ПРИКЛАДНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА

№ 3(15) 2009

С. А. Айвазян, М. Ю. Афанасьев

Оценка экономической эффективности перехода к достижимому потенциалу[1]

В развитие концепции стохастической границы приводятся оценки ожидаемого увеличения объема производства при переходе к достижимому производственному потенциалу. Прогнозируется ожидаемый экономический эффект мероприятия по повышению эффективности производства. Приводится распределение экономического эффекта, позволяющее анализировать риски, связанные с реализацией мероприятия.

1. Граничный и достижимый производственные потенциалы

Для описания зависимости результатов производственного процесса от объемов основных факторов производства будем, как в [Айвазян, Афанасьев (2007)], [Афанасьев (2006)], использовать классическую производственную функцию Кобба—Дугласа вида:

$$\hat{P}_i = \exp\{\beta_0\} L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2},$$

где $\hat{P}_i$ — объем производства i-го объекта, $i = 1, ..., N$ за фиксированный период времени (год, месяц);
L_i — объем использованных при этом трудозатрат;
K_i — объем основных фондов на i-м объекте;
$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — параметры производственной функции.

Иногда в эту функцию включают и другие факторы, влияющие на объемы производства.

Такой вид производственной функции характерен для *детерминированного* описания производственного процесса без учета воздействия неизбежно присутствующих случайных факторов.

Для того чтобы учесть результаты случайных воздействий на процесс производства, используют *стохастическую* производственную функцию

$$P_i = \exp\{\beta_0\} L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} \exp\{\varepsilon_i\}, \tag{1}$$

где ε_i — случайная величина, характеризующая результат случайных воздействий на объем производства i-го объекта (так что здесь и далее P_i — случайная величина).

Прологарифмировав выражение (1), получим линейную зависимость

$$\ln P_i = \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \varepsilon_i.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-07-00 219а).

Обозначим $\ln P_i$ через y_i, $\ln L_i$ — через $x_i^{(1)}$, $\ln K_i$ — через $x_i^{(2)}$, логарифмы значений остальных возможных факторов обозначим через $x_i^{(3)},\dots,x_i^{(p)}$ (если же они не наблюдаются, то полагают $x_i^{(3)}=0,\dots,x_i^{(p)}=0$). Тогда наша модель примет вид:

$$y_i \equiv \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + \varepsilon_i.$$

Концепция стохастической граничной производственной функции [Meeusen, van den Broeck (1977)], [Aigner, Lovell, Schmidt (1977)] основана на разделении всех случайных воздействий на *«систематические»*, оказывающие сбалансированное («разнонаправленное») воздействие на результат производственного процесса сопутствующих факторов, и *«несистематические»*, приводящие к снижению результатов и появлению неэффективности. Соответственно случайная составляющая производственной функции разделяется на две компоненты:

$$\varepsilon_i = V_i - U_i,$$

где V_i — случайная величина, характеризующая влияние на i-й объект множества факторов, вызывающих систематические воздействия, поэтому в рамках модельных допущений можно считать, что V_i имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и постоянной дисперсией, т. е. $V_i \in N(0;\ \sigma_V^2)$;

U_i — неотрицательная, независимая от V_i случайная величина, характеризующая влияние факторов неэффективности на объем производства i-го объекта.

Модель

$$P_i = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + V_i - U_i\right\} \quad (2)$$

описывает случайную величину, характеризующую фактический объем производства i-го объекта. Если исключить из производственного процесса все факторы неэффективности, то в силу неотрицательности распределения U_i данный объем производства повысится до уровня

$$P_i^{pot} = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + V_i\right\}. \quad (3)$$

Описанную таким образом зависимость результата производственного процесса от значений основных производственных факторов при исключенном воздействии факторов неэффективности принято называть *граничным производственным потенциалом*.

Техническую эффективность i-го объекта, характеризующую отличие фактического результата производства от потенциально возможного, определяют по формуле

$$TE_i = \frac{P_i}{P_i^{pot}} = \exp\{-U_i\}.$$

Заметим, что TE_i является случайной величиной, с вероятностью 1 принимающей значения из интервала $(0;1]$ (т. е. плотность распределения TE_i имеет носитель $(0;1]$), так как $0 < P_i \le P_i^{opt}$ в силу $U_i \ge 0$. Именно величины TE_i представляют ключевой экономический интерес на этапе получения результатов после практического применения модели. Однако при оценивании технической эффективности может возникнуть затруднение, обусловленное способом построения модели, в частности, связанное с тем, что случайные величины U_i ненаблюдаемы, а значит, получить их численные реализации на практике невозможно. Выходом из данного положения представляется правильный (в зависимости от конкретной экономической ситуации) подбор характеристик распределения случайной величины U_i (например, матожидания, дисперсии, моды и т. д.), методы получения оценок которых на текущий момент известны. Введя в модель адекватную и удобную для оценок параметризацию распределения случайных величин U_i, переходят к анализу характеристик случайной величины TE_i.

Введение в модель факторов неэффективности. В соответствии с [Battese, Coelli (1988)] будем рассматривать U_i как независимую от V_i неотрицательную случайную величину, имеющую усеченное в нуле нормальное распределение (с математическим ожиданием δz_i и дисперсией σ_U^2), характеризующую результаты воздействия на производственный процесс i-го объекта всей совокупности факторов, снижающих его эффективность, т. е.

$$U_i \in N^+\left(\delta z_i, \sigma_U^2\right),$$

где δz_i — функция неэффективности или модель, характеризующая воздействие факторов неэффективности $z_i = \left(1, z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, \ldots, z_i^{(m)}\right)^T$ на объем производства i-го объекта;
$\delta = \left(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_q, \ldots, \delta_m\right)$ — подлежащий статистическому оцениванию вектор коэффициентов функции неэффективности.

Функция плотности $f\left(U_i|\varepsilon_i\right)$ условного распределения случайной величины U_i (при условии, что остаток ε принял значение, зафиксированное на уровне ε_i) есть [Kumbhakar, Lovell (2004)]

$$f\left(U_i|\varepsilon_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \Phi\left(\dfrac{\tilde{\mu}_i}{\sigma_*}\right)} \exp\left\{-\frac{\left(U_i - \tilde{\mu}_i\right)^2}{2\sigma_*^2}\right\}, \qquad (4)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения, т. е. условное распределение случайной величины U_i (при условии $\varepsilon = \varepsilon_i$) является усеченным в нуле нормальным распределением $N^+\left(\tilde{\mu}_i, \sigma_*^2\right)$ с параметрами $\tilde{\mu}_i = \dfrac{\delta z_i \sigma_V^2 - \varepsilon_i \sigma_U^2}{\sigma^2}$, $\sigma_*^2 = \dfrac{\sigma_U^2 \sigma_V^2}{\sigma^2}$, где $\sigma^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2$.

В качестве оценки величины TE_i используют [Battese, Coelli (1988)] ожидаемое (среднее) значение условного распределения экспоненты неэффективной составляющей

$$E\left(\exp - U_i|\varepsilon_i\right) = \frac{1 - \Phi\left(\dfrac{\sigma_* - \tilde{\mu}_i}{\sigma_*}\right)}{\Phi\left(\dfrac{\tilde{\mu}_i}{\sigma_*}\right)} \exp\left\{-\tilde{\mu}_i + \frac{1}{2}\sigma_*^2\right\}. \qquad (5)$$

Модель (3) граничного потенциала достаточно удобна для оценки эффективности производства. Однако она допускает усовершенствование, которое позволяет приблизиться к реальности при описании потенциального объема производства. Идея этого усовершенствования состоит в разделении факторов неэффективности на управляемые и неуправляемые и учете целенаправленного воздействия на управляемые факторы неэффективности [Афанасьев (2006)]. В качестве максимума производственных возможностей (т. е. таких, при которых неэффективность максимально устранена путем воздействий на управляемые факторы неэффективности) рассматривается случайная величина

$$P_i^{potS} = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + V_i - S_i\right\}. \quad (6)$$

Здесь случайная величина $S_i \geq 0$ интерпретируется как «остаточная неэффективность», обусловленная воздействием на производственный процесс только неуправляемых факторов неэффективности.

Соответствующий модели (6) производственный потенциал, «освобожденный» от управляемой неэффективности, в работе [Айвазян, Афанасьев (2007)] получил название *«достижимый производственный потенциал»*. Достижимый производственный потенциал по экономическому смыслу, вкладываемому в это понятие, занимает промежуточное положение между фактическим объемом производства (2) и граничным производственным потенциалом (3). Введение понятия «достижимый производственный потенциал» и построение соответствующей модели представляют интерес при прогнозировании результатов воздействия на факторы неэффективности. В качестве результата такого воздействия может рассматриваться прогнозируемый объем производства, который соответствует модели (6) достижимого потенциала, построенной по результатам фактических наблюдений за производственным процессом. Вообще говоря, этот прогнозируемый объем производства с некоторой вероятностью *может быть ниже фактического объема производства*, что не противоречит экономическому смыслу данного понятия, так как воздействие на факторы неэффективности с целью устранения их влияния на производственный процесс не обязательно приводит к позитивному результату. Переход от $U_i \in N^+(\delta z_i, \sigma_U^2)$ к остаточной неэффективности происходит в результате воздействия на факторы неэффективности $\left(z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m)}\right)$, определяющие значение функции δz_i, получившей название «функция неэффективности». Параметры $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ этой функции оценивались в [Афанасьев (2006)] и ряде других работ. Случайная величина U_i, характеризующая функцию неэффективности, имеет неотрицательное усеченное в нуле нормальное распределение

$$S_i \in N^+(\delta z_i - a_i, \sigma_U^2),$$

где

$$a_i = \max_{z_i + \Delta z_i \in G_i} \left\{\sum_{k=1}^{m} \delta_k \Delta z_i^{(k)} : \sum_{k=1}^{m} c_{ik}\left(z_i^{(k)}, \Delta z_i^{(k)}\right) \leq C_i\right\}, \quad (7)$$

где $\Delta z_i = \left(\Delta z_i^{(1)}, \ldots, \Delta z_i^{(m)}\right)$ — возможные изменения значений факторов неэффективности, характеризующих i-й объект;

G_i — некоторая m-мерная область, определяющая множество всех допустимых значений факторов неэффективности в рамках управляющих воздействий на функционирование i-го объекта;

$c_{ik}\left(z_i^{(k)}, \Delta z_i^{(k)}\right)$ — функция, описывающая размер финансовых затрат, требуемых для изменения значения k-го фактора неэффективности для i-го объекта на величину $\Delta z_i^{(k)}$;
C_i — затраты на повышение эффективности производственного процесса i-го объекта.

Заметим, что если в результате решения задачи (7) получим $a_i = 0$, то это означает отсутствие возможностей уменьшения неэффективности путем воздействий на управляемые факторы неэффективности. Как уже было сказано, $S_i \in N^+\left(\delta z_i - a_i,\ \sigma_U^2\right)$, так что

$$f(S_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U \Phi\left(\dfrac{\mu_i}{\sigma_U}\right)} \exp\left\{-\frac{(S-\mu_i)^2}{2\sigma_U^2}\right\},$$

где $\mu_i = \delta z_i - a_i$.

Техническая эффективность достижимого потенциала относительно граничного оценивается величиной $TE_i^S = \dfrac{P_i^{potS}}{P_i^{pot}} = \exp\{-S_i\}$. Это — оцениваемая относительно граничного потенциала (3) техническая эффективность объема производства, который прогнозируется в результате воздействия на факторы неэффективности. В качестве меры технической эффективности прогнозируемого объема производства можно использовать ожидаемое значение $E(\exp\{-S_i\})$ безусловного распределения случайной величины $\exp\{-S_i\}$. С учетом (4) и (5) имеем:

$$E(\exp\{-S_i\}) = \frac{1-\Phi\left(\dfrac{\sigma_U - \mu_i}{\sigma_U}\right)}{\Phi\left(\dfrac{\mu_i}{\sigma_U}\right)} \exp\left\{-\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right\}. \tag{8}$$

2. Экономическая эффективность перехода к достижимому потенциалу

Значительный интерес представляет оценка экономической эффективности мероприятия, направленного на развитие производства. В качестве прогнозируемого результата такого мероприятия можно рассматривать объем производства, соответствующий достижимому потенциалу. Моделью мероприятия по управлению i-м объектом является $M = \{G_i,\ C_i\}$, где G_i — множество допустимых значений факторов неэффективности в результате реализации мероприятия; C_i — затраты на реализацию мероприятия. Для оценки мероприятия будем использовать методику оценки эффективности инвестиционных проектов [Виленский, Лившиц, Смоляк (2008)]. Предположим, что мероприятие реализуется за один шаг. Рассмотрим два подхода к определению экономической эффективности.

Подход 1. Приращение объема производства в результате реализации мероприятия определяется как разность $\Delta P_i = P_i^{potS} - P_i$. Здесь объем производства P_i^{potS}, соответствующий достижимому потенциалу, определяется по формуле (6). Случайная величина P_i определяется формулой (2) и характеризует объем производства, прогнозируемый в случае, если мероприятие не проводится и управляющие воздействия на факторы неэффективности отсутствуют. Тогда

$$\Delta P_i = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}[\exp\{V_i - S_i\} - \exp\{V_i - U_i\}].$$

Так как случайные величины V_i и S_i независимы, и случайная величина $\exp\{V_i\}$ имеет логарифмически нормальное распределение, ожидаемый рост объема производства определяется величиной

$$E(\Delta P_i) = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}[E(\exp\{V_i - S_i\}) - E(\exp\{V_i - U_i\})] =$$
$$= \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}[E(\exp\{V_i\})E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{V\}_i)E(\exp\{-U_i\})] =$$
$$= \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + 0{,}5\sigma_V^2\right\}[E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{-U_i\})],$$

где $E(\exp\{-S_i\})$ определяется по формуле (8), а

$$E(\exp\{-U_i\}) = \frac{1 - \Phi\left(\dfrac{\sigma_U - \delta z_i}{\sigma_U}\right)}{\Phi\left(\dfrac{\delta z_i}{\sigma_U}\right)} \exp\left\{-\delta z_i + \frac{1}{2}\sigma_U^2\right\}. \tag{9}$$

Подход 2. Приращение объема производства определяется как разность $\Delta\widetilde{P}_i = P_i^{potS} - \widetilde{P}_i$, где $\widetilde{P}_i$ — объем производства, прогнозируемый при *ожидаемом* (*среднем*) уровне эффективности, соответствующем наблюдаемому объему производства, и случайном воздействии прочих сопутствующих факторов, т. е.

$$\widetilde{P}_i = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \cdot x_i^{(j)}\right\} \cdot \exp\{V\}_i \cdot E(\exp\{-U_i\} | P_i).$$

Другими словами, математическое ожидание случайной величины $\exp\{U_i\}$, характеризующей эффективность производства, вычисляется *условно* (при условии $P = P_i$, или, что то же самое, $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}_i$, где $\widehat{\varepsilon}_i = \ln P_i - \widehat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{p} \widehat{\beta}_j \cdot x_i^{(j)}$).

Условное среднее $E(\exp\{-U_i\} | \widehat{\varepsilon}_i)$, соответствующее наблюдаемому объему производства P_i, определяется по формуле (5) при $\varepsilon_i = \widehat{\varepsilon}_i$. Таким образом, ожидаемый рост объема производства определяется величиной

$$E(\Delta\widetilde{P}_i) = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}[E(\exp\{V_i\})E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{V_i\})E(\exp\{-U_i\} | \widehat{\varepsilon}_i)] =$$
$$= \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + 0{,}5\,\sigma_V^2\right\}[E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{-U_i\} | \widehat{\varepsilon}_i)].$$

Экономическую эффективность мероприятия будем оценивать величиной дисконтированного эффекта. Предполагается, что объемы основных производственных факторов не изменяются. Затраты производятся в начале периода реализации мероприятия, т. е. $C_i = C_{0i}$. Тогда первому подходу соответствует денежный поток $\{\varphi_0 = -C_{0i}, \varphi_1 = d\Delta P_i\}$, второму подходу — денежный поток $\varphi_0 = -C_{0i}, \varphi_1 = d\Delta\widetilde{P}_i$, здесь d — цена продукта. Интегральный дисконтированный эффект от реализации мероприятия является величиной случайной и определяется для первого подхода формулой $Q_i = \dfrac{d\Delta P_i}{1+a_i} - C_{0i}$ (где a_1 — процентная ставка), а для второго подхода — формулой $\widetilde{Q}_i = \dfrac{d\Delta\widetilde{P}_i}{1+a_i} - C_{0i}$.

Оценки математического ожидания интегрального дисконтированного эффекта задаются соответственно выражениями:

$$E(Q_i) = \frac{dE(\Delta P_i)}{1+a_i} - C_{0i} \text{ и } E\left(\widetilde{Q}_i\right) = \frac{dE\left(\Delta\widetilde{P}_i\right)}{1+a_i} - C_{0i}.$$

Зная распределения случайных величин ΔP_i и $\Delta\widetilde{P}_i$, можно построить распределения величин Q_i и $\widetilde{Q}_i$, что позволяет проводить анализ рисков, связанных с реализацией мероприятия.

Построим распределения случайных величин Q_i и $\widetilde{Q}_i$ методом имитации Монте-Карло. Для этого необходимо смоделировать методом Монте-Карло значения случайных величин S_i, U_i, V_i и W_i. Генерирование выборочных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины ξ, имеющей функцию распределения $F_\xi(x)$, в каждом из четырех интересующих нас случаев производилось по следующей схеме.

Сначала генерируются независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0; 1]$ наблюдения $r_1, r_2, \dots, r_n$ случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$. Затем получаем сгенерированные независимые значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины ξ по формуле

$$x_i = F_\xi^{-1}(r_i),\ i = 1, 2, \dots, n,$$

где $F_\xi^{-1}(r)$ — функция, обратная к функции $F_\xi(x)$ в точке $F_\xi(x) = r$.

Учитывая вид функций распределения $F_{S_i}(s),\ F_{V_i}(v),\ F_{U_i}(u)$ и $F_{W_i}(w)$ (см. выше), получаем:

а) *сгенерированные наблюдения* $s_1, s_2, \dots, s_n$ *случайной величины* S:

$$s_i = \mu_i + \sigma_U \cdot \Phi^{-1}\left(r_i\, \Phi\left(\frac{\delta \cdot z_i}{\sigma_U}\right) + \Phi\left(\frac{-\delta z_i}{\sigma_U}\right)\right),\ \ i = 1, 2, \dots, n;$$

б) *сгенерированные наблюдения* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *случайной величины* U:

$$u_i = \delta \cdot z_i + \sigma_U \cdot \Phi^{-1}\left(r_i' \cdot \Phi\left(\frac{\delta \cdot z_i}{\sigma_U}\right) + \Phi\left(\frac{-\delta \cdot z_i}{\sigma_U}\right)\right),\ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

где $r_1', r_2', \dots, r_n'$ — сгенерированные независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0; 1]$ наблюдения случайной величины $\eta' = F_U(u)$;

в) *сгенерированные наблюдения* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *случайной величины* V_i:

$$v_i = \sigma_V \cdot \Phi^{-1}(r_i''),\ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

где $r_1'', r_2'', \dots, r_n''$ — сгенерированные независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0;1]$ наблюдения случайной величины $\eta'' = F_V(v)$;

г) *сгенерированные наблюдения* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *случайной величины* W_i:

$$w_i = \sigma_V \cdot \Phi^{-1}(r_i'''),\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $r_1''', r_2''', \ldots, r_n'''$ — сгенерированные независимые, равномерно распределенные на отрезке [0;1] наблюдения случайной величины $\eta''' = F_W(w)$.

Тогда моделируемые значения p_{ij}^S достижимого производственного потенциала P_i^{potS} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определятся формулой

$$p_{ij}^S = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\} \exp\{v_j - s_j\},\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

моделируемые значения p_{ij} объема производства P_i — по формуле

$$p_{ij} = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\} \exp\{w_j - u_j\},\quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

а моделируемые значения $\widetilde{p}_{ij}$ объема производства $\widetilde{P}_i$ — по формуле

$$\widetilde{p}_{ij} = \exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\} \exp\{w_j\} E(\exp\{-U_i\} | \widetilde{\varepsilon}_i),\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Соответственно, моделируемые значения Δp_{ij} приращения объема производства ΔP_{ij} определяются по формуле $\Delta p_{ij} = p_{ij}^S - p_{ij}$, моделируемые значения $\Delta\widetilde{p}$ приращения объема производства $\Delta\widetilde{P}_{ij}$ — по формуле $\Delta\widetilde{p}_{ij} = p_{ij}^S - \widetilde{p}_{ij}$. Наконец, моделируемые значения q_{ij} случайной величины Q_i определяются по формуле $q_{ij} = \dfrac{d\Delta p_{ij}}{1+a_1} - C_{0i}$, а моделируемые значения $\widetilde{q}_{ij}$ случайной величины $\widetilde{Q}_i$ — по формуле $\widetilde{q}_{ij} = \dfrac{d\Delta\widetilde{p}_{ij}}{1+a_1} - C_{0i}$.

3. Оценивание параметров и результаты компьютерного эксперимента

Оценка параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$, $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m, \sigma_U^2, \sigma_V^2$ может быть получена методом максимального правдоподобия:

$$\left(\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\sigma}_V^2, \hat{\sigma}_U^2\right) = \arg\max_{\beta, \delta, \sigma_V^2, \sigma_U^2} L\left(\beta, \delta, \sigma_V^2, \sigma_U^2 | y_1, \ldots, y_N, x_1, \ldots, x_N, z_1, z_2, \ldots, z_N\right),$$

где L — функция правдоподобия;

$x_i = (1, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(p)})^T$;

y_i и z_i определены выше ($i = 1, \ldots, N$).

Оценка $\hat{a}_i$ определяется в результате решения задачи (7) при $\delta = \hat{\delta}$.

В примере, описанном в [Афанасьев (2006)], по $N = 1093$ наблюдениям за производственным объектом получены оценки $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\sigma}_V^2$, $\hat{\sigma}_U^2$ и проведен анализ мероприятия по управлению факторами неэффективности. Учитывалось воздействие 15 факторов неэффективности, из которых только 3 считались управляемыми. На рис. 1 ряд 1 (линия, огибающая снизу) содержит оценки эффективности $\hat{E}(\exp\{-U_i\})$, полученные без учета управляющих воздействий на факторы неэффективности и упорядоченные по убыванию. Ряд 2 содержит оценки эффективности $\hat{E}(\exp\{-S_i\})$ для соответствующих наблюдений, полученные в результате построения модели достижимого потенциала с учетом управляющих воздействий на факторы неэффективности. Для тех наблюдений, для которых результаты решения задачи оптимального управления (7) привели к изменению значений функции неэффективности $\sum_{k=1}^{m}\hat{\delta}_k z_i^{(k)}$, оценки возросли. Для тех наблюдений, для которых значение функции неэффективности не изменилось, оценки остались прежними.

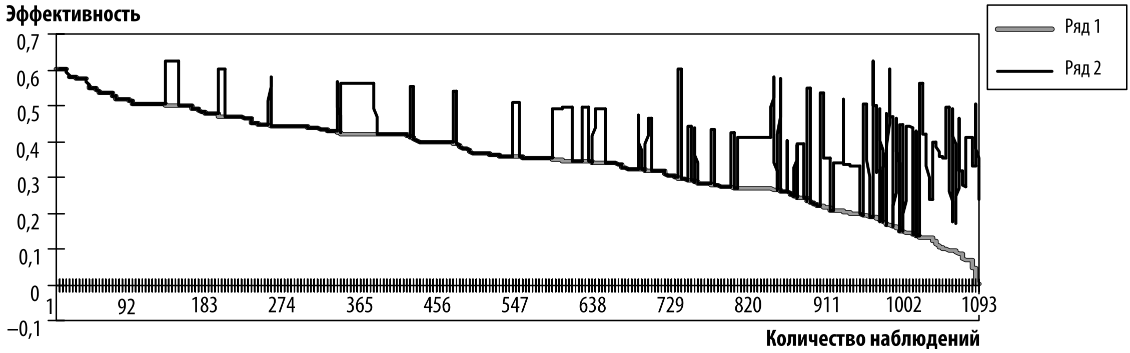

Рис. 1. Оценки технической эффективности

Для одного из наблюдений, выбранного произвольно, при значениях параметров $\hat{\sigma}_U = 0{,}79$; $\hat{\sigma}_V = 0{,}4$ и значении функции неэффективности $\hat{\delta}z_i = 1{,}175$ методом Монте-Карло по $n = 3000$ реализациям (см. выше) построено распределение случайной величины $\varepsilon_i = V_i - U_i$, где $V_i \in N(0;0{,}16)$, $U_i \in N^+(1{,}175;0{,}624)$. На рис. 2 приведена соответствующая гистограмма. Наличие неэффективности производства характеризуется асимметрией распределения и его смещением влево относительно моды.

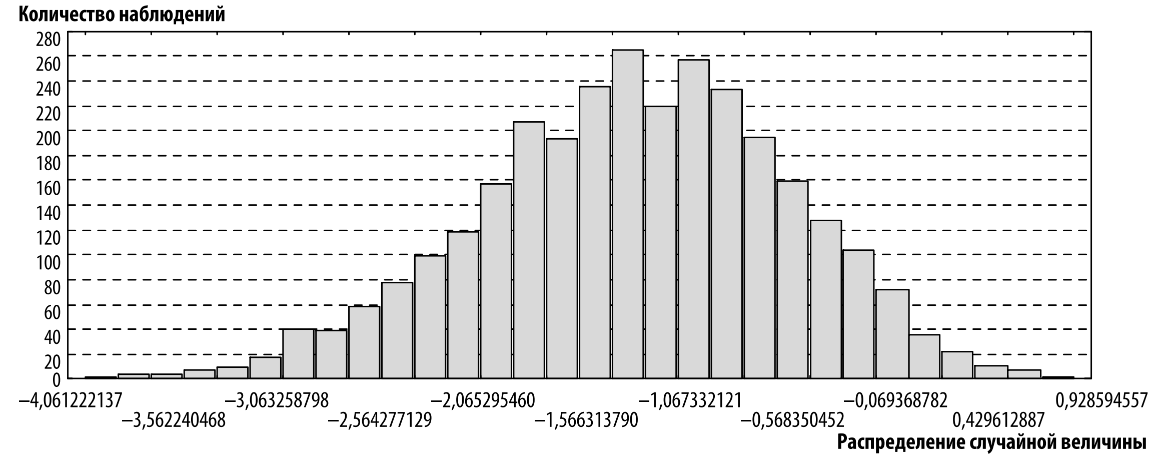

Рис. 2. Гистограмма распределения случайной величины $\varepsilon_i = V_i - U_i$

В результате решения задачи (7) построена модель достижимого потенциала и получена величина изменения значения функции неэффективности $\hat{a}_i = 0{,}69$. При этом $\hat{\mu}_i = 1{,}175 - 0{,}69 = 0{,}485$.

На рис. 3 приведена гистограмма распределения случайной величины $V_i - S_i$, где $V_i \in N(0; 0{,}16)$, $S_i \in N^{+}(0{,}485; 0{,}624)$.

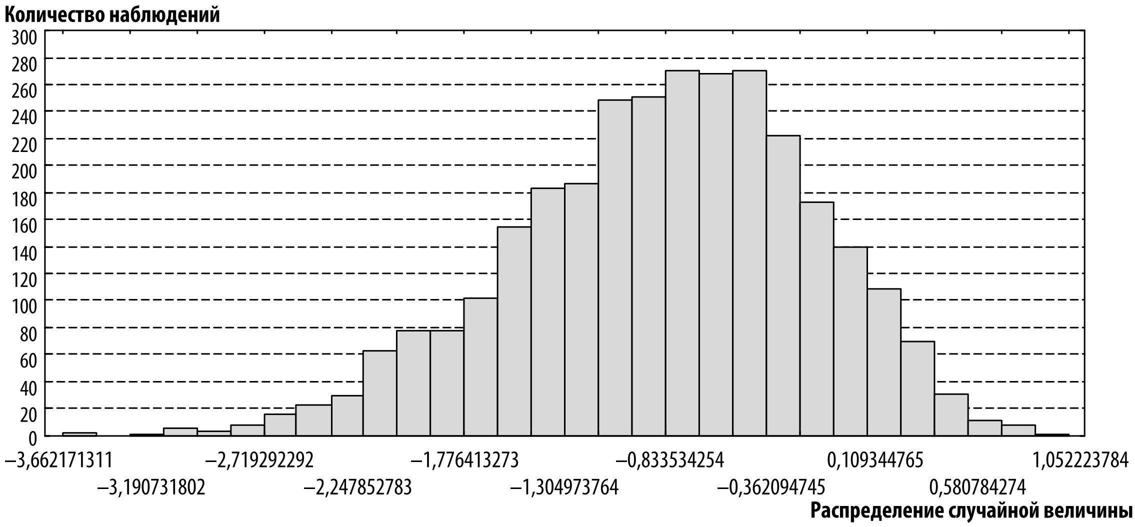

Рис. 3. Гистограмма распределения случайной величины $\varepsilon_i = V_i - U_i$

При соответствующих данному наблюдению значениях $\exp\left\{\hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{p} \hat{\beta}_j x_i^{(j)}\right\} = 2420{,}40$, $d = 1$ (объем производства измерялся в стоимостном выражении), при значении процентной ставки $a_1 = 0{,}15$ и затратах на реализацию мероприятия $C_i = 150$, пользуясь первым подходом к определению экономической эффективности, получаем имитационную модель распределения случайной величины Q_i, приведенную на рис. 4.

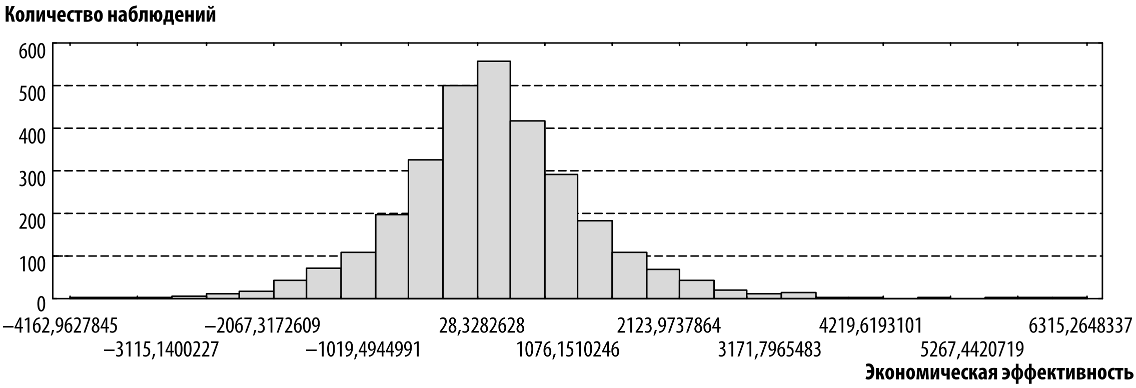

Рис. 4. Гистограмма экономической эффективности (подход 1)

Оценка математического ожидания $\hat{E}(Q_i)$ величины экономической эффективности мероприятия равна 194,540. Оценка стандартной ошибки: 971,732. Вероятность того, что случайная величина Q_i примет отрицательное значение, т. е. мероприятие не окупится, составляет 0,414.

При наблюдаемом объеме производства $\widetilde{P}_i = 518{,}88$ и оценке $\widetilde{\varepsilon}_i = -1{,}54$ имеем $\hat{E}(\exp\{-U_i\}|\widetilde{\varepsilon}_i) = 0{,}246$. Пользуясь вторым подходом к определению экономической эффективности, получаем имитационную модель распределения случайной величины $\widetilde{Q}_i$, приведенную на рис. 5.

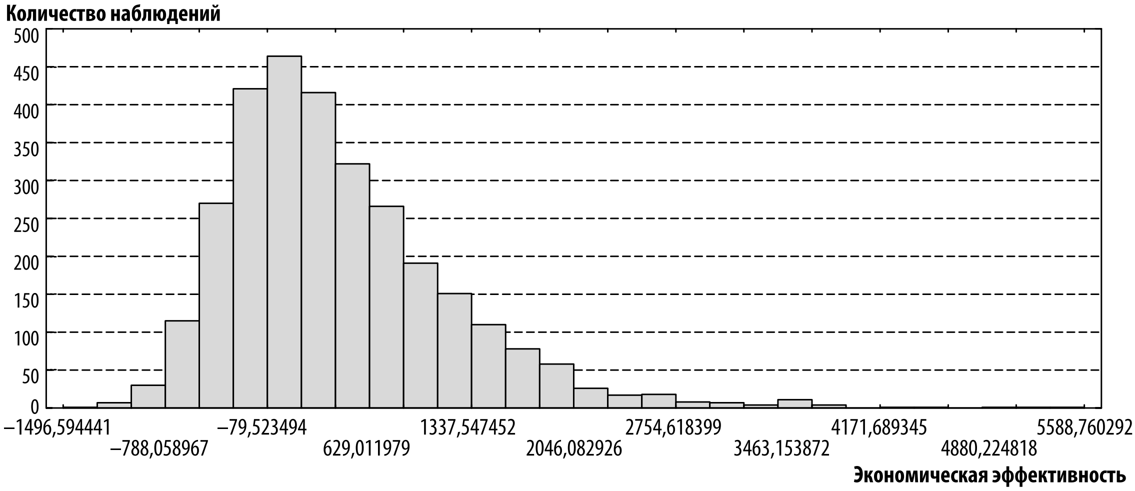

Рис. 5. Гистограмма экономической эффективности (подход 2)

Оценка математического ожидания $\hat{E}(\widetilde{Q}_i)$ величины экономической эффективности мероприятия равна 551,12. Оценка стандартной ошибки: 740,96. Вероятность того, что случайная величина $\widetilde{Q}_i$ примет отрицательное значение, т. е. мероприятие не окупится, составляет 0,268.

Каждый подход к определению экономической эффективности основан на сравнении величин дохода, прогнозируемых в условиях, когда мероприятие не проводится и когда оно проводится. Если мероприятие проводится, то прогнозирование дохода осуществляется на основе модели достижимого производственного потенциала. Причем эта прогнозируемая величина дохода после проведения мероприятия совпадает для обоих подходов. Подходы отличаются тем, как прогнозируется величина дохода в условиях, когда мероприятие не проводится. Основным недостатком первого подхода является то, что он не учитывает наблюдаемый результат производственного процесса. Этот недостаток отсутствует у второго подхода, который учитывает как наблюдаемый результат производственного процесса, так и случайные воздействия сопутствующих производственных факторов. В то же время если отвлечься от содержательной интерпретации подходов к определению экономической эффективности, то представляется оправданным выбор как наименее рискованного того, который приводит к наименьшему значению оценки экономической эффективности мероприятия.

Построенные распределения случайных величин Q_i и $\widetilde{Q}_i$ можно использовать для оценки эффективности различных мероприятий на одном объекте. *При сравнении эффективности мероприятий на разных объектах* желательно учитывать **эффект масштаба производства.** Для этого величины Q_i и $\widetilde{Q}_i$ следует нормировать, разделив на объем производства соответствующего объекта. Причем в качестве объема производства удобно взять тот, который соответствует граничному потенциалу, так как он не зависит от воздействия факторов неэффективности.

В результате получаем следующую оценку эффективности F_i в подходе 1 с учетом масштаба производства:

$$F_i = \frac{Q_i}{P_i^{pot}} = \frac{d(\exp\{-S_i\} - \exp\{-U_i\})}{1+a_1} - \frac{C_{0i}}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)} + V_i\right\}} =$$

$$= \frac{d\left(TE_i^S - TE_i\right)}{1+a_1} - \frac{C_{0i}\exp\{-V_i\}}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}}.$$

Ожидаемое значение эффективности равно:

$$E(F)_i = \frac{d[E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{-U_i\})]}{1+a_1} - \frac{C_{0i}E(\exp\{-V_i\})}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}} =$$

$$= \frac{d[E(\exp\{-S_i\}) - E(\exp\{-U_i\})]}{1+a_1} - \frac{C_{0i}\,0{,}5\sigma_V^2}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}}.$$

Величины $E(\exp\{-S_i\})$ и $E(\exp\{-U_i\})$ определяются по формулам (8) и (9) соответственно.

В подходе 2 получаем оценку $\widetilde{F}_i$:

$$\widetilde{F}_i = \frac{\widetilde{Q}_i}{P_i^{pot}} = \frac{d\left[E(\exp\{-S_i\}) - E\left(\exp\{-U_i\}|\widehat{\varepsilon}_i\right)\right]}{1+a_1} - \frac{C_{0i}\,0{,}5\sigma_V^2}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}}.$$

Ожидаемое значение эффективности равно:

$$E\left(\widetilde{F}_i\right) = \frac{d\left[E(\exp\{-S_i\}) - E\left(\exp\{-U_i\}|\widehat{\varepsilon}_i\right)\right]}{1+a_1} - \frac{C_{0i}\,0{,}5\sigma_V^2}{\exp\left\{\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_i^{(j)}\right\}}.$$

Здесь величина $E\left(\exp\{-U_i\}|\widehat{\varepsilon}_i\right)$ определяется по формуле (5).

На рис. 6 и 7 приведены гистограммы случайных величин.

В заключение следует отметить, что для реализации мероприятия по управлению факторами неэффективности может потребоваться несколько шагов. Если все наблюдения проводятся в один момент времени, то остается предполагать, что прогнозируемое приращение производства на каждом шаге реализации проекта такое же, как и на первом шаге. Если наблюдения проводятся в различные моменты времени, то фактор времени может быть учтен в производственной функции и при моделировании достижимого производственного потенциала.

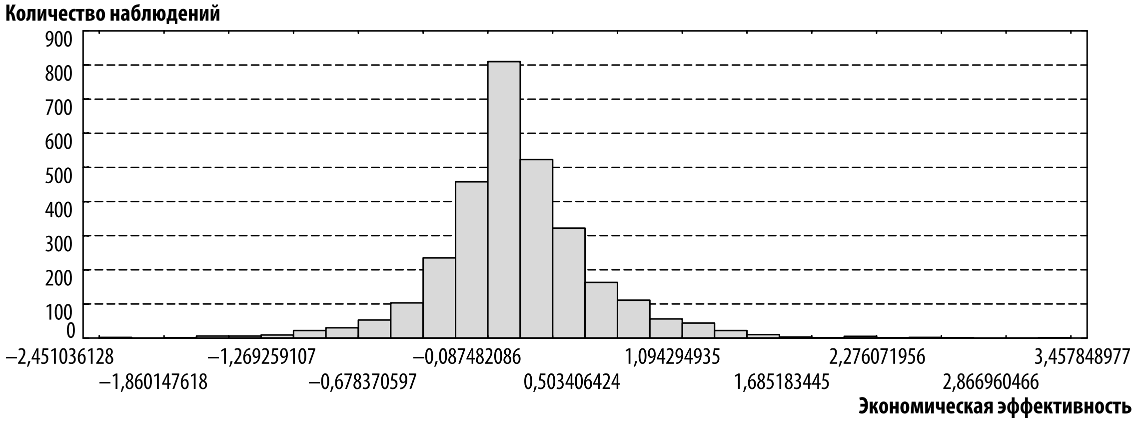

Рис. 6. Гистограмма распределения экономической эффективности (подход 1) с учетом масштаба производства

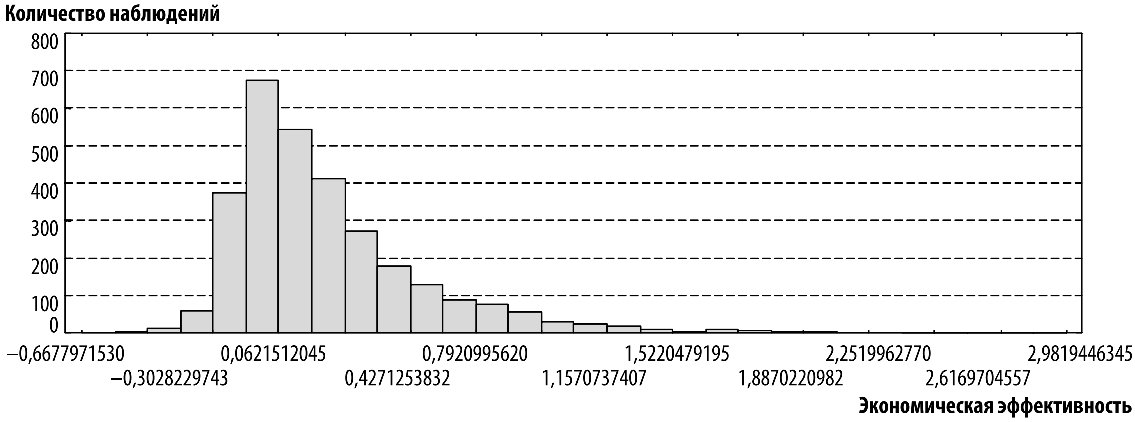

Рис. 7. Гистограмма распределения экономической эффективности (подход 2) с учетом масштаба производства

Список литературы

Айвазян С. А., *Афанасьев М. Ю.* Оценка мероприятий, направленных на управление факторами неэффективности производства // *Прикладная эконометрика.* 2007. № 4(8). С. 27–41.

Афанасьев М. Ю. Модель производственного потенциала с управляемыми факторами неэффективности // *Прикладная эконометрика*. 2006. № 4. С. 74–89.

Виленский П. Л., *Лившиц В. Н.*, *Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М.: Дело, 2008.

Aigner D. J., *Lovell C. A. K.* and *Schmidt P.* Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models // *Journal of Econometrics.* 1977. № 6. P. 21–37.

Baccouche R. Stochastic production frontier and technical inefficiency: A sensitivity analysis [Text] / Rafik Baccouche, Mokhtar Kouki // Econometric Reviews. Taylor and Francis Journals. 2003. Vol. 22. № 1. P. 79–91.

Battese G. E., *Coelli T. J.* Prediction of Firm-level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data // *Journal of Econometrics.* 1988. Vol. 38. P. 387–399.

Kumbhakar S., *Lovell K.* Stochastic Frontier Analysis. Cambridge U. P., 2004. P. 86.

Meeusen W. and *van den Broeck, J.* Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions With Composed Error // *International Economic Review.* 1977. № 18. P. 435–444.