О. Л. Крицкий, М. К. Ульянова

Определение многомерного финансового риска портфеля акций

Методом главных компонент и алгоритмом STS-GARCH(1,1) найдены оценки многомерных рисков равновесного портфеля акций. Доказана теорема об эквивалентности понятий некоррелированности и независимости для случая эллиптического распределения. На основе информационной матрицы Фишера построены доверительные области, содержащие теоретические значения векторов рисков. Разработанный метод применен для вычисления рисков портфеля акций предприятий отрасли «Связь». Показана недопустимость замены многомерных предельных величин рисков совокупностью одномерных.

1. Введение

Задача определения финансового риска некоторой совокупности активов и вычисление его предельных значений в произвольный момент времени играет важную роль при управлении капиталом во всех секторах экономики. Широкому применению оценок различных видов рисков способствовало создание в 1975 году Базельского комитета по банковскому надзору и введение в 1992 году первых законодательных регулирующих соглашений между центральными банками десяти ведущих стран мира ($G-10$), ныне известных как Basel I и Basel II (Basel II, 2005). Вместе с тем, риск является относительно простым экономическим инструментом, которым без ограничений могут пользоваться как профессиональные исследователи, так и неспециалисты.

Оценивание рисков некоторого портфеля совокупной случайной стоимостью S_t, где время $t \geq 0$, производится с помощью вычисления *коэффициента предельной величины риска VAR* [Hull (2003)], [Benth (2002)] с уровнем доверия $1-\overline{\alpha}$:

$$VAR_{\overline{\alpha}}(S_t) = \inf\{x \in \Re, P(S_t \leq x) \geq \overline{\alpha}\}$$

и *условной меры риска CVAR*:

$$CVAR_{\overline{\alpha}}(S_t) = E\{S_t,\ S_t < VAR_{\overline{\alpha}}(S_t)\}.$$

В настоящее время имеется большое количество методик оценивания и вычисления одномерных характеристик *VAR* и *CVAR* [Artzner et al. (1998)], [Manganelli, Engle (1999)]). Условно их можно разделить на три категории:

1. Параметрические (классические одномерные GARCH (p,q) и EWMA, алгоритм RiskMetrics (RiskMetrics (1996);
2. Непараметрические (метод исторического моделирования (Энциклопедия финансового риск-менеджмента (2006);
3. Полупараметрические (теория экстремальных величин EVT [Embrechts et al. (1997)], [Щетинин, Лапушкин (2004)], [Щетинин (2005)], модель условной авторегрессии CAViaR

[Manganelli, Engle (1999)]). Однако несмотря на все возрастающую популярность и простоту применения, существующие подходы в значительной степени ограничены, так как позволяют находить только одномерные финансовые показатели *VAR* и *CVAR*. Как следствие, они не способны рассчитывать рискованность вложений отдельно по каждому из активов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ портфеля $\pi = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ случайной стоимостью $Y_\pi = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \ldots + \gamma_n X_n$, тем самым уменьшая вероятную прибыль или даже увеличивая расходы инвестора на управление капиталом, потому что информация о состоянии ценных бумаг будет приходить к нему в искаженном, усредненном виде.

Несмотря на насущную потребность учета многомерных рисков, исследования в этой области встречают серьезные затруднения. Так, в общем случае параметры *VAR* и *CVAR* не являются аддитивными мерами [Artzner et al. (1998)], т. е. суммарная предельная величина риска изменения стоимости портфеля π не превосходит суммы величин рисков, вычисленных отдельно для каждого актива $X_i, i = \overline{1,n}$:

$$VAR_{Y_\pi} \le \gamma_1 VAR_{X_1} + \gamma_2 VAR_{X_2} + \ldots + \gamma_n VAR_{X_n},$$
$$CVAR_{Y_\pi} \le \gamma_1 CVAR_{X_1} + \gamma_2 CVAR_{X_2} + \ldots + \gamma_n CVAR_{X_n}.$$

Поэтому переход от исследования всей совокупности π к рассмотрению только случайной величины Y_π напрямую затруднен, но не невозможен. Единственным ограничением для осуществления такого перехода является использование корреляции в качестве детерминирующей характеристики случайного процесса. Известно [Rachev et al. (2005)], что $corr(f(X_i), f(X_j)) \neq corr(X_i, X_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, где f — монотонно возрастающая нелинейная функция. И если можно найти такую характеристику случайного процесса, которая инвариантна относительно нелинейного преобразования, то построенная на ее основе мера риска будет аддитивной. Это позволит упростить исходную многомерную задачу и рассматривать ее как совокупность одномерных задач, решение которых уже хорошо известно. Такая характеристика была найдена и получила название *многомерной копулы* [Embrechts et al. (1997)], [Rachev et al. (2005)], [McNeil et al. (2005)].

Проведено исследование копул для вычисления многомерных рисков [Cheng et al. (2007)], [Щетинин (2006)]. Так, у Ченга и др. [Cheng et al. (2007)] строится двумерная копула, которая используется затем для нахождения рисков Шанхайского и Шендженского составных китайских индексов (Shanghai Stock Composite Index и Shenzhen Stock Composite Index). Евгением Щетининым [Щетинин (2006)] рассмотрена предельная копула многомерного эллиптического распределения в форме представления Пикендса и комбинированная хвостовая копула. На их основе построены аддитивные меры риска *VAR* и *ES* (*Expected Shortfall* — ожидаемый уровень потерь), а также проанализированы риски портфельного инвестирования в акции ведущих эмитентов российского фондового рынка в различные периоды его функционирования.

Несмотря на появившуюся возможность приложения теории копул для нахождения многомерных рисков, возникающих при управлении капиталом, их практическое использование еще достаточно продолжительное время будет ограниченным, так как краеугольным камнем любой технологии риск-менеджмента является требование простоты и высокой производительности конструируемых алгоритмов. Ввиду математической и вычислительной сложности рассмотрения копул, нам представляется более эффективным применить для исследований классический подход теории вероятностей, связанный с нахождением квантильных функций или квантилей многомерного эмпирического распределения для заданного уровня значимости $\overline{\alpha}$: если $F(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторый непрерывный совместный вероятностный закон для одномерных случайных величин $x_1,\ldots,x_n$, то требуемый квантиль определяется как вектор $Y=(y_1,\ldots,y_n)$, удовлетворяющий выражению:

$$F^{-1}(\overline{\alpha})=Y, \qquad (1)$$

где $F^{-1}(x)$ — обратная функция для $F(x_1,\ldots,x_n)$.

Таким образом, зная обратное распределение $F^{-1}(x)$, в соответствии с (1) детерминируем квантиль Y и вычисляем *VAR* портфеля π или *MVAR* (здесь и далее многомерный риск *VAR* будем обозначать через *MVAR*, а многомерный *CVAR* — через *MCVAR*): $MVAR=Y$. Затем, определение *MCVAR* не составит особого труда, так как $MCVAR=E\{u_t,\, u_t<Y\}$, где $u_t=\left(u_t^{(1)},u_t^{(2)},\ldots,u_t^{(n)}\right)$ — некоторые превышения уровня *MVAR*.

Несмотря на кажущуюся простоту, предложенный квантильный метод вычисления риска обладает существенным недостатком: найденный вектор Y будет не единственным, так как равенству (1) удовлетворяют все точки поверхности уровня $F(Y)=\mathrm{const}$. Следовательно, имеет место бесконечное (счетное или континуальное) число равнозначных оценок рисков *MVAR* и *MCVAR*, т. е. выбор единственной инвестиционной стратегии, приводящей к наименьшему многомерному риску, затруднен.

В литературе предложено несколько способов однозначного определения *MVAR* и *MCVAR*. Так, у Чена и др. [Chen et al. (2007)] случайная величина $X_t=(X_{1t},X_{2t},\ldots,X_{nt})^{\mathrm{T}}$, характеризующая логарифмические приращения цен активов портфеля π, записывается в виде:

$$X_t=A_t\varepsilon_t,\; 0\le t\le \overline{T}, \qquad (2)$$

где A_t — разложение Холески ковариационной матрицы H_t, т. е. $H_t=A_t^T A_t$,

$\boldsymbol{\varepsilon}_t=(\boldsymbol{\varepsilon}_{1t},\boldsymbol{\varepsilon}_{2t},\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_{nt})^{\mathrm{T}}$ — последовательность одинаково распределенных, не обязательно нормальных, независимых многомерных случайных величин (МСВ) с единичной ковариационной матрицей и нулевым математическим ожиданием,

t — время.

Запись в виде (2) позволяет перейти от X_t к рассмотрению некоррелированных шумов $\varepsilon_t=(A_t)^{-1}X_t$ и найти оценки рисков *MVAR* и *MCVAR*, вычисляя для каждой строки матрицы ε_t одномерные *VAR*, *CVAR* и составляя из них векторы длины n.

Другой способ основан на использовании ортогонального преобразования W исходных данных X_t [Vrontos et al. (2003)]:

$$Y_t=X_tW, \qquad (3)$$

причем элементы W находятся с помощью триангуляции условной матрицы ковариаций, вычисленной относительно X_t. Далее авторы делают дополнительное предположение об условном нормальном законе распределения X_t. Как следствие, получаемые согласно (3) некоррелированные Y_t будут независимыми, что позволяет вычислять одномерные показатели *VAR* и *CVAR* отдельно для каждого актива портфеля и составлять из них векторы длины n.

В отличие от предложенных ранее подходов, в настоящей работе вычисление предельных уровней рисков *MVAR*, *MCVAR* проводится методом главных компонент (более подробно — в Основах эконометрики [Айвазян (2001)]). Отметим, что для эконометрического анализа многомерных данных таковой был применен у Александера и Чайбумбы [Alexander, Chibumba (1998)], [Alexander (2001)], [Alexander (2002)], Джиамуридиса и Вронтоса [Giamouridis, Vrontos (2007)], причем авторы использовали его для имитационного моделирования вероятных в будущем значений ковариационных матриц активов портфелей, не рассматривая вопрос вычисления рисков обладания ими. Отсутствие в мировой литературе исследований по применению метода главных компонент для расчетов многомерных рисков может быть легко объяснено. Дело в том, что несмотря на взаимную некоррелированность получаемых при ортогональном преобразовании W в (3) факторов $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$, последние в случае произвольного вероятностного закона не являются независимыми. Поэтому вычисление рисков *VAR*, *CVAR* отдельно для каждой компоненты Y_{it}, $1 \le i \le n$, и формирование общего вектора *MVAR*, *MCVAR* приводит к неверным результатам. В данной работе формулируется и доказывается критерий эквивалентности понятий некоррелированности и независимости для случая эллиптического распределения цен активов портфеля. Это позволяет нам в дальнейшем рассматривать факторы $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$ отдельно друг от друга и определять единственные показатели риска *MVAR* и *MCVAR*.

В работе найдены некоррелированные главные компоненты $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt}$. Проведено имитационное моделирование их волатильностей $\overline{\sigma}_{it}$, $1 \le i \le n$, и квантилей $q_{\overline{\alpha},Y}$ эконометрическим алгоритмом STS—GARCH(1,1). На основе $\overline{\sigma}_{it}$ и $q_{\overline{\alpha},Y}$ рассчитаны оценки многомерных рисков исходных данных X_t и для них построены доверительные области. Эффективность предложенного метода показана при вычислении многомерных рисков портфеля, сформированного из акций компаний отрасли «Связь» ММВБ, и при их сравнении с одномерными рисками, определенными без учета взаимной зависимости с другими предприятиями группы. Котировки были взяты за период с 1 апреля 2005 по 22 марта 2007 года (всего 491 торговый день). Все числовые данные предоставлены компанией РБК (http://export.rbc.ru); отраслевая принадлежность компаний зафиксирована в соответствии с информацией об эмитентах на ММВБ.

2. Теоретические положения

Пусть $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{nt})$, $0 \le t \le \overline{T}$, — совокупность высококоррелированных исходных данных, например, котировок акций, фьючерсов или облигаций некоторой отрасти. Так как значения X_{it}, $1 \le i \le n$, в общем случае разнородны, перейдем к стандартизированным данным:

$$Z_{it} = (X_{it} - \mu_i)\sigma_{it}^{-1}, \quad 1 \le i \le n, \tag{4}$$

где $\mu_i = E(X_{it} | F_{t-1})$ — условное математическое ожидание,

$\sigma_{it} = \left[E((X_{it} - \mu_i)^2 | F_{t-1})\right]^{1/2}$ — волатильность,

$(F_t)_{t \ge 0}$ — фильтрация (вся доступная на момент времени t информация), определенная σ-подалгебрами F_t, такими, что $F_m \subset F_n$, если $m \le n$.

Пусть L — требующее нахождения неизвестное линейное ортогональное преобразование Z_t в некоррелированные данные Y_t:

$$Y_t = Z_t L.$$

Так как $Z_t = Y_t L^T$, а для компонент Z_{it} выполнено соотношение (4), то для обратного перехода от Y_t к исходным данным X_t достаточно воспользоваться следующей формулой:

$$x_{it} = \mu_i + \sigma_{it} \sum_{s=1}^{n} y_{is}\; l_{st}^{T},\ 1 \le i \le n, \tag{5}$$

где l_{it}^{T} — элементы матрицы L^T.

Известно [Айвазян (2001)], что для определения L вычисляют и упорядочивают по убыванию собственные числа матрицы ковариации cov_z по переменным Z_t: $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$, а затем формируют L из собственных векторов—столбцов l_i, соответствующих каждому λ_i, $1 \le i \le n$. Так как для любого l_i выполнено равенство:

$$(\mathrm{cov}_Z - \lambda_k I)\, l_k = 0,\ 1 \le k \le n,$$

то умножая его слева последовательно на l_i^T, $1 \le i \le n$, имеем:

$$L^T \mathrm{cov}_z L = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}.$$

В то же время

$$\mathrm{cov}_Y = D(Y_t) = E(Y_t^T Y_t) = L^T E(Z_t^T Z_t)\, L = L^T \mathrm{cov}_z L,$$

т. е. Y_t будут некоррелированными.

Покажем, что компоненты $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt}$ будут взаимно независимыми. Для этого предположим, что Y_t удовлетворяет многомерному эллиптическому распределению, и сформулируем теорему, доказательство которой приведено в Приложении.

Определение. Случайный вектор $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt})$, $0 \le t \le \bar{T}$, называется *эллиптически распределенным* с математическим ожиданием μ_t и ковариационной матрицей H_t, если его характеристическая функция $\varphi_Y(Y_t)$ представима в виде:

$$\varphi_Y(Y_t) = \exp(i\mu_t Y_t)\, \psi\left(\frac{1}{2} Y_t H_t Y_t^T\right),$$

где $\psi(Y_t): [0, \infty) \to R^n$ — характеристический генератор, причем $\psi\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{it}^2\right)$ — n-мерная характеристическая функция.

Если существует плотность распределения для многомерной случайной величины (МСВ) Y_t, то она имеет вид:

$$f_Y(Y_t) = c_n \left(\det(H_t)\right)^{-1/2} g_n\left(\frac{1}{2}(Y_t - \mu_t)\, H_t^{-1} (Y_t - \mu_t)^T\right),$$

где $g_n(x)$ — генератор плотности, причем $\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x)\,dx < \infty$ и $\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x)\,dx \ne 0$,

$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x)\,dx\right]^{-1}$ — нормирующая константа,

$\Gamma(n)$ — гамма-функция.

Теорема 1. *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — *эллиптически распределенная многомерная случайная величина с математическим ожиданием* μ_t *и ковариационной матрицей* H_t. Компоненты ξ_i, $1 \le i \le n$, будут взаимно независимыми тогда и только тогда, когда корреляция между ними равна нулю.

Доказательство. Приведено в Приложении.

Теорема 1 позволяет рассматривать понятия некоррелированности и взаимной независимости $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt}$ как эквивалентные при условии эллиптического распределения Y_t. Следовательно, многомерные векторы *MVAR* и *MCVAR* можно находить как совокупность одномерных рисков *VAR* и *CVAR*, рассчитанных для каждой главной компоненты $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt}$ в отдельности.

Чтобы распознавать риски различных случайных данных, обозначим через $MVAR(R_t) = (MVAR_1^R, MVAR_2^R, \ldots, MVAR_n^R)$ вектор *MVAR* для процесса $R_t = (R_{1t}, \ldots, R_{nt})$, а через $MCVAR(R_t) = (MCVAR_1^R, MCVAR_2^R, \ldots, MCVAR_n^R)$ — многомерную условную меру риска *MCVAR* для R_t. Теперь для координат $MVAR_i^X$ и $MCVAR_i^X$ будут справедливы соотношения:

$$MVAR_i^X = \mu_i + \sigma_{it} MVAR_i^Z = \mu_i + \sigma_{it}(MVAR(Y_t)L^T)_i,$$

$$MCVAR_i^X = \mu_i + \sigma_{it} MCVAR_i^Z = \mu_i + \sigma_{it}(MCVAR(Y_t)L^T)_i, 1 \le i \le n, \qquad (6)$$

где $(\cdot)_i$ — операция выделения i-й компоненты вектора.

Не умаляя общности, в дальнейшем вместо рассмотрения достаточного общего класса эллиптических распределений остановимся на использовании какого-либо фиксированного вероятностного закона. В соответствии с решаемой в настоящей работе задачей оценивания многомерных рисков, остановимся на имеющих первые и вторые условные моменты, но отличных от нормального распределения, а также обладающих «толстыми хвостами» и учитывающих в качестве параметра исходную асимметрию данных. Такими свойствами обладает, например, STS-распределение, подробно изученное и примененное для имитационного моделирования цен акций [Rachev et al. (2005)], [Бельснер, Крицкий (2007)].

Определение. Пусть $g_\theta(x)$ — функция плотности α-устойчивого распределения [Золотарев (1983)] с вектором параметров (α, β, c, μ), где α — характеристическая экспонента, β — коэффициент асимметрии, c — масштаб, μ — среднее:

$$g_\theta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix(\mu - t)] \cdot \exp\left(-|c \cdot t|^\alpha \left(1 - \beta \cdot i \cdot \mathrm{sign}(t) \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) dt, \alpha \ne 1.$$

Пусть $h_1(x)$, $h_2(x)$ — плотности нормального распределения с параметрами (a_i, σ_i^2), $i = 1, 2$. Пусть выбраны два действительных числа $a, b \in \Re$, что $a < \mu < b$, и выполнены соотношения:

$$h_1(a) = g_\theta(a),\ h_2(b) = g_\theta(b),\ \int_{-\infty}^{a} h_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} g_\theta(x)\,dx,\ \int_{b}^{\infty} h_2(x)\,dx = \int_{b}^{\infty} g_\theta(x)\,dx. \qquad (7)$$

Назовем *плотностью STS-распределения* функцию $f(x)$ вида:

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x), x < a; \\ g_\theta(x), x \in [a, b]; \\ h_2(x), x > b. \end{cases} \qquad (8)$$

Найдем эмпирические значения $\hat{M}VAR_i^Y$, $\hat{M}CVAR_i^Y$ теоретических величин риска $MVAR_i^Y$, $MCVAR_i^Y$, $1 \le i \le n$, с доверительной вероятностью $(1 - \overline{\alpha})$, для чего воспользуемся известным свойством [Rachev et al. (2005)] квантиля $q_{\alpha Bar, Y}$ уровня $\overline{\alpha}$ одномерной случайной величины Y_{it}, имеющей STS-распределение:

$$q_{\bar{\alpha},Y} = \bar{\mu}_i + \bar{\sigma}_{it} q_{\bar{\alpha},\eta}, \tag{9}$$

где $q_{\bar{\alpha},\eta}$ — квантиль уровня $\bar{\alpha}$ стандартного STS-распределения,

$\bar{\mu}_i = E(Y_{it}|F_{t-1})$ — условное математическое ожидание,

$\bar{\sigma}_{it} = \sqrt{D(Y_{it}|F_{t-1})}$ — волатильность.

Соотношение (9) позволяет найти эмпирический квантиль $q_{\bar{\alpha},Y}$ по фиксированному исследователем значению $q_{\bar{\alpha},\eta}$, если определены волатильность $\bar{\sigma}_{it}$ и математическое ожидание $\bar{\mu}_i$. В данной работе имитационное моделирование вероятных в будущем значений $\bar{\sigma}_{it}$ осуществляется в соответствии с методологией STS-GARCH(1,1) [Бельснер, Крицкий (2007)]. Так как вопрос прогнозирования выходит за рамки задачи вычисления $MVAR(X_t)$, $MCVAR(X_t)$, и в связи с ограниченностью объема работы, мы опускаем подробное описание алгоритма STS-GARCH(1,1). Отметим только, что $\bar{\sigma}_{it}$ находилась из авторегрессионной зависимости вида:

$$\bar{\sigma}^2_{it} = \omega_i + \delta_i \varepsilon^2_{i,t-1} + \bar{\beta}_i \bar{\sigma}^2_{i,t-1},\ \bar{\sigma}_{i,0} = 0,\ t = 2,3,\dots,\bar{T},\ i = \overline{1,n},$$

где $\omega_i > 0, \delta_i > 0, \bar{\beta}_i > 0$ — коэффициенты модели,

ε_{it} — STS-распределенная случайная величина с математическим ожиданием $\bar{\mu}_i = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} Y_{i,t-s}$ и дисперсией $\bar{\sigma}^2_{it}$,

k — лаг (задержка) временного ряда.

После вычисления $\bar{\sigma}_{it}$ и $\bar{\mu}_i$ выражение (9) — детерминировано. Поэтому с помощью (9) можно найти оценку $\hat{M}VAR_i^Y$ для $MVAR_i^Y$ с уровнем значимости $\bar{\alpha}$, так как для случайного процесса Y_{it}

$$\hat{M}VAR_i^Y = \inf\{x \in \Re,\ P(Y_{it} \le x) \ge \bar{\alpha}\} = \inf\{x \in \Re,\ x \ge (q_{\bar{\alpha},Y})_i\}. \tag{10}$$

Зная $\hat{M}VAR_i^Y$ и фиксируя множество $\{x \in \Re, x < (q_{\bar{\alpha},Y})_i\}$, определяем значение $\hat{M}CVAR_i^Y$:

$$\hat{M}CVAR_i^Y = E\{Y_{it}, Y_{it} < \hat{M}VAR_i^Y\}. \tag{11}$$

Таким образом, оценки векторов риска $\hat{M}VAR(Y_t) = (\hat{M}VAR_1^Y, \dots, \hat{M}VAR_n^Y)$, $\hat{M}CVAR(Y_t) = (\hat{M}CVAR_1^Y, \dots, \hat{M}CVAR_n^Y)$ найдены.

Построим доверительные интервалы для координат $\hat{M}VAR_i^Y$, $\hat{M}CVAR_i^Y$, $1 \le i \le n$. Для этого воспользуемся асимптотическим свойством оценок максимального правдоподобия. Известно [Боровков (1984)], что оценка

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} \prod_{t=1}^{T} f(y_{it};\theta), \tag{12}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ — неизвестный вектор параметров,

$f(y_{it};\theta)$ — значения плотностей нормального распределения на выборочных данных: $f(y_{it};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}_{it}} \exp\left(-\frac{(y_{it} - \bar{\mu}_i)^2}{2\bar{\sigma}^2_{it}}\right)$,

Θ — область изменения θ,

$y_{it}, t = \overline{1,T}$, — независимые значения i-го фактора в t-й торговый день, является асимптотически нормальной и устойчивой оценкой для θ, причем справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)=R\sim N(0,J_\theta(\theta)^{-1}),\qquad(13)$$

где $J_\theta(\theta)$ — информационная матрица Фишера с элементами $J_{s,k}(\theta)=E\left(\frac{\partial\, l(y;\theta)}{\partial\theta_s}\cdot\frac{\partial\, l(y;\theta)}{\partial\theta_k}\right)$, $l(y;\theta)=\ln f(y;\theta)$, $s,k=\overline{1,m}$.

Для одномерного GARCH(1,1) $J_\theta(\theta)$ вычислена у Вронтоса и др. [Vrontos et al. (2003)]:

$$J_{s,k}(\theta)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{2\,\overline{\sigma}_{qt}^4}\frac{\partial\,\overline{\sigma}_{qt}^2}{\partial\theta_s}\frac{\partial\,\overline{\sigma}_{qt}^2}{\partial\theta_k},\ s,k=\overline{1,3n},$$

где $\theta=(\omega_1,\delta_1,\overline{\beta}_1,\omega_2,\delta_2,\overline{\beta}_2,\ldots,\omega_n,\delta_n,\overline{\beta}_n)$.

Используем (13) для построения доверительного интервала теоретической величины $MVAR_i^Y$. Для этого при фиксированном i рассмотрим квантильную функцию вида:

$$g_{\overline{\alpha}}(\theta)=F^{-1}(\overline{\alpha};\theta),$$

где $\theta=(\omega_i,\delta_i,\overline{\beta}_i)$ — теоретические значения коэффициентов модели GARCH(1,1),

$F^{-1}(\overline{\alpha};\theta)$ — обратный нормальный вероятностный закон.

Кроме того, пусть $\hat{\theta}_n=(\hat{\omega}_i,\hat{\delta}_i,\hat{\overline{\beta}}_i)$ — оценка для θ, найденная в (12). Тогда $MVAR_i^Y=g_{\overline{\alpha}}(\theta)$, $\hat{M}VAR_i^Y=g_{\overline{\alpha}}(\hat{\theta}_n)$ и по лемме Слуцкого о предельном переходе под знаком непрерывной функции $g_{\overline{\alpha}}(\theta)$ будет выполнено соотношение (13):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\hat{M}VAR_i^Y-MVAR_i^Y)=R\sim(0,I_{MVAR}(\theta)),$$

где $I_{MVAR}(\theta)=\mathrm{grad}_\theta(g_{\overline{\alpha}}(\theta))J_\theta(\theta)^{-1}\,\mathrm{grad}_\theta^T(g_{\overline{\alpha}}(\theta))$ — информационная матрица Фишера, $\mathrm{grad}_\theta=\left(\frac{\partial}{\partial\,\omega_i},\frac{\partial}{\partial\,\delta_i},\ldots,\frac{\partial}{\partial\,\overline{\beta}_i}\right)$.

Доверительный интервал для нормальной случайной величины R определяется классическим способом [Гнеденко (1988)]. Поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\hat{M}VAR_i^Y-Z_{1-r/2}n^{-1/2}I_{MVAR}^{1/2}(\hat{\theta}_n)\le MVAR_i^Y\le\hat{M}VAR_i^Y+Z_{1-r/2}n^{-1/2}I_{MVAR}^{1/2}(\hat{\theta}_n),\qquad(14)$$

где $Z_{1-r/2}$ — квантиль уровня $(1-r/2)$ стандартного нормального распределения,

$(1-r)$ — вероятность, с которой полученный доверительный интервал накрывает неизвестное значение $MVAR_i^Y$.

Производя аналогичные выкладки для $MCVAR_i^Y$, находим для него доверительный интервал вида:

$$\hat{M}CVAR_i^Y-Z_{1-r/2}n^{-1/2}I_{MVAR}^{1/2}(\hat{\theta}_n)\le MCVAR_i^Y\le\hat{M}CVAR_i^Y+Z_{1-r/2}n^{-1/2}I_{MVAR}^{1/2}(\hat{\theta}_n),\qquad(15)$$

где $(1-r)$ — вероятность, с которой доверительный интервал накрывает неизвестное значение $MCVAR_i^Y$.

Зная оценки $\hat{M}VAR(Y_t)$, $\hat{M}CVAR(Y_t)$ и определив границы доверительных областей в соответствии с (14)–(15), остается применить формулы (6), чтобы вычислить эмпирические значения $\hat{M}VAR(X_t)$, $\hat{M}CVAR(X_t)$ и получить множества, в которых будут находиться векторы $MVAR(X_t)$, $MCVAR(X_t)$.

3. Анализ эмпирических данных

Применим алгоритм для нахождения многомерных рисков равновесового портфеля, сформированного из акций предприятий одной из отраслей. Для ее выбора разобьем на категории 157 компаний, чьи обыкновенные акции наиболее активно торгуются на ММВБ, и применим к котировкам их акций за период с 1 апреля 2005 по 22 марта 2007 года (всего 491 торговый день), метод главных компонент. Найденное количество факторов в каждой группе и процент объясняемой ими дисперсии приведен в табл. 1.

Таблица 1

Анализ отраслей России методом главных компонент

Отрасли	Общее число предприятий	Число факторов	Объясняемая дисперсия, %
Банки и финансовые институты	9	2	85,6
Горнодобывающая промышленность	4	2	80,9
Машиностроение	6	2	85,5
Нефтегазовая	8	1	86,1
Пищевая промышленность	6	2	91,9
Связь	10	2	90,9
Сельское хозяйство	2	2	100
Строительство	1	1	100
Транспорт	3	1	82,3
Химическая и нефтехимическая промышленность	4	2	88,1
Черная металлургия	3	1	80
Цветная металлургия	2	1	93,4
Электроэнергетика	97	3	81
Другие	2	2	100

Для дальнейших исследований выберем отрасль, число главных компонент которой больше или равно двум, а общее количество акционерных обществ находится в пределах от 10 до 20. Этим условиям удовлетворяет категория «Связь», состоящая из предприятий телекоммуникационной сферы: Дальсвязь (X_{1t}), МГТС (5-й выпуск, X_{2t}), МТС (X_{3t}), Ростелеком (X_{4t}), Северо-Западный Телеком (X_{5t}), Сибирьтелеком (X_{6t}), Уралсвязьинформ (X_{7t}), ЦентрТелеком (X_{8t}), ЮТК (X_{9t}), ВолгаТелеком ($X_{10,t}$).

Исследование корреляционной матрицы X_t показало наличие тесной связи для 90% компаний отрасли (парные корреляции варьировались от 0,83 до 0,96). В то же время на фоне полученных данных резко выделялось акционерное общество МТС: корреляция цен его акций с ценами акций остальных предприятий группы лежала в пределах от 0,3 до 0,81 и была равна в среднем 0,45.

В каждый момент времени t, $0 \le t \le \overline{T}$, в соответствии с (4) строилась матрица Z_t стандартизированных данных. Затем вычислялись матрицы ковариаций cov_{Z_t} и находились собственные числа, упорядоченные по убыванию: $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. Например, при $t = 491$ они имели следующий вид: $\lambda_1 = 7{,}8$; $\lambda_2 = 1{,}1$; $\lambda_3 = 0{,}5$; $\lambda_4 = 0{,}17$; $\lambda_5 = 7{,}8 \times 10^{-2}$; $\lambda_6 = 5{,}6 \times 10^{-2}$;

$\lambda_7 = 2{,}1\times10^{-2}$; $\lambda_8 = 2{,}1\times10^{-2}$; $\lambda_9 = 1{,}9\times10^{-2}$; $\lambda_{10} = 7{,}2\times10^{-3}$. Наконец, для λ_i, $1 \le i \le 10$, вычислялись собственные векторы l_i, из которых формировалась матрица преобразования L.

Динамика изменения наибольшего собственного числа λ_1 в зависимости от номера торгового дня изображена на рис. 1.

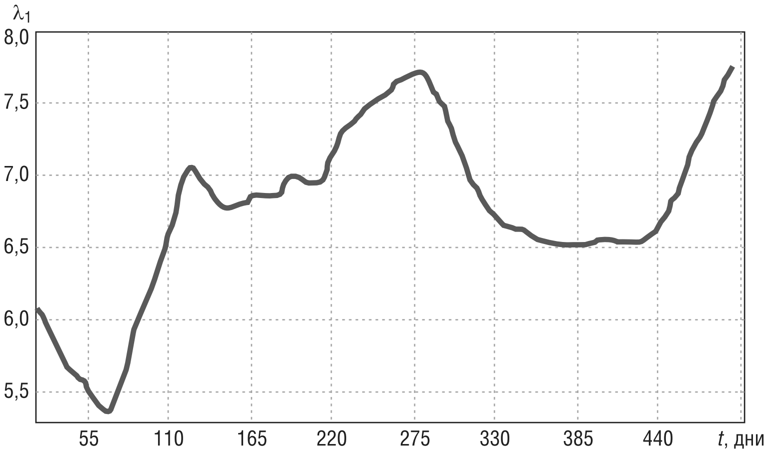

Рис. 1. Изменение во времени наибольшего собственного числа матрицы ковариаций стандартизированных данных

Для факторов $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{10,t}$ были определены параметры соответствующих им STS-распределений. Для этого использовалась запись плотности через интеграл Золотарева [Золотарев (1983)], который далее вычислялся численно квадратурной формулой Симпсона. Качество подгонки проверялось непараметрическим тестом Колмогорова — Смирнова с выдвинутой статистической гипотезой H_0 об STS-распределении эмпирических данных. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры вероятностного закона STS для значений главных факторов

Фактор	α	β	c	μ	a	b	H_0
Y_{1t}	1,71	1	2,4	-0,65	–5,92	3,33	принята
Y_{2t}	2	0	1,36	0	–5,92	3,33	принята
Y_{3t}	2	0	0,81	0,11	–5,92	3,33	принята
Y_{4t}	2	0	0,45	-0,04	–5,92	3,33	принята
Y_{5t}	1,67	–0,8	0,24	0,08	–5,92	3,33	принята
Y_{6t}	1,88	–1	0,21	0,02	–5,92	3,33	принята
Y_{7t}	2	0	0,2	0,02	–5,92	3,33	принята
Y_{8t}	1,69	0,24	0,13	0	–5,92	3,33	принята
Y_{9t}	1,61	–0,22	0,1	0,11	–5,92	3,33	принята
$Y_{10,t}$	2	0	0,08	0	–5,92	3,33	принята

Согласно данным табл. 2 и по Теореме 1, процессы $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{10,t}$ будут независимыми, поэтому вычисление векторов оценок $\widehat{MVAR}(Y_t)$, $\widehat{MCVAR}(Y_t)$ можно проводить покоординатно. Используем для расчетов соотношения (9)–(11), предварительно оценив методом STS-

GARCH(1,1) волатильности $\overline{\sigma}_{it}$, $1 \leq i \leq 10$, с лагом $k = 20$ и учитывая [Бельснер, Крицкий (2007)], что $\varepsilon_t \sim (x; -5{,}92;\ 3{,}33;\ 1{,}85;\ 0{,}6;\ -0{,}1;\ 0)$ — последовательность стандартных STS-распределенных случайных величин с квантилем $q_{\overline{\alpha},\eta} = -0{,}2452$, найденном при уровне значимости $\overline{\alpha} = 0{,}05$. Наконец, переходя к исходным признакам X_t по формулам (6), получаем 471 вектор рисков (размерности 10) $\widehat{MVAR}(X_t)$, $\widehat{MCVAR}(X_t)$.

Приведем наиболее интересные результаты, например, по акциям компаний МТС и Уралсвязьинформ на ММВБ, которые достаточно ликвидны в отрасли «Связь». Для этого изобразим на рис. 2 и 4 динамику изменения цен одной обыкновенной акции; оценку минимальной стоимости за предыдущий период ($\widehat{MVAR}_3^X$, $\widehat{MVAR}_7^X$), справедливую с вероятностью 0,95; оценку средней минимальной стоимости за прошедший интервал времени ($\widehat{MCVAR}_3^X$, $\widehat{MCVAR}_7^X$) с вероятностью 0,95; а на рис. 3 и 5 минимальную и среднюю вероятную прибыль на каждую акцию при размещении капитала в соответствии со стратегией уменьшения риска.

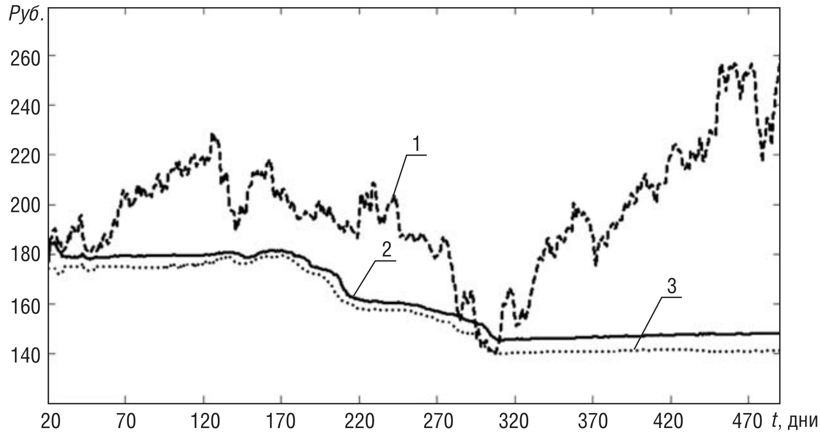

Рис. 2. Динамика изменения цены обыкновенной акции МТС ММВБ с 29 апреля 2005 по 22 марта 2007 года и оценки рисков ее снижения (1 — цена акции, *руб.*; 2 — $\widehat{MVAR}_3^X$, *руб.*; 3 — $\widehat{MCVAR}_3^X$, *руб.*)

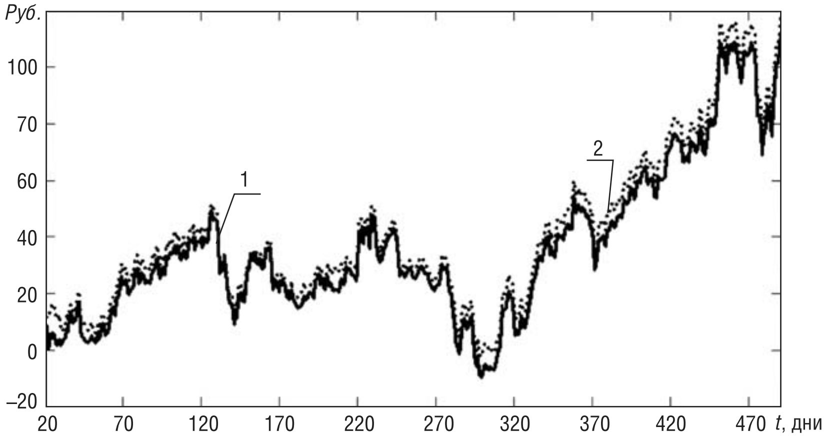

Рис. 3. Возможная прибыль при инвестировании в расчете на одну акцию МТС ММВБ в период с 29 апреля 2005 по 22 марта 2007 года (1 — с использованием $\widehat{MVAR}_3^X$; 2 — с использованием $\widehat{MCVAR}_3^X$)

Как показали расчеты, возможная прибыль от инвестирования денежных средств при использовании параметра $\widehat{MCVAR}(X_t)$ выше, чем при применении $\widehat{MVAR}(X_t)$. Так, для рассматриваемых эмитентов МТС и Уралсвязьинформ максимальная разность между $\widehat{MCVAR}_3^X$ и $\widehat{MVAR}_3^X$, $\widehat{MCVAR}_7^X$ и $\widehat{MVAR}_7^X$ составила 11,09 руб. и 0,06 руб. в сутки соответственно. Максимальная разность между оценками $\widehat{MCVAR}^X$ и $\widehat{MVAR}^X$ для Дальсвязи была равна 2,05 руб., для МГТС — 3,55 руб., для Ростелекома — 8,62 руб., для Северо-Западного Телекома — 1,45 руб., для Сибирьтелекома — 0,03 руб., для ЦентрТелекома — 0,38 руб., для ЮТК — 0,02 руб., для ВолгаТелекома — 4,85 руб.

Наконец, сравним найденные компоненты риска $\widehat{MVAR}_3^X$, $\widehat{MVAR}_7^X$ с одномерными предельными величинами $VAR_{0,05}(X_{3t})$ и $VAR_{0,05}(X_{7t})$, рассчитанными отдельно для акций МТС ММВБ и Уралсвязьинформ ММВБ без учета их зависимости от других ценных бумаг отрасли «Связь». Результаты представим на рис. 6–7.

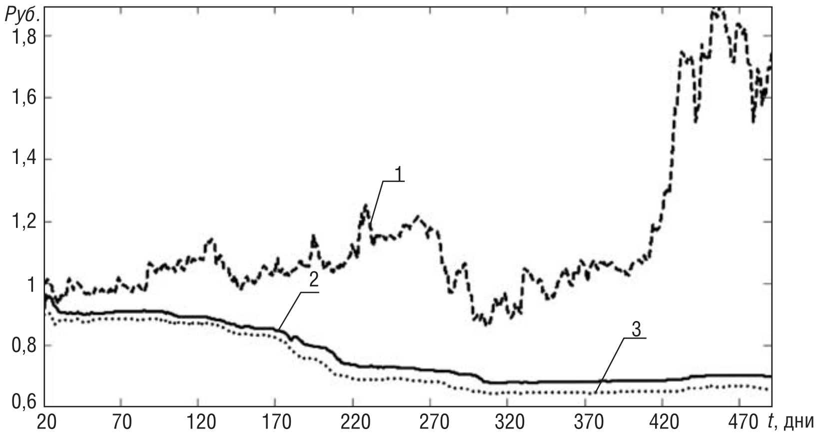

Рис. 4. Динамика изменения цены акции Уралсвязьинформ ММВБ с 29 апреля 2005 г. по 22 марта 2007 г. и оценки рисков ее снижения (1 — цена акции, *руб.*; 2 — $\widehat{MVAR}_7^X$, *руб.*; 3 — $\widehat{MCVAR}_7^X$, *руб.*)

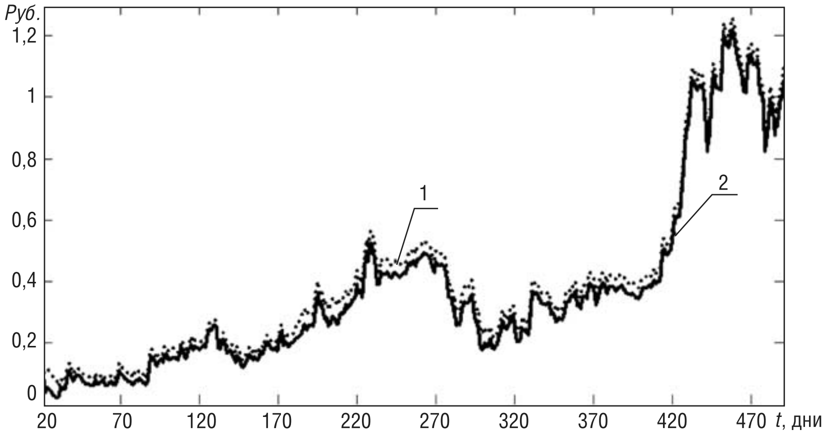

Рис. 5. Возможная прибыль при инвестировании в расчете на одну акцию Уралсвязьинформ ММВБ в период с 29 апреля 2005 г. по 22 марта 2007 г. (1 — с использованием $\widehat{MCVAR}_7^X$; 2 — с использованием $\widehat{MVAR}_7^X$)

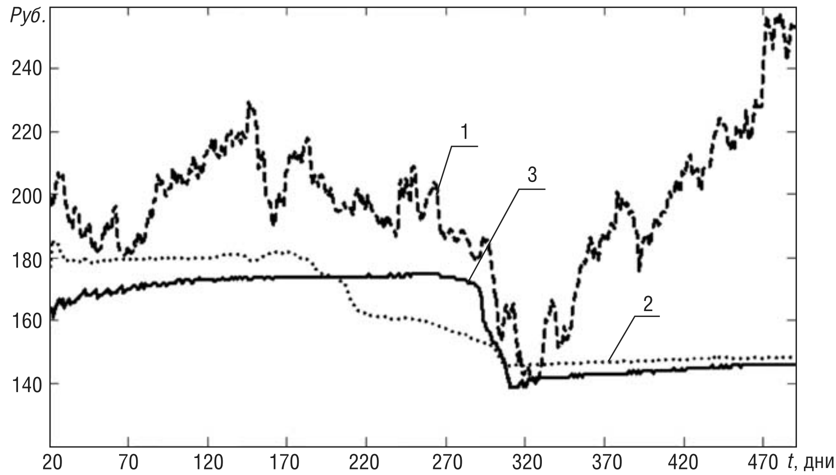

Рис. 6. Сравнение многомерного и одномерного рисков для акции МТС ММВБ
(1 — цена акции, *руб.*; 2 — $\widehat{MVAR}_3^X$, *руб.*; 3 — $VAR_{0,05}(X_{3t})$, *руб.*)

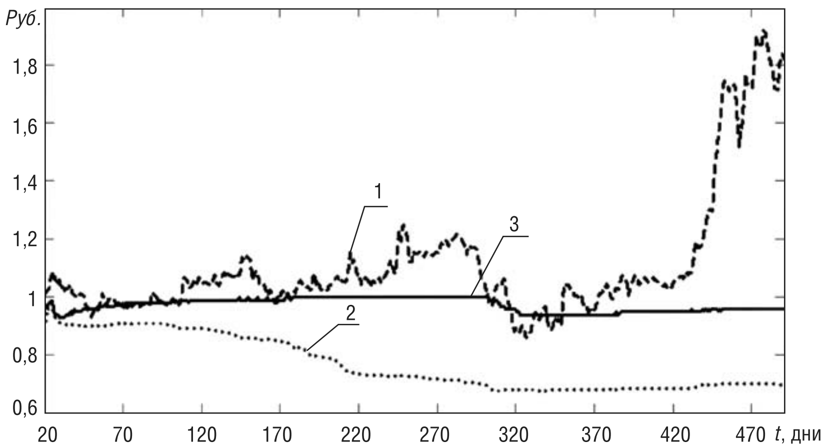

Рис. 7. Сравнение многомерного и одномерного рисков для акции Уралсвязьинформ ММВБ
(1 — цена акции, *руб.*; 2 — $\widehat{MVAR}_7^X$, *руб.*; 3 — $VAR_{0,05}(X_{7t})$, *руб.*)

Как видно из рис. 6 и 7, одномерный показатель $VAR_{0,05}(X_{3t})$ переоценивает риск (за исключением периода с 280 по 310 торговый день или с 17 мая по 29 июня 2006 г.), а показатель $VAR_{0,05}(X_{7t})$ существенно его недооценивает по всему временному горизонту. Одним из объяснений такого поведения одномерных предельных величин $VAR_{0,05}(X_{3t})$ и $VAR_{0,05}(X_{7t})$ является относительно слабая корреляционная связь между котировками акций МТС ММВБ и других компаний отрасли. В случае Уралсвязьинформ ММВБ, наоборот, наблюдается высокая взаимная зависимость телекоммуникационных предприятий. Как следствие, ошибка при замене многомерного риска одномерным для акций МТС ММВБ меньше, чем для ценных бумаг Уралсвязьинформ ММВБ.

В заключение приведем расчет наиболее широких за время t, $0 \le t \le \overline{T}$, доверительных областей, найденных в соответствии с (6), (14)–(15) для $MVAR_i^X$ (границы множества для вектора $MCVAR(X_t)$ находятся из неравенств для $MVAR_i^X$ его заменой на $MCVAR_i^X$):

$\hat{M}VAR_1^X - 2{,}1 \le MVAR_1^X \le \hat{M}VAR_1^X + 2{,}5;$

$\hat{M}VAR_2^X - 11{,}6 \le MVAR_2^X \le \hat{M}VAR_2^X + 12{,}2;$

$\hat{M}VAR_3^X - 4{,}9 \le MVAR_3^X \le \hat{M}VAR_3^X + 9{,}4;$

$\hat{M}VAR_4^X - 5{,}7 \le MVAR_4^X \le \hat{M}VAR_4^X + 8{,}8;$

$\hat{M}VAR_5^X - 1{,}1 \le MVAR_5^X \le \hat{M}VAR_5^X + 2{,}4;$

$\hat{M}VAR_6^X - 0{,}08 \le MVAR_6^X \le \hat{M}VAR_6^X + 0{,}15;$

$\hat{M}VAR_7^X - 0{,}03 \le MVAR_7^X \le \hat{M}VAR_7^X + 0{,}19;$

$\hat{M}VAR_8^X - 0{,}49 \le MVAR_8^X \le \hat{M}VAR_8^X + 1{,}02;$

$\hat{M}VAR_9^X - 0{,}11 \le MVAR_9^X \le \hat{M}VAR_9^X + 0{,}23;$

$\hat{M}VAR_{10}^X - 5{,}02 \le MVAR_{10}^X \le \hat{M}VAR_{10}^X + 7{,}89.$

4. Выводы

Рассмотрен способ оценивания многомерных предельных уровней рисков *MVAR*, *MCVAR* портфелей акций методом главных компонент. В соответствии с предложенной методикой проведены расчеты рисков портфеля акций телекоммуникационных компаний. Показано, что в течение большинства торговых дней одномерные показатели переоценивают или недооценивают финансовые риски, что свидетельствует о недопустимости замены *MVAR*, *MCVAR* совокупностью одномерных *VAR* и *CVAR*. Кроме того, обнаружено, что возможная прибыль от инвестирования денежных средств с использованием условной меры риска $\hat{M}CVAR(X_t)$ выше, чем при применении $\hat{M}VAR(X_t)$. Это особенно важно в случае резких изменений котировок акций.

Приложение

Доказательство Теоремы 1

Необходимость. Пусть ξ_i, ξ_j — произвольные независимые одномерные эллиптически распределенные случайные величины. Известно, что для них справедливо равенство:

$$E(\xi_i \xi_j) = E\xi_i E\xi_j.$$

Раскрывая скобки в выражении для корреляции r_{ij}, получаем:

$$r_{ij} = \frac{E\{(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)\}}{\sqrt{D(\xi_i)}\cdot\sqrt{D(\xi_j)}} = \frac{E\{\xi_i\xi_j - \xi_i E\xi_j - \xi_j E\xi_i + E\xi_i E\xi_j\}}{\sqrt{D(\xi_i)}\cdot\sqrt{D(\xi_j)}} = \frac{E(\xi_i\xi_j) - 2E\xi_i E\xi_j + E\xi_i E\xi_j}{\sqrt{D(\xi_i)}\cdot\sqrt{D(\xi_j)}},$$

откуда равенство нулю r_{ij} очевидно.

Достаточность. Пусть ξ_1, ξ_j некоррелированы при каждом j, большем 1.

Докажем, что ξ_1 независима с $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$. По определению независимости МСВ нужно показать, что

$$P\{\xi_1 \in G_1, \xi_2 \in G_2, \ldots, \xi_n \in G_n\} = P\{\xi_1 \in G_1\}\cdot P\{\xi_2 \in G_2, \ldots, \xi_n \in G_n\},$$

где G_j — произвольное подмножество множества всех подмножеств вероятностного пространства Ω.. Так как ξ_1, ξ_j некоррелированы при каждом j, большем 1, то первая строка матрицы ковариаций H_t будет нулевой за исключением первого элемента. Поэтому характеристическая функция φ_ξ для ξ:

$$\varphi_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \exp(i\mu_t X)\,\psi\!\left(\frac{1}{2} X H_t X^T\right) = \varphi_{\xi_1}(x_1)\cdot\varphi_{(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)}(x_2, \ldots, x_n),$$

что эквивалентно доказываемому.

Список литературы

Айвазян С. А. Основы эконометрики. Т. 2. М.: Юнити-Дана, 2001.

Бельснер О. А., Крицкий О. Л. Применение одномерного STS-распределения для моделирования значений фондовых индексов // *Известия ТПУ*. 2007. № 1. С. 45–50.

Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

Щетинин Е. Ю., Лапушкин А. С. Статистические методы и математические модели оценивания финансовых рисков // *Математическое моделирование.* 2004. Т.16. № 5. С. 40–54.

Щетинин Е. Ю. Статистический анализ структур экстремальных зависимостей на российском фондовом рынке // *Финансы и кредит.* 2005. Т. 22. № 190. С. 44–51.

Щетинин Е. Ю. Математические модели и методы количественного анализа фондовых рынков с высокой волатильностью: дис. докт. физ.-мат. наук, защищена 24.11.06. Тверь, 2006.

Энциклопедия финансового риск-менеджмента / под ред. А. А. Лобанова, А. В. Чугунова. М.: Альпина, 2005.

Alexander C., Chibumba A. Multivariate Orthogonal Factor GARCH/ University of Sussex Discussion Papers in Mathematics, 1998. http://www.ismacentre.rdg.ac.uk

Alexander C. Market Models: A Practitioners Guide to Financial Data Analysis // *J. Wiley and Sons.* 2001.

Alexander C. Principal component models for generating large GARCH Covariance Matrices // *Economic Notes.* 2002. V. 31. № 2. P. 337–359.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk // *Mathematical Finance.* 1998. № 6. P. 203–228.

Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework, Bank for International Settlements Press & Communications, Basel, Switzerland, 2005.

Benth F. E. Option Theory with Stochastic Analysis an Introduction to Mathematical Finance. Springer Verlag, 2002.

Chen Y., Härdle W., Spokoiny V. Portfolio value at risk based on independent component analysis // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2007. № 205. P. 594–607.

Cheng G., Li P., Shi P. A new algorithm based on copulas for VaR valuation with empirical calculations //*Theoretical Computer Science.* 2007. P. 190–197.

Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosh T. Modeling Extreme Events. Springer Verlag, 1997.

Giamouridis D., Vrontos I. Hedge fund portfolio construction: A comparison of static and dynamic approaches // *Journal of Banking & Finance.* 2007. № 31. P. 199–217.

Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice-Hall, Saddle River/ New Jersey, 5th edition, 2003.

Manganelli S., Engle R. F. CAViaR: Conditional Value at Risk by Quantile Regression. NBER. 1999. Working Paper 7341.

McNeil A. J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools // *Princeton University Press.* 2005. NJ.

Rachev S. T., Menn C., Fabozzi F. J. Fat-tailed and Skewed Asset Return Distribution. Implications for Risk Management, Portfolio Selection and Option Pricing // *John Wiley & Sons*. Hoboken, 2005.

RiskMetrics, Technical Document, Morgan Guaranty / Trust Company of New York, 1996.

Vrontos I. D., Dellaportas P., Politis D. N. A full-factor multivariate GARCH model // *Econometrics Journal.* 2003. № 6. P. 312–334.