*Revista de Administración, Finanzas y Economía* (*Journal of Management, Finance and Economics*), vol. 3, núm. 2 (2009), pp. 91-110.

# El valor del cliente en relaciones contractuales con estimaciones inciertas

**Ana María Gil Lafuente** *
**Mauricio Ortigosa** **

Recibido 21 de enero de 2009, aceptado 15 de mayo de 2009

**Resumen**

El valor del consumidor ha sido un concepto clave en el estudio de docentes e investigadores en las áreas de marketing. Sin embargo, en la literatura sobre este tema, a pesar de que se han desarrollado una gran cantidad de modelos que responden a diferentes circunstancias, la mayoría de ellos están basados en supuestos deterministas o aleatorios a la hora de medir las magnitudes o eventos que intervienen en el cálculo del valor del cliente.

Cuando hablamos de modelos del valor del consumidor donde se involucran magnitudes que hacen referencia al futuro, a menudo se obvia el carácter mutable e incierto del entorno en el cual queda afectado el modelo que se desea construir. Es por ello que en muchas ocasiones dichos modelos no reflejan la realidad. Hay una frase mencionada por Kaufmann y Gil Aluja, dos de los precursores e investigadores más notables en Europa en las técnicas operativas de gestión en la que decían: "lo impreciso, lo borroso, no tiene por qué ser inexacto": podemos trabajar modelos que tradicionalmente se utilizan con cifras precisas, pero no son necesariamente exactos. Por estos motivos en la presente investigación proponemos las aportaciones necesarias para utilizar cifras imprecisas, borrosas, pero más adecuadas a la realidad; presentando para ello un modelo del valor del cliente ($CLV$) con números borrosos triangulares ($NBT$).

**Abstract**

The Customer Lifetime Value ($CLV$) concept has been highly purposed in many researches in the marketing area since long time ago. Almost all trends towards determinist or stochastic bases when measuring magnitudes o events which have to do with CLV estimates.

*Clasificación JEL: C13, C51.*
*Palabras clave: valor del cliente, valor del consumidor, relaciones contractuales, subconjuntos borrosos, números borrosos triangulares, incertidumbre.*

* Universidad de Barcelona, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Departamento de Economía y Organización de Empresas. Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, España.

** Profesor en la Universidad de Barcelona, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Departamento de Economía y Organización de Empresas. Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, España.

Often the Customer Lifetime Value ($CLV$) involves magnitudes that link to the future by the running environment, its mutability and uncertainty. And this turn out the results to be too accurate. Kaufman and Gil Aluja (1986) who are the two most well known European investigators, have carried out researches into several operative management techniques, stood by the following statement "Most of our traditional tools for formal modeling, reasoning, and computing are crisp, deterministic and precise in character". Then traditional modeling with precised data can not necessarly mean to be accurate.

In this study the authors will deal with some useful directions for uncertainty data, fuzzy data to stand out more accurate according to the reality. A $CLV$ estimation with triangular fuzzy numbers ($TFN$) will be introduced.

## 1. Introducción

Las investigaciones en marketing han sufrido considerables avances desde el inicio de los años ochenta; diferentes autores se refieren a dichos cambios como el nuevo paradigma del marketing, y al igual que el concepto de marketing, ha sido estudiado desde diferentes ángulos. Uno de los pioneros en utilizar el término de marketing relacional fue Leonard Berry en 1983 con estudios en marketing de servicios en Estados Unidos. Kandampully y Duddy (1999) describen la definición inicial de L. Berry acerca del marketing relacional de forma muy simple:

*atraer, desarrollar y retener las relaciones con los consumidores.*

Esto supone ir más allá del marketing convencional, ya que no sólo se limita en atraer clientes y efectuar intercambios, ésta definición plantea un enfoque dirigido a consolidar relaciones a largo plazo.

Otros autores como Morgan y Hunt (1994), Grönroos (1994), Gummensson (1996), Alet (2004) y varios más, contemplan en sus definiciones de marketing relacional tres elementos comunes a todos ellos:

1. El concepto de relación, que se halla presente en todos.
2. La interactividad, que se genera en base al entramado de las relaciones entre las distintas figuras que intervienen en los procesos.
3. El carácter temporal o a largo plazo que se atribuye a toda relación.

Elementos clásicos tan estudiados como la participación en el mercado, el volumen de ventas, las medidas financieras normalmente a corto plazo, entre otros más, dejan paso a nuevos indicadores como son: la tasa de retención de clientes, el coste de adquisición de nuevos clientes, la vida media de un cliente, el valor del cliente para la empresa (customer lifetime value = CLV) entre otros.

Con el objetivo de atraer y retener consumidores rentables con una perspectiva de relación a largo plazo con cada cliente, el valor del cliente ($CLV$) ha sido un concepto que ha llamado la atención para ser estudiado desde hace tiempo por diversos investigadores en el área de marketing.

El valor económico del cliente es, en última instancia, la mejor fuente de financiación de cualquier empresa. Entre los primeros investigadores que realizaron estudios sobre el impacto económico que genera la fidelidad del cliente se encuentran Reichheld y Sasser (1990). Reichheld (2002) en su nueva edición del clásico libro escrito en 1996 "The Loyalty Effect", menciona que para tratar a los clientes como activos económicos, es necesario cuantificar y predecir la duración o permanencia del cliente con la empresa y el ciclo de flujo de fondos del cliente.

Pyne y Holt (2001), mencionan que la línea de investigación del $CLV$ es importante por tres razones: (1) Los diferentes segmentos de consumidores tienen diferente beneficio potencial para la empresa y el patrón de beneficio puede variar dependiendo del periodo en que se encuentre el ciclo de vida del cliente y otras consideraciones. (2) Cuidar al grupo de consumidores que representan los más valiosos clientes durante largos periodos, puede incrementar significativamente el beneficio para la empresa. (3) Finalmente, algunos estudios enfatizan la vinculación entre el clima de servicio interno y el impacto sobre la satisfacción del empleado y la retención del consumidor.

En la presente investigación, se muestra una propuesta teórica-metodológica para calcular el $CLV$, aplicables a ciertos contextos. La contribución principal se centra en abordar el tratamiento de la incertidumbre en la obtención del valor del consumidor. Muchos modelos propuestos se enfrentan a la incertidumbre con herramientas dentro de la teoría de la probabilidad, entendiendo la incertidumbre de manera diferente a como la definimos en el presente trabajo.

En el prólogo de unos de los libros de Kaufmann y Gil Aluja (1987), Raymond Barre, en ese momento profesor de Economía Política de París, menciona que los citados autores han mostrado que los hechos imprecisos y los números inciertos no pueden ser tratados según los mismos principios que los hechos precisos y los números ciertos o que las variables aleatorias. Los autores Kaufmann y Gil Aluja han sabido transformar instrumentos ya empleados en el ámbito de la certeza o de lo probable para aplicarlos a la incertidumbre. En esta misma dirección, vamos a mostrar cuales son dichas adaptaciones al estudio del $CLV$ bajo la incertidumbre.

## 2. Elementos previos al desarrollo del modelo propuesto

Podemos decir que el estudio del valor del cliente (CLV) a través de sus diversas líneas de investigación, tiene en la actualidad una gran importancia para los docentes e investigadores. Los modelos del CLV se han ido presentando a través de varios autores reconocidos en esta línea de investigación. Como es natural pensar, los modelos tienen sus propias limitaciones ya que funcionan bajo ciertos supuestos. Por tanto, consideramos oportuno presentar algunos de esos modelos para que sean adaptados a nuevos entornos.

Pasemos a mostrar los modelos del valor del cliente más representativos dentro de ésta línea de investigación, de esta forma podemos proponer como aportación, el tratamiento de la incertidumbre como elemento adicional en este camino.

Seleccionamos 4 modelos de entre los muchos que nos ofrece la literatura sobre el tema: El modelo estructural básico hace referencia al valor presente neto de los flujos futuros de los consumidores. Su formulación se representa como sigue:

Modelo estructural bsico del CLV
Fuente: Jain y Singh (2002)

$$CLV = \frac{(R_1 - C_1)}{(1+D)} + \frac{(R_2 - C_2)}{(1+D)^2} + ... \frac{(R_n - C_2)}{(1+D)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(R_i - C_i)}{(1+D)^i}$$

Es el modelo más simple pero que muestra la estructura central del valor del cliente aplicando las herramientas utilizadas en matemáticas financieras o más en general de la teoría financiera: nos referimos al Valor Actual Neto (VAN).

Podemos afirmar que dos de los autores que han realizado un excelente conjunto de escenarios bajo la óptica del modelo estructural básico son Berger y Nasr (1998). En ese artículo, muestran una serie de modelos para determinar el valor del cliente en base a una taxonomía sistemática teórica y un conjunto de suposiciones sobre el comportamiento del cliente o consumidor.

El modelo de migración ha sido propuesto por Dwyer (1997). El autor hace mención a una clasificación hecha por Barbara Jackson donde divide a los compradores industriales en dos grandes categorías:
(1) Los clientes que comparten vendedores o proveedores y pueden ajustar su cartera de gasto entre ellos. Los autores anteriores hacen referencia a ellos con el nombre "always-a-share".
(2) Los clientes que se han comprometido con el vendedor o empresa por un largo periodo, donde el cambio a otra empresa le implica un alto coste, pero si el cliente decide dejar al proveedor, la cuenta es cancelada para siempre. En cierta forma es una relación de cautiverio. Los autores se refieren a estos clientes como "lost-for-good". En este caso, menciona Dwyer (1997), el problema para resolver el valor del cliente puede ser tratado como un problema de retención y propone una ligera variación al modelo estructural básico del CLV.

Por tanto si consideramos la contribución bruta (CB) de cada periodo al final y los costes de promoción o retención (M) a la mitad de cada periodo, el autor propone la siguiente expresión, que no es más que el valor presente de los beneficios de cada periodo y los costes de retención también en valor presente. En esencia se trata de aplicar nuevamente el significado del modelo estructural básico con ciertas variantes de importancia. La expresión queda:

Modelo del migración del CLV
Fuente : Dwyer (1997)

$$CLV = \left\{ CV\left[C_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+d)^i}\right] - \left[M\frac{C_0}{(1+d)^0.5}\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+d)^{i+0.5}} \right\} \Big/ C_0$$

*Valor presente de los beneficios*  *Valor presente de los costes de retención*

donde $C_0$ es la base de clientes iniciales en el momento de calcular el CLV.
Dwyer (1997) al igual que los modelos de Berger y Nasr (1998) no contemplan los costes de adquisición, sólo consideran en su jerarquía de costes: los costes de retención o promoción, y los que entran en la contribución bruta (CB) utilizada.

El modelo de asignación de los mejores recursos resulta útil cuando la optimización de los recursos monetarios tiene especial importancia en la relación con el cliente. Blattberg y Deighton (1996) incorporan en su modelo los costes de adquisición: proponen una forma para encontrar un balance entre los costes de adquisición y de retención con la finalidad de maximizar el CLV.

En un artículo de Berger y Nasr (2001) muestran en un cuadro, el desarrollo utilizado por Blattberg y Deighton (1996) para obtener la expresión final del valor del cliente quedando de la siguiente forma:

Cálculo del valor del consumidor
Fuente: Blattberg y Deighton (1996)

$$CLV = a\$m - \$A + a\left(\$m - \frac{\$R}{r}\right)\left[\frac{r'}{(1-r')}\right]$$

*VPN de los gastos de adquisión (año de inicio) y VPN de los gastos de retención*
donde $r' = r/(1+d)$

Maximizando el CLV en la igualdad anterior, es el mejor balance en dichos gastos. Para ello, recomiendan los autores, se busca un valor $\$R$ tal que al sustituir en la expresión permita obtener el CLV más grande, determinando así el gasto de adquisición $\$A$. Este resultado, es el valor del cliente esperado de un consumidor promedio adquirido con gastos $\$A$ y retenido con gastos de $\$R$ para cada año.

Con esto podemos ver que el modelo usa el CLV como base para tomar decisiones sobre la asignación de recursos, a diferencia de los otros modelos presentados en los párrafos anteriores, donde el objetivo había sido solamente calcular el CLV. Además, este modelo sí toma en cuenta los gastos de adquisición para calcular el CLV. A pesar de sus respetables atributos, el modelo continúa conservando algunas de las debilidades que otros modelos ya tienen: periodicidad y frecuencia constante en relación a los flujos de caja, no considera de forma conjunta o simultánea la adquisición y retención para maximizar el CLV, y en este caso por simplicidad, también se asume que todos los flujos de caja ocurren al inicio de cada año. Los autores muestran con este modelo, la intención de asignar de la mejor manera los recursos buscando la maximización del valor del cliente. En esta misma dirección, Berger y Nasr (2001) han continuado estudiando en especial, la asignación de los recursos de promoción a través de dos conceptos: cálculo de decisión y valor del consumidor. Además comentan las posibles sinergias entre diferentes vehículos promocionales.

Los autores muestran con este modelo, la intención de asignar de la mejor manera los recursos buscando la maximización del valor del cliente. En esta misma dirección, Berger y Nasr (2001) han continuado estudiando en especial, la asignación de los recursos de promoción a través de dos conceptos: cálculo de decisión y valor del consumidor. Además comentan las posibles sinergias entre diferentes vehículos promocionales.

Los modelos de relaciones de clientes tienden a generalizar las propuestas de los autores anteriores. Estos modelos se desarrollan a través de las llamadas Cadenas de Markov. En este sentido, Pfeifer y Carraway (2000) proponen una clase de modelos matemticos llamados “Modelos de cadenas de Markov” (MCM), que son apropiados para modelar las relaciones con los clientes y calcular el CLV.

La principal ventaja de estos modelos es su flexibilidad, y pueden ajustarse a la gran mayoría de las situaciones representadas en los modelos propuestos por Berger y Nasr (1998), Dywer (1997) y Blattberg y Deighton (1996), lo que significa que pueden ser utilizados para clientes en esquemas de migración como en situaciones de retención, asícomo, en situaciones con clientes actuales o bien prospectos. Pfeifer y Carraway (2000) mencionan que su flexibilidad permite adaptar los MCM para algunos escenarios no cubiertos en los modelos previamente mostrados.

Otra ventaja de los MCM, es que se fundamentan en una sólida teoría estocástica o probabilística, además de la teoría de los procesos de decisiones de Markov. Con estas herramientas, según los autores, hacen frente a la incertidumbre que rodea la relación con el cliente, haciendo la aclaración por nuestra parte que dicho término, no tiene el mismo significado que el utilizado en el presente artículo. En este caso, la probabilidad y el valor esperado permiten hablar sobre la relación futura con un cliente individual.

Los Modelos de cadenas de Markov (MCM), en su versión amplia, trabajan de forma sutil con una métrica llamada "Recency, Frequency, Monetary value" (RFM). Autores tales como Reinartz y Kumar (2000), mencionan que en la actualidad muchas empresas utilizan dicha métrica para determinar la asignación del gasto a los consumidores en sus bases de datos. Otros autores mencionan que la métrica RFM es de las más fiables para el pronóstico de las ventas. No obstante, los MCM reciben una particular crítica: Jain y Singh (2002) mencionan que los periodos de tiempo de compra para todos los clientes nuevamente se asumen como iguales y fijos. Además, el cálculo de las probabilidades de transición de un periodo a otro es un elemento crítico para el éxito de tales modelos y dichas probabilidades no son fáciles de calcular, agregando por nuestra parte que esas medidas están limitadas a informaciones objetivas.

En el modelo más simple, en lugar de tomar los tres componentes de la métrica RFM (Recency, Frequency, Montary value), se considera solamente el primer elemento R: el número de periodos desde que el cliente realizó la última compra. Al obtener las probabilidades de transición de un estado a otro, cuyo resumen se muestra en la matriz P llamada matriz de transición de un paso ("one-step"), y al calcular la matriz $Pt$ que resume la probabilidad de compra pronosticada y la matriz R que resume los flujos de efectivo, ambas elaboradas dependiendo del número de periodos desde la última compra (R). Pfeifer y Carraway (2000) llegan a una propuesta del valor presente esperado:

$$V^T = \sum_{t=0}^{T} \left[(1+d)^{-1}P\right]^t R$$

El vector $V^T$ es el equivalente al CLV y representa el valor presente esperado de un cliente en particular con una relación de duración $T$ y una tasa de descuento $d$.

Los autores muestran que si se considera un horizonte infinito, la expresión resulta ser la siguiente:

Modelo de Cadena de Markov
Situación de migración con probabilidades de compra en función del número de periodos desde la última compra (Recency)
Fuente: Pfeifer y Carraway (2000)

$$V = lim_{T\to\infty} V^T = (I-(1+d)^{-1}P)^{-1}R = CVL$$

donde I es la matriz identidad

Recordemos que el anterior modelo puede ser caracterizado como una situación de migración con el cliente, cuando la probabilidad de compra depende del número de periodos transcurridos desde la última compra (R).

Si asumimos que además de las probabilidades de compra, también los gastos de marketing (M) y la contribución neta (CN) depende del número de periodos transcurridos desde la última compra (R), el modelo se va sofisticando cada vez más. De esta forma, podemos construir MCM donde la probabilidad de compra, los gastos de marketing y la contribución neta (CN) dependen también de la frecuencia y del valor monetario, en definitiva, se hace uso de la métrica Recency, Frequency, Monetary value (RFM) para llegar a una categorización de clientes, mostrando esa flexibilidad que se comentó anteriormente.

Hemos visto hasta este momento cuatro modelos del valor del cliente. Sin dejar de admirar el especial mérito que representa cada uno de ellos, aparecen situaciones en donde los datos históricos no existen por tratarse de clientes nuevos o bien, el hecho de asignar unas probabilidades a esos clientes en base a la historia de otros, es como suponer que todos los anteriores clientes se comportan de la misma manera, según las leyes de las probabilidades. Incluso, Pfeifer y Carraway (2000) mencionan que con la aplicación de las probabilidades se hace frente a la incertidumbre que envuelve la relación futura entre cliente y empresa.

Es precisamente el concepto de incertidumbre el que va a protagonizar el modelo del CLV propuesto en la presente investigación bajo la óptica del modelo estructural básico. Considerando el término incertidumbre de forma distinta a los anteriores autores, pasamos a presentar un modelo del valor del cliente con magnitudes expresadas en términos borrosos.

## 3. Propuesta del modelo del CLV con números borrosos triangulares (NBT)

A pesar de la gran variedad de modelos existentes relacionados con el valor del cliente (CLV) y con ánimos de aportar valor añadido a cada uno de ellos, se observa que ninguno de los modelos presentados hacen referencia a la incertidumbre inherente a la estimación de magnitudes futuras propias de dichos esquemas. En muchos casos las estimaciones se basan en datos históricos, lo que implica de alguna forma, un grado de estabilidad en el sistema económico de las empresas, inexistente en el contexto actual. En otros casos, se establece un marco de probabilidades o de procesos estocásticos como herramienta para apoyar el pronóstico de eventos futuros que resultan muy necesarios al medir el valor del cliente. En este caso se suele confundir aleatoriedad o azar con incertidumbre.

Kaufmann y Gil Aluja (1990) indican claramente que, el azar posee leyes y su medida está asociada con la probabilidad, en cambio la incertidumbre no posee leyes y se explica de manera subjetiva. Los mismos autores describen un hecho incierto cuando hace referencia al futuro, donde no puede situarse en el tiempo (¿cuándo?) ni en el espacio (¿dónde?), y el pasado no aporta nada o muy poca información para la previsión del acontecimiento. Este es el significado que vamos a adoptar en la presente investigación al término incertidumbre. No se pretende reemplazar la teoría de la probabilidad en la medición de la aleatoriedad, sino proporcionar una manera natural de trabajar con problemas en los que la fuente de la imprecisión radica en la ausencia de criterios estrictos más que en presencia de variables aleatorias o de datos ciertos.

Uncles, Dowling y Hammond (2003) han demostrado que los consumidores no son 100% fieles o leales a las empresas. El movimiento de clientes es cada vez más volátil o se comparte entre más empresas. Las organizaciones conviven en un entorno de mayor incertidumbre comparado con épocas pasadas. La dificultad de predecir o estimar magnitudes involucradas con el valor del cliente se incrementa en un clima de incertidumbre: tasas de descuento, niveles de ventas, compras, tiempo de duración del cliente, entre otras magnitudes.

Al contemplar al cliente como un activo fundamental para la vida financiera de la empresa en un clima de incertidumbre, nos obliga a buscar una vía alterna o adaptar los desarrollos ya existentes, con instrumentos y técnicas que permitan la convivencia en ese nuevo entorno. Kaufmann y Gil Aluja (1986) mencionan que la teoría de los subconjuntos borrosos es una parte de las matemáticas que se halla perfectamente adaptada al tratamiento tanto de lo subjetivo como de lo incierto.

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar un modelo del valor del cliente (CLV) con magnitudes en la incertidumbre bajo la óptica del modelo estructural básico, haciendo uso de los NBT. Se partirá del esquema más sencillo y propio del ámbito de la certeza, para llegar a dicho modelo donde la incertidumbre juega un papel protagnico en las magnitudes involucradas.

A pesar de la gran variedad de trabajos referentes al valor del cliente que se han publicado en las revistas científicas y en libros sobre la materia, existe un vacío referente al tratamiento de la incertidumbre a la hora de contemplar las magnitudes que intervienen en la estimacin del beneficio.

La posibilidad de introducir estimaciones inciertas mediante intervalos de confianza, tripletas de confianza o números borrosos, va a resultar de utilidad para los responsables de Marketing o Ventas.

En el modelo del CLV en la certeza, asumimos que: 1) Existe una relación contractual con la empresa por $n$ periodos (meses, años, etcétera) 2) Se conocen todos los datos con certeza: ventas, costes, tasa de descuento. 3) Los flujos de costes e ingresos por ventas, se asumen en el mismo punto en el tiempo para simplificar los cálculos. 4) No hay colapsos significativos entre los costes de ventas, costes de retención y costes de captación. Esto puede ser el caso de estar suscrito en alguna revista con publicaciones peridicas, o algo similar.
Si consideramos que:

$V_t$ =Ventas en cada periodo
$CV_t = CP_t + CS_t =$ Coste de venta en cada periodo, incluye: costes del producto y costes de servicios adicionales.
$CB_t =$ Contribución bruta por consumidor en cada periodo: $V_t - CV_t$
$CC =$ Coste de captación (publicidad, comunicación, etc.)
$n =$ número de periodos (años, meses, etc.)
$i =$ tasa de actualización (o de descuento) anual (apropiada para las inversiones de marketing).

Bajo condiciones de certeza, si se quiere obtener el valor del cliente, es suficiente con calcular el valor presente de los flujos futuros de ingresos por ventas y coste de venta a una tasa determinada de actualización menos los costes de captación realizados al inicio. Otra forma equivalente es calcular la contribución bruta marginal por consumidor en cada periodo y después, actualizar dichas magnitudes al año cero menos los costes de captación. Por tanto, el valor del cliente bajo estas condiciones de certeza se puede expresar como:

$$CLV = \sum_{t=1}^{n} CB_t \frac{1}{(1+i)^t} - CC$$

Una vez que hemos considerado el esquema más clásico, sin profundizar en estos momentos en todas las posibles combinaciones que se pueden realizar como lo muestra Berger y Nasr (1998), vamos a hacer uso de un elemento de la teoría de la incertidumbre: los números borrosos triangulares (NBT), que es un caso particular de un subconjunto borroso para calcular algunas magnitudes involucradas en el CLV.

### 3.1 Modelo del valor del cliente (CLV) con tasas, costes y ventas estimadas a través de números borrosos triangulares.

Gil Aluja (2002) menciona que, todo problema situado en el ámbito de la incertidumbre es susceptible de ser tratado a través de la teoría de los subconjuntos borrosos y sus múltiples variantes. Asimismo menciona que un subconjunto borroso es el resultado de asignar a los valores de cierta variable un nivel de presunción o posibilidad, que no es otra cosa más que los valores de la función característica de pertenencia.

Con los conceptos de subconjuntos borrosos y números borrosos, podemos avanzar en la estructuración del tratamiento de la incertidumbre para calcular el CLV bajo el esquema del modelo estructural básico.

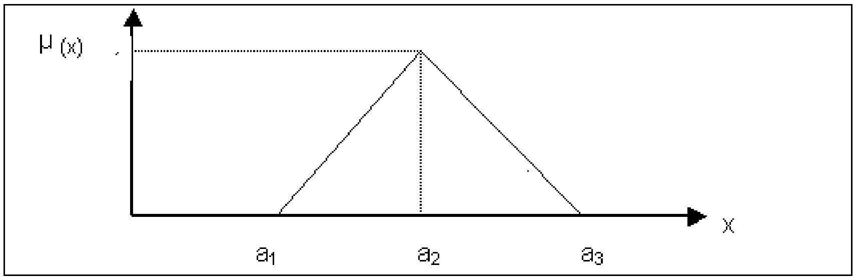
Un número borroso, es un caso particular de un subconjunto borroso. Es decir, es un subconjunto borroso con tres propiedades. 1. El conjunto referencial o variable objeto de estudio toma valores en los reales. 2. La función caracterstica de pertenencia es normal. 3. La función de pertenencia es convexa.

En general en el ámbito continuo, un número borroso quedará definido a través de una función que relaciona los valores del referencial x con los valores de la función característica de pertenencia. Se acostumbra identificar a la función como:

$$\mu = \mu(x), \quad donde \quad x \in \Re; \quad \mu \in [0,1]$$

Es muy común emplear una simplificación de los números borrosos si consideramos o asumimos linealidad entre el áximo de presunción y los valores extremos. De esta forma, se construyen los denominados números borrosos triangulares (N.B.T) y se pueden expresar de 3 formas distintas:

1) Con notación de forma ternaria, expresando los 3 extremos representados en las abcisas de cada una de las coordenadas respectivas: $N\hat{B}T = (a1; a2; a3)$ La representación gráfica queda como:




2) Una segunda forma es, expresarlo en términos de la función característica de pertenencia con sus cuatro ecuaciones perfectamente identificadas.

3) Una tercera forma de expresar los números borrosos triangulares es bajo la forma llamada de $\alpha$ - cortes.

Con este breve recordatorio sobre los números borrosos triangulares, pasamos a mostrar un modelo del valor del cliente con magnitudes en la incertidumbre expresados con dichos números.

Ejemplo. Supongamos que deseamos obtener el valor de un consumidor, donde firma un contrato por cuatro años para una revista especializada que se publica anualmente con suplementos que pueden modificar tanto el importe de las ventas como el importe de los costes requeridos. Para ello, el responsable de marketing o ventas en la empresa, una vez hecha una profunda reflexión sobre sus costes, ventas y tasas de actualización (o descuento) en los próximos cuatro años, máximo y otro de máxima presunción. Como vemos hay incertidumbre en estas magnitudes.

En la práctica habitual podemos suponer que dichas estimaciones siguen una tendencia proporcional entre el máximo de presunción y ambos extremos. Con este supuesto mencionado, podemos tratar dicha información como números borrosos triangulares (NBT) en forma ternaria.

Las estimaciones que proporciona el responsable para costes y ventas son:

$$\hat{V}_1 = [45, 70, 100]; \hat{V}_2 = [50, 70, 120]; \hat{V}_3 = [80, 110, 140]; \hat{V}_4 = [75, 85, 120]$$

$$\hat{C}_1 = [20, 35, 40]; \quad \hat{C}_2 = [25, 35, 50]; \quad \hat{C}_3 = [30, 45, 55]; \quad \hat{V}_4 = [25, 30, 35]$$

Supongamos que sus estimaciones para las tasas de actualización son:

Para el año 1: $[2\%, 3\%, 4\%] = \hat{i}_1$
Para el año 2: $[3\%, 4\%, 6\%] = \hat{i}_2$
Para el año 3: $[3\%, 5\%, 7\%] = \hat{i}_3$
Para el año 4: $[4\%, 6\%, 9\%] = \hat{i}_4$

Consideremos también que hay unos costes de captación de 80 u.m. sólo en el momento inicial (año cero).

En primer lugar se hace preceptivo encontrar los coeficientes de actualización. No obstante, hay un problema que es necesario matizar. Los datos anteriores son números borrosos triangulares pero al realizar los cocientes como lo indica la aritmética propia de la incertidumbre, el resultado deja de ser un número borrosos triangular al estar sometidos los datos iniciales a una operación no lineal. Esto nos lleva a tener que transformar los NBT de forma ternaria a la forma llamada, lo cual permite disponer de todas las estimaciones en función de los valores que se desee asignar a $\alpha$. Los cocientes simples quedan en forma de $\alpha$ - cortes como:

$1/(1(+)\hat{i}_1) = [1/(1.04 - 0,01\alpha); 1/(1.02 + 0,01\alpha)]$
$1/(1(+)\hat{i}_2) = [1/(1.06 - 0,01\alpha); 1/(1.03 + 0,01\alpha)]$
$1/(1(+)\hat{i}_3) = [1/(1.07 - 0,02\alpha); 1/(1.03 + 0,02\alpha)]$
$1/(1(+)\hat{i}_4) = [1/(1.09 - 0,03\alpha); 1/(1.04 + 0,02\alpha)]$

Con la información anterior, pasamos a construir los coeficientes de actualización inciertos, recordando que tienen la forma para cada año de:

Año 1: $1/(1(+)\hat{i}_1)$

Año 2: $1/(1(+)\hat{i}_1)(1(+)\hat{i}_2)$

Año 3: $1/(1(+)\hat{i}_1)(1(+)\hat{i}_2)(1(+)\hat{i}_3)$

Año 4: $1/(1(+)\hat{i}_1)(1(+)\hat{i}_2)(1(+)\hat{i}_3)(1(+)\hat{i}_4)$

De esta forma obtenemos los coeficientes de actualización para cada año:

Año 1: $\left[\frac{1}{1.04-0.01\alpha}, \frac{1}{1.02+0.01\alpha}\right]$

Año 2: $\left[\frac{1}{1.04-0.01\alpha} * \frac{1}{1.06-0.01\alpha}, \frac{1}{1.02+0.01\alpha)} * \frac{1}{1.03+0,01\alpha}\right]$

Año 3: $\left[\frac{1}{1.04-0.01\alpha} * \frac{1}{1.06-0.01\alpha} * \frac{1}{1.07-0.02\alpha}, \frac{1}{1.02+0.01\alpha} * \frac{1}{1.03+0.01\alpha} * \frac{1}{1.03+0.02\alpha}\right]$

Año 4: $\left[\frac{1}{1.04-0.01\alpha} * \frac{1}{1.06-0.01\alpha} * \frac{1}{1.07-0.02\alpha} * \frac{1}{1.09-0.03\alpha}, \frac{1}{1.02+0.01\alpha)} * \frac{1}{1.03+0.01\alpha}\right.$

$\left. * \frac{1}{1.03+0.02\alpha} * \frac{1}{1.04+0.02\alpha}\right]$

Observemos dos cuestiones: la primera es que con las expresiones anteriores, cualquier cantidad de u. m. estimadas en forma cierta o incierta, situada en cualquier parte de los cuatro periodos, se traslada al origen con sólo multiplicar dicha estimación por el coeficiente de actualización de acuerdo al año donde se encuentran las u.m.. La segunda reflexión es que, si bien las tasas de actualización se estimaron en su inicio como números borrosos triangulares, los coeficientes de actualización, al haber estado sometidos en el proceso a operaciones no lineales como el producto y el cociente, su resultado deja de comportarse como número borroso triangular. Pese a esto, en nuestro caso vamos a considerar asumible la pérdida de información que ello supone.

Uno de los propósitos de trabajar con números borrosos en su forma de $\alpha$ - cortes, radica en construir una tabla en donde se puede visualizar la pareja nivel de presunción e intervalo de confianza, de forma más sencilla. Utilizamos para ello, el sistema endecadario dando 11 valores a $\alpha$, desde $\alpha = 0$; 0.1; 0.2; 0.3;...;0.9 y 1. De esta manera construimos los coeficientes de actualización para cada año.

En la práctica, señala Gil Aluja (2002), se puede realizar un camino más corto tratando a los números borrosos triangulares como si fueran tripletas de confianza y después de hallado el resultado, volver a unir el máximo de presunción con los dos extremos. A este proceso se le denomina "aproximación triangular".

Coeficiente de actualización para el año 1 en el sistema endecadario. $\hat{I}_1 =$

| $\alpha$ | 1/(1.04-0.01 $\alpha$) | 1/(1.02+0.01 $\alpha$) |
|---|---|---|
| 1 | 0.971 | 0.971 |
| 0.9 | 0.970 | 0.972 |
| 0.8 | 0.969 | 0.973 |
| 0.7 | 0.968 | 0.974 |
| 0.6 | 0.967 | 0.975 |
| 0.5 | 0.966 | 0.976 |
| 0.4 | 0.965 | 0.977 |
| 0.3 | 0.964 | 0.978 |
| 0.2 | 0.963 | 0.978 |
| 0.1 | 0.962 | 0.979 |
| 0 | 0.962 | 0.980 |

Coeficiente de actualización para el año 2 en el sistema endecadario. $\hat{I}_2 =$

| $\alpha$ | [1/(1.04-0.01 $\alpha$)][1/(1.06-0.02 $\alpha$)] | [1/(1.02+0.01 $\alpha$][1/(1.03+0.01 $\alpha$)] |
|---|---|---|
| 1 | 0.934 | 0.934 |
| 0.9 | 0.931 | 0.935 |
| 0.8 | 0.928 | 0.937 |
| 0.7 | 0.925 | 0.939 |
| 0.6 | 0.923 | 0.941 |
| 0.5 | 0.920 | 0.943 |
| 0.4 | 0.918 | 0.944 |
| 0.3 | 0.915 | 0.946 |
| 0.2 | 0.912 | 0.948 |
| 0.1 | 0.910 | 0.950 |
| 1 | 0.907 | 0.952 |

Coeficiente de actualización para el año 3 en el sistema endecadario. $\hat{I}_3 =$

| $\alpha$ | [1/(1.04-0.01 $\alpha$)][1/(1.06-0.02 $\alpha$)] [1/(1.07-0.02 $\alpha$)] | [1/(1.02+0.01 $\alpha$][1/(1.03+0.01 $\alpha$)] [1/(1.03+0.02 $\alpha$] |
|---|---|---|
| 1 | 0.889 | 0.889 |
| 0.9 | 0.885 | 0.892 |
| 0.8 | 0.881 | 0.896 |
| 0.7 | 0.876 | 0.899 |
| 0.6 | 0.872 | 0.903 |
| 0.5 | 0.868 | 0.906 |
| 0.4 | 0.864 | 0.910 |
| 0.3 | 0.860 | 0.913 |
| 0.2 | 0.856 | 0.917 |
| 0.1 | 0.852 | 0.921 |
| 1 | 0.848 | 0.924 |

Coeficiente de actualización para el año 4 en el sistema endecadario. $\hat{I}_4 =$

| $\alpha$ | [1/(1.04-0.01 $\alpha$)][1/(1.06-0.02 $\alpha$)] [1/(1.07-0.02 $\alpha$)][1/(1.09-0.03 $\alpha$)] | [1/(1.02+0.01 $\alpha$][1/(1.03+0.01 $\alpha$)] [1/(1.03+0.02 $\alpha$][1/(1.04-0.02 $\alpha$)] |
|---|---|---|
| 1 | 0.839 | 0.889 |
| 0.9 | 0.885 | 0.892 |
| 0.8 | 0.881 | 0.896 |
| 0.7 | 0.876 | 0.899 |
| 0.6 | 0.872 | 0.903 |
| 0.5 | 0.868 | 0.906 |
| 0.4 | 0.864 | 0.910 |
| 0.3 | 0.860 | 0.913 |
| 0.2 | 0.856 | 0.917 |
| 0.1 | 0.852 | 0.921 |
| 1 | 0.848 | 0.924 |

Sólo para comprobar los cálculos anteriores desarrollamos los coeficientes de actualización, como si fueran tripletas de confianza.

Año 1: $\frac{1}{1+\hat{i}_1}$ =[0.962, 0.971, 0.980]= $\beta_1$
Año 2: $\frac{1}{1+\hat{i}_1} * \frac{1}{1+\hat{i}_2}$ =[0.907, 0.934, 0.952]= $\beta_2$
Año 3: $\frac{1}{1+\hat{i}_1} * \frac{1}{1+\hat{i}_2} * \frac{1}{1+\hat{i}_3}$ =[0.848, 0.889, 0.924]= $\beta_3$
Año 4: $\frac{1}{1+\hat{i}_1} * \frac{1}{1+\hat{i}_2} * \frac{1}{1+\hat{i}_3} * \frac{1}{1+\hat{i}_4}$ =[0.778, 0.839, 0.889]= $\beta_4$

La igualdad de los extremos y el máximo de presunción confirman esta aproximación.

Debemos ahora calcular la contribución por año, descontando de las ventas o ingresos, los costes pero no como tripletas de confianza, ya que tendríamos una aproximación, lo haremos bajo la hipótesis inicial de tratar a las cifras como números borrosos triangulares (NBT), por tanto se expresan las cifras en $\alpha$ - cortes.

$$\hat{V}_1 = [45, 70, 100] = [45 + 25\alpha, 100 - 30\alpha]$$

$$\hat{V}_2 = [50, 70, 120] = [50 + 20\alpha, 120 - 50\alpha]$$

$$\hat{V}_3 = [80, 110, 140] = [80 + 30\alpha, 120 - 50\alpha]$$

$$\hat{V}_4 = [75, 85, 120] = [75 + 10\alpha, 120 - 35\alpha]$$

$$\hat{C}_1 = [20, 35, 40] = [20 + 15\alpha, 40 - 5\alpha]$$

$$\hat{C}_2 = [25, 35, 50] = [25 + 10\alpha, 50 - 15\alpha]$$

$$\hat{C}_3 = [30, 45, 55] = [30 + 15\alpha, 55 - 10\alpha]$$

$$\hat{C}_4 = [25, 30, 35] = [25 + 5\alpha, 35 - 5\alpha]$$

La contribución bruta por año es:

$$\widehat{CB}_1 = \hat{V}_1 - \hat{C}_1 = [5 + 30\alpha, 80 - 45\alpha]$$

$$\widehat{CB}_2 = \hat{V}_2 - \hat{C}_2 = [35\alpha, 95 - 60\alpha]$$

$$\widehat{CB}_3 = \hat{V}_3 - \hat{C}_3 = [25 + 40\alpha, 110 - 45\alpha]$$

$$\widehat{CB}_4 = \hat{V}_4 - \hat{C}_4 = [40 + 15\alpha, 95 - 40\alpha]$$

Las anteriores contribuciones expresadas en el sistema endecadario quedan como:

Para el año 1. $\widehat{CB}_1$:

| $\alpha$ | [5+30 $\alpha$) | 80+45 $\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 35.0 | 35.0 |
| 0.9 | 32.0 | 39.5 |
| 0.8 | 29.0 | 44.0 |
| 0.7 | 26.0 | 48.5 |
| 0.6 | 23.0 | 53.0 |
| 0.5 | 20.0 | 57.5 |
| 0.4 | 17.0 | 62.0 |
| 0.3 | 14.0 | 66.5 |
| 0.2 | 11.0 | 71.0 |
| 0.1 | 8.0 | 75.5 |
| 1 | 5.0 | 80 |

Para el año 2. $\widehat{CB}_2$:

| $\alpha$ | [35 $\alpha$) | 95-60 $\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 35.0 | 35.0 |
| 0.9 | 31.5 | 41.0 |
| 0.8 | 28.0 | 46.0 |
| 0.7 | 24.5 | 53.0 |
| 0.6 | 21.0 | 59.0 |
| 0.5 | 17.5 | 65.0 |
| 0.4 | 14.0 | 71.0 |
| 0.3 | 10.5 | 77.0 |
| 0.2 | 7.0 | 83.0 |
| 0.1 | 3.5 | 89.5 |
| 1 | 0.0 | 95.0 |

Para el año 3. $\widehat{CB}_3$:

| $\alpha$ | [25+40 $\alpha$) | 110-45 $\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 65.0 | 65.0 |
| 0.9 | 61.0 | 69.5 |
| 0.8 | 57.0 | 74.0 |
| 0.7 | 53.0 | 78.5 |
| 0.6 | 49.0 | 83.0 |
| 0.5 | 45.0 | 87.5 |
| 0.4 | 41.0 | 92.0 |
| 0.3 | 37.0 | 96.5 |
| 0.2 | 33.0 | 101.0 |
| 0.1 | 29.0 | 105.5 |
| 1 | 25.0 | 110.0 |

Para el año 4. $\widehat{CB}_4$:

| $\alpha$ | [40+15 $\alpha$) | 95-40 $\alpha$ |
|---|---|---|
| 1 | 55.0 | 55.0 |
| 0.9 | 53.5 | 59.0 |
| 0.8 | 52.0 | 63.0 |
| 0.7 | 50.5 | 67.0 |
| 0.6 | 49.0 | 71.0 |
| 0.5 | 47.0 | 75.0 |
| 0.4 | 46.0 | 79.0 |
| 0.3 | 44.5 | 83.0 |
| 0.2 | 43.0 | 87.0 |
| 0.1 | 41.5 | 91.0 |
| 1 | 40.0 | 95.0 |

Se trasladan las contribuciones brutas al año cero con los coeficientes de actualización obtenidos anteriormente:

$$I_1 * CB_1 = \text{contribuciones brutas actualizadas del año 1}$$

| α | Coeficiente. de act1 | Coeficiente. de act1 |
|---|---|---|
| **1** | 0,971 | 0,971 |
| **0,9** | 0,970 | 0,972 |
| **0,8** | 0,969 | 0,973 |
| **0,7** | 0,968 | 0,974 |
| **0,6** | 0,967 | 0,975 |
| **0,5** | 0,966 | 0,976 |
| **0,4** | 0,965 | 0,977 |
| **0,3** | 0,964 | 0,978 |
| **0,2** | 0,963 | 0,978 |
| **0,1** | 0,962 | 0,979 |
| **0** | 0,962 | 0,980 |

(•)

| α | 5+30 α | 80-45 α |
|---|---|---|
| **1** | 35,0 | 35,0 |
| **0,9** | 32,0 | 39,5 |
| **0,8** | 29,0 | 44,0 |
| **0,7** | 26,0 | 48,5 |
| **0,6** | 23,0 | 53,0 |
| **0,5** | 20,0 | 57,5 |
| **0,4** | 17,0 | 62,0 |
| **0,3** | 14,0 | 66,5 |
| **0,2** | 11,0 | 71,0 |
| **0,1** | 8,0 | 75,5 |
| **0** | 5,0 | 80,0 |

=

| α | $CBAct_1$ | $CBAct_1$ |
|---|---|---|
| **1** | 34,0 | 34,0 |
| **0,9** | 31,0 | 38,4 |
| **0,8** | 28,1 | 42,8 |
| **0,7** | 25,2 | 47,2 |
| **0,6** | 22,2 | 51,7 |
| **0,5** | 19,3 | 56,1 |
| **0,4** | 16,4 | 60,6 |
| **0,3** | 13,5 | 65,0 |
| **0,2** | 10,6 | 69,4 |
| **0,1** | 7,7 | 73,9 |
| **0** | 4,8 | 78,4 |

$$I_2 * CB_2 = \text{contribuciones brutas actualizadas del año 2}$$

| α | Coeficiente. de act2 | Coeficiente. de act2 |
|---|---|---|
| **1** | 0,934 | 0,934 |
| **0,9** | 0,931 | 0,935 |
| **0,8** | 0,928 | 0,937 |
| **0,7** | 0,925 | 0,939 |
| **0,6** | 0,923 | 0,941 |
| **0,5** | 0,920 | 0,943 |
| **0,4** | 0,918 | 0,944 |
| **0,3** | 0,915 | 0,946 |
| **0,2** | 0,912 | 0,948 |
| **0,1** | 0,910 | 0,950 |
| **0** | 0.907 | 0,952 |

(•)

| **a** | 35 α | 95-60 α |
|---|---|---|
| **1** | 35,0 | 35,0 |
| **0,9** | 31,5 | 41,0 |
| **0,8** | 28,0 | 47,0 |
| **0,7** | 24,5 | 53,0 |
| **0,6** | 21,0 | 59,0 |
| **0,5** | 17,5 | 65,0 |
| **0,4** | 14,0 | 71,0 |
| **0,3** | 10,5 | 77,0 |
| **0,2** | 7,0 | 83,0 |
| **0,1** | 3,5 | 89,0 |
| **0** | 0,0 | 95,0 |

=

| α | $CBAct_2$ | $CBAct_2$ |
|---|---|---|
| **1** | 32,7 | 32,7 |
| **0,9** | 29,3 | 38,3 |
| **0,8** | 26,0 | 44,0 |
| **0,7** | 22,7 | 49,8 |
| **0,6** | 19,4 | 55,5 |
| **0,5** | 16,1 | 61,3 |
| **0,4** | 12,9 | 67,0 |
| **0,3** | 9,6 | 72,8 |
| **0,2** | 6,4 | 78,7 |
| **0,1** | 3,2 | 84,6 |
| **0** | 0,0 | 90,4 |

$$I_3 * CB_3 = \text{contribuciones brutas actualizadas del año 3}$$

| α | Coeficiente. de act3 | Coeficiente. de act3 |
|---|---|---|
| **1** | 0,889 | 0,889 |
| **0,9** | 0,885 | 0,892 |
| **0,8** | 0,881 | 0,896 |
| **0,7** | 0,876 | 0,899 |
| **0,6** | 0,872 | 0,903 |
| **0,5** | 0,868 | 0,906 |
| **0,4** | 0,864 | 0,910 |
| **0,3** | 0,860 | 0,913 |
| **0,2** | 0,856 | 0,917 |
| **0,1** | 0,852 | 0,921 |
| **0** | 0,848 | 0,924 |

(•)

| α | 25+40 α | 110-45 α |
|---|---|---|
| **1** | 65,0 | 65,0 |
| **0,9** | 61,0 | 69,5 |
| **0,8** | 57,0 | 74,0 |
| **0,7** | 53,0 | 78,5 |
| **0,6** | 49,0 | 83,0 |
| **0,5** | 45,0 | 87,5 |
| **0,4** | 41,0 | 92,0 |
| **0,3** | 37,0 | 96,5 |
| **0,2** | 33,0 | 101,0 |
| **0,1** | 29,0 | 105,5 |
| **0** | 25,0 | 110,0 |

=

| α | $CBAct_3$ | $CBAct_3$ |
|---|---|---|
| **1** | 57,8 | 57,8 |
| **0,9** | 54,0 | 62,0 |
| **0,8** | 50,2 | 66,3 |
| **0,7** | 46,4 | 70,6 |
| **0,6** | 42,7 | 74,9 |
| **0,5** | 39,1 | 79,3 |
| **0,4** | 35,4 | 83,7 |
| **0,3** | 31,8 | 88,1 |
| **0,2** | 28,2 | 92,6 |
| **0,1** | 24,7 | 97,2 |
| **0** | 21,2 | 101,6 |

$$I_4 * CB_4 = \text{contribuciones brutas actualizadas del año 4}$$

| α | Coeficiente. de act4 | Coeficiente. de act4 |
|---|---|---|
| **1** | 0,839 | 0,839 |
| **0,9** | 0,832 | 0,844 |
| **0,8** | 0,826 | 0,848 |
| **0,7** | 0,820 | 0,853 |
| **0,6** | 0,814 | 0,858 |
| **0,5** | 0,808 | 0,863 |
| **0,4** | 0,801 | 0,868 |
| **0,3** | 0,795 | 0,873 |
| **0,2** | 0,790 | 0,878 |
| **0,1** | 0,784 | 0,883 |
| **0** | 0,778 | 0,889 |

(•)

| a | 40 + 15 α | 95 - 40 α |
|---|---|---|
| **1** | 55,0 | 55,0 |
| **0,9** | 53,5 | 59,0 |
| **0,8** | 52,0 | 63,0 |
| **0,7** | 50,5 | 67,0 |
| **0,6** | 49,0 | 71,0 |
| **0,5** | 47,5 | 75,0 |
| **0,4** | 46,0 | 79,0 |
| **0,3** | 44,5 | 83,0 |
| **0,2** | 43,0 | 87,0 |
| **0,1** | 41,5 | 91,0 |
| **0** | 40,0 | 95,0 |

=

| α | $CBAct_4$ | $CBAct_4$ |
|---|---|---|
| **1** | 46,1 | 46,1 |
| **0,9** | 44,5 | 49,8 |
| **0,8** | 43,0 | 53,4 |
| **0,7** | 41,4 | 57,2 |
| **0,6** | 39,9 | 60,9 |
| **0,5** | 38,4 | 64,7 |
| **0,4** | 36,8 | 68,6 |
| **0,3** | 35,4 | 72,5 |
| **0,2** | 34,0 | 76,4 |
| **0,1** | 32,5 | 80,4 |
| **0** | 31,1 | 84,5 |

Finalmente se suman las contribuciones actualizadas y se restan los costes de captación, que a pesar de ser el único número preciso en nuestro ejemplo, se expresa como número borroso triangular en la forma de siendo constante en todos los niveles. De esta forma encontramos el valor del consumidor en términos de números borrosos triangulares bajo la forma de $\alpha$ - cortes durante los 4 periodos.

$$\widehat{CLV} = [\hat{I}_1 * \widehat{CB}_1 + \hat{I}_2 * \widehat{CB}_2 + \hat{I}_3 * \widehat{CB}_3 + \hat{I}_4 * \widehat{CB}_4] - \widehat{CC}$$

$$\widehat{CLV} = \left[\sum_{n=1}^{4} \hat{I}_n * \widehat{CB}_n\right] - \widehat{CC}$$

Sin pérdida de generalidad podemos expresar la ecuación anterior para N periodos quedando:

$$\widehat{CLV} = \left[\sum_{n=1}^{N} \hat{I}_n * \widehat{CB}_n\right] - \widehat{CC}$$

*Ecuación: Valor del consumidor expresado con números borrosos triangulares (NBT) las tasas, costes y ventas inciertas en forma de $\alpha$ - cortes*

De esta forma el valor del cliente (CLV) expresado en forma de $\alpha$ - cortes queda como:

$\tilde{CLV}$ =

| α | $\sum_{n=1}^{4} CBAct_n$ | $\sum_{n=1}^{4} CBAct_n$ |
|---|---|---|
| **1** | 170,6 | 170,6 |
| **0,9** | 158,9 | 188,5 |
| **0,8** | 147,3 | 206,6 |
| **0,7** | 135,7 | 224,7 |
| **0,6** | 124,2 | 243,1 |
| **0,5** | 112,9 | 261,4 |
| **0,4** | 101,5 | 279,9 |
| **0,3** | 90,3 | 298,4 |
| **0,2** | 79,2 | 317,1 |
| **0,1** | 68,1 | 336,0 |
| **0** | 57,1 | 354,9 |

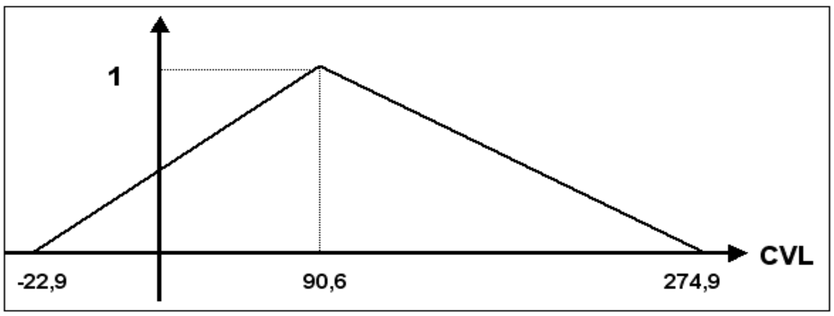
\-

| α | $\tilde{CC}$ | $\tilde{CC}$ |
|---|---|---|
| **1** | 80 | 80 |
| **0,9** | 80 | 80 |
| **0,8** | 80 | 80 |
| **0,7** | 80 | 80 |
| **0,6** | 80 | 80 |
| **0,5** | 80 | 80 |
| **0,4** | 80 | 80 |
| **0,3** | 80 | 80 |
| **0,2** | 80 | 80 |
| **0,1** | 80 | 80 |
| **0** | 80 | 80 |

=

| α | $\tilde{CLV}$ | $\tilde{CLV}$ |
|---|---|---|
| **1** | 90,6 | 90,6 |
| **0,9** | 78,9 | 108,5 |
| **0,8** | 67,3 | 126,6 |
| **0,7** | 55,7 | 144,7 |
| **0,6** | 44,2 | 163,1 |
| **0,5** | 32,9 | 181,4 |
| **0,4** | 21,5 | 199,9 |
| **0,3** | 10,3 | 218,4 |
| **0,2** | -0,8 | 237,1 |
| **0,1** | -11,9 | 256,0 |
| **0** | -22,9 | 274,9 |

Vayamos a la interpretación del resultado, mencionando que el valor del consumidor en el ámbito de la incertidumbre, tiene un valor negativo no menor de 22.9 u.m. ni tampoco superior a 274.9 u.m. con un máximo de presunción de 90.6 u.m. lo que indica que el consumidor es un cliente potencial rentable. Si observamos el número borroso triangular que representa el valor del consumidor resulta ser:




En este caso, aún cuando existe la posibilidad de pérdida, ésta es pequeña. Si observamos el gráfico hay dos figuras separadas por el eje CLV $\equiv 0$. Si tomamos en cuenta las áreas de cada figura, podemos llamar al cociente entre la parte positiva del lado derecho y el total del triangulo el "índice de valor del cliente" (IVC). Obtenemos dicho índice como: $IVC = (148.9 - 2.3)/148.9 = 0.9846$

Los resultados hablan por si solos, el 98.5% del área del número borroso, deja ganancias en mayor o menor grado, pero no pérdidas, lo que representa que este cliente es un consumidor atractivo a pesar de la incertidumbre que existe en sus niveles de venta y de las otras magnitudes consideradas. Además, una ventaja al tener representado el CLV en forma de $\alpha$ - cortes , es que no tan sólo tenemos el valor económico con tres niveles: un valor mínimo -22.9 u.m., un valor máximo 274.9 u.m. y un valor económico de máxima presunción de 90.6 u.m., también tenemos el valor económico del cliente en forma de intervalo de confianza para cada nivel de la función característica de pertenencia entre el 0 y el 1, bajo el supuesto de proporcionalidad entre el máximo de presunción y los valores extremos.

Recordemos que el modelo que hemos mostrado está bajo el supuesto de una relación contractual con la empresa, es decir, una relación que dura $n$ periodos.

## 4. Consideraciones de interés

La utilización de números borrosos triangulares permite, por su propia naturaleza, proporcionar al modelo estructural básico ciertas cotas que ayudan al tratamiento de la incertidumbre. Al ser la matemática de la incertidumbre una generalización de las matemáticas mecanicistas y aleatorias, se cumple la conocida proposición según la cual lo general es cierto para lo particular, pero lo particular no siempre es cierto en un supuesto general.

La intención del modelo presentado, inspirado en el modelo estructural básico del valor del consumidor (CLV), pretende incorporar la incertidumbre en las diferentes magnitudes involucradas. Como se comentó al inicio del documento con esa frase muy acertada de los profesores Kaufmann y Gil Aluja (1986): "lo impreciso, lo borroso, no tiene por qué ser inexacto", con esto mostramos que al utilizar magnitudes borrosas o imprecisas, estamos quizás más cerca de la realidad, que suponer cifras precisas pero que reflejan de forma imperfecta la realidad.

En conclusión, con el tratamiento de las herramientas de la teoría de la incertidumbre, damos lugar a la elaboración de un modelo capaz de calcular el valor del cliente en situaciones donde no hay información suficiente para expresar las magnitudes de manera precisa. En este caso, abordamos las relaciones contractuales con compras periódicas.

Hemos optado por iniciar el estudio del valor del cliente partiendo del modelo estructural básico. No obstante hay una variable muy importante que está presente en todos los modelos: estamos hablando del tiempo de duración del cliente con la empresa. Hasta este momento no ha sido de suma importancia ya que como suponemos relaciones contractuales entre ellos, existe poca incertidumbre en dicha variable. Pero en relaciones no contractuales donde abarcamos una gran cantidad de casos en la vida real, existe gran incertidumbre en relación a la duración del cliente con la empresa.

Existen otros modelos que fueron estudiados al inicio en la revisión bibliográfica sobre el tema del CLV. Dichos modelos son algo más sofisticados como el de migración, asignación de los mejores recursos o aquellos basados en cadenas de Markov, que también están siendo estudiados a través de la óptica de la incertidumbre avanzando con las máximas precauciones al cruzar la barrera que separa lo aleatorio de lo incierto.

Cabe mencionar por último, que cuando existe poca información o la información es incompleta, resulta suficiente para impedir la correcta utilización de los esquemas ya conocidos en el ámbito de la certeza o del azar.

**Referencias**

Alet i Vilaginés, Josep (2004). *Marketing Relacional: Cómo obtener clientes leales y rentables.* Barcelona: Ediciones Gestión 2000.

Berger, Paul D.; Nasr, Nada I. (1998). Customer Lifetime Value: Marketing Models and Applications. *Journal of Interactive Marketing*, Vol.12 No.1, p17, 14p.

Berger, Paul D.; Nasr, Nada I. (2001). The allocation of promotion budget to maximize customer equity. OMEGA: *The international Journal of Management Science*, Vol.29 No.1, p49, 13p.

Blattberg, Robert C.; Deighton, John (1996). Manage Marketing by the Customer Equity Test. *Harvard Business Review*, Vol.74 No.4, p136, 9p.

Dwyer, Robert F. (1997). Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making. *Journal of Direct Marketing*, Vol.11 No.4, p6, 8p.

Gil Aluja, Jaime (2002). Introducción de la Teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas. Vigo: Editorial Milladoiro.

Grönroos, Christian (1994). From Marketing Mix to Relationship Marketing: Towards a Paradigm Shift in Marketing. *Management Decision*, Vol.32 No.2, p4, 17p.

Gummesson, Evert (1996). Relationship marketing and imaginary organizations: a synthesis. *European Journal of Marketing*, Vol.30 No.2, p31, 14p.

Jain, Dipak; Singh, Siddhartha S. (2002). Customer Lifetime Value Research in Marketing: A review and future directions. *Journal of Interactive Marketing*, Vol.16 No.2, p34, 13p.

Kandampully, Jay; Duddy, Ria (1999). Relationship marketing: a concept beyond the primary relationship. *Marketing Intelligence and Planning*, Vol.17 No.7, p315, 9p.

Kaufmann, Arnold; Gil Aluja, Jaime (1986). Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas. Santiago de Compostela: Editorial Milladoiro.

Kaufmann, Arnold; Gil Aluja, Jaime (1987). Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Barcelona: Editorial Hispano Europea.

Kaufmann, Arnold; Gil Aluja, Jaime (1990). Las matemáticas del azar y de la incertidumbre: Elementos básicos para su aplicación en economía. Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramon Areces.

Morgan, Robert M.; Hunt, Shelby D. (1994). The Commitment-Trust Theory of Relationship Marketing. *Journal of Marketing*, Vol.58 No.3, p20, 19p.

Payne, Adrian; Holt, Sue (2001). Diagnosing Customer Value: Integrating the Value Process and Relationship Marketing. *British Journal of Marketing*, Vol.12 No.2, p159, 24p.

Pfeifer, Phillip E.; Carraway, Robert L. (2000). Modeling Customer Relationships as Markov Chains. *Journal of Interactive Marketing*, Vol.14 No.2, p43, 13p.

Reichheld, Frederick F.; Sasser, W. Earl Jr. (1990). Zero Defections: Quality Comes to Services. *Harvard Business Review*, Vol.68 No.5, p105, 7p.

Reichheld, Frederick F. (2002). El efecto lealtad: Crecimiento, Beneficios y Valor último. Barcelona: Editorial Ariel.

Reinartz, Werner J.; Kumar, V. (2000). On the Profitability of Long-Life Customers in a Noncontractual Setting: An Empirical Investigation and Implications for Marketing. *Journal of Marketing*, Vol.64 No.4, p17, 19p.

Uncles, Mark D.; Dowling, Grahame R.; Hammond, Kathy (2003). Customer loyalty and customer loyalty programs. *Journal of Consumer Marketing*, Vol.20 No.4, p294, 23p.