Деан Фантаццини

Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском

Часть 5. Управление кредитным риском (*окончание*)

Данная часть завершает серию консультационных публикаций Деана Фантаццини на тему «Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском». В ней продолжено обсуждение многомерных моделей кредитного риска.

Перевод оригинального англоязычного текста на русский язык, как и все предыдущие части этой консультации, выполнен А. В. Кудровым под научной редакцией С. А. Айвазяна.

1. Модель CreditRisk+

CreditRisk+ (далее — CR+) — это модель оценки и управления кредитным риском, разработанная в 1997 г. банком Credit Suisse ([Credit Suisse (1997)]). Она может быть рассмотрена как актуарная модель, поскольку при ее реализации используются некоторые методы управления рисками, а также алгоритмы, заимствованные из страхования. На основании этой модели можно оценить функцию распределения убытков по кредитному портфелю как для однолетнего, так и для многолетнего временно́го горизонта. В этих случаях доли дефолтов могут рассматриваться в качестве либо детерминированных, либо случайных величин.

1.1. Информационное множество модели

Основная особенность модели состоит в том, что для нее требуется ограниченное и легкодоступное информационное множество. Оно состоит из следующих компонент:

- величина номинальных потерь при дефолте — ВНП(Д);
- вероятность дефолта;
- стандартные отклонения вероятностей дефолта;
- нормы восстановления.

Модель может управлять финансовыми инструментами различных типов — например, облигациями, займами, аккредитивами с гарантией оплаты, деривативами. Каждый из этих инструментов имеет свою норму восстановления, что учитывается при оценке функции распределения убытков по портфелю. Кроме того, если рассматриваются убытки за несколько лет, важно учитывать, что уровень ВНП(Д) может меняться с течением времени. Более того, вероятности дефолта меняются от года к году, а финансовые организации могут использовать собственные оценки, построенные на базе внутренних моделей прогнозов. Стандартные отклонения вероятностей дефолта могут быть легко вычислены на основе временны́х рядов, характеризующих платежеспособность компании. Следует отметить, что при использовании более длинных временны́х рядов можно получить более надежные оценки стандартных отклонений, поскольку в этом случае учитываются эффекты экономических циклов. Нормы восстановления могут быть либо получены от специализированных рейтинговых агентств, либо вычислены с использованием внутренних ресурсов финансовой организации.

1.2. Основная модель с фиксированной долей дефолтов

В модели CR+ делаются следующие предположения:

1) для займов вероятность дефолта за заданный период — скажем, за 1 год — зависит только от длины периода и не зависит от момента отчета этого периода;

2) для большого количества заемщиков вероятность дефолта одного из них мала, а количество дефолтов, возникших за данный период, не зависит от числа дефолтов, возникших в любой другой период.

В модели CR+ не делается никаких предположений относительно причин неплатежеспособности: заемщик A становится неплатежеспособным с вероятностью p_A и остается платежеспособным с вероятностью $(1-p_A)$. Таким образом, отправной точкой является бернуллиевская случайная величина с функцией плотности $f(x)=p_A^x(1-p_A)^{1-x}$. Учитывая эти предположения, можно показать, что число дефолтов в портфеле имеет пуассоновское распределение (доказательство см. в разделе § A2.1 методологии [Credit Suisse (1997)].

Целью модели CR+ является определение рекурсивного соотношения, которое позволило бы без труда оценить функцию распределения убытков по портфелю. Для этого в CR+ на первом шаге определяется функция распределения количества дефолтов в портфеле. После этого можно выписать рекурсивную формулу для функции распределения убытков, связанных с дефолтами.

Чтобы получить функцию распределения убытков и уменьшить вычислительную сложность, убытки (которые представляют собой чистый убыток, полученный после корректировки с учетом нормы восстановления) делятся на m групп, в каждой из которых уровень кредитного риска характеризуется единственным числом.

Обозначения, используемые для каждой группы, приведены ниже:

Указатель	**Символ**
Заемщик	A
ВНП(Д)	L_A
Вероятность дефолта	P_A
Ожидаемая ВНП(Д)	$\lambda_A = L_A \times p_A$

Прежде всего условимся, что в некоторой базовой валюте выбрана единица измерения ВНП(Д), которую обозначим через L. Для каждого заемщика A определим числа ε_A, ν_A такие, что $L_A = L \cdot \nu_A$ и $\lambda_A = L \cdot \varepsilon_A$.

Следовательно, ν_A и ε_A — это соответственно величина не возвращенных при дефолте средств и ожидаемый убыток, выраженные в единицах L.

Пример 1

Предположим, банк имеет портфель, составленный из займов и облигаций 500 различных заемщиков с ВНП(Д) от 50 тыс. до 1 млн долл. Пусть для первых 6 заемщиков ВНП (Д) составит следующие значения (табл. 1).

Таблица 1

ВНП(Д) для первых 6 заемщиков

Заемщик *A*	**ВНП(Д) L_A, долл.**	**Нормированный ВНП(Д) (100 000 долл.)**	**Округленная нормированная ВНП(Д) (100 000 долл.), ν_j**	**Группа *j***
1	150 000	1,5	2	2
2	460 000	4,6	5	5
3	435 000	4,35	5	5
4	370 000	3,7	4	4
5	190 000	1,9	2	2
6	480 000	4,8	5	5

Единица измерения ВНП(Д) предполагается равной $L = 100$ тыс. долл. В каждой группе с номером j, $j = 1, \dots, m$, где $m = 10$, ВНП(Д) в среднем равна ν_j или 100 тыс. долл.$\cdot j$.

В модели CR+ займы и облигации одной группы с номером j рассматриваются как независимый портфель.

Введем следующие обозначения:

Указатель	**Символ**
Средняя ВНП(Д) в группе j, измеряемая в единицах L	ν_j
Ожидаемый убыток в группе j, измеренный в единицах L	ε_j
Ожидаемое число дефолтов в группе j	μ_j

Тогда можно записать:

$$\varepsilon_j = \nu_j \cdot \mu_j, \ \mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}. \quad (1)$$

Кроме того, ожидаемый убыток в группе j за годичный период — ε_j, измеренный в единицах L, равен сумме ожидаемых убытков ε_A по каждому заемщику, принадлежащему группе j:

$$\varepsilon_j = \sum_{A:\nu_A = \nu_j} \varepsilon_A.$$

Пусть μ — ожидаемое суммарное число дефолтов в портфеле за 1 год. Поскольку μ равна сумме ожидаемого числа дефолтов в каждой из групп, получим:

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}. \tag{2}$$

Для анализа *распределения числа дефолтов* по всем рассматриваемым заемщикам в модели CR+ введем понятие производящей функции, которая для любого действительного z определяется по формуле:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\text{возникло } n \text{ дефолтов}).$$

Предполагая, что возникновение дефолта — случайная величина, имеющая распределение Бернулли, можно показать справедливость следующего соотношения:

$$F(z) = e^{\sum_A p_A (z-1)} = e^{\mu(z-1)} = e^{-\mu+\mu z}, \tag{3}$$

где $\mu = \sum_A p_A$.

Зная производящую функцию, можно найти вероятность возникновения n дефолтов $p(n)$:

$$p(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n F(z)}{dz^n}\Big|_{z=0} = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}.$$

Поскольку портфель разделен на m независимых групп, производящая функция для портфеля, составленного из всех рассматриваемых заемщиков, равна произведению производящих функций для каждой группы:

$$F(z) = \prod_{j=1}^{m} F_j(z) = e^{-\sum_{j=1}^{m}\mu_j + \sum_{j=1}^{m}\mu_j z}.$$

В качестве упражнения предлагаем показать, что сумма независимых пуассоновских случайных величин снова становится случайной величиной, которая имеет пуассоновское распределение с параметром, равным сумме параметров для пуассоновского распределения каждого из слагаемых.

По аналогии с числом дефолтов *функция распределения убытков при дефолте* в методологии CR+ описывается с помощью производящей функции, которая равна:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\text{агрегированные убытки} = n \times L).$$

Следовательно, предположив, что $G_j(z)$ — производящая функция убытков, где убытки в группе выражаются как произведение ВНП(Д) в единицах L для группы j, получим:

$$G_j(z) = e^{-\mu_j + \mu z^{\nu_j}},$$

$$G(z) = \prod_{j=1}^{m} G_j(z) = e^{-\sum_{j=1}^{m}\mu_j + \sum_{j=1}^{m}\mu_j z^{\nu_j}}. \tag{4}$$

Поскольку в разных группах ВНП(Д) различны, то одни дефолты влекут бо́льшие убытки, чем другие. В связи с этим анализ убытка при дефолте включает изучение двух компонент случайности. Обозначив

$$P(z)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\mu_j z^{\mu_j}}{\mu}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right)z^{\left(\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right)}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right)}, \tag{5}$$

получим:

$$G(z)=e^{\mu(P(z)-1)}=F(P(z)). \tag{6}$$

Последняя формула позволяет выразить распределение агрегированного убытка с учетом двух источников случайности: пуассоновского потока возникновения дефолтов и величины ВНП(Д).

Если известна производящая функция (4), то по формуле Тейлора для разложения функции $G^*(z)$ можно получить функцию распределения убытка:

$$p\,(\text{убыток равен } n\times L)=\frac{1}{n!}\frac{d^nG(z)}{dz^n}\Big|_{z=0}=A_n.$$

С помощью формулы Лейбница можно показать, что выполняется следующее рекуррентное соотношение (доказательство см. в разделе § A4.1 [Credit Suisse (1997)]):

$$A_n=\sum_{j:\nu_j\le n}\frac{\mu_j\nu_j}{n}A_{n-\nu_j}=\sum_{j:\ \nu_j\le n}\frac{\varepsilon_j}{n}A_{n-\nu_j}, \tag{7}$$

где $A_0=G^*(0)=F^*(P(0))=e^{-\mu}=e^{-\sum_{j=1}^{m}\mu_j}=e^{-\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon_j}{\nu_j}}$.

1.3. Расширения базовой модели: переменная односекторальная доля дефолтов

Если предположить, что число дефолтов — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром μ_j, то ее стандартное отклонение равно $\sqrt{\mu_j}$. Однако анализ эмпирических данных показывает, что пуассоновское распределение недооценивает эмпирическое стандартное отклонение (см., например, работу [Crouhy et al. (2000)] и ссылки в ней). Как отмечается в технических руководствах методологии CR+, наблюдаемые вероятности дефолта весьма неустойчивы с течением времени даже в случае заемщиков, обладающих сравнительно высоким кредитным качеством. Эта неустойчивость может быть следствием изменчивости такого внешнего фактора, как состояние экономики, которое влияет на платежеспособность заемщиков. Например, ухудшение состояния экономики может привести к неплатежеспособности большинства заемщиков. Следовательно, пуассоновское распределение не столь сильно рассеяно, чтобы быть распределением, описывающим число дефолтов.

Одним из способов моделирования ситуаций, когда дефолты возникают в результате влияния неких общих факторов, является использование смесей распределений. Оценка величины агрегированных убытков по кредитному портфелю может быть вычислена при помощи двухшаговой процедуры. На первом шаге из некоторого распределения (в методологии CR+ это гамма-распределение) моделируется управляющий дефолтами внешний параметр. На втором шаге число дефолтов моделируется с помощью условного распределения при условии того, что управляющий внешний параметр равен значению, смоделированному на предыдущем шаге (в методологии CR+ — это распределение Пуассона с параметром, равным значению, полученному на первом шаге).

В частности, следует отметить, что в методологии CR+ управляющие внешние параметры измеряются для группы заемщиков из каждого сектора. Группа заемщиков из одного сектора подвержена влиянию общих внешних факторов, определяющих число дефолтов. Например, можно разделить всех заемщиков по страновой принадлежности. Для удобства описания результатов при разделении заемщиков по секторам в CR+ вводятся новые обозначения: каждому сектору S_k, $1 \le k \le n$, ставится в соответствие случайная величина x_k, равная числу дефолтов в этом секторе, математическое ожидание которой обозначается μ_k, а стандартное отклонение — σ_k. Необходимые в дальнейшем обозначения с учетом разделения по секторам приведены в табл. 2.

Таблица 2

Необходимые обозначения, с учетом разделения по секторам

Внутрисекторные характеристики	Старое обозначение	Новое обозначение
Базовая единица измерения ВНП(Д)	L	L
ВНП(Д) в единицах L	$L_j = L\nu_j$ $1 \le j \le m$	$L_j^{(k)} = L\nu_j^{(k)}$ $1 \le k \le n;\ 1 \le j \le m(k)$
Ожидаемая ВНП(Д) в каждой группе, измеренная в единицах L	$\lambda_j = L\varepsilon_j$ $1 \le j \le m$	$\lambda_j^{(k)} = L\varepsilon_j^{(k)}$ $1 \le k \le n;\ 1 \le j \le m(k)$

Математическое ожидание числа дефолтов μ_k в секторе k может быть выражено через математические ожидания числа дефолтов в группах заемщиков, входящих в этот сектор, или, что эквивалентно, μ_k представимо в виде суммы вероятностей дефолта по всем заемщикам из рассматриваемого сектора:

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}; \tag{8}$$

$$\mu_k = \sum_{A} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}, \tag{9}$$

где $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = p_A$.

Здесь p_A — вероятность дефолта заемщика A за рассматриваемый период.

Выражения (8)—(9) являются аналогами (1)—(2). В методологии CR+ фактическая вероятность дефолта заемщика A из рассматриваемого сектора моделируется как случайная величина вида:

$$x_A = \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \cdot \frac{x_k}{\mu_k}, \tag{10}$$

где математическое ожидание x_A равно $p_A = \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$.

Тогда стандартное отклонение таким образом введенной случайной вероятности дефолта среди заемщиков из сектора k равно сумме стандартных отклонений случайных вероятностей дефолтов по всем заемщикам из этого сектора:

$$\sum_A \sigma_A = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \cdot \frac{\sigma_k}{\mu_k} = \sigma_k \frac{1}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = \sigma_k. \tag{11}$$

Представив $\frac{\sigma_k}{\mu_k}$ как отношение суммы стандартных отклонений случайных вероятностей дефолтов для каждого заемщика из сектора k к сумме математических ожиданий этих вероятностей, взвешенных с учетом их вклада в вероятность дефолта всех заемщиков в этом секторе, получим:

$$\frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sum_A \sigma_A}{\sum_A p_A} = \frac{\sum_A p_A \left(\frac{\sigma_A}{p_A} \right)}{\sum_A p_A}, \tag{12}$$

откуда следует: $\sigma_k = \mu_k \cdot \omega_k$,

где $\omega_k = \frac{\sum_A p_A \left(\frac{\sigma_A}{p_A} \right)}{\sum_A p_A}$.

Распределение дефолтов со случайными вероятностями дефолтов рассчитывается по той же схеме, что и в случае фиксированных вероятностей дефолтов. Налагая условие $X_k = x$ и используя соотношение (3), выпишем производящую функцию для функции распределения числа дефолтов[1]:

$$F_k(z | X_k = x) = e^{x(z-1)}. \tag{13}$$

Если предположить, что X_k имеет плотность $f_k(x)$, то, проинтегрировав $F_k(z | X_k = x)$ по x, можно найти безусловную производящую функцию для распределения числа дефолтов:

$$F_k(z) = \int_0^{\infty} e^{x(z-1)} f_k(x) dx. \tag{14}$$

[1] В данном приближенном представлении производящей функции $F_k(z | X_k = x)$ подразумеваются взаимная статистическая независимость дефолтов заемщиков одного сектора и малость величины p_A.

В модели CR+ предполагается, что X_k имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$ со средним μ_k и стандартным отклонением σ_k. Решая следующую систему уравнений относительно α_k и β_k:

$$\begin{cases} \mu_k = \dfrac{\alpha_k}{\beta_k} \\ \sigma_k^2 = \dfrac{\alpha_k}{\beta_k^2}, \end{cases}$$

получим требуемые параметры гамма-распределения:

$$\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \tag{15}$$

$$\beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}. \tag{16}$$

Подставив аналитическое выражение плотности гамма-распределения в (14), получим:

$$F_k(z) = \int_0^\infty e^{x(z-1)} \frac{e^{-\frac{x}{\beta_k}} x^{\alpha_k - 1}}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} dx = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k}(1 + \beta_k^{-1} - z)^{\alpha_k}} = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}, \tag{17}$$

где $p_k = \dfrac{\beta_k}{(1+\beta_k)}$.

Разложив функцию $F_k(z)$ в ряд Тейлора, найдем выражение для вероятности $p(n)$ возникновения n дефолтов в секторе k:

$$p(n) = (1 - p_k)^{\alpha_k} \binom{n + \alpha_k - 1}{n} p_k^n. \tag{18}$$

Последнее распределение представляет собой отрицательное биномиальное распределение.

Наконец, функция распределения числа дефолтов по всему портфелю определяется с помощью следующей производящей функции:

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} F_k(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}. \tag{19}$$

Функция распределения числа дефолтов по всему портфелю в общем случае не является отрицательным биномиальным распределением, а представляет собой смесь отрицательных биномиальных распределений по всем секторам.

Закон распределения убытков банка в результате дефолтов заемщиков со случайными вероятностями индивидуальных дефолтов определяется с использованием производящей функции распределения убытков по портфелю, а именно функции:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p\ (\text{агрегированные убытки} = n \times L) z^n.$$

В силу предположения о независимости эта функция также может быть выражена как произведение производящих функций по каждому из n секторов:

$$G(z)=\prod_{k=1}^{n} G_k(z).$$

Аналогично выражению (5) введем следующее обозначение:

$$P_k(z)=\frac{\sum_{j=1}^{m(k)}\left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}\right)z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}\right)}=\frac{1}{\mu_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}\right)z^{\nu_j^{(k)}}. \tag{20}$$

Тогда можно показать, что производящая функция распределения убытков от заемщиков из k-го сектора является аналогом уравнения (6):

$$G_k(z)=F_k(P_k(z)). \tag{21}$$

По аналогии с выражением (13) нетрудно выписать условную производящую функцию распределения убытков, где каждый заемщик A оказывается в состоянии дефолта с вероятностью x_A:

$$G_k(z|x_A)=e^{-\sum_A x_A+\sum_A x_A z^{\nu_A}}=e^{\sum_A x_A(z^{\nu_A}-1)}=e^{\frac{x_k}{\mu_k}\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}(z^{\nu_A}-1)}=e^{x_k(P_k(z)-1)}. \tag{22}$$

Здесь мы воспользовались выражением (10) и альтернативным представлением (20) в виде суммы по всем заемщикам, принадлежащим сектору k:

$$P_k(z)=\frac{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}z^{\nu_A}}{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}}=\frac{1}{\mu_k}\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}z^{\nu_A}. \tag{23}$$

Подобно тому, как это делалось в случае функции распределения числа дефолтов, используя (22), легко найти безусловную производящую функцию распределения убытков от заемщиков в секторе k:

$$G_k(z)=\int_{x_k=0}^{\infty} e^{\sum_A x_A(z^{\nu_A}-1)}f_k(x_k)dx_k=\int_{x_k=0}^{\infty} e^{x_k(P_k(z)-1)}f_k(x_k)dx_k. \tag{24}$$

Наконец, уравнения (20) и (21) подставим в (17) и возьмем произведение полученных выражений по всем секторам. В результате получим:

$$G(z)=\prod_{k=1}^{n} G_k(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-p_k}{1-\frac{p_k}{\mu_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}z^{\nu_j^{(k)}}}\right)^{\alpha_k}. \tag{25}$$

В руководстве к методологии CR+ (см. приложение § A10 в [Credit Suisse (1997)]) на основание выражения (25) получено рекуррентное соотношение для вычисления распределения убытка по портфелю, которое вкратце рассмотрим ниже.

Производящую функцию распределения убытков можно представить в виде многочлена:

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n. \tag{26}$$

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{d(\log G(z))}{dz}=\frac{1}{G(z)}\frac{dG(z)}{dz}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_0+a_1z^1+\ldots+a_rz^r}{b_0+b_1z^1+\ldots+b_rz^r}. \tag{27}$$

Рекуррентное соотношение для коэффициентов полученного многочлена (26) имеет вид:

$$A_{n+1}=\frac{1}{b_0(n+1)}\left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i}-\sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1}(n-j)A_{n-j}\right). \tag{28}$$

Используя ранее полученные соотношения и выражение для производящей функции, определенной в (25), нетрудно вычислить коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ с учетом того, что

$$\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{\dfrac{p_k\alpha_k}{\mu_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\varepsilon_j^{(k)}z^{\nu_j^{(k)}-1}}{1-\dfrac{p_k}{\mu_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\dfrac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}z^{\nu_j^{(k)}}}. \tag{29}$$

Наконец, получаем распределение убытков. Заинтересованным читателям рекомендуем ознакомиться с работой [Melchiori (2004)], в которой подробно описан пример использования указанного выше рекуррентного соотношения.

1.4. Расширение базовой модели: зависимость распределения числа дефолтов от внешних факторов в схеме с несколькими секторами

В наиболее общей версии модели CR+ уже предполагается наличие нескольких факторов, объясняющих систематическую волатильность распределения числа дефолтов в портфеле. Это предположение учитывается путем замены понятия «сектор» на понятие «систематический фактор».

Рассмотрим производящую функцию условного распределения (22), которая представляет собой экспоненту в некоторой степени. В схеме с несколькими секторами эта степень может быть представлена в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(P_k(z)-1)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{A}\frac{x_k}{\mu_k}\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}(z^{\nu_A}-1)=\sum_{A,k}\delta_{A,k}\frac{x_k}{\mu_k}\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}(z^{\nu_A}-1), \tag{30}$$

$$\text{где } \delta_{A,k}=\begin{cases}0, & \text{если } A \text{ не принадлежит к заемщикам } k\text{-го сектора;}\\ 1, & \text{если } A \text{ принадлежит к заемщикам } k\text{-го сектора.}\end{cases} \tag{31}$$

В другой версии модели CR+ делается допущение о том, что каждый заемщик подвержен влиянию более 1 фактора. Чтобы учесть этот факт, заменим дельта-функцию δ_{Ak}, задающую принадлежность заемщика определенному сектору, весовой функцией:

$$\theta_{A,k}:\ \sum_{k=1}^{n}\theta_{A,k}=1. \tag{32}$$

Веса $\theta_{A,k}$ определяют степень, с которой вероятность дефолта заемщика *A* подвержена воздействию фактора сектора *k*, к которому он относится. Таким образом, соотношение (30) преобразуется к виду:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\left(P_k(z)-1\right)=\sum_{A,k}\theta_{A,k}\frac{x_k}{\mu_k}\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}\left(z^{\nu_A}-1\right), \tag{33}$$

где вклад заемщика *A* равен:

$$x_A\left(z^{\nu_A}-1\right),\ \text{а}\ x_A=\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}\sum_{k=1}^{n}\theta_{A,k}\frac{x_k}{\mu_k}. \tag{34}$$

В силу того что математическое ожидание $\dfrac{x_k}{\mu_k}$ равно единице, математическое ожидание x_A равно $p_A=\dfrac{\varepsilon_A}{\nu_A}$. Следовательно, выражение (23) заменяется на следующее:

$$P_k(z)=\frac{1}{\mu_k}\sum_{A}\theta_{Ak}\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}z^{\nu_A}, \tag{35}$$

где $\mu_k=\sum_{A}\theta_{Ak}\dfrac{\varepsilon_A}{\nu_A}$, а математические ожидания и стандартные отклонения числа дефолтов по всем секторам равны соответствующим взвешенным суммам математических ожиданий и стандартных отклонений, т. е.

$$\mu_k=\sum_{A}\theta_{A,k}\mu_A, \tag{36}$$

$$\sigma_k=\sum_{A}\theta_{A,k}\sigma_A. \tag{37}$$

1.5. Методология CreditRisk+ и быстрое преобразование Фурье

Одним из недавно примененных подходов для оценки функции распределения убытков является быстрое преобразование Фурье, в котором вместо производящей используется характеристическая функция. Основным преимуществом такой техники представляется ее вычислительная эффективность в условиях больших портфелей заемщиков из нескольких секторов. Более того, алгоритм, построенный по этой технике, функционирует быстрее и устойчивее по сравнению со стандартными алгоритмами, которые основаны на рекуррентных соотношениях, или с такими алгоритмами, как алгоритм Панжера для рекурсий (более подробно об этом см. работу [Melchiori (2004)] и ссылки в ней).

Перед тем как перейти к подробному изложению техники использования быстрого преобразования Фурье, опишем некоторые вспомогательные функции, ассоциированные с распределением $f(x)$ для случайной величины X: 1) производящая функция; 2) производящая функция моментов; 3) характеристическая функция.

В методологии CR+ используется производящая функция, но в этом параграфе мы применим инструмент характеристических функций.

Пусть X — неотрицательная дискретная или непрерывная случайная величина (или случайная величина смешанного типа), а $f(x)$ — плотность распределения случайной величин X.

Например:

$$f(x)=\begin{cases} Pr(X=x), \text{если } X - \text{дискретная случайная величина;} \\ \dfrac{d}{dx}F_X(x), \text{если } X \text{ — непрерывная случайная величина.} \end{cases}$$

Введем обозначение для первого момента случайной величины t^X:

$$P_X(t)=E[t^X]=\begin{cases} \sum t^x f_X(x), \text{если } X \text{ — дискретная случайная величина;} \\ \int t^x f_X(x)dx, \text{если } X \text{ — непрерывная случайная величина.} \end{cases} \quad (38)$$

Тогда производящая и характеристическая функции распределения $f(x)$ определятся соотношениями:

- *производящая функция моментов* случайной величины X:

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=P_X(e^t); \quad (39)$$

- *характеристическая функция*, также называемая преобразованием Фурье для случайной величины X:

$$\varphi_X(t)=E[e^{itX}]=P_X(e^{it})=M_X(it), \quad (40)$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Отметим, что функция плотности $f(x)$ может быть восстановлена по характеристической функции $\varphi_X(t)$ при помощи обратного преобразования Фурье (более подробно об этом см., например, работу [Abramowitz, Stegun (1972)]).

Преобразование Фурье, примененное к дискретной случайной величине, будем называть *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ). В частности, БПФ является алгоритмом дискретного преобразования, что значительно снижает вычислительную сложность.

Поскольку в стандартной методологии CR+ имеем дело с производящей функцией для дискретного распределения, для получения характеристической функции убытков можно применять технику быстрого преобразования Фурье.

Отметим одно важное свойство характеристической функции. Предположим, что N и K — независимые неотрицательные дискретные случайные величины. Тогда характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций случайных величин N и K соответственно:

$$\varphi_{N+K}(t)=E[e^{it(N+K)}]=E[e^{itN}]E[e^{itK}]=\varphi_N(t)\cdot\varphi_K(t). \quad (41)$$

В методологии CR+ суммарный убыток Z равен сумме случайного числа N индивидуальных убытков $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ в результате дефолта (по кредиту/по обязательствам). Характеристическая функция этого суммарного убытка имеет вид:

$$\varphi_Z(t) = E[e^{itZ}] = E_N[E[e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_N)}|N]] = E_N[\varphi_X(t)^N] = P_N(\varphi_X(t)), \quad (42)$$

где P_N — производящая функция случайной величины N.

Благодаря удобному виду характеристической функции для суммарного убытка БПФ может быть использовано для вычисления сверток: БПФ для суммы двух (или большего числа) независимых дискретных случайных величин равно произведению БПФ этих случайных величин.

Как мы видели ранее, CR+ моделирует число дефолтов в кредитном портфеле как сумму случайных величин, имеющих отрицательное биномиальное распределение. Однако при расчете функции распределения убытков по этому портфелю такой способ моделирования не подходит, поскольку никак не учитывается зависимость между величинами убытков.

В качестве отправной точки рассмотрим производящую функцию моментов гамма-распределения $\Gamma(\alpha, \beta)$:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = (1-\beta t)^{-\alpha}. \quad (43)$$

Теперь рассмотрим n дискретных случайных величин $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Предположим, существует такая случайная величина X_k с некоторой плотностью $f_k(x)$ и производящей функцией моментов M_{X_k}, что для любого фиксированного значения X_k $(X_k = x)$ случайные величины $N_j|X_k = x$ независимы и

$$(N_j|X_k = x) \sim Poisson(x\mu_j),\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (44)$$

Тогда совместная условная производящая функция равна:

$$P_{N_1,N_2,\ldots,N_n|X_k=x}(t_1, t_2, \ldots, t_n|X_k = x) = E[t_1^{N_1}, \ldots, t_n^{N_N}|X_k = x] = e^{x[\mu_1(t-1)+\ldots+\mu_n(t-1)]}. \quad (45)$$

Однако случайные величины $N_1, N_2, \ldots, N_n$ коррелированны, поскольку они зависят от общего случайного параметра X_k. Совместная безусловная производящая функция для $N_1, N_2, \ldots, N_n$ равна:

$$P_{N_1,N_2,\ldots,N_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E_{X_k}[E[t_1^{N_1}, \ldots, t_n^{N_n}|X_k]] = \int_0^\infty e^{x[\mu_1(t-1)+\ldots+\mu_n(t-1)]} f(x)dx = \\ = M_{X_k}(\mu_1(t-1)+\ldots+\mu_n(t-1)), \quad (46)$$

где $M_{X_k}(\cdot)$ — производящая функция моментов.

Учитывая, что $X_k \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, и используя выражение для ее производящей функции (43), получим совместную безусловную производящую функцию для $N_1, N_2, \ldots, N_n$:

$$P_{N_1,N_2,\ldots,N_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M_{X_k}(\mu_1(t-1)+\ldots+\mu_n(t-1)) = [1-\beta\mu_1(t-1)+\ldots+\beta\mu_n(t-1)]^{-\alpha}. \quad (47)$$

Перед тем как приступить к изложению алгоритма вычисления функции распределения убытка по портфелю заемщиков из нескольких секторов, сделаем некоторое замечание относительно условной вероятности x_A дефолта заемщика A, которая возникала в (10) и (34). В работах [Gordy (2000)], [Melchiori (2004)] эта условная вероятность определяется следующим образом:

$$x_A = p_A \sum_{k=1}^{n} \theta_{A,k} X_k , \tag{48}$$

где случайная величина x_k имеет гамма-распределение со средним, равным единице, и со стандартным отклонением σ_k.

При сравнении (34) и (48) видно, что эти два представления эквивалентны, поскольку $\dfrac{X_k}{\mu_k}$ в (34) имеет гамма-распределение со средним, равным единице. Однако представление (48) более удобно, поскольку в нем отсутствует константа $\dfrac{1}{\mu_k}$, нормирующая X_k, а значит, нет необходимости ее оценивать. Далее будем придерживаться именно этого представления.

Анализ распределения убытков в модели CR+ с помощью БПФ (случай одного сектора)

1. Используя (15)—(16), при $k = 1$, вычислим оценки параметров гамма-распределения $\Gamma(\alpha_k, \beta_k)$:

$$\alpha_k = \frac{1}{\sigma_k^2}, \; \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{1}.$$

2. Построим вектор размером m (где m — число групп заемщиков, образованных при их группировке по величине номинальных потерь, см. пример 1), на j-м месте которого стоит доля дефолтов в j-м секторе от общего числа дефолтов в кредитном портфеле:

$$f(j) = \frac{\mu_j}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j}, \text{ для } j = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

3. Вычислим БПФ для вектора, полученного на предыдущем шаге:

$$\tilde{f} = FFT(f).$$

4. По формуле для производящей функции частот (47) получим вектор распределения числа дефолтов во всем портфеле:

$$\tilde{f}_Z = \left[1 - \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \beta\right)(\tilde{f} - 1)\right]^{-\alpha}.$$

5. Применим БПФ для восстановления функции распределения величины суммарного убытка по портфелю:

$$f_Z = IFFT(\tilde{f}).$$

Если в нашем кредитном портфеле имеются заемщики из n независимых секторов, портфель необходимо разделить на n подпортфелей, чтобы разбить заемщиков по категориям для учета как систематического, так и специфического риска. В соответствии с методологией CR+ специфический риск влияет на число дефолтов в отдельно взятом секторе, не связанных с воздействием систематических рисков этого сектора, и он может быть диверсифицирован. Поскольку каждый сектор рассматривается как независимый портфель, описанный выше алгоритм может быть применен к каждому такому подпортфелю.

Анализ распределения убытков в модели CR+ с помощью БПФ (случай нескольких секторов)

1. Повторим шаги 1–4 предыдущего алгоритма для всех n секторов;
2. Вычислим поэлементное произведение (умножение комплексных чисел) n векторов, полученных на предыдущем шаге 2:

$$\tilde{h} = \tilde{f}_{Z,1} \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_{Z,n};$$

3. Чтобы восстановить вектор вероятностей — как свертку $\tilde{f}_{Z,1}, \ldots, \tilde{f}_{Z,n}$, применим к $\tilde{h}$ обратную функцию для БПФ.

Оперируя с БПФ, приходится иметь дело с комплексными числами, поэтому характеристическая функция $\tilde{h}$ также будет иметь комплексные коэффициенты. А значит, для получения искомого вектора вероятностей необходимо брать действительную часть. О сравнительном подходе различных методов анализа в методологии CR+ читатель подробнее может прочитать в работе [Melchiori (2004)].

1.6. Эмпирические приложения с использованием пакета GAUSS: CreditRisk+ для трех секторов

Продемонстрируем технику БПФ на примере данных, взятых из работы [Crouhy et al. (2000)], которые представлены в табл. 3.

Таблица 3

Информация о заемщиках

Группа j	**Число заемщиков**	ε_j	μ_j
1	30	1,5	1,5
2	40	8,0	4,0
3	50	6,0	2,0
4	70	25,2	6,3
5	100	35,0	7,0
6	60	14,4	2,4
7	50	38,5	5,5
8	40	19,2	2,4
9	40	25,2	2,8
10	20	4,0	0,4

```
// CreditRisk+ — торговая марка финансовых продуктов Credit Suisse.
// Данные брались из работы ``A comparative analysis of current credit risk
models'',
//Michel Crouhy, Dan Galai, Robert Mark,
// Journal of Banking and Finance 24, (2000),
// sigma_k=0.5 как для сектора A, так и для сектора B
new;cls;
//Определим размер вектора вероятностей
r=10; n=2^r; x=seqa(0,1,n);
//Установим число групп j
m=10; //j=1:m;
//Установим число секторов
sectors=3;
//Ожидаемое число дефолтов для каждой группы j
mu=1.5,4,2,6.3,7,2.4,5.5,2.4,2.8,0.40;
//Интересующие уровни вероятностей для функции
//распределения убытков
percentiles=0.5,0.75,0.95,0.975,0.99,0.995,0.9975,0.999;
percentiles=percentiles zeros(8,1);
//Установим стандартное отклонение для гамма //распределения
u=ones(sectors,1); sigma_k=0.000 001|0.5|0.5;
//Секторные проценты
sector_percentage=zeros(m,sectors);
sector_percentage[.,1]=0.5*ones(m,1);
sector_percentage[1:m/2,2]=0.25*ones(m/2,1);
sector_percentage[m/2 + 1:m,2]=0.5*ones(m/2,1);
sector_percentage[1:m/2,3]=0.25*ones(m/2,1);
//Инициализируем вектор для произведения БПФ
conv_fft=ones(n,1);

for k(1,sectors,1);

//Вычисление вектора вероятностей числа дефолтов в портфеле
severity=zeros(n,1);
severity[1]=0;
severity[2:m + 1]=mu.*sector_percentage[.,k]/sumc(mu.*sector_percentage[.,k]);

//Вычисление БПФ
tt=zeros(n,1);
tt=ffti(severity);

//Вычисление параметров гамма распределения
alfa=u[k,1]^2./sigma_k[k,1]^2;
beta=sigma_k[k,1].^2./u[k,1];
```

```
//Применим безусловную производящую функцию
//частоты и перемножим полученные комплексные числа
conv_fft=conv_fft.*((1-sumc(mu.*sector_percentage[.,k].*beta)*(tt-1)).^-alfa);
endfor;
//Вычислим БПФ
cr=real(fft(conv_fft)); mean=sumc(x.*cr); "Mean" mean;
sd=sqrt(sumc(((x-mean).^2).*cr)); "SD" sd; cr_acum=cumsumc(cr);
//Вычислим квантили функции распределения убытков
for i(1,rows(percentiles),1);
j=1;
do until cr_acum[j] .= percentiles[i,1];
j=j + 1;
endo;
percentiles[i,2]= j;
endfor;
"Квантили:" уровни вероятностей;
//Изобразим функцию распределения убытков
library pgraph; _pdate=0; xlabel("PORTFOLIO LOSSES");
ylabel("Frequency"); xtics(0,1000,100,1);
ytics(-0.002,0.01,0.002,1); xy(x,cr);
```

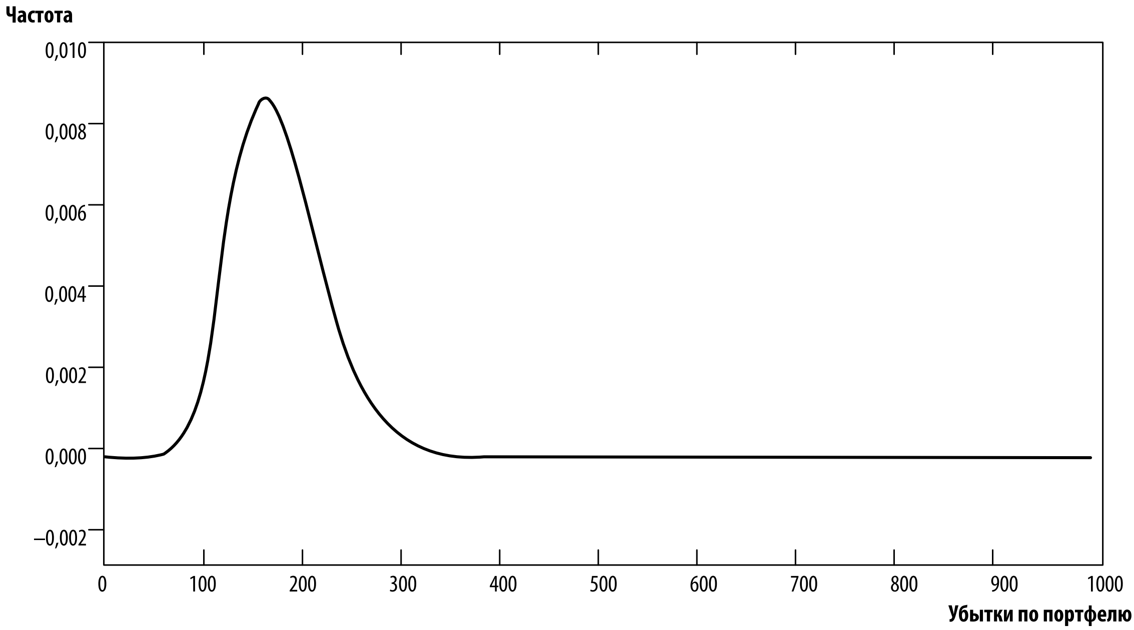

Рис. 1. Распределение вероятностей величин убытков по портфелю, полученное на основании методологии CR+ с использованием БПФ

Среднее, стандартное отклонение и квантили функции распределения убытков должны быть равны:

```
Mean: 176.98 605 ?SD: 48.761 539
Quantiles:
0.50 000 000 173.00 000
0.75 000 000 207.00 000
0.95 000 000 266.00 000
0.97 500 000 288.00 000
0.99 000 000 315.00 000
0.99 500 000 335.00 000
0.99 750 000 354.00 000
0.99 900 000 378.00 000
```

График искомого распределения убытков приведен на рис. 1.

2. Методология CreditPortfolioView

Модель CreditPortfolioView (далее — CPV) впервые была представлена в работе [Wilson (1997a, 1997b)]. CPV представляет собой довольно гибкую многофакторную эконометрическую модель, используемую в качестве достаточно точного инструмента измерения и контроля кредитного риска. Основная идея этой модели заключается в следующем: моделируются совместные распределения числа дефолтов и миграционных вероятностей в различных рейтинговых классах, странах, промышленных секторах в зависимости от основных макроэкономических индикаторов. Моделирование такого рода базируется на предположении о том, что состояние экономики значительно влияет как на вероятности дефолтов, так и на миграционные вероятности из одного рейтингового класса в другой. Существует множество подтверждений тому, что спад в экономике обычно приводит к увеличению числа случаев снижения рейтингов и банкротств (см., например, работу [Crouhy et al. (2000)] и ссылки в ней).

2.1. Базовая модель: CreditPortfolioView Macro

Целью этого раздела является описание того, как с помощью модели CPV *Macro* определять вероятность дефолта заемщиков из разных промышленных секторов. В данной версии модели CPV вероятность дефолта заемщика из j-го сектора в момент времени t определялась с использованием логит-функций:

$$p_{j,t} = \frac{1}{1+e^{-Y_{j,t}}}, \tag{49}$$

где $p_{j,t}$ — условная вероятность дефолта заемщика, принадлежащего j-му промышленному сектору, в момент времени t;

$Y_{j,t}$ — значение макроэкономического индикатора j-го сектора в момент времени t, который строится как взвешенная сумма прошлых и текущих значений основных макроэкономических факторов[2].

[2] Значения весов $\beta_{j,0}, \beta_{j,1}, \ldots, \beta_{j,M}$ предполагаются заданными.

Таким образом:

$$Y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \ldots + \beta_{j,M} X_{j,M,t} + v_{j,t}, \tag{50}$$

где $(X_{j,1,t}, X_{j,2,t}, \ldots, X_{j,M,t})$ — вектор значений рассматриваемых макроэкономических факторов для сектора j в момент времени t;

$v_{j,t}$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ_j^2, при $j = 1, \ldots, K$.

В силу предположения независимости случайных величин $v_{j,t}$, $j = 1, \ldots, K$ имеем:

$$\mathbf{v}_t \sim N(0, \Sigma_v),$$

где $\mathbf{v}_t$ — вектор-столбец размерности $1 \times K$;

Σ_v — диагональная ковариационная матрица размерности $K \times K$.

В работе [Wilson (1997a)] предполагается, что каждый макроэкономический фактор описывается одномерной моделью AR(2):

$$X_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2} X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}, \tag{51}$$

где $\varepsilon_{j,i,t}$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ_i^2, для $i = 1, \ldots, M$.

Поскольку $\varepsilon_{j,i,t}$, $i = 1, \ldots, M$, предполагаются независимыми, получаем:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon),$$

где ε_t — вектор-столбец размерности $1 \times M$;

Σ_ε — диагональная ковариационная матрица размерности $M \times M$.

Таким образом, суммируя все предположения, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_{j,t} &= \frac{1}{1 + e^{-Y_{j,t}}}, \\ Y_{j,t} &= \beta_{j,0} + \beta_{j,1} X_{j,1,t} + \beta_{j,2} X_{j,2,t} + \ldots + \beta_{j,M} X_{j,M,t} + v_{j,t}, \\ X_{j,i,t} &= \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1} X_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2} X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \ldots, M$;

$j = 1, 2, \ldots, K$.

Определим E_t как случайный вектор-столбец размерности $1 \times (K + M)$, компонентами которого являются вектора $\mathbf{v}_t$ и ε_t:

$$E_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \sim N(0, \Sigma),$$

где Σ — матрица размерности $(K + M) \times (K + M)$, определяемая соотношением: $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_v & \Sigma_{v,\varepsilon} \\ \Sigma_{\varepsilon,v} & \Sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$

$\Sigma_{v,\varepsilon}, \Sigma_{\varepsilon,v}$ — соответствующие межковариационные матрицы.

При условии, что оценки всех параметров рассматриваемой модели известны, применим к матрице Σ разложение Холецкого: $\Sigma = AA'$, на основании которого смоделируем распределение вероятности дефолтов $p_{j,t}$. Используя нижнетреугольную матрицу A и смоделированный из многомерного стандартного нормального распределения $(K+M)$-мерный случайный вектор Z_t $(Z_t : N(0, \mathbf{Y}))$, получим смоделированное значение вектора $E_t = AZ_t$. Используя смоделированные значения вектора E_t, получим смоделированные вектора ошибок $v_{j,t}$ и $\varepsilon_{j,i,t}$, которые могут быть использованы для получения вектора смоделированных значений вероятностей дефолтов $\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \ldots, p_{K,t})$. При использовании так называемого *алгоритма сдвига* этот смоделированный вектор вместе с переходными безусловными вероятностями, отвечающими моменту времени t, позволяют смоделировать условную переходную матрицу.

Перед тем, как приступить к описанию этого алгоритма, коротко рассмотрим модификацию CPV модели, предложенную через несколько лет после появления базовой CPV модели.

2.2. Модифицированная модель: CreditPortfolioView Direct

Модель CreditPortfolioView Direct является модификацией базовой модели CreditPortfolioView Macro. Она была предложена в 2001 г. коллективом специалистов компании McKinsey[3]. Ее основной целью являлось получение более простой калибровки модели по сравнению с калибровкой CPV Macro.

В модели CPV Direct вектор вероятностей дефолтов

$$\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \ldots, p_{K,t})$$

может быть напрямую получен из многомерного гамма-распределения.

Параметры гамма-распределения определяются для каждого сектора j методом моментов подобно тому, как это делалось в модели CR+ (см. (15)—(16)). Неизвестно, как оценивается корреляционная матрица многомерного гамма-распределения в этой методологии, но, скорее всего, это делать проще, чем оценивать модель CPV Macro. Отметим, что, поскольку функция плотности гамма-распределения принимает ненулевые значения только для положительных действительных аргументов, теоретически может случиться, что смоделированное значение $p_{j,t}$ окажется больше 1, а это значение, очевидно, не может интерпретироваться как вероятность. В некоторой степени такая ситуация должна напомнить нам об аналогичной проблеме нескольких дефолтов одного заемщика в рамках методологии CreditRisk+ . Однако на практике такие сценарии маловероятны, и обычно они отбрасываются.

Наконец, после того как смоделирован вектор вероятностей дефолтов, вычислим матрицу вероятностей условных переходов при помощи *алгоритма сдвига*[4].

2.3. Алгоритм сдвига

В методологии CPV для каждого сектора j на основании матрицы вероятностей безусловных переходов (полученной от специализированных агентств — например, от агентства

[3] Интересно, что исходная документация, в которой описывалась эта модель, в Интернете более не является общедоступной.

[4] Под условным переходом понимается вероятность перехода заемщика из одной категории в другую при условии, что заемщик принадлежит определенному сектору j.

S&P's или Moody's) и с использованием одного из двух описанных выше методов моделируется матрица вероятностей условных переходов в момент времени t и вероятность дефолта заемщика.

Обозначим через $\overline{M}_t = (\overline{m}_{sh})$ матрицу вероятностей безусловных переходов в момент времени t, где s, h могут меняться от 1 до 8, поскольку число рейтинговых классов равно восьми: AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC и дефолт. Так как состояние дефолта является поглощающим, положим $\overline{m}_{8j} = 0$, при $j = 1, \ldots, 7$, и $\overline{m}_{88} = 1$.

При заданном векторе $\mathbf{p}_t = (p_{1,t}, p_{1,t}, \ldots, p_{K,t})$, алгоритм сдвига состоит из двух шагов:

1. На первом шаге вычисляется так называемый *индекс риска* $r_{j,t}$:

$$r_{j,t} = \frac{p_{j,t}}{\overline{p}_j},$$

где $\overline{p}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_{j,t}$ — безусловная вероятность дефолта заемщика из j-го сектора.

Если индекс риска больше единицы, т. е. экономика j-го сектора находится в состоянии рецессии, тогда матрица вероятностей условных переходов подправляется таким образом, чтобы увеличить вероятности возникновения дефолтов и вероятности понижения рейтингов и при этом уменьшить вероятности повышения рейтингов. В случае экономического подъема поступаем противоположным образом. Поправка должна быть больше для заемщиков из нижних рейтинговых классов, поскольку считается, что их чувствительность к экономической цикличности больше, чем у заемщиков из верхних рейтинговых классов.

2. На втором шаге вычисляется матрица вероятностей условных переходов для каждого сектора в момент времени t, $M_t^{(j)} = (m_{sh}^{(j)})$, где $j = 1, 2, \ldots, K$. Общий вид элементов этой матрицы для сектора j определяется следующим образом:

$$m_{sh}^{(j)} = \alpha_{sh}^{(j)}(r_{j,t} - 1) + \overline{m}_{sh}, \quad j = 1, 2, \ldots, K, \tag{52}$$

где $\alpha_{sh}^{(j)}$, $s, h = 1, 2, \ldots, 8$, — *коэффициенты сдвига*, которые должны калиброваться пользователем методологии CPV.

Вычислив сумму элементов произвольной строки матрицы $M_t^{(j)}$, получим:

$$\sum_{h=1}^{8} m_{sh}^{(j)} = (r_{j,t} - 1)\sum_{h=1}^{8} \alpha_{sh}^{(j)} + \sum_{h=1}^{8} \overline{m}_{sh}.$$

Следовательно, учитывая, что сумма элементов в каждой строке матрицы $M_t^{(j)}$ должна быть равна единице и $\sum_{h=1}^{8} \overline{m}_{sh} = 1$, имеем:

$$\sum_{h=1}^{8} \alpha_{sh}^{(j)} = 0.$$

3. Если правая часть выражения (52) оказывается отрицательным числом, то алгоритм «обнуляет» соответствующую миграционную вероятность $m_{sh}^{(j)}$. Кроме того, предполагается, что коэффициенты сдвига должны удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_{sh}^{j} \geq 0 \text{ для } s < h \text{ и } \alpha_{sh}^{j} \leq 0 \text{ для } s > h.$$

4. Таким образом, получаем K матриц вероятностей условных переходов в момент времени t (по одной матрице в каждом секторе). Более того, можно следовать той же процедуре при вычислении $\mathbf{p}_{t+1}=(p_{1,t+1},p_{2,t+1},\ldots,p_{K,t+1})$ и получить K обусловленных матриц $M_{t+1}^{(j)}$ на момент времени $t+1$. Если умножить $M_t^{(j)}$ на $M_{t+1}^{(j)}$, получим матрицу вероятностей миграции из одного рейтингового класса в другой для фиксированного сектора j за два такта времени (начиная от момента $t-1$).

Подход макромоделирования, описанный выше, рассматривает только одно смоделированное значение для $\mathbf{p}_t$, получаемое при единственной симуляции шоков $v_{j,t}$ и $\varepsilon_{j,i,t}$. Этот процесс должен моделироваться большое количество раз (например, 100 000 раз, что позволит сгенерировать 100 000 оценок $\mathbf{p}_t$ и 100 000 возможных матриц вероятностей условных переходов). Тогда эти смоделированные матрицы переходов $M_t^{(j)}$ можно использовать вместо матриц вероятностей безусловных переходов, построенных по историческим данным. Например, при фиксированном текущем рейтинге отдельно взятого займа (скажем, *BB*) функция распределения стоимости этого займа, построенная по макроскорректированным переходным вероятностям из матрицы $M_t^{(j)}$, может быть использована для расчета ГП на 1 год вперед. Обобщения на случай больших портфелей займов осуществляются подобно тому, как это делалось в методологии CreditMetrics. В этом смысле CPV можно рассматривать как подход, дополняющий CreditMetrics, с помощью которого удается преодолеть некоторые смещения в результате предположения о статичности или стационарности переходных вероятностей[5].

2.4. Эмпирические приложения с использованием пакетов GAUSS и STATA: CreditPortfolioView

Финансовые компании могут столкнуться с двумя типами ситуаций:

- компания обладает достаточно полной информацией относительно каждого сектора j, кредитованием которого она занимается. На основании этой информации нетрудно вычислить вероятности дефолтов заемщиков в зависимости от сектора, к которому они принадлежат;
- компания обладает ограниченной информацией, на основании которой невозможно вычислить вероятности дефолтов заемщиков из каждого рассматриваемого сектора. Такая ситуация весьма распространена в малых финансовых организациях, которые занимаются кредитованием небольшого числа заемщиков.

В первом случае, если предположить, что $\mathbf{v}_t$ и ε_t некоррелированны, система уравнений (49)—(51) может быть оценена методом наименьших квадратов при использовании логит-преобразования:

$$y_{j,t}=\ln\left(\frac{p_{j,t}}{1-p_{j,t}}\right).$$

Таким образом, уравнение (50) линейно зависит от своих параметров. Если же $\mathbf{v}_t$ и ε_t коррелированны, тогда для оценки параметров следует воспользоваться либо методом максимума правдоподобия, либо иными методами (например, обобщенным методом моментов).

Во втором случае невозможно осуществить анализ по секторам, поэтому модель (49)–(50) следует использовать без деления заемщиков по принципу секториальной принадлежности.

[5] Отметим, что полная информация об этом подходе является собственностью компании McKinsey и не распространяется свободно в Интернете.

Следовательно, эта модель может интерпретироваться как логит-модель. Однако следует отметить, что совместное моделирование (49)—(51) нетривиально и труднее обрабатывается. Этим можно объяснить ограниченное использование моделирования такого типа.

Ниже рассматриваются обе эти ситуации: в первой — параметры уравнений (49)—(51) оцениваются для каждого сектора *j*; во второй — имеем дело с панелью малых и средних предприятий (МСП).

```
new;cls;
//Мы предположим, что ошибки процессов авторегрессии
// коррелированны,но независимы от ошибок логит-процесса.
// Мы сделали такой выбор в пользу упрощения, поскольку
//оно позволяет нам использовать для оценки параметров
//модели метод наименьших квадратов. Напомним читателю,
//что это становится невозможным, если ошибки логит-модели
//коррелированы с ошибками процессов  авторегрессии: в этом случае следует
//использовать иные методы оценки параметров модели.
//Например, метод  максимума правдоподобия. Для того чтобы измерить
//величину отклонений оценок параметров от их
//фактических значений, предлагаем читателю произвести небольшое количество
//симуляций методом Монте-Карло для коррелированных ошибок.
//======Моделирование данных из генер.процесса=========
scenarios=1000; //Число сценариев T
//Фактическая ковариационная матрица
vcov=0.11 0.07 0.00,
0.07 0.09 0.00,
0.00 1.14;
//Вычислим разложение Холецкого
c_chol=chol(vcov)';
//Вычислив ошибки для всех сценариев,получим //составленную из них матрицу раз-
мером 3 на T
err_term =c_chol*rndn(cols(vcov),scenarios);
//Транспонируем эту матрицу ошибок
err_term=err_term';
//Инициализация временных рядов
x_1=zeros(scenarios,1);
x_2=zeros(scenarios,1);
logit_p=ones(scenarios,1)*-5;
//Сгенерируем временные ряды для макрофакторов x_1
//и x_2 из процесса AR(2) с заданными коэффициентами:
for i(3,scenarios,1);
x_1[i]= 0.1 + 0.4*x_1[i-1] - 0.2*x_1[i-2] + err_term[i,1];
x_2[i]= 0.1 + 0.5*x_2[i-1] - 0.3*x_2[i-2] + err_term[i,2];
logit_p[i] = -3 - 0.9*x_1[i] + 0.3*x_2[i] + err_term[i,3];
endfor;
```

```
//С использованием логит-функции вычислим вероятности
//дефолтов и изобразим их графически
pd=1/(1 + exp(-logit_p)); library pgraph;_pdate=0;
ylabel("Probability of Default"); xy( seqa(1,1,rows(pd)) ,pd);

//================Процесс оценивания================
//Оценим три маргинальные модели с использованием
//МНК. Еще раз подчеркнем, что это возможно только
//в предположении, что ошибки логит-процесса не зависят
//от других ошибок. Создадим лагированные переменные
//для макрофакторов.
//В случае наличия пропущенных наблюдений поставим на соответствующих местах
// нули либо "выбросим" эти пропуски.
reg_x1=lagn(x_1,1) lagn(x_1,2);
reg_x2=lagn(x_2,1) lagn(x_2,2);
//Оценим параметры модели методом наименьших квадратов
{nam1,m1,b1,stb1,vc1,std1,sig1,cx1,rsq1,resid1,dbw1}= ols(0,x_1,reg_x1);
{nam2,m2,b2,stb2,vc2,std2,sig2,cx2,rsq2,resid2,dbw2}= ols(0,x_2,reg_x2);
{nam_p,m_p,b_p,stb_p,vc_p,std_p,sig_p,cx_p,rsq_p,resid_p,dbw_p}=
ols(0,logit_p,x_1 x_2);
```

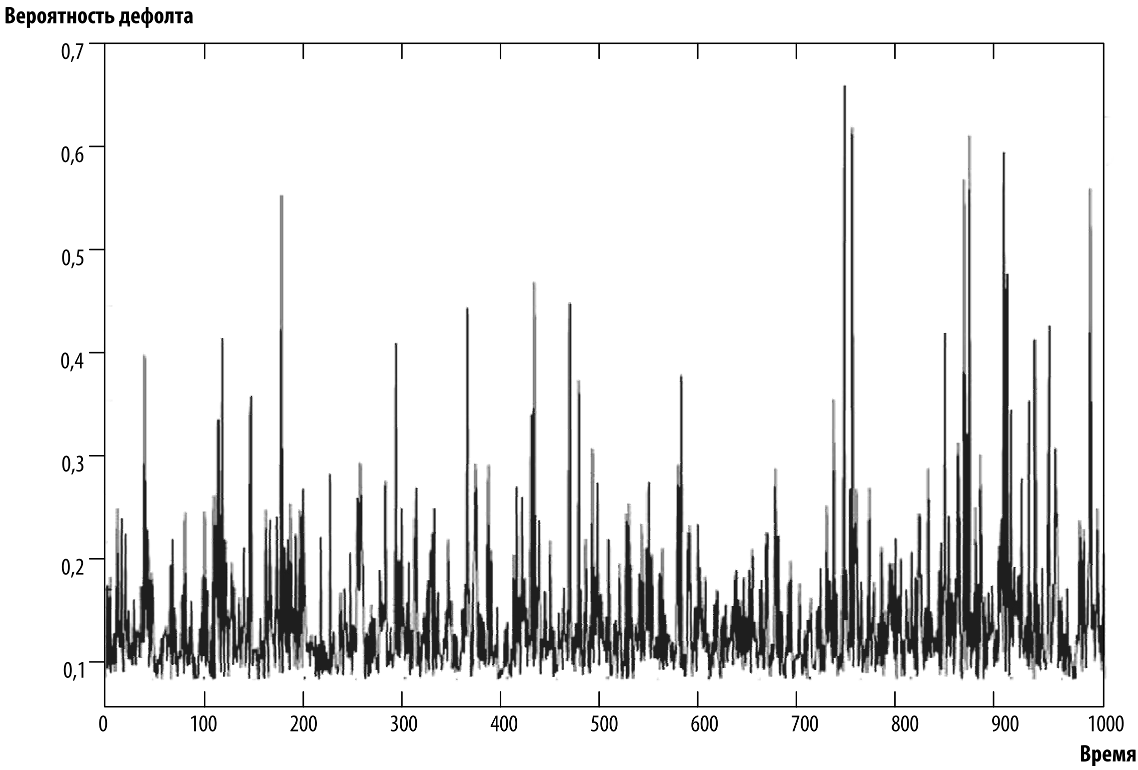

Рис. 2. Смоделированные вероятности дефолтов для сектора *j*

Результаты оценивания для двух макрофакторов и логит-модели соответственно должны быть близки к следующим результатам:

Variable	Estimate	Standard Error	*t*-value	Prob > |t|	Standardized Estimate	Cor. With Dep. Var.
CONSTANT	0,086	0,012	7,432	0,000	—	—
X1	0,354	0,031	11,315	0,000	0,354	0,302
X2	–0,169	0,031	–5,418	0,000	–0,169	–0,062
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Variable	**Estimate**	**Standard Error**	***t*-value**	**Prob > |t|**	**Standardized Estimate**	**Cor. With Dep. Var.**
CONSTANT	0,089	0,010	8,505	0,000	—	—
X1	0,498	0,030	16,411	0,000	0,498	0,385
X2	–0,293	0,030	–9,649	0,000	–0,293	–0,101
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
Variable	**Estimate**	**Standard Error**	**t-value**	**Prob > |t|**	**Standardized Estimate**	**Cor. With Dep. Var.**
CONSTANT	–3,005	0,036	–83,239	0,000	—	—
X1	–0,916	0,130	–7,052	0,000	–0,300	–0,244
X2	0,260	0,136	1,906	0,057	0,081	–0,127

Во второй ситуации рассмотрим временной ряд, составленный из 1000 наблюдений по 318 МСП за период с 1996 по 2004 г. Используем два финансовых коэффициента и два макрофактора (ВВП и 12-месячную процентную ставку). Переменная *Solvency* информирует аналитика относительно того, оказалась та или иная компания в состоянии дефолта или нет. В целях безопасности информация относительно названий МСП и финансовых коэффициентов не раскрывается.

Перед тем как использовать возможности пакета STATA удостоверьтесь, что в нем установлена GLLAMM библиотека. Инсталлировать эту библиотеку можно при помощи следующей команды:

```
net install gllamm, replace
```

Для получения более подробной информации см. веб-сайт www.gllamm.org.

```
*Задание пространственных переменных и временных рядов
tsset id years
*Оценка логит-функции при помощи команд библиотеки GLLAMM.
gllamm solvency finratio1 finratio2 macro1 macro2, i(id) l(logit) f(binom)
number of level 1 units = 999
number of level 2 units = 318
Condition Number = 6209.3743
gllamm model
log likelihood = -247.17 223
```

solvency	Coef.	Std. Err	z	P > |z|	[95% Conf.	Interval]
finratio1	–2,592	1,473	–1,760	0,.078	–5,479	0,295
finratio2	1,029	1,822	0,570	0,572	–2,541	4,600
macro1	0,150	0,067	2,220	0,026	0,018	0,281
macro2	–0,364	0,231	–1,570	0,116	–0,817	0,090
_cons	–15,986	7,424	–2,150	0,031	–30,536	–1,435

```
Variances and covariances of random effects
------------------------------------------------------------------------------
***level 2 (id)
var(1): 2.995e-18 (9.672e-10)
```

Если необходимо смоделировать случайный отклик (т. е. в нашем случае *Solvency*), можно воспользоваться командой gllasim:

```
gllasim solvency_simul
```

Смоделированные отклики будут сохранены в *solvency_simul*. Переоценив модель с учетом смоделированных откликов, получим:

```
gllamm solvency finratio1 finratio2 macro1 macro2, i(id) l(logit) f(binom)
number of level 1 units = 999 number of level 2 units = 318
Condition Number = 6253.9837
gllamm model
log likelihood = -265.1514
```

solvency	Coef.	Std. Err	z	P > |z|	[95% Conf.	Interval]
finratio1	–3,086	1,587	–1,940	0,052	–6,197	0,026

Окончание табл.

solvency	Coef.	Std. Err	z	P > |z|	[95% Conf.	Interval]
finratio2	1,560	1,928	0,810	0,418	–2,219	5,338
macro1	0,168	0,063	2,640	0,008	0,043	0,292
macro2	–0,464	0,219	–2,120	0,034	–0,893	–0036
_cons	–17,554	7,046	–2,490	0,013	–31,363	–3,745

```
Variances and covariances of random effects
-----------------------------------------------------------------------------
***level 2 (id)
var(1): 2.366e-24 (9.461e-13)
```

2.5. Сравнительный анализ многомерных моделей кредитного риска

В предыдущих разделах представлены основные особенности некоторых наиболее известных многомерных моделей кредитного риска, описание которых общедоступно. На первый взгляд эти модели кажутся весьма разными, что, думается, приводит к несовпадению сгенерированных убытков и оценок границ потерь (ГП). Однако аналитически и эмпирически эти модели не столь различны. Подтверждения структурного сходства даны в работах [Gordy (2000)], [Koyluoglu, Hickman (1999)], [Crouhy et al. (2000)].

Сравним 4 рассмотренные модели, выделив их ключевые отличия и сходства. В табл. 4 представлены восемь характеристик, по которым осуществлено сравнение описанных ранее многомерных моделей кредитного риска.

Таблица 4

Сравнительный анализ многомерных моделей кредитного риска

Сравниваемые характеристики	**CreditMetrics (J. P. Morgan)**	**CreditPortfolio-View (McKinsey)**	**CreditRisk+ (CSFP)**	**KMV (Moody's)**
Корреляция кредитных событий	Многомерное нормальное распределение для цен активов	Факторный анализ Корреляции остаточного риска	Предположение о независимости или корреляция с ожидаемой вероятностью дефолта	Многомерное нормальное распределение для цен активов
Кредитные события	Кредитная миграция	Кредитная миграция, обусловленная макроэкономическими факторами	Случайная вероятность дефолта	Расстояние до дефолта: структурная и эмпирическая задолженность

Окончание табл. 4

Сравниваемые характеристики	CreditMetrics (J. P. Morgan)	CreditPortfolio-View (McKinsey)	CreditRisk+ (CSFP)	KMV (Moody's)
Необходимые данные	Историческая матрица переходов, кредитные спреды и кривые доходности, НВП(Д), корреляции, фактическая задолженность	Матрица переходов, макроэкономические переменные, кредитные спреды, НВП(Д), фактическая задолженность	Вероятности дефолтов и волатильность, макрофакторы, НВП(Д), фактическая задолженность	Цены активов, кредитные спреды, корреляции, фактическая задолженность
Численный подход	Моделирование или аналитический подход	Моделирование	Аналитическое решение	Аналитическое решение
Нормы восстановления	Случайные	Случайные	Постоянные	Постоянные или случайные
Определяющие риск факторы	Стоимость активов	Макроэкономические факторы	Ожидаемые вероятности дефолтов	Стоимость активов
Волатильность кредитных событий	Постоянная	Цикличная	Переменная	Переменная

Список литературы

Abramowitz M., *Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas. Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover Publications, 1972.

Credit Suisse Financial Products. CreditRisk+ : a credit risk management framework. Technical document, 1997.

Crouhy M., *Galai D.* and *Mark R.* A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models // *Journal of Banking and Finance*. 2000. № 24(1–2). P. 59–117.

Gordy M. A comparative anatomy of credit risk models // *Journal of Banking and Finance*. 2000. № 24(1–2). P. 119–149.

Koyluoglu H. and *Hickman A.* Reconcilable differences // *RISK*. 1998. № 11(10). P. 56–62.

Melchiori M. CreditRisk+ by Fast Fourier Transform. YieldCurve, 2004. July.

Wilson T. Measuring and Managing Credit Portfolio Risk: Part I: Modelling Systematic Default Risk // *The Journal of Lending and Credit Risk Management*. 1997a. July. P. 61–72.

Wilson T. Measuring and Managing Credit Portfolio Risk: Part II: Portfolio Loss Distributions // *The Journal of Lending and d Credit Risk Management*. 1997b. Aug. P. 67–78.

Wilson T. Portfolio Credit Risk // *Federal Reserve Bank of New New York Policy Review*. 1998. Oct. P. 71–82.