ПРИКЛАДНАЯ ЭКОНОМЕТРИКА
№ 4(8) 2007

С. А. Айвазян, М. Ю. Афанасьев

Оценка мероприятий, направленных на управление факторами неэффективности производства[1]

В развитие методологии стохастической границы введено понятие достижимого производственного потенциала, обобщающее понятие граничного производственного потенциала. Построена модель достижимого производственного потенциала, учитывающая возможности управления факторами неэффективности и затраты на управление. Получена оценка условной технической эффективности производства относительно достижимого производственного потенциала. Предложены формальное описание мероприятия, направленного на управление факторами неэффективности производства, способы оценивания его технической и экономической эффективности. Приводятся результаты экспериментальных расчетов.

1. Модели граничного и достижимого производственных потенциалов

Предлагаемые в этой работе подходы к оценке мероприятий, направленных на управление факторами неэффективности производства, основаны на методологии стохастической границы [Aigner et al. (1977)], [Meeusen, van den Broeck (1977)], [Battese, Coelli (1988)], [Афанасьев (2006)] и построенных на ее основе моделях производственного потенциала. Наличие неопределенности в оценке результата производственного процесса позволяет говорить о риске воздействия сопутствующих факторов, в числе которых и факторы неэффективности. С позиций теории X-эффективности [Leibenstein (1966)] отличие фактического результата производства от его объема, соответствующего производственному потенциалу, объясняется воздействием факторов неэффективности. Известные подходы к оценке производственного потенциала исходят из предположения о возможности устранения воздействия факторов неэффективности и приводят к понятию граничного производственного потенциала.

Определение 1. *Граничный производственный потенциал* — объем производства за определенный период времени при фиксированном объеме основных производственных факторов и отсутствии воздействия факторов неэффективности.

В качестве модели граничного производственного потенциала можно рассматривать зависимость результата производства от объема основных производственных факторов, учитывающую воздействие сопутствующих факторов при отсутствии факторов неэффективности.

Построение модели граничного производственного потенциала, соответствующей этому определению, предполагает возможность идентификации и устранения влияния всех факторов неэффективности. Такая модель отвечает представлению о наибольшем объеме

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-06-12019 офи).

выпуска в условиях ограниченности основных производственных факторов и наличия сбалансированного воздействия сопутствующих. Составляющими модели могут служить детерминированная производственная функция, определяющая зависимость ожидаемого результата производства от объема основных производственных факторов, и стохастическая составляющая, характеризующая сбалансированное воздействие сопутствующих факторов.

Для построения модели граничного производственного потенциала, взаимосвязь результата производства и объема используемых ресурсов в соответствии с методологией стохастической границы представим в виде:

$$y_i = \exp(a) \cdot x_i^{\beta} \cdot \exp(\varepsilon_i);$$

$$\varepsilon_i = v_i - u_i;$$

$$v_i \sim N(0, \sigma_v^2), \;\; u_i \sim N^{+}(\delta z_i, \sigma_u^2),$$

где y_i — скалярный объем производства, соответствующий наблюдению $i, i = 1, \ldots, N$;

x_i — вектор основных факторов производства, соответствующий наблюдению i;

a — скаляр;

β — вектор параметров производственной функции f;

ε_i — суммарная стохастическая остаточная составляющая,

v_i — случайная переменная, имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_v^2, отражающая влияние сбалансированных случайных воздействий;

u_i — не зависимая от v_i неотрицательная случайная переменная, имеющая усеченное в нуле нормальное распределение (с математическим ожиданием δz_i и дисперсией σ_u^2); характеризующая результаты воздействия на производственный процесс всей совокупности факторов, снижающих его эффективность.

$z_i = (1, z_{i1}, \ldots, z_{iq}, \ldots, z_{im})$ — вектор значений факторов неэффективности для i-го наблюдения, где $q = 1, \ldots, m$ — индекс фактора неэффективности;

$\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_q, \ldots, \delta_m)$ — вектор коэффициентов функции неэффективности.

δz_i — функция неэффективности или модель, характеризующая воздействие факторов неэффективности.

Оценка параметров a, β, δ, σ_u^2, σ_v^2 может быть выполнена методом максимального правдоподобия [Айвазян (2001)]:

$$(\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\sigma}_V^2, \hat{\sigma}_U^2) = \operatorname{argmax} L(a, \beta, \delta, \sigma_V^2, \sigma_U^2 \,|\, y_1, \ldots, y_N, x_1, \ldots, x_N),$$

где L — функция правдоподобия.

Тогда, согласно определению, модель граничного производственного потенциала приобретает вид:

$$y_i^p = \exp(\hat{a}) \cdot x_i^{\hat{\beta}} \cdot \exp(v_i), v_i \sim N(0, \hat{\sigma}_v^2), \quad (1)$$

где y_i^p — потенциально возможный результат производственного процесса для i-го наблюдения.

Замечание 1. Располагая оценками $\hat{\varepsilon}_i = \ln y_i - \hat{a} - \hat{\beta}\ln x_i$ остатков ε_i, а также оценками $\hat{\mu}_i = \hat{\delta}z_i, \hat{\sigma}_V^2, \hat{\sigma}_U^2$ параметров $\mu_i = \delta z_i, \sigma_V^2, \sigma_U^2$, можно для каждого наблюдения i получить оценки $\hat{v}_i$ и $\hat{u}_i$ — составляющих общего остатка $\hat{\varepsilon}_i$, отражающих воздействие на y_i сбалансированных факторов и факторов неэффективности.

Таким образом, функция плотности совместного распределения случайных величин u_i, v_i в соответствии с модельными допущениями приведена к виду:

$$f(v_i, u_i) = \frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_u\hat{\sigma}_v\Phi(\hat{\mu}_i/\hat{\sigma}_u)}\exp\left\{-\frac{(u_i - \hat{\mu}_i)^2}{2\hat{\sigma}_u^2} - \frac{v_i^2}{2\hat{\sigma}_v^2}\right\},$$

где $\Phi(t)$ — значение функции стандартного нормального распределения в точке t.

Оценим значения $\hat{u}_i$ и $\hat{v}_i$ как наиболее правдоподобные для плотности $f(v_i, u_i)$ при условиях: $v_i - u_i = \hat{\varepsilon}_i$, $u_i \geq 0$.

Это сводится к решению условной оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{(u_i - \hat{\mu}_i)^2}{2\hat{\sigma}_u^2} + \dfrac{v_i^2}{2\hat{\sigma}_v^2} \to \min \\ v_i - u_i = \hat{\varepsilon}_i \\ u_i \geq 0 \end{cases}$$

Приравнивание к нулю производной:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{(u_i - \hat{\mu}_i)^2}{2\hat{\sigma}_u^2} + \frac{(u_i + \hat{\varepsilon}_i)^2}{2\hat{\sigma}_v^2}\right] = 0,$$

при условии $u_i \geq 0$, дает следующее решение:

а) если $\hat{\mu}_i\hat{\sigma}_v^2 - \hat{\varepsilon}_i\hat{\sigma}_u^2 \geq 0$, то

$$\hat{u}_i = \frac{\hat{\mu}_i\hat{\sigma}_v^2 - \hat{\varepsilon}_i\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_v^2 + \hat{\sigma}_u^2}$$

и

$$\hat{v}_i = \hat{\varepsilon}_i + \hat{u}_i.$$

б) если $\hat{\mu}_i\hat{\sigma}_v^2 - \hat{\varepsilon}_i\hat{\sigma}_u^2 < 0$, то

$$\hat{u}_i = 0$$

и

$$\hat{v}_i = \hat{\varepsilon}_i.$$

Если описывать техническую эффективность факторов производства как меру соответствия фактического результата производственного процесса потенциально возможному, то количественной оценкой технической эффективности для наблюдения может служить величина $TE_i = \dfrac{y_i}{y_i^p}$. Так как $y_i = \exp(a)\cdot x_i^\beta \cdot \exp(v_i - u_i)$, а $y_i^p = \exp(a)\cdot x_i^\beta \cdot \exp(v_i)$, то для каждого наблюдения техническая эффективность измеряется величиной $TE_i = \exp(-u_i)$. Тогда техническая эффективность производства для всей совокупности наблюдений определяется величиной $TE = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-u_i)$.

Замечание 2. В качестве оценок технической эффективности используют следующие величины.

1) Ожидаемое значение условного распределения экспоненты неэффективной составляющей:

$$E\left(\exp\{-u_i\}\middle|\,\varepsilon_i\right)=\frac{1-\Phi(\sigma_*-\tilde{\mu}_i/\sigma_*)}{\Phi(\tilde{\mu}_i/\sigma_*)}\exp\left\{-\tilde{\mu}_i+\frac{1}{2}\sigma_*^2\right\},$$

где $\tilde{\mu}_i=(\mu_i\sigma_v^2-\varepsilon_i\sigma_u^2)/\sigma^2$, $\sigma_*^2=\sigma_u^2\sigma_v^2/\sigma^2$.

2) Экспонента ожидаемого значения условного распределения неэффективной составляющей:

$$\exp\{-E(u_i|\,\varepsilon_i)\}=\exp\left\{-\tilde{\mu}_i-\frac{\sigma_*\varphi(\tilde{\mu}_i/\sigma_*)}{\Phi(\tilde{\mu}_i/\sigma_*)}\right\},$$

где $\varphi(\cdot)$ — функция плотности стандартного нормального распределения.

3) Экспонента моды условного распределения неэффективной составляющей:

$$TE_i=\exp\{-M(u_i|\,\varepsilon_i)\{-E(u_i|\,\varepsilon_i)\}=\exp\{-\tilde{\mu}_i\}=\exp\{-\hat{\mu}_i\},$$

если $\tilde{\mu}_i\geq 0$, иначе $TE_i=1$.

Притом $\tilde{\mu}_i=\hat{u}_i$, где $\hat{u}_i$ — наиболее правдоподобное значение составляющей остатка $\hat{\varepsilon}_i$, способ вычисления которого показан в Замечании 1.

Факторы неэффективности могут быть управляемыми и неуправляемыми. Управляемыми следует считать такие факторы неэффективности, которые, во-первых, можно идентифицировать и, во-вторых, воздействие которых можно полностью или частично устранить. А так как не все факторы неэффективности являются управляемыми, то модели, построенные в соответствии с данным выше определением, следует рассматривать как оценки сверху для любого производственного потенциала, учитывающего возможности управления. Таким образом, в реальности мы вынуждены исходить из того, что фактический результат производственного процесса может быть улучшен лишь за счет воздействия на управляемые факторы неэффективности. В таком случае оценка производственного потенциала превышает фактически наблюдаемый результат производства на величину, определяемую воздействием управляемых факторов неэффективности. Исходя из чего можно предложить следующее определение *достижимого производственного потенциала*, учитывающее возможность управления факторами неэффективности.

Определение 2. *Достижимый производственный потенциал* — объем производства за определенный период времени при фиксированном объеме основных производственных факторов и при исключенном воздействии управляемых факторов неэффективности.

В качестве модели достижимого производственного потенциала можно рассматривать зависимость результата производства от объема основных производственных факторов при исключенном воздействии управляемых сопутствующих факторов.

Для того чтобы построить модель достижимого производственного потенциала необходимо, во-первых, выявить факторы неэффективности, во-вторых, разделить их на управляемые и неуправляемые. Тогда модель достижимого производственного потенциала будет включать детерминированную составляющую, определяющую зависимость результата производства от объема основных производственных факторов, и стохастическую составляющую, характеризующую совокупное воздействие сбалансированных сопутствующих факторов и неуправляемых факторов неэффективности. Граничный производственный потенциал, построенный в соответствии с Определением 1, выше достижимого производственного потенциала, построенного в соответствии с Определением 2.

В «Моделях производственного потенциала с управляемыми факторами неэффективности» [Афанасьев (2006)] представлена следующая модель достижимого производственного потенциала:

$$\begin{aligned} &y_i^p = f(x_i, \hat{\beta})\exp(\eta_i); \quad \eta_i = v_i - s_i^C; \\ &v_i \sim N(0, \hat{\sigma}_v^2); \qquad s_i^C \sim N^+(\tilde{\mu}_i, \hat{\sigma}_u^2). \end{aligned} \tag{2}$$

В этой модели параметры $\tilde{\mu}_i$ остаточной неэффективности определяются в результате решения задачи:

$$\begin{aligned} &TE^C = \min_{\Delta z_i} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \exp(s_i^C - u_i), \\ &u_i \sim N^+(\hat{\delta} z_i, \hat{\sigma}_u^2); \\ &\tilde{\mu}_i = \hat{\delta}(z_i + \Delta z_i), z_i + \Delta z_i \in G_i, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i(z_i, \Delta z_i) \le C, \end{aligned} \tag{3}$$

где TE^C — техническая эффективность производства по отношению к достижимому потенциалу, определяемая с учетом затрат на управление.

G_i — множество векторов допустимых значений факторов неэффективности для наблюдения i,

$c_i(z_i, \Delta z_i)$ — функция затрат на управление факторами неэффективности для наблюдения i,

C — средние затраты на управление производственным объектом, соответствующие одному наблюдению.

Предполагается, что совокупное воздействие Δz_i на факторы неэффективности позволяет перейти от случайной величины u_i к случайной величине s_i^C, имеющей усеченное в нуле нормальное распределение с параметрами $\min\limits_{z_i + \Delta z_i \in G_i} [\hat{\delta}(z_i + \Delta z_i)]$ и $\hat{\sigma}_u^2$, которую можно характеризовать как остаточную неэффективность. Модель достижимого производственного потенциала (2) строится в два этапа. На первом этапе проводится оценка параметров модели. На втором этапе, путем решения задачи (3), определяются параметры $\bar{\mu}_i$ остаточной неэффективности для каждого наблюдения. При оцененной с помощью модели стохастической границы неэффективной составляющей $u_i \sim N^+(\hat{\delta} z_i, \hat{\sigma}_u^2)$, техническую эффективность производства относительно достижимого потенциала следует характеризовать отношением фактического потенциала к достижимому производственному потенциалу. Техническую эффективность производства, определяемую относительно достижимого производственного потенциала, будем называть условной технической эффективностью. Для каждого наблюдения условная техническая эффективность, соответствующая достижимому производственному потенциалу, построенному по модели (2), определяется величиной $TE_i^c = \exp(s_i^c - u_i)$. Заметим, что условная техническая эффективность выше технической эффективности, определяемой относительно граничного потенциала, так как граничный потенциал выше достижимого. Таким образом, в соответствии с моделью (3), в условиях общего ограничения на величину затрат, выбираются управляющие воздействия $\{\Delta z_i\}_{i=1}^N$ на факторы неэффективности с целью минимизации средней для всех наблюдений условной технической эффективности производства.

2. Техническая эффективность мероприятий

Мероприятие, направленное на управление факторами неэффективности, можно описать как

$$M = \{Q, C(q)\},$$

где Q — множество допустимых значений факторов неэффективности для всей совокупности наблюдений $i = 1, \ldots, N$.

То есть

$$Q = \{G_i\}_{i=1}^N,$$

где G_i — множество векторов допустимых значений факторов неэффективности для наблюдения i;

q — затраты на реализацию мероприятия;

C — средние затраты на управление производственным объектом, соответствующие одному наблюдению.

Техническую эффективность мероприятия, направленного на развитие производственного потенциала, будем измерять отношением среднего (для наблюдения) ожидаемого прироста объема производства в результате реализации мероприятия к среднему ожидаемому приросту объема производства в результате полного устранения неэффективности. Ожидаемый прирост объема производства в результате реализации мероприятия можно характеризовать величиной:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{f(x_i,\hat{\beta})[\exp(v_i - s_i^C) - \exp(v_i - u_i)]}{f(x_i,\hat{\beta})\exp(v_i - s_i^C)},$$

или

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N [1 - \exp(s_i^C - u_i)].$$

Ожидаемый прирост объема производства в результате полного устранения неэффективности:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{f(x_i,\hat{\beta})[\exp(v_i) - \exp(v_i - u_i)]}{f(x_i,\hat{\beta})\exp(v_i)},$$

или

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N [1 - \exp(-u_i)].$$

Тогда техническая эффективность мероприятия измеряется величиной:

$$TE^M = \frac{1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \exp(s_i^C - u_i)}{1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \exp(-u_i)]} = \frac{1 - TE^C}{1 - TE}. \tag{4}$$

В качестве оценки технической эффективности мероприятия будем рассматривать:

$$\widehat{TE}^M = \frac{1-\widehat{TE}^C}{1-\widehat{TE}},$$

где $\widehat{TE}^C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(\hat{s}_i^C - \hat{u}_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(M[s_i^C|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right)$

и $\widehat{TE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\hat{u}_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(-M[u_i|\varepsilon_i]\right).$

Если мероприятие позволяет реализовать граничный потенциал, то достижимый потенциал максимален и совпадает с ним. Тогда оценка технической эффективности мероприятия, направленного на развитие фактического потенциала, максимальна и равна единице. Если достижимый потенциал отражает фактический результат производственного процесса, условная техническая эффективность равна единице. Тогда оценка эффективности мероприятия равна нулю. Заметим, что приведенная выше формула (4) для расчета технической эффективности мероприятия, направленного на развитие производственного потенциала, применима в случае, когда граничный производственный потенциал отличается от фактического. Если неэффективность отсутствует, то граничный производственный потенциал совпадает с фактическим. В этом случае развитие фактического потенциала за счет управления факторами неэффективности невозможно и значение величины $\widehat{TE}^M$ не определено. Если некоторое мероприятие имеет наибольшую оценку $\widehat{TE}^M$ технической эффективности, то соответствующий ему достижимый производственный потенциал может оцениваться как максимально достижимый. Поэтому оценка $\widehat{TE}^M$ может быть использована в качестве критерия выбора мероприятия по управлению факторами неэффективности с целью развития производственного потенциала.

Но решение задачи (3) связано со значительными вычислительными трудностями.

Замечание 3. Пусть μ_{1i} — оптимальное значение функции неэффективности $\hat{\delta}z_i$ для наблюдения i по модели (1), μ_{2i} — оптимальное значение функции неэффективности $\hat{\delta}(z_i + \Delta z_i)$ для наблюдения i по модели (2).

Если в качестве оценки условной технической эффективности использовать величину:

$$\widehat{TE}^C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(M[s_i^C|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right),$$

то согласно результатам оценки моды условного распределения неэффективной составляющей, представленным в Замечании 1, получаем:

$$\widehat{TE}_i^c = \exp\left(-(\mu_{1i} - \mu_{2i})(1-\gamma)\right),$$

если выполняется условие:

$$\mu_{2i}\hat{\sigma}_v^2 - \varepsilon_i\hat{\sigma}_u^2 \ge 0;$$

$$\widehat{TE}_i^c = \exp\left(-\frac{\mu_{1i}\hat{\sigma}_v^2 - \varepsilon_i\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_v^2 + \hat{\sigma}_u^2}\right);$$

если выполняются условия:

$$\mu_{2i}\hat{\sigma}_v^2 - \varepsilon_i\hat{\sigma}_u^2 < 0$$

и

$$\mu_{1i}\hat{\sigma}_v^2 - \varepsilon_i\hat{\sigma}_u^2 \ge 0;$$

$$\widehat{TE}_i^c = 1,$$

при условии, что

$$\mu_{1i}\hat{\sigma}_v^2 - \varepsilon_i\hat{\sigma}_u^2 < 0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\widehat{TE}_i^c \ge \exp(\hat{\delta}\Delta z_i(1-\gamma)), \tag{5}$$

где $\hat{\gamma} = \dfrac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_v^2}$.

Пусть $\{\Delta z_i'\}_{i=1}^N$ — решение следующей задачи математического программирования

$$\min_{\{\Delta z_i\}}\left(\hat{\delta}\sum_{i=1}^N \Delta z_i\right),$$

$$z_i + \Delta z_i \in G_i, \quad i = 1,\dots,N, \tag{6}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N c_i(z_i, \Delta z_i) \le C.$$

Для каждого наблюдения рассмотрим случайную величину s_i', характеризующую остаточную неэффективность со значением параметра, определенным при решении задачи (6) и соответствующую ей оценку условной технической эффективности:

$$\widehat{TE}_i' = \exp\left(M[s_i'|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right).$$

Определим среднюю оценку условной технической эффективности:

$$\widehat{TE}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \exp\left(M[s_i'|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right).$$

Так как вектор управления $\{\Delta z_i'\}_{i=1}^N$, являющийся решением задачи (6), не обязательно совпадает с решением $\{\Delta z_i^*\}_{i=1}^N$ задачи (3) с критерием:

$$\min_{\{\Delta z_i\}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \exp\left(M[s_i^C|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right),$$

то

$$\widehat{TE}^C \le \widehat{TE}'.$$

В то же время

$$\hat{\delta}\sum_{i=1}^N \Delta z_i' \le \hat{\delta}\sum_{i=1}^N \Delta z_i^*.$$

Учитывая неравенство (5), при малых величинах затрат на управление имеем оценку:

$$\widehat{TE}^C \ge 1 + \frac{1-\gamma}{N}\left(\hat{\delta}\sum_{i=1}^{N}\Delta z'_i\right).$$

Таким образом, для средней оценки условной технической эффективности $\widehat{TE}^C$ может быть получена оценка сверху при любых и оценка снизу при малых затратах на управление. Следует отметить, что эти оценки имеют смысл, если достоверна модель неэффективности, т. е. набор факторов, объясняющих неэффективность и оценки их воздействия.

Если затраты на управление равны нулю, то достижимый производственный потенциал совпадает с фактическим: $\widehat{TE}^C = 1$ и $\widehat{TE}^M = 0$. При увеличении величины затрат оценка условной технической эффективности не возрастает, как показано на рис. 1, оценка технической эффективности мероприятия увеличивается.

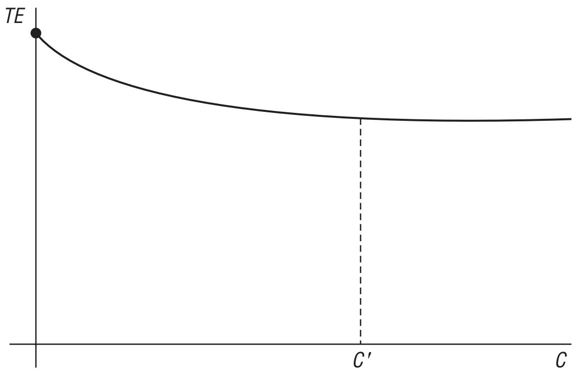

Рис. 1. Зависимость оценки условной технической эффективности от величины затрат на управление

По результатам 1103 наблюдений за производственным процессом и в соответствии с описанием мероприятия по управлению факторами неэффективности, представленным в «Моделях производственного потенциала с управляемыми факторами неэффективности» [Афанасьев (2006)], получены решения $\{\Delta z''_i\}_{i=1}^{N}$ задачи (6) для некоторых значений затрат на управление, при которых удается получить единственное решение. Оценка технической эффективности производства: $\widehat{TE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-\hat{u}_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(-M[u_i|\varepsilon_i])$ равна 0,3564.

Если отношение величины средних затрат C на управление к величине удельных затрат $\bar{c}$ на управление фактором неэффективности в единицу времени относительно велико и равно 0,3564, то модель (6) имеет единственное решение. Для наблюдений мы получаем оценки условной технической эффективности, показанные на рис. 2. Оценки условной технической эффективности расположены в хронологическом порядке. При этом уровне затрат оценка $\widehat{TE}^C$ равна 0,9402.

Если отношение величины средних затрат C к величине удельных затрат $\bar{c}$ равно 0,2303, то для наблюдений мы получаем оценки условной технической эффективности, показанные на рис. 3. При данном уровне затрат на управление получаем $\widehat{TE}^C = 0{,}9552$.

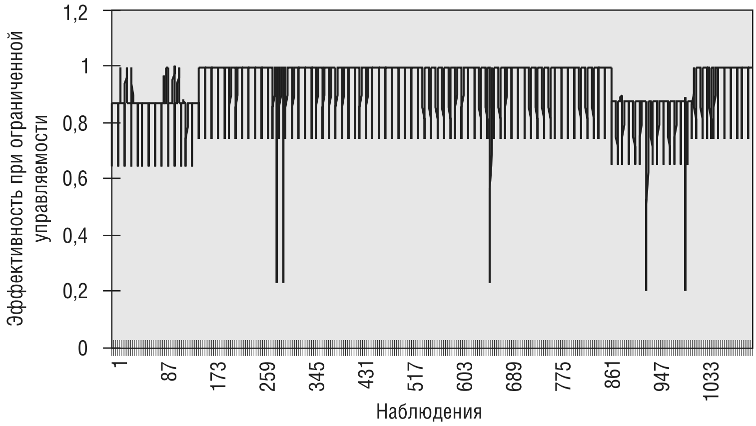

Рис. 2. Оценки условной технической эффективности при относительно высоких затратах на управление

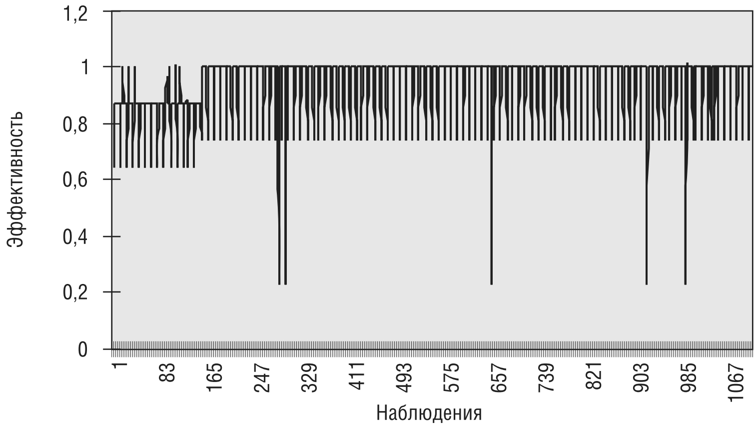

Рис. 3. Оценки условной технической эффективности при среднем уровне затрат на управление

Если отношение величины средних затрат C к величине удельных затрат $\bar{c}$ относительно мало и равно 0,0952, то для наблюдений мы получаем оценки условной технической эффективности, показанные на рис. 4. При данном уровне затрат на управление получаем $\widehat{TE}^{C} = 0{,}9715$.

На рисунке 5 показаны значения оценок $\widehat{TE}^{C}$ условной технической эффективности для соответствующих величин затрат на управление.

На рисунке 6 — значения оценок $\widehat{TE}^{M}$ технической эффективности мероприятия по управлению факторами неэффективности в зависимости от величины затрат на управление.

Заметим, что максимальная оценка технической эффективности, равная 1, соответствовала бы такому мероприятию, для которого достижимый потенциал совпадает с граничным. В нашем примере техническая эффективность мероприятий существенно ниже максимальной, так как не все факторы неэффективности управляемы.

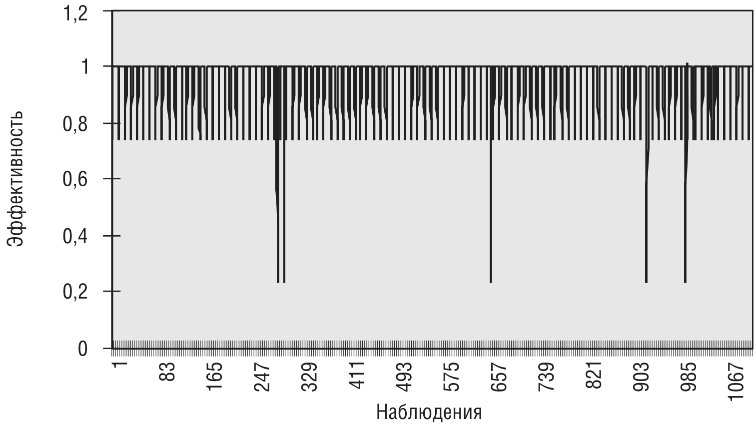

Рис. 4. Оценки условной технической эффективности при относительно низких затратах на управление

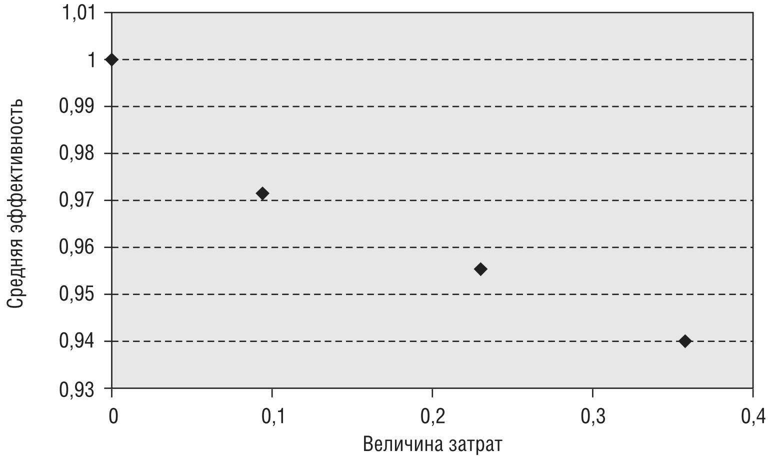

Рис. 5. Зависимость оценки условной технической эффективности $\widehat{TE}^{C}$ от величины затрат C

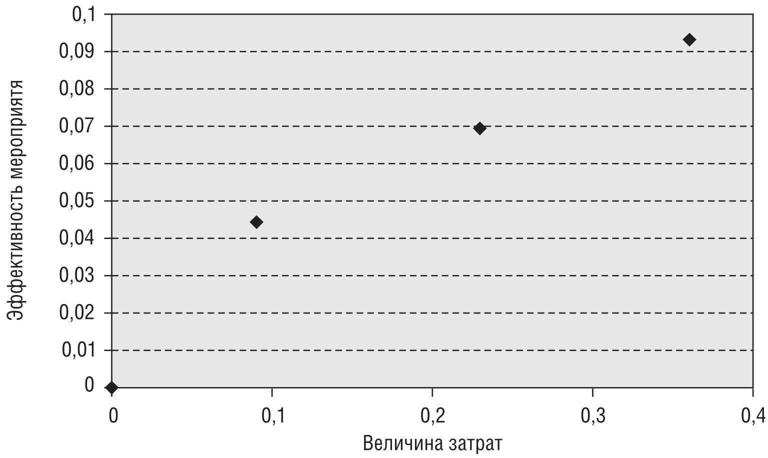

Рис. 6. Зависимость оценки технической эффективности мероприятия $\widehat{TE}^{M}$ от величины затрат C

3. Экономическая эффективность мероприятия

Расширим описание мероприятия, ориентированного на управление факторами неэффективности, и представим его в виде $M = \{Q, C(q), \Delta R\}$.

Здесь ΔR — величина приращения дохода в результате реализации мероприятия.

До реализации мероприятия его эффективность можно оценивать величиной ожидаемого приращения дохода. Будем считать, что приращение дохода ΔR полностью определяется приращением объема производства, т. е. $\Delta R = p\Delta y$, где p — цена продукта.

На рисунке 7 показана кривая, характеризующая зависимость потенциального приращения дохода от величины затрат на управление факторами неэффективности при фиксированном множестве Q допустимых значений факторов неэффективности. Если затраты изменяются от 0 до C', то величина дохода увеличивается. При уровне затрат выше определенного значения C' уровень потенциального дохода остается постоянным. Точка на кривой, соответствующей множеству Q допустимых значений факторов неэффективности и величине затрат на управление q, характеризует мероприятие $M = \{Q, C(q), \Delta R\}$. С ростом затрат q на реализацию мероприятия растет величина C средних затрат на управление объектом. Поэтому из условия $q_1 > q_2$ следует $C_1 > C_2$. Рост средних затрат C приводит к снижению оценки условной технической эффективности $\widehat{TE}^C$, получаемой по модели (3). Поэтому из условия $C_1 > C_2$ следует $\widehat{TE}^{C_1} \le \widehat{TE}^{C_2}$ и $\Delta R_1 \ge \Delta R_2$.

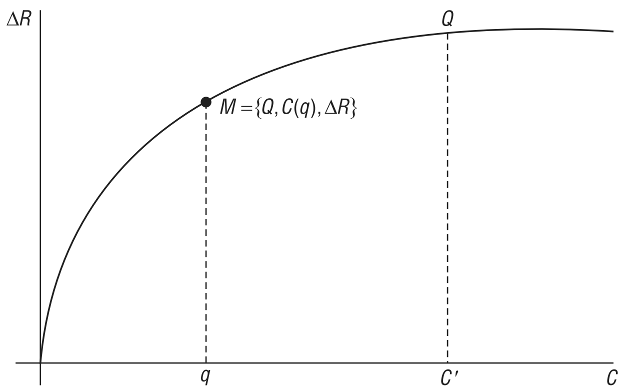

Рис. 7. Зависимость потенциального приращения дохода от величины затрат

Приращение объема производства в среднем на одно наблюдение при условии реализации достижимого производственного потенциала определяется величиной:

$$\Delta y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i^p - y_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i,\hat{\beta})\exp(v_i - s_i^C) - f(x_i,\hat{\beta})\exp(v_i - u_i)\right],$$

или

$$\Delta y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i,\hat{\beta})\exp(v_i - u_i)\left(\exp(u_i - s_i^C) - 1\right)\right].$$

Если, как и выше, в качестве оценки случайной величины $\exp(s_i^C - u_i)$ использовать величину $\widehat{TE}_i = \exp\left(M[s_i^C|\varepsilon_i] - M[u_i|\varepsilon_i]\right)$, то оценка приращения дохода определяется величиной

$$\Delta\hat{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\left(\exp\left(M[u_i|\varepsilon_i] - M[s_i^C|\varepsilon_i]\right) - 1\right)\right].$$

Тогда достижимый производственный потенциал, обеспечивающий максимальное приращение дохода $\Delta\hat{y}$ * может быть построен в результате решения задачи:

$$\max_{\{\Delta z_i\}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\left(\exp(M[u_i|\varepsilon_i]-M[s_i^C|\varepsilon_i])-1\right)\right],$$
$$s_i^C \sim N^+(\tilde{\mu}_i,\hat{\sigma}_u^2),\ \ u_i \sim N^+(\hat{\delta}z_i,\hat{\sigma}_u^2); \tag{7}$$
$$\tilde{\mu}_i=\hat{\delta}(z_i+\Delta z_i),\ \ z_i+\Delta z_i\in G_i,\ \ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}c_i(z_i,\Delta z_i)\le C.$$

Однако решение задачи (7) связано со значительными вычислительными трудностями.

Пусть $\{\Delta z_i''\}_{i=1}^{N}$ — решение задачи (8):

$$\max_{\{\Delta z_i\}}\left(-\hat{\delta}\sum_{i=1}^{N}y_i\Delta z_i\right);$$
$$z_i+\Delta z_i\in G_i,\quad i=1,\ldots,N, \tag{8}$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}c_i(z_i,\Delta z_i)\le C.$$

Для каждого наблюдения рассмотрим случайную величину:

$$s_i''\sim N^+(\bar{\mu}_i,\hat{\sigma}_u^2),\quad \bar{\mu}_i=\hat{\delta}(z_i+\Delta z_i'')$$

и соответствующую ей оценку приращения дохода:

$$\Delta\hat{y}''=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i\left(\exp(M[u_i|\varepsilon_i]-M[s_i''|\varepsilon_i])-1\right)\right],$$

тогда $\Delta\hat{y}^*\ge\Delta\hat{y}''$.

С учетом неравенства (5) при малых величинах затрат на управление имеем оценку

$$\Delta\hat{y}^*\le-\frac{1-\gamma}{N}\left(\hat{\delta}\sum_{i=1}^{N}y_i\Delta z_i''\right).$$

Таким образом, в результате решения задачи (8) может быть получена оценка снизу максимального потенциального приращения дохода, при любых затратах на управление, и оценка сверху — при малых затратах.

Мероприятие по управлению можно признать эффективным, если имеет место неравенство:

$$\Delta\hat{y}>q.$$

В таблице 1 приведены значения оценки $\Delta\hat{y}$ * величины дополнительного дохода при соответствующих затратах на управление факторами неэффективности. Здесь, как и выше, средние затраты C на управление измеряются в долях от величины удельных затрат $\bar{c}$ на управление в единицу времени, которая считается постоянной величиной.

Таблица 1

Зависимость приращения дохода $\Delta\hat{y}$ * от затрат C

Затраты C	Оценка приращения дохода
0	0
0,0952	13,42
0,2303	28,03
0,3563	38,86

На рисунке 8 показана зависимость оценки снизу величины приращения дохода от величины затрат на управление факторами неэффективности. Естественно, что приращение дохода в случае реализации производственного потенциала растет с ростом затрат на управление.

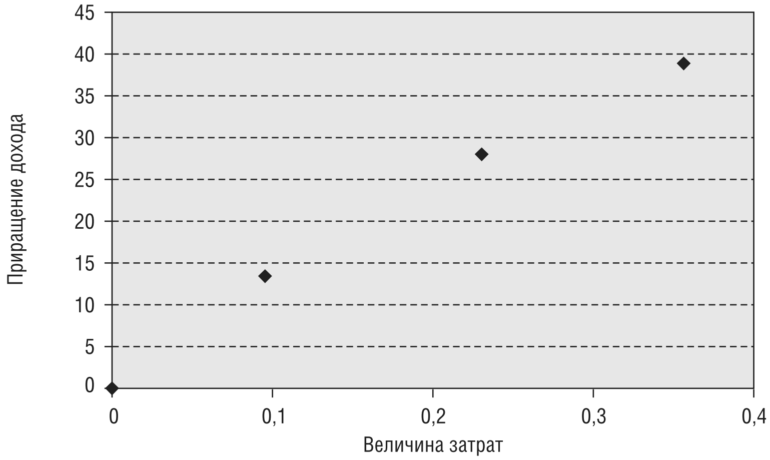

Рис. 8. Зависимость оценки снизу приращения дохода от затрат на управление

После реализации мероприятия можно оценить его фактическую экономическую эффективность.

Пусть π_i — величина чистого дохода для исходного наблюдения i, $i = 1,\ldots,N$, вычисленная как разность между величиной дохода, соответствующей объему производства y_i и величиной затрат на факторы производства x_i;

тогда $\pi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\pi_i$ — средняя величина чистого дохода для одного наблюдения.

Пусть $\{y_j^M, x_j^M\}_{j=1}^{L}$ — совокупность L результатов наблюдений производственного процесса, полученных после реализации мероприятия M по управлению факторами неэффективности, где y_j^M — объем производства, соответствующий наблюдению j, $j = 1,\ldots,L$;

x_j^M — вектор основных факторов, соответствующий наблюдению j.

Вычислим величину π_j^M чистого дохода для наблюдения j, $j = 1,\ldots,L$, полученного после реализации мероприятия M по управлению факторами неэффективности. Эта величина находится как разность между величиной дохода, соответствующей объему производства y_j^M и величиной затрат на факторы производства x_j^M в тех же ценах, в которых вычислены величины π_j. Пусть $\pi^M = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\pi_j^M$ — средняя величина чистого дохода для одного наблюдения после реализации мероприятия.

Мероприятие может быть оценено как экономически эффективное, если выполняется неравенство $\pi^M - \pi - C > 0$. В противном случае мероприятие является экономически не эффективным. Здесь, как и выше, C — средние издержки реализации мероприятия, приходящиеся на одно наблюдение. Если мероприятие экономически эффективно, в качестве оценки экономической эффективности может использоваться значение $\pi^M - \pi - C$ или относительная величина $\frac{\pi^M - \pi - C}{C}$.

4. Выводы

1. Модель (1) граничного производственного потенциала может быть построена при наличии априорной информации о значениях факторов неэффективности для каждого наблюдения. Значение функции неэффективности для каждого наблюдения характеризует параметры распределения случайной величины, описывающей воздействие факторов неэффективности. Модель позволяет идентифицировать факторы неэффективности. Оценка граничного производственного потенциала возможна в предположении о том, что воздействие всех факторов неэффективности можно устранить.

2. Модель достижимого производственного потенциала (2) сохраняет в производственном потенциале неустранимую неэффективность. Возможные управляющие воздействия характеризуются множеством векторов допустимых значений факторов неэффективности для каждого наблюдения. Чем больше управляемых факторов неэффективности и величина затрат на управление, тем меньше неустранимая неэффективность, тем выше достижимый производственный потенциал, тем ближе он к граничному. Оценка параметров остаточной неэффективности осуществляется в результате решения задачи математического программирования. Более низкая оценка условной технической эффективности указывает на более высокий достижимый граничный производственный потенциал, который является целью управляющих воздействий на факторы неэффективности.

3. На основе модели граничного производственного потенциала (2) могут быть получены оценки технической и экономической эффективности мероприятия по управлению факторами неэффективности. Ввиду ограниченной достоверности модели неэффективности, эти оценки целесообразно использовать при планировании малобюджетных мероприятий с небольшими затратами на управление. Такие мероприятия можно рассматривать как экспериментальные. Их реализация должна подтвердить наличие причинно-следственной взаимосвязи воздействия факторов, идентифицированных как факторы неэффективности и результатов производственного процесса. В итоге появляется возможность уточнить оценки интенсивности воздействия факторов неэффективности на результаты производственного процесса, скорректировать модели неэффективности и достижимого производственного потенциала.

Список литературы

Айвазян С. А. Основы эконометрики. М.: Юнити, 2001.

Афанасьев М. Ю. Модель производственного потенциала с управляемыми факторами неэффективности // *Прикладная эконометрика*. 2006. № 4.

Aigner D. J., Lovell C. A. K., Schmidt P. Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models // *Journal of Econometrics*. 1977. № 6. P. 21–37.

Battese G. E., Coelli T. J. Prediction of Firm-level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data // *J. of Econometrics*. 1988. V. 38. P. 387–399.

Battese G.E., Coelli T.J. A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data // *Empirical Economics*. 1995. № 20. P. 325–332.

Leibenstein H. Allocative efficiency vs. «X-efficiency» // *American Economic Review*. 1966. June. P. 392–415.

Meeusen W., van den Broeck J. Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions With Composed Error // *International Economic Review*. 1977. № 18. P. 435–444.