

Б. Е. Бродский, Г. И. Пеникас, И. А. Сафарян

Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул

В статье рассматривается задача обнаружения и оценивания момента структурного сдвига в копула-моделях временных рядов. Предложен непараметрический метод обнаружения и оценивания структурного сдвига и исследованы его асимптотические характеристики (вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, вероятность ошибки оценивания). Приведены результаты экспериментального исследования предложенного метода в имитационных моделях копул Клейтона и Гумбеля. Практические применения метода включают проверку гипотезы о наличии структурного сдвига в реализациях финансовых временных рядов (для ставок межбанковского рынка, собранных за период с 6 августа 2007 г по 21 мая 2009 г. Процентные ставки в рублях, долларах, евро на сроки овернайт (1 день), 1, 3, 6 месяцев были взяты как ставки MosPrime, USD LIBOR, EURIBOR соответственно. Ставки на 1, 3, 5 лет были взяты как котировки процентных свопов на соответствующие сроки из базы данных Bloomberg). Полученные результаты свидетельствуют об эффективности предложенного метода обнаружения и оценивания момента структурного сдвига.

1. Введение

Рассмотрим непрерывный случайный вектор $X = \{X_1, \dots, X_d\}$ с совместной кумулятивной функцией распределения (ф. р.) V и одномерными ф. р. компонент вектора F_1, \dots, F_d . **Копула** (Copula) представление для V запишется в виде

$$V(x_1, \dots, x_d) = G(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

где G — единственная **непрерывная** кумулятивная ф. р., у которой одномерные маргинальные ф. р. равномерные на $[0, 1]$.

Копула-модель возникает в том случае, когда G неизвестна, но принадлежит классу

$$\mathfrak{A} = \{G_\theta : \theta \in \Theta\},$$

где Θ — открытое множество в R^p .

В книгах [Joe (1997)] и [Nelson (2006)] содержатся обзоры наиболее употребительных параметрических моделей копул. Эти модели часто используются в современных актуарных исследованиях, эконометрике, гидрологии (см., например, [Frees and Valdez (1998)], [Cui and Sun (2004)], [Genest and Favre (2007)]). Однако наиболее интенсивно модели копул используются в финансовом анализе, в частности, в задачах управления кредитным риском и оценки активов (см. [Cherubini et al. (2004)], [McNeil et al. (2005)]).

Предлагаемая статья посвящена проблеме обнаружения структурных сдвигов в моделях копул (Copula models). Рассматриваются нестационарные копула-модели с дискретным временем, структурные параметры которых могут резко изменяться в неизвестные моменты. Актуальность этой задачи обусловлена тем, что статистические характеристики реальных финансовых временных рядов, как правило, нестабильны и подвержены резким структурным сдвигам (характерный пример: мировой финансовый кризис 2007–2008 гг., выявивший неадекватность большинства финансовых моделей). Поэтому обнаружение моментов структурных сдвигов в моделях копул имеет важное прикладное значение.

Существующая литература по моделям копул может быть разбита на два основных класса:

- работы, посвященные оценке и тестированию параметрических моделей копул: гауссовских копул [Malevergne and Sornette (2003)], копул Клейтона (Clayton) [Shih, (1998)], [Glidden, (1999)]; [Cui and Sun, (2004)];

- работы по непараметрическим методам проверки гипотез относительно моделей копул, включая так называемый blanket tests (см. [Genest et al. (2006)], [Breymann et al. (2003)], [Dobric and Schmid (2005)], [Junker and May (2005)]).

Статья написана в русле непараметрического подхода. Суть задачи состоит в построении непараметрических оценок структурного сдвига в моделях копул. Точная постановка задачи приводится далее.

2. Постановка задачи и метод решения

Пусть получена выборка $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N\}$ независимых R^d -значных векторов с совместными кумулятивными ф. р. V_1, \dots, V_N .

Предполагается, что либо $V_1 = \dots = V_N$ (гипотеза H_0 , см. (2) ниже), либо в некоторый неизвестный момент времени $m = [tN]$ паттерн¹ зависимости компонент X_{i1}, \dots, X_{id} каждого вектора \mathbf{X}_i изменяется. При этом предполагается, что частные ф. р. F_1, \dots, F_d остаются неизменными, а изменение паттерна зависимости выражается в изменении копулы, т.е. совместные ф. р. равны:

$$V_i(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} G_1(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), & 1 \leq i \leq m, \\ G_2(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), & m < i \leq N. \end{cases} \quad (1)$$

Необходимо проверить гипотезу

$$H_0: G_1 = G_2 \quad (2)$$

и при отклонении этой гипотезы построить оценку момента структурного сдвига m .

Иными словами, проверяется гипотеза о наличии структурного сдвига в паттерне зависимости между компонентами векторов наблюдений. При отклонении нулевой гипотезы H_0 необходимо построить оценку момента разладки m . Цель заключается в построении метода, для которого вероятности ошибок 1-го рода («ложная тревога») и 2-го рода («ложное

¹ Под паттерном авторами понимается форма (модель, способ) связки компонент X_{i1}, \dots, X_{id} . Термин «паттерн» применяется в общем смысле, тогда как для целей эконометрической оценки совместного распределения именно понятие «изменение копулы компонент X_{i1}, \dots, X_{id} » позволяет отразить изменение паттерна.

спокойствие») были бы достаточно малы (стремились к нулю с увеличением объема выборки N), а оценка параметра разладки $\hat{\theta}_N$ была бы состоятельной, т. е. стремилась бы к истинному параметру разладки θ при увеличении объема выборки.

Предлагаемый метод обнаружения основан на непараметрическом подходе. Рассмотрим эмпирические Copula-процессы:

для каждого $l = 1, \dots, N - 1$:

$$D_l(u) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I(U_{i,l} \leq u) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^d I(U_{ij,l} \leq u_j),$$

$$D_{N-l}(u) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l+1}^N I(U_{i,N-l} \leq u) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=l+1}^N \prod_{j=1}^d I(U_{ij,N-l} \leq u_j),$$
(3)

где $U_{i,l} = (U_{i1,l}, \dots, U_{id,l})$

и для каждого $j = [1, \dots, d]$:

$$U_{ij,l} = \frac{l}{l+1} F_{j,l}(X_{ij}) = \frac{\text{rank}(X_{ij})}{l+1}, 1 \leq i \leq l,$$

$$U_{ij,N-l} = \frac{\text{rank}(X_{ij})}{N-l+1}, l+1 \leq i \leq N.$$
(4)

Для последовательного обнаружения момента разладки зафиксируем константу и рассмотрим следующую статистику (модификация статистики Колмогорова—Смирнова):

$$\Psi_{l,N-l}(u) = (D_l(u) - D_{N-l}(u)) \frac{\sqrt{l(N-l)}}{N}$$
(5)

и

$$T_N = \max_{[3N] \leq l \leq [(1-\beta)N]} \sup_u |\Psi_{l,N-l}(u)|.$$
(6)

Оценка момента структурного сдвига строится следующим образом:

$$\hat{m}_N \in \arg \max_{[3N] \leq l \leq [(1-\beta)N]} \sup_u |\Psi_{l,N-l}(u)|,$$
(7)

а оценка параметра структурного сдвига $\hat{\theta}_N = \frac{\hat{m}_N}{N}$.

Далее предлагаются следующие показатели эффективности метода обнаружения:

1) вероятность ошибки 1-го рода («ложное решение»):

$$\alpha_N = P_0 \{T_N > C\},$$
(8)

где $C > 0$ — некоторая граница принятия решения о наличии структурного сдвига;

2) вероятность ошибки 2-го рода:

$$\delta_N = P_m \{T_N \leq C\};$$
(9)

3) вероятность ошибки оценивания для любого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$\gamma_N = P_m \{ |\hat{\theta}_N - \theta| > \varepsilon \}. \quad (10)$$

3. Основные результаты

Напомним основное предположение: X_1, \dots, X_n — независимые случайные d -мерные векторы с непрерывными одномерными маргинальными распределениями. Из этого предположения следует, что случайные величины (с. в.) $U_{i,l}$, определенные в (3)—(4), независимы при различных $i = 1, \dots, l$. Кроме того, они одинаково распределены при нулевой гипотезе (отсутствие структурного сдвига) и удовлетворяют условию Крамера $E_0 \exp(tU_{i,l}) < \infty$ при $|t| < T$ для некоторого $T > 0$, в силу того что $U_{i,l} = (U_{i,1}, \dots, U_{i,d,l}) \in [0, 1]^d$.

В следующей теореме получена экспоненциальная верхняя оценка для вероятности ошибки 1-го рода в рамках предложенного метода.

Теорема 1.

$$\alpha_N \leq L_1 \exp(-L_2 C^2 N), \quad (11)$$

где положительные константы L_1, L_2 не зависят от N .

Идея доказательства теоремы 1 заключается в следующем. Из условия непрерывности маргинальных распределений следует (см. [Tsukahara (2005)]), что при нулевой гипотезе $H_0: G_1 = G_2$ и $[\beta N] \leq l \leq [(1-\beta)N]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{l}(D_l(u) - G_1(u)) &\rightarrow W_1(u), \\ \sqrt{N-l}(D_{N-l}(u) - G_1(u)) &\rightarrow W_2(u), \end{aligned}$$

где $W_1(\cdot), W_2(\cdot)$ — независимые винеровские процессы на $[0, 1]^d$, а символ \rightarrow означает слабую сходимость в пространстве $D[0, 1]^d$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому

$$(D_l(u) - D_{N-l}(u)) \frac{\sqrt{l(N-l)}}{N} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\left(1 - \frac{l}{N}\right)^{\frac{1}{2}} W_1(u) - \left(\frac{l}{N}\right)^{\frac{1}{2}} W_2(u) \right].$$

Отсюда с использованием экспоненциальных оценок для вероятности пересечения винеровским процессом горизонтальной границы получаем результат теоремы 1.

Аналогичные оценки могут быть получены для вероятности ошибки 2-го рода и вероятности ошибки оценивания. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.

Обозначим $\eta = \sup_u |G_1(u) - G_2(u)|$ и предположим, что $0 < C < \frac{\eta}{4}$. Пусть $d = \frac{\eta}{4} - C$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta_N &\leq L_1 \exp(-L_2 \min(d, d^2)N) \\ \gamma_N &\leq C_1 \exp(-C_2 \min(\varepsilon, \varepsilon^2)N) \end{aligned} \quad (12)$$

где положительные константы L_1, L_2, C_1, C_2 не зависят от N .

Доказательство.

Приведем набросок доказательства теоремы 2.

Вначале рассмотрим случай $[\beta N] \leq l \leq m$. Поскольку $D_l(u) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l I(U_{i,l} \leq u)$, то

$$ED_l(u) = G_1(u).$$

Далее

$$D_{N-l}(u) = \frac{1}{N-l} \left(\sum_{i=l+1}^m I(U_{i,N-l} \leq u) + \sum_{i=m+1}^N I(U_{i,N-l} \leq u) \right)$$

и поэтому

$$ED_{N-l}(u) = \frac{1}{N-l} ((m-l)G_1(u) + (N-m)G_2(u)).$$

Отсюда имеем

$$E(D_l(u) - D_{N-l}(u)) = G_1(u) \left(1 - \frac{m-l}{N-l} \right) - G_2(u) \frac{N-m}{N-l} = \frac{N-m}{N-l} (G_1(u) - G_2(u)).$$

Это означает, что

$$\max_{l \leq m} \sup_u E \Psi_{l,N-l}(u) = \frac{\sqrt{m(N-m)}}{N} \sup_u |G_1(u) - G_2(u)|.$$

Аналогично рассматривается случай $m < l \leq [(1-\beta)N]$. Заметим, что

$$\max_m \frac{\sqrt{m(N-m)}}{N} \leq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, удалось оценить сверху математическое ожидание статистики T_N . Что же касается стохастической аддитивной компоненты этой статистики, то, как и в теореме 1, экспоненциальные оценки сверху для вероятностей ошибок оценивания (12) следуют из экспоненциальных верхних оценок для сумм независимых, одинаково распределенных центрированных с. в., удовлетворяющих условию Крамера (см. [Петров (1987)]).

Далее рассматриваются результаты экспериментального тестирования метода обнаружения на модельных примерах.

4. Экспериментальное тестирование метода

Предложенный метод тестировался в имитационных экспериментах с выборками двумерных зависимых наблюдений, описываемых Copula-моделями следующего вида: копула Клейтона: для любых $u, v \in (0, 1)$ и $\kappa > 0$:

$$C_\kappa(u, v) = (u^{-\kappa} + v^{-\kappa} - 1)^{-\frac{1}{\kappa}},$$

копула Гумбеля: для любых $u, v \in (0, 1)$ и $\kappa > 0$:

$$C_\kappa(u, v) = \exp \left[- \left\{ (-\log u)^{\frac{1}{\kappa}} + (-\log v)^{\frac{1}{\kappa}} \right\}^\kappa \right].$$

Параметр κ в данных моделях может изменяться в некоторый неизвестный момент разладки $m = [\theta N]$.

В первой серии экспериментов оценивались критические пороги для предложенного метода, соответствующие различным моделям наблюдений и объемам выборки. С этой целью использовались выборки с однородными наблюдениями (без разладки). Для каждого значения объема выборки N в 500 независимых повторениях эксперимента оценивались 95%-е и 99%-е квантили выборки максимумов статистики T_N для предложенного метода. Значения 95%-е квантилей далее использовались в качестве критических порогов. Полученные результаты приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Критические пороги, копула Клейтона, однородная выборка $\kappa = 0,3$

$N, \%$	50	100	200	300	500	700	1000	1500	2000
95	0,1156	0,0850	0,0615	0,0492	0,0372	0,0314	0,0278	0,0213	0,0197
99	0,1343	0,0945	0,0674	0,0550	0,0426	0,0348	0,0323	0,0232	0,0214

Таблица 2

Критические пороги, копула Гумбеля, однородная выборка $\kappa = 0,3$

$N, \%$	50	100	200	300	500	700	1000	1500	2000
95	0,1033	0,0749	0,0508	0,0402	0,0313	0,0243	0,0206	0,0158	0,0146
99	0,1187	0,0836	0,0585	0,0461	0,0343	0,0292	0,0233	0,0168	0,0154

Из приведенных результатов видно, что критические пороги предложенного метода не очень чувствительны к конкретной Copula-модели, что позволяет провести робастную настройку его параметров для обнаружения и тестирования момента разладки. Полученные результаты приведены в табл. 3 и 4 (параметр разладки $\theta = 0,3$, C — критический порог; w_2 — ошибка 2-го рода).

Таблица 3

Обнаружение и оценивание разладки, копула Клейтона

$\theta = 0,3$	$\kappa_1 = 0,3; \kappa_2 = 1,0$			
N	500	700	1000	1500
C	0,037	0,031	0,027	0,020
w_2	0,560	0,430	0,150	0,020
θ_N	0,337	0,335	0,303	0,300

Обнаружение и оценивание разладки, копула Гумбеля

$\theta = 0,3$	$\kappa_1 = 0,3; \kappa_2 = 0,7$						
N	100	200	300	500	700	1000	1500
C	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,017	0,015
w_2	0,69	0,60	0,44	0,33	0,04	0,010	0,000
θ_N	0,45	0,40	0,35	0,33	0,31	0,305	0,300

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Предложенный метод позволяет эффективно обнаруживать и оценивать моменты структурных сдвигов в моделях копул. При этом под структурным сдвигом понимается любое резкое изменение многомерного ядра копулы, описывающего конкретный вид зависимости между одномерными компонентами.

2. Рассчитанные критические пороги практически не зависят от конкретного вида копулы (Клейтона, Гумбеля и др.) и от параметров копулы при нулевой гипотезе. Это позволяет использовать их в непараметрических тестах структурных сдвигов в копула-моделях.

5. Прикладные задачи

Разработанный метод обнаружения и оценки структурных сдвигов в моделях копул был использован для проверки гипотезы о наличии структурного сдвига в реализациях финансовых временных рядов. В основе анализа лежали ставки межбанковского рынка, собранные за период с 6 августа 2007 г. по 21 мая 2009 г. Процентные ставки в рублях, долларах, евро на сроки овернайт (1 день), 1, 3, 6 месяцев были взяты как ставки MosPrime, USD, LIBOR, EURIBOR соответственно. Ставки на 1, 3, 5 лет были взяты как котировки процентных свопов на соответствующие сроки из базы данных Bloomberg.

Методология оценки. Оценка копул совместного распределения была проведена на основе семипараметрического² подхода, чтобы исключить ошибки, возникающие от неверной спецификации частных распределений. Соответственно методом гистограммы были восстановлены эмпирические функции распределения дневных логарифмированных доходностей случайных величин. Далее были оценены параметры 6 копул: две архимедовы копулы (Клейтона, Гумбеля), копула экстремальных распределений (копула Стьюдента с 1 степенью свободы), 3 копулы эллипсообразных распределений (нормальная и Стьюдента с 5 и 10 степенями свободы). Копулы Стьюдента рассматривались также с иным количеством степеней свободы. Для наглядности и сопоставимости результаты оценки приводятся только для случаев 1, 5, 10

² В работе [Kim G., Silvapulle M., Silvapulle P. (2007)] показано, что семипараметрический метод (SP – semi-parametric) позволяет построить более состоятельные и устойчивые (робастные) оценки, чем параметрические методы в случаях, когда вид частного распределения не известен и, как следствие, возникает угроза их неверной спецификации.

степеней свободы, так как они позволяют увидеть тенденцию, где может находиться оптимальное количество степеней свободы, если крайними случаями являются копула Стьюдента с 1 степенью свободы и с бесконечным количеством (нормальная копула) степеней свободы.

Интерпретация полученных результатов.

1. До момента структурного сдвига совместное распределение доходностей процентных ставок в рублях наилучшим образом описывалось копулой Стьюдента с 1 степенью свободы, тогда как после — гауссовской копулой. Необходимо заметить, что для копулы Стьюдента с 1 степенью свободы (также именуемой копулой Коши, поскольку она относится к семейству копул экстремальных распределений) характерна максимальная степень зависимости³ хвостов, которая в данном случае составила 85 % при оценке непосредственных данных и 96,2 % при работе с рангами первоначальных данных. Гауссовская же копула характеризуется нулевой зависимостью хвостов, т.е. маловероятным является одновременное наблюдение как очень больших, так и очень малых значений входящих в копулу случайных величин.

Естественно, оценка копулы на всей выборке давала некорректные результаты, указывая на предпочтительность выбора копулы Стьюдента с 8 степенями свободы. Понимая, что гауссовская копула является частным случаем копулы Стьюдента, когда число степеней свободы стремится к бесконечности, логичным (хотя малоинформативным) является то, что на всем наборе данных получается оценка некоей усредненной копулы Стьюдента.

Таким образом, подтверждается корректность определения 3 декабря 2008 г. как даты структурного сдвига для рублевого денежного рынка. Если до этой даты для процентных ставок в рублях было характерно высоковероятное одновременное возрастание и снижение, то после нее ставки начали вести себя более независимо. Важно отметить, что данное движение ставок имеет объяснение.

Дело в том, что до 1 декабря 2008 г. Центральный банк РФ постоянно поднимал ставку рефинансирования до уровня 13 % годовых. Эта мера требовалась для ограничения кредитной активности банков, как следствие, для ограничения прироста денежной массы и недопущения дальнейшего роста инфляции. Тем не менее ввиду сжимающегося самого по себе денежного рынка как ответной реакции на финансовый кризис необходимо было перейти, наоборот, к стимулированию кредитования через снижение ставки рефинансирования.

Интересно внимательнее рассмотреть график поиска точки структурного сдвига, которая определялась как максимум приводимой на графике функции $\Psi_{l, N-l}(u)$. Можно видеть (рис. 1), что если глобальный максимум соответствует дате 3 декабря 2008 г. (наблюдение № 348), то локальный минимум находится в окрестности 12 ноября 2008 г. Именно 11 и 12 ноября 2008 г. Центральный банк РФ произвел два очередных повышения ставки рефинансирования до 11 % и 12 % соответственно. Возможно, если бы экономическая конъюнктура не требовала данных действий, движение процентных ставок в рублях стало бы уже после 12 ноября 2008 г. определяться нормальной копулой. Но поскольку осень 2008 г., а именно октябрь—ноябрь 2008 г., характеризовалась кризисом банковской ликвидности, движение процентных ставок лишь отражало напряженность в экономической сфе-

³ Индексы зависимости верхних (λ_U) и нижних (λ_L) хвостов определяются по следующей формуле в двумерном случае [Nelson (2006), p. 214]:

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow \Gamma^-} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)], \quad \lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)].$$

ре и характеризовалось одновременным резким ростом и кратковременным снижением ставок всех сроков.

Номер наблюдения временного ряда

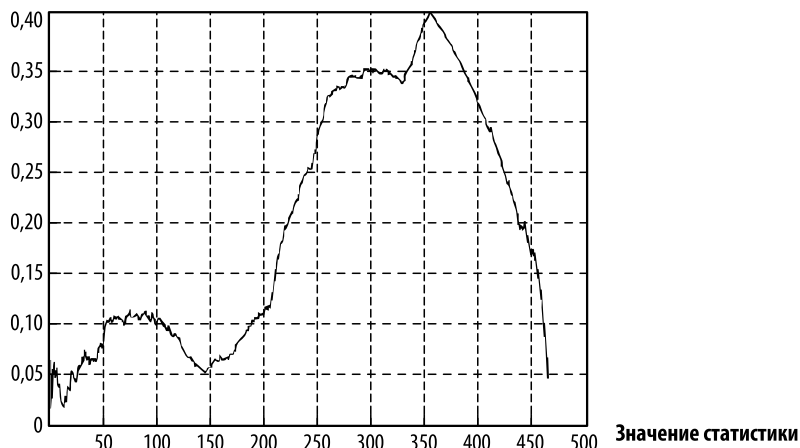


Рис. 1. Значение статистики $\Psi_{l, N-l}(u)$ для обнаружения точки структурного сдвига для рядов процентных ставок в рублях

Примечание. Максимальное значение статистики $\Psi_{l, N-l}(u)$ соответствует точке структурного сдвига.

2. В части процентных ставок денежных рынков доллара наблюдалась иная ситуация. Вначале, до момента структурного сдвига (17 июля 2008 г.), совместное движение доходностей процентных ставок наилучшим образом описывалось копулой Клейтона, после структурного сдвига — гауссовской копулой. Отметим особенность копулы Клейтона — она характеризуется наличием зависимости только нижних хвостов (в отличие от копулы Стюдента, которой свойственна зависимость как верхних, так и нижних хвостов). Значение индекса зависимости нижних хвостов в период до структурного сдвига для процентных ставок в долларах равнялось 89,5 % (99 % в рангах).

Таким образом, до структурного сдвига процентным ставкам в долларах было свойственно одновременное существенное снижение, тогда как после сдвига их движение стало достаточно независимым. Для объяснения данного факта обратимся к динамике основных детерминант денежных рынков. Для процентных ставок в долларах таковым является ставка Федеральной резервной системы США (ФРС) (см. рис. 2).

Начиная с первых симптомов кризиса ипотечных вкладных ФРС планомерно снижала ставку рефинансирования, желая мотивировать участников рынка на новые сделки с ипотечными ценными бумагами, новые прибыли от которых помогут компенсировать уже понесенные убытки от ипотеки. Тем не менее данное стремление не смогло переломить негативные настроения, переполнявшие держателей данных ценных бумаг. Хотя приведенная выше динамика ставки рефинансирования показывает, что в период до структурного сдвига, выявленного в ходе исследования (с 6 августа 2007 г. по 17 августа 2008 г.), снижение носило более радикальный характер. Так, ставка рефинансирования была снижена с 4,75 до 2 %, т. е. на 2,75 %, тогда как в период после структурного сдвига — только на 1,75 % (с 2 до 0,25 %).

Изменение характера движения процентных ставок в долларах было также вызвано иным внеплановым явлением — обострением ситуации в Абхазии в конце июля и вводом

войск на ее территорию в начале августа 2008 г. Именно с данным политическим действием связывают существенный отток инвестиционного капитала из России за два августовских дня.

Значение процентной ставки, %

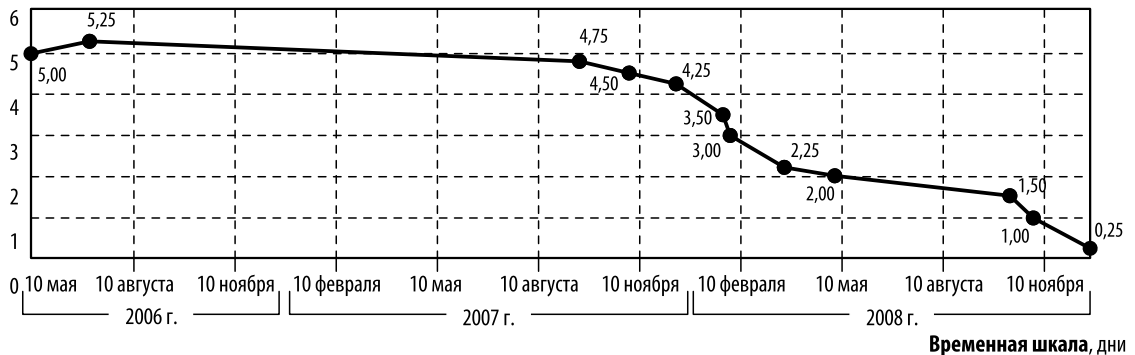


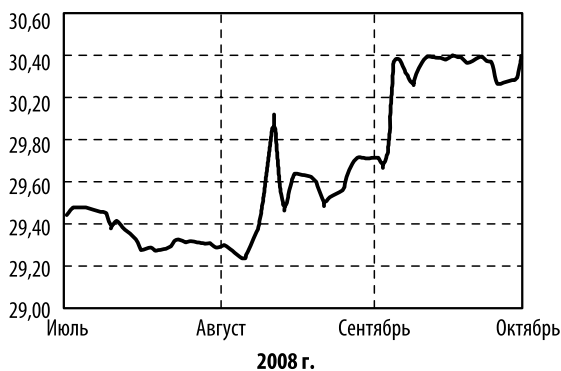
Рис. 2. Ключевые даты изменения ставки рефинансирования ФРС США

Примечание. Процентная ставка оставалась неизменной до даты установления новой.

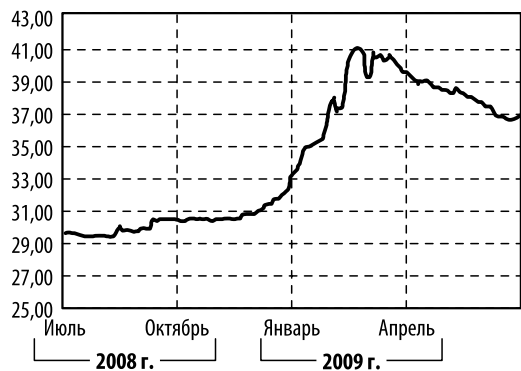
Источник: www.cbonds.info/index/index_detail/type_id/160

Соответственно для вывода средств была осуществлена крупная конвертация валюты, которая стала предтечей изменения уровня бивалютной корзины, отраженного в левой части рис. 3. Так, 12 августа 2008 г. значение корзины выросло примерно на 2 руб., хотя, как показала история конца года, данная мини-девальвация была несущественной на общем фоне изменения стоимости корзины за 2-е полугодие 2008 г. (см. правую часть рис. 3).

Значение бивалютной корзины, руб.



Значение бивалютной корзины, руб.



Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул

Временная шкала, месяцы

Временная шкала, месяцы

Рис. 3. Динамика бивалютной корзины

Примечание. Значение бивалютной корзины приведено в рублях за единицу бивалютной корзины. В течение рассматриваемого периода бивалютная корзина формировалась из 55 % обменного курса доллара США (в руб. за 1 долл.) и 45 % обменного курса евро (в руб. за 1 евро).

Источник: сайт Банка России (www.cbr.ru)

3. Что касается оценки копулы совместного распределения ставок в евро, то здесь, хотя и не удалось получить однозначного различия, все-таки стало возможным выявить разные характеристики движения процентных ставок. Так, в период до структурного сдвига (24 сентября 2008 г.) наилучшей можно считать копулу Клейтона (выбирая на основе максимального значения функции правдоподобия), которая указывает на наличие частых одновременных движений вниз всех процентных ставок. В период после сдвига однозначно наилучшей копулы выявить не удастся, поскольку при оценке методом IFM значение функции максимального правдоподобия оказывалось не конечным для всех копул, кроме копулы Клейтона. Одновременно заметим, что, несмотря на уменьшение оценки параметра копулы методом ITAU в 3 раза (с 75,27 до 22,16), его значимость выросла в 3 раза — с 1,6 до 4,81. Таким образом, несмотря на уменьшение степени взаимосвязи процентных ставок для разных сроков (которую характеризует величина параметра), качество подгонки копулы под данные существенно выросло в случае оценки копулы Клейтона (в случае оценки копулы Стьюдента значимость оценки параметра, наоборот, снизилась в 4 раза). Тот факт, что после момента структурного сдвига совместное распределение процентных ставок в евро стало более качественно описываться копулой Клейтона, можно интерпретировать на основе анализа динамики основного детерминанта данных процентных ставок, которым является ставка рефинансирования Европейского центрального банка (ЕЦБ).

Как видно из рис. 4, ЕЦБ придерживался политики повышения процентных ставок до 8 октября 2008 г., когда он впервые с целью стимулирования перехода европейской экономики через кризис снизил ставку рефинансирования на 0,5 %. Вплоть до конца весны 2009 г. ЕЦБ продолжил планомерное снижение ключевого индикатора, установив его на уровне 1 % начиная с 7 мая 2009 г. Именно данное постепенное снижение ставки рефинансирования ЕЦБ объясняет рост значимости коэффициента копулы Клейтона, характеризующей совместное движение процентных ставок в евро.

Значение процентной ставки, %

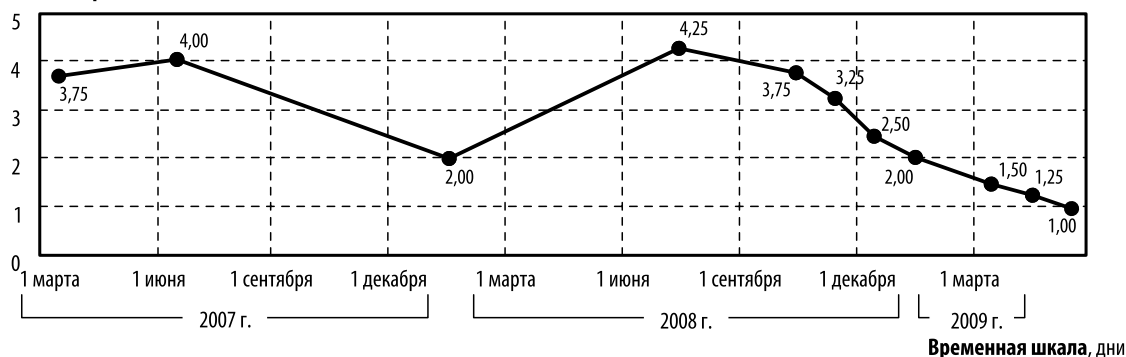


Рис. 4. Ключевые даты изменения ставки рефинансирования ЕЦБ

Примечание. Процентная ставка оставалась неизменной до даты установления новой.

Источник: www.cbonds.info/index/index_detail/type_id/161

4. Интересно отметить следующий факт, который можно обнаружить в полученных оценках параметров копул и их свойствах. Если в рублях и евро при оценке методом IFM и ITAU динамика зависимости хвостов сохранялась (до момента сдвига зависимость больше,

чем после, при обоих методах), то для долларов результат неоднозначен. При оценке методом IFM зависимость хвостов растет, а методом ITAU — снижается.

5. Заметим, что при оценке копул Стьюдента на основе данных, преобразованных в ранги, значение параметра не зависело от количества степеней свободы. Несмотря на это, значение индекса зависимости хвостов изменялось с изменением количества степеней свободы, поскольку степени свободы являются дополнительным параметром копулы Стьюдента.

Важный вывод, который следует из данного наблюдения: по возможности при оценке копул предпочтение следует отдавать методу IFM, поскольку он позволяет получить более точные оценки параметров, будучи более гибким.

6. Проведенный анализ выявил, что совместное движение процентных ставок наилучшим образом описывается либо копулой Клейтона, либо нормальной (иногда копулой Стьюдента). Поэтому необходимо прокомментировать противоречие с полученными ранее выводами (см., например, [Пеникас, Симакова (2009)], где было выявлено, что движению процентных ставок наилучшим образом соответствует копула Гумбеля).

Во-первых, предыдущее исследование не учитывало дату структурного сдвига, присущего входящим данным.

Во-вторых, как было показано, важное влияние на характер совместного движения процентных ставок оказывает динамика ставки рефинансирования в выбранной валюте. В предыдущем исследовании рассматривался период, когда ЦБ РФ регулярно поднимал процентные ставки, что имело соответствующее влияние на характер взаимосвязи (копула Гумбеля характеризуется наличием зависимости только верхних хвостов распределения).

В-третьих, в предыдущем исследовании рассматривались 5 ставок, тогда как в нынешнем — 7. При оценке же архимедовых копул (коими являются копулы Клейтона и Гумбеля) точность оценки параметра снижается с ростом размерности копулы. Проблемой архимедовых копул является то, что взаимосвязи в многомерной структуре данных описываются одним параметром. Альтернативным решением могут стать иерархические копулы, метод построения которых подробно описан в работе Саву и Треде (см. [Savu, Trede (2006)]).

В-четвертых, текущее исследование рассматривает в дополнение к процентным ставкам в рублях ставки в евро и долларах, которые не были предметом предыдущего исследования.

Список литературы

Пеникас Г. И., Симакова В. Б. Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей // *Прикладная эконометрика*. 2009. № 1 (13). С. 3–36.

Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Breymann W., Dias A., Embrechts P. Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance // *Quantitative Finance*. 2003. № 3. P. 1–14.

Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. N. Y.: Wiley, 2004.

Cui S. and Sun Y. Checking for the gamma frailty distribution under the marginal proportional hazards frailty model // *Statistica Sinica*. 2004. № 14. P. 249–267.

Dobric J., Schmid F. Testing goodness of fit for parametric families of copulas: Application to financial data // *Communications in statistics. Simulation and Computation*. 2005. № 34. P. 1053–1068.

Fermanian J., Scaillet O. Nonparametric estimation of copulas for time series // *Journal of Risk*. 2003. № 5. P. 25–54.

Frees E. and Valdez E. Understanding relationships using copulas // *North American Actuarial Journal*. 1998. № 2. P. 1–25.

Genest C., Favre A.-C. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask // *Journal of Hydrologic Engineering*. 2007. № 12. P. 347–368.

Genest C., Ghoudi K., Rivest L.-P. Discussions of papers already published: «Understanding relationships using copulas» / by E. Frees and E. Valdez // *North American Actuarial Journal*. 1998. № 2 (3). P. 143–149.

Genest C., Quessy J., Remillard B. Goodness-of-fit procedures for copula models based on the integral probability transformation // *Scandinavian Journal of Statistics*. 2006. № 33. P. 337–366.

Genest C., Remillard B., Beaudoin D. Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2009. № 2(44). P. 199–213.

Glidden D. Checking the adequacy of the gamma frailty model for multivariate failure times // *Biometrika*. 1999. № 86. P. 381–393.

Joe H. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman and Hall, 1997.

Junker M., May A. Measurement of aggregate risk with copulas // *The Econometrics Journal*. 2005. № 8. P. 428–454.

Kim G., Silvapulle M., Silvapulle P. Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2007. № 51. P. 2836–2850

Malevergne Y., Sornette D. Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependencies // *Quantitative Finance*. 2003. № 3. P. 231–250.

McNeil A. J., Frey R., Embrechts P. *Quantitative Risk Management*. New Jersey: Princeton University Press. Princeton, 2005.

Nelsen R. *An Introduction to Copulas*. New York: Springer, 2006.

Remillard B., Scaillet O. Testing for equality between two copulas // *Journal of Multivariate Analysis*. 2009. № 3(100). P. 377–386.

Savu C., Trede M. *Hierarchical Archimedean Copulas*. Munster. 2006. URL: www.uni-konstanz.de/micfinma/conference/Files/papers/Savu_Trede.pdf

Shih J. A goodness-of-fit test for association of bivariate survival model // *Biometrika*. 1985. № 85. P. 189–200.

Tsukahara H. Semiparametric estimation in copula models // *Canadian Journal of Statistics*. 2005. № 3(33). P. 357–375.

Wang Sh. Discussions of papers already published: «Understanding relationships using copulas», by E. Frees and E. Valdez // *North American Actuarial Journal*. 1999. № 1(3). P. 137–141.