O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e CIEFCUL

Introdução

Este artigo tem como propósito principal discutir em que consiste o pensamento algébrico, analisar em que medida este conceito está presente nas actuais orientações curriculares para o ensino da Matemática nos primeiros anos, e identificar aspectos decisivos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula.

O artigo apoia-se na investigação recente de referência no domínio do pensamento algébrico, sendo as ideias teóricas ilustradas com episódios de sala de aula recolhidos directamente em aulas em que o foco principal foi o desenvolvimento do pensamento algébrico, conduzidas por professores de 1.º e 2.º ciclos que participaram no Programa de Formação Contínua em Matemática da responsabilidade da Universidade de Évora.

O artigo inicia-se com uma primeira secção onde se cruzam perspectivas de investigadores na procura de sistematizar aspectos essenciais que permitem caracterizar o pensamento algébrico, aprofundando-se, de seguida, duas das suas principais vertentes com particular interesse para a aprendizagem dos primeiros anos: a aritmética generalizada e o pensamento funcional.

Numa segunda secção, o artigo discute a pertinência da inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos e traça a evolução das orientações curriculares relativas a este domínio, considerando tanto o caso internacional do NCTM, como o caso português, com particular incidência no novo programa de Matemática do ensino básico.

Na terceira secção, o artigo debruça-se sobre aspectos decisivos para a promoção do pensamento algébrico dos alunos. Numa primeira subsecção, relativa às tarefas para a sala de aula, identifica as características especiais que lhe conferem potencial algébrico, ilustrando-as com episódios de sala de aula desenvolvidos a partir de duas tarefas diferentes, numa no âmbito da aritmética generalizada, outra no âmbito do pensamento funcional. Numa segunda subsecção, relativa às representações matemáticas usadas com vista à promoção do pensamento algébrico, o artigo discute a importância de se considerarem representações múltiplas e se estabelecerem relações entre elas, quer representações matemáticas não convencionais (como, por exemplo, os diagramas), quer representações convencionais (como, por exemplo, as tabelas, os gráficos, os símbolos), concluindo com a análise de dois episódios de sala de aula onde são notórias as contribuições das diferentes representações. A terceira subsecção é dedicada ao papel do professor no desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos, sublinhando-se a importância da criação de uma cultura de sala de aula adequada à discussão e confronto de ideias, à argumentação e à construção colectiva de generalizações matemáticas, aspectos que se ilustram a partir da análise dos episódios de sala de aula entretanto apresentados.

O artigo conclui com uma breve secção que sintetiza três dos desafios identificados pela investigação para o desenvolvimento do pensamento algébrico e que me parecem especialmente significativos em Portugal: a elevação das expectativas acerca das capacidades matemáticas dos alunos (e professores), a algebrização das tarefas para a sala de aula, e a transformação da cultura de sala de aula no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Em que consiste o pensamento algébrico?

A generalização está no coração do pensamento algébrico.
(Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007, p. 12)

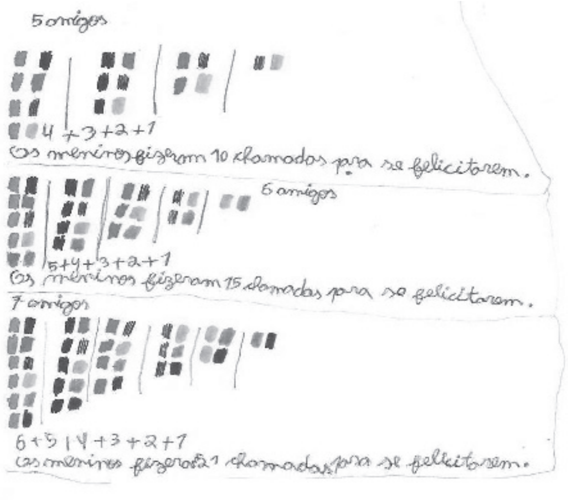
Inicio a discussão sobre o conceito de pensamento algébrico recorrendo à apresentação e análise de um episódio de sala de aula, ocorrido numa turma mista com alunos de 2.º e 3.º anos, na qual a professora[1] propôs a tarefa *Quantos telefonemas?*.

> **Quantos telefonemas?**
> Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descobre quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si...
> E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam?
> E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam?
> Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos?

Após a apresentação oral da tarefa, a professora entregou a cada grupo de alunos uma folha de papel com o respectivo enunciado e uma cartolina A3 para prepararem as apresentações à turma, recordando que poderiam resolver a tarefa da forma que considerassem indicada, desde que se percebesse como pensaram.

Os alunos trabalharam durante cerca de meia hora, registando nos cadernos as tentativas de resolução. Em seguida, cada grupo passou para a sua cartolina a resolução que obteve, preparando a sua intervenção na discussão geral da turma.

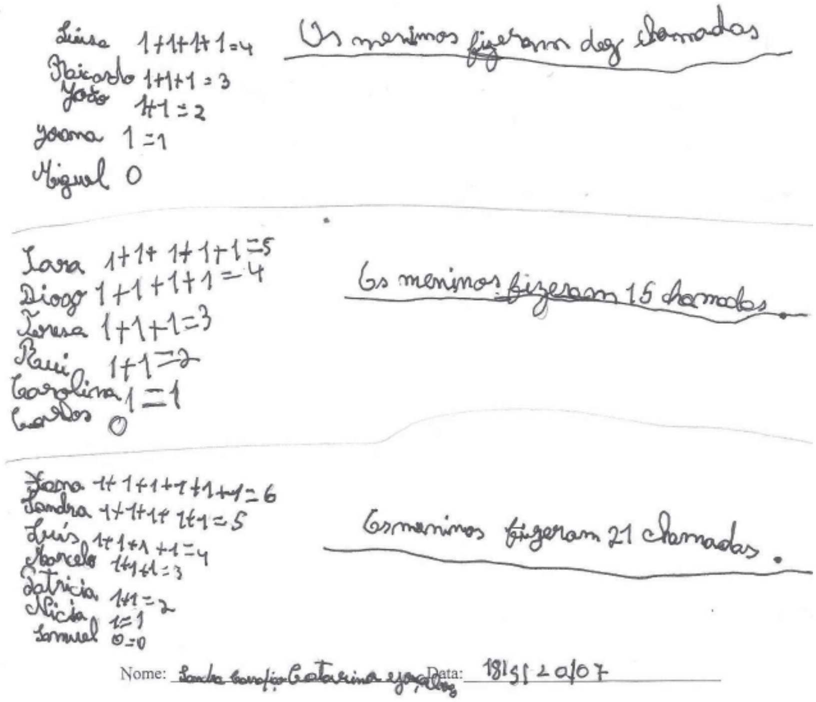
Um dos grupos recorreu às cores para representar os amigos, atribuindo uma cor diferente a cada um deles. Para o caso dos cinco amigos, construiu uma primeira coluna com quatro pequenos rectângulos verdes (representando o *amigo verde*), e associou a cada um deles um outro de cor diferente (preto, vermelho, azul escuro e turquesa), representando assim os 4 telefonemas em que o *amigo verde* participou. De seguida, desenharam três rectângulos pretos (representando o *amigo preto*) e associaram a cada um deles, pela mesma ordem, um outro rectângulo de cor diferente (vermelho, azul escuro e turquesa), representando os 3 telefonemas em que o *amigo preto* ainda falaria. Seguiram o mesmo processo até esgotar as hipóteses, considerando também colunas para o *amigo vermelho* e o *amigo azul escuro*, tendo o amigo turquesa ficado posicionado na diagonal do esquema. Para resolverem a situação com seis amigos, reproduziram o esquema realizado para cinco amigos e acrescentaram mais uma cor, o cinzento, representando o novo amigo para o qual os telefonemas ficaram posicionados na diagonal do novo esquema. E a mesma ampliação fizeram para o caso dos sete amigos, mantendo o esquema anterior e acrescentando um *amigo castanho*. Obtiveram assim um esquema no qual se visualizam todas as chamadas realizadas, entre quem foram feitas, e o efeito de se acrescentar um novo amigo à situação em estudo.



Ao mostrar aos colegas a sua resolução, explicaram satisfeitos:

> *Arranjámos cinco cores para representar os meninos. Pintámos as chamadas que cada um fez. Somámos as chamadas realizadas.*

Um segundo grupo apresentou uma resolução diferente, ficcionando nomes para os amigos e recorrendo ao registo da contagem do número de telefonemas através das adições do número *1*, correspondendo cada *1* a um telefonema a realizar entre pares de amigos diferentes. Apesar de variarem os nomes dos amigos, mantiveram, em cada caso, o mesmo tipo de registo relativamente às adições sucessivas do número de chamadas telefónicas, iniciando a contagem pelo maior numero de chamadas e terminando no amigo que já não precisa de ser considerado (zero chamadas).



Luísa 1+1+1+1=4 Os meninos fizeram dez chamadas
Ricardo 1+1+1=3
João 1+1=2
Joana 1=1
Miguel 0

Lara 1+1+1+1+1=5
Diogo 1+1+1+1=4 Os meninos fizeram 15 chamadas.
Teresa 1+1+1=3
Rui 1+1=2
Carolina 1=1
Carlos 0

Joana 1+1+1+1+1+1=6
Sandra 1+1+1+1+1=5
Luís 1+1+1+1=4 Os meninos fizeram 21 chamadas.
Marcelo 1+1+1=3
Patrícia 1+1=2
Nicha 1=1
Samuel 0=0

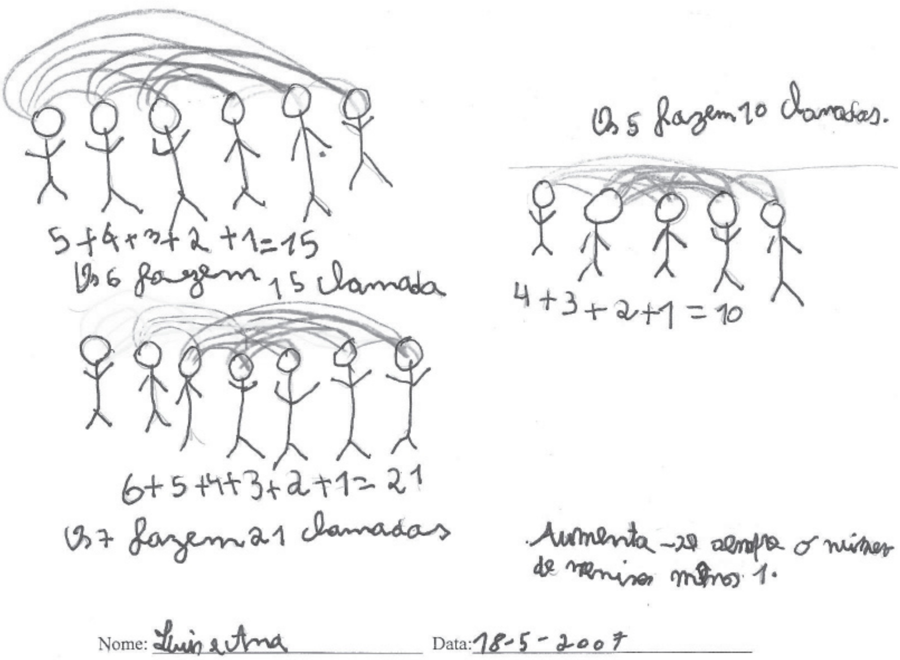
Nome: [illegible] Catarina [illegible] Data: 18/5/2007

Enquanto mostravam a cartolina, explicaram:

> *Demos nomes aos meninos. Numerámos as chamadas que cada um fez. Somámos as chamadas realizadas.*

Um terceiro grupo tomou então a palavra. Optou também por recorrer a cores diferentes para distinguir as chamadas realizadas. Em cada caso, desenhou os amigos alinhados, e ligou-os entre si com arcos de cores diferentes, respeitando sempre a mesma ordem (ver figura na página seguinte). Fez partir do primeiro menino (mais à esquerda) o maior número de arcos possíveis, representando todas as chamadas telefónicas em que esse menino participou; passou ao segundo menino e desenhou em cor diferente os arcos dirigidos aos meninos representados à sua direita, e assim sucessivamente. O registo do número de chamadas foi, em cada caso, feito também de forma sistemática, através da adição ordenada dos números de chamadas (correspondendo à contagem dos arcos). Ao apresentarem a sua resolução, explicaram:

> *Desenhámos os meninos. Desenhámos de cores diferentes as chamadas que cada um fez. Somámos as chamadas realizadas.*
>
> *E descobrimos uma regra… aumenta-se sempre o número de meninos menos um.*



A professora, ao ouvir esta "regra", propôs aos alunos a construção no quadro de uma tabela na qual relacionassem o número de amigos do grupo e o número de chamadas telefónicas que estes realizariam. Começando por registar a cor as soluções encontradas para 5, 6 e 7 meninos (aqui destacadas a *bold*), questionou os alunos acerca do número de chamadas para grupos com número de amigos até dez. Ao fim de algum tempo, a tabela ficou completa:

N.º de amigos	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	8	9	10
N.º de chamadas	0	1	3	6	**10**	**15**	**21**	28	36	45

De seguida, correspondendo ao incentivo da professora, os alunos, numa tentativa participada por muitos, exprimiram uma conclusão que teve a concordância colectiva:

> *Depois de analisarmos a tabela concluímos que existe uma regra para descobrir o termo seguinte, ou seja… para descobrir quantas chamadas fazem onze alunos, basta só juntar ao resultado anterior onze menos um, porque há sempre um aluno que não telefona a ninguém.*

A professora interrogou se esta regra servia apenas para o caso de onze amigos ou se poderia ser usada para calcular o número de chamadas para um outro número de amigos, desafiando-os para o caso de 20 amigos.

Um grupo apresentou então no quadro a seguinte resposta:

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0

A professora desafiou então os alunos a organizar a adição por pares de números com a mesma soma, organizando os pares no quadro:

19+1=20, 18+2=20, 17+3=20, 16+4=20, 15+5=20, 14+6=20,

13+7=20, 12+8=20, 11+9=20 e depois o 10

ou seja 9 × 20+10 = 180+10 = 190

Seguindo o desafio da professora, a turma sintetizou então a regra da seguinte forma:

> *Existe uma regra para descobrir o número de chamadas feitas por um qualquer número de alunos, basta para isso juntar todos os números partindo do número um até chegarmos ao número anterior ao número de alunos.*

Numa primeira análise deste episódio de sala de aula, poder-se-á afirmar que estes alunos estavam a resolver um problema. E isso será certamente verdade, pois os alunos apresentaram estratégias criativas de encontrar a resposta para uma situação complexa que não conheciam. No entanto, um olhar mais atento sobre a actividade matemática em que se envolveram revela outros aspectos particulares. As suas produções escritas e conclusões enunciadas permitem observar que:

- Identificaram a estrutura matemática da situação em análise;
- Estabeleceram relações numéricas entre as duas variáveis em causa;
- Generalizaram uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, justificando-a;
- Expressaram a generalização de duas formas distintas, por recorrência e através do termo geral.

Trata-se de aspectos bastante sofisticados do raciocínio matemático, que nem sempre se têm reconhecido como próprios de crianças de sete ou oito anos de idade. Na realidade, são aspectos que revelam a possibilidade de os alunos muito jovens se envolverem em pensamento algébrico.

Pensamento algébrico: um novo conceito

Mas o que se entende exactamente por pensamento algébrico? Nos últimos anos, muitos investigadores têm dedicado atenção a discutir este conceito, em especial no contexto do ensino da Matemática nos níveis elementares, correspondente aos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico português. Desta discussão, sobressai a associação de pensamento algébrico ao reconhecimento daquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007).

Maria Blanton e James Kaput[2], investigadores pioneiros neste domínio, designado por alguns autores como *Early Algebra*[3], caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

Esta conceptualização é consistente com a perspectiva de outros autores, como é o caso de Carolyn Kieran, que sublinha a evolução trazida pelos defensores do pensamento algébrico:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na actividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas.
>
> (Kieran, 2007a, p. 5)

Deste modo, o foco do pensamento algébrico está na actividade de generalizar, a qual importa também clarificar:

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objectos de nível superior para o raciocínio ou comunicação).
>
> (Kaput, 1999, p. 6)

Esta ideia de pensamento algébrico contrasta, em muito, com a concepção geral prevalecente de Álgebra, derivada da experiência escolar de várias décadas. É fácil encontrar registos que caracterizam a Álgebra escolar de forma semelhante um pouco por toda a parte: simplificar expressões algébricas, resolver equações, aplicar as regras para manipular símbolos, com elevado nível de abstracção (Kaput, 1999; Ponte, 2006).

Deste contraste, ressaltam dois aspectos distintos. Um primeiro é que no pensamento algébrico aceita-se que a notação algébrica convencional (envolvendo letras, sobretudo as últimas do alfabeto) não é o único veículo para exprimir ideias algébricas; a linguagem natural, e outros elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos podem também ser usadas para expressar a generalização[4] (Carraher & Schliemann, 2007;

Kieran, 2007b). Curiosamente, esta ideia parece encontrar um eco muito distante, na Álgebra retórica (Sfard & Linchevski, 1994), praticada pelos babilónicos há cerca de 4000 anos, e também nos trabalhos de matemáticos árabes, há cerca de 1000 anos atrás. Em nenhum destes casos históricos é utilizado um sistema estruturado de símbolos, sendo a generalização dos processos algébricos envolvidos nos problemas sustentada por descrições verbais. "É importante sublinhar que a história da Álgebra não é a história dos símbolos" (Sfard & Linchevski, 1994, p.197).

O segundo aspecto que distingue o pensamento algébrico da visão tradicional da Álgebra tem a ver com a ênfase nos significados e compreensão. A Álgebra escolar tem estado associada à manipulação dos símbolos e à reprodução de regras operatórias, tantas vezes aplicadas mecanicamente e sem compreensão, parecendo os símbolos ter adquirido um estatuto de primazia *per si*. Na realidade, o simbolismo algébrico concentra um poder insuperável, possibilitando uma agilidade ímpar na tradução e manipulação de informação e na compactação de ideias que só assim se tornam operacionalizáveis (Smith, 2003). Em virtude do uso dos símbolos e sistemas simbólicos se ter imposto[5], a Álgebra passou a ser encarada como o estudo ou uso destes sistemas. No entanto, no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão. Trata-se de olhar através dos símbolos e não de olhar os símbolos (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008).

Aspectos essenciais e vertentes do pensamento algébrico

Retomando a caracterização do pensamento algébrico, Kaput (2008) refere-se a dois aspectos essenciais. O primeiro é a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais. O segundo corresponde ao raciocínio e acção sintacticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados. Segundo Smith (2008), o primeiro aspecto está relacionado com o *pensamento representacional*, reservado para designar os processos mentais pelos quais um indivíduo cria significados num sistema de representação; o segundo, que designa por *pensamento simbólico*, está associado ao modo como o indivíduo compreende e usa um sistema de símbolos e as respectivas regras, focando-se nos símbolos propriamente ditos.

Estes dois aspectos estão presentes nas diferentes vertentes que a Álgebra[6] pode assumir e que Kaput sintetizou recentemente[7] do seguinte modo:

1. Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na Aritmética (Álgebra como Aritmética generalizada) ou no raciocínio quantitativo.

2. Álgebra como o estudo das funções, relações e (co)variação.

3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior.

(Kaput, 2008, p.11)

As vertentes mais comuns de pensamento algébrico no ensino elementar são a Aritmética generalizada e o pensamento funcional (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007), que importa analisar com mais detalhe.

A vertente relativa à Aritmética generalizada baseia-se no carácter potencialmente algébrico da Aritmética, a ser explorado explicitamente, de forma sistemática e expondo a sua generalidade (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2008). É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintácticos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que $33 + 8 = 8 + 33$ não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente).

A generalização acerca das operações e suas propriedades e o raciocínio acerca de relações entre números constituem o coração da Álgebra como Aritmética generalizada (Kaput, 2008). No entanto, existem muitos outros aspectos que se podem incluir nesta vertente. Blanton e Kaput (2005) oferecem um vasto leque de exemplos:

- Explorar propriedades e relações de números inteiros (generalizar sobre adição e multiplicação de números pares e ímpares; generalizar propriedades como o resultado da subtracção de um número de si mesmo, formalizado como $a - a = 0$; decompor números inteiros em possíveis adições e examinar a estrutura dessas adições; …)

- Explorar propriedades das operações com números inteiros (explorar relações entre operações, como a comutatividade da adição ou da multiplicação, ou a propriedade distributiva da adição sobre a multiplicação; procurar generalidades nas operações, como adicionar e subtrair a mesma quantidade; …)

- Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades (explorar o papel algébrico do sinal de "=" usando a ideia de balança ou expressões numéricas do tipo $8 + 6 = \ldots\ldots + 5$; tratar equações como objectos que expressam relações quantitativas como $(3 \times n) + 2 = 14$; …)

- Tratar o número algebricamente (tratar o número como número generalizado, enfatizando a estrutura do número e não o seu valor. Por exemplo, porquê $5 + 7$ é par? E se fosse $45678 + 85631$? Estas perguntas exigem respostas baseadas na estrutura do número e não no resultado da adição; …)

- Resolver *expressões* numéricas com número desconhecido em falta (sentido de incógnita) (resolver equações simples com uma incógnita; resolver equações com incógnitas múltiplas ou repetidas, por exemplo, se $V + V = 4$, quanto é $V + V + 6$?; propor equações no contexto do uso da recta numérica; completar puzzles numéricos onde faltam números, por exemplo, no triângulo de Zolan[8]).

A segunda vertente da Álgebra identificada por Kaput (2008), geralmente designada por pensamento funcional, envolve a generalização através da ideia de função, que pode ser encarada, por exemplo, como a descrição da variação das instâncias numa parte do domínio. Colocar as funções no centro da Álgebra implica a concepção das letras como variáveis e não apenas como incógnitas, mais frequente na Aritmética (Carraher & Schliemann, 2007).

O aspecto sintáctico da Álgebra surge aqui para descrever regularidades através de símbolos ou para alterar a forma das expressões que traduzem regularidades, para comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão.

Esta vertente inicia-se frequentemente com a generalização de padrões, estabelecendo conexões entre padrões geométricos e numéricos para descrever relações funcionais.

Blanton e Kaput (2005) elencam diversos exemplos de aspectos incluídos no pensamento funcional enquanto vertente da Álgebra:

- Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas (usar símbolos para modelar problemas; usar símbolos para operar com expressões simbólicas, por exemplo, no contexto de mensagens secretas que são códigos simbólicos para fazer conversões de unidades: *3 ft 5 in* corresponde a 3(12) + 5, pois a mensagem secreta para conversão de pés (*feets*) em polegadas (*inches*) é F(12) + I, onde F representa o número de pés e I o número de polegadas, funcionando, assim, a mensagem secreta como função e F como variável).

- Representar dados graficamente (fazer um gráfico de pares ordenados para expressão de uma relação funcional e apoiar nesse gráfico a análise da variação da função).

- Descobrir relações funcionais (explorar correspondência entre quantidades; explorar relações recursivas; desenvolver uma regra para descrever as relações, usar tabelas de *IN/OUT*[9], simbolizar as regras descobertas).

- Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos (formular conjecturas acerca do que não se sabe, a partir de que se sabe sem repetir todo o processo anterior; por exemplo, no problema dos telefonemas, colocar a situação: "E se fossem 12 amigos?").

- Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos (identificar regularidades numéricas, por vezes geradas geometricamente, por exemplo, 0+1+2+3+4+5 a partir do diagrama do problema dos apertos de mão; identificar padrões em sequências de figuras geométricas; identificar padrões em conjuntos de expressões numéricas).

Os diversos aspectos particulares explicitados por Blanton e Kaput (2005) não são exemplos teóricos eventualmente considerados como possíveis. Ao invés, são exemplos que os investigadores detectaram nas práticas de sala de aula de uma professora de 3.º ano de escolaridade que acompanharam no contexto de um programa de desenvolvimento profissional.

O pensamento algébrico e as orientações curriculares para a Matemática escolar nos primeiros anos

… o caminho envolve infiltrar Álgebra ao longo de todo o currículo desde o início da escola.
(Kaput, 1999, p. 4)

O lugar do pensamento algébrico no currículo de Matemática

Nos últimos anos, tem-se assistido a um movimento que defende a integração do pensamento algébrico na Matemática escolar desde o seu início. Na sua origem está a crescente convicção de que as dificuldades dos alunos neste domínio, largamente documentadas pela investigação (Carraher & Schliemann, 2007; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007), residem, em grande parte, no conteúdo que tem prevalecido nos programas de Álgebra, muito centrados na utilização de simbologia desprovida de significado, com ênfase na aplicação de regras e técnicas visando a manipulação simbólica e com elevado grau de abstracção. Além disso, frequentemente a Álgebra constituiu um domínio à parte isolado dos outros temas do currículo de Matemática, e isolado, também, dos interesses dos alunos, que tendem a não lhe reconhecer valor. Como afirma Kaput: "A Álgebra escolar tem tradicionalmente sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desligados quer dos outros conteúdos matemáticos, quer do mundo real dos alunos" (1999, p. 2).

Em especial, a frequente falta de articulação da Álgebra com a Aritmética e a forma como esta última é geralmente leccionada, proporciona terreno para que os alunos transportem consigo concepções não favoráveis a aprendizagens algébricas[10]: "Um olhar mais próximo para a investigação e para o currículo tradicional de Álgebra indicam que as experiências prévias dos alunos com a Aritmética podem ser a fonte plausível dos erros típicos" (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007, p. 11). Uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores.

Um outro aspecto a favor da inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática tem a ver com o seu potencial para dar unidade e sentido à Matemática escolar desde o seu início, pela natureza do próprio pensamento algébrico. Quando explorados convenientemente, os diferentes aspectos da Álgebra tornam-se "hábitos da mente" (Kaput, 1999), formas de ver e agir matematicamente — em particular, formas de generalizar, abstrair e formalizar — que se repercutem transversalmente em todos os temas, apoiando a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos e proporcionando uma experiência matemática significativa (Boavida *et al.*, 2008). O pensamento algébrico "acrescenta uma unidade conceptual, profundidade e poder que no nosso currículo K–8, especialmente nos primeiros anos, tem sido difícil de alcançar" (Kaput, 1999, p. 29).

A investigação tem vindo, pois, a recomendar uma "algebrização do currículo", significando com isso uma abordagem ao pensamento algébrico desde o início da escolaridade, integrando-o com outros temas matemáticos, incluindo diferentes vertentes, tendo por base as capacidades cognitivas e linguísticas dos alunos, e encorajando uma aprendizagem activa que valorize a construção de significados e a compreensão (Kaput, 1999). Assim, como argumento para defender a inclusão do pensamento algébrico no currículo de Matemática dos primeiros anos pode evocar-se, não só o seu carácter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores, mas também o seu contributo para o aprofundamento da compreensão da Matemática e do poder desta área do saber.

Um olhar sobre orientações curriculares internacionais — NCTM

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), instituição de referência no domínio das tendências curriculares internacionais, reconheceu a importância da Álgebra no seu mais recente documento com orientações curriculares para a Matemática escolar, Principles and Standards for School Mathematics, publicado em 2000[11]. Assume a Álgebra como um tema transversal, sublinhando o seu potencial no estabelecimento de relações com outros temas como os Números, a Medida ou a Geometria, e dando-lhe o estatuto de fio condutor desde os primeiros anos de escolaridade.

Numa breve definição, este documento afirma que a Álgebra envolve as relações entre quantidades, o uso dos símbolos, a modelação de fenómenos, e o estudo matemático da variação. Nas Normas para a Álgebra, define quatro objectivos a atingir por todos os alunos desde o nível pré-escolar ao 12.º ano, estando estes aspectos claramente alinhados com a investigação sobre o pensamento algébrico:

> **Normas para a Álgebra**
>
> Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para:
> - Compreender padrões, relações e funções;
> - Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> - Analisar a variação em diversos contextos.
>
> (NCTM, 2007, p. 39)

Estes quatro aspectos são retomados para cada um dos níveis de escolaridade, desde o Pré-escolar ao 12.º ano, concretizando aspectos mais específicos a desenvolver. Para os níveis Pré-escolar ao 2.º ano, e 3.º ao 5.º ano, os aspectos são os seguintes:

Compreender padrões, relações e funções

Pré – 2.º	3.º- 5.º
• Agrupar, classificar e ordenar objectos por tamanho, número e outras propriedades; • Reconhecer, descrever e ampliar padrões, tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e interpretá-los em diversas representações; • Analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como de crescimento.	• Descrever, ampliar e fazer generalizações acerca de padrões geométricos e numéricos; • Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.

Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos

Pré – 2.º	3.º- 5.º
• Ilustrar os princípios e as propriedades gerais das operações, como a comutatividade, através da utilização de números específicos; • Usar representações concretas, pictóricas e verbais, para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais.	• Identificar propriedades, como a comutatividade, a associatividade e a distributividade, e aplicá-las ao cálculo com números inteiros; • Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo; • Expressar relações matemáticas através de equações.

Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas

Pré – 2.º	3.º- 5.º
• Modelar situações que envolvam a adição e subtracção de números inteiros, através da utilização de objectos, figuras e símbolos.	• Modelar situações problemáticas, usando objectos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões.

Analisar a variação em diversos contextos

Pré – 2.º	3.º- 5.º
• Descrever variações qualitativas, como o facto de um aluno ter crescido; • Descrever variações quantitativas, como o facto de um aluno ter crescido 5 cm ao longo de um ano	• Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável; • Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las.

Como se pode observar, a proposta é explorar aspectos essenciais da Álgebra adequando-os às experiências e capacidades dos alunos de diferentes níveis etários, fazendo uso de representações múltiplas e introduzindo os símbolos algébricos de forma gradual mas não tardia. Nestes aspectos encontram-se representadas tanto a vertente da Aritmética generalizada, como a do pensamento funcional atrás referidas.

Um olhar sobre as orientações curriculares portuguesas

Nos programas portugueses ainda em vigor para o ensino básico, datados do início dos anos 90, não se encontram referências ao pensamento algébrico. Na realidade, estes programas nem sequer identificam a Álgebra como um tema, estando alguns dos conteúdos afins integrados nos temas Números e cálculo e Funções. Como refere Ponte (2006):

> A visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações. Isso é testemunhado pela terminologia dos actuais programas dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico que, em vez de falarem de Álgebra, falam apenas em "cálculo", ou seja, em "cálculo algébrico". Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática (…) (pp.10–11).

Uma análise do programa do 1.º ciclo (ME-DGEBS, 1990/2004) permite observar que este inclui alguns aspectos que, em geral, são inerentes ao pensamento algébrico mas, no entanto, estes aparecem sem um propósito explícito[12]. De igual modo, no programa do 2.º ciclo (ME-DGEBS, 1991) identificam-se alguns tópicos que se poderiam associar ao pensamento algébrico mas sem que esta associação seja feita[13]. No entanto, atendendo a que os programas foram concebidos nos finais dos anos 80, não será de estranhar a ausência do pensamento algébrico nas suas páginas, visto esta perspectiva sobre a Álgebra escolar se ter desenvolvido nos anos mais recentes.

Em termos de documentos curriculares, uma significativa evolução surge em 2001, com o Currículo Nacional do Ensino Básico, que distingue um domínio temático que designa por Álgebra e Funções, considerando-o transversal, e aponta cinco aspectos que todos os alunos devem desenvolver ao longo de todos os ciclos:

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contexto numérico e geométrico;
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- A aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras;
- A aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas para procurar soluções de equações simples;
- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.

(ME-DEB, 2001, p. 66)

Estes aspectos revelam sintonia com as tendências internacionais, valorizando muitas das ideias principais que o pensamento algébrico compreende. No entanto, o documento não aponta aspectos específicos a desenvolver nos dois primeiros ciclos, mas somente para o 3.º ciclo, parecendo por isso veicular a mensagem de que a Álgebra e Funções são um assunto mais adequado aos alunos mais velhos.

Recentemente, com o novo programa de Matemática para o ensino básico homologado em 2007 (Ponte *et al.*, 2007), existe uma valorização da Álgebra desde os primeiros anos, considerando os seus autores que a alteração mais significativa em relação ao programa anterior é "o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos" (Ponte *et al.*, 2007, p.7). Embora no 1.º ciclo não surja o tema Álgebra identificado como tal, encontram-se referências a que as ideias algébricas surgem no 1.º ciclo, através, por exemplo, do estabelecimento de relações entre números e entre os números e as operações. No 2.º ciclo a Álgebra aparece como um tema independente, retomando-se as referências ao pensamento algébrico no ponto que o programa dedica à explicitação da articulação entre os 1.º e 2.º ciclos:

> Os alunos no 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvol-

> vem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. No 1.º ciclo trabalha-se com as estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. No 2.º ciclo, este assunto é aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade directa, razão e proporção.
>
> (Ponte *et al.*, 2007, p.40)

O propósito principal de ensino para a Álgebra no 2.º ciclo é identificado como "desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (p. 40).

Em termos de tópicos específicos, é proposto o estudo de relações e regularidades, que se desdobra em expressões numéricas e propriedades das operações, sequências e regularidades, e proporcionalidade directa. O enunciado dos objectivos específicos permite identificar uma preocupação com as generalizações e sua expressão[14].

Assim, a concepção de Álgebra que se encontra neste programa vai ao encontro das tendências curriculares e da investigação recentes no domínio. Por um lado, o pensamento algébrico está presente desde o início, defende-se a sua articulação com outros domínios temáticos, e referem-se explicitamente diferentes vertentes, em especial a vertente do pensamento funcional. Por outro lado, e perspectivado de uma forma mais global e integrada com os objectivos do programa, parece poder afirmar-se que a Álgebra é posta ao serviço da compreensão, e está em estreita associação com o desenvolvimento das capacidades transversais referidas no programa[15]. Podemos, pois, afirmar que existe uma assinalável evolução dos programas portugueses no que diz respeito ao pensamento algébrico.

O pensamento algébrico na sala de aula

> *O nosso desafio é encontrar formas de tornar o poder da Álgebra (na verdade, de toda a Matemática) acessível a todos os alunos, encontrar formas de ensino que criem ambientes de sala de aula que permitam aos alunos aprender com compreensão.*
>
> (Kaput, 1999, p. 3)

Tarefas com potencial algébrico

As tarefas têm uma importância significativa em qualquer aula de Matemática e, em particular, naquelas em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico. São elas que constituem o ponto de partida para a actividade matemática que os alunos desenvolvem.

Blanton e Kaput (2008) identificam a transformação das tarefas típicas da aula de Matemática como um dos passos que os professores terão de percorrer quando interessados em promover o pensamento algébrico nos seus alunos. Recomendam a "algebrização" dos problemas aritméticos — a sua conversão de problemas aritméticos de resposta única em oportunidades de construção de regularidades, conjecturas, generalizações e sua justificação e explicitação. Também Kieran (2007a) sublinha a importância das tarefas, em articulação com as questões que o professor propõe na sua exploração, destacando como característica essencial que conduzam a "sequências estruturadas de operações que foquem a atenção dos alunos em aspectos cruciais da forma e da sua generalização" (p. 22). Assim, particularmente bem adaptadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico são as tarefas de natureza problemática e as investigações que convidam ao estabelecimento de propriedades gerais.

Para ilustrar estes aspectos, apresento de seguida o episódio *E se adicionares duas linhas da tabuada?*, baseado numa tarefa elaborada com a intenção de proporcionar aos alunos a descoberta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a partir de uma investigação sobre *as linhas* da tabuada, proposto a uma turma de 3.º ano[16] que tinha estudado as tabuadas até à do cinco. Embora esta tarefa tenha sido inspirada pelas preocupações relacionadas com o desenvolvimento do sentido do número e das operações (Brocardo, Serrazina, & Rocha, 2008), ela tem, pela sua estrutura, um cunho fortemente algébrico.

E se adicionares duas linhas da tabuada?

1 × 3 = 3
2 × 3 = 6
3 × 3 = 9
4 × 3 = 12
5 × 3 = 15
6 × 3 = 18
7 × 3 = 21
8 × 3 = 24
9 × 3 = 27
10 × 3 = 30

Já conheces muitas tabuadas. Talvez as saibas todas de cor... Mas talvez não tenhas reparado que há muitas coisas que podemos descobrir nas tabuadas…

1. Vejamos um exemplo na tabuada do 3…

a) Escolhe a segunda linha **2 × 3 = 6**
b) Escolhe a quinta linha **5 × 3 = 15**
c) Adiciona os números relativos à ordem das linhas: 2 + 5 = 7

d) Repara na sétima linha da tabuada: **7 × 3 = 21**.
Tem alguma coisa a ver com a segunda e a quinta?
Que relações observas entre os números destas três linhas da tabuada?

2. Experimenta um outro exemplo na tabuada do 3…

a) Escolhe agora tu uma linha desta tabuada…
b) Escolhe uma outra linha desta tabuada….
c) Adiciona os números relativos à ordem das linhas.
d) Repara na linha com o número obtido na alínea anterior. Que relações observas entre os números destas três linhas da tabuada?

3. Com certeza já tens uma conjectura…

a) Qual é a tua conjectura acerca do que se passa nos dois exemplos anteriores?
b) Testa-a com outros exemplos de linhas à tua escolha (podes repetir linhas, por exemplo, linha 4 e linha 4 para comparar com linha 8)
c) A tua conjectura é sempre verdadeira? Porquê?
Como podes justificá-la?

4. Será que a tua conjectura é geral?

a) E se em vez da tabuada do 3 experimentares agora com outra tabuada? Será que se passa o mesmo? Experimenta e explica as tuas conclusões.

A professora começou por analisar em conjunto com toda a turma o primeiro caso para garantir que os alunos compreendiam as explorações a fazer. Projectou no quadro uma tabuada do três e seguiu as indicações da primeira questão, tendo o cuidado de assinalar com caneta de cor no acetato as linhas seleccionadas, para que os alunos identificassem a linha completa e não apenas o respectivo número de ordem, como alguns pareciam tender a fazer (ver figura na página seguinte). Após a identificação das linhas, a professora pediu os alunos que as relacionassem.

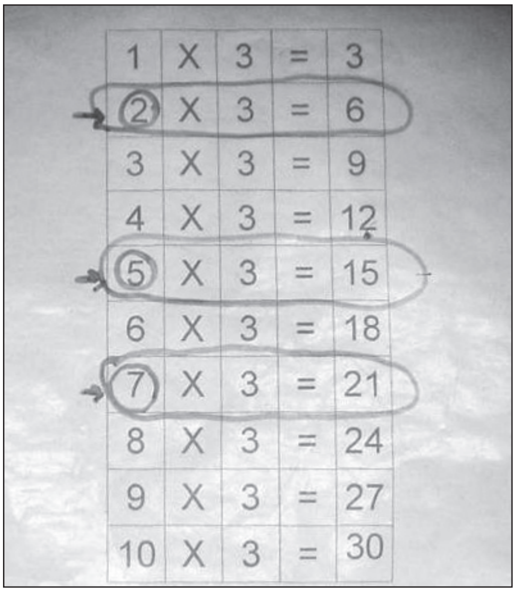
> Professora: "Adicionámos o 2 com o 5 e deu 7 (apontando para os números de ordem das linhas). Será que há ali mais qualquer coisa?"

Os alunos observavam com atenção e alguns manifestaram-se.

> João: "Duas linhas juntas dá o resultado da outra!"

> Artur: "Ao contrário também dá... se for 21 - 15 é igual à de cima, dá 6."

A professora cumprimentou os alunos pela descoberta e fez uma síntese.



> Professora: "Então, o que vocês estão a dizer é que quando tenho a linha do dois e a linha do cinco, se adicionar os seus resultados, obtenho o mesmo resultado que está na linha do 2+5, ou seja, na linha do 7"

E escreveu no quadro, pedindo a colaboração dos alunos:

$$2 \times 3 \quad + \quad 5 \times 3 \quad = \quad 7 \times 3$$

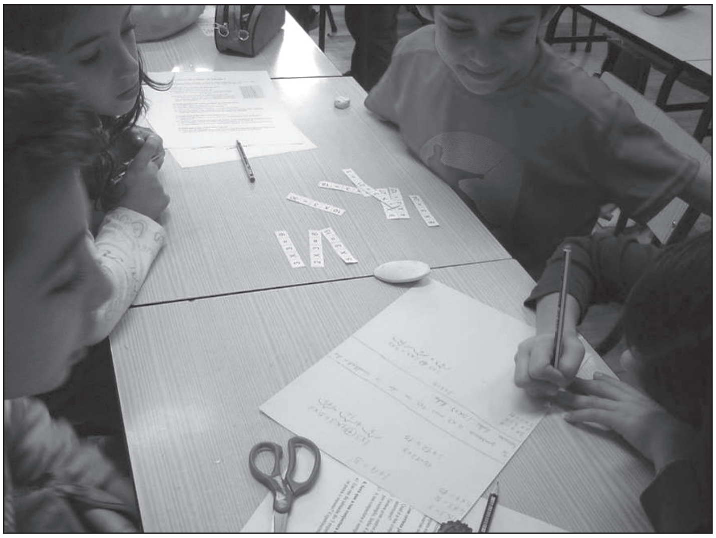
Confirmou depois novamente a veracidade desta expressão com a turma, acrescentando:

$$\underbrace{2 \times 3}_{6} \quad + \quad \underbrace{5 \times 3}_{15} \quad = \quad \underbrace{7 \times 3}_{21}$$

O Artur quis também escrever a sua descoberta com a subtracção mas a professora sugeriu que isso ficasse para outro dia, parecendo o aluno conformado.

Seguiu-se então a fase de trabalho de grupo. Os alunos organizaram-se em grupos de quatro ou cinco, e a professora distribuiu o material. A cada grupo deu uma tabuada do 3 impressa em tamanho grande, indicando que a cortassem por linhas para agilizar as suas experiências. Pediu aos alunos que passassem à segunda questão, à investigação do que aconteceria com a adição de outras linhas da tabuada do três, recomendando que escolhessem números cuja soma não ultrapassasse o dez.

Os alunos trabalharam com empenho e foram registando as respectivas experiências, concluindo com facilidade que a relação antes verificada acontecia também para outros casos de linhas à sua escolha.

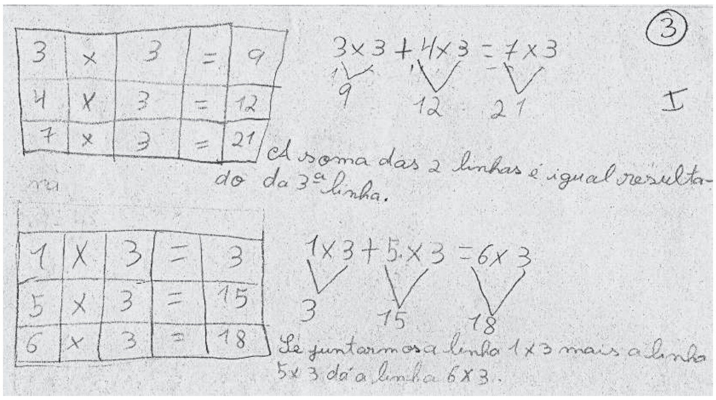


À medida que os grupos iam dando por finda a exploração da tabuada do três, a professora entregou a cada um uma tabuada diferente, ficando dois grupos com a tabuada do 2, outros dois com a tabuada do 4 e outros dois com a tabuada do 5. Incentivou-os a testar o que aconteceria nas tabuadas diferentes.

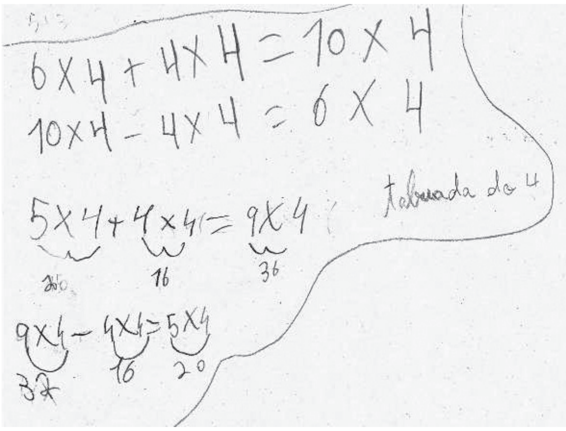
> Professora: "Será que isto acontece só na tabuada do 3? Será que ela tem alguma coisa de especial que faz com que isto aconteça mas já não acontece nas outras?"

Os alunos iam fazendo comentários que revelavam que intuíam que se iria manter a relação enquanto experimentavam. A professora escolheu o que cada grupo iria apresentar à turma, fotocopiando para acetato a selecção das resoluções.

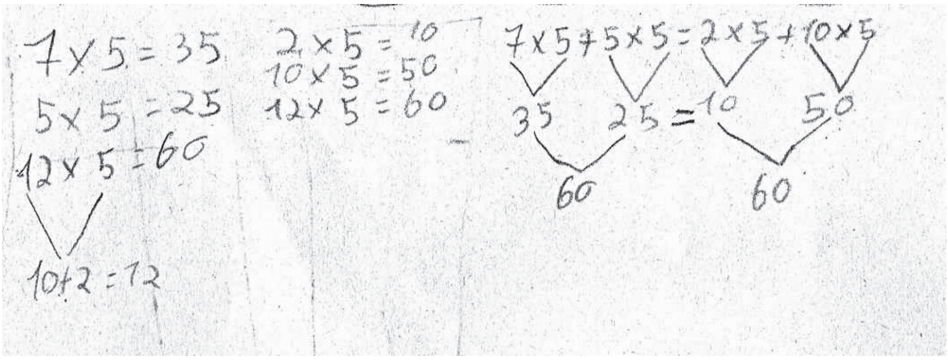
Seguem-se três dos registos escritos dos grupos que revelam aspectos distintos.



Neste caso, relativamente à tabuada do três, os alunos adoptam o modelo da tabuada da professora (em quadradinhos) para ilustrar os casos que experimentaram. Para além disso, escrevem também uma expressão numérica e uma frase com a conclusão. Note-se que a frase "A soma das 2 linhas é igual ao resultado da 3.ª linha" está formulada de forma genérica, revelando que os alunos não vêem a propriedade como *presa* a um exemplo.



Neste caso, relativo à tabuada do quatro, o grupo inclui também experiências com a subtracção, revelando o seu gosto e vontade em perseguir a ideia inicial de um dos seus alunos, o Artur — situação que não fora prevista pela professora. Note-se que este não foi o único grupo em que isto aconteceu.



Neste terceiro caso, relativo à tabuada do cinco, o grupo quis ir mais além nas suas experiências, estendendo-as para o caso em que a soma dos números de ordem das linhas era superior a dez. Tendo escolhido as linhas 7 e 5, precisava da linha 12. Como esta não estava disponível na tabuada, construiu-a a partir da do 10 e da do 2, "porque dez mais dois dá doze" — explicou oralmente uma aluna.

Após a análise colectiva das produções dos alunos, a professora propôs à turma que formulasse em conjunto uma frase que traduzisse a relação para todos os casos, o que não foi muito simples. Acabaram por adoptar: "Numa tabuada, se juntarmos duas linhas, observamos que vai dar uma terceira linha da tabuada e essa terceira linha é a que começa com o número que é a soma dos outros dois".

Esta frase ficou apenas no registo oral, pois a professora, estando já na hora de terminar a aula, optou por passar à tentativa da justificação da relação. Interrogou a turma acerca das razões que a explicavam mas estes não adiantaram nada. A professora ilustrou então a partir de um exemplo, recorrendo ao significado de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais. À medida que explicava, ia escrevendo no quadro:

$$
\begin{array}{ccccc}
2 \times 3 & + & 5 \times 3 & = & 7 \times 3 \\
3 + 3 & + & 3 + 3 + 3 + 3 + 3 & = & 7 \times 3
\end{array}
$$

A aula terminou com uma revelação:

> Professora: "Usando esta descoberta, a partir daqui vão ser vocês a descobrir as outras tabuadas que ainda não conhecem!"

Alguns alunos comentavam que já sabiam como fazer enquanto arrumavam as mochilas.

A análise deste episódio permite sublinhar alguns aspectos importantes que se prendem com a estrutura da tarefa e com a forma como a professora conduziu a sua exploração com vista a promover o pensamento algébrico:

- Propõe generalizações com grau progressivamente maior de abrangência de modo a que os alunos tenham oportunidade de caminhar de forma gradual;
- Inicia com o trabalho sobre um caso particular para proporcionar aos alunos a familiarização com o que está em causa;
- Prossegue com outros casos particulares, agora da escolha dos alunos, o que possibilita a obtenção de um grande número de exemplos distintos e não controlados pela professora, com vista a aumentar o grau de convicção dos alunos sobre a veracidade da relação;
- Propõe, de seguida, a mesma exploração mas em outros contextos (outras tabuadas), de modo a ampliar a convicção dos alunos sobre a mesma relação aplicada a esses novos contextos;
- Explicita, em cada uma das fases da exploração, o tipo de trabalho a realizar (procurar mais exemplos, ver se funciona sempre, questionar se será geral ou não, concluir uma regra geral, justificar porque acontece), dando oportunidade de os alunos tornarem esse percurso consciente (gerar casos, experimentar, conjecturar, testar, explicar).

Para além destes aspectos, que foram sendo marcados pelas mensagens explícitas da professora, existem outros relacionados com a exploração matemática incentivada por esta. A sua preocupação em focar os alunos na estrutura das expressões numéricas escritas, e não apenas nos resultados, foi essencial para fazer surgir a propriedade distributiva. Tornar visíveis as estruturas e analisá-las é, precisamente, um dos cuidados a ter quando se pretende desenvolver nos alunos o pensamento algébrico (Kaput, 2008; Kieran, 2007a).

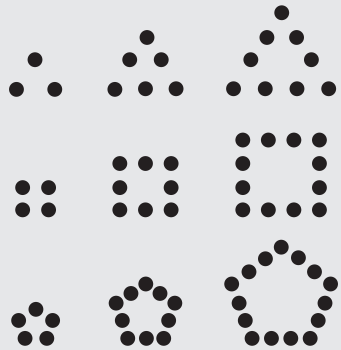
Um outro tipo de tarefa que surge com grandes potencialidades para a exploração do pensamento algébrico, em particular na sua vertente de pensamento funcional, é a exploração de padrões, que tem vindo a ser estudada, nomeadamente em Portugal (Alvarenga & Vale, 2007; Branco, 2008; Vale *et al.*, 2006).

Para ilustrar as potencialidades dos padrões e alguns aspectos sensíveis da sua utilização com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico, apresento, em seguida, um episódio com alunos de 2.º ano[17] de escolaridade, aos quais foi proposta a exploração da tarefa "Números geométricos".

Números geométricos

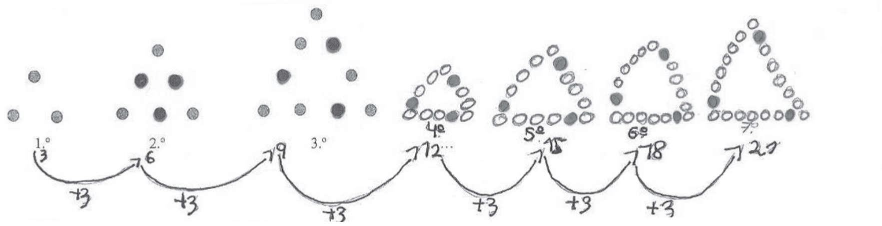
Observe as sequências de figuras e para cada uma…

1. Desenhe o termo seguinte;
2. Determine quantas pintas ele tem;
3. Determine o número de pintas do 10.º termo;
4. Como determinar o número de pintas de qualquer termo?

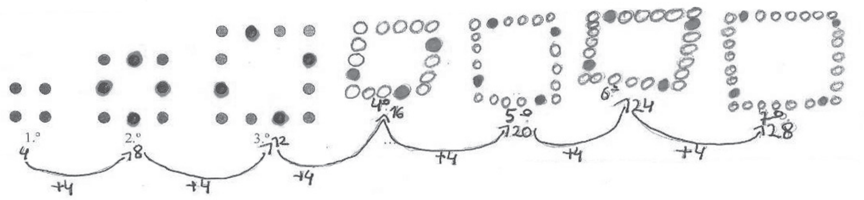


Os alunos trabalharam a pares. Foi-lhes fornecido um conjunto de materiais circulares e uma folha A3, dividida em três linhas, cada uma com os três primeiros termos dos padrões.

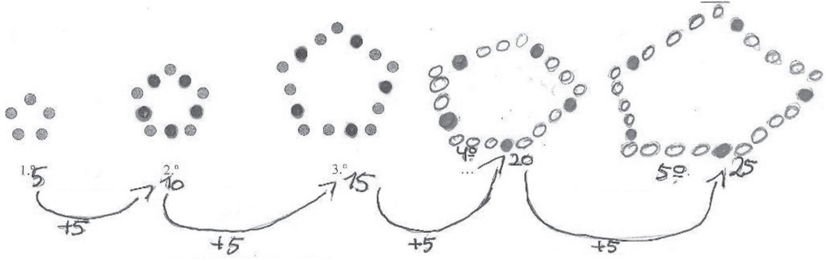
Após o trabalho autónomo sobre as três primeiras questões, a professora propôs a discussão colectiva das descobertas dos alunos, ouvindo primeiro alguns pares sobre os números triangulares, outros sobre os números quadrangulares e outros sobre os pentagonais. Todos os alunos responderam bem às duas primeiras questões (reproduzir mais um termo do padrão e identificar o termo correspondente na sequência número de pintas. Desenharam, com destreza e perfeição variável, mais alguns termos dos padrões, até terem espaço nas folhas, não tendo nenhum deles desenhado o 10.º termo — o número de pintas do 10.º termo parece ter sido encontrado de forma recursiva pela turma, por adições sucessivas. Os alunos reconheceram as sequências numéricas envolvidas para cada um dos casos, tendo alguns deles associado às tabuadas já aprendidas, como se pode observar no trabalho seguinte, que a professora reservou para o final da discussão. As alunas, à medida que mostravam o registo escrito, explicavam a regularidade encontrada.



A 1.ª figura tem três pintas
Para passar de figura para a seguinte aumenta-se 3 pintas
O número de pintas das figuras representam a tabuada do 3



A 1.ª figura tem quatro pintas
Para passar de uma figura para a seguinte aumenta-se 4 pintas
O número de pintas das figuras representam a tabuada do 4



A 1.ª figura tem cinco pintas
Para passar de uma figura para a seguinte aumenta-se 5 pintas
O número de pintas das figuras representam a tabuada do 5

A professora propôs, então, o registo no quadro das conclusões seguintes:

O triângulo tem 3 lados e de um triângulo para o seguinte aumentamos sempre 3 pintas

O quadrado tem 4 lados e de um quadrado para o seguinte aumentamos sempre 4 pintas

O pentágono tem 5 lados e de um pentágono para o seguinte aumentamos sempre 5 pintas

Interrogou depois os alunos sobre a possibilidade de obter uma regra para calcular o número de pintas de um outro termo ainda não conhecido, incentivando à generalização. Foi com facilidade relativa que os alunos chegaram a uma conclusão geral, também registada no quadro:

Para descobrimos quantas pintas leva qualquer figura, basta multiplicar o número do termo que se quer por 3, 4 ou 5 consoante seja um triângulo, quadrado ou pentágono.

Ex: quantas pintas tem o termo 20.º na sequência dos triângulos?
Tem $20 \times 3 = 60$

Neste episódio são de sublinhar alguns aspectos importantes que contribuíram para que os alunos tenham desenvolvido o seu pensamento algébrico. Para além da estrutura da tarefa, que propõe explicitamente a construção de um caminho que conduz à generalização, o trabalho das alunas acima apresentado revela aspectos muito importantes que a professora quis valorizar ao deixá-lo para o final da discussão na turma:

- Existe um registo visível do valor de cada termo da sequência do número de pintas bem como do número de ordem respectivo, o que facilita a associação das variáveis implícitas;

- Existe o registo escrito, através da repetição sucessiva de arcos com setas e das expressões + 3, + 4, e + 5, das regras que permitem obter os sucessivos termos das sequências, dando a ver a estrutura matemática presente;

- Em cada termo do padrão, é sempre pintada uma das pintas em cada lado e na mesma posição relativa, o que permite compreender a razão da variação do número de pintas entre termos (*uma pinta nova por cada lado* — como afirmou uma aluna);

- A lei de formação da sequência do número de pintas é identificada com outro recurso matemático importante (tabuada), o que ajuda a estabelecer relações e a explicitar a sequência através do termo geral;

- A regra obtida é descrita de uma forma simples, clara e condensando os três padrões, o que lhe aumenta o grau de generalidade.

Estes aspectos contribuem para o sucesso do desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto da exploração de padrões. Smith (2003) chama a atenção para que o trabalho com padrões não resulta, por si mesmo, no desenvolvimento do pensamento funcional, sendo necessário estabelecer conexões fortes e evidentes entre padrões, Álgebra e funções[18], através de um olhar intencional sobre o que nos padrões se mantém invariável e sobre o que se altera.[19]

Em especial, recomenda que nos padrões sejam identificadas as variáveis envolvidas e analisada a sua variação, com estabelecimento de uma relação explícita, pois é aqui que reside a possibilidade da abordagem funcional por correspondência. Esconder ou manter implícita a variável que representa a ordem dos termos, deixando apenas mais evidente a variação da variável dependente, pode remeter exclusivamente para uma abordagem de natureza recursiva, centrada na análise exclusiva da variação dos termos entre si (Carraher & Schliemann, 2007; Warren & Cooper, 2007).

A importância das representações múltiplas

A investigação sobre pensamento algébrico tem valorizado formas de representação que vão muito para além das representações algébricas simbólicas. Aliás, Carraher e Schliemann (2007) afirmam que inclusivamente o próprio sentido daquilo que pode ser considerado um símbolo algébrico tem vindo a ser ampliado, englobando a notação aritmética, uma vez que esta inclui símbolos que representam noções abstractas e relações. Para além da notação aritmética e algébrica, existem mais três sistemas simbólicos que são reconhecidos como fundamentais: As tabelas, os gráficos e a linguagem natural (Carraher & Schliemann, 2007). Há, ainda, outras formas de representação menos convencionais: são objectos, estruturas ou processos que suportam e facilitam a expressão do pensamento algébrico dos alunos (Blanton & Kaput, 2005). Entre eles estão artefactos visuais ou concretos como rectas numéricas, diagramas, gráficos de linha — objectos que se tornam referências e em torno dos quais os alunos podem pensar algebricamente.

A possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses de os alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais. Os diagramas, representação visual que apresenta a informação num formato espacial dando visibilidade à sua estrutura (Diezman & English, 2001), constituem ferramentas acessíveis a alunos muito jovens, através dos quais estes podem, de forma criativa, raciocinar e exprimir o seu pensamento.

Um episódio que ilustra bem a importância dos diagramas é o relativo ao problema "Quantos telefonemas?" com que iniciei este artigo.

Na fase de exploração do problema, os alunos construíram diagramas distintos que funcionaram quer como ferramentas para raciocinar, quer como ferramentas para comunicar as suas resoluções aos outros. Uma análise desses diagramas permite sublinhar algumas potencialidades desta representação para capturar o pensamento algébrico dos alunos:

- Revelam de que modo os alunos interpretam e dão significado à situação em estudo;
- Descompactam a estrutura do problema, dando *a ver* as relações existentes entre os diferentes elementos que afectam a situação;
- Revelam as regularidades procuradas, em especial ao serem repetidos (ampliados) para outros casos particulares;
- Facilitam o reconhecimento de regularidades numéricas e da sua expressão de forma organizada e sistemática.

Mas se os alunos devem ser encorajados a observar regularidades e a estabelecer generalizações usando os seus próprios recursos, devem igualmente ser incentivados e ensinados a usar formas de representação convencionais (notação algébrica, gráficos, tabelas, linguagem natural), pois estas permitem não só exprimir, mas também enriquecer e aprofundar, os seus raciocínios algébricos (Kaput, 2008).

O uso dos símbolos, em especial das letras, vem simplificar a referência aos elementos presentes na situação em estudo e agilizar a expressão das generalizações em causa, funcionando como uma poderosa ferramenta linguística (Smith, 2003). A introdução das letras viu nas recomendações do NCTM (2000) antecipada a sua abordagem para os alunos do 3.º ao 5.º ano, sugerindo-se a representação da noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo, ou a expressão de relações matemáticas através de equações. Na realidade, a investigação tem vindo a evidenciar a possibilidade de alunos do 1.º ciclo utilizarem com vantagem as letras, introduzidas com naturalidade e no contexto de problemas como abreviaturas dos elementos em jogo ou para representar quantidades indefinidas (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008).[20]

As tabelas são sem dúvida ferramentas muito poderosas no que diz respeito ao pensamento algébrico, possibilitando um registo organizado dos valores numéricos em causa e uma apreciação numérica da variação desses valores, quer no que diz respeito a cada uma das variáveis em jogo, quer à relação entre elas. São vários os investigadores que sublinham a sua eficiência no estímulo ao pensamento funcional (Smith, 2008).

Os gráficos cartesianos constituem igualmente uma representação com muito interesse e que pode ser ensinada a alunos do 1.º ciclo[21], devendo corresponder a situações a que os alunos atribuam significado (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008). Para além de permitirem completar e clarificar aquilo que as tabelas revelam, são um contexto propício para o aprofundamento da compreensão da variação entre as duas variáveis representadas nos eixos.

O episódio *Uma cerca para o Faísca*, que apresento em seguida, permite ilustrar estes aspectos. Este episódio, que ocorreu numa turma de 6.º ano[22], tem por base um problema inspirado no NCTM (1994, pp. 30–31), mas numa versão adaptada.

Uma cerca para o Faísca

O dono do Faísca tem 40 m de rede para construir uma cerca rectangular para o seu cão. Quais deverão ser as dimensões da cerca para que tenha o maior espaço para correr?

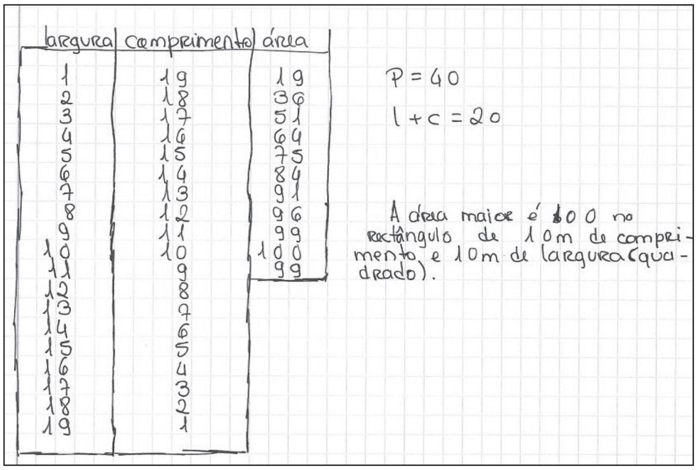
Os alunos foram divididos em seis grupos, tendo a professora entregue a cada grupo uma versão distinta do mesmo problema, usando diferentes comprimentos para a rede disponível (30m, 60m, 80m, 90m, 120m). Com esta estratégia pretendeu alargar o âmbito do problema, possibilitando estabelecer conjecturas sobre a maximização da área de rectângulos equiperimétricos, independentemente do perímetro considerado.

Para além do enunciado, entregou também uma folha de papel branca e outra quadriculada, e uma folha de acetato e canetas. Os grupos tiveram alguma dificuldade em compreender o que lhes era proposto mas, após uma discussão inicial com a professora, dedicaram-se ao trabalho. A professora conduziu essa discussão em torno das seguintes questões:

- Quais as larguras e comprimentos possíveis para a cerca rectangular?
- Como estudar a variação das possíveis medidas dos rectângulos?
- Qual a área obtida para cada possível combinação, comprimento/largura?

A tendência dos alunos foi desenhar alguns rectângulos possíveis e determinar, para cada um, a respectiva área. A professora observou esta tendência e, ao fim de algum tempo, incentivou os alunos a fazer os registos de forma sistemática, recomendando o uso de uma tabela. Alguns alunos usaram a tabela simplesmente como um formato para registar as medidas dos comprimentos, largura e respectiva área, mas sem lhe atribuir qualquer organização no que diz respeito às variáveis em causa, registando os casos sem qualquer ordem. No entanto, outros aperceberam-se desta possibilidade.

Um dos grupos, o que tinha 40m de rede, escreveu também uma expressão com símbolos numéricos, adoptando as abreviaturas das grandezas em estudo.



largura	comprimento	área
1	19	19
2	18	36
3	17	51
4	16	64
5	15	75
6	14	84
7	13	91
8	12	96
9	11	99
10	10	100
11	9	99
12	8	
13	7	
14	6	
15	5	
16	4	
17	3	
18	2	
19	1	

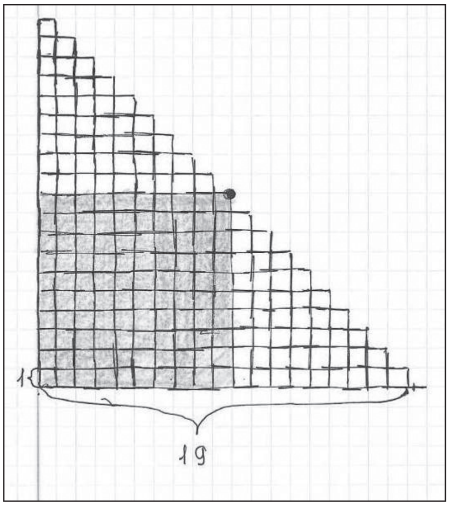
P = 40

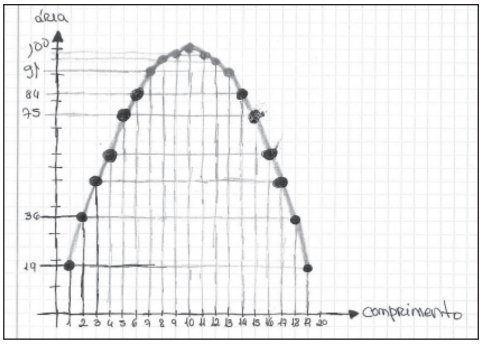
l + c = 20

A área maior é 100 no rectângulo de 10m de comprimento e 10m de largura (quadrado).

Para além desta tabela, o grupo esboçou um esquema condensado com os desenhos dos rectângulos que incluíra na tabela. A professora pediu ao grupo que mostrasse este esquema à turma e de seguida ensinou-os a construir um gráfico cartesiano comprimento/área para o caso do perímetro 40.

Cada grupo construiu depois o gráfico cartesiano para o respectivo caso, a partir dos valores da tabela entretanto construída.





A comparação dos gráficos dos diferentes grupos serviu de base para a discussão posterior onde foram exploradas as relações entre as variáveis em jogo, observando-se, em particular, que os rectângulos próximos do quadrado têm quase todos a mesma área.

A conclusão final foi que o quadrado era a solução para todos os casos, independentemente do comprimento da cerca. A professora chamou a atenção de que esta propriedade poderia ser usada em outros problemas ou situações semelhantes.

A aula terminou com a promessa de que num futuro próximo aprenderiam a fazer os gráficos no computador…

A análise deste episódio permite sublinhar alguns aspectos importantes no que diz respeito às representações usadas:

- O recurso à tabela permitiu o registo organizado e a exploração sistemática dos casos possíveis (considerando apenas os números inteiros), garantindo o estudo de todas as possibilidades, o que neste problema era importante;

- A tabela permitiu também evidenciar a relação entre o comprimento, a largura e o perímetro da cerca — embora os alunos conseguissem determinar bem as dimensões dos rectângulos, não explicitavam a relação existente entre os valores das variáveis;

- A utilização das letras permitiu observar que elas podem ter significados diferentes, uma vez que P era apenas uma abreviatura mas representava uma constante enquanto que L e C eram variáveis;
- O esquema condensado dos rectângulos ofereceu uma boa possibilidade de aprofundar a relação entre as variáveis, e as consequências em termos da área e da forma respectiva da cerca;
- O gráfico permitiu a consciência de que uma das dimensões do rectângulo (neste caso o comprimento) seria suficiente para o definir;
- O gráfico permitiu ainda analisar a variação da área do rectângulo em função do seu comprimento (covariação), e concluir sobre o seu máximo e sobre a simetria da variação do perímetro em relação a este, acrescentando um outro olhar ao proporcionado pela tabela;
- O confronto entre o gráfico e a representação do esquema condensado dos rectângulos estimulou uma percepção da razão da área variar pouco para comprimentos próximos do quadrado (*os rectângulos são todos parecidos* — como comentou um aluno na aula).

O papel do professor na promoção do pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico exige uma atenção continuada por parte do professor. Não se trata apenas de seleccionar tarefas adequadas, por muito "algebrizadas" que sejam, nem de permitir o uso de representações diversas por parte dos alunos. Na realidade, no cenário da aula o professor tem um papel muito importante a desempenhar.

Ajudar os alunos a construir um repertório de ferramentas intelectuais que os apoiem no desenvolvimento do pensamento algébrico é uma importante função que o professor deve assumir. Na exploração matemática das tarefas realizadas pelos alunos tendo em vista este propósito, é importante que o professor lhes dê a conhecer "objectos" como tabelas diversas, rectas numéricas, diagramas, gráficos de vários tipos, artefactos visuais, materiais concretos — estes objectos, afirmam Blanton e Kaput (2005), tornam-se referências em torno das quais os alunos pensam algebricamente. Além dos objectos, os alunos devem também ser ensinados a lidar com processos matemáticos como registar, recolher, representar, organizar dados — que não sendo exclusivos do pensamento algébrico, lhe prestam grande utilidade. Em especial, o professor deve ajudar os alunos a dar visibilidade às estruturas matemáticas subjacentes à situação em estudo, promovendo o uso consciente de modos de representação favoráveis à generalização (Kieran, 2007a).

Um outro papel fundamental do professor na sala de aula relaciona-se com a criação de um ambiente de trabalho onde os alunos se identifiquem como uma comunidade de construção de conhecimento matemático, onde impere a comunicação suportada pelo discurso argumentativo (Blanton & Kaput, 2008; Kieran, 2007a; Cusi & Malara, 2007).

Está aqui presente a ideia de que o desenvolvimento do pensamento algébrico se coaduna bem com uma organização de aula em que os alunos têm oportunidade de trabalhar autonomamente sobre a tarefa proposta e que posteriormente confrontam as suas produções, retirando daí aprendizagens colectivas e crescendo para o apurar de generalizações amplas colectivamente construídas — realizando, por exemplo, congressos matemáticos na sala de aula (Dolk, 2008). Para criar um tal ambiente, o professor deve dar atenção a diversos aspectos.

O primeiro prende-se com a valorização do raciocínio dos alunos como ponto de partida para a construção do conhecimento matemático (Blanton & Kaput, 2008), deixando surgir as diferenças que serão aproveitadas no colectivo da turma, ajudando cada um a evoluir para um conhecimento mais formalizado (Kraemer, 2008). Isto significa valorizar a actividade matemática dos alunos na sala de aula, criando-lhes uma consciência do seu papel positivo para o desenvolvimento do saber.

O segundo aspecto está associado à valorização da comunicação a estabelecer na sala de aula e à necessária vigilância para que esta se dê de forma desejável. É importante proporcionar aos alunos materiais que facilitem e apoiem a comunicação dos seus raciocínios de forma eficiente à turma (Boavida *et al.*, 2008), tirando partido da tecnologia disponível. Quando os alunos têm de ir ao quadro negro reproduzir tudo o que fizeram nos lugares, estão a gastar tempo que faz falta à discussão e síntese colectiva.

Na apresentação e discussão sobre os trabalhos dos alunos, são muito importantes as questões que o professor coloca (Boavida *et al.*, 2008), quer para a clarificação dos raciocínios, quer para orientar para o estabelecimento de relações e generalizações (Kieran, 2007a). Mas, de igual modo, é importante a capacidade de o professor ouvir bem os alunos, em especial para conseguir descodificar aquilo que pode ser uma expressão da generalização, nem sempre dita de forma suficientemente explícita.

> Expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças.
>
> (Kaput, 1999, p. 6)

Ainda na discussão colectiva, existe toda a vantagem em que o professor dê atenção à selecção das produções dos alunos, organizando as apresentações de forma a reservar para o fim as que revelam a generalização de forma mais completa e/ou em que a sua expressão surja mais formalizada.

Uma última chamada de atenção vai para a importância do papel do professor na construção colectiva da generalização procurada (Cusi & Malara, 2007), quando não vislumbrada pelos alunos, ou na sua clarificação, no seu aprofundamento ou ampliação. Será importante que a turma reconheça não só o valor do processo desenvolvido na realização da actividade, mas também o valor do produto que obteve — e que, de preferência, o integre no seu património de conhecimentos matemáticos.

Nos episódios apresentados neste artigo, detectam-se diversas preocupações do professor que vão ao encontro destes aspectos. Por um lado, em todos observamos as professoras a enriquecer e orientar a construção de ferramentas que facilitem aos alunos o pensamento algébrico — por exemplo, no episódio *Quantos telefonemas?* a professora propõe a construção de uma tabela, e ensina a adição de números consecutivos através de um processo geral que os alunos poderão adoptar noutras situações; no episódio *Uma cerca para o Faísca*, a professora sugere também o uso organizado da tabela, ensina os alunos a construir um gráfico cartesiano e usa-o para analisar a relação entre as variáveis e para retirar conclusões gerais. Já nos episódios *Números geométricos* e *E se adicionares duas linhas da tabuada?*, são notórias as preocupações das professoras com a organização da escrita das conclusões parcelares, de modo a dar realce à importância da sistematicidade dos registos para o surgimento da conclusão geral.

Por outro lado, são visíveis as preocupações das professoras com a aposta na comunicação na sala de aula, com a previsão de materiais que a facilitem — por exemplo, no episódio *Quantos telefonemas?* os alunos dispunham de cartolinas grandes, no relativo às linhas das tabuadas tinham tiras de papel para agilizar as experiências e papel para o registo das conclusões, passado a acetato; no dos *Números geométricos* tinham materiais concretos para a construção dos termos do padrão e folhas A3 organizadas para os registos, no episódio relativo à cerca para o Faísca tinham acetatos e papel quadriculado.

Além disso, na organização da aula as professoras reservaram tempo significativo para o trabalho autónomo dos alunos e para a sua discussão colectiva, embora no episódio relativo às linhas das tabuadas fosse desejável dispor de mais tempo para a fase colectiva. Em todos os episódios se nota o respeito pelas diferentes formas de raciocínio e sua expressão — por exemplo, no episódio *Quantos telefonemas?* os alunos constroem diagramas distintos; no relativo às tabuadas os alunos ultrapassam a proposta da professora, gerando exemplos não previstos, mas que ainda assim esta procura integrar na aula.

Também o modo como as professoras conduziram as discussões finais merece duas observações. Em geral, existiu o confronto de produções de diferentes alunos seleccionados por critérios relacionados com a conveniência do processo de construção das generalizações — por exemplo, no episódio *Números geométricos*, a professora reserva para última apresentação dos alunos o processo mais completo e em que as generalizações estavam mais solidamente suportadas, com a clara explicitação e justificação das “regras” encontradas; no episódio *Quantos telefonemas?*, a professora deixa para o fim a resolução em que os alunos exprimem a regra já de forma geral. A segunda observação vai para o modo como as professoras terminaram as discussões colectivas, preocupando-se com a síntese colectiva da generalização descoberta, quer para a clarificar, quer para a ampliar, realçando o seu valor como conhecimento a integrar e usar posteriormente — por exemplo, no episódio *Uma cerca para o Faísca*, a conclusão de que o quadrado maximiza sempre a área dos rectângulos equiperimétricos; no episódio *E se adicionares duas linhas da tabuada?*, a chamada de atenção de que as regras descobertas serviriam para construir todas as outras tabuadas.

A concluir

A algebrização da actividade da aula envolve a desconstrução de longos anos de prática de ensino que não se baseou de forma séria no raciocínio dos alunos, incluindo os diversos processos de representação e simbolização que estes usam.

(Blanton & Kaput , 2008, p. 363)

A introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades matemáticas motivados por uma actividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão, ampliando o seu património quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente). Em consequência, os alunos poderão desenvolver uma atitude favorável em relação à Matemática, reconhecendo a sua unidade, o seu valor e o seu poder, e poderão igualmente conseguir melhorar a preparação para as aprendizagens posteriores, nomeadamente no domínio da Álgebra.

O novo programa português de Matemática cuja implementação tem início em 2009/10 apela ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Este facto representa um grande desafio para todos os professores, sobretudo se atendermos a que as práticas lectivas dos professores dos 1.º e 2.º ciclos, no que diz respeito à Matemática — em particular em Portugal — têm estado muito afastadas daquilo que envolve a exploração matemática e a condução da aula vocacionada para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os professores dos primeiros anos têm uma experiência reduzida com tarefas ricas e transversais que apelem à generalização e sua formalização (Blanton & Kaput, 2008).

Os desafios identificados nos outros países serão, com certeza, também sentidos em Portugal. Um deles tem a ver com as concepções dos professores sobre a Matemática (Blanton & Kaput, 2008), entrecruzadas com as visões sobre a Matemática a ensinar aos alunos e sobre as concepções e expectativas acerca do que estes podem e conseguem aprender (Kaput, Carraher, & Blanton, 2008). A aposta por parte do professor no pensamento algébrico implica, talvez sobretudo, uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade destes construírem conhecimento matemático — actividade na qual o professor precisa também de se envolver. A necessidade do desenvolvimento de "hábitos da mente" não pode incidir apenas nos alunos — eles devem necessariamente instalar-se e transbordar dos professores.

Um segundo desafio tem a ver com as tarefas para a aula de Matemática, e com sua adequação ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Os recursos habituais para a sala de aula, como os manuais escolares, não constituem, em geral, pela lógica da abordagem aos temas e pelo tipo de tarefas que apresentam, um bom recurso no domínio do pensamento algébrico. A necessária "algebrização das tarefas" a usar na sala de aula, de modo a promover a generalização em várias vertentes e a sua expressão, requer um trabalho cuidado e continuado por parte do professor. Requer, também, que o professor altere a relação com o seu repositório de materiais para o ensino, de consumidor e aplicador para transformador activo (Blanton & Kaput, 2008).

Um terceiro desafio relaciona-se com a cultura de sala de aula pela sua importância no desenvolvimento do pensamento algébrico. As práticas de sala de aula centradas no modelo de explicação por parte do professor seguida de aplicação e treino por parte dos alunos, não são um contexto favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. A condução de aulas onde haja lugar ao estabelecimento de conjecturas, à sua discussão, confronto de ideias, argumentação, construção de generalizações colectivas, é muito mais complexa e exigente para o professor (Blanton & Kaput, 2008; Boavida *et al.*, 2008; Cusi & Malara, 2007; Kieran, 2007a).

Estes desafios são desafios significativos. Para lidar com eles, será necessária a vontade e investimento continuado dos professores e dos responsáveis pela formação de professores nas diversas instituições, em especial nas instituições de ensino superior que conduzem formação inicial e formação contínua. O trabalho colaborativo entre os diversos actores, combinando teoria e prática, e olhando a sala de aula como lugar de aprendizagem para alunos, professores e formadores, poderá ser uma via para o desenvolvimento do pensamento algébrico de todos os envolvidos.

Notas

[1] Professora Lurdes Milho, da escola EB1 de Veiros, participante no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores de 1º e 2º ciclos da Universidade de Évora nos anos de 2006/2007 e 2007/2008.

[2] James Kaput e Maria Blaton conduziram no National Center for Improving Students Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA) um projecto de investigação e desenvolvimento profissional vocacionado para a introdução do pensamento algébrico em salas de aula da escola elementar em Massachusetts.

[3] Early Algebra é um termo bastante usado pela educação matemática para se referir à abordagem da Álgebra no ensino da Matemática na escola elementar (Carraher & Schliemann, 2007).

[4] Alguns autores chamam a estes recursos pré-algébricos (Carraher & Schliemann, 2007).

[5] Os símbolos revolucionaram a Álgebra, tanto epistemologicamente como funcionalmente (Smith, 2003).

[6] Kaput refere-se usa aqui o termo Álgebra atribuindo-lhe o significado de pensamento algébrico — o mesmo consideram Carraher e Schliemann (2007).

[7] Em 1999, Kaput referia-se a cinco vertentes da Álgebra; posteriormente, e num artigo com Blanton, refere-se apenas a quatro e, num dos últimos artigos que escreveu antes da sua morte em 2005, publicado apenas em 2008, reduz as vertentes a três, compactando a versão anterior.

[8] Triângulo dividido em três linhas, a superior apenas com o número 12, a do meio com espaço para dois números cuja soma tem de ser 12 mas apenas se sabe o 7, a da base com três espaços para números onde apenas se conhece o 4, ocupando o espaço do meio, sendo necessário completar todos os espaços de modo a que as somas dos pares adjacentes da linha de baixo sejam sempre iguais ao número no espaço de cima (Blanton & Kaput, 2005, p. 423)

[9] Trata-se de tabelas de duas variáveis assim designadas para explicitar a relação entre as duas variáveis, a dependência do OUT em relação ao IN (Blanton & Kaput, 2005, p. 425).

[10] Por exemplo, o significado dos símbolos varia na Aritmética e na Álgebra (o sinal de igual é habitualmente usado na Aritmética para exprimir o resultado da operação indicada antes dele, não sendo necessariamente visto como uma relação entre duas expressões.

[11] Traduzido para português pela Associação de Professores de Matemática em 2007. A partir daqui as referências serão feitas à tradução portuguesa.

[12] Por exemplo, é recomendada a utilização de representações múltiplas e diversas, mas não se refere o papel destas como recursos para o pensamento algébrico, para a promoção da descoberta de regularidades ou para a expressão das generalizações eventualmente observadas.

[13] Por exemplo, as referências à proporcionalidade directa não estão perspectivadas em termos funcionais.

[14] Por exemplo, analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

[15] O programa elege como capacidades transversais a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

[16] Professoras Helena Aleixo e Amélia Ricardo, da escola EB1 do Rossio, Évora, participantes no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores de 1.º e 2.º ciclos da Universidade de Évora nos anos de 2007/2008 e 2008/2009 e de 2006/2007 e 2007/2008, respectivamente.

[17] Professora Isabel Moreira — E.B.1 de São Lourenço de Mamporcão, participante no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores de 1.º e 2.º ciclos da Universidade de Évora nos anos de 2006/2007 e 2007/2008.

[18] Smith (2003) tece uma crítica ao NCTM (1989) no que diz respeito à abordagem dos padrões para o nível K–4, reclamando que lhe falta uma unidade conceptual que os perspective ao longo do currículo K–12. Defende que os conceitos de *statis and change* são os conceitos fundadores que permitem olhar os padrões, as funções e a Álgebra não como aspectos isolados mas com uma perspectiva unificadora da Matemática escolar.

[19] Smith (2008, p. 143–144) tem uma proposta (protocolo com seis tarefas) para explorar o pensamento funcional que inclui a construção de funções.

[20] Existem diversas investigações que estudam a introdução das quasi-variáveis nomeadamente através do trabalho com expressões numéricas (*open numerical setences*) (Kieran, 2007a).

[21] Quer as tabelas, quer os gráficos, podem ser obtidos através de recursos tecnológicos como a folha de cálculo, por exemplo.

[22] Professora Alice Murteira — E.B.I/JI da Malagueira, participante no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores de 1.º e 2.º ciclos da Universidade de Évora no ano de 2007/2008.

[23] Este documento em versão pdf corresponde ao texto publicado com a seguinte referência: Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Referências

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, *Vol. XVI* (1), 27–55.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Orgs.) (2008). *O sentido do número — reflexões que entrecruzam teoria e prática.* Lisboa: Escolar Editora.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early Algebra is not the same as Algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235–274). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Cusi, A. & Malara, N. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, *XVI*(1), 57–80.

Diezman, C & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in School Mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA.: NCTM.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Brocardo, Serrazina, L., Rocha, I. (Orgs.), *O sentido do número — reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35–53). Lisboa: Escolar Editora.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. (consultado em 10 de Setembro de 2008 em `http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf`)[23]

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (Eds.) (2008). *Algebra in the Early Grades.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007a). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *XVI*(1), 5–26.

Kieran, C. (2007b). What do we know about the teaching and learning of Algebra in the elementary grades? (consultado em 14 de Agosto de 2008 em `http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/research%20brief%2007%20early%20algebra.pdf`).

Kraemer, J-M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, Serrazina, L., Rocha, I. (Orgs.), *O sentido do número — reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3–28). Lisboa: Escolar Editora.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico — competências essenciais.* Lisboa: ME/DEB.

ME-DGEBS (1990/2004). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico).* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* (Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5–27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification — the case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191–228.

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schiifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136–150). Reston: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 19–56). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino-aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193–213). Lisboa: SPCE — Secção de Educação Matemática.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557–628). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Warren, E., & Cooper, T. (2007). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185.

Resumo. Este artigo discute o conceito de pensamento algébrico, analisando aspectos essenciais que o caracterizam e duas das suas principais vertentes: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. De seguida, identifica o lugar do pensamento algébrico nas actuais orientações curriculares em Matemática para os primeiros anos, com particular incidência no novo programa de Matemática do ensino básico português. Por último, equaciona três aspectos a observar com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula: as tarefas e as características que lhe conferem potencial algébrico; as representações matemáticas convencionais e não convencionais, que constituem recursos para raciocínio algébrico e sua expressão por parte dos alunos; e o papel do professor, que deve criar uma cultura de sala de aula adequada à discussão e confronto de ideias, à argumentação e à construção colectiva de generalizações matemáticas. O artigo apoia-se na investigação recente de referência no domínio do pensamento algébrico, ilustrada com episódios de sala de aula de 1.º e 2.º ciclos recolhidos em 2006/2007 e 2007/2008.

Palavras-chave: pensamento algébrico; aritmética generalizada; pensamento funcional; tarefas com potencial algébrico; representações múltiplas; papel do professor.

Abstract. The article discusses the notion of algebraic thinking, analysing essential aspects and two of its main strands: generalized arithmetic and functional thinking. On the second part, the article identifies the recent curricular orientations concerning algebraic thinking in the early grades, focusing particularly on the new program of Mathematics in Portugal. The third part of the article discusses three aspects of concern when trying to promote the development of algebraic thinking in classroom: tasks and their algebraic potential; multiple mathematical representations as resources for algebraic reasoning and its expression by students; teacher role in creating a classroom culture of discussion and construction of collective generalizations by students. The article is based on the recent investigation on the domain of early algebra and is illustrated with episodes from classrooms of the first and the second grades in Portugal.

Keywords: algebraic thinking; generalized arithmetic; functional thinking; tasks with algebraic potential; multiples representations; teacher role in classroom.

■ ■ ■

ANA PAULA CANAVARRO
Universidade de Évora e CIEFCUL
apc@uevora.pt