Деан Фантаццини

Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском

Часть 4: Управление кредитным риском (*продолжение*)

Во 2-м номере нашего журнала за 2008 г. была начата серия консультационных публикаций Деана Фантаццини, посвященных эконометрическому анализу финансовых данных в задачах управления риском. В этом номере публикуется уже четвертая часть этой серии. В ней продолжается тема кредитного риска. В частности, после описанных в предыдущем номере журнала одномерных моделей кредитного риска автор анализирует многомерные модели, позволяющие оценивать вероятность дефолта «портфеля заемщиков». Завершение этой темы и всей серии консультаций Д. Фантаццини — в следующем номере журнала.

Перевод оригинального англоязычного текста на русский язык, как и всех предыдущих частей этой серии консультаций, выполнен А. В. Кудровым под научной редакцией С. А. Айвазяна.

В этом разделе мы ответим на следующие вопросы:
- Как следует оценивать неожидаемые убытки $U(L)$ кредитных портфелей?
- Как следует оценивать дефолтную или миграционную зависимость?

За последние 10 лет был обнародован ряд интересных подходов к моделированию кредитного риска. Вообще говоря, существует четыре основных метода для построения моделей кредитных портфелей. Предлагаем их читателю.

Модели кредитной миграции. Подход CreditMetrics, предложенный J. P. Morgan в 1997 г., основан на анализе кредитной миграции, т. е. вероятности перемещения из одного рейтингового класса в другой (включая дефолт, являющийся поглощающим состоянием) в течение заданного периода времени, который обычно берется равным 1 году. В подходе CreditMetrics оценивается функция распределения на 1 год вперед для стоимости кредитного портфеля, которая меняется в результате кредитной миграции. Этот подход предполагает, что матрица перехода, оцененная по историческим данным нескольких тысяч рейтингуемых облигаций, достаточно точно описывает вероятность миграции из одного рейтингового класса в другой.

Структурные модели. «Прародителем» большинства этих моделей является *модель Мертона*, которая постулирует механизм дефолта с точки зрения его связи со стоимостью активов компании и ее обязательств, как мы видели в [Фантаццини Д. (2008)]. Корпорация MV (которая сейчас принадлежит рейтинговому агентству) развила методологию кредитного риска и создала большую базу данных для расчета вероятностей дефолта и вычисления функции распределения убытков с учетом рисков дефолта и рисков миграции. KMV модель отличается от CreditMetrics модели тем, что она строится на основе так называемой *ожидаемой частоты дефолтов* для каждого эмитента, а не на основе средних частот переходов, построенных по историческим данным, как это делается в модели CreditMetrics.

Актуарные модели. CreditRisk + представляет собой подход, предложенный Credit Suisse в конце 1997 г. и основанный на результатах актуарной науки. В этом подходе основное внимание уделяется описанию вероятности дефолта, а не кредитной миграции. Кроме того, в отличие от KMV и CreditMetrics подходов, в CreditRisk+ игнорируются причины дефолта. Однако этот подход — единственный, который позволяет получить решения в формальном виде, а не с помощью методов стохастического моделирования, что значительно уменьшает количество необходимых вычислительных ресурсов.

Макроэкономические модели. В работах [Wilson T. (1997a, 1997b)] предложена модель, названная CreditPortfolioView, которая направлена на улучшение подхода кредитной миграции путем допущения того, что вероятности миграций могут меняться в зависимости от кредитных циклов. При этом подходе вероятности дефолтов являются функциями макропеременных (безработица, уровень процентных ставок и др.), которые предполагаются факторами, определяющими кредитные циклы.

В моделях CreditMetrics и KMV, предложенной Moody's, используются похожие предположения, основанные на модели Мертона и факторном анализе. Несмотря на то что эти две модели концептуально аналогичны, вторая из них сложнее, чем первая, и для ее построения требуется больше данных. Вот почему KMV модель на данный момент наиболее популярна. Обследование рынка в 2004 г. показало, что 40 из 50 крупнейших финансовых организаций используют именно этот подход. Начнем наш анализ с CreditMetrics модели, которая в свое время стала серьезным прорывом в этой области и открыла путь для развития моделей кредитных портфелей.

1. Модель CreditMetrics

Модель CreditMetrics ([Gupton, Finger et al. (1997)]) представляет собой методологию расчета границы потерь (ГП) для финансовых инструментов, которые не котируются на финансовых рынках (например, банковские ссуды и корпоративные займы). Модель CreditMetrics принадлежит к классу моделей с корректировкой по рынку, в которых учитывается, что убыток по кредиту возможен не только в результате дефолта, но и в случае понижения рейтинга. В частности, уровни рейтинга определяются в соответствии с рейтинговыми классами одного из основных рейтинговых агентств (Moody's или Standard & Poor's). Следовательно, в модели CreditMetrics используется дискретная классификация возможных рейтинговых уровней. Кроме того, модель CreditMetrics является безусловной моделью: оценки, даваемые ею, основаны на исторической информации, которая, в свою очередь, не корректируется в зависимости от текущей экономической ситуации.

Информационное множество в рассматриваемой модели состоит из следующих элементов:

- *вероятности миграции кредитных рейтингов*, т. е. вероятности изменения кредитного качества некоторого рейтингуемого обязательства во всех возможных условиях за фиксированный промежуток времени. Эти вероятности представлены в *матрице кредитных переходов*, публикуемой рейтинговыми агентствами:
- *нормы восстановления* в случае дефолта;
- *форвардные ставки*;
- *матрица корреляций между займами* (когда рассматриваются два займа и более).

Матрица перехода (матрица вероятностей миграции кредитных рейтингов) — это таблица, в которой представлены вероятности того, что текущий рейтинг заемщика через определенный промежуток времени (например, через год) будет повышен, понижен или что заемщик окажется неплатежеспособным. Вероятности обычно рассчитываются как среднее значение частот миграций заемщиков из одного рейтингового класса в другой в течение заданного промежутка времени. Помимо матриц перехода, рейтинговые агентства публикуют нормы восстановления, а корреляционную матрицу между займами рассчитывает только компания J. P. Morgan. Форвардные ставки находятся из кривых доходностей для займов, и их расчет также осуществляется компанией J. P. Morgan. Если задано указанное выше информационное множество, можно вычислить математическое ожидание, дисперсию и границу потерь (некоторого уровня доверия) стоимости кредитного портфеля.

1.1. Оценка кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства

Основная идея процедуры оценки состоит в том, что состояние кредитного качества любого долгового обязательства, имеющего рейтинг, может измениться с вероятностями, определяемыми матрицей перехода. Таким образом, стоимость долгового обязательства равна взвешенной сумме стоимостей этого долгового обязательства при всех возможных рейтингах, взвешенных вероятностями перехода из текущего в соответствующий взятой стоимости рейтинг. Чтобы оценить долговое обязательство, необходимо выполнить следующую процедуру:

- определить кредитный рейтинг рассматриваемого заемщика и соответствующую ему переходную матрицу;
- зафиксировать временной период. Довольно часто он берется равным 1 году;
- оценить стоимость долгового обязательства при всех возможных кредитных рейтингах. **Если используются данные рейтингового агентства S&P, следует учесть, что рейтинговая система этого агентства состоит из семи классов и дефолтной позиции**;
- оценить математическое ожидание стоимости долгового обязательства в конце следующего периода, причем в качестве его оценки берется взвешенное среднее стоимостей долговых обязательств для всех рейтингов с весами, равными соответствующим вероятностям из матрицы перехода;
- наконец, для стоимости долгового обязательства вычислить границу потерь необходимого уровня.

Наиболее сложным шагом в этой процедуре, конечно, является шаг 3. В целом процедура оценки может быть разделена на два случая: один случай — дефолт, другой — увеличение или понижение кредитного рейтинга.

Если заемщик оказывается в состоянии дефолта, то основной целью является выяснение того, какая доля требований по кредиту или кредитам может быть возмещена через процедуры банкротства заемщика. В исходной CreditMetrics модели предполагается, что возмещение кредиторам осуществляется в соответствии с их классом приоритета. Однако в относительно недавних исследованиях предлагается отказаться от этого предположения и упростить анализ норм восстановления, используя для их описания во всех случаях бета-распределение со средним, равным 50%, и дисперсией, равной 20%.

Для того чтобы вычислить границу потерь на конец следующего периода, необходимо рассчитать текущую стоимость долгового обязательства. В случае долговых обязательств используемые дисконтные процентные ставки берутся равными соответствующим значениям на кривой доходности. Долговые обязательства с разными кредитными рейтингами дисконтируются с процентными ставками, взятыми из различных кривых доходностей, в зависимости от их рейтингового класса.

При условии, что ставки определены, общая формула для приведенной стоимости долгового обязательства со сроком погашения через один год принимает следующий вид:

$$V = C + \frac{C}{1+f_1} + \frac{C}{(1+f_2)^2} + \frac{C}{(1+f_3)^3} + \ldots + \frac{B+C}{(1+f_n)^n}, \qquad (1)$$

где C — величина купона;

B — номинальная стоимость долгового обязательства;

f_i — дисконтные процентные ставки, определенные из кривой доходности.

1.2. Пример оценки кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства

Предположим, что компания, имеющая рейтинг «BBB», выпускает долговые обязательства номинальной стоимостью 100 млн евро со сроком погашения через 5 лет и ежегодными купонными платежами, составляющими 6% номинальной стоимости. Кроме того, предположим, что вероятности миграции кредитного рейтинга для компании, имеющей рейтинг «BBB», равны значениям, указанным в табл. 1.

Таблица 1

Вероятности миграции кредитного рейтинга для компаний, имеющих текущий рейтинг «BBB»

Рейтинг в конце года	Вероятность, %
AAA	0,02
AA	0,33
A	5,95

Окончание табл. 1

Рейтинг в конце года	Вероятность, %
BBB	86,93
BB	5,30
B	1,17
CCC	0,12
Дефолт	0,18

Для этой компании вероятность остаться в том же рейтинговом классе равна 86,93%, вероятность улучшить кредитное качество до рейтинга наивысшего рейтинга «ААА» — 0,02%, а вероятность банкротства этой компании в течение 1 года — 0,18%. Матрица перехода для всех рейтинговых классов представлена в табл. 2.

Таблица 2

Матрица перехода: вероятности миграций кредитного рейтинга из одного класса в другой в течение 1 года

Текущий рейтинг	Рейтинг в конце года, %							
	AAA	***AA***	***A***	***BBB***	***BB***	***B***	***CCC***	**Дефолт**
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	1,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Источник: [Gupton, Finger et al. (1997)].

После того как зафиксирован временной горизонт кредитного риска, который часто берется равным 1 году, необходимо специфицировать форвардную модель ценообразования. Оценка кредитного портфеля, составленного из одного долгового обязательства, строится на основании кривой доходности, соответствующей рейтингу его эмитента. Спотовая кривая бескупонного обязательства используется для определения текущей спотовой стоимости этого долгового обязательства. Тогда как форвардная цена долгового обязательства через 1 год вычисляется на основании форвардной кривой для бескупонного долгового обязательства, процентные ставки которой затем применяются к остаточным денежным потокам за период с конца первого года от момента выпуска долгового обязательства до срока его погашения.

В нашем примере были рассмотрены одногодичные значения доходностей, полученных из форвардной кривой для бескупонного долгового обязательства, из документации CreditMetrics модели (соответствующие доходности представлены в табл. 3).

Таблица 3

Значения доходностей из форвардной кривой через 1 год для бескупонных долговых обязательств из всех рейтинговых классов, %

Рейтинговый класс	Год 1	Год 2	Год 3	Год 4
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,05	14,03	13,52

Источник: [Gupton, Finger et al. (1997)].

Отметим, если эмитент оказывается в состоянии дефолта в конце года, это не означает, что не удастся возместить хотя бы часть суммы долга, так как инвестор может восстановить определенный процент выданных в долг средств, который зависит от степени приоритетности долга. Такие нормы восстановления оцениваются рейтинговыми агентствами по историческим данным. В качестве примера в табл. 4 представлены средние и стандартные отклонения норм восстановления для долговых обязательств из разных классов приоритетности, оценки которых получены компанией Moody's в 1996 г.

Таблица 4

Средние и стандартные отклонения норм восстановления в зависимости от степени приоритетности долга (% от номинальной стоимости)

Класс приоритетности	Среднее отклонение	Стандартное отклонение
Приоритетные обеспеченные обязательства	53,80	26,86
Приоритетные необеспеченные обязательства	51,13	25,45
Приоритетные субординированные кредиты	38,52	23,81
Субординированные кредиты	32,74	20,18
Неприоритетные субординированные кредиты	17,09	10,90

Источник: [Carty, Lieberman (1996)], [Gupton et al. (1997)].

Предполагается, что рассматриваемый заем принадлежит к классу приоритетных необеспеченных обязательств, поэтому в случае дефолта его норма восстановления в среднем равна 51,13% номинальной стоимости.

С этой точки зрения, если предположить, что компания сохранит уровень рейтинга «BBB» через 1 год, форвардная цена рассматриваемого ее долгового обязательства через 1 год составит:

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{1+0{,}0410} + \frac{6}{(1+0{,}0467)^2} + \frac{6}{(1+0{,}0525)^3} + \frac{100+6}{(1+0{,}0563)^4} = 107{,}55. \qquad (2)$$

Если осуществить аналогичные вычисления в предположении, что через год компания изменит свой кредитный рейтинг, получим следующую таблицу стоимостей рассматриваемого займа (табл. 5).

Таблица 5

Форвардная цена долгового обязательства с текущим рейтингом «BBB» через 1 год, вероятности различных состояний и изменение стоимости этого обязательства

Рейтинговый класс к концу 1-го года	Стоимость, долл.	Вероятность изменения рейтинга, %	Изменение стоимости ΔV, долл.
AAA	109,37	0,02	1,82
AA	109,19	0,33	1,64
A	108,66	5,95	1,11
BBB	107,55	86,90	0,00
BB	102,02	5,30	–5,53
B	98,10	1,17	–9,45
CCC	83,64	0,12	–23,91
Дефолт	51,13	0,18	–56,42

Источник: [Gupton et al. (1997)].

Используя распределение изменений стоимости рассматриваемого займа, задаваемое двумя последними столбцами табл. 5, можно вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение ΔV. В результате получим значения, равные –0,46 и 2,99 соответственно. Граница потерь уровня 1%-го доверительного уровня для этого займа равна –23,91, что соответствует значительно большим потерям, чем граница потерь, вычисленная в предположении нормальности функции распределения ΔV (которая равна: $-0{,}46 - 2{,}33 \cdot 2{,}99 = -7{,}43$, где 2,33 является 0,01-квантилью стандартного нормального распределения).

1.3. Оценка кредитного портфеля, составленного из двух долговых обязательств

Основная цель модели CreditMetrics — оценка не стоимости одного-единственного кредитного инструмента, а портфеля таких инструментов. В сущности, модель CreditMetrics строится на следующих трех основных предположениях.

• В рамках одного кредитного класса все эмитенты долговых обязательств с точки зрения кредитного качества однородны. Следовательно, они характеризуются одной и той же матрицей вероятностей переходов.

• Матрица вероятностей переходов, отвечающая некоторой компании, зависит только от рейтинговой категории, к которой принадлежит эта компания на момент оценки ее долговых обязательств.

• Переходные вероятности стационарны, т. е. не зависят от времени.

Рассмотрим следующую задачу: каким образом, зная характер каждого отдельного кредитного инструмента, описать характер портфеля этих инструментов? Если бы мы предположили, что изменения стоимостей различных инструментов, составляющих рассматриваемый портфель, взаимно независимы, то совместная вероятность события, состоящего в изменении стоимостей данных активов, была бы равна произведению соответствующих маргинальных вероятностей для каждого актива, вычисляемых на основании элементов матрицы переходов этого актива. Однако, к сожалению, такое предположение нереалистично. К примеру, общеизвестно, что среди компаний, работающих в одном индустриальном секторе или/и геополитическом регионе, корреляции выше или что корреляции значительно изменяются в зависимости от состояния экономики.

Если корреляции среди заемщиков отличны от нуля, необходимо вычислить совместную миграционную вероятность, учитывая при этом следующее:

• кредитное качество заемщиков может как улучшаться, так и ухудшаться;
• существуют корреляции между рейтинговыми миграциями.

В методологии CreditMetrics указанные выше особенности учитываются следующим образом.

• В модели CreditMetrics оценка кредитного рейтинга связывается с изменениями стоимостей/доходностей активов, что весьма схоже с методологией, основанной на модели Мертона. В частности, CreditMetrics обобщает последнюю модель на случай *n «этапов к дефолту»* (ЭД), где *n* — количество рейтинговых классов.

• В отличие от KMV модели (см. ниже), в модели CreditMetrics для оценки стоимости компании, которая ненаблюдаема, используется стоимость акций этой компании.

Процедура оценки портфеля кредитных обязательств на основании модели CreditMetrics состоит из четырех шагов.

Шаг 1. На основании вероятностей миграций для двух рассматриваемых заемщиков вычисляются пороговые уровни (Z), отвечающие каждому рейтинговому классу. Эталонной здесь является модель, предложенная Мертоном: динамика стоимости активов компании V_t описывается стандартным геометрическим броуновским движением, т. е.

$$V_t = V_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\sqrt{t} Z_t\right],\ Z_t \sim N(0, 1), \tag{3}$$

где μ — ожидаемая стоимость для V_t;

σ — волатильность для V_t.

Случайная величина V_t имеет логнормальное распределение с математическим ожиданием $E(V_t) = V_0 \exp(\mu t)$. Методология CreditMetrics обобщает модель Мертона путем «нарезания» функции распределения стандартизированной логдоходности на полосы так, что они в точности воспроизводят миграционные частоты, представленные в матрице переходов.

На рис. 1 в дополнение к порогу, соответствующему дефолту, изображены также пороги, отвечающие всем другим рейтинговым классам. Значение логдоходности стоимости активов компании за некоторый период, лежащее между двумя ближайшими порогами, определяет рейтинг этой компании в конце рассматриваемого периода.

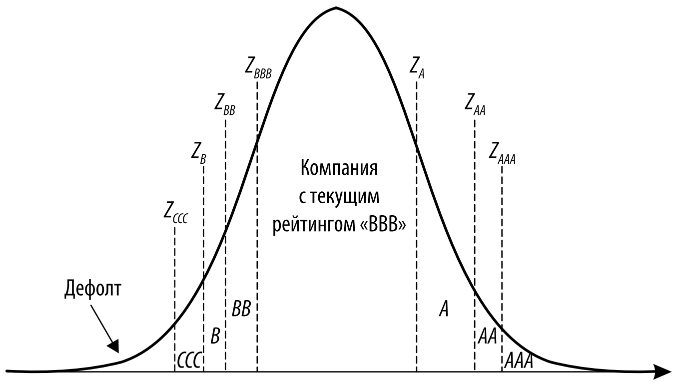

Рис. 1. **Обобщение модели Мертона с учетом изменений рейтинга: функция плотности распределения нормированных логдоходностей для стоимости активов компании с рейтингом «BBB»**

В обобщенной модели Мертона предполагается, что стандартизированные для всех заемщиков логдоходности за некоторый фиксированный промежуток времени имеют стандартное нормальное распределение $\Phi(0,1)$, и нормировка, определяющая стандартизацию, для всех заемщиков из одного рейтингового класса одна и та же. Обозначим $P(DEF)$ — вероятность дефолта для некоторого заемщика из рейтингового класса «BBB», тогда критический уровень V_{DEF} стоимости активов заемщика, отвечающий дефолту, определяется соотношением: $P(DEF) = P[V_t \le V_{DEF}]$. Зная вероятность дефолта, можно найти для стандартизированной логдоходности порог Z_{CCC}, соответствующий дефолту, поскольку площадь под графиком плотности стандартизированной логдоходности на интервале $(-\infty; Z_{CCC}]$ равна $P(DEF)$. Используя выражение (3), перепишем вероятность возникновения дефолта в момент времени t в терминах стандартизированных логдоходностей Z_t. Получим:

$$\begin{aligned} P(DEF) &= P\left[\frac{\ln\left(\dfrac{V_{DEF}}{V_0}\right) - \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \ge Z_t\right] \\ &= P\left[Z_t \le -\frac{\ln\left(\dfrac{V_0}{V_{DEF}}\right) + \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = \Phi(-d_2), \end{aligned} \tag{4}$$

где стандартизированная логдоходность $Z_t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{V_t}{V_0}\right) - \left(\mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$ имеет стандартное нормальное распределение $\Phi(0, 1)$.

Z_{CCC} — это квантиль стандартного нормального распределения, отвечающий кумулятивной вероятности P_{DEF}, а критический уровень стоимости активов заемщика V_{DEF}, соответствующий дефолту, определяется следующим образом:

$$Z_{CCC} = -d_2.$$

Следует отметить, что совместные вероятности миграций необходимы только для определения таких порогов Z, для вычисления которых не нужно знать стоимость активов, оценивать математическое ожидание или дисперсию. Пороговые значения рассчитываются с использованием обращения стандартной нормальной функции распределения и ассоциированы кумулятивным вероятностям: например, Z_B — пороговый уровень, соответствующий кумулятивной вероятности нахождения рейтинга либо на уровне CCC, либо в состоянии дефолта.

Шаг 2. После того как определены пороговые уровни, при помощи двумерного нормального распределения вычисляются совместные вероятности миграций, где в качестве входных параметров используются пороговые уровни и коэффициенты корреляции между логдоходностями стоимостей активов.

Шаг 3. Теперь переходная матрица строится с учетом $(n+1)\cdot(n+1)$ возможных состояний. Это означает, что стоимость портфеля, составленного из двух долговых обязательств, может принимать $(n+1)^2$ значений, причем каждое значение рассчитывается согласно ранее изложенной процедуре для оценки единственной позиции.

Шаг 4. Наконец, используя распределение (дискретное) возможных стоимостей портфеля, можно оценить математическое ожидание, стандартное отклонение, а также когерентные меры риска его стоимости.

1.4. Пример оценки портфеля, составленного из двух долговых обязательств

Предположим, наш портфель состоит из двух долговых обязательств: первое — долговое обязательство компании, имеющей рейтинг «BBB», номинальной стоимостью 100 млн евро со сроком погашения через 5 лет и ежегодными купонными платежами, составляющими 6% номинальной стоимости, второе — долговое обязательство компании, имеющей рейтинг «A», номинальной стоимостью 100 млн евро со сроком погашения через 3 года и ежегодными купонными платежами, составляющими 5% номинальной стоимости. Используя ранее описанную методологию для оценки портфеля из единственной кредитной позиции и данные, представленные в табл. 3 и 4, получаем следующие результаты для второго долгового обязательства (табл. 6).

В рамках модели CreditMetrics утверждается, что компания оказывается неплатежеспособной в случае, если стандартизированная логдоходность стоимости ее активов меньше, чем пороговое значение Z_{CCC}. Компания будет иметь рейтинг «CCC», если значение ее стандартизированной логдоходности стоимости активов будет принадлежать полуинтервалу

$(Z_{CCC}; Z_B]$, и т. д. Используя пороговые уровни (см. последний столбец табл. 7), можно преобразовать табл. 1 к виду табл. 8.

Таблица 6

Форвардная стоимость долгового обязательства с рейтингом «A» на конец 1-го года, вероятности различных состояний и изменение его стоимости

Рейтинговый класс	Стоимость в конце 1-го года, долл.	Вероятность состояния, %	Изменение стоимости ΔV, долл.
AAA	106,59	0,09	0,29
AA	106,49	2,27	0,19
A	106,30	91,05	0,00
BBB	105,64	5,52	–0,66
BB	103,15	0,74	–3,15
B	101,39	0,6	–4,91
CCC	88,71	0,01	–17,59
Дефолт	51,13	0,06	–55,17

Источник: [Gupton et al. (1997)].

Таблица 7

Вероятности миграции кредитного рейтинга для компании с рейтингом «BBB» и соответствующие вероятности в рамках обобщенной модели Мертона

Рейтинг в конце 1-го года	Вероятности из матрицы перехода, %	Вероятности, соответствующие модели стоимости активов
AAA	0,02	$1-\Phi(Z_{AAA})$
AA	0,33	$\Phi(Z_{AAA})-\Phi(Z_{AA})$
A	5,95	$\Phi(Z_{AA})-\Phi(Z_{A})$
BBB	86,93	$\Phi(Z_{A})-\Phi(Z_{BBB})$
BB	5,30	$\Phi(Z_{BBB})-\Phi(Z_{BB})$
B	1,17	$\Phi(Z_{BB})-\Phi(Z_{B})$
CCC	0,12	$\Phi(Z_{B})-\Phi(Z_{CCC})$
Дефолт	0,18	$\Phi(Z_{CCC})$

Для компании с текущим рейтингом «BBB» пороговый уровень Z_{CCC} определяется следующим образом:

$$Z_{CCC} = \Phi^{-1}(0{,}0018) = -2{,}91,$$

а пороговый уровень Z_B:

$$Z_B = \Phi^{-1}(0{,}0018 + 0{,}0012) = -2{,}75.$$

Аналогично как для заемщиков с рейтингом «BBB», так и для заемщиков с рейтингом «A» получаем таблицу определяемых порогами полос, каждая из которых соответствует определенному рейтингу (табл. 8).

Таблица 8

Переходные вероятности и пороги кредитного качества для заемщиков с текущими рейтингами «BBB» и «A»

Рейтинг через 1 год	Компания с рейтингом «BBB»		Компания с рейтингом «A»	
	Вероятность, %	Пороги (*Z*)	Вероятность, %	Пороги (*Z*)
AAA	0,02	3,54	0,09	3,12
AA	0,33	2,78	2,27	1,98
A	5,95	1,53	91,05	–1,51
BBB	86,93	–1,49	5,52	–2,3
BB	5,3	–2,18	0,74	–2,72
B	1,17	–2,75	0,26	–3,19
CCC	0,12	–2,91	0,01	–3,24
Дефолт	0,18		0,06	

Если портфель состоит из двух займов и более, то при вычислении мер риска необходимо учитывать дополнительные элементы — корреляцию между различными займами. Методология CreditMetrics предполагает, что стандартизированные логдоходности стоимости активов двух компаний имеют двумерное нормальное распределение с корреляционной матрицей Σ[1]. В нашем примере предполагается, что корреляция рассматриваемых логдоходностей равна 0,3:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для вычисления вероятности того, что оба заемщика сохранят свой текущий рейтинг (т. е. «BBB» и «A» соответственно), согласно методологии CreditMetrics нужно использовать двумерное нормальное распределение. Таким образом:

[1] Следует отметить, если каждая из двух рассматриваемых случайных величин имеет стандартное нормальное распределение, ковариационная матрица совпадает с корреляционной.

$$P(Z_{BBB} < R_{BBB} < Z_A, Z_A < R_A < Z_{AA}) = \int_{Z_{BBB}}^{Z_A} \int_{Z_A}^{Z_{AA}} f(r_{BBB}, r_A; \boldsymbol{\Sigma})\, dr_{BBB}\, dr_A = 79{,}69\%, \quad (5)$$

где $f(r_{BBB}, r_A; \boldsymbol{\Sigma}) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[r_{BBB}^2 - 2\rho r_{BBB}\cdot r_A + r_A^2\right]\right\}$ — плотность двумерного нормального распределения случайного вектора (R_{BBB}, R_A) в точке (r_{BBB}, r_A);

R_{BBB}, R_A — стандартизированные логдоходности стоимостей активов рассматриваемых компаний;

ρ — коэффициент корреляции между R_{BBB} и R_A.

Выполняя эту процедуру для оставшихся 63 комбинаций, получим табл. 9.

Таблица 9

Совместные вероятности сохранения или изменения рейтингов для двух компаний с текущими рейтингами «ВВВ» и «А» (при коэффициенте корреляции, равном 0,3)

Рейтинг первой компании (*BBB*)		Рейтинг второй компании (*A*)							
		AAA	***AA***	***A***	***BBB***	***BB***	***B***	***CCC***	**Дефолт**
		0,09	**2,27**	**91,05**	**5,52**	**0,74**	**0,26**	**0,01**	**0,06**
AAA	**0,02**	0	0	0,02	0	0	0	0	0
AA	**0,33**	0	0,04	0,29	0	0	0	0	0
A	**5,95**	0,02	0,39	5,44	0,08	0,01	0	0	0
BBB	**86,93**	0,07	1,81	79,69	4,55	0,57	0,19	0,01	0,04
BB	**5,3**	0	0,02	4,47	0,64	0,11	0,04	0	0,01
B	**1,17**	0	0	0,92	0,18	0,04	0,02	0	0
CCC	**0,12**	0	0	0,09	0,02	0	0	0	0
Дефолт	**0,18**	0	0	0,13	0,04	0,01	0	0	0

Переходная матрица содержит $8\cdot 8 = 64$ элемента, каждый из которых отвечает одному из 64 состояний для стоимости портфеля. Стоимость портфеля в каждом отдельном состоянии вычисляется точно так же, как в случае одной кредитной позиции. Таким образом, приходим к табл. 10.

По данным табл. 9 и 10 можно вычислить, например, ожидаемую стоимость портфеля и стандартное отклонение этой величины (они равны 213,63 и 3,35 соответственно). Вычисление границы потерь 1%-го уровня оставляем в качестве упражнения.

Отметим, что если логдоходности стоимостей активов двух рассматриваемых компаний были бы независимыми, то совместная вероятность сохранения этими компаниями текущего рейтинга (т. е. «ВВВ» и «А» соответственно) была бы равна $86{,}93\%\cdot 91{,}05\% = 79{,}15\%$, что меньше, чем 79,69%, т. е. значение, полученное по методологии CreditMetrics (см. формулу (5)).

Таблица 10

Стоимости портфеля из двух заемщиков с текущими рейтингами «BBB» и «A», соответственно

Рейтинг первой компании (BBB)		Рейтинг второй компании (A)							
		AAA	***AA***	***A***	***BBB***	***BB***	***B***	***CCC***	**Дефолт**
		106,59	**106,49**	**106,3**	**105,64**	**103,15**	**101,39**	**88,71**	**51,13**
AAA	**109,37**	215,96	215,86	215,67	215,0	212,52	210,76	198,08	160,50
AA	**109,19**	215,78	215,68	215,49	214,83	212,34	210,58	197,90	160,32
A	**108,66**	215,25	215,15	214,96	214,30	211,81	210,05	197,37	159,79
BBB	**107,55**	214,14	214,04	213,85	213,19	210,70	208,94	196,26	158,68
BB	**102,02**	208,61	208,51	208,33	207,66	205,17	203,41	190,73	153,15
B	**98,10**	204,69	204,59	204,40	203,74	201,25	199,49	186,81	149,23
CCC	**83,64**	190,23	190,13	189,28	189,28	186,79	185,03	172,35	134,77
Дефолт	**51,13**	157,72	157,62	157,43	156,77	154,28	152,52	139,84	102,26

1.5. Корреляция дефолтов и корреляция активов

Интуитивно ясно, что корреляция между дефолтами должна быть малой. Для пояснения рассмотрим две компании — O_1 и O_2 и предположим, что стоимости активов этих компаний описываются моделью Мертона. При таком предположении корреляция дефолтов будет определяться вероятностью того, что за некоторый промежуток времени (например, за 1 год) стоимости обеих компаний окажутся меньше соответствующих пороговых уровней, отвечающих дефолту (см. рис. 2).

Определим случайные величины ξ_1 и ξ_2:

$$\xi_j = \begin{cases} 1, \text{если } j\text{-я компания оказалась в состоянии дефолта;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда коэффициент корреляции между ξ_1 и ξ_2 определяется соотношением[2]:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) - P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = 1)}{\sqrt{P(\xi_1 = 1) \cdot (1 - P(\xi_1 = 1))} \cdot \sqrt{P(\xi_2 = 1) \cdot (1 - P(\xi_2 = 1))}}. \tag{6}$$

Поскольку стандартизированные логдоходности стоимостей активов имеют совместное стандартное нормальное распределение с корреляционной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$, имеем:

$$P(DEF_1, DEF_2) = \int_{-\infty}^{-d_2^1} \int_{-\infty}^{-d_2^2} f(r_1, r_2; \boldsymbol{\Sigma}) dr_1 dr_2,$$

где $-d_2^i = Z_{CCC}^i, i = 1, 2,$ — пороги, соответствующие дефолту 1-й и 2-й компаний.

[2] См. [Lucas (1995)].

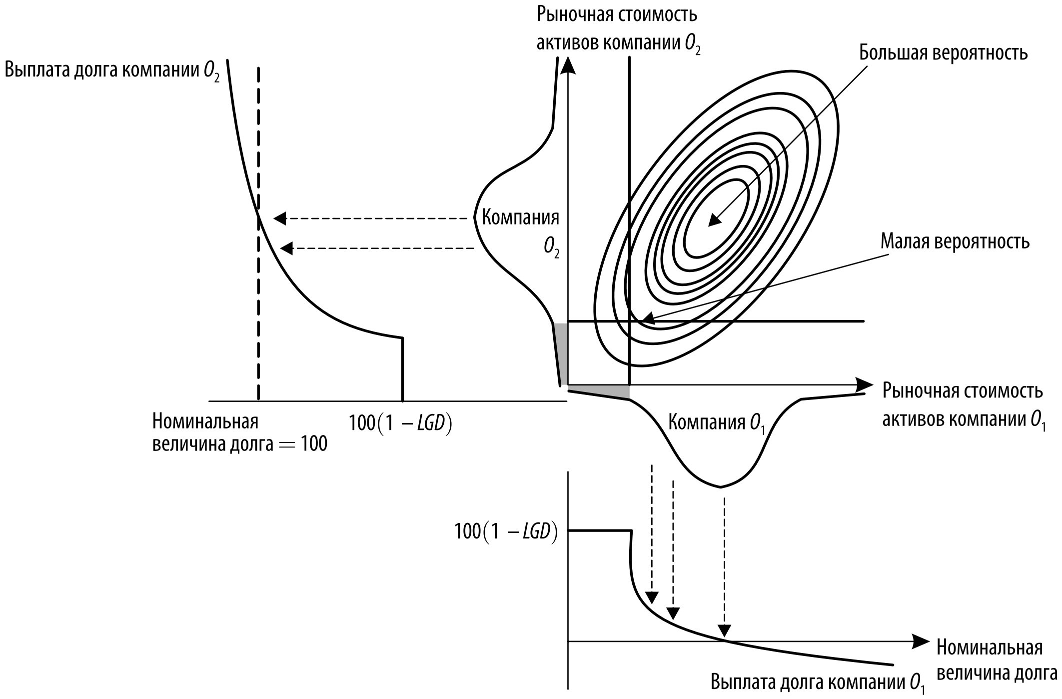

Рис. 2. Совместная вероятность дефолтов двух компаний

Предположим, что, как и в рассматриваемом выше примере, два заемщика имеют рейтинги «BBB» и «A». Зададимся совместным распределением логдоходностей заемщиков — «BBB» и «A», соответствующим данным табл. 9, дополненным предположением, что $\rho(\xi_{BBB}, \xi_A) = 0{,}3$, где $\xi_1 = \xi_{BBB}$ и $\xi_2 = \xi_A$. Тогда:

$$P(\xi_{BBB} = 1) = 0{,}0018;$$
$$P(\xi_A = 1) = 0{,}0006;$$
$$P(\xi_{BBB} = 1, \xi_A = 1) = \int_{-\infty}^{-d_2^{BBB}} \int_{-\infty}^{-d_2^{A}} f(r_{BBB},\ r_A, \Sigma)\, dr_{BBB}\, dr_A =$$
$$= \int_{-\infty}^{-2,91} \int_{-\infty}^{-3,24} f(r_{BBB},\ r_A, \Sigma)\, dr_{BBB}\, dr_A = 0{,}0000156;$$
$$\rho(\xi_{BBB}, \xi_A) = \frac{P(\xi_{BBB}, \xi_A) - P(\xi_{BBB} = 1)\cdot P(\xi_A = 1)}{\sqrt{P(\xi_{BBB} = 1)\cdot(1 - P(\xi_{BBB} = 1))}\cdot\sqrt{P(\xi_A = 1)\cdot(1 - P(\xi_A = 1))}};$$
$$\rho(\xi_{BBB} = 1, \xi_A = 1) = \frac{0{,}0000156 - 0{,}0018\cdot 0{,}0006}{\sqrt{0{,}0018(1 - 0{,}0018)}\cdot\sqrt{0{,}0006(1 - 0{,}0006)}} = 0{,}014.$$

Изобразим графически, как меняется корреляция дефолтов для двух взятых компаний в зависимости от изменения корреляции логдоходностей стоимостей их активов в пределах от 0 до 1 (см. рис. 3).

Дефолтная корреляция по величине значительно меньше, чем корреляция логдоходностей. Кроме того, при изменении корреляции логдоходностей от 0,2 до 0,5 отношение корре-

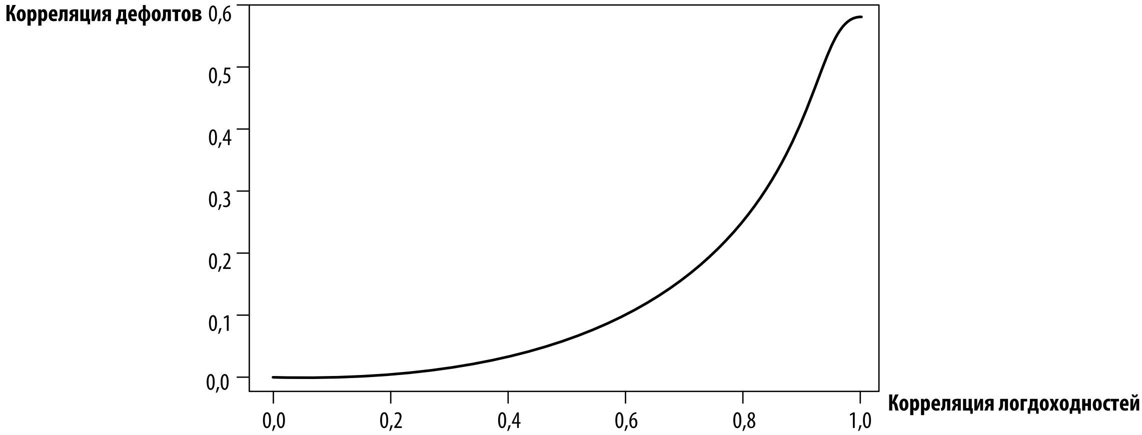

Рис. 3. Корреляция дефолтов как функция от корреляции логдоходностей стоимостей активов двух компаний

ляции дефолтов к ней приближенно равно 10^{-1}. Это показывает необходимость получения как можно более точных оценок этих корреляций для более корректного оценивания эффекта диверсификации портфеля займов[3].

1.6. Оценка портфелей большой размерности

Для того чтобы вычислить границу потерь для портфеля большого количества займов, нерационально с точки зрения вычислительной эффективности применять ранее рассмотренный двумерный подход. Например, если портфель состоит из 5 позиций и для каждой позиции возможны 8 рейтинговых классов, при использовании двумерного подхода необходимо вычислить: $8^5 = 32\,768$ совместных вероятностей переходов. Решение этой проблемы, предлагаемое в рамках методологии CreditMetrics, основано на использовании метода Монте-Карло.

Опишем в общем виде предлагаемую процедуру.

- Примем некоторую рейтинговую систему.
- Присвоим каждому займу из рассматриваемого портфеля соответствующий рейтинг.
- Вычислим (или используем) матрицу переходов, в которой указаны вероятности миграции из одного рейтингового класса в другой.
- С использованием вероятностей миграций вычислим пороговые уровни Z_i, отвечающие кредитным рейтингам. Отметим, что эти уровни зависят от текущего рейтинга заемщика.
- Вычислим корреляционную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}$ стандартизированных логдоходностей стоимостей активов рассматриваемых компаний с использованием факторной модели (т. е. корреляционной KMV-модели — см. следующий раздел, а также работу [Gupton et al. (1997)]).

[3] Корреляционные модели в методологиях CreditMetrics и KMV аналогичны, но подробно эту модель рассмотрим только для методологии KMV, которая значительно сложнее. Для более подробной информации относительно корреляционной модели в методологии CreditMetrics см. [Gupton et al. (1997)].

• Смоделируем вектор $(N \times 1)$ логдоходностей стоимостей активов из совместного N-мерного нормального распределения $\Phi(0, \mathbf{\Sigma})$. При моделировании вектора логдоходностей можно воспользоваться стандартной техникой генерации коррелированных нормальных случайных величин, основанной на разложении Холецкого (напомним, что оно позволяет представить корреляционную (ковариационную) матрицу в виде произведения нижнетреугольной матрицы **A** и матрицы **A′**, полученной ее транспонированием). Для простого двумерного случая получим:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{AA}', \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{11} + 0 \cdot 0 = 1 \rightarrow a_{11} = 1 \\ & a_{21}a_{11} + a_{22} \cdot 0 = \rho \rightarrow a_{21} = \rho \\ & a_{11}a_{21} + 0 \cdot a_{22} = \rho \rightarrow a_{21} = \rho \\ & a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} = 1 \rightarrow a_{22} = \sqrt{1-\rho^2}. \end{aligned} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

Чтобы получить две нормально распределенные случайные величины с корреляцией ρ, необходимо вычислить:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \times \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 = \varepsilon_1 \\ y_2 = \rho\varepsilon_1 + \varepsilon_1\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$ — вектор, составленный из независимых, стандартных, нормальных случайных величин.

• Используя пороговые уровни Z_i, полученные на шаге 4 для соответствующих текущих рейтингов данных заемщиков, определим по каждому смоделированному вектору стандартизированных логдоходностей $(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_N)'$ рейтинговый класс каждой рассматриваемой компании.

• Оценим стоимость каждой позиции в соответствии с форвардной кривой, учитывая при этом рейтинговый класс на конец рассматриваемого периода.

• Если к концу рассматриваемого периода заемщик оказывается в состоянии дефолта, моделируем исходя из бета-распределения норму восстановления, рассматривая стоимость этого займа как стоимость дефолтного обязательства.

• Неоднократно повторим предыдущие шаги и получим смоделированную функцию распределения стоимости портфеля.

• Наконец, вычислим необходимую меру риска (границу потерь, среднее ожидаемых потерь и т. д.).

1.7. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: методология CreditMetrics

Предположим, имеется портфель, составленный из $N = 3$ кредитных позиций компаний, а матрица корреляций логдоходностей стоимостей активов этих компаний равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, допустим, что риск-нейтральная процентная ставка $r = 0{,}03$, номинальные потери при дефолте (*ead*) для этих трех компаний равны: 4 000 000, 1 000 000, 10 000 000, а доли невозвращенных средств при дефолте по кредиту (*ldg*) — 45% (что соответствует доле невозвращенных средств при дефолте по кредиту для необеспеченных преимущественных требований в рамках подхода внутренних рейтингов). Три рассматриваемые компании имеют рейтинги (*rating*) «BBB», «AA», «B», соответственно. Необходимо вычислить границы потерь 99%-го доверительного уровня для временнóго горизонта в 1 год.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, следует сказать, что будет использоваться набор процедур CreditMetrics в статистическом пакете *R*. Перед разъяснением кода программы необходимо сделать несколько замечаний относительно этого набора процедур.

- В этом наборе для ценообразования займов не используются форвардные кривые. Вместо этого используется риск-нейтральная ставка с добавленным кредитным спредом, который вычисляется следующим образом:

$$CS_t = -\frac{\ln(1 - \text{ВНГ(Д)} \cdot \text{ВД}_t)}{t},$$

где t берется равным 1;

ВД_t — маргинальная вероятность дефолта, которая меняется в зависимости от рейтингового класса (для более подробной информации см. руководство к набору процедур CreditMetrics).

- Доля невозвращенных средств при дефолте по кредиту — одна и та же для всех компаний.
- Несмотря на то что убыткам по портфелю, рассчитываемым с помощью команды `cm.gain`, отвечают отрицательные числа, величина ГП_α, вычисляемая с помощью команды `cm.CVaR`, положительна. Например, если при вычислении 1%-го квантиля построенной функции распределения (с помощью команды `cm.gain`) получится — 100, то результатом использования команды `cm.CVaR` будет +100.

```
# Удалим все объекты активизированной среды

rm(list = ls(all = TRUE))

# Загрузим набор процедур CreditMetrics

library(CreditMetrics)

# Зададим входные параметры

N = +3
n 50000
r 0.03
ead c(4000000, 1000000, 10000000)
rc c("AAA", "AA", "A", "BBB", "BB", "B", "CCC", "D")
lgd 0.45
rating c("BBB", "AA", "B")
firmnames c("firm 1", "firm 2", "firm 3")
alpha 0.99
```

```
# Корреляционная матрица

rho matrix(c( 1, 0.4, 0.6,
 0.4, 1, 0.5,
 0.6, 0.5, 1), 3, 3, dimnames = list(firmnames, firmnames),
 byrow = TRUE)

# эмпирическая матрица миграций за один год,
# взятая с веб-сайта рейтингового агентства standard&poors

rc c("AAA", "AA", "A", "BBB", "BB", "B", "CCC", "D")
M matrix(c(90.81, 8.33, 0.68, 0.06, 0.08, 0.02, 0.01, 0.01,
 0.70, 90.65, 7.79, 0.64, 0.06, 0.13, 0.02, 0.01,
 0.09, 2.27, 91.05, 5.52, 0.74, 0.26, 0.01, 0.06,
 0.02, 0.33, 5.95, 85.93, 5.30, 1.17, 1.12, 0.18,
 0.03, 0.14, 0.67, 7.73, 80.53, 8.84, 1.00, 1.06,
 0.01, 0.11, 0.24, 0.43, 6.48, 83.46, 4.07, 5.20,
 0.21, 0, 0.22, 1.30, 2.38, 11.24, 64.86, 19.79,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100
 )/100, 8, 8, dimnames = list(rc, rc), byrow = TRUE)

# С помощью команды cm.CVaR вычислим границу потерь

cm.CVaR(M, lgd, ead, N, n, r, rho, alpha, rating)

# С помощью команды cm.gain вычислим
# смоделированные доходы и убытки

cm.gain(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)

# С помощью команды cm.val разобьем смоделированные
# логдоходности по рейтинговым классам

cm.val(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)

# С помощью команды cm.portfolio вычислим
# смоделированную стоимость портфеля займов

cm.portfolio(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating)

# Изобразим гистограмму для смоделированных доходов/убытков
 cm.hist(M, lgd, ead, N, n, r, rho, rating,
 col = "steelblue4", main = "Profit / Loss Distribution",
 xlab = "loss / profit", ylab = "frequency")
```

В связи с тем что использовался метод Монте-Карло, полученный результат оценки границы потерь должен быть близок к 4 015 891. А гистограмма смоделированных доходов/ убытков должна быть идентична гистограмме на рис. 4.

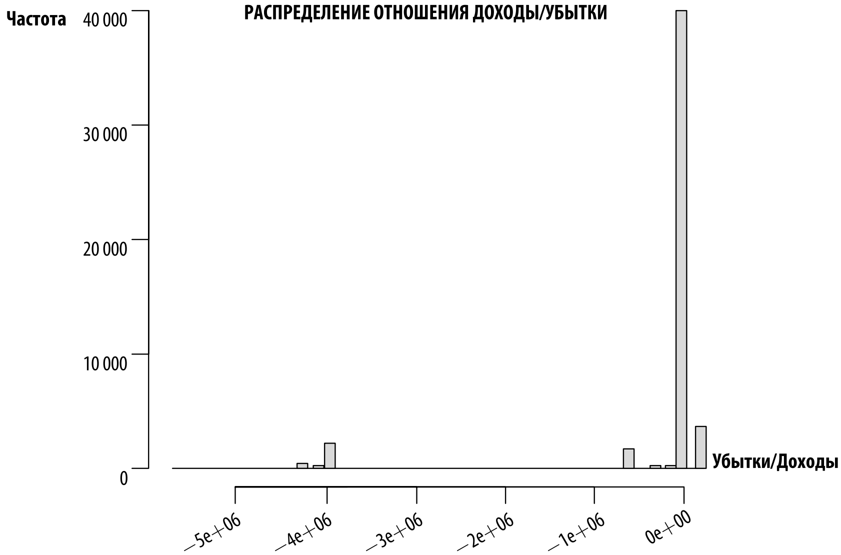

Рис. 4. Гистограмма смоделированных доходов/убытков

2. Модель KMV

Модель KMV, широко используемая при оценке кредитных рисков, строится на основе модели Мертона. Модель KMV еще известна как модель Васичека—Килхофера (ВК-модель). Первая буква в аббревиатуре KMV — от фамилии McQuown — одного из трех основателей компании KMV, которую впоследствии выкупило агентство Moody's. Инновация модели KMV заложена не столько в теоретической части, сколько в ее практической реализации. Моделируются несколько классов долговых обязательств: краткосрочные, долгосрочные, конвертируемые долговые обязательства и др. Кроме того, явным образом моделируются выплаты наличных денежных средств (например, дивиденды). Общие принципы реализации этой модели будут описаны ниже.

В KMV модели вводятся два ранее не встречавшихся понятия: *«расстояние до дефолта»* (*РД*) и *«ожидаемая частота дефолтов»* (*ОЧД*).

ОЧД — это вероятность наступления дефолта в течение ближайшего года (ряда лет). Чтобы вычислить *ОЧД*, необходимо пошагово выполнить следующую процедуру:

- решая систему из двух уравнений (см. уравнения (23), (24) в работе [Фантаццини (2008)], оценить стоимость активов и ее волатильность;
- используя стоимость активов, ее волатильность и балансовые значения долговых обязательств, вычислить *РД*;
- в соответствии с оценкой *РД* вычислить вероятность дефолта.

Как отмечалось ранее, из-за некоторой численной неустойчивости коэффициентов уравнения (24) в работе [Фантаццини (2008)] можно получить некорректные результаты. В частности, такое возможно при работе с «зашумленными» данными — см. работы [Crosbie, Bohn (2001)], [Hao (2006)], [Bharath, Shumway (2008)] и [Fantazzini et al. (2008a)].

Чтобы преодолеть эту проблему модели KMV, необходимо использовать итеративный подход. Для этого следует:

- получить исторические данные по стоимостям акций $S_{t-n}, \ldots, S_t$;
- получить начальную оценку волатильности стоимости активов $\sigma^{(0)}$ на основании волатильности курсовых стоимостей акций σ_S;
- используя $\sigma^{(0)}$ и $S_{t-n}, \ldots, S_t$, вычислить соответствующие стоимости активов $V_{t-n}^{(0)}, \ldots, V_t^{(0)}$;
- вычислить доходности стоимостей активов:

$$R_i^{(0)} = \ln V_i^{(0)} - \ln V_{i-1}^{(0)};$$

и их среднее значение:

$$\overline{R}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t} R_i^{(0)}$$

- вычислить следующую оценку волатильности стоимости активов:

$$\left(\sigma^{(1)}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t} \left(R_i^{(0)} - \overline{R}_i^{(0)}\right)^2;$$

- повторять шаги 2–5, пока не будет достигнута сходимость волатильностей стоимостей акций, т. е. пока не будет выполняться неравенство:

$$\left|(\sigma^{(m+1)})^2 - (\sigma^{(m)})^2\right| \leq \varepsilon.$$

После того как будет достигнута сходимость в вышеописанном алгоритме, получится оценка для стоимости активов и ее волатильности в момент времени t, т. е. будет определена V_t. Поскольку необходимо оценить вероятность того, что в момент T стоимости активов не будут превосходить величину долговых обязательств, т. е. $P(V_T \leq B)$, следует воспользоваться формулой (18) из [Фантаццини (2008)], т. е.

$$ОЧД = P(V_T < B) = \Phi\left(\frac{\ln\frac{B}{V_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Однако разработчики KMV модели признают, что используемая модель Мертона является слишком простой для описания динамики финансовых рынков. В частности, в ней:

- предполагается наличие логнормального распределения для доходностей стоимостей активов;
- предполагается чрезмерно упрощенная структура капитала компании;
- рассматривается состояние компании в момент времени T, но дефолт может наступить в любой момент времени $t < T$;

- следует также отметить, что дефолт нельзя рассматривать как поглощающее состояние, поскольку он не влечет автоматически банкротство. Особенно в развитых странах законодательство, касающееся коммерческой деятельности, направлено на сохранение любой возможности для компании продолжить свою работу (после соответствующей реструктуризации), это делается с целью сохранения рабочих мест.

В свзи с этим в модели KMV предложены определенные модификации. В частности, вводится понятие «*расстояние до дефолта*», которое определяется следующим образом:

$$РД = \frac{V_t - \widetilde{B}}{V_t \sigma},$$

где $\widetilde{B}$ — величина краткосрочных обязательств +50% величины долгосрочных обязательств, которая определяется на основании данных, представленных в балансовом отчете компании.

Если μ_V и σ_V малы, а $\ln\left(\frac{V_t}{B}\right) \approx \frac{V_t - \widetilde{B}}{V_t}$, тогда *РД* аппроксимируется величиной d_2^* (см. (18) в работе [Фантаццини (2008)]), которую часто называют числом стандартных отклонений от дефолта.

В модели KMV предполагается, что компании с одним и тем же *РД* имеют равные вероятности дефолта. Чтобы построить выражение, связывающее *РД* и наблюдаемые частоты дефолтов, в KMV используется база исторических данных по дефолтам. Эта модель позволяет вычислять долю компаний с *РД* из малого интервала, которые окажутся в состоянии дефолта за некоторый фиксированный промежуток времени. Эмпирическая процедура оценки опубликована агентством Moody's KMV. Услуги, предлагаемые компанией KMV в рамках мониторинга кредитного риска: оценки *ОЧД* начиная с 1993 г. с использованием базы данных по 100 тыс. американских компаний, включая 2000 случаев неплатежеспособности компаний. Таким образом, несмотря на то что KMV модель очень похожа на модель Мертона, их практическая реализация очень разная.

2.1. Модель KMV и рейтинги

В KMV модели матрица переходов строится на основании не рейтинговых классов, а вероятностей дефолтов. Во-первых, в методологии KMV классификация компаний на группы основана на непересекающихся интервалах принадлежности вероятностей дефолта, которые являются типичными для рейтинговых классов. Например, все компании с *ОЧД*, менее 2 базовых пунктов (или 0,02%) относятся к классу компаний с рейтингом «AAA», компании, имеющие *ОЧД* от 3 до 6 базовых пунктов, — к классу компаний с рейтингом «AA», а компании с *ОЧД* от 7 до 15 базовых пунктов — с рейтингом «A», и т. д. Во-вторых, в модели KMV матрица перехода (табл. 11) оценивается с использованием информации относительно истории изменений *ОЧД*. Эта матрица весьма схожа по структуре с ее аналогами, рассчитываемыми такими рейтинговыми агентствами, как, например, Standard and Poor's (см. табл. 12).

Различия в соответствующих вероятностях из табл. 11 и 12 поразительны: согласно KMV модели, кроме рейтинга «AAA», вероятность сохранения рейтинга составляет от $^1/_3$ до $^1/_2$ исторических вероятностей перехода, предоставленных рейтинговым агентством. Вероятности дефолта в модели KMV меньше, особенно для низких рейтингов. Миграционные вероятности, напротив, значительно больше в модели KMV для всех рейтингов, не совпадающих с текущим рейтингом. Эти различия можно легко объяснить. Во-первых, поскольку рейтинговые агентства не спешат менять существующие рейтинги, исторические частоты сохранения рейтинга, как правило, переоценивают фактическую вероятность сохранения кредитного качества. Во-вторых, средняя историческая вероятность дефолта переоценивает фактическую вероятность дефолта для компаний из одного рейтингового класса. Это происходит в силу того, что каждый рейтинговый класс включает группу компаний, которые имеют значительно большие вероятности дефолта и рейтинг которых должен быть понижен, но такого понижения рейтинга не происходило. В-третьих, если вероятность сохранения в текущем рейтинговом классе и вероятность дефолта очень велики, следовательно, вероятности перехода должны быть малы.

Таблица 11

Матрица перехода за год в модели KMV, построенная по непересекающимся интервалам ранжирования *ОЧД*

Текущий рейтинг	Рейтинг через год, %							
	AAA	***AA***	***A***	***BBB***	***BB***	***B***	***CCC***	**Дефолт**
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,20	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,10
BBB	0,30	2,80	22,63	42,54	23,52	6,95	1,00	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53,00	20,58	2,01
	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$

Источник: Корпорация KMV.

Таблица 12

Матрица перехода за год, построенная по фактическим изменениям рейтингов

Текущий рейтинг	Рейтинг через год, %							
	AAA	***AA***	***A***	***BBB***	***BB***	***B***	***CCC***	**Дефолт**
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00

Окончание табл. 12

Текущий рейтинг	Рейтинг через год, %							
	AAA	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**Дефолт**
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,3	1,17	1,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,2
CCC	0,22	0,00	0,22	1,3	2,38	11,24	64,86	19,79

Источник: Standard & Poor's CreditWeek (15 апреля 1996 г.)

Нет необходимости упоминать, что эти различия могут оказать существенное влияние на значение границы потерь или других мер риска.

2.2. Оценка долгового обязательства или займа с учетом риска дефолта

Если при оценке обязательств в рамках модели CreditMetrics используются кривые форвардных ставок, то в модели KMV ценообразование основано на модели риск-нейтрального ценообразования. При таком подходе цены рассчитываются как дисконтированная ожидаемая стоимость будущих платежей, а математическое ожидание вычисляется с использованием так называемых риск-нейтральных, а не фактических вероятностей. Первые могут быть получены из исторических данных или *ОЧД* (более подробно об этом — см., например, [Jarrow, Turnbull (1997)], главы 5 и 6).

Оценка рисковых выплат осуществляется в два шага. На первом — оценивается безрисковая компонента, на втором — оцениваются компоненты, подверженные кредитному риску. Рассмотрим, например, ценообразование бескупонного долгового обязательства с обязательным платежом M в конце года $T=1$, с нормой восстановления в случае дефолта, равной $(1-ДНС(Д))$, где $ДНС(Д)$ — доля не возвращенных при дефолте средств. Тогда получим:

- *безрисковую компоненту* $M(1-ДНС(Д))$, приведенное значение которой (PV_{RF}) оценивается с использованием кривой безрискового дисконта:

$$PV_{RF}=\frac{M(1-ДНС(Д))}{1+r},$$

где r — 1-годичная безрисковая ставка процента;

- *рисковые выплаты*, которые оцениваются с использованием риск-нейтрального подхода:

$$PV_Q = E_Q(\text{дисконтные рисковые платежи}) = \frac{M \cdot ДНС(Д)(1-Q) + 0 \cdot Q}{1+r},$$

где математическое ожидание вычисляется с использованием риск-нейтральной вероятности Q.

Текущая стоимость этого рискового бескупонного долгового обязательства определяется как сумма текущих стоимостей безрисковой и рисковой компонент:

$$PV = PV_{RF} + PV_Q.$$

Кредитный спред ($КС$) рассматриваемого долгового обязательства вычисляется из следующего уравнения:

$$\frac{M \cdot (1-ОЧД)}{(1+r)} + \frac{M \cdot ОЧД(1-Q)}{(1+r)} = \frac{M}{1+r+КС}.$$

Откуда получаем:

$$КС = \frac{ОЧД \cdot Q \cdot (1+r)}{1-ОЧД \cdot Q}.$$

Для серии рисковых выплат описанная выше методология оценки может быть обобщена следующим образом:

$$PV = (1-ОЧД)\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r_i)^{t_i}} + ОЧД \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-Q_i)C_i}{(1+r_i)^{t_i}}$$

или при непрерывном времени:

$$PV = (1-ОЧД)\sum_{i=1}^{n} C_i exp(-\tilde{r}_i t_i) + ОЧД \cdot \sum_{i=1}^{n} (1-Q_i) C_i exp(-\tilde{r}_i t_i),$$

где Q_i — кумулятивная риск-нейтральная $ОЧД$ за период времени t_i;
$\tilde{r}_i = \ln(1+r_i)$.

2.3. Оценка портфеля долговых обязательств: аналитическое решение на основании методологии KMV

На основании методологии KMV не моделируется вся функция распределения стоимости портфеля через время H. Вместо этого, сделав некоторые упрощающие предположения, получим асимптотику функции распределения убытков в любой момент времени за некоторый период H. Было сделано предположение о том, что сроки всех займов истекают в момент времени H, а их номиналы равны 1 долл. Кроме того, предполагается, что все компании, из долговых обязательств которых составлен наш портфель, оказываются в состоянии дефолта с одинаковой вероятностью, т. е. $P(\xi_i = 1) = P(\xi_j = 1) = p, \forall i, j$, а логдоходности стоимостей их активов одинаково коррелированы с корреляцией, равной ρ.

Обозначим $V_{H,RF}$ дисконтированную стоимость портфеля в момент времени H в предположении, что компания не оказалась в состоянии дефолта, а V_H — стоимость портфеля в момент времени H, которая определяется так, как указано в разделе 1.1, формула (1). Тогда убыток по портфелю в момент времени H равен разности между рисковой стоимостью портфеля и его рыночной стоимостью в этот момент времени, т. е. $L = V_{H,RF} - V_H$.

Предполагая, что портфель займов диверсифицирован, а число займов N, его составляющих, стремится к бесконечности, получим, что в рамках KMV модели предельной функцией распределения убытков портфеля будет обратное гауссовское распределение $NI(\rho, p)$ (см. [Johnson et al. (1994)]). Таким образом, как граница потерь, так и другие меры риска для портфеля с большим количеством кредитных позиций могут быть оценены относительно легко и без обращения к процедурам стохастического моделирования. Однако следует отметить, что все детали методологии KMV не раскрываются, и неизвестно, как эта модель калибруется по реальным данным.

2.4. Корреляции в модели KMV

При наличии портфеля, составленного из большого количества (например, из тысячи) облигаций и займов, расчет корреляционной матрицы с вычислительной точки зрения сопряжен с некоторыми трудностями оценивания. Для того чтобы их преодолеть, в методологиях CreditMetrics и KMV используется многофакторный анализ. В частности, предполагается, что доходности стоимостей активов компании формируются под влиянием следующих факторов: множества общих факторов (или факторов систематического риска) и множества специфических факторов (специфических для компании факторов риска). Специфические факторы могут быть свойственны отдельной компании, стране или отрасли, но корреляция между логдоходностями стоимостей активов от них не зависит, поскольку специфические факторы не коррелируют ни друг с другом, ни с общими факторами. Корреляции логдоходностей стоимостей активов двух компаний объясняются только общими факторами, воздействующими на эти компании.

Методологии CreditMetrics и KMV во многом схожи (далее обсудим это более подробно). Однако они имеют два ключевых отличия:

- модель для корреляции в методологии KMV использует стоимости активов, тогда как факторная модель в методологии CreditMetrics использует курсовые стоимости акций;
- в методологии CreditMetrics используются сочетания некоторых отраслей и отдельных стран, тогда как в методологии KMV отрасли и страны рассматриваются раздельно.

Как же в рамках методологии KMV реализуется факторная модель? Логдоходности стоимостей активов $\widetilde{R}_i$ компаний $i = 1, \dots, N$ за некоторый временной промежуток (обычно за один год) могут быть представлены:

$$\widetilde{R}_i = \widetilde{\beta}_i \widetilde{F}_i + \widetilde{Z}_i, i = 1, \dots, N, \tag{7}$$

или, если записать в матричной форме:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{\beta}\widetilde{\mathbf{F}} + \widetilde{\mathbf{Z}}, \tag{8}$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}' = \left(\widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_N\right), \widetilde{\mathbf{Z}}' = \left(\widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_N\right), \widetilde{\mathbf{F}} \perp \widetilde{\mathbf{Z}},$$

где $\widetilde{\mathbf{R}}$ — $(N \times 1)$ вектор логдоходностей стоимостей активов;

$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ — $(N \times N)$ диагональная матрица;

$\widetilde{\mathbf{F}}$ — $(N \times 1)$ вектор, содержащий составные общие факторы;

$\widetilde{\mathbf{Z}}$ — $(N \times 1)$ вектор, содержащий специфические факторы.

Построение общих факторов — крайне сложная задача, поскольку каждый элемент $\widetilde{F}_i$ представляет собой взвешенную сумму K основных факторов, $\widetilde{\Psi}_1, \ldots, \widetilde{\Psi}_K$.

Отметим, что модель KMV основана на трехуровневой иерархической модели (рис. 5):

- *первый уровень*: представляет факторы как систематического, так и специфического риска для каждой компании;
- *второй уровень*: подразделяет факторы систематического риска на отраслевые и страновые;
- *третий уровень*: отражает глобальную, страновую и отраслевую (отраслевой специфический риск, страновый специфический риск) специфику в представлении общих (систематических) факторов.

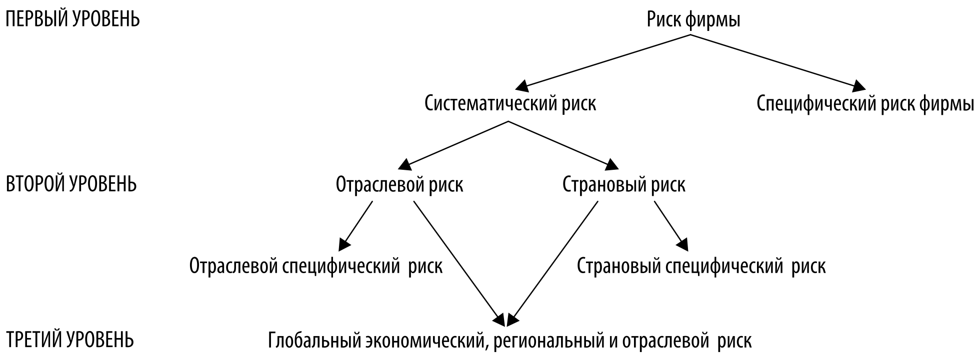

Рис. 5. Трехуровневая факторная структура корреляционной модели в методологии KMV

Поскольку $\widetilde{F}_i$ и $\widetilde{Z}_i$ некоррелированны, то (в предположении, что оба этих случайных фактора имеют гауссовское распределение) они, независимы. Логдоходности $\widetilde{R}_i$ коррелированы. Степень этой коррелированности определяется составными общими факторами. Последнее объясняет, почему $\widetilde{F}_i$ рассматривают как *систематическую часть* $\widetilde{R}_i$, тогда как $\widetilde{Z}_i$ можно рассматривать как случайный эффект, свойственный компании i. Это разложение на систематическую и специфическую части соответствует первому уровню в трехуровневой факторной модели методологии KMV.

Второму уровню соответствует разложение вектора составных общих факторов F на отраслевые и страновые факторы, характеризующие среду, в которой функционируют компании:

$$\widetilde{F}_i = \sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} \widetilde{\Psi}_k + \sum_{k=K_0+1}^{K} w_{i,k} \widetilde{\Psi}_k, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{9}$$

где параметры $w_{i,k}$ и $\widetilde{\Psi}_k$ считаются заданными.

При этом $\widetilde{\Psi}_1, \ldots, \widetilde{\Psi}_{K_0}$ — так называемые *отраслевые индексы*, которые для компании i суммируются с весами $w_{i,1}, \ldots, w_{i,K_0}$;

$\widetilde{\Psi}_{K_0+1}, \ldots, \widetilde{\Psi}_K$ — страновые индексы, которые для компании i суммируются с весами $w_{i,K_0+1}, \ldots, w_{i,K}$.

Веса предполагаются неотрицательными для всех i, k и нормализованными в следующем смысле:

$$\sum_{k=1}^{K_0} w_{i,k} = \sum_{k=K_0+1}^{K} w_{i,k} = 1.$$

Обозначив $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = (\widetilde{\Psi}_1, \ldots, \widetilde{\Psi}_K)'$, и подставив (9) в (8), получим:

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\widetilde{\mathbf{F}} + \widetilde{\mathbf{Z}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{W}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} + \widetilde{\mathbf{Z}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{W} = (w_{i,k})_{i=1,\ldots,N;k=1,\ldots,K}$ — матрица отраслевых и страновых весов для компаний из рассматриваемого портфеля.

Наконец, третьему уровню соответствует представление отраслевого и странового факторов в виде линейной комбинации *независимых общих факторов* $\widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2, \ldots, \widetilde{\Gamma}_m$:

$$\widetilde{\Psi}_k = \sum_{m=1}^{M} b_{k,m}\widetilde{\Gamma}_m + \widetilde{\delta}_k, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{11}$$

Последний шаг осуществляется при помощи метода главных компонент (МГК), примененного к отраслевым и страновым индексам. Это делается скорее с точки зрения вычислительного удобства (найти экономическую интерпретацию этим общим факторам обычно бывает трудно). В векторных обозначениях получим:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{B}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} + \widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \tag{12}$$

где $\mathbf{B} = (b_{k,m})_{k=1,\ldots,K;m=1,\ldots,M}$ — матрица отраслевых и страновых коэффициентов;

$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}' = (\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_M)$ — вектор общих факторов;

$\widetilde{\boldsymbol{\delta}}' = (\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_K)$ — вектор остатков.

Подставив (12) в (10), получим

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{W}(\mathbf{B}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}} + \widetilde{\boldsymbol{\delta}}) + \widetilde{\mathbf{Z}}. \tag{13}$$

После того, как получен составной фактор, при помощи (6) можно легко вычислить коэффициент чувствительности $\widetilde{\beta}_i$ для компании i, а значит, может быть вычислена корреляция между логдоходностями стоимостей активов. Рассмотрим стандартизированную версию модели (6):

$$R_i = \frac{\widetilde{R}_i - \mu_i}{\sigma_i} = \frac{\beta_i}{\sigma_i} F_i + \frac{Z_i}{\sigma_i}, \tag{14}$$

где $\sigma_i^2 = V(\widetilde{R}_i)$ ($\delta_i^2 = V(\widetilde{R}_i) = \mathrm{Var}(\widetilde{R}_i)$ здесь и далее);

$F_i = \widetilde{F}_i - \mu_i$;

$Z_i = \widetilde{Z}_i - \mu_i$.

Корреляция между логдоходностями стоимостей компаний i, j определяется соотношением

$$\rho(R_i, R_j) = E(R_i, R_j) = \frac{\beta_i}{\sigma_i}\frac{\beta_j}{\sigma_j}E(F_iF_j), \tag{15}$$

поскольку Z_i предполагаются некоррелированными и независимыми от общих факторов.

Используя коэффициент детерминации R^2 парной регрессии (6), который равен

$$R^2_{sq,i} = \frac{\beta_i^2 V(\widetilde{F}_i)}{\sigma_i^2}, \tag{16}$$

можно упростить выражение (15) и представить его в виде:

$$\rho(R_i, R_j) = \frac{R_{sq,i}}{\sqrt{V(\widetilde{F}_i)}}\frac{R_{sq,j}}{\sqrt{V(\widetilde{F}_j)}}E(F_iF_j) = \frac{R_{sq,i}}{\sqrt{V(F_i)}}\frac{R_{sq,j}}{\sqrt{V(F_j)}}E(F_iF_j), \tag{17}$$

поскольку $V[\widetilde{F}_i] = V[F_i]$.

Используя оценки коэффициентов уравнения (13), можно вычислить по формуле (17) оценку корреляции логдоходностей стоимостей активов. Если произвести стандартизацию переменных уравнения (13), получим:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{W}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{Z}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — $(N \times N)$ матрица, полученная шкалированием каждого диагонального элемента в $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ множителем $\dfrac{1}{\sigma_i}$, а

$$E[\boldsymbol{\Gamma}] = 0, \quad E[\mathbf{Z}] = 0, \quad E[\boldsymbol{\delta}] = 0, \quad \boldsymbol{\Gamma} \perp \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\Gamma} \perp \mathbf{Z}.$$

Теперь, вычислив матрицу $E[\mathbf{FF}']$, которая равна:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{FF}'] &= \left[\mathbf{W}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta})(\mathbf{W}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}))'\right] = \mathbf{W}\left[(\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta})((\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\delta}))'\right]\mathbf{W}' \\ &= \mathbf{W}\left(\mathbf{B}E[\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}']\mathbf{B}' + \underbrace{\mathbf{B}E[\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\delta}']}_{=0} + \underbrace{E[\boldsymbol{\delta}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma})]}_{=0} + E[\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}']\right)\mathbf{W}' = \mathbf{W}(\mathbf{B}E[\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}']\mathbf{B}' + E[\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}'])\mathbf{W}', \end{aligned} \tag{19}$$

можно, пользуясь формулой (17), вычислить корреляции логдоходностей стоимостей активов.

Отметим, что в уравнении (19) матрица $E[\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}']$ диагональна, поскольку общие факторы ортогональны, с диагональными элементами $V[\Gamma_m]$ $(n = 1, \dots, m)$, а $E[\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}']$ — диагональная матрица с диагональными элементами $V[\delta_k]$ $(k = 1, \dots, K)$. Следовательно, корреляции логдоходностей стоимостей акций в соответствии с (19) могут быть вычислены в случае, если известны матрица отраслевых и страновых весов, дисперсии общих факторов, определенные для стандартизированных случайных величин, дисперсии для отраслевых и страновых стандартизированных остатков, коэффициенты отраслевых и страновых индексов относительно общих факторов. Пользователи услуг компании KMV имеют доступ к такой информации, а значит, могут использовать уравнение (19) для вычисления корреляции логдоходностей стоимостей активов, которое обеспечено инструментарием KMV под названием *GCorr*. Тем не менее формулу (19) полезно знать, поскольку она позволяет вычислять корреляции логдоходностей стоимостей активов компаний, даже если информация об этих компаниях не содержится в базе данных KMV.

2.5. Корреляционная KMV модель: процедура оценивания

Факторы, используемые в модели KMV, наблюдаемы, поэтому указанные выше модели могут быть оценены по историческим данным для каждого фактора и с использованием стандартной регрессионной техники[4].

Вся процедура состоит из 6 шагов:

- Чтобы извлечь отраслевые и страновые факторы, оценим коэффициенты регрессии для данных пространственного типа: зависимая переменная — логдоходности стоимостей активов, независимые переменные — 45 страновых и 61 отраслевая фиктивная переменная.
- Отраслевые веса $w_{i,k}$ в (9) вычисляются путем усреднения активов и продаж по каждому бизнес-направлению (БН), в котором осуществляет деятельность рассматриваемая компания *i*: например, рассмотрим итальянскую компанию, которая осуществляет деятельность в двух бизнес-направлениях (БН) (табл. 13).

Таблица 13

Активы и продажи для разных БН

Бизнес-направление	Активы, %	Продажи, %
Спортивные машины	40	30
Спортивные мотоциклы	60	70
Общее число	100	100

Веса $w_{i,k}$ вычисляются как среднее весов (измеряемых в %) для каждого БН по активам и продажам. Таким образом, в примере вес для спортивных машин равен 35% $\left[\frac{40+30}{2}\right]$, а вес для спортивных мотоциклов — 65% $\left[\frac{60+70}{2}\right]$. Страновые веса вычисляются аналогично. После того как определены веса, можно построить факторы $\widetilde{F}_i$.

- Применим метод главных компонент к факторам $\widetilde{F}_i$ и вычислим 14 ортогональных факторов $\widetilde{\Gamma}_m$. Благодаря интерпретации полученных главных компонент удалось разбить их на 2 глобальных, 5 региональных и 7 отраслевых факторов. Это шаг необходим главным образом для вычислительного удобства реализации моделирования методом Монте-Карло.
- Отраслевые и страновые коэффициенты $b_{k,m}$ вычисляются по формуле (11) с использованием техники оценивания коэффициентов линейной регрессии.
- Составные факторы $\widetilde{F}_i$ строятся с использованием ортогональных факторов и весов $w_{i,k}$.

---

[4] Это, в частности, означает, что модель (6) должна быть представлена для набора исторических данных в виде:
$$\widetilde{R}_{it} = \widetilde{\beta}_i \widetilde{F}_{it} + \widetilde{Z}_{it},\ t = 1,\ldots,T,$$
где t — номер такта времени, к которому привязаны наблюдаемые значения $\left(\widetilde{R}_{it}, \widetilde{F}_{it}\right)$. Это и позволяет оценивать коэффициент чувствительности $\widetilde{\beta}_i$ в рамках указанной выше модели парной регрессии $\widetilde{R}_{it}$ по $\widetilde{F}_{it}$.

- После того как найдены составные факторы, в линейном регрессионном уравнении (6) оценивается коэффициент чувствительности β_i.

Имея оценки всех параметров модели, можно оценить функцию распределения убытка портфеля, а затем получить численную оценку влияния различных факторов, представляющих систематический риск, на убыток портфеля. Кроме того, можно представить процедуру так называемого стресс-тестирования (см. [Фантаццини (2008a)]).

2.6. Корреляционная KMV модель: имитационное моделирование функции распределения убытков портфеля

Функция распределения убытков портфеля вычисляется с использованием методов Монте-Карло. Символом «*» будем сопровождать смоделированные случайные величины. Процедура моделирования состоит из следующих шагов:

- смоделируем ортогональные глобальные факторы $\widetilde{\Gamma}_1,\dots,\widetilde{\Gamma}_M$. В результате получим *M* смоделированных значений $\widetilde{\Gamma}_1^*,\dots,\widetilde{\Gamma}_M^*$;
- смоделируем ошибки в (11). Получим $\widetilde{\delta}_1,\dots,\widetilde{\delta}_K$. Чтобы получить страновые и секторальные индексы $\Psi_1^*,\dots,\Psi_K^*$, подставим смоделированные ошибки и $\widetilde{\Gamma}_1^*,\dots,\widetilde{\Gamma}_M^*$ в уравнение;
- чтобы смоделировать составной фактор $\widetilde{F}_i$, подставим $\Psi_1^*,\dots,\Psi_K^*$ в формулу (9);
- используя оценки параметров уравнения (9), сгенерируем случайный вектор логдоходностей стоимостей активов. Для этого из *N*-мерного нормального распределения со средним $\boldsymbol{\beta}\widetilde{\mathbf{F}}$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}$, элементы σ_{ij} которой определяются по формуле (16), смоделируем *N*-мерный случайный вектор;
- повторим предыдущие шаги большое количество раз *B* (см. программу).

По смоделированным доходностям вычислим *РД* и *ОЧД*. Зная их, можно вычислить среднюю норму потерь портфеля. Однако ранее предложенный анализ для оценки функции распределения убытков портфеля можно провести и с использованием рыночных стоимостей портфеля.

2.7. Эмпирические приложения с использованием статистического пакета GAUSS: модель KMV с одним фактором

После того как была рассмотрена теория для общего случая, приведем простой прикладной пример модели KMV с одним фактором. Однофакторная модель широко используется на практике, пожалуй, дает вполне адекватные результаты для многих портфелей. Она представима в виде:

$$\begin{aligned} &R_i=\beta_i F+\sqrt{1-\beta_i^2 Z_i},\\ &\operatorname{cov}(Z_i,Z_j)=0,\ i\neq j,\ \operatorname{cov}(F,Z_i)=0, \forall i\\ &F{:}N(0,1)\ Z_i{:}N(0,1)\ \forall i, \end{aligned} \tag{20}$$

где R_i — стандартизированные доходности стоимостей активов компании *i*;

β_i — коэффициент чувствительности;

Z — систематический фактор.

В подходе стоимостей активов стандартный способ получения функции распределения портфеля имеет следующую структуру.

- Смоделируем стандартизированные логдоходности R_i для каждого заемщика в указанном портфеле (в соответствии с (20) они подчиняются стандартному нормальному распределению).
- Для каждого заемщика проверим, оказался ли он в состоянии дефолта или нет, т. е. оказалась ли стоимость активов меньше некоторого порога d_i, отвечающего заданной $ВД_i$. Если предположить для простоты, что стоимости активов имеют стандартное нормальное распределение, то $d_i = \Phi^{-1}(ВД_i)$, где Φ^{-1} — обращение стандартного нормального распределения. Если активы окажутся в состоянии дефолта, определим индивидуальный $ДНС(Д)_i \times ВНП(Д)_i$.
- Сложим убытки всех индивидуальных заемщиков, входящих в портфель.
- Повторим шаги 1–3 достаточно большое количество раз и получим функцию распределения убытков кредитного портфеля.

```
new;cls; et=hsec;

//Классы ВД

pd=seqa(0.01,0.01,5);

//Число моделирований

scenarios=100000;

//Число заемщиков

number_ob=1000;

//Матрица вероятностей переходов для всех заемщиков во всех моделированиях

pd_all=pd.*.ones(number_ob,1);

//Инициализируем матрицу, составленную из убытков по портфелю для каждого моделирования

port_all=zeros(scenarios,1);

//Создадим цикл для вычисления смоделированного много
//раз убытка по портфелю (представленого в переменной "scenarios")

for i(1,scenarios,1);

 //Фиксированная ДНС(Д)

 lgd_all=0.45;
```

```
 //Случайная ДНС(Д)
 //LGD_all=rndbeta(1,1,0.2,0.6);
 //Невозвращенные при дефолте средства (для простоты зафиксируем их на уровне 1000 $,
 //но она может меняться случайным образом)

 ead_all=1000*ones(rows(pd_all),1);

 //Коэффициент чувствительности beta_i фиксированный

 beta_i=0.4;

 //Случайный (предположим, что он был оценен для каждой
 //компании методом наименьших квадратов)
 //beta_i=rndu(rows(pd_all),1);
 //Порог дефолта: для простоты будем использовать
 //обращение нормального распределения для ВД

 dt_all=cdfni(pd).*.ones(number_ob,1);
 //Моделируем фактор

 zz=rndn(1,1);
 //Генерируем логдоходности стоимостей активов
 //для всех компаний

 a_i_all = beta_i.*zz + sqrt(1-beta_i ).*rndn(rows(pd_all),1);

 //Убыток на заем

 loss_i=lgd_all.*ead_all.*(a_i_all._      ;

 //Убыток портфеля

 port_loss=sumc(loss_i);
 port_all[i,1]=port_loss;
endfor;

//Покажем эмпирическую функцию распределения портфеля

library pgraph; _pdate=0; xlabel("PORTFOLIO LOSSES");  histp(port_all,100);
"Time requested to simulated the portfolio loss distribution
(in seconds)";
ht=hsec-et;ht/100;
"VaR 99 %"; quantile(port_all,0.99);
```

Величина смоделированной границы потерь 99%-го доверительного уровня должна быть близка к значению 327150 долл., а смоделированная гистограмма убытков портфеля — быть похожа на функцию распределения, представленную на рис. 6.

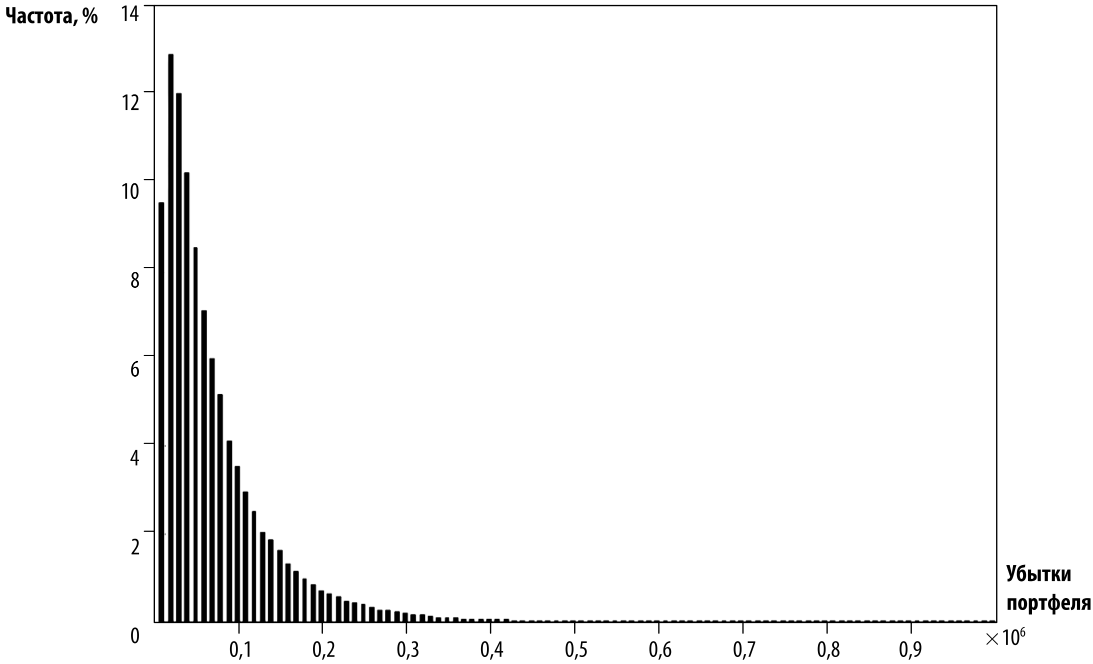

Рис. 6. Гистограмма для убытков портфеля для однофакторной модели

Список литературы

Фантаццини Д. Управление кредитным риском // *Прикладная эконометрика*. 2008. № 4(12). С. 84–138.

Bharath S. and *Shumway T.* Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model // *Review of Financial Studie*. 2008. № 21(3). P. 1339–1369.

Carty L. and *Lieberman D.* Defaulted bank loan recoveries // *Moody's Special Report*. 1996

Crosbie, P. and Bohn, J. Modeling Default Risk. Moody's KMV. Technical document. 2001–2003.

Fantazzini D., Degiuli E. and M. Maggi (2008a). A new Approach for Firm Value and Default Probability Estimation beyond the Merton Models Computational Economics // *Computational Economics*. 2008a. № 31(2). C. 161–180.

Hao H. Is the Structural Approach More Accurate than the Statistical Approach in Bankruptcy Prediction? Queen's School of Business. Working Paper. 2006.

Gupton G. M., Finger C. C. and Bhatia M. CreditMetrics. Technical documentю J. P. Morgan and Co.

Jarrow R., Turnbull S. Derivative Securities: The Complete Investor's Guide, South-Western Publications. 1999.

Johnson N., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous Univariate Distributions // *Wiley Series in Probability and Statistics*. 1994. Vol. 1

Lucas D. Default Correlation and Credit Analysis // *I of Fixed Income*. 1995. № 11. C. 76–87.

Wilson T. Measuring and Managing Credit Portfolio Risk:Part I: Modelling Systematic Default Risk // *J. of Lending and Credit Risk Management*. 1997a. P. 61–72.

Wilson T. Measuring and Managing Credit Portfolio Risk: Part II: Portfolio Loss Distributions // *J. of Lending and d Credit Risk Management*. 1997b. P. 67–78.