serán 2 opciones de compra, $c_1 = c_1(Y_t, t)$, y $c_2 = c_2(Y_t, t)$. Asimismo, debemos escoger el número de unidades que tendremos de cada activo en el portafolio. Hemos llamado θ_1 al número de unidades que tendremos del activo $c_1 = c_1(Y_t, t)$, y hemos llamado θ_2 al número de unidades que tendremos del activo $c_2 = c_2(Y_t, t)$ en el portafolio. El valor actual del portafolio está dado por Π_t. En otras palabras,

$$\Pi_t = \theta_1 c_1 + \theta_2 c_2$$

Por tanto, el cambio en el valor del portafolio durante el instante dt, debido a fluctuaciones del mercado, está dado por,

$$d\Pi_t = \theta_1 dc_1 + \theta_2 dc_2$$

$$= \theta_1(\mu_1 c_1 dt + \sigma_1(t) c_1 dW_t) + \theta_2(\mu_2 c_2 dt + \sigma_2(t) c_2 dW_t)$$

$$= (\theta_1\mu_1 c_1 + \theta_2\mu_2 c_2)dt + (\theta_1\sigma_1(t)c_1 + \theta_2\sigma_2(t)c_2)dW_t$$

donde hemos definido que

$$dc_1 = \mu_1 c_1 dt + \sigma_1(t) c_1 dW_t$$

y que

$$dc_2 = \mu_2 c_2 dt + \sigma_2(t) c_2 dW_t$$

Para poder eliminar el riesgo de mercado de nuestro portafolio Π_t, debemos eliminar el factor de riesgo dW_t de la ecuación $d\Pi_t = (\theta_1\mu_1 c_1 + \theta_2\mu_2 c_2)dt + (\theta_1\sigma_1(t)c_1 + \theta_2\sigma_2(t)c_2)dW_t$. Por tanto, debemos encontrar los valores de θ_1 y θ_2 que hagan que la expresión que multiplica a dW_t se haga cero, en otras palabras, debemos resolver $\theta_1\sigma_1(t)c_1 + \theta_2\sigma_2(t)c_2 = 0$. Una elección factible de valores para θ_1 y θ_2 es,

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2(t)}{c_1(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))}; \qquad \theta_2 = \frac{\sigma_1(t)}{c_2(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))}$$

Por tanto, sustituyendo estas definiciones de θ_1 y θ_2 en la expresión previa de $d\Pi_t$, logramos que desaparezca el factor de riesgo dW_t, lo cual nos arroja una expresión para $d\Pi_t$ donde sólo aparecen términos de tendencia, o sea, términos multiplicados por dt. Esto es equivalente a decir que el portafolio Π_t ahora genera un rendimiento $d\Pi_t$ libre de riesgo, o en otras palabras, que $d\Pi_t = \Pi_t r_t dt$, donde r_t es la tasa de interés instantánea libre de riesgo. Continuando con el desarrollo matemático, obtenemos,

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \frac{\mu_1 c_1 \sigma_2(t) dt}{c_1(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))} - \frac{\mu_2 \sigma_1(t) c_2 dt}{c_2(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))} \\ &= \Pi_t r_t dt \\ &= \frac{\sigma_2(t) c_1 r_t dt}{c_1(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))} - \frac{\sigma_1(t) c_2 r_t dt}{c_2(\sigma_1(t) - \sigma_2(t))} \end{aligned}$$

Eliminando términos iguales de los cocientes anteriores, llegamos a la siguiente expresión,

$$\mu_1\sigma_2(t) - \sigma_1(t)\mu_2 = \sigma_2(t) r_t - \sigma_1(t) r_t,$$

de donde se obtiene que,

$$\frac{\mu_1 - r_t}{\sigma_1(t)} = \frac{\mu_2 - r_t}{\sigma_2(t)} = \lambda$$

Como estas fracciones son claramente independientes de la fecha de vencimiento, podemos generalizar λ de la siguiente manera,

$$\lambda = \frac{\mu_c - r_t}{\sigma_c} \tag{27}$$

Sustituyendo las expresiones (25) y (26) en la ecuación (27), obtenemos,

$$\lambda = \frac{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha Y_t \frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2}\right) - r_t}{\frac{1}{c}\sigma(t)\frac{\partial c}{\partial Y_t}}$$

Despejando la expresión anterior, obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden,

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha Y_t \frac{\partial c}{\partial Y_t} - \lambda\sigma(t)\frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2} - r_t c = 0$$

Reordenando términos obtenemos,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha\left(-Y_t - \frac{\lambda\sigma(t)}{\alpha}\right)\frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2} - r_t c = 0$$

Ahora definimos,

$$\gamma = -\frac{\lambda\sigma(t)}{\alpha} \tag{28}$$

Por tanto, sustituyendo la expresión (28) en la ecuación diferencial parcial previa, obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha\left(\gamma - Y_t\right)\frac{\partial c}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 c}{\partial Y_t^2} - r_t c = 0 \tag{29}$$

De aquí deducimos que la ecuación (2), misma que repetimos aquí,

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma(t)dW_t$$

se transforma en la siguiente expresión en el MNR,

$$dY_t = \alpha(\gamma - Y_t)dt + \sigma(t)dW_t^* \tag{30}$$

Notemos que hay dos nuevas variables que aparecen en la ecuación (30) que no estaban presentes en la ecuación (2), γ y dW_t^*. La expresión de γ está definida en la ecuación (28) y podemos observar que esta expresión incluye a λ, misma que hemos definido en la ecuación (27). Debemos aclarar que λ se define como el precio de mercado por unidad de riesgo de la variable de estado Y_t. Generalmente λ podría ser una función de Y_t y de t, pero para facilitar los cálculos posteriores, asumiremos que λ es constante. La variable dW_t^* es el incremento de un movimiento browniano estándar en el MNR, razón por la cual le hemos incluido el $*$, para distinguirlo de la variable dW_t que corresponde al MR.

Para poder obtener una fórmula explícita para el precio spot del commodity, S_t, en el MNR, utilizaremos el lema de Itô y las expresiones (1) y (30).

$$dS_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \alpha(\gamma - Y_t)\frac{\partial S_t}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 S_t}{\partial Y_t^2} \right) dt + \sigma(t)\frac{\partial S_t}{\partial Y_t} dW_t^*$$

$$= \alpha S_t \left(\frac{1}{\alpha}\frac{dlnF(t)}{dt} + \gamma - lnS_t + lnF(t) + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t)S_t dW_t^* \qquad (31)$$

asumiendo que $Y_t = lnS_t - lnF(t)$, que se obtuvo de despejar Y_t de la ecuación (1), y que,

$$\frac{dlnF(t)}{dt} = \frac{1}{F(t)}\frac{\partial F(t)}{\partial t}$$

Si asumimos que $\rho(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{dlnF(t)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) + lnF(t)$, la expresión (31) queda así,

$$dS_t = \alpha S_t[\rho(t) + \gamma - lnS_t]dt + \sigma(t)S_t dW_t^* \qquad (32)$$

Hacemos el siguiente cambio de variable $r_t = lnS_t$ para poder aplicar el lema de Itô a la ecuación (32),

$$dr_t = dlnS_t = \left(\frac{\partial lnS_t}{\partial t} + \alpha S_t[\rho(t) + \gamma - lnS_t]\frac{\partial lnS_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S_t^2\frac{\partial^2 lnS_t}{\partial S_t^2} \right) dt$$

$$+\sigma(t)S_t\frac{\partial lnS_t}{\partial S_t}dW_t^*$$

$$= [\alpha(\rho(t) + \gamma - r_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)]dt + \sigma(t)dW_t^* \qquad (33)$$

Para facilitar el desarrollo matemático para encontrar la solución de S_t, usamos $\beta(t) = \alpha[\rho(t) + \gamma] - \frac{1}{2}\sigma^2(t) = \frac{dlnF(t)}{dt} + \alpha lnF(t) + \alpha\gamma$.

Por tanto, obtenemos,

$$dr_t = \beta(t)dt - \alpha r_t dt + \sigma(t)dW_t^*$$

$$= [\beta(t) - \alpha r_t]dt + \sigma(t)dW_t^*$$

Es importante notar que esta última expresión es el modelo de Vasicek, y para proceder a su desarrollo matemático necesitamos transformar esta expresión a un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, para lo cual, definimos $m_t = \alpha r_t - \beta(t) = -[\beta(t) - \alpha r_t]$.

Por tanto, $dm_t = \alpha dr_t - d\beta(t)$, de donde obtenemos,

$$dr_t = \frac{1}{\alpha}[dm_t + d\beta(t)] = -m_t dt + \sigma(t)dW_t^*$$

Despejando dm_t obtenemos,

$$dm_t = -(\alpha m_t + \beta'(t))dt + \alpha\sigma(t)dW_t^* \tag{34}$$

La solución a (34) es similar a la solución de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden. Por tanto, procedemos a hacer el siguiente cambio de variable, $X_t = m_t e^{\alpha t}$, y aplicamos el lema de Itô a X_t utilizando el proceso estocástico de la ecuación (34), a saber,

$$\begin{aligned} dX_t = d(m_t e^{\alpha t}) &= \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} - (\alpha m_t + \beta'(t))\frac{\partial X_t}{\partial m_t} + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2(t)\frac{\partial^2 X_t}{\partial m_t^2} \right) dt \\ &\quad + \alpha\sigma(t)\frac{\partial X_t}{\partial m_t} dW_t^* \\ &= -e^{\alpha t} d\beta(t) + \alpha\sigma(t)e^{\alpha t} dW_t^* \end{aligned} \tag{35}$$

Integramos la ecuación (35),

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} d(m_s e^{\alpha s}) &= -\int_t^{t+h} e^{\alpha s} d\beta(s) + \int_t^{t+h} \alpha\sigma(s)e^{\alpha s} dW_s^* \\ &= m_{t+h}e^{\alpha(t+h)} - m_t e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Despejando m_{t+h} de la ecuación anterior y recordando que $m_t = \alpha r_t - \beta(t)$, obtenemos,

$$\begin{aligned} m_{t+h} = m_t e^{-\alpha h} - \int_t^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)} d\beta(s) + \alpha \int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s^* \\ = \alpha r_{t+h} - \beta(t+h) \end{aligned}$$

Despejando r_{t+h} de la ecuación anterior, obtenemos,

$$\begin{aligned} r_{t+h} = r_t e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s^* \\ + \frac{1}{\alpha}\left[\beta(t+h) - \beta(t)e^{-\alpha h} - \int_t^{t+h} e^{-\alpha(t+h-s)} d\beta(s) \right] \end{aligned}$$

$$= r_t e^{-\alpha h} + \int_t^{t+h} \beta(s)e^{-\alpha(t+h-s)} ds + \int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)} dW_s^*$$

$$= r_t e^{-\alpha h} + \bar{r}_{t+h} - \bar{r}_t e^{-\alpha h} + \alpha e^{-\alpha(t+h)} \int_t^{t+h} \gamma(s)e^{\alpha s} ds$$

$$+\int_t^{t+h}\sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^* \tag{36}$$

donde $\gamma(s) = -\frac{\lambda\sigma(s)}{\alpha}$.

En consecuencia,

$$r_{t+h} - \bar{r}_{t+h} = (r_t - \bar{r}_t)e^{-\alpha h} + \alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds$$

$$+\int_t^{t+h}\sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*$$

$$= lnS_{t+h} - lnF_{t+h} = (lnS_t - lnF_t)e^{-\alpha h} + \alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds$$

$$+\int_t^{t+h}\sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*$$

Recordemos que en esta última expresión hemos utilizado que $r_t = lnS_t$ y que $\bar{r}_t = lnF_t$.

Despejando S_{t+h} de la ecuación anterior encontramos que,

$$S_{t+h} = F_{t+h}\left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}} e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds} e^{\int_t^{t+h}\sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*} \tag{37}$$

La integral en el segundo exponente de la ecuación (37) es estocástica. El hecho de que el incremento dW_s^* siga una distribución de probabilidad normal ($dW_s^* \sim N(0, ds)$), nos indica que la integral estocástica también sigue una distribución de probabilidad normal. Esto a su vez hará posible obtener una representación más explícita de S_{t+h}. Empezamos por notar que esta integral estocástica es una variable aleatoria que definimos así,

$$X = \int_t^{t+h}\sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*$$

Asimismo, definimos,

$$A(t+h,t) = F_{t+h}\left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}}$$

Por tanto, la ecuación (37) se puede representar de la siguiente manera,

$$S_{t+h} = A(t+h,t)e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds}e^X \tag{38}$$

Observemos de la ecuación (38) que el precio spot del commodity S_{t+h} es una variable aleatoria, lo cual nos permitirá calcular su media condicional y su varianza condicional haciendo uso de la función generatriz de momentos de la distribución de probabilidad normal, para lo cual primero deberemos calcular la esperanza y la varianza de X.

$$E(X) = E\left[\int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*\right] = 0$$

$$Var(X) = Var\left[\int_t^{t+h} \sigma(s)e^{-\alpha(t+h-s)}dW_s^*\right]$$

$$= \int_t^{t+h} \sigma^2(s)e^{-2\alpha(t+h-s)}ds = v(t+h,t)$$

Como resultado, entonces sabemos que $X \sim N(0, v(t+h,t))$.

Para facilitar los cálculos, asumimos que $F(t)$, que es el componente que modela la estacionalidad presente en los precios del commodity en cuestión, y que se incluye en la ecuación (1), $S_t = F(t)e^{Y_t}$, y que $\sigma(t)$, que es la volatilidad determinista del proceso estocástico del precio spot del commodity, y que se incluye en la ecuación (30), $dY_t = \alpha(\gamma - Y_t)dt + \sigma(t)dW_t^*$, son constantes.

Ahora recalculamos la expresión (28), a saber,

$$\gamma = -\frac{\lambda\sigma(t)}{\alpha}$$

$$= -\frac{\lambda\sigma}{\alpha} \tag{39}$$

así como $A(t+h,t)$ y $v(t+h,t)$ que podemos observar en las expresiones (11) y (12), respectivamente.

Ahora podemos proceder a simplificar la ecuación (38). Nótese que al haber asumido que $\sigma(t)$ es constante, entonces según la expresión (39), $\gamma = -\frac{\lambda\sigma}{\alpha}$. Esto nos permite hacer la siguiente simplificación en el primer exponente de la ecuación (38),

$$e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds} = e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}$$

Por tanto, la ecuación (38) se puede simplificar de la siguiente manera,

$$S_{t+h} = A(t+h,t)e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds}e^X$$

$$= A(t+h,t)e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}e^X$$

$$= S_t^{e^{-\alpha h}}F^{1-e^{-\alpha h}}e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}e^X \tag{40}$$

La ecuación (40) es la fórmula explícita del precio spot del commodity en el MNR. Asimismo, observemos que la ecuación (40) es idéntica a la expresión (13) que representa el precio spot del commodity en el MR, $S_{t+h} = A(t+h,t)e^X = S_t^{e^{-\alpha h}}F^{1-e^{-\alpha h}}e^X$, excepto que en la expresión (40) ha aparecido el término constante $e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}$.

3.2 Media Condicional y Varianza Condicional de S_t

La fórmula explícita de la esperanza condicional de S_t se utilizará para obtener la fórmula cerrada del precio del futuro del commodity en la sección 3.3 de este trabajo. Haciendo uso de la función generatriz de momentos de la distribución de probabilidad normal, en otras palabras, sabiendo que $E[e^X] = e^{E(X)+\frac{1}{2}Var(X)}$, recordando que $E(X) = 0$, $Var(X) = v(t+h,t)$, haciendo uso de la expresiones (37) y (11), así como de la ecuación $e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)} \int_t^{t+h} \gamma(s)e^{\alpha s} ds} = e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}$, entonces la esperanza condicional de S_{t+h} está dada por,

$$E[S_{t+h} \mid S_t] = S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})} e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)} \tag{41}$$

Por tanto, la varianza condicional de S_{t+h} está dada por,

$$Var[S_{t+h} \mid S_t] = \left(S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}}\right)^2 e^{2\gamma(1-e^{-\alpha h})}[e^{2v} - e^v] \tag{42}$$

No olvidemos de la ecuación (39) que $\gamma = -\frac{\lambda\sigma}{\alpha}$, y de la expresión (12) que $v(t+h,t) = v = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha h})$.

3.3 Precio del Futuro (o Forward) del Commodity

En el MNR, los precios de los futuros son iguales a la esperanza del precio spot en el futuro, bajo el proceso neutral al riesgo, y asumiendo que la tasa de interés libre de riesgo instantánea r es constante, los precios forward son iguales a los precios de los futuros.

Por tanto, utilizando la expresión (41), obtenemos la fórmula explícita para calcular el precio del futuro del commodity en el MNR, a saber,

$$\mathcal{F}(S_t,t,t+h) = E[S_{t+h} \mid S_t] = \mathcal{F}_t = S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})} e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)} \tag{43}$$

Observemos que la ecuación (43) es idéntica a la expresión (16) que representa el precio del futuro del commodity en el MR, $\mathcal{F}(S_t,t,t+h) = E[S_{t+h} \mid S_t] = S_t^{e^{-\alpha h}} F^{1-e^{-\alpha h}} e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)}$, excepto que en la expresión (43) ha aparecido el término constante $e^{\gamma(1-e^{-\alpha h})}$.

3.4 Cálculo del Call sobre el Futuro con Fórmula de Black

Sabemos que S_{t+h} sigue una distribución de probabilidad lognormal y que $\mathcal{F}(S_t,t,t+h) = E[S_{t+h} \mid S_t] = \mathcal{F}_t$, por tanto el precio del futuro $\mathcal{F}_t$ también sigue un proceso lognormal. En un proceso lognormal, sabemos que $\ln \mathcal{F}_t$ sigue una distribución de probabilidad normal. La fórmula de Black (1976) para valuar un call (en el tiempo 0, que vence en t) sobre el futuro $\mathcal{F}_t$ cuya vida va de t a $t+h$, aplicada a nuestro caso, quedaría de la siguiente manera,

$$c(0,t) = e^{-r(t-0)}E[max(\mathcal{F}_t - K, 0) \mid \mathbf{F_0}]$$

$$= e^{-r(t-0)}[\mathcal{F}(0,t+h)N(d_1) - KN(d_2)] \tag{44}$$

Para poder desarrollar los cálculos siguientes hemos utilizado una expresión alternativa a la ecuación (43) para $\mathcal{F}(S_t, t, t+h) = \mathcal{F}_t$. La expresión siguiente nos facilitará el uso de logaritmos, a saber,

$$\mathcal{F}(S_t, t, t+h) = A(t+h, t)e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds}e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)}$$

$$= F_{t+h}\left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}} e^{\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds}e^{\frac{1}{2}v(t+h,t)}$$

$$= e^{lnF_{t+h}+e^{-\alpha h}(lnS_t - lnF_t)+\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds+\frac{1}{2}v(t+h,t)} \tag{45}$$

donde, K es el precio de ejercicio, r es la tasa de interés instantánea libre de riesgo, $\mathcal{F}(0, t+h)$ está dada por la ecuación (45), $N(d)$ es la distribución de probabilidad normal estándar acumulada, $\mathbf{F_0}$ es la información en 0, y d_1 y d_2 están dadas por,

$$d_1 = \frac{ln\left[\frac{\mathcal{F}(0,t+h)}{K}\right] + \frac{\sigma_1^2(t+h)}{2}}{\sigma_1\sqrt{t+h}}$$

$$= \frac{ln\left[\frac{\mathcal{F}(0,t+h)}{K}\right]}{\sigma_1\sqrt{t+h}} + \frac{\sigma_1\sqrt{t+h}}{2} \tag{46}$$

$$d_2 = \frac{ln\left[\frac{\mathcal{F}(0,t+h)}{K}\right] - \frac{\sigma_1^2(t+h)}{2}}{\sigma_1\sqrt{t+h}}$$

$$= \frac{ln\left[\frac{\mathcal{F}(0,t+h)}{K}\right]}{\sigma_1\sqrt{t+h}} - \frac{\sigma_1\sqrt{t+h}}{2}$$

$$= d_1 - \sigma_1\sqrt{t+h} \tag{47}$$

Notemos que σ_1^2 es la varianza anual del rendimiento de los precios de los futuros $\mathcal{F}_t$. La fórmula de Black asume que ln $\mathcal{F}_t$ sigue una distribución de probabilidad normal, cuya varianza está dada por $\sigma_1^2(t+h)$. Para efectos de claridad, esta última expresión es el producto de σ_1^2 por $(t+h)$. Podemos observar que la raíz cuadrada de $\sigma_1^2(t+h)$ entra en el cálculo de d_1 y de d_2, así que utilizaremos la ecuación (45) para calcular,

$$\sigma_1^2(t+h) = Var[ln\mathcal{F}(t, t+h) \mid \mathbf{F_0}] \tag{48}$$

Para calcular $Var[ln\mathcal{F}(t, t+h) \mid \mathbf{F_0}]$, necesitamos primero calcular $E[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}]$. Por tanto,

$$E[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}] = lnF_{t+h} + e^{-\alpha h}E[lnS_t \mid \mathbf{F_0}] - e^{-\alpha h}lnF_t$$

$$+\alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_t^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds + \frac{1}{2}v(t+h,t)$$

De la expresión (38) y de la ecuación $A(t+h,t) = F_{t+h}\left(\frac{S_t}{F_t}\right)^{e^{-\alpha h}}$, obtenemos que,

$$S_t = F_t \left(\frac{S_{t-h}}{F_{t-h}}\right)^{e^{-\alpha h}} e^{\alpha e^{-\alpha(t)}\int_{t-h}^{t}\gamma(s)e^{\alpha s}ds} e^X$$

Por tanto,

$$E[lnS_t \mid \mathbf{F_0}] = lnF_t + e^{-\alpha h}(lnS_{t-h} - lnF_{t-h})$$
$$+\alpha e^{-\alpha(t)}\int_{t-h}^{t}\gamma(s)e^{\alpha s}ds + E[X \mid \mathbf{F_0}]$$

De aquí obtenemos,

$$E[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}] = lnF_{t+h}+$$
$$+e^{-\alpha h}\left\{lnF_t + e^{-\alpha h}(lnS_{t-h} - lnF_{t-h}) + \alpha e^{-\alpha(t)}\int_{t-h}^{t}\gamma(s)e^{\alpha s}ds\right\}$$
$$-e^{-\alpha h}lnF_t + \alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_{t}^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds + \frac{1}{2}v(t+h,t) \tag{49}$$

Por tanto,

$$Var[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}] =$$
$$= E\Bigg[lnF_{t+h} + e^{-\alpha h}(lnS_t - lnF_t) + \alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_{t}^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds + \frac{1}{2}v(t+h,t)$$
$$-lnF_{t+h} - e^{-\alpha h}\left\{lnF_t + e^{-\alpha h}(lnS_{t-h} - lnF_{t-h}) + \alpha e^{-\alpha(t)}\int_{t-h}^{t}\gamma(s)e^{\alpha s}ds\right\}$$
$$+e^{-\alpha h}lnF_t - \alpha e^{-\alpha(t+h)}\int_{t}^{t+h}\gamma(s)e^{\alpha s}ds - \frac{1}{2}v(t+h,t) \mid \mathbf{F_0}\Bigg]^2$$
$$= E[e^{-\alpha h}X \mid \mathbf{F_0}]^2$$
$$= e^{-2\alpha h}E[X^2 \mid \mathbf{F_0}]$$
$$= e^{-2\alpha h}Var[X \mid \mathbf{F_0}] \tag{50}$$

Sabemos que $Var[X] = v(t+h,t) = \int_t^{t+h}\sigma^2(s)e^{-2\alpha(t+h-s)}ds$. Asumimos que $\sigma(s)$ es constante, y dado que la información está disponible en 0, calculamos lo siguiente,

$$Var[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}] = \sigma_1^2(t+h) = e^{-2\alpha h}v(t,0) = e^{-2\alpha h}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-s)}ds$$

$$= e^{-2\alpha h}\frac{\sigma^2}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha t}] \quad (51)$$

Al principio de esta sección mencionábamos que la fórmula de Black (1976) nos iba a permitir valuar un call europeo (en el tiempo 0, que vence en t) sobre el futuro $\mathcal{F}_t$ cuya vida va de t a $t+h$. Debemos recalcar que las opciones sobre futuros de commodities de tipo europeo que regularmente se valúan, generalmente vencerán en la misma fecha que el futuro subyacente. Por tanto, para aplicar las fórmulas descritas arriba a este caso, la fecha de vencimiento de la opción t sería igual a la fecha de vencimiento del futuro $(t+h)$. En otras palabras, $t = t+h$ y por tanto $h = 0$. Esto nos lleva a que la expresión (51) se simplificaría para quedar así,

$$Var[ln\mathcal{F}_t \mid \mathbf{F_0}] = \sigma_1^2(t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha t}]$$

No olvidemos que la expresión $\sigma_1^2(t)$ es el producto de σ_1^2 por t.

4. Conclusiones

Como mencionábamos al inicio de este artículo, el proceso propuesto para modelar el precio spot del commodity está basado en el modelo propuesto por Jaillet, Ronn y Tompaidis (2004). La diferencia fundamental es que estos autores modelaron su proceso en el MR, asumiendo un valor de regresión a la media de largo plazo constante, y volatilidad constante, y en este artículo desarrollamos nuestro modelo tanto en el MR como en el MNR, y asumiendo volatilidad determinista (dependiente del tiempo). El desarrollo en el MNR es el que nos permitirá valuar derivados sobre commodities. En la Tabla 2 podemos observar las principales diferencias entre el modelo de JRT y el modelo utilizado en este artículo.

Tabla 2 Cuadro Comparativo de Modelos de 1 Factor

Modelo	Reversión	MR	MNR	Volat.	Reversión LP
Artículo	Sí	Sí	Sí	Determinista	0
JRT (2004)	Sí	Sí	No	Constante	Constante

Las principales contribuciones de este artículo a la literatura financiera radican en que hemos desarrollado fórmulas cerradas para el precio spot de cualquier commodity, el precio del futuro, el precio de la opción europea de compra "call" sobre el spot del commodity, así como el precio de la opción europea de compra sobre el futuro del commodity. Hemos podido desarrollar estas expresiones usando un modelo de un factor de riesgo que incorpora reversión a la media y volatilidad determinista.

Una debilidad del modelado del precio de los commodities con un factor, es que como podemos deducir de la ecuación (51), $\sigma_1^2 = \frac{1}{t+h} e^{-2\alpha h} \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha t}]$, la varianza anual de los precios de los futuros, σ_1^2, tiende a cero conforme el vencimiento de la opción, t, tiende a infinito. La intuición atrás de este fenómeno es que en el largo plazo, la reversión a la media domina y la varianza de los futuros tiende a la varianza del valor de reversión a la media de largo plazo, que en nuestro modelo de un factor, es cero, como puede observarse en la ecuación (2). Esta caída en la varianza σ_1^2 a largo plazo, es una debilidad importante de los modelos de un factor, ya que el modelo sería inapropiado para valuar opciones sobre futuros de largo plazo.

Otra limitación importante de los modelos de un factor es que implican que los cambios en los precios spot y en los precios de los futuros y forwards para todos los vencimientos, están perfectamente correlacionados. Esto significaría que todos los precios se mueven siempre en la misma dirección, lo cual claramente contradice los datos del mercado. Esta limitación se puede evitar si permitimos que los cambios en los precios spot dependan de más de un factor. Se ha demostrado que los modelos de dos y tres factores tienen un mejor desempeño que los de un factor cuando se ha modelado el precio de commodities como el cobre y el petróleo. Esto se puede ver en Schwartz (1997).

Referencias

Bessembinder, H., J. F. Coughenour, P. J. Seguin, and M. M. Smoller, 1995. Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure. *Journal of Finance*, 50(1), pp. 361-375.

Black, F., 1976. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167-179.

Black, F. and M. Scholes, 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Brennan, M. J., 1991. The Price of Convenience and the Valuation of Commodity Contingent Claims, in D. Lund and B. Oksendal, Eds.: *Stochastic Models and Option Values*, North Holland.

Cortazar, G., and Eduardo S. Schwartz, 1994. The Evaluation of Commodity Contingent Claims. *Journal of Derivatives*, 1, pp. 27-39.

Cox, J., and Stephen A. Ross, 1976. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145-166.

Eydeland, Alexander, and H. Geman, 1998. Pricing Power Derivatives. *RISK*, September.

Futures Industry Association, 2009. *Futures Industry*, pp. 16-29.

Geman, H., and V. N. Nguyen, 2003. Analysing Volatility Surfaces for Energy Commodities. ESSEC, Working Paper.

Gibson, Rajna, and Eduardo S. Schwartz, 1989. Valuation of Long Term Oil-linked Assets. Anderson Graduate School of Management, UCLA, Working Paper, #6-89.

Gibson, Rajna, and Eduardo S. Schwartz, 1990. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. *Journal of Finance*, 45, pp. 959-976.

Harrison, M., and D. Kreps, 1979. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.

Jaillet, Patrick, Ehud I. Ronn, and Stathis Tompaidis, 2004. Valuation of Commodity-Based Swing Options. *Management Science*, 50(7), pp. 909-921.

Ross, Stephen A., 1995. Hedging Long Run Commitments: Exercises in Incomplete Market Pricing. Preliminary draft.

Schwartz, Eduardo S., 1997. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *Journal of Finance*, 52, pp. 923-973.