М. Вербик

Авторегрессионная условная гетероскедастичность (АРУГ)[1]

Модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH-модели) и их обобщения (GARCH-модели) широко используются в прикладных эконометрических исследованиях, особенно при анализе финансовых данных. Вниманию читателя предлагается консультация по этой тематике, подготовленная по материалам книги Марно Вербика «Путеводитель по современной эконометрике», которая в ближайшие месяцы выйдет в свет в издательстве «Научная книга».

В финансовых временных рядах часто наблюдается феномен, который называется **объединением в кластеры волатильности (изменчивости)**. В этом случае большие возмущения (остатки) имеют тенденцию следовать за большими возмущениями, а малые возмущения группируются с малыми. Например, фондовые биржи обычно характеризуются периодами высокой волатильности и более «ослабленными» периодами низкой волатильности. Это особенно касается краткосрочной периодичности, например, в дневных или недельных отчетах, и менее — более долгосрочной периодичности. Один из способов моделировать такие структуры состоит в том, чтобы принять предположение о зависимости дисперсии остатков ε_t от ее предыстории.

1. АРУГ- и ОАРУГ-модели [2]

Основополагающей статьей в этой области является статья Энгла [Engle (1982)], в которой вводится понятие **авторегрессионной условной гетероскедастичности (АРУГ)**. Смысл понятия состоит в том, что дисперсия остаточного члена ε_t в момент времени t зависит от квадратов остаточных членов из предыдущих периодов. Самая простая форма имеет вид:

$$\sigma_t^2 = E\{\varepsilon_t^2 | I_{t-1}\} = \varpi + \alpha\varepsilon_{t-1}^2, \tag{1}$$

где I_{t-1} обозначает информационное множество, обычно включающее ε_{t-1} и всю его предысторию. Такая спецификация называется процессом авторегрессионной условной гетероскедастичности порядка 1, **АРУГ(1)**. Чтобы гарантировать $\sigma_t^2 \geq 0$ вне зависимости от ε_{t-1}^2, мы должны наложить ограничения $\varpi \geq 0$ и $\alpha \geq 0$. Моделью АРУГ(1) описывается следующее: если в периоде $t-1$ случается большое возмущение, то более вероятно, что ε_t также имеет большое (по абсолютной величине) значение. Таким образом, когда ε_{t-1}^2 является большим, дисперсия следующего остатка ε_t является также большой.

[1] В оригинале англоязычная аббревиатура — это ARCH, что соответствует «Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity».

[2] Англоязычная версия ОАРУГ-модели — это GARCH-Model, Generalized ARCH-Model.

Спецификация модели (1) не означает, что процесс ε_t является нестационарным. Просто подразумевается, что значения квадратов ε_t^2 и ε_{t-1}^2 коррелированны. *Безусловная* дисперсия ε_t имеет вид:

$$\sigma^2 = E\{\varepsilon_t^2\} = \varpi + \alpha E\{\varepsilon_{t-1}^2\} \tag{2}$$

и для стационарного временного ряда имеет решение

$$\sigma^2 = \frac{\varpi}{1-\alpha}$$

при условии, что $0 \le \alpha < 1$. Заметим, что безусловная дисперсия не зависит от момента времени t.

Модель АРУГ(1) легко расширяется на процесс **АРУГ(*p*)**, который можно выразить как

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 = \varpi + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2, \tag{3}$$

где $\alpha(L)$ — полином от оператора сдвига порядка $p-1$. Чтобы гарантировать неотрицательность условной дисперсии, ϖ и коэффициенты в $\alpha(L)$ должны быть неотрицательными. Для обеспечения стационарности процесса, требуется, чтобы $\alpha_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Влияние ε_{t-j} (при сдвиге на j периодов назад) на текущую волатильность определяется коэффициентом α_j. В модели АРУГ(p) возмущения более чем на p периодов ранее не имеют никакого эффекта на текущую волатильность.

Присутствие ошибок АРУГ в регрессии или модели авторегрессии не лишают законной силы МНК-оценивание. Однако предполагается, что существуют более эффективные (нелинейные) методы оценивания, чем обычный метод наименьших квадратов. Более важным является возможность предсказывать будущие дисперсии, например, из соображений, что они могут соответствовать степени рискованности инвестиций. Следовательно, уместно тестировать наличие эффектов АРУГ и, если требуется, оценивать модель с учетом этого. Тестирование на авторегрессионную гетероскедастичность порядка p можно провести последовательно с помощью теста на гетероскедастичность Бреуша-Пагана (Breusch-Pagan), представленного, например, в главе 4 [Вербик (2007)]. Достаточно построить вспомогательную регрессию квадратов МНК-оцененных остатков e_t^2 по лагированным квадратам $e_{t-1}^2, \ldots, e_{t-p}^2$ и константе, и вычислить соответствующее число раз значение R^2. При нулевой гипотезе гомоскедастичности ($\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$) полученная в результате критическая статистика асимптотически имеет χ^2-распределение с p степенями свободы. Другими словами, тестирование гипотезы гомоскедастичности против альтернативной, где ошибки следуют процессу АРУГ(p), очень простое.

Модели АРУГ обобщались многими способами. Полезной модификацией является обобщенная модель АРУГ или модель **ОАРУГ**, предложенная Болерслевом [Bollerslev (1986)]. В общей форме модель ОАРУГ(p,q) можно написать как

$$\sigma_t^2 = \varpi + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \tag{4}$$

или

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta(L)\sigma_{t-1}^2, \tag{5}$$

где $\alpha(L)$ и $\beta(L)$ — полиномы от оператора сдвига. На практике спецификация ОАРУГ(1,1) часто выполняется очень хорошо. ОАРУГ(1,1) можно записать в виде:

$$\sigma_t^2 = \varpi + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \qquad (6)$$

где для оценивания имеется только три неизвестных параметра. Для неотрицательности σ_t^2 требуется, чтобы ϖ, α и β также были неотрицательны. Если мы определим $\nu_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, то процесс ОАРУГ(1,1) можно переписать как

$$\varepsilon_t^2 = \varpi + (\alpha+\beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1},$$

показывая, что квадраты ошибок следуют процессу авторегрессии — скользящего среднего АРСС(1,1). Несмотря на то, что ошибка v_t является сериально некоррелированной, она является гетероскедастичной. Коэффициент авторегрессии равен $\alpha+\beta$, поэтому для стационарности требуется, чтобы $\alpha+\beta<1$. Значения $\alpha+\beta$, близкие к единице, подразумевают высокое постоянство в волатильности[3]. Заметим[4], что при условии стационарности остатков должно выполняться $E\{\varepsilon_{t-1}^2\} = E\{\sigma_{t-1}^2\} = \sigma^2$, и тогда безусловную дисперсию ε_t можно написать в виде

$$\sigma^2 = \varpi + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

или

$$\sigma^2 = \frac{\varpi}{1-\alpha-\beta}. \qquad (7)$$

Мы можем рекурсивно подставлять лаги в выражение (6), чтобы получить соотношение:

$$\sigma_t^2 = \varpi(1+\beta+\beta^2+\ldots) + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\varepsilon_{t-2}^2 + \beta^2\varepsilon_{t-3}^2+\ldots) = \frac{\varpi}{1-\beta} + \alpha\sum_{j=1}^{\infty}\beta^{j-1}\varepsilon_{t-j}^2, \qquad (8)$$

которое показывает, что спецификация модели ОАРУГ(1,1) эквивалентна спецификации модели АРУГ бесконечного порядка с геометрически убывающими коэффициентами. Это означает, что эффект влияния возмущений на текущую волатильность уменьшается с течением времени. Следовательно, спецификация процесса ОАРУГ может обеспечить экономную альтернативу процессу АРУГ высшего порядка. Уравнение (8) можно также переписать в виде, удобном для прогнозирования:

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha\sum_{j=1}^{\infty}\beta^{j-1}(\varepsilon_{t-j}^2 - \sigma^2). \qquad (9)$$

В литературе предложено много альтернативных спецификаций для моделирования условной волатильности, которые соответствуют различным акронимам (см. обзоры [Bollerslev, Chou, Kroner (1992)]; [Bera, Higgins (1993)]; [Bollerslev, Engle, Nelson (1994)]; [Diebold, Lopez (1995)]). Важным ограничением вышеприведенных спецификаций моделей АРУГ и ОАРУГ является их симметрия: значение имеют только абсолютные значения возмущений, а не их знак. Таким образом, большое отрицательное возмущение имеет то же самое воздействие на будущую волатильность, что и большое положительное возмущение той же самой величины. Содержательное обобщение находится в направлении асимметричных моделей волатильности, в которых положительные и отрицательные возмущения одной и той

[3] Процесс *интегрированной* ОАРУГ(1,1) (или ИОАРУГ(1,1)) возникает, когда $\alpha + \beta = 1$ и возмущения волатильности имеют постоянный эффект [Engle, Bollerslev (1986)].

[4] Равенство, которое следует, справедливо, если только ε_t не имеет автокорреляции.

же величины имеют разное воздействие на будущую волатильность. Заметим, что различие между положительными и отрицательными возмущениями более ощутимо для фондовых бирж, чем для обменных курсов, где агенты обычно находятся по обе стороны рынка. Таким образом, положительные возмущения для одного агента могут быть отрицательными для другого.

Асимметричная модель должна учитывать возможность того факта, что неожиданное снижение цены («плохие новости») имеет большее воздействие на будущую волатильность чем неожиданное увеличение цены («хорошие новости») на ту же величину. Основополагающий подход, улавливающий такие асимметрии, представлен моделью **экспоненциальной ОАРУГ** (или **ЭОАРУГ**) Нельсона [Nelson (1990)], которая имеет вид:

$$\log \sigma_t^2 = \varpi + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \alpha \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}, \tag{10}$$

где α, β и γ — постоянные параметры. Так как модель ЭОАРУГ включает уровень $\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}$, то она асимметрична, поскольку $\gamma \neq 0$. Когда $\gamma < 0$, положительные возмущения порождают меньшую волатильность, чем отрицательные возмущения («плохие новости»). Включением дополнительных лагов возможно получить расширение модели ЭОАРУГ. Заметим, что можно переписать модель (10) в виде:

$$\log \sigma_t^2 = \varpi + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + (\gamma + \alpha) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \text{ если } \varepsilon_{t-1} > 0,$$

$$\log \sigma_t^2 = \varpi + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + (\gamma - \alpha) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \text{ если } \varepsilon_{t-1} < 0.$$

Логарифмическое преобразование гарантирует, что дисперсии никогда не будут отрицательными. Обычно следовало бы ожидать, что $\gamma + \alpha > 0$, несмотря на то, что $\gamma < 0$.

Энгл и Нг [Engle, Ng (1993)] охарактеризовали диапазон альтернативных моделей для условной волатильности так называемой **кривой воздействия новостей**, которая описывает воздействие последнего возмущения доходности (новости) на текущую волатильность (содержащую всю информацию, датированную $t-2$ или ранее, в виде константы и фиксации всех лагированных условных дисперсий в безусловной дисперсии σ^2). По сравнению с моделью ОАРУГ(1,1) модель ЭОАРУГ имеет асимметричную кривую воздействия новостей (с более высоким воздействием для отрицательных возмущений). Кроме того, поскольку эффект на σ_t^2 экспоненциальный, а не квадратичный, кривая воздействия новостей модели ЭОАРУГ, как правило, имеет более крутые наклоны [Engle, Ng (1993)]).

Финансовая теория говорит нам, что определенные источники риска оцениваются рынком. То есть активы с большим количеством «риска» могут обеспечить более высокую среднюю доходность для их компенсации. Если σ_t^2 является подходящим измерителем риска, то условная дисперсия может быть одним из факторов, определяющих условное среднее значение функции y_t. Один из вариантов модели АРУГ — модель **АРУГ в среднем** (или **АРУГ-С**) Энгла, Лилина и Робертса [Engle, Lilien, Roberts (1987)] специфицируется в виде:

$$y_t = x_t'\theta + \delta \sigma_t^2 + \varepsilon_t,$$

где ε_t описывается процессом АРУГ(p) (с условной дисперсией σ_t^2), а $x_t' \cdot \theta$ — линейная функция объясняющих переменных $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \ldots$ Кампбел, Ло и Мак Кинлей [Campbell, Lo, MacKinlay

(1997)] представили результаты анализа взаимосвязей между моделями АРУГ-С и моделями ценообразования активов.

2. Оценивание и прогнозирование

Существуют различные подходы к оцениванию условных моделей волатильности. Предположим, что ε_t — остаточный член модели типа[5] $y_t = x_t'\theta + \varepsilon_t$, где вектор объясняющих переменных x_t может включать лагированные значения y_t. В качестве частного случая x_t является просто константой. Кроме того, пусть условная дисперсия ε_t описывается процессом АРУГ(p). Теперь, если мы сделаем предположение об (условном) распределении ε_t, то сможем оценить эту модель методом максимального правдоподобия. Чтобы понять как это делается, положим

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t, \text{ где } \nu_t \sim \textit{НОНР}(0,\, 1)^6.$$

Это означает, что *условное* (по информации I_{t-1}) распределение возмущения ε_t является нормальным со средним 0 и дисперсией σ_t^2. Однако это не подразумевает, что безусловное распределение ε_t является нормальным, поскольку σ_t может быть случайной переменной, если мы не накладываем условие I_{t-1}. Как правило, безусловное распределение имеет более тяжелые хвосты, чем нормальное распределение. Поэтому мы можем записать условное распределение y_t как

$$f(y_t \,|\, x_t,\, I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp - \frac{1}{2}(\varepsilon_t^2/\sigma_t^2),$$

где $\sigma_t^2 = \varpi + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$ и $\varepsilon_t = y_t - x_t'\theta$. Отсюда логарифмическую функцию правдоподобия можно определить как сумму (по всем t) логарифмов вышеприведенного выражения, подставляя соответствующие выражения для σ_t^2 и ε_t. Логарифмическую функцию правдоподобия можно максимизировать обычным способом относительно $\theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и ϖ. Наложение условий стационарности $\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j < 1\right)$ и неотрицательности ($\alpha_j \geq 0$ для всех j) может быть трудным на практике, поэтому большие значения для p не рекомендуются.

Если ν_t не имеет в точности стандартного нормального распределения, то вышеприведенная процедура максимального правдоподобия может дать, тем не менее, состоятельные оценки для параметров модели, несмотря на то, что функция правдоподобия при этом специфицирована некорректно. Причина состоит в том, что при некоторых, довольно слабых предположениях условия первого порядка процедуры максимального правдоподобия справедливы, когда v_t не имеет нормального распределения. Такой метод оценивания называется **методом максимального квазиправдоподобия** (см. параграф 6.4 [Вербик (2007)]). Однако для вычисления стандартных ошибок оценок следует сделать некоторые корректировки (подробности см. в [Hamilton (1994)]).

В вычислительном отношении более простой подход может быть осуществлен с помощью обобщенного МНК. В этом случае, во-первых, θ состоятельно оценивается применени-

[5] Чтобы избежать путаницы с параметрами ОАРУГ коэффициенты регрессии обозначаются θ.

[6] НОНР (a, σ^2) — это **Н**езависимые **О**динаково **Н**ормально **Р**аспределенные случайные величины со средним значением a и дисперсией σ^2.

ем обычного МНК. Во-вторых, поскольку строится регрессия квадратов МНК-оцененных остатков e_t^2 по $e_{t-1}^2, \dots, e_{t-p}^2$ и константе, то она является той же регрессией, которая используется для вышеописанного теста гетероскедастичности. Расчетные значения из этой регрессии являются оценками для σ_t^2 и могут использоваться для преобразования модели и вычисления оценки взвешенных наименьших квадратов (ВМНК-оценки) для θ. Этот подход работает хорошо, только если расчетные значения для σ_t^2 все строго положительны. Кроме того, подход не приводит к асимптотически эффективным оценкам для параметров АРУГ.

Прогнозирование условной дисперсии из модели АРУГ(p) осуществляется напрямую. Чтобы пояснить это, перепишем модель «в отклонениях от средних» в виде:

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \dots + \alpha_p(\varepsilon_{t-p}^2 - \sigma^2),$$

где $\sigma^2 = \varpi / (1 - \alpha_1 \dots - \alpha_p)$. Предположив для удобства обозначений, что параметры модели известны, получим прогноз на один период вперед:

$$\sigma_{t+1|t}^2 = E\{\varepsilon_{t+1}^2 | I_t\} = \sigma^2 + \alpha_1(\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \dots + \alpha_p(\varepsilon_{t-p+1}^2 - \sigma^2).$$

Это аналогично прогнозу, получаемому с помощью модели АР(p) для y_t, (см., например, параграф 8.8 [Вербик (2007)]). Прогноз условной волатильности более чем на один период вперед можно получить, используя рекурсивную формулу:

$$\sigma_{t+h|t}^2 = E\{\varepsilon_{t+h}^2 | I_t\} = \sigma^2 + \alpha_1(\sigma_{t+h-1|t}^2 - \sigma^2) + \dots + \alpha_p(\sigma_{t+h-p|t}^2 - \sigma^2),$$

где $\sigma_{t+j|t}^2 = \varepsilon_{t+j}^2$, если $j \le 0$. Прогноз на h периодов вперед сходится к безусловной дисперсии σ^2, если h становится большим (предполагая, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$).

В случае модели ОАРУГ прогнозирование и оценивание можно осуществить таким же образом на основе соотношений (8), (9) или обобщений более высокого порядка. Например, прогноз на один период вперед с помощью модели ОАРУГ(1,1) имеет вид:

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \sigma^2 + (\alpha + \beta)(\sigma_t^2 - \sigma^2),$$

где $\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1}(\varepsilon_{t+j}^2 - \sigma^2)$. Прогноз на h периодов вперед можно написать как

$$\sigma_{t+h|t}^2 = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^h (\sigma_t^2 - \sigma^2).$$

Из последнего выражения видно, что прогнозы волатильности сходятся к безусловной дисперсии со скоростью $\alpha + \beta$. В случае моделей ЭОАРУГ оценивание можно выполнить также методом максимального правдоподобия, хотя простые выражения в аналитическом виде для прогнозов на h периодов вперед недоступны. Эмпирически функция правдоподобия для модели ЭОАРУГ более трудна для максимизации, и иногда возникают проблемы отсутствия сходимости.

3. Волатильность в ежедневных обменных курсах

Для того чтобы проиллюстрировать некоторые, обсужденные выше модели волатильности, мы рассмотрим ряд ежедневных обменных курсов между долларом США и немецкой маркой за период с 1 января 1980 г. по 21 мая 1987 г. Исключая дни, в течение которых отсутствуют котировальные цены (Новый год и т. д.), в итоге имеем T=1867 наблюдений. Поскольку логарифмы обменных курсов приближенно аппроксимируются процессом случайного блуждания, мы рассматриваем модель, в которой y_t является приращением логарифма обменного курса, а условное среднее включает только свободный член. Временной ряд для y_t представлен графиком на рисунке 8.10 [Вербик (2007)] и показывает существование периодов с низкой волатильностью и периодов с высокой волатильностью.

МНК-оцененные остатки e_t регрессии y_t по константе, конечно, представляют собой значения y_t минус их выборочное среднее. На основе этих остатков мы можем выполнить тесты для эффектов АРУГ, построив регрессию e_t^2 по константе и p-лагированным возмущениям. Проверка гипотезы гомоскедастичности против ошибок АРУГ(1) дает критическую статистику (вычисленную как T, умноженное на R^2 вспомогательной регрессии), составляющую 21,77, что высоко значимо для распределения χ^2 с одной степенью свободы. Аналогично мы можем проверить гипотезу гомоскедастичности против ошибок АРУГ(6) со статистикой, равной 83,46, которая также приводит к явному отклонению предположения гомоскедастичности.

Оценивались следующие три модели: АРУГ(6), ОАРУГ(1,1) и стандартная экспоненциальная модель ОАРУГ[7] (ЭОАРУГ(1,1)). Результаты оценивания представлены в табл. 1. Все специ-

Таблица 1

Оценки ОАРУГ для приращений логарифма обменного курса (отношение долл. США к немецким маркам)

	АРУГ(6)	ОАРУГ(1,1)		ЭОАРУГ
Константа	0,000 (0,000)	0,016 (0,005)		–0,483 (0,090)
ε_{t-1}^2	0,091 (0,027)	0,110 (0,016)	$\lvert\varepsilon_{t-1}\rvert/\sigma_{t-1}$	0,215 (0,26)
ε_{t-2}^2	0,080 (0,025)			
ε_{t-3}^2	0,123 (0,029)			
ε_{t-4}^2	0,138 (0,033)			
ε_{t-5}^2	0,123 (0,029)			
ε_{t-6}^2	0,102 (0,03)			
σ_{t-1}^2		0,868 (0,018)	$\log(\sigma_{t-1}^2)$	0,968 (0,009)
			$\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}$	–0,017 (0,013)

[7] Стандартное программное обеспечение для этих моделей доступно, например, в MicroFit или EViews. В зависимости от рутинных методов оптимизации, начальных значений и критериев сходимости, используемых в этих программах, результаты оценивания могут немного различаться.

фицированные модели оценивались методом максимального правдоподобия, предполагая, что условное распределение ошибок нормально. Результаты для спецификации АРУГ(6) показывают, что все 6 лагов имеют значимый и положительный эффект. Кроме того, оказалось, что коэффициенты не снижаются до нуля очень быстро. Более экономная модель ОАРУГ(1,1) также показывает, что влияние лагированных возмущений снижается очень медленно. Оцененное значение $\alpha+\beta$ равно 0,976, так что оцененный процесс близок к нестационарному процессу. Для экспоненциальной модели ОАРУГ, мы не находим свидетельства асимметрии, поскольку коэффициент γ имеет *t*-отношение, равное только –1,37. Как показано выше, это не является необычным для обменных курсов.

Большой коэффициент для $\log\sigma_t^2$ также отражает высокую степень постоянства в волатильности обменного курса.

Чтобы сравнить альтернативные модели волатильности, на рисунке 8.11 [Вербик (2007)] представлен график оцененных стандартных отклонений $\hat{\sigma}_t$, который построен с учетом оценок параметров моделей. Чтобы минимизировать воздействие начальных условий и оценить различие моделей, мы представили результаты только по последним пяти месяцам 1987 года. На графике видно, что волатильность, предполагаемая спецификацией модели АРУГ(6) менее гладкая, чем для спецификацией моделей ОАРУГ(1,1) и ЭОРУГ(1,1). По-видимому, шести лагов недостаточно, чтобы адекватно описать поведение волатильности.

Список литературы

Вербик М. Путеводитель по современной эконометрике. М.: Научная книга, 2007.

Bera A. K., Higgins M. L. ARCH Models: Properties, Estimation and Testing // *Journal of Economic Surveys*. 1993. № 7. Pp. 305–366.

Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. № 31. Pp. 307–327.

Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F. ARCH Modeling in Finance. A Review of the Theory and Empirical Evidence // *Journal of Econometrics*.1992. № 52. Pp. 5–59.

Bollerslev T., Engle R. F., Nelson D. B. ARCH Models. In: R. F. Engle and D. L. McFadden, eds., Handbook of Econometrics, Volume IV, Elsevier Science, Amsterdam. 1994. Pp. 2961–3038.

Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C. The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press, Princeton, 1997.

Diebold F. X., Lopez J. A. Modeling Volatility Dynamics. In: K. D. Hoover, ed., Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects, Kluwer Academic Publishers, Boston.1995. Pp. 427–466.

Engle R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // *Econometrica*.1982. № 50. Pp. 987–1007.

Engle R. F., Bollerslev T. Modelling the Persistence of Conditional Variances. Econometric Reviews. 1986. № 5. Pp. 1–50.

Engle R. F., Ng, V. K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility // *Journal of Finance*. 1993. № 48. Pp. 1749–1778.

Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model // *Econometrica*. 1987. № 55. Pp. 591–407.

Hamilton J. D. Time Series Analysis. Princeton University Press. 1994.

Nelson D. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach // Econometrica. 1990. № 59. Pp. 347–370.