

А. Г. Багдоев, С. В. Варданын, Д. Р. Карапетян, Г. А. Мартиросян

## Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами волновой динамики

*Методами волновой динамики выводятся нелинейные уравнения для динамических процессов в экономике.*

*Эти уравнения записаны для переходных вероятностей марковских диффузионных процессов, а также для вероятностей самих случайных величин. С помощью кривых изменения средних значений случайной величины со временем определены значения коэффициентов нелинейных уравнений. Даются их аналитическое и численное решения для ряда экономических задач, в том числе для задачи динамики ценных бумаг Блек—Шоль.*

В последнее время имеет место интенсивное применение методов, развитых в механике и прикладной математике к экономическим задачам. Подобно другим процессам — социальным, метеорологическим и пр. — многие явления экономической жизни происходят в волновом режиме, периодически возрастают или убывают [Бурда, Виплош (1998)].

В настоящей статье на основе аналогии с газовой динамикой и теорией упругости [Lighthill, Whitham (1955)], [Багдоев, Мовсисян (1968)] изучаются нелинейные слабые волны, описывающие как динамику экономических процессов, так и процессы, протекающие в информационных сетях.

Полученные результаты можно применять к известной экономической задаче [Fisher, Myron (1975)], касающейся динамики движения ценных бумаг. Выводится линейное диффузионное уравнение для опционов как функция от количества этих бумаг (или в других задачах экономики — запасов) и времени, дается его решение с приложением к динамике рынка ценных бумаг. Другие подходы с учетом нелинейности рассмотрены рядом итальянских и американских математиков.

### 1. Детерминированные процессы

В статье [Lighthill, Whitham (1955)] для решения задачи о движении транспортного потока вдоль некоторой кривой применяются методы газовой динамики. Транспортный поток рассматривается как детерминированный поток, который представляет собой количество частиц  $j$ , проходящих через точку  $x$  в единицу времени  $t$ . Суть подхода состоит в том, что вводится понятие плотности потока  $\rho$ , измеряемой как сглаженное значение количества частиц на единицу длины дороги, при этом  $j = \rho v$ , где  $v$  — скорость частиц. Затем экспериментально определяется зависимость  $j = j(\rho)$ , которая, например, в [Lighthill, Whitham (1955)] имеет вид, изображенный на рис. 1.

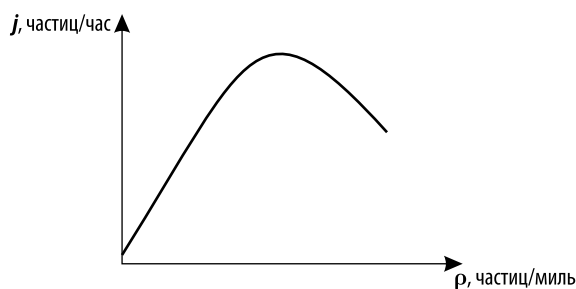


Рис. 1. Зависимость потока транспорта от его плотности

Затем записывается уравнение сохранения числа частиц

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + j'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{1.1}$$

При заданном начальном распределении  $\rho = \rho_0(x)$  в любой момент времени  $t$  можно определить значения  $\rho(x, t)$ , решая задачу Коши для (1.1), причем  $\rho(x, t)$  должны быть постоянны на характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = j'(\rho), \rho = c \Rightarrow x = x_0 + j'(c)t, \tag{1.2}$$

которые имеют вид прямых (рис. 2).

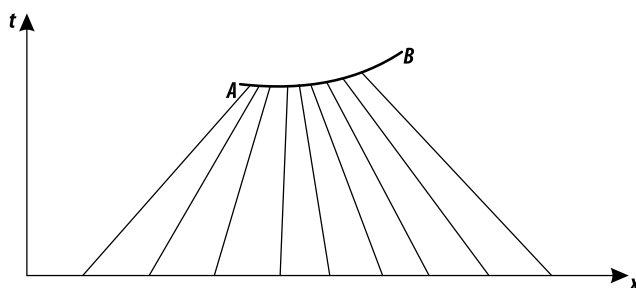


Рис. 2. Картина прямых характеристик и их огибающей

В зависимости от  $\rho_0(x)$  эти характеристики могут сближаться, и тогда в точках их пересечения будет присутствовать многозначность решения, которую можно устранить введением [Lighthill, Whitham (1955)] ударной волны  $AB$ .

Предложенный подход можно применить к однонаправленным потокам в экономике — таким, как движение товаров между магазинами, складами, странами, движение ценных бумаг между фирмами, движение цен [Бурда, Виглош (1998)], и к соответствующим задачам движения информации в сетях массового обслуживания [Керопян, Казарян (1997)]. Кривые  $\rho(x, t)$  плотности товаров, ценных бумаг, информации должны при некоторых допущениях описываться теоретическими решениями (1.2) при условии, что известна зависимость  $j = j(\rho)$ , которую можно экспериментально определить в каждом конкретном случае — например, подсчитывая количество товаров в данном объекте ( $\rho$ ) и ее поток ( $j$ ), т. е. количество товаров, проходящее через него в единицу времени.

В сетях информации такие зависимости можно считать известными [Керопян, Казарян (1997)].

Для простоты и конкретности считаем, что в момент  $t = 0$  плотность  $\rho_0(x) = \text{const}$ ,  $\rho_0 = \rho_1$ .

Вводится возмущение  $\rho' = \rho - \rho_1$ , и для данного объекта  $x = 0$  полагаем известным изменение  $\rho'$  как функции времени  $t$ :

$$\rho' = F(t), \tag{1.3}$$

причем следует определить  $\rho(x, t)$  для любой точки плоскости  $(x, t)$  (рис. 3).

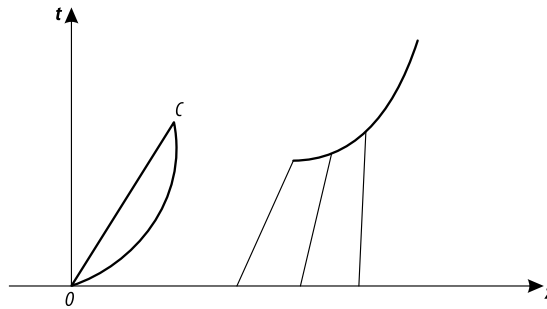


Рис. 3. Ударная волна  $OC$  на фазовой плоскости

Для малых  $\rho'$  уравнение (1.1) можно линеаризировать с помощью замены

$$j'(\rho) = j'(\rho_1), \text{ или } j'(\rho_1) = a_0, \tag{1.4}$$

где  $a_0$  — невозмущенная скорость волн.

В окрестности самой волны  $x = a_0 t$  следует с той же точностью, необходимой при получении окончательного уравнения, учитывать нелинейные члены в (1.1), причем

$$j'(\rho) = a_0 + \gamma \rho', \tag{1.5}$$

где  $\gamma = j''(\rho_1)$ .

После введения эйконала [Багдоев, Мовсисян (1968)]

$$\tau = t - \frac{x}{a_0}$$

соотношение (1.1) примет вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\gamma}{a_0^2} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = 0, \tag{1.6}$$

где производная по  $x$  берется при постоянном  $\tau$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_\tau - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Там же получено общее решение (1.6)  $\rho' = F(y_1)$ , где  $y_1$  находится из уравнения

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} F(y_1) = y_1, \quad (1.7)$$

которое есть уравнение нелинейных характеристик (см. рис. 3).

При пересечении характеристик образуется ударная волна, на которой согласно (1.6) выполняется следующее условие [Багдоев, Мовсисян (1968)]:

$$V = a_0 + \frac{\gamma}{2} \rho', \quad (1.8)$$

где  $V$  — скорость ударной волны, впереди которой имеет место  $\rho = \rho_1$ .

Подставляя (1.7) в (1.8) и учитывая, что  $V = \frac{dx}{dt}$ , а затем дифференцируя (1.7) по  $t$  (при условии  $x = x(t)$  вдоль (1.8)), можно получить [Багдоев, Мовсисян (1968)]:

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \int_0^{y_1} F(y_1') dy_1' \quad (1.9)$$

на ударной волне. В этом соотношении вид зависимости  $F(y_1)$  задается условием (1.3) на объекте  $x = 0$ .

Рассмотрим два случая:

- а)  $F(y_1)\gamma < 0$ , тогда в (1.9) имеет место лишь решение  $F(y_1) = 0$ , т.е. ударная волна отсутствует;
- б)  $F(y_1)\gamma > 0$ , тогда ударная волна  $OC$  образуется в точке  $O$  (см. рис. 3).

Случай а) будет иметь место при  $j''(\rho_1) < 0$ ,  $F(y_1) > 0$ , что осуществляется для кривой  $OC$  при условии, что в объекте  $x = 0$  при  $t = 0$  плотность товаров больше, чем при  $t > 0$ , т.е. она увеличивается со временем, и ударная волна отсутствует, в то время как при  $F(y_1) < 0$  образуется ударная волна.

В случае б) для  $F(y_1) < 0$ ,  $j''(\rho_1) < 0$  образуется ударная волна начиная с первого объекта при  $t = 0$ , а для других  $x$  она образуется в некоторый момент  $t$  и задается кривой  $OC$ .

Описываемый процесс в [Lighthill, Whitham (1955)] связывается с пробкой или затором.

Положим, что на первом объекте плотность меняется при  $x = 0$  по формуле

$$F(t) = \rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{t}, \quad (1.10)$$

где  $A = \text{const}$ , т.е. при  $t = 0$  она изменяется скачком — от начального  $\rho_1$  до некоторого  $\rho_2$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ ,  $A < 0$ .

Тогда из (1.9) путем интегрирования можно получить:

$$(\rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{y_1})^2 = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \left\{ (\rho_2 - \rho_1)y_1 + \frac{2}{3} Ay_1^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (1.11)$$

Из последнего соотношения, задавая  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $A$ ,  $\gamma$ ,  $a_0^2$ , можно найти  $y_1$  как функцию от  $x$ , решив кубическое уравнение относительно  $y_1^{\frac{1}{2}}$ . Затем определить  $\rho' = F(y_1)$ , опираясь на (1.10).

Наконец, используя (1.7), выписать уравнение ударной волны.

В частном случае при  $\rho_2 = \rho_1$  из (1.9) имеем

$$y_i^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4a_0^2} A\gamma x, \quad \rho' = \frac{3A^2\gamma x}{4a_0^2}. \quad (1.12)$$

Уравнение ударной волны ОС в соответствии с (1.7), (1.12) примет вид:

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{3A^2\gamma^2 x^2}{16a_0^4} = 0, \quad (1.13)$$

где  $\gamma < 0$ .

Разумеется, в волновом уравнении (1.6) можно учесть диффузионные члены с  $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$  и найти

соответствующие решения [Хейз (1968)] со сглаженной ударной волной. Как показано далее, для стохастических процессов такой подход также возможен.

## 2. Стохастические процессы

Все указанные выше задачи рассмотрены авторами в случае более реальных стохастических марковских процессов в приближении диффузионных малых возмущений для переходной плотности вероятности  $p\left(s, \frac{x}{t}, y\right)$  от значения случайной величины  $\xi$ , равной  $x$  в момент  $s$ , к значению  $\xi = y$  в момент  $t$ . Для  $p\left(s, \frac{x}{t}, y\right)$  получены в [Розанов (1979)] обратное и прямое линейное уравнения Колмогорова:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial a p}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b p}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

где  $a(s, x), b(s, x)$  определяются соотношениями

$$a(s, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x) p(s, x, s + \Delta t, z) dz; \quad (2.3)$$

$$b(s, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x)^2 p(s, x, s + \Delta t, z) dz, \quad (2.4)$$

причем уравнение (2.1) рассматривается в промежуточном состоянии ( $u = s + \Delta t, z$ ), близком к  $(s, x)$ .

Величины  $a(s, x), b(s, x)$  называются коэффициентами сноса и диффузии соответственно; причем  $a(s, x)$  есть средняя скорость изменения величины  $x$ . Те же соотношения имеют место для (2.2) с заменой  $(s + \Delta t, x)$  на  $(t + \Delta t, y)$ . В [Рытов (1976)] получены аналогичные уравнения которые названы уравнениями Фоккера — Эйнштейна. Там же, полагая  $s = t_0, x = x_0, y = x$  и считая, что при  $t = t_0$  задано  $P_0(t_0, x_0)$ , вводится одномерная функция распределения вероятностей

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(t_0, x_0) p(t_0, x_0, t, x) dx_0. \quad (2.5)$$

Если умножить (2.2) на  $P_0(t_0, x_0)$  и проинтегрировать, нетрудно убедиться, что вероятность состояния  $P(t, x)$  удовлетворяет тому же самому уравнению (2.2), где  $y$  заменяется на  $x$ , с начальным условием

$$P_1(t_0, x) = P_0(t_0, x).$$

Таким образом, для вероятности осуществления в момент  $t$  состояния  $x$  можно записать линейное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Pa}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Pb}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

Это уравнение совпадает с линейным волновым уравнением (газовой и, вообще говоря, волновой динамики) с учетом малой диссипации, в котором величина  $a$  является линейной скоростью волны. По аналогии с механикой сплошных сред можно считать задачу слабонелинейной и полагать

$$a = a_0 + \frac{\gamma}{2} P', \quad (2.7)$$

где  $a_0$  задается правой частью (2.3);  $P' = P - P_0$ .  $P_0$  есть вероятность основного невозмущенного процесса, причем плотность вероятности задается соотношением

$$p_0(t_0, x_0, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0-a_0t+a_0t_0)^2}{2b(t-t_0)}}, \quad (2.8)$$

где  $a_0(t-t_0)$  равно среднему значению переменной  $x - x_0$ , а  $p_0$  удовлетворяет (2.6).

В случае  $P_0(t_0, x_0) = \text{const}$  из (2.5), (2.8) следует также, что всюду в линейной задаче  $P_0(t, x) = \text{const}$ . В (2.7)  $\gamma$ -коэффициент должен определяться экспериментально.

Последовательность действий такова. Записывается в нелинейной задаче уравнение (2.6) с учетом (2.7). Для случая постоянных  $a_0, b$  получаем

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P'}{\partial x} + \gamma P' \frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0. \quad (2.9)$$

В волновой области, перейдя как и в параграфе 1, к переменной  $\tau$  и обозначив

$$P'(t, x) = p'(t, x), \quad (2.10)$$

можно получить из (2.9) следующее соотношение:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\gamma}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2.11)$$

Отбросив последний член в левой части (2.11), придем к уравнению (1.6), в котором вместо  $p'$  присутствует  $P'$ . При этом все соотношения (1.7)—(1.13) сохраняются, и для них можно провести расчеты с вероятностной интерпретацией. Например, рассматривая  $x$  как концен-

трацию ценных бумаг в данном офисе или количество информации в канале, определим согласно (1.7) функцию  $p'(t, x)$ . А по решению (1.9), (1.12) определяем скачок от 0 до  $p'$  в виде решения на ударной волне ОС, задаваемой (1.13) и соответствующей значению времени резкого нарушения непрерывности случайного процесса для каждого  $x$ .

Согласно решению (1.12), (1.13) при замене  $p'(t, x)$  на  $p'(t, x)$ , на ударной волне можно задавать — как в простом случае  $b = 0$ , так и в общем случае — для возмущенной нелинейностью вероятности  $p'$  начальное значение  $p' = 0$  вероятности концентрации  $x$  всех ценных бумаг в данном офисе. Тогда для выбранной концентрации  $x = x_0 = 0$ , распределение по  $t$  (1.10) имеет вид граничного условия

$$p(t, 0) = p_2 - p_1 + A\sqrt{t}, \quad p_1, p_2 = \text{const.} \quad (2.11')$$

При этом в случае  $b = 0$  можно использовать решение для  $p'$ , возмущенной нелинейными эффектами вероятности  $p'(t, x)$  на ударной волне.

Для общего случая (2.11') найдено численное решение (1.11) при некоторых типичных параметрах

$$a_0 = 0, \quad \gamma = 3/2, \quad p_2 - p_1 = 1/5, \quad A = -1/6.$$

Для заданных в первой строке табл. 1 значений  $x$  и полученных значений  $y_1$  находим  $p' = p_2 - p_1 + A\sqrt{y_1} = F(y_1)$ . Из (1.7) находим уравнение ударной волны  $t = t(x)$ . Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Расчет ударной волны**

$x$	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100
$\sqrt{y_1}$	0,049	0,066	0,079	0,089	0,098
$p'$	0,199	0,188	0,187	0,185	0,184
$t$	0,023	0,045	0,068	0,089	0,112

Аналогично можно найти  $p'$  для всех  $(t, x)$  позади ударной волны ОС. Эти результаты применимы и к определению вероятностей наличия данного количества информации в момент  $t$ .

Можно обобщать указанные подходы на многомерные уравнения диффузии, которые в линейном случае выведены в [Франк-Каменецкий (1964)] для плазмы и названы уравнениями Фоккера—Планка.

В частности, для компьютерных сетей [Керопян, Казарян (1997)], обозначая через  $k_1, k_2, \dots, k_n$  число заявок, через  $P(t, k_1, k_2, \dots, k_n)$  — их совместную вероятность, считая процессы переходов марковскими диффузионными, уравнение Колмогорова—Фоккера—Планка [Франк-Каменецкий (1964)], [Прохоров, Розанов (1967)] можно написать:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_i \frac{\partial P}{\partial k_i} + \frac{1}{2} b_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial k_i \partial k_j} = 0. \quad (2.12)$$

где по  $i$  и  $j$  происходит суммирование от 1 до  $n$ .

При этом, как и в одномерном случае (2.5),  $P(t, k_i)$  можно выразить интегралом от переходной плотности вероятности процессов  $p(t_0, k_{0i}, t, k_i)$ . Обозначим через  $p_0$  переходную вероятность для гауссовского процесса. Параметры  $a_i, b_{ij}$  считаются известными для каждой системы  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $a_i$  — скорость изменения средних значений заявки  $k_i$ ;  $b_{ij}$  — коэффициенты диффузии.

Введем обозначения:

$$p' = P - P_0,$$

где  $P_0$  — невозмущенная вероятность.

Тогда  $p'$  удовлетворяет (2.12) и  $P - P_0 = p'(t, k_i)$  считается малой. В момент  $t = 0$  задаем  $p' = p_1$ , где  $p_1 = \text{const}$  для всех  $k_i$ .

В нелинейном случае для  $p'$  в уравнении (2.12) в вектор скорости волны  $a_i$  добавляется нелинейное слагаемое

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + a_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + a'_i p' \frac{\partial p'}{\partial k_i} + \frac{1}{2} b_{ij} \frac{\partial^2 p'}{\partial k_i \partial k_j} = 0. \quad (2.13)$$

Обозначим линейные скорости волн в каждом канале через  $a_i = aN_i$ , где  $N_i$  — единичный вектор. Считая для простоты, что  $N_i = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ , рассмотрим

$$\tau = t - \frac{1}{a} n_i N_i.$$

Из (2.13) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{n_i} &= \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{\tau} + \frac{\partial p'}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{a'_i N_i}{a} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{1}{2} b_{ij} N_i N_j \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} &= 0, \quad a' N_i = \gamma, \end{aligned} \quad (2.14)$$

т. е. получается снова уравнение относительно одной переменной  $\tau$ .

### 3. Решение нелинейного уравнения

В параграфе 2 были получены нелинейные диффузионные уравнения для экономических случайных процессов (2.11) и компьютерных сетей (2.14).

В силу того что

$$\frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{\tau} = - \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{1}{a_0},$$

эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\gamma}{a_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}. \quad (3.1)$$



Следует заметить, что указанные ранее и приведенные в [Бурда, Виплош (1998)] кривые зависимостей экономических случайных величин — таких, как валовой национальный продукт  $x$ , позволяют оценить величину средней скорости  $\frac{dx}{dt}$  изменения величины  $x$  по наклону кривой для некоторого  $t$ . На рис. 4 наглядно видны колебания экономической активности вокруг тренда, полученные на основании поквартальных значений ВНП за 1960–1994 гг. для Великобритании.

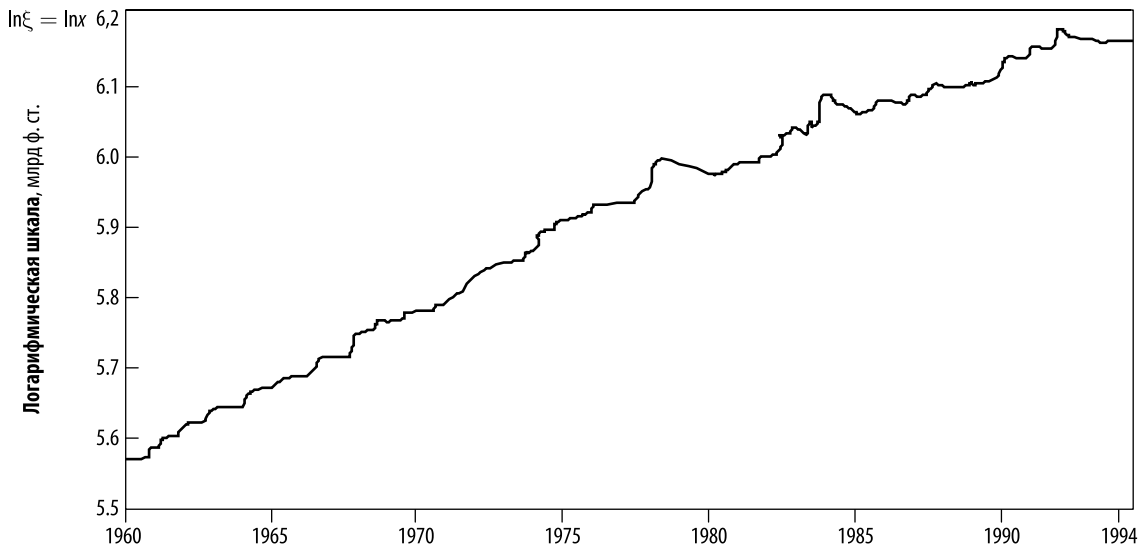


Рис. 4. Валовой национальный продукт Великобритании, квартальные данные 1960–1994 гг.

Для этих данных определим постоянные  $a_0$  и  $\gamma$  в (3.1).

Для этого необходимо учесть тот факт, что кривая для указанного случайного процесса  $x = x(t)$  представляет его среднее изменение по времени. При этом, как показано в [Рытов (1976)], можно ввести средние по переходным вероятностям  $v = p$  значения

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xv(t, x; t_0, x_0) dx, \tag{3.2}$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 v(t, x, t_0, x_0) dx, \tag{3.3}$$

причем  $\bar{x}(t_0) = x_0$ . Тогда из уравнения (2.2) при замене  $y$  на  $x$  получаем [Рытов (1976)]:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \overline{a(x, t)}, \quad \frac{d\overline{x^2}}{dt} = \overline{2a(x, t)x + b(x, t)}. \tag{3.4}$$

В частном случае  $a(x, t) = a_0 + cx; a_0, c = \text{const}$ , получаем:

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad \overline{a(x, t)} = a_0 + cx, \quad \overline{b(x, t)} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - c(\Delta x)^2. \tag{3.5}$$

Значение коэффициента  $b = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$  является таким же, как в броуновском движении [Розанов (1979)].

На рис. 4 имеет место отклонение от равномерного тренда роста на участках в интервале  $\left(13,5 - \frac{5}{7}; 13,5\right)$  года, которые мы рассматриваем как участки нелинейности решения ( $t = 0$  соответствует 1960 г.).

На подходе к этим участкам можно считать решение нелинейным и кривую  $x(t)$  аппроксимировать с помощью ломаной с начальной линейной скоростью волны  $a_0 = 14 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}$ .

В случае тренда в (3.5) имеет место экспоненциальный рост  $x(t)$ ,  $a_0 = 0$ . На линейном участке  $P_0(x, t)$  удовлетворяет линейному уравнению:

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + cP_0 + \frac{\partial P_0}{\partial x} cx - \frac{1}{2}b \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} = 0. \tag{3.6}$$

Переходная вероятность  $p_0(t_0, x_0, t, x)$  тренда удовлетворяет тому же линейному уравнению

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + a(t) \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{2}b \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} = 0. \tag{3.7}$$

и дается в виде гауссовского распределения:

$$p_0(t_0, x_0; t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}} e^{-\frac{\{x-x_0-A(t)+A(t_0)\}^2}{2D(t)}}, \quad A = \int_0^t a(s)ds, \quad D = \int_0^t b(s)ds. \tag{3.8}$$

При переходе от логарифмической шкалы к обычной в точке  $t = 13,5$  имеет место  $\xi = e^{5,96}$ , а в соседней точке  $t - \Delta t \left(\Delta t = \frac{5}{7}\right)$  года имеем  $\xi = e^{5,9}$ ,  $\Delta \xi = 490 \cdot 0,6$ .

Значение  $a_0$  можно приближенно вычислить для области относительно медленных изменений  $\xi$ :

$$a_0 = \frac{e^{5,96} - e^{5,9}}{13}, \quad a_0 = 14 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}.$$

Сильные отклонения от трендовой кривой на рис. 4 имеются в областях вблизи точек  $t = 13$ ,  $t = 20$ . Необходимо выяснить причины такого сильного отклонения ВНП от его трендового значения и понять, как избежать связанных с этим разрушительных явлений.

В настоящей статье при объяснении указанных изменений основной упор делается на определение места и интенсивности ударной волны вероятности для распределения ВНП.

Для марковского процесса  $\xi$  имеет место уравнение Ито [Прохоров, Розанов (1967)]:

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\xi) + \sqrt{b(\xi)} \frac{d\eta(t)}{dt}, \tag{3.9}$$

где  $\eta(t)$  задает процесс броуновского движения, причем среднее значение  $\bar{\eta} = 0$ . Тогда (3.9) приобретает вид

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \bar{a}(\xi). \quad (3.10)$$

Здесь  $\bar{a}(\xi)$  задает среднюю скорость изменения  $x$ , что согласуется с (3.4). Согласно (2.7)

$$a = a_0 + \frac{\gamma}{2} p', \quad (3.11)$$

и (3.10) приближенно запишется следующим образом:

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} = a_0 + \frac{\gamma}{2} p'. \quad (3.12)$$

В качестве простейшего варианта теоретического решения общего уравнения нелинейной диффузии в областях быстрого изменения кривой на рис. 4 вблизи  $t = 13,5; 20$  можно взять решение упрощенного уравнения (1.6), где  $p'$  заменяется на  $p' = P - P_0$ , причем начальное условие  $P_0$  берется постоянным,  $P_0 = p_1$ . При этом в качестве начала отсчета в уравнении (1.6) приняты значения  $t = 0, x = 0$ , где  $t - t_0, x - x_0$  заменены на  $t, x$  соответственно. Для первой нелинейной области  $\left(13,5 - \frac{5}{7}; 13,5\right)$  берется  $t_0 = 13,5 - \frac{5}{7}, x_0 = e^{5,9}$ , а для второй области  $\left(20 - \frac{5}{7}; 20\right)$ ,  $t_0 = 20 - \frac{5}{7}, x_0 = e^6$ , причем начальные условия будут  $t = 0, p' = 0, x > 0$ , т. е. вероятности всех доходов  $x$  одинаковы во времени, а граничные условия в новых переменных будут соответственно задаваться при  $x = 0, t > 0$ . Значения вероятности  $P$ , которая считается известной функцией времени, могут определяться или из опыта, или из некоторых соображений прогнозирования об увеличении или уменьшении вероятности в указанных областях в зависимости от изменения  $t$ . Получаем, как (1.12), в новых переменных

$$p'(0, t) = A\sqrt{t}, t > 0,$$

причем знак  $A$  может быть выбран из указанных соображений.

Линия  $OC$  (рис. 3) при наличии условий (1.7) может быть ударной волной, впереди которой  $p' = 0$ , или непрерывной линией, на которой  $p' = 0$ . В обоих случаях найденное ранее решение

$$p' = A\sqrt{y_1}, t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} A\sqrt{y_1} = y_1 \quad (3.13)$$

применимо и описывает указанные области на рис. 4. Более общее рассмотрение условий на ударной волне задается уравнением [Lighthill, Whitham (1955)]

$$\frac{\gamma p'}{2} = -\frac{2a_0}{9} + \sqrt{\left(\frac{2a_0}{9}\right)^2 + \frac{1}{6}(A\gamma)^2 t}. \quad (3.14)$$

В параграфе 1 мы показали, что условие наличия ударной волны:  $A\gamma > 0$ . В то же время поскольку

$$a = a_0 + \frac{\gamma}{2} p', a = \frac{d\xi}{dt}, \quad (3.14')$$

с учетом (3.12), (3.14) получится соотношение:

$$-\frac{2a_0}{9} + \sqrt{\left(\frac{2a_0}{9}\right)^2 + \frac{1}{6}(A\gamma)^2 t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t} - a_0, \xi = x, \quad (3.15)$$

где  $x, t$  — новые переменные.

Тогда средний наклон на первом нелинейном участке

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta t} = 41 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}, a_0 = 14 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}, \frac{\Delta\xi}{\Delta t} - a_0 = 27. \quad (3.15')$$

При этом (3.15) дает на ударной волне ОС при  $t = \frac{5}{7}$  года:

$$A\gamma \approx 90. \quad (3.16)$$

В частности, при  $A = 1$  получаем:

$$\gamma = 90 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}, \quad (3.17)$$

что соответствует ударной волне в газовой динамике, а  $A = -1$  дает  $\gamma = -90 \frac{\text{млрд ф. ст.}}{\text{год}}$ ,

что соответствует ударной волне разрежения, как в теории упругости [Багдоев, Мовсисян (1968)].

Таким образом определяется экспериментально нелинейный коэффициент. Для проверки порядка полученного в (3.17) значения  $\gamma$  рассмотрим на рис. 4 следующий пик:

$t_0 = 20 - \frac{5}{7}, t = 20, \xi_0 = e^6, \xi = e^{6.05}$ . Получаем:  $\frac{\Delta\xi}{\Delta t} \approx 39$ , и тогда

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta t} - a_0 = 25 \frac{\text{млрд. ф. ст.}}{\text{год}}. \quad (3.18)$$

Из (3.15) следует, что при  $t = \frac{5}{7}, a_0 = 14$  для ударной волны

$$A\gamma \approx 84. \quad (3.19)$$

Предполагая, что  $A$  имеет близкое значение к предыдущему:  $A = \pm 1$ , получим из (3.19)  $\gamma \approx \pm 84$ , т. е. близкое к предыдущему значение  $\gamma = \pm 90$ .

Уравнение (3.1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{\tau} - \frac{\gamma}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0. \quad (3.20)$$

Как и прежде, коэффициент  $b$  диффузии можно записать в виде

$$b = \frac{(\Delta\xi)^2}{\Delta t}, \frac{\Delta\xi}{\Delta t} - a_0 = a - a_0,$$

причем при исходных значениях  $t = 13,5$  года,  $t = 20$  лет, используя (3.18), получим  $b \approx 10^3$

(млрд ф. ст.)<sup>2</sup>/год. С другой стороны, для газодинамической задачи с учетом  $\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{\tau} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{\tau}$

(в обозначениях работы [Хейз (1968)]:  $u - a^* = p'$ ,  $\Gamma = \gamma$ ,  $v'' = b$ ) имеет место решение для сглаженной ударной волны в виде графиков функции при постоянном числе Рейнольдса

$$Re = \ln \frac{\varphi(-\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

В среднем для абсциссы 5 получаются значения  $\varphi \approx 5$ . Рассматривая на рис. 4 точки  $t = 15$ ,  $x \approx 800$  и получая  $b = 10^3$ , приходим к соотношению

$$\frac{x}{\sqrt{bt}} = 5, \varphi = 0,12\gamma p'.$$

Как следует из (3.14) и (3.15'),  $\gamma p' = 54$ . Тогда  $\varphi \approx 6$ , что согласуется с результатами Хейза.

Таким образом, значение  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  в точке  $t = \frac{5}{7}$  на кривой на рис. 4 находится в удовлетворительном согласии со значениями (3.17), полученными для упрощенного случая  $b = 0$ . При этом  $a_0$  по-прежнему дается формулой (3.15').

Рассмотрено также определение нелинейного коэффициента уравнения, обозначаемого в данном случае  $\gamma_1$ , для другой экономической задачи динамики процессов, задаваемых кривыми доли труда  $\xi(t)$  в национальном доходе [Бурда, Виплош (1998)]. При этом для исходных переменных  $t = 20$  лет,  $\Delta t = \frac{3}{2}$  года,  $\xi = 75\%$ ,  $\xi_0 = 70\%$ ,  $\frac{\Delta \xi}{\Delta t} = 3 \frac{\%}{\text{год}}$ ,  $a_0 = \frac{4}{3} \frac{\%}{\text{год}}$ . Из (3.15) для новой переменной  $t = 1$  год имеем

$$A\gamma_1 = 4. \tag{3.21}$$

Выбирая, как и в предыдущей задаче,  $A \pm 1$ , получим  $\gamma_1 = \pm 4$ , что, как и следовало ожидать, отличается на порядок от (3.17) и (3.19).

Разумеется, самой трудной задачей при этом следует считать определение из опыта  $p'(0, t)$  для данной величины ВВП ( $x = 0$ ) при граничном условии  $p'(0, t) = A\sqrt{t}$  или в другом прогнозном варианте  $p'(0, t) = A$  для постоянной  $A$ .

Можно эти же подходы применить к известной экономической задаче определения возможности, или вероятности,  $u$  выбора из запасов  $x$ , ценных бумаг, называемых также опционами, динамика которой описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - rx \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} v^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.22}$$

где постоянная  $v^2$  — скорость возвращения запасов;

$r$  — скорость возвращения запасов в сдвинутую позицию  $\Delta x - \frac{\Delta u}{\partial u / \partial x}$  [Fisher, Myron (1973)].

Это уравнение, не считая члена  $ru$ , есть частный случай линейных уравнений для плотности вероятности марковских диффузионных процессов [Розанов (1979)], приведенных в параграфе 2. Легко видеть, что замена  $x = se^z$  позволяет перейти к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - \left( r - \frac{1}{2} v^2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{3.23}$$

Производя замену  $u = Ve^{\lambda z}$  и учитывая, что

$$r - \left( r - \frac{1}{2}v^2 \right) \lambda - \frac{1}{2}v^2 \lambda^2 = 0, \quad \lambda = 1 \text{ или } \lambda = -\frac{2r}{v^2}, \quad (3.24)$$

(3.23) можно записать в следующем известном виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad a_0 = r - \frac{1}{2}v^2 + \lambda v^2. \quad (3.25)$$

В дальнейшем выбирается значение  $\lambda = 1$ . Здесь  $a_0$  можно рассматривать как скорость волны. Очевидно, что в нелинейном случае, обозначая через  $V_0$  решение некоторой невозмущенной задачи и считая возмущения  $V' = V - V_0$  малыми, можно записать нелинейное уравнение так:

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = -(a_0 - \gamma V') \frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}, \quad (3.26)$$

которое согласуется с (3.1). В работе [Fisher, Myron (1973)] вводится время окончания процесса  $t^*$  для динамики ценных бумаг. Можно ввести новое время  $t' = t^* - t, t' > 0$ . В целях упрощения отбросим в (3.22) член  $\frac{1}{2}v^2$  и запишем (3.26) в виде

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} - \frac{\partial V'}{\partial z} a_0 + \gamma V' \frac{\partial V'}{\partial z} = 0. \quad (3.27)$$

Будем считать  $a_0 > 0$  в (3.21) и введем, как и выше, эйконал, заменяя  $t$  на  $t'$ . Тогда получим

$$a_0 = r, \quad \tau = t' + \frac{z}{r}, \quad \left. \frac{\partial V'}{\partial t'} \right|_{\tau} + \frac{\gamma}{r} V' \frac{\partial V'}{\partial \tau} = 0. \quad (3.28)$$

Как и в параграфе 1 можно записать решение (3.28) в виде

$$y_1 = \tau - \frac{\gamma}{a_0} t' F(y_1), \quad V' = F(y_1). \quad (3.29)$$

Можно задавать условие в момент окончания выбора  $t = t^*$  [Fisher, Myron (1973)],  $x > c$ ,

$$u(x, t^*) = x - c + u_2 - u_1. \quad (3.30)$$

Здесь  $c$  — задаваемая наперед постоянная цена бумаг. Кроме того, можно считать, что для  $x < c$

$$u(x, t^*) = 0. \quad (3.31)$$

Точнее, в [Fisher, Myron (1973)] предполагается, что  $u_2 - u_1 = 0$ , т. е. переход непрерывен при  $t = t^*, x = c$ . В целях общности предполагаем пока, что  $u_2 \geq u_1$ .

Введем новые переменные:

$$t' = t^* - t, \quad x' = x - c. \quad (3.32)$$

При этом в плоскости  $(x', t')$  рассматривается решение при  $t' \geq 0$ . Зададим в (3.25)  $\lambda = 1$ . Положим  $u = V \frac{x}{c}$ . Принимая во внимание, что за невозмущенное решение можно брать

$u_0 = 0, v_0 = 0$  и одновременно при этом  $V' = V$ , получим вместо (3.30), (3.31) условия

$$t' = 0, V(0, x') = \frac{c(x' + u_2 - u_1)}{x}, x' > 0 \tag{3.33}$$

$$x' < 0, V(t', 0) = 0,$$

при этом  $a_0 = r$  — скорость возврата в запас после выемки.

В случае учета нелинейных эффектов образуется ударная волна  $OB$  впереди линейной волны  $OA$  (рис. 5, 6).

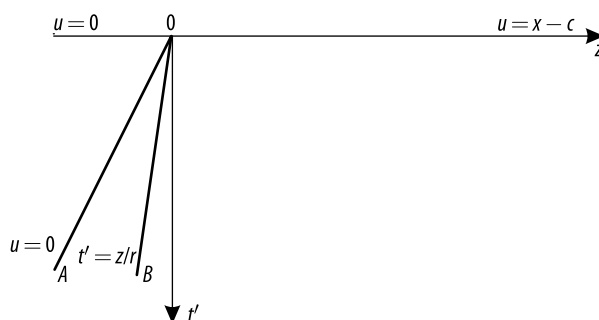


Рис. 5. Линейная  $A$  и ударная  $B$  волны ( $u = x - c$ )

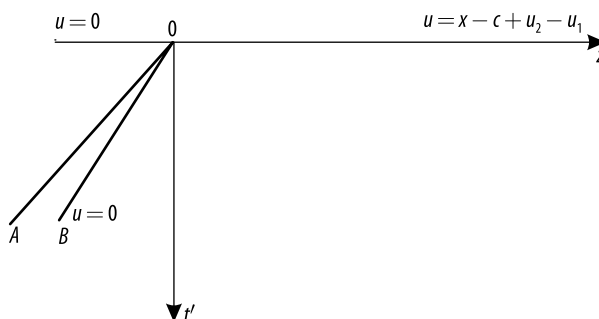


Рис. 6. Линейная  $A$  и ударная  $B$  волны ( $u = x - c + u_2 - u_1$ )

Обобщая, рассмотрим случай условий (3.29), подправленных с добавлением Мертона [Fisher, Myron (1973)]:

$$t' = 0, u = x - c + u_2 - u_1, x \geq c, \ln \frac{x}{c} \geq 0, \tag{3.34}$$

где  $u_2 - u_1 > 0$ .

Тогда в точке 0 функция  $u(x, t')$  разрывом меняется от  $u = 0$  на оси  $t' = 0, x' < 0$ , к  $x' > 0$ , причем

$$V = F(x - c + u_2 - u_1) = \frac{c}{x} (x - c + u_2 - u_1). \tag{3.35}$$

Условие на ударной волне (1.9) в новых переменных превращается в следующее:

$$F^2(y_1) = -\frac{2a_0}{\gamma t'} \int_0^{y_1} F(y'_1) dy'_1, V = F(y_1) = c - (c - u_2 + u_1)e^{-a_0 y_1}, \quad (3.36)$$

где в силу (3.28), (3.29) при  $t' = 0$ ,  $y_1 = \frac{z}{a_0}$ ,  $\gamma < 0$ . Из (3.36) можно получить для  $y_1$  и  $V = F(y_1)$  на ударной волне соотношения

$$\left\{ 1 - e^{-a_0 y_1} \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}^2 = -\frac{2}{\gamma t' c} \left\{ a_0 y_1 + \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) (e^{-a_0 y_1} - 1) \right\};$$

$$V = c - (c - u_2 + u_1)e^{-a_0 y_1}. \quad (3.37)$$

Для существования ударной волны в (3.37) следует считать, что  $\gamma < 0$ . Выражение  $\frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{c}$

определяет  $y_1$  как функцию  $t$ , и его можно численно решать вместе с (3.29).

В частном случае, рассмотренном в [Fisher, Myron (1973)],  $u_2 - u_1 = 0$  и (3.37) преобразуется:

$$(-e^{a_0 y_1} + 1)^2 = -\frac{2}{\gamma t' c} (a_0 y_1 + e^{-a_0 y_1}), \quad (3.38)$$

а уравнение ударной волны из (3.29) получается в виде

$$t' + \frac{\ln \frac{x}{c}}{a_0} - \frac{\gamma c}{a_0} t' \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-a_0 y_1} - x \right\} = y_1, \quad (3.38')$$

где  $a_0 y_1 > 0$ . Впереди ударной волны:  $V = 0$ ,  $u = 0$ , а позади нее —  $V = F(y_1)$  и (3.38'). Рассмотрим линейное решение, где  $\gamma = 0$ . При этом решение (3.23), удовлетворяющее условиям (3.33), при  $u_2 = u_1$  выглядит следующим образом:

$$V(t', z) = \begin{cases} c - ce^{-\pi t' - z}, & t' > -\frac{z}{r} \\ 0, & t' < -\frac{z}{r} \end{cases}. \quad (3.39)$$

$$u(t', z) = V(t', z)e^z.$$

Линейная (А) и нелинейная (В) волны изображены на рис. 5.

Перейдя к  $z = \ln \frac{x}{c}$ , получим

$$u(t', x) = \begin{cases} x - ce^{-\pi t'}, & t' > -\frac{1}{r} \ln \frac{x}{c} \\ 0, & t' < -\frac{1}{r} \ln \frac{x}{c} \end{cases}. \quad (3.40)$$

При стремлении  $t'$  к нулю в области  $x \geq c$  величина  $u$  уменьшается до значения  $x - c$ .

Таким образом, для  $t' > 0$ ,  $x > c$  возможность дефолта будет вблизи точки 0. Но еще меньшее значение  $u$  будет в области  $t' > 0$ ,  $x < c$ ,  $z < 0$ . Ниже волны ОА,  $t' = -\frac{z}{r}$ ,  $u = 0$ , а выше нее  $e^z > e^{-\pi t'}$ ,  $u = c(e^z - e^{-\pi t'})$ . Причем на оси  $t' u = c(1 - e^{-\pi t'})$ ,  $u < c$ .

Для полного условия (3.39) решение (3.22) при  $\gamma = 0$  имеет вид



$$V(t', z) = \begin{cases} c - (c + u_1 - u_2)e^{-rt'-z}, & t' > -\frac{z}{r} \\ 0, & t' < -\frac{z}{r} \end{cases} \quad (3.41)$$

Картина волн изображена на рис. 6.

При  $t' = 0, z = 0$  имеется скачок величины  $u$  от 0 до  $u_2 - u_1$ . По-прежнему в области  $x \geq c$ , при  $z > -rt'$  величина  $u$  уменьшается согласно (3.41) при стремлении  $t'$  к нулю до значения  $u = x - c + u_2 - u_1$ . Таким образом, для  $t' > 0, x > c$  возможность дефолта будет вблизи точки 0

в области  $t' > 0, x < c, z < 0$ , ниже волны —  $t' = -\frac{z}{r}$ , где  $u = 0$  (см. рис. 6). Выше нее

$$u = c \left\{ e^z - e^{-rt'} \left( 1 + \frac{u_1 - u_2}{c} \right) \right\}, u > 0 \text{ на оси } t'.$$

Как видно из рис. 5 и 6, ударная волна при  $\gamma < 0$  возможна лишь вблизи линейной волны  $t' = -\frac{z}{r}$  при  $x < c$ . Решение на ней задается согласно (3.25):

$$u = \frac{x}{c} F(y_1), \quad \frac{x}{c} = e^z, \quad (3.42)$$

где  $F(y_1) = c - (c - u_2 + u_1)e^{-a_0 y_1}, a_0 = r,$

причем  $a_0 y_1 > 0$ .

Уравнение ударной волны задается (3.36) и (3.38'), и его можно решить численно.

Итак, можно рассчитать ударную волну, на которой

$$u = e^{-rt'} F(y_1), \quad \frac{F(y_1)}{c} = 1 - \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-\gamma y_1},$$

где  $\gamma y_1$  — решение трансцендентного уравнения

$$\left\{ 1 - e^{-\gamma y_1} \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}^2 = \frac{2r}{-\gamma c r t'} \left\{ \gamma y_1 + \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) (e^{-\gamma y_1} - 1) \right\}, \gamma y_1 > 0, r t' > 0.$$

Можно упростить уравнение ударной волны в следующем виде:

$$r t' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{r} r t' \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-\gamma y_1} \right\} = \gamma y_1$$

и сделать расчеты, задавая значения постоянных

$$-\frac{\gamma c}{r} = \frac{1}{2}, \quad \frac{u_2 - u_1}{c} = \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{3}.$$

Следует отметить, что линейное уравнение (3.23), как это принято в газовой динамике и теории упругости [Багдоев, Мовсисян (1968)], имеет место лишь для малых величин  $V$ . При

этом начальное условие при  $t = t^*$ ,  $u = x - c$ ,  $x \geq c$  [Fisher, Myron (1973)] соответствует произвольным значениям  $u$ . Как видно из условия (3.33),  $V$  может считаться малым при малых значениях  $u_2 - u_1 > 0$  и  $y_1$ , т. е. в окрестности волны  $\tau = 0$  их можно считать малыми.

Вне волны, т. е. в большей части области  $t' > 0$ ,  $x > c$ , величина  $V$  не мала, и с точки зрения волновой динамики правильность (3.25) сомнительна. Вместе с тем для малых волновых окрестностей  $\tau = 0$ , где, как было отмечено, величина  $V$  мала, нелинейное уравнение (3.37) и решение на ударной волне должны выполняться.

Из (3.33) для малых  $\frac{u_2 - u_1}{c}$ ,  $y_1$  получаем на ударной волне:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{\gamma c} \gamma y_1 &= \frac{u_2 - u_1}{c} r t', \quad F(y_1) = u_2 - u_1 + c \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \gamma y_1, \\
 V(x, t) &= (u_2 - u_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma c}{2} r t' \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}, \quad u = V \frac{x}{c}, \\
 r t' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{r} r t' &\left\{ \frac{u_2 - u_1}{c} + \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \gamma y_1 \right\} = \gamma y_1, \\
 r t' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{2r} r t' \frac{u_2 - u_1}{c} &+ r^e c^2 \frac{u_2 - u_1}{2c} r^2 t'^2 \left( 1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

По формулам (3.43) сделаны расчеты для величин  $\gamma y_1$ ,  $\frac{u}{c}$ , а также для уравнения ударной волны  $OB$  на рис. 6 при заданном значении  $\frac{u_2 - u_1}{c}$ . Результаты приведены в табл. 2, 3 и 4. Эти значения описывают область небольших  $\frac{x}{c}$ , т. е. возможность дефолта вблизи точки 0 на рис. 6.

Таблица 2

**Значения  $\gamma y_1$  на ударной волне**

$\frac{u_2 - u_1}{c}$	$\frac{x}{c}$			
	0,5	0,25	0,1	0,01
0,001	0,00024	0,0008	0,208	1,300
0,100	0,02200	0,0630	0,228	1,017
$\frac{1}{3}$	0,06300	0,1510	0,325	1,002

Таблица 3

**Значения  $r t'$  на ударной волне**

$\frac{u_2 - u_1}{c}$	$\frac{x}{c}$			
	0,5	0,25	0,1	0,01
0,001	0,690	1,380	2,290	4,320

Окончание табл. 3

$\frac{u_2 - u_1}{c}$	$\frac{x}{c}$			
	0,5	0,25	0,1	0,01
0,100	0,678	1,345	2,216	4,247
$\frac{1}{3}$	0,636	1,267	2,087	4,070

Таблица 4

Значения  $\frac{u}{c}$  на ударной волне

$\frac{u_2 - u_1}{c}$	$\frac{x}{c}$			
	0,5	0,25	0,1	0,01
0,001	0,0006	0,0004	0,019	1,0095
0,100	0,0600	0,0400	0,030	1,0100
$\frac{1}{3}$	0,1900	0,1200	0,060	1,0100

**Заключение**

В статье рассматриваются и анализируются детерминированные и стохастические процессы в экономике и информатике с применением методов нелинейной волновой и газовой динамики. С помощью кривых средних зависимостей случайных процессов от времени определены коэффициенты сноса, диффузии и нелинейности в обобщениях диффузионных уравнений Колмогорова—Эйнштейна—Фоккера для вероятности случайного процесса.

Новое в статье — учет нелинейности в указанных уравнениях, которая проявляется в областях сильных изменений наклона приведенных кривых, представляющего скорость волны, причем в окрестности волны необходим учет даже малой нелинейности в основных порядках. Показано наличие ударной волны вероятности в указанной области, дается расчет искомых величин для характерных средних кривых экономических показателей во времени, который позволяет объяснить причины сильных нежелательных отклонений от тренда, их вероятности, прогнозировать указанные явления. Кроме того, приводится решение нелинейного уточнения линейного уравнения динамики ценных бумаг Блэк—Шоль. Полученные таблицы опционов в области сильных изменений, соответствующие нелинейности, т. е. вблизи ударной волны, позволяют прогнозировать возможные области дефолта.

Предложенные подходы применяются также ко многим биологическим процессам — например, к процессам генетики [Мартиросян, Багдоев (2008)], где вероятностный характер зависимости изучаемого параметра от времени весьма существенен; к различным пульсограм-

Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами волновой динамики

мам, к нейронным сетям, к кривым зависимостей от времени деформаций при подготовке землетрясений, к информационным потокам, к социологическим и другим гуманитарным явлениям, в которых проявляются временные статистические зависимости, включая взрывные явления, которые также можно анализировать с помощью описанных нелинейных методов.

Важность рассмотренных подходов, в том числе при взаимодействии общества и власти, описана в работе [Саркисян (2008)]. В ней речь идет о создании постиндустриального сетевого сообщества, существующего без бюрократического принуждения, основанного на творческом взаимодействии, т. е. на разуме и обмене информацией составляющих его личностей, куда будет закрыт доступ людям, привыкшим к бюрократическим властным отношениям.

Несомненно, в таком самоорганизованном обществе наряду с высоким уровнем отношений с низкой энтропией и высоким уровнем информации, как и в генетике [Седов (1982)], в качестве дополнения к нему необходим высокоэнтропийный слой (в биологии — мутации, без которых невозможно движение в сторону развития вида). В этом слое процессы являются неупорядоченными и стохастическими, и их можно исследовать с помощью методов данной статьи, зная кривые средних статистических зависимостей на этом уровне.

### Список литературы

- Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости // Изв. АН. Арм. ССР. Механика. 1968. Т. 21. № 3. С. 19–24.
- Бурда М., Виллош Ч., Макроэкономика. Европейский текст. СПб., 1998.
- Керопян Х. В., Казарян Э. А. Стохастические модели компьютерных сетей и методы их исследования. Ереван, 1997.
- Мартirosян Г. А., Багдоев А. Г. Применение методов нелинейной волновой динамики к стохастическим процессам в биологии и генетике. Доклады НАН РА. 2008. № 4.
- Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.
- Розанов Ю. А. Случайные процессы М.: Наука, 1979.
- Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М. Наука, 1976.
- Саркисян Т. С. Конец государства, или Новая форма организации общества. [Электронный ресурс]. 2008. Режим доступа: [www.usps.am](http://www.usps.am)
- Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. М.: Мир, 1968.
- Седов Е. Одна формула и весь мир. Книга об энтропии. М.: Знание, 1982.
- Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964.
- Хейз У. Д. Основы газодинамических разрывов // Основы газовой динамики: сб. науч. тр, 1968.
- Black Fisher, Scholes Myron. The pricing of options and corporative liabilities // *The journal of political Economy*. 1973. № 81(3).
- Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves on long crowded roads // *Pro. Roy Soe. A*. 1955. V. 229. № 1178.