ПРИКЛАДНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА
№ 2(6) 2007

Л. Н. Слуцкин

Анализ стабильности модели линейной регрессии во времени

В статье рассматривается несколько наиболее распространенных тестов на стабильность во времени классической модели линейной регрессии. Отдельно изучается случай, когда момент возможного структурного изменения заранее неизвестен.

Рассмотрим классическую модель линейной регрессии:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{(1)} + \beta_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta_k X_i^{(k)} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, T, \tag{1}$$

где случайные члены $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ — независимые нормальные случайные величины с одинаковым средним, равным 0, и стандартным отклонением $\sigma > 0$ ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$). Регрессоры $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ предполагаются детерминированными на протяжении всего интервала наблюдения от 1 до T. **Коэффициенты регрессии $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ считаются при этом константами**. Как всегда, при рассмотрении модели (1), ранг матрицы, составленной из значений регрессоров, равен k. При изучении модели линейной регрессии на стабильность, обычно предполагается, что значения индекса i соответствуют последовательным моментам времени. Однако для большинства свойств модели (1), которые мы будем здесь изучать, достаточно предположить, что T наблюдений упорядочены некоторым, возможно, произвольным образом.

Модель (1) является основным рабочим инструментом, как в теоретической, так и в прикладной эконометрике. Мы предполагаем, что читатель знаком с ее основными свойствами [Айвазян (2001)].

1. Тестирование на спецификацию модели

Гипотеза H_0 об истинности модели (1) сравнивается с гипотезой H_1 относительно количества регрессоров и функциональной формы $E(Y_i)$. В этом разделе (за исключением RESET-теста) мы предполагаем, что как регрессоры модели, ассоциированной с H_1, так и соответствующая функциональная форма заранее известны.

Рассмотрим сначала случай, когда альтернативная модель также является классической моделью линейной регрессии и включает в себя модель (1) при определенных ограничениях на параметры. Такие модели называются **вложенными** (**nested models**). Таким образом, в качестве гипотезы H_1 принимается истинность линейной модели:

$$Y_i = \beta'_1 X_i^{(1)} + \beta'_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'_k X_i^{(k)} + \beta''_1 X_i^{(1)} + \beta''_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta''_m X_i^{(m)} + \varepsilon'_i \quad i = 1, 2, \ldots, T, \tag{1.1}$$

с m — дополнительными регрессорами $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m)}$, и $\varepsilon'_i \sim N(0, \sigma^2)$ при условии, что хотя бы один из коэффициентов при $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m)}$ не равен 0.

В данном контексте модель (1) будет **ограниченной**, так как она получается из модели (1.1) путем наложения *ограничений* на коэффициенты $\beta''_1, \beta''_2, \ldots, \beta''_m$:

$$\beta_1'' = \beta_2'' = \ldots = \beta_m'' = 0.$$

Соответственно модель (1.1) — **неограниченная**.

Гипотеза H_0 отвергается, если достаточно оснований считать, что хотя бы один из коэффициентов $\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_m''$ не равен нулю. Любой учебник по эконометрике содержит следующий результат:

если гипотеза H_0 — справедлива, то статистика

$$\frac{(\mathrm{RSSR} - \mathrm{USSR})/m}{\mathrm{USSR}/[T-(k+m)]} \tag{1.2}$$

следует $F(m,\ T\text{-}k\text{-}m)$-распределению.

Величина RSSR (restricted sum of squared residuals) в (1.2) равна сумме квадратов остатков регрессии Y по регрессорам $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ в модели (1), полученных методом наименьших квадратов (МНК), и USSR (unrestricted sum of squared residuals) — сумма квадратов остатков регрессии Y по регрессорам $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}; Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m)}$ в модели (1.1).

Таким образом, гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости, равном α, если значение F-статистики в (1.2) превосходит критическое значение F_α, которое определяется из формулы:

$$\mathrm{Prob}(F(m, T\text{-}k\text{-}m) > F_\alpha) = \alpha. \tag{1.3}$$

В противном случае гипотеза H_0 принимается. Формула (1.2) является основой для многих других тестов, часть из которых мы собираемся изучить.

Рассмотрим случай **невложенных моделей** (**nonnested models**). То есть ни одна из моделей не получается из другой при заданных значениях коэффициентов.

Пусть мы имеем модель, соответствующую гипотезе H_1:

$$Y_i = \beta_1' Z_i^{(1)} + \beta_2' Z_i^{(2)} + \ldots + \beta_m' Z_i^{(m)} + \varepsilon_i' \quad i = 1, 2, \ldots, T, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon_i' \sim N(0, \sigma^2)$. Мы предполагаем, что модели (1) и (1.4) — невложенные.

Рассмотрим регрессоры $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ и $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m)}$. Мы всегда можем выбрать часть регрессоров $Z'^{(1)}, Z'^{(1)}, \ldots, Z'^{(n)}$, $n \le m$, из второй группы, так чтобы выполнялись следующие условия:

- регрессоры $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}; Z'^{(1)}, Z'^{(2)}, \ldots, Z'^{(n)}$ — линейно независимые;
- регрессоры $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}; Z'^{(1)}, Z'^{(2)}, \ldots, Z'^{(n)}$ порождают то же линейное подпространство, что и первоначальный набор $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ *и* $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m)}$.

В таком случае модель:

$$Y_i = \beta_1'' X_i^{(1)} + \beta_2'' X_i^{(2)} + \ldots + \beta_k'' X_i^{(k)} + \gamma_1 Z_i^{(1)} + \gamma_2 Z_i'^{(2)} + \ldots + \gamma_n Z_i'^{(n)} + \varepsilon_i'' \quad i = 1, 2, \ldots, T \tag{1.5}$$

включает в себя (1) и (1.4). Теперь мы можем сравнить модели (1) и (1.5). Для этого применим формулу (1.2) на одновременное равенство всех параметров $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ нулю. Степени свободы соответствующей F-статистики — n и $T\text{-}k\text{-}n$.

Пример [Maddala (2001)]. Модели $C = \alpha_1 + \beta_1 A + \varepsilon'$ (кейнсианская) и $C = \alpha_2 + \beta_2 M + \varepsilon''$ (монетаристская) представляют пример невложенных моделей. Здесь C — потребительские расходы, A — располагаемый доход, M — денежная масса. Если в качестве H_0 мы примем кейнсианскую модель, то тестированию ($\gamma = 0$) подвергнется модель $C = \alpha + \beta A + \gamma M + \varepsilon$.

Если функциональная форма E(Y$_i$) альтернативной модели не известна, то часто рассматривают дополнительные регрессоры вида всевозможных (или их части) произведений $X^{(i)}X^{(j)}$ исходных регрессоров $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$, включая и их квадраты. Произведения более высокой степени обычно не рассматриваются.

RESET-тест [Ramsey (1969)] используется при отсутствии информации о функциональной форме E (Y$_i$). Например, когда коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ модели (1) являются произвольными функциями от времени. Таким образом, RESET-тест одновременно является и тестом модели на стабильность.

Сначала рассматриваются модельные значения $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots, \hat{Y}_n$, полученные МНК из уравнения (1). В качестве альтернативы берется модель:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{(1)} + \beta_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta_k X_i^{(k)} + \gamma \hat{Y}_i^2 + \varepsilon_i' \quad i = 1, 2, \ldots, T, \tag{1.6}$$

затем проверяется гипотеза, что $\gamma \neq 0$.

В литературе можно встретить модели типа (1.6), в которых присутствуют более высокие степени $\hat{Y}(\hat{Y}^3, \hat{Y}^4, \ldots)$. Однако опыт показывает, что в большинстве случаев модель (1.6) дает лучшие результаты [Davidson, MacKinnon (2004)].

2. Тестирование на стабильность коэффициентов модели

Предположение о постоянстве (стабильности) коэффициентов регрессии $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ на протяжении всего времени T, особенно при достаточно долгом наблюдении, как правило, вступает в противоречие с экономической реальностью.

2.1. Тесты Чоу

Тест Чоу [Chow (1960)] — один из самых ранних на стабильность коэффициентов регрессии (1)[1]. В тесте Чоу нулевая гипотеза H_0 о постоянстве коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ на всем интервале от 1 до T сравнивается с гипотезой H_1 о наличии *заранее известного момента* t_0, $1 < t_0 < T$, после которого происходит изменение части или всех коэффициентов модели (1). В действительности имеются два теста Чоу для тестирования H_0. Рассмотрим первый из них.

Первый тест Чоу[2]. Предположим, что после прохождения момента t_0, вектор параметров $\beta' = (\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_k')$ линейной модели, возможно, изменился на вектор $\beta'' = (\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_k'')$. Мы также допускаем, что среди наблюдений могут быть пропущенные. Другими словами, значения i в (1) соответствуют, хотя и последовательным, но не обязательно равностоящим моментам времени. Таким образом, мы имеем: H_0: $\beta' = \beta''$ и H_1: $\beta' \neq \beta''$.

[1] Примененный к пространственным данным тест Чоу является проверкой на *однородность* (в смысле регрессионного анализа) исходной информации.

[2] Тест, аналогичный первому тесту Чоу, упоминается в книге C. Rao. Advanced statistical methods in biometric research. New York, Wiley, 1952.

Предположим, что имеются n_1 наблюдений на временном промежутке $1 < t \le t_0$ и соответственно n_2 от $t_0 < t \le T$. Таким образом, рассматриваются две модели:

$$Y_i = \beta'_1 X_i^{(1)} + \beta'_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'_k X_i^{(k)} + \varepsilon'_i \quad i = 1, 2, \ldots, n_1; \tag{2.1}$$

$$Y_i = \beta''_1 X_i^{(1)} + \beta''_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta''_k X_i^{(k)} + \varepsilon''_i \quad i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2. \tag{2.2}$$

Модели (2.1) и (2.2) можно записать как одну модель:

$$Y_i = \beta'''_1 X_i^{(1)} + \beta'''_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'''_k X_i^{(k)} + \gamma_1 Z_i^{(1)} + \gamma_2 Z_i^{(2)} + \ldots + \gamma_k Z_i^{(k)} + \varepsilon'''_i \quad i = 1, \ldots, n_1 + n_2, \tag{2.3}$$

где $Z_i^{(j)} = 0$ при $i \le n_1$, и $Z_i^{(j)} = X_i^{(j)}$ при $n_1 < i \le n_1 + n_2$, для всех $j = 1, \ldots, k$. Таким образом, гипотеза H_0 эквивалентна условию, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Если мы обозначим остатки модели линейной регрессией (2.1), полученные МНК — $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n_1}$, модели (2.2) — $e''_1, e''_2, \ldots, e''_{n_2}$ и модели (1) — $e_1, e_2, \ldots, e_{n_1+n_2}$, то из $\beta' = \beta''$ вытекает, что статистика:

$$\frac{\left[\sum e_i^2 - \left(\sum e_i'^2 + \sum e_i''^2\right)\right] / k}{\left(\sum e_i'^2 + \sum e_i''^2\right) / (n_1 + n_2 - 2k)} \tag{2.4}$$

следует $F(k, n_1 + n_2 - 2k)$-распределению и называется **статистикой Чоу** для гипотезы H_0. Тест осуществляется при заранее выбранном уровне значимости α. В случае, когда Чоу-статистика превышает критическое значение $F_\alpha(k, n_1 + n_2 - 2k)$, гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости, равном α. В противном случае гипотеза H_0 принимается.

Нужно заметить, что подобный тест можно применять также и при проверке на стабильность лишь одного или нескольких коэффициентов модели (1). Здесь поступают точно так же, как и при проверке на равенство 0 (при данном уровне значимости α) части коэффициентов β'' в модели (1.1). То есть проводится F-тест на одновременное равенство 0 соответствующих коэффициентов γ в модели (2.3).

Важно еще раз подчеркнуть, что тест Чоу предполагает, что момент структурного изменения t_0 известен заранее. Однако на практике часто поступают следующим образом. Статистика (2.4) подсчитывается для всех t на некотором промежутке $[t_1; t_2]$, на котором, по мнению исследователя, могли произойти структурные изменения. Затем в качестве переломного момента выбирается тот, при котором статистика Чоу превысила допустимое критическое значение и которое лучше всего согласуется с экономической теорией.

Если имеется несколько точек возможного *структурного изменения*[3], например, $t_1, t_2, \ldots, t_r$, то последовательно проверяются моменты времени, соответствующие каждому t_i, $1 \le i \le r$, на **всем** интервале значений временного ряда от 1 до T.

Со статистической точки зрения такой подход ошибочен, так как вероятность того, что хотя бы в одной из точек интервала $[t_1; t_2]$ статистика (2.4) превысит критическое значе-

[3] Подобные изменения могут иметь как макроэкономический (резкие изменения цен, девальвация национальной валюты, введение новой статьи в законодательство или изменение налоговой ставки и т. д.), так и микроэкономический (смена менеджмента и/или производственного процесса, слияние с другой фирмой и т. д.) характер.

ние, будет больше α при выполнении гипотезы H_0. Однако, если соответствующее P-значение намного меньше α, то применение этого метода может быть оправдано.

В заключение мы заметим, что первый тест Чоу предполагает, что количество наблюдений в каждой из моделей (2.1) и (2.2) больше, чем k ($k < n_1$ и $k < n_2$). Следующий тест Чоу в этом смысле является более общим.

Предсказательный тест Чоу (Chow predictive test). Мы по-прежнему предполагаем, что до момента t_0 включительно процесс следовал линейной модели с вектором параметров $\beta' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_k)$. Однако после момента t_0 поведение модели стало неопределенным. Возможно, изменился набор регрессоров или даже функциональная форма $E(Y_i)$. Рассмотрим модель:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta'_1 X_i^{(1)} + \beta'_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'_k X_i^{(k)} + \varepsilon'_i \quad i = 1, 2, \ldots, n_1; \\ Y_i &= \beta'_1 X_i^{(1)} + \beta'_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'_k X_i^{(k)} + \gamma_i + \varepsilon'_i \quad i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

которая в действительности является объединением двух моделей — одной для первых n_1 и другой — для последних n_2 наблюдений. Таким образом,

$$E(Y_i) = \beta'_1 X_i^{(1)} + \beta'_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta'_k X_i^{(k)} + \gamma_i$$

для значений $i > n_1$.

Гипотеза H_0, что все $\gamma_i = 0$, $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, одновременно равны нулю сравнивается с альтернативной гипотезой H_1, что хотя бы одно из γ_i не равно 0.

Рассмотрение γ_i, $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, в (2.5) эквивалентно введению фиктивных переменных D_i, $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, принимающих значение 1 для i-го уравнения и 0 для всех остальных.

Так как γ_i могут принимать любые значения, то при нахождении остатков МНК в (2.5), мы можем считать, что e'_i, соответствующие первому уравнению модели, будут такими же, если бы мы рассматривали его отдельно, а все остатки, соответствующие второму уравнению будут равны 0[4].

Таким образом, H_0 отклоняется, если F-статистика:

$$\frac{\left[\sum e_i^2 - \sum e_i'^2\right] / n_2}{\sum e_i'^2 / (n_1 - k)} \qquad (2.6)$$

принимает значения, превосходящие $F_\alpha(n_2, n_1 - k)$. Здесь $e_1, e_2, \ldots, e_{n_1+n_2}$ — регрессионные остатки, соответствующие уравнению (1), а $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n_1}$ — первому уравнению (2.5).

В предсказательной модели Чоу достаточно только предположить, что $k < n_1$. Поэтому ее обычно применяют в случае $n_2 \le k$, либо при значении $n_2 << n_1$. Это вызвано тем фактом, что введение большого количества фиктивных переменных во второе уравнение модели (2.5) значительно ослабляет мощность теста.

---

[4] Отсюда следует, что γ_i, $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$, равно прогнозному значению остатка для i-го наблюдения, соответствующего первому уравнению линейной регрессии (2.5). Этому факту и обязан названием тест «предсказательный».

Заметим, что при применении обоих тестов Чоу ($k < n_1$ и $k < n_2$), могут получаться различные результаты.

2.2. Рекурсивные тесты

Следующая группа тестов, называемых **рекурсивными**, выгодно отличается от теста Чоу в том, что не требует знания заранее заданной точки структурного изменения. Однако, когда такая точка все же известна, тест Чоу имеет большую мощность.

Рассмотрим снова классическую модель линейной регрессии:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{(1)} + \beta_2 X_i^{(2)} + \ldots + \beta_k X_i^{(k)} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, T. \tag{2.7}$$

2.2.1. Эмпирический тест на стабильность коэффициентов регрессии

Мы будем последовательно оценивать коэффициенты регрессии модели (2.7) на временном интервале от 1 до r, для каждого r, $k \le r \le T$, посредством МНК:

$$\boldsymbol{b_r} = \left[M_r' M_r\right]^{-1} M_r' \boldsymbol{Y_r}, \tag{2.8}$$

где M_r — ($r \times k$)-матрица, составленная из значений регрессоров, соответствующих первым r наблюдениям:

$$M_r = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} X_1^{(2)} \ldots X_1^{(k)} \\ X_2^{(1)} X_2^{(2)} \ldots X_2^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_r^{(1)} X_r^{(2)} \ldots X_r^{(k)} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

и вектор $\boldsymbol{Y_r'} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_r)$.

Мы напомним, что вектор $\boldsymbol{b_r'} = (b_{1,r}, b_{2,r}, \ldots, b_{k,r})$ является несмещенной оценкой ненаблюдаемого вектора коэффициентов модели $\boldsymbol{\beta'} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$. Из предположения о стабильности во времени модели (2.7) следует, что координаты вектора $\boldsymbol{b_r'}$ должны совершать (возможно, непериодические и с различной амплитудой) колебания вокруг некоторых равновесных значений, соответствующих координатам вектора $\boldsymbol{\beta'}$. Поступательное движение хотя бы одной из координат, вверх или вниз, будет свидетельствовать о том, что либо модель неверно специфицирована, либо нарушено предположение о стабильности параметров. Визуальное исследование графиков координат $\boldsymbol{b_r'}$ во времени ($t = k, \ldots, T$) может оказаться также полезным для определения точек структурного изменения модели, если таковые имеются.

2.2.2. Рекурсивный тест остатков уравнений регрессии

Знание вектора $\boldsymbol{b_r'} = (b_{1,r}, b_{2,r}, \ldots, b_{k,r})$ в формуле (2.8), дает нам возможность определить для каждого $r = k, \ldots, T - 1$ как следующее прогнозное значение зависимой переменной:

$$\hat{Y}_{r+1} = \boldsymbol{X_{r+1}'} \boldsymbol{b_r}, \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{X_{r+1}}$ — вектор значений регрессоров, соответствующих r+1 наблюдению, так и соответствующий остаток:

$$\hat{e}_{r+1} = Y_{r+1} - \hat{Y}_{r+1}. \tag{2.11}$$

Дисперсия прогнозного значения $\hat{e}_{r+1}$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Var}(\hat{e}_{r+1}) = \sigma^2(1+\boldsymbol{X}'_{r+1}[M'_r, M_r]^{-1}\boldsymbol{X}_{r+1}. \qquad (2.12)$$

Тест основан на следующем свойстве прогнозных остатков.

Прогнозные остатки $\hat{e}_{k+1}$, $\hat{e}_{k+2}$, ... являются независимыми случайными величинами.

Для полноты изложения мы приведем доказательство этого важного факта. Поскольку

$$Y_{r+1} = \boldsymbol{X}'_{r+1}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{r+1}, \qquad (2.13)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — k-мерный вектор параметров модели (2.7), то из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\hat{e}_{r+1} = \varepsilon_{r+1} - \boldsymbol{X}'_{r+1}(\boldsymbol{b_r} - \boldsymbol{\beta}). \qquad (2.14)$$

Формула для $\boldsymbol{b_r} - \boldsymbol{\beta}$ следует из формулы (2.8) и равенства $\boldsymbol{Y}_r = M_r\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_r$:

$$\boldsymbol{b_r} - \boldsymbol{\beta} = [M'_r, M_r]^{-1}M'_r\boldsymbol{\epsilon}_r, \qquad (2.15)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}_r = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ — вектор ошибок модели (2.7), соответствующий первым r наблюдениям. Окончательно, для прогнозного остатка $\hat{e}_{r+1}$, из (2.14) и (2.15) получаем:

$$\hat{e}_{r+1} = \varepsilon_{r+1} - \boldsymbol{X}'_{r+1}[M'_r, M_r]^{-1}M'_r\boldsymbol{\epsilon}_r. \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.16) следует, что прогнозный остаток является нормальной случайной величиной. Поэтому для их взаимной независимости достаточно показать, что они не коррелированны, т. е. $E(\hat{e}_u\hat{e}_v) = 0$, $u \neq v$. Предположим, что $u < v$. Если мы запишем векторы $M'_{u-1}\boldsymbol{\epsilon}_{u-1}$ и $M'_{v-1}\boldsymbol{\epsilon}_{v-1}$ как $\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i$ и $\sum_{i-1}^{v-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i$ соответственно, то из того факта, что ошибки модели (2.7) взаимно независимы и имеют математические ожидания, равные нулю, имеем:

$$E(\hat{e}_u\hat{e}_v) = E\left\{\left(\varepsilon_u - \boldsymbol{X'_u}[M'_{u-1}M_{u-1}]^{-1}\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\right)\left(\varepsilon_v - \boldsymbol{X'_v}[M'_{v-1}M_{v-1}]^{-1}\sum_{i-1}^{v-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\right)\right\} =$$

$$= -\sigma^2\boldsymbol{X'_v}[M'_{v-1}M_{v-1}]^{-1}\boldsymbol{X_u} + E\left(\boldsymbol{X'_u}[M'_{u-1}M_{u-1}]^{-1}\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\boldsymbol{X'_v}[M'_{v-1}M_{v-1}]^{-1}\sum_{i-1}^{v-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\right) =$$

$$= -\sigma^2\boldsymbol{X'_v}[M'_{v-1}M_{v-1}]^{-1}\boldsymbol{X_u} + E\left(\boldsymbol{X'_u}[M'_{u-1}M_{u-1}]^{-1}\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\sum_{i-1}^{v-1}\boldsymbol{X'_i}\varepsilon_i[M'_{v-1}M_{v-1}]^{-1}\boldsymbol{X_v}\right).$$

Последняя строчка равна нулю, так как

$$E\left(\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\varepsilon_i\sum_{i-1}^{v-1}\boldsymbol{X'_i}\varepsilon_i\right) = \sigma^2\sum_{i-1}^{u-1}\boldsymbol{X_i}\boldsymbol{X'_i} = \sigma^2M'_{u-1}M_{u-1}.$$

Перед проведением теста прогнозные остатки $\hat{e}_{k+1}, \hat{e}_{k+2}, \ldots, \hat{e}_T$ делятся на квадратные корни из соответствующих значений дисперсий из (2.12). Обозначим полученные величины w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_T. Таким образом,

$$w_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = k+1, \ldots, T. \qquad (2.17)$$

Так как дисперсия σ^2 — ненаблюдаемая, заменим ее на выборочную:

$$s^2 = \frac{(w_{k+1} - \overline{w})^2 + (w_{k+2} - \overline{w})^2 + \ldots + (w_T - \overline{w})^2}{T - (k+1)}, \qquad (2.18)$$

где $\overline{w}$ — арифметическое среднее чисел $w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_T$.

Теперь можно перейти к самому тесту[5]. Строится полоса $A = \pm 1{,}96s$ (или $\pm 1{,}96$, если величины $w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_T$ были предварительно нормированы делением на s). Так как случайные величины $w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_T$ взаимно независимы, то попадание w_i в полосу A представляет собой испытание по схеме Бернулли с вероятностью $p = 0{,}95$. Выбирается наименьшее целое положительное число G, так, чтобы выполнялось условие

Prob (более чем G испытаний из $(T - k)$ не попадет в A) $< \alpha$,

где α заданный уровень значимости. Очевидно, что значение G зависит от $T - k$. Если окажется, что количество w_i, не попавших в полосу A, больше, чем G, то гипотеза H_0 о том, что процесс следует классической модели линейной регрессии отвергается.

2.3. CUSUM-тесты

В действительности мощность предыдущего рекурсивного теста остатков уравнений регрессии является довольно слабой, так как здесь учитываются только абсолютные значения прогнозных остатков. Выход за пределы полосы A свидетельствует скорее о гетероскедастичности процесса, чем об отсутствии стабильности во времени. Следующие два теста, разработанные Брауном, Дарбином и Эвансом [Brown et al. (1975)] свободны от данного недостатка.

CUSUM (cumulative sums)-тест. Рассмотрим последовательность сумм $W_{k+1}, W_{k+2}, \ldots, W_T$,

$$W_r = \hat{\sigma}^{-1} \sum_{i=k+1}^{r} w_i, \quad r = k+1, \ldots, T, \qquad (2.19)^6$$

где $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-k} \sum_{i=1}^{T} e_i^2$ — сумма квадратов остатков регрессии модели (2.7), полученных МНК, на всем промежутке от 1 до T. В дальнейшем мы будем считать, что $\hat{\sigma} \approx \sigma$.

Заметим, что

$$E(W_r) = 0, \ \mathrm{Var}(W_r) = r - k. \qquad (2.20)$$

Можно считать, что случайные величины $W_{k+1}, W_{k+2}, \ldots$ аппроксимируются Винеровским процессом[7]. Для заданного уровня значимости α строится прямая линия на плоскости через точки $(k; a(T-k)^{1/2})$ и $(T; 3a(T-k)^{1/2})$ и симметричная ей, относительно оси OX (значения для r), линия через точки $(k; -a(T-k)^{1/2})$ и $(T; -3a(T-k)^{1/2})$. Гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости α, если хотя бы одно из значений $W_{k+1}, W_{k+2}, \ldots, W_T$ выйдет за пределы области, ограниченной двумя прямыми. Значение a зависит от α. Так $a = 0{,}948$ соответствует уровню значимости $\alpha = 5\%$, и $a = 1{,}143$ соответствует $\alpha = 1\%$.

---

[5] Предполагается, что $s \approx \sigma$.

[6] В качестве $\hat{\sigma}$ можно было также взять s в формуле (2.18).

[7] Детали в работе [Brown et al. (1975)].

Кроме проверки гипотезы H_0, CUSUM-тест часто используется для общей оценки поведения процесса с точки зрения его стабильности. Здесь важнее изменение в целом значений $W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_T$, чем просто выход за пределы полосы в нескольких изолированных точках.

CUSUM-of-squares-тест основан на рассмотрении сумм квадратов чисел $w_{k+1}^2, w_{k+2}^2, \dots$ При выполнении гипотезы H_0, математическое ожидание Бета-статистики:

$$B_r = \sum_{i=k+1}^{r} w_i^2 \Big/ \sum_{i=k+1}^{T} w_i^2, \; r = k+1, \dots, T \qquad (2.21)$$

равно $(r-k)/(T-k)$ [Уилкс (1967)]. Таким образом, $E(B_r)$ располагаются на плоскости вдоль прямой L, соединяющей точки $(k; 0)$ и $(T; 1)$. При тестировании, для заданного уровня значимости α, строится полоса вокруг L шириной $2c$. Значение c зависит от α и находится из таблицы [Johnston, DiNardo (1997)]. Факт выхода значений $B_{k+1}, \dots, B_T$ за пределы полосы свидетельствует об отходе от стабильности.

Оба CUSUM-теста призваны дополнять друг друга. Авторы [Brown et al. (1975)] советуют применять CUSUM-of-squares-тест в том случае, когда первый CUSUM-тест не указывает на систематическое отклонение процесса от стабильности. Как и рекурсивные, CUSUM-тесты не предполагают предварительного задавания точки структурного изменения.

2.4. Тесты Хансена

Хансен [Hansen (1992)] предложил следующие два теста для проверки коэффициентов модели (2.7) на стабильность. В отличие от тестов, описанных в разделах 2. 3 и 2. 4, они не являются рекурсивными и определяются значениями Y на всем рассматриваемом интервале. В основе обоих тестов лежат равенства, выражающие свойства ортогональности остатков к значениям регрессоров:

$$\sum_{i=1}^{T} X_i^{(j)} e_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k. \qquad (2.22)$$

При наличии стабильности, частичные суммы:

$$S_{j,r} = \sum_{i=1}^{r} X_i^{(j)} e_i, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad 1 \le r \le T \qquad (2.23)$$

будут совершать колебания около 0.

Первый тест Хансена проверяет на стабильность отдельно взятый коэффициент β_j, $1 \le j \le k$. Для этого рассмотрим статистику:

$$L_j = \frac{1}{nV_j} \sum_{r=1}^{T} S_{j,r}^2, \qquad (2.24)$$

где $V_j = \sum_{i=1}^{T} (X_i^{(j)} e_i)^2$.

Гипотеза H_0 отвергается, если L_j превосходит критическое значение, соответствующее заданному уровню значимости α.

Второй тест Хансена. Тот факт, что некоторые значения $L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}$ превысят критические значения еще не означает нестабильности процесса, оцененного при данном уровне значимости α. Следующий тест как раз предназначен для определения совместной стабильности коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Для этого Хансен вводит дополнительно частичные суммы вида:

$$S_{k+1,r} = \sum_{i=1}^{r} (e_i^2 - \hat{\sigma}^2), \quad r = 1, 2, \ldots, T, \tag{2.25}$$

где $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} e_i^2$. Отсюда следует, что $S_{k+1,T} = 0$.

Гипотеза H_0 отвергается, если статистика L_C принимает значения, превосходящие критическое значение, соответствующее уровню значимости α.

$$L_C = \frac{1}{T}\sum_{r=1}^{T} S_r' V^{-1} S_r, \tag{2.26}$$

где (k+1)-вектор $\boldsymbol{S_r} = (S_{1,r}, \ldots, S_{k+1,r})$, и матрица V размера (k+1)×(k+1) определяется из формулы:

$$V = \sum_{i=1}^{T} \boldsymbol{f_i f_i'}, \quad \boldsymbol{f_i} = (X_i^{(1)} e_i, X_i^{(2)} e_i, \ldots, X_i^{(k)} e_i, e_i^2 - \hat{\sigma}^2)', \quad i = 1, 2, \ldots, T. \tag{2.27}$$

Распределения статистик (2.24) и (2.26) зависят от матрицы M_T, т. е. от значений всех регрессоров на промежутке от 1 до T. Для определения соответствующих критических значений (при данном уровне значимости α) можно воспользоваться методом Монте-Карло.

Хансен определил ряд критических значений [Johnston, Dinardo (1997)] для асимптотических распределений L_j и L_C при $\alpha = 10\%$, 5% и 1%[9].

Список литературы

Айвазян С. А. Основы эконометрики. Изд. 2. Т. 2. М.: Юнити, 2001.

Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.

Brown B., J. Durbin, J. Evans. Techniques for testing the constancy of regression relationships over time // *Journal of the Royal Statistical Society*.1975. № 37. Series B.

Chow G. Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions // Econometrica. 1960. № 28.

Davidson R., MacKinnon J. Econometric theory and methods. New York: Oxford University Press, 2004.

Hansen Bruce E. Testing for parameter instability in linear models // *Journal of policy modeling*. 1992. № 14.

Johnston J., DiNardo J. Econometric Methods. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1997.

Maddala G. S. Introduction to Econometrics. 3d ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.

Ramsey J. Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis//*Journal of the Royal Statistical Society*.1969. № 31.Series B.

[9] Асимптотические распределения существуют при условии, что все переменные модели — слабо стационарны.