SISTEMAS DE CIUDADES Y TAMAÑO: UN MODELO DE DIFERENCIACIÓN DEL PRODUCTO

José Luis Sáez Lozano*
Universidad de Granada

Pablo Brañas Garza**
Universidad de Jaén

Resumen: Este trabajo representa la modelización, en un marco estático, del tamaño óptimo de una ciudad. La oferta está caracterizada por empresas idénticas en una situación de competencia imperfecta, mientras que en la demanda destacan las familias que tienen preferencia por la variedad. Los resultados de tamaño óptimo alcanzados son sensibles a la situación de economías o deseconomías de aglomeración y, al nivel de utilidad de los ciudadanos. Asimismo, se analizan las consecuencias en términos de eficiencia de un impuesto-subsidio. En una segunda parte, se analizan el tamaño óptimo de un sistema de ciudades.

Abstract: This work presents a static model of optimal city size. The supply is characterised by firms under imperfect competition; families with preferences for variety form the demand side. The optimal size is sensitive to economies of agglomeration (or congestion) and to the households' utility levels. Therefore, the consequence of taxation is analysed in terms of efficiency. The second part studies the optimal system of cities size. Resuits seem to prove that size is path dependent: short or long run.

Fecha de recepción: 28 de mayo del 2000
Fecha de aceptación: 30 de enero del 2001

* Profesor de Economía Aplicada de la Universidad de Granada e investigador del Instituto de Desarrollo Regional (josaez@goliat.ugr.es)

** Profesor de Fundamentos del Análisis Económico de la Universidad de Jaén (pbg@ujaen.es).

Los autores están en deuda con Javier Rodero, Francisca Jiménez y Diego Martínez de la Universidad de Jaén por sus sugerencias, comentarios y críticas en la versión final del trabajo. Asimismo, queremos agradecer al evaluador anónimo y al Director de *Estudios Económicos*, Dr. Jaime Sempere, sus críticas y recomendaciones en la versión preliminar del trabajo.

1. Introducción

Hasta épocas recientes, la teoría económica urbana se centraba en el análisis del sistema de ciudades, tanto por el lado de la oferta (Weber, 1909 o Hoover, 1948), como por el de la demanda (Arnott, 1979; Arnott y Stiglitz, 1979; Kanemoto, 1980; Yang y Fujita, 1983 o Hochman, 1981, entre otros).[1] El análisis del sistema de ciudades por el lado de la demanda, se ha centrado, fundamentalmente, en el estudio del papel que juega el consumo de bienes públicos en la formación y crecimiento de las aglomeraciones urbanas. Asimismo, también han sido numerosos los estudios de demanda de localización, distribución de la población y precio del suelo (Alonso, 1964; Mills, 1967; Muth, 1969 o De Salvo, 1977) e, incluso, autores como Lucas (1988) o Raugh (1991) plantean que los individuos obtienen utilidad de su interacción entre ellos.

La aproximación por la vertiente de la producción plantea, que la concentración de la actividad económica y social en torno a las ciudades viene definida por tres fuerzas económicas: la reducción del coste de transporte, la presencia de economías de escala y la existencia de efectos externos de aglomeración. De estos últimos, hay que distinguir entre efectos externos de localización, que son externos a la empresa e internos a la industria –que permiten mantener los supuestos de competencia perfecta (Henderson, 1974); y, efectos de urbanización, que son externos a la industria y la empresa, pero internos al área urbana. Los antecendentes a estos trabajos los encontramos en la "causación circular" de Myrdal (1957) y las teorías sobre los costes de transporte de Hirschman (1958) que alcanzan su apogeo con el modelo de Krugman (1991) –aunque nos podríamos remontar a Von Thünen (1826), Weber (1909), Christaller (1933) e incluso a Marshall (1890). La idea de los efectos desbordamiento surge en el trabajo seminal de Jacobs (1969) y continúa en Lucas (1988), David y Rosembloom (1990) o Arthur (1990). La línea continúa con Saxenian (1994) en su estudio sobre la relación entre Silicon Valley y Stanford University, y en Gaspar y Glaeser (1998) donde se analizan los desbordamientos "intelectuales". Trabajos recientes (Benabou, 1993; Rauch, 1993 o Imagawa, 1997) conectan concentración industrial, desbordamiento intelectual (educación) y crecimiento económico.

[1] Un trabajo reciente sobre sistemas de ciudades es Brakman *et al.* (1999), donde se hace una síntesis de las trabajos seminales y, sobre todo, se discuten ampliamente las contribuciones de Krugman (1991).

Sin embargo, no sólo se derivan beneficios de la aglomeración, sino que aparecen costes o deseconomías de aglomeración (también llamados congestión). Con frecuencia, este tipo de costes aparecen cuando las ciudades superan un tamaño determinado, tocan techo, y comienzan a genera problemas. En este sentido, los argumentos de Becker (1968) sobre el crimen; los de Khan (1996) sobre la contaminación o los de Glaesser (1998) la selección adversa, nos hacen comprender mejor la realidad inmediata de las grandes metrópolis.[2]

De todo lo anterior se concluye, que la literatura, hasta épocas recientes, ha explicado el tamaño de ciudad en función de la fuerza de aglomeración dominante en la misma (Fujita y Thisse, 1996), aunque la importancia e influencia que pueden ejercer elementos tales como la estructura del mercado interno no se ha analizado en profundidad. De ahí, que consideremos oportuno investigar la formación y configuración de sistemas de ciudades y su dimensión en situaciones de competencia imperfecta.

Nuestro principal objetivo en este artículo es por tanto, explicar la formación de las ciudades en los momentos actuales, suponiendo que existe una estructura organizativa de diferenciación de producto. Ello, permite integrar los dos ámbitos de estudio considerados hasta ahora (demanda y oferta), ya que consumo y producción se presentan como factores claves y determinantes a la hora de investigar el origen de las aglomeraciones urbanas. La presencia de bienes diferenciados en las mismas permite a las economías domésticas incrementar su nivel de utilidad, mientras que para las empresas supone una reducción del coste medio de producción.

Otro de los fines que se persigue en este estudio es analizar cual es la magnitud de impuestos-subsidios que permite alcanzar el tamaño de equilibrio y, por tanto, optimizar la dimensión de la ciudad. Finalizaremos este artículo analizando cual es el número de ciudades que conforman un sistema en equilibrio y con una estructura organizativa de diferenciación de producto.

Para lograr los objetivos enumerados, organizaremos este trabajo en cuatro apartados, que conjuntamente con la introducción y conclusiones, nos ayudarán a entender como se forma y crece un sistema de ciudades en situaciones de competencia imperfecta. Para ello, en el epígrafe siguiente presentamos un modelo de ciudad bisectorial, con un sector servicios en

[2] Para una panorámica reciente sobre los beneficios y costes de la aglomeración ver Glaesser (1998) y Alonso-Villar y De Lucio (1999).

competencia monopolística y diferenciados; a continuación, analizaremos el tamaño de equilibrio de la citada aglomeración; en el siguiente, se analiza la intevención del gobierno local, esto es, se trata de cuantificar cual es la magnitud de impuestos-subsidios que permitirá alcanzar la dimensión óptima de la misma; y por último, investigaremos cual es el número de ciudades que componen un sistema en equilibrio, y bajo el supuesto de competencia monopolística.

2. Descripción del modelo

Tal y como hemos referido anteriormente, en este epígrafe presentamos un modelo de ciudad en equilibrio, con dos sectores: economías domésticas y producción. No obstante, si admitimos que estamos en una situación de equilibrio general, el nivel de utilidad $\bar{U}$ de las familias que habitan en la zona residencial es exógeno,[3] y que el suelo urbano no es de propiedad privada (podríamos suponer que el suelo es propiedad del Estado o de agentes no residentes –*absent landlords*).

Por otro lado, asumimos que la ciudad en cuestión es monocéntrica y abierta,[4] que se expande a lo largo de una llanura sin accidentes geográficos. Además, en ella se produce un bien X y un conjunto de servicios Z_Y ($Y=1, 2, 3, ..., n$) en el DCN, siendo el precio P_X determinado por el mercado nacional.

2.1. *Sector economías domésticas*

Asumimos que todas las familias de la ciudad poseen una función de utilidad separable y estrictamente cuasicóncava:

$$U = X^{\alpha} h^{\beta} \left[\left(\sum_{i}^{n} Z_i^{\gamma} \right)^{1/\gamma} \right]^{\delta}, \tag{1}$$

[3] La idea es que el nivel de utilidad, $\bar{U}$, de cualquier familia debe ser constante e igual en todo el territorio nacional; por, tanto, en equilibrio no tendrá lugar la migración.

[4] Se entiende por ciudad monocéntrica, aquella que se compone de dos anillos concéntricos: el central, llamado distrito de negocios (DCN) y, el periférico, que es la zona residencial. El límite de la ciudad (r_j), i.e. del espacio urbano, coincide con el principio de la tierra de uso agrícola. La ciudad se ubica en un espacio abierto, un llanura, sin accidentes geográficos que le impidan el crecimiento. Para un mayor conocimiento de este tipo de modelos ver Fujita (1989), como referencia básica.

donde α, β, γ y $\delta > 0$; $\alpha + \beta + \delta = 1$; siendo: X el consumo familiar del bien X; h es el suelo ocupado por una economía doméstica; Z_i el consumo familiar de la combinación de servicios Z_j; el parámetro γ *a là* Dixit-Stiglitz, $\gamma \in (0,1)$, representa las preferencias del consumidor por la variedad de servicios, de tal forma que, cuando $\gamma \to 1$, los bienes son sustitutivos, mientras que cuando $\gamma \to 0$, ocurre todo lo contrario, es decir, hay una mayor prefencia por la variedad y las economías domésticas experimentan una mayor utilidad si incrementan el consumo de todos los bienes. En términos de Atkinson y Stiglitz (1988), se diría que cuando $\gamma \to 0$ se valora la diversidad.

La función de coste de transporte o de *commuting* para una familia situada a una distancia r del DCN es lineal *a lá* Muth-Mills,[5] de modo que:

$$T(r) = tr,$$

siendo t ($t > 0$), el coste de transporte por unidad de r.

Con base en todo lo anterior, asumimos que el objetivo de cualquier familia será:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{r,Z_i}{Max}\, U = X^{\alpha} h^{\beta} Z_Y^{\delta}, \\ &s.a\ Y - T(r) = X + R(r)h(r) + \sum_i^n P_{Z_i} Z_i \end{aligned}\right\},$$

siendo Y la renta familiar; $Z_Y : Z_Y = \left[\sum_i^n Z_i^{\gamma}(r)\right]^{1/\gamma}$, el consumo de la combinación Z_i; P_{Z_i} es el precio unitario del servicio Z_i; $T(r)$ son los costes de transporte; $h(r)$ el consumo de suelo; y, $R(r)$ es la renta unitaria de la tierra situada a una distancia r del DCN.

Al resolver el problema de maximización anterior, obtenemos la función de demanda compensada de X, h y Z:

$$\hat{X}(r) = \alpha(Y - T(r)), \tag{2}$$

$$\hat{h}(r) = \beta(Y - T(r))R^{-1}(r) \tag{3}$$

$$\hat{Z}_i(r) = \{\delta(Y - T(r))P_{Z_i}^{-1} Z_Y^{-\gamma}\}^{1/(1-\gamma)}. \tag{4}$$

[5] Ver Muth (1969), Mills (1967) y Fujita (1989) para una introducción. Artís, Romani y Surinach. (2000) es un interesante trabajo sobre la importancia de los costes de *commuting* en las decisiones de localización.

La elasticidad $E_{Z_i}^{P_{Z_i}}$ precio demanda de Z_i está definida por la expresión:

$$E_{Z_i}^{P_{Z_i}} = \frac{\partial Z_i}{\partial P_{Z_i}} \frac{P_{Z_i}}{Z_i} = \frac{1}{1-\gamma} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{P_{Z_i}}{Z_Y} \frac{\partial Z_Y}{\partial P_{Z_i}} ,$$

siendo:

$$\frac{P_{Z_i}}{Z_Y} \frac{\partial Z_Y}{\partial P_{Z_i}} = Z_Y^{-\gamma} \sum_{j \neq i}^{n} P_{Z_i} Z_j^{\gamma-1} \frac{\partial Z_j}{\partial P_{Z_i}} - E_i \left(\frac{Z_i}{Z_Y} \right)^{\gamma}.$$

La función de demanda para Z_Y se puede obtener si sumamos la expresión (4) para cada i ($i=I, 2, ..., n$):

$$\hat{Z}_{\gamma}(r) = \delta(Y-T(r))I^{-1}, \tag{5}$$

siendo $I = \left(\Sigma P_{Z_i}^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1-\gamma}{-\gamma}}$. Si sustituimos las ccuacioncs (2), (3) y (5) en la expresión (1), obtenemos la función de utilidad indirecta:

$$V = \alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} R(r)^{-\beta} I^{-\delta} (I-T(r)) \equiv \bar{U} \tag{6}$$

$\forall r < r_f$. Si invertimos la ecuación anterior, obtendremos la función de renta del suelo (ver apéndice A.1):

$$B(Y-T(r), I, \bar{U}) = \bar{U}^{-\frac{1}{\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta \delta^{\frac{\delta}{\beta}} I^{\frac{-\delta}{\beta}} (Y-T(r))^{\frac{1}{\beta}}$$

que es la máxima renta que una familia ha de pagar por una unidad de suelo situada a una distancia r del DCN, manteniendo el nivel de utilidad $\bar{U}$; de tal modo que, en equilibrio, la oferta y demanda unitaria de suelo urbano coinciden y, por tanto:

$$R(r) = B(Y-T(r), I, \bar{U}) \tag{7}$$

$\forall r \in [0, r_f]$. Si sustituimos la expresión (7) en la función de demanda de suelo (3) obtendremos una nueva expresión de la misma (ver apéndice A.2.):

$$\hat{h}(Y-T(r), I, \bar{U}) = \bar{U}^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{-\frac{\alpha}{\beta}} \delta^{-\frac{\delta}{\beta}} I^{\frac{\delta}{\beta}} (Y-T(r))^{-\frac{\alpha-\delta}{\beta}}$$

2.2. *Sector producción*

Asumimos que cada servicio Z_i posee una función de costes idéntica y con rendimientos constantes a escala, que toman forma lineal:

$$L_{Z_i} = L_0 + lZ_i, \tag{8}$$

siendo L_0 y $l>0$; donde: L_{Z_i} es la cantidad de trabajo necesaria para producir Z_i; L_0 es el coste fijo de producir Z_i; y, l representa el coste medio de producir Z_i.

Suponemos que se trata de un mercado de competencia monopolística, en el que se da una situación de equilibrio de Cournot-Nash, lo cual nos obliga a admitir, entre otras cosas, que cada empresa se comporta de un modo óptimo, independientemente, de las decisiones que adopten las demás.[6] Con base en todo lo anteriormente reseñado, podemos concluir que la elasticidad demanda-precio E_{Z_i} es:

$$E_{Z_i} = \frac{1}{1-\gamma}.$$

El ingreso marginal de la empresa i-ésima será:

$$IMg_i = P_{Z_i}\left[1 - \frac{1}{E_{Z_i}}\right].$$

La empresa i maximizará beneficios cuando:

$$P_{Z_i} = \gamma^{-1} CMg_{Z_i}, \tag{9}$$

donde CMg_{Z_i} es el coste marginal de Z_i.[7] Lo cual pone de manifiesto, que cada firma fija un margen de beneficio γ^{-1}, de modo que cualquier incremento del coste marginal CMg_{Z_i}, repercutirá en el precio final P_{Z_i}. La expresión (9) también nos indica, que cuanto mayor sea la preferencia de los consumidores por la variedad de servicios γ, mayor será el precio de mercado de Z_i.

En equilibrio, todas las empresas producirán la misma cantidad de servicios, ya que poseen una función de coste y de demanda idénticas. Así

[6] Ello supone, que si una firma altera el precio P_{Z_j} del bien que produce, no provocará la salida de la otra empresa del mercado; es decir, $\frac{\partial Z_j}{\partial P_{Z_j}} = 0$, $\forall j \neq i$.

[7] Además, $CMg_{Z_i} = lW_m$ (salario).

pues, el *output* producido por cada empresa en esta situación será:

$$Z^{*}=\gamma L_0[l(1-\gamma)]^{-1}. \tag{10}$$

Sin embargo, la demanda de trabajo de cada una de las empresas estará definida por la ecuación:

$$L_Z^{*}=L_0(1-\gamma)^{-1}. \tag{11}$$

Suponemos también, que en la ciudad se produce un solo bien físico X,

$$X=cL_X,$$

c es la cantidad de trabajo necesario para producir una unidad del bien X, y L_X la cantidad de trabajo empleada para producir X. Además, en la ciudad existe una situación de pleno empleo:

$$N=L^X+L^Z.$$

Bajo los supuestos de competencia monopolistica, cada empresá maximizará beneficios:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{L_X,X}{Max}\ \pi=X-W_m L_X \\ s.a\ X=cL_X\end{array}\right\}.$$

De las condiciones de primer orden del problema anterior, se concluye:

$$W_m=cP_X$$

Una vez descrito el modelo, hemos de proceder a investigar a lo largo de los dos epígrafes siguientes, cual es el tamaño de equilibrio y óptimo de la ciudad en cuestión.

3. Tamaño de ciudad en equilibrio

En este apartado se analiza el tamaño de una ciudad en una situación de equilibrio, y bajo los supuestos de que tan sólo existen dos sectores y la estructura de mercado es de competencia monopolística. Para ello, hemos de comenzar suponiendo que la renta máxima que una familia ha de pagar por una unidad de tierra, en el límite de la zona residencial r_f de la ciudad, será igual al coste de oportunidad del suelo destinado a usos agrícolas R_s:

$$R_S = B(Y - T(r), I, \bar{U}), \tag{12}$$

donde $R_S > 0$. Si operamos en la expresión (12), obtenemos la función del límite urbano en equilibrio:

$$r_f = r(Y, \bar{U}).$$

El número de familias que pueden habitar en la ciudad será:

$$N(Y, \bar{U}) = \int_0^{r_f} \frac{2\pi r}{\hat{h}(Y-T(r), I, \bar{U})}\, dr,$$

$N(Y, \bar{U})$ es la cantidad total de población.

Si invertimos la expresión anterior, obtendremos la expresión de los costes marginales de una familia cuando desea mantener el nivel de utilidad $\bar{U}$:

$$Y(N, I, \bar{U}) = \left[\frac{N \bar{U}^{\frac{1}{\beta}} (\beta + 1)\, t^2 I^{\frac{\delta}{\beta}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}\, \delta^{\frac{\delta}{\beta}}\, 2\pi\beta^2} \right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}$$

En una situación de equilibrio, el salario monetario W_m ha de ser igual al coste marginal privado $Y(N, I, \bar{U})$ y al ingreso marginal de las economías domésticas W'_m:

$$W'_m(\bar{U}, n, L^{\bar{X}}) = \left[\frac{\bar{U}^{\frac{1}{\beta}} t^2 (1+\beta) l^{\frac{\delta}{\beta}} n^{-(1-\gamma)\frac{\delta}{\gamma\beta}}}{2\pi\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} \delta^{\frac{\delta}{\beta}} \beta\gamma^{\frac{\delta}{\beta}}} \left(L^{\bar{X}} + L_0 l \cdot n(1-\gamma)\right)^{-1} \right]^{\frac{\beta}{(2\beta+\alpha)}} \tag{13}$$

siendo W'_m la renta que ha de recibir cada empleado del sector producción para mantener el nivel de utilidad $\bar{U}$, $L^{\bar{X}}$ el número de empleados del sector X, esto es, el total de población activa del sector; y n el número de empresas productoras de servicios, que también podría ser interpretado como el tamaño de la ciudad.

Con base en todo lo anterior, podemos formular los teoremas siguientes:

Teorema 1. Sea $L^{\bar{X}}$ y $\bar{U} > 0$,

$$\text{i)}\ \frac{\partial W'_m(Y-T(r), \bar{U}, L^{\bar{X}})}{\partial n} < 0 \qquad \text{si } \beta+\delta<\delta\gamma^{-1}$$

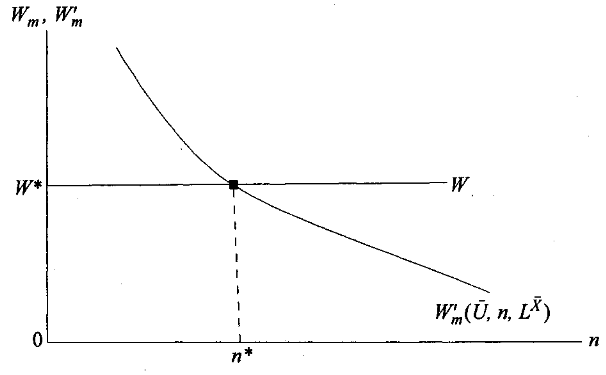
$$\text{ii)}\ \frac{\partial W'_m(Y-T(r), \bar{U}, L^{\bar{X}})}{\partial n} </_> 0 \qquad \forall n>/_< \bar{n},$$

$$\text{siendo } \bar{n}=\frac{(1-\gamma)^2\, \delta L^{\bar{X}}}{L_0[\gamma\beta-(1-\gamma)\delta]}.$$

Interpretación geométrica. i) De la ecuación (13) se concluye, que en una situación de equilibrio, a medida que aumenta n, las economías domésticas necesitan incrementos menores de renta W'_m, para mantener el nivel de bienestar $\bar{U}$, ya que la utilidad marginal β que les reporta el consumo de tierra es relativamente menor, que el proporcionado por los servicios δ (véase gráfica 1). En este caso, podemos hablar de que en la ciudad existen econo-

Gráfica 1

Tamaño de una ciudad en equilibrio cuando $\beta\delta<\delta\gamma^{-1}$

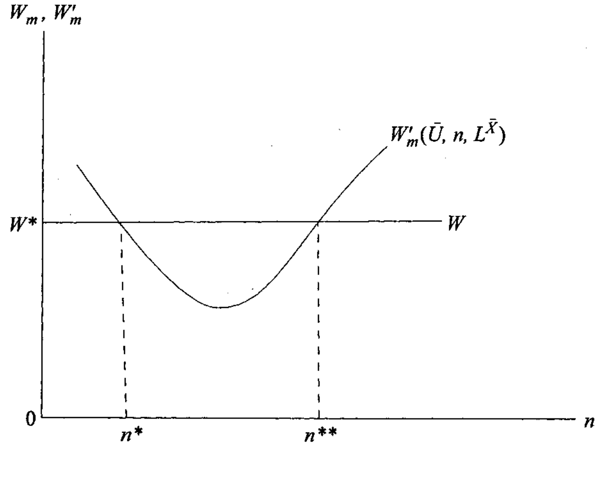


mías de aglomeración, y que el tamaño de la ciudad en equilibrio es n^* (ver apéndice A.3).

ii) Por analogía, podemos concluir que en la fase inicial de desarrollo de la ciudad, en la que existen economías de aglomeración, las familias necesitan menores aumentos de renta W'_m, a medida que se incrementa el número de servicios n, para mantener el nivel de bienestar $\bar{U}$; ya que, en este caso, la utilidad marginal β que les reporta el consumo de tierra es relativamente menor que el proporcionado por los servicios δ. Sin embargo, a partir de un determinado nivel de servicios $\bar{n}$, surgirán deseconomías de aglomeración, siendo por tanto necesario, incrementos de renta W'_m mayores, para mantener el nivel de bienestar $\bar{U}$, a medida que crece el número de empresas de servicios n (véase gráfica 2). En este caso, apreciamos resultados inconsistentes, tales como que existen dos tamaños de ciudad en equilibrio (n^* y n^{**}), ya que hay dos puntos de corte entre la línea de salario W_m y la curva de ingreso marginal de las economías domésticas W'_m, siendo n^* la dimensión que alcanza la ciudad cuando operan los efectos externos de aglomeración (los desbordamientos), y n^{**} el tamaño que logra la misma cuando aparecen las deseconomías (la congestión).

Gráfica 2

Tamaño de una ciudad en equilibrio cuando $\beta\delta > \delta\bar{\gamma}$[1]

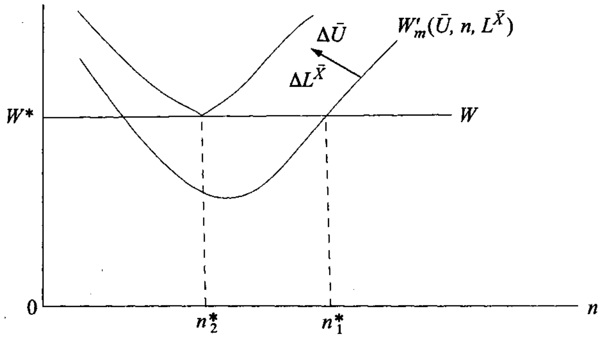


Corolario del teorema 1. i) La situación de equilibrio, en el supuesto de que $\dfrac{\partial W'_m(Y-T(r), \bar{U}, L^{\bar{X}})}{\partial n} < 0$ si $\beta+\delta<\delta\gamma^{-1}$ es estable, ya que el salario monetario W_m es igual al ingreso marginal privado W'_m y, además, $\left.\dfrac{\partial W'_m}{\partial n}\right|_{n^*} > \left.\dfrac{\partial W_m}{\partial n}\right|_{n^*}$.

ii) El equilibrio, en el supuesto de que $\dfrac{\partial W'_m(Y-T(r), \bar{U}, L^{\bar{X}})}{\partial n} {}^{<}/_{>} 0 \ \forall n {}^{>}/_{<} \tilde{n}$ es inestable, ya que los ingresos marginales privados W'_m podrán aumentar si se incrementa el volumen de población activa L^X del sector servicios, llegándose incluso a alcanzar una situación estable, cuando $L^{\bar{X}} = L^{\bar{X}^*}$ (véase gráfica 3).

Gráfica 3

Tamaño de una ciudad en equilibrio cuando $\beta\delta > \delta\bar{\gamma}^{-1}$ y para distintas cantidades de población activa ocupada del sector $\bar{U}$, $L^{\bar{X}}$



Teorema 2. El tamaño N^* de una ciudad en equilibrio estable disminuirá, cuando se incremente el nivel de bienestar de las familias $\bar{U}$ y, simultáneamente, existan deseconomías de aglomeración.

Interpretación geométrica. A partir de la ecuación (13) se deduce que cuando se incrementa el nivel de utilidad $\bar{U}$, aumenta el ingreso marginal de las economías domésticas W'_m y, por tanto, disminuye el número de firmas n del sector servicios, ya que existen deseconomías de aglomeración, como se observa en la figura 3. Obviamente, cuanto más reducido sea el número n de empresas, menor será el tamaño N^* de la ciudad en equilibrio estable.

Del teorema anterior, también se concluye que el nivel de bienestar $\bar{U}$ de las economías domésticas se incrementará, siempre que se reduzca N, en presencia de deseconomías de aglomeración. Este resultado es bastante razonable, en presencia de congestión (debido a la sobre dimensión de la ciudad) los costes de vivir en una ciudad comienzan a ser mayores que los beneficios (Glaesser, 1998). Una vez analizado el tamaño de una ciudad en equilibrio, debemos pasar a estudiar la dimensión óptima de la misma.

4. Tamaño óptimo de ciudad

La pregunta que con mayor frecuencia se formulan los estudiosos del tema es acerca de ¿cual será el tamaño óptimo de ciudad, cuando existe un gobierno local encargado de la planificación y el ordenamiento territorial de la misma? La administración pública puede expropiar tierra de uso agrícola y arrendarla a las economías domésticas a una renta R, con el fin de que se alcance la dimensión óptima. El objetivo del gobierno será maximizar el excedente de renta S, que se define como la diferencia entre los ingresos de producción y el coste de mantenimiento del nivel de utilidad $\bar{U}$:

$$\underset{\substack{h(r),m(r),\\ L^X,L_Z,n,\\ z(r),Z,X,\\ N}}{Max}\ S = P_X X - \int_0^{r_f} \left(T(r) - \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{\frac{\delta}{\gamma\alpha}} \right) m(r)\, dr, \tag{14}$$

siendo $m(r)$ el número de familias situadas a una distancia r del DCN.

La función objetivo anterior está sujeta al límite de suelo en la ciudad: $d(r) \succ m(r)h(r)$, $\forall r \leq r_f$; al límite de población en la ciudad: $N = \int_0^{r_f} m(r)dr$; a la propia capacidad de producción del bien X: $X=cL^X$; al límite de trabajo requerido para producir Z: $L_Z=L_0+lZ$; al del pleno empleo: $N=L_Z+L^X$, siendo $L^Z=XL_Z n$; y, al equilibrio entre oferta y demanda de Z: $Z=\int_0^{r} \hat{z}(r)m(r)dr$.

4.1. *Tamaño óptimo*

A la vista de lo anteriormente expuesto, se trata de resolver un problema de control, en el que los precios sombra son: $R_s(r)$ (para el caso del suelo urbano), ϕ (para la restricción de población), Ψ (de producir X), χ (el del trabajo requerido para producir Z), η (para la restricción de pleno empleo) y ζ (para el supuesto de equilibrio entre oferta y demanda de Z).

Para solucionar este problema (ver apéndice A.4.) es necesario que $R_s(r), \phi, \chi, \eta$ y $\zeta \in R$, siendo $0<r<r_f$, de tal modo, que las condiciones de optimización son:

$$\frac{\partial L}{\partial m(r)} = -\left[T_r + \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right] - \zeta m(r) - R_S(r) + \phi = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h(r)} = -\left[-\frac{\beta}{\alpha} \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{\frac{-(\beta-\alpha)}{\alpha}} z^{-\frac{\delta\lambda}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right] m(r) - R_S(r) m(r) = 0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z(r)} = -\left[-\frac{\delta}{\alpha} \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}} z^{-\frac{(\delta-\alpha)}{\alpha}}\right] m(r) - \zeta m(r) = 0 \qquad (17)$$

Las condiciones de transversalidad para L_Z, L^X, N, n, X y Z son:

$$\eta - \chi n = 0, \qquad (18)$$

$$\Psi c - \chi = 0, \qquad (19)$$

$$-\phi + \chi = 0, \qquad (20)$$

$$-\left[-\frac{\delta}{\gamma\alpha} \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{(\delta-\gamma\alpha)}{\gamma\alpha}}\right] m(r) - \chi L_Z = 0 \qquad (21)$$

$$P_X - \Psi = 0, \qquad (22)$$

$$\zeta - l\phi = 0, \qquad (23)$$

$$-\left[T(r) + \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right] m(r_f) + \phi m(r_f) - \zeta z(r_f)\, m(r_f) = 0 \qquad (24)$$

La ecuación (15) representa el coste marginal social que supone un incremento infinitesimal del número de familias $m(r)$ localizadas a una distancia r del DCN, manteniéndose constante el nivel de bienestar $\bar{U}$. Por otra parte, si asumimos que la renta de la tierra $R(r)$ es igual al coste de oportunidad de ese suelo destinado a usos agrícolas $R_S(r)$, concluimos que la expresión (16) expresa la relación marginal de sustitución entre suelo y el bien X. Por el contrario, la ecuación (17) es la relación marginal de sustitución entre los bienes Z y X.

Las condiciones (18) y (19) representan el beneficio marginal social de los empleados en los sectores X y Z, respectivamente, en una situación de pleno empleo. Sin embargo, la expresión (20) nos indica que en equilibrio, el coste ϕ y beneficio marginal social χ coinciden. La ecuación (21) refleja el beneficio marginal de una empresa de la industrial Z de la ciudad; mientras que (22) y (23) expresa que los precios de X: P_X y Z: ζ son iguales al coste marginal de producción. Por último, la condición (24) señala cual es el coste marginal privado en el límite de la zona residencial r_f de la ciudad.

A partir de las condiciones de optimización y de tranversalidad del problema (14), podemos analizar la relación que existe entre: producción óptima y de equilibrio en una empresa del sector servicios (teorema 3), el diferencial de renta del suelo y los coste fijos, cuando la ciudad alcanza su tamaño óptimo (teorema 4) y la diversidad de servicios en equilibrio y el número óptimo (teorema 5).

Teorema 3. *La producción*[8] *óptima* Z^O *de cada empresa del sector servicios, coincide con la de equilibrio* Z^*.

Dem: ver apéndice D.1.

Teorema 4. *Cuando la ciudad alcanza su dimensión óptima, el diferencial de renta del suelo es mayor o igual que el coste fijo de producción de los servicios.*

Dem: ver apéndice D.2.

Teorema 5. *El tamaño n de una ciudad en equilibrio, no se corresponde con la dimensión óptima* n^O *del sector*

Dem: ver apéndice D.3.

4.2. *Impuestos indirectos*

En este subapartado, estudiaremos cual ha de ser el papel a jugar por el gobierno local, si quiere que el tamaño de equilibrio de la ciudad coincida con

[8] Vid. Dixit y Stiglitz (1973), Abdel-Rahman (1987) y Abdel-Rahman (1988).

el óptimo paretiano. En el siguiente teorema analizamos, por tanto, como ha de actuar el gobierno local, para que se alcance un equilibrio eficiente:

Teorema 6. Si el gobierno local establece un impuesto directo sobre la renta $T_S = 1 - \gamma^{\frac{\delta}{2\beta+\delta}}$ *procedente del sector servicios, y subsidia a las empresas de esta rama en una cuantía* $G_S = \frac{1-\gamma}{\gamma}$ *(es decir, en función del coste marginal* CMg_{Z_i} *de cada firma y del precio de mercado* P_{Z_i} *del servicio),*[9] *se logrará una situación de equilibrio eficiente, esto es, la producción óptima* Z^O *de cada empresa de servicios, coincide con la de equilibrio,* Z^*.

Dem: ver apéndice D.4.

Con todo lo expuesto hasta ahora, hemos llegado a concluir cual es el tamaño óptimo de una ciudad monocéntrica y la dimensión de la misma en una situación de equilibrio, bajo el supuesto de diferenciación del producto; sin embargo, el lector habrá comprobado que no hemos hecho referencia alguna a la primera parte del título del trabajo, es decir, al concepto de sistema de ciudades y, más concretamente, a la dimensión del mismo. Nuestro objetivo en el epígrafe siguiente es cubrir la laguna, anteriormente reseñada.

5. El tamaño de un sistema de ciudades en equilibrio

Supongamos un país en el que existen varias ciudades que conforman un sistema y que interaccionan entre sí. Por tanto, el sistema es el resultado, básicamente, de tres fuerzas que explican la concentración de la actividad económica y social entorno a las mismas: la reducción del coste de transporte, la presencia de economías de escala y, por último, la existencia de efectos externos de aglomeración. Por otra parte, las ciudades mantienen relaciones comerciales, dado que cada una produce un servicio Z_i y las economías domésticas revelan preferencias por la variedad de servicios γ, dado que ello le reporta un incremento en el nivel de utilidad $\bar{U}$. Además, existe una movilidad perfecta entre el conjunto de ciudades que conforman el sistema, dado que se localiza en una llanura, sin accidente geográficos. No podemos finalizar sin reseñar, que en cada aglomeración se produce también un bien X, además del servicio mencionado anteriormente.

[9] Véase la ecuación (9).

Al igual que en el caso anterior, suponemos que el sector productivo se localiza en el DCN de cada ciudad, mientras que las familias se ubican en la zona residencial, de modo que el nivel de utilidad $\bar{U}$ de la mismas es exógeno, es decir, está determinado a nivel nacional.

5.1 *Las economías domésticas*

Asumimos que cada familia posee una función de utilidad separable y estrictamente cuasicóncava:

$$U = X^{\alpha}\left[\left(\sum_{i}^{n} Z_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\delta}, \tag{25}$$

siendo: α, γ y $\delta > 0$; $\alpha + \delta = 1$; X la cantidad del bien que consume cada una de las familias de la nación. Además, observamos que las distintas economías domésticas que conforman el sistema ocupan en propiedad una unidad de suelo residencial, h.

La función de costes del transporte para la distintas familias de la ciudad i es lineal *a là* Muth-Mills y, por tanto, depende de la distancia r_i al DCN (de cada ciudad i):

$$T_{r_i} = t_i r_i,$$

siendo, $t_i > 0$.

Con base en todo lo anterior, admitimos que el objetivo de cualquier familia será:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{r,Z_i,X}{Max}\, U = X^{\alpha}\left[\left(\sum_{i}^{n} Z_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\delta} \\ s.a\;\; Y_i - T_{r_i} = X + R_i(r) + \sum_{i}^{n} P_{Z_i} Z_i \end{array}\right\}$$

Si resolvemos el problema de maximización anterior, obtenemos la función de demanda compensada de $\hat{X}$ y Z_i:

$$\hat{X}(r) = \alpha(Y_i - R_i(r) - T_{r_i}), \tag{26}$$

$$\hat{Z}_i(r) = \left[\delta(Y_i - T_{r_i} - R_i)P_{Z_i}^{-1} Z_{Y_i}^{-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}, \tag{27}$$

siendo $Z_{Y_i} = \left(\sum_{i}^{n} Z_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. La función de demanda $\hat{Z}_Y$ se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$\hat{Z}_Y(r) = \sum_{i}^{n} Z_i(r) = \delta(Y_i - R_i(r) - T_{r_i})\Gamma^{-1},$$

siendo $\Gamma^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{Z_i}^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. Al sustituir las ecuaciones (26) y (27) en la expresión (25), obtenemos la función de utilidad indirecta:

$$V_i(r) = \alpha^{\alpha}\,\delta^{\delta}\left(\sum P_{Z_i}^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)^{-\frac{\delta(1-\gamma)}{\gamma}} (Y_i - R_i(r) - T_{r_i}) \equiv \bar{U},\ \forall\, r \succ r_j \qquad (28)$$

Dado que en este caso, suponemos que el suelo urbano es propiedad de los residentes, podemos definir la renta familiar Y_i de la ciudad i-ésima (ver apéndice A.5.):

$$Y_i = W_{m_i} - dR_i,$$

donde dR_i es la proporción del diferencial de renta del suelo de la ciudad i, con respecto a las restantes del sistema, que corresponde a cada economía doméstica.

5.2. *El sector producción*

Se supone que en cada ciudad se produce un bien X, cuya función de producción se caracteriza por: depender de un único *input* L, que es el trabajo;[10] presenta rendimientos constantes a escala, ya que se trata de una relación de proporciones fijas; y, el factor de progreso técnico es neutral en sentido de Hicks (y representa los efectos externos de localización –ver apéndice A.6.):

$$X_i^j = X(L_{X_i})L_{X_j}\ \forall\, j \in X \text{ e } i = 1,2,\ldots,n,$$

siendo, L_{X_i} el volumen de población activa de la industria X en la ciudad j; y, L_{X_j} el trabajo necesario para producir una unidad de X en la empresa j de la industria X.[11]

[10] Esta restricción se impone con el fin de simplificar el desarrollo de nuestro análisis.

[11] Se supone que L_{X_j} es constante en todo el territorio nacional.

Las economías de localización son todos aquellos efectos externos derivados de la amplia oferta de población activa especializada, de las posibilidades de sustitución en el empleo, la proximidad locazional de empresas con ligazones comerciales, ... Estas externalidades son de signo de positivo, es decir, dan lugar a incrementos en el nivel de producción del bien X.

La expresión anterior se comporta de acuerdo con las propiedades siguientes:

Propiedad 1: $\frac{\partial X(L_{X_i})}{\partial L_{X_i}} > 0$, es decir, la productividad marginal de la función de localización es positiva.

Propiedad 2: Los efectos externos de localización no afectan a la dimensión de la industria X, dado que las funciones de producción de las distintas empresas que conforman la misma, poseen rendimientos constantes a escala.

El objetivo de la empresa j será:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{X_j, L_X}{Max}\, \Pi^j = p_{X_i} X_j - W_{m_i} L^j_{X_i} \\ s.a\ X^j_i = X\left(L_{X_i}\right) L_{X_j} \end{array}\right\},$$

Π^j es el beneficio de la empresa j; p_{X_i} el precio unitario del bien X en la ciudad i; y, W_{m_i} el salario medio en la ciudad i.

A partir de las condiciones de primer orden del problema de optimización anterior, concluimos que:

$$PM^j_{X_i}(L_{X_i}) \equiv p_{X_i} X(L_{X_i}) = W^*_{m_i},$$

es decir, la productividad marginal de la empresa j de la industria i $PM^j_{X_i}$ es igual al salario medio de la ciudad i, $W^*_{m_i}$.

Una vez descrito los dos sectores del modelo de sistema de ciudades, hemos de proceder a estudiar cual será el tamaño del mismo en una situación de equilibrio.

5.3. *El número de ciudades en un sistema en equilibrio*

No podíamos finalizar este trabajo sin analizar uno de los aspectos más fundamentales que dan sentido a este estudio, esto es, cual será el número de ciudades que forman un sistema en una situación de equilibrio. Para ello, comenzamos redefiniendo la función de utilidad indirecta $V_i(r)$[12] (28):

$$V_i(r)=\alpha^{\alpha}\delta^{\delta}\left(\left(\gamma^{-1}lW_{m_i}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)^{-\frac{\delta(1-\gamma)}{\gamma}}\left(W_{m_i}+\frac{1}{3}\pi^{-\frac{1}{2}}t_i\left(\frac{\eta}{\bar{n}}\right)-t_i\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{\bar{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\equiv\bar{U}$$

$\forall r \leq r_f$.

Si invertimos la función anterior, obtendremos la expresión del ingreso marginal de las economías domésticas $W'_{m_i}(\bar{U},n)$:

$$W'_{m_i}(\bar{U},n)=\left(\frac{\bar{U}l^{\delta}}{\alpha^{\alpha}\delta^{\delta}\gamma^{\delta}n^{\frac{\delta(1-\gamma)}{\gamma}}}\frac{3(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{3(\pi n)^{\frac{1}{2}}-2+\eta^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

que representa la renta $W'_{m_i}(\bar{U},n)$ que las familias de la ciudad i han de recibir para alcanzar el nivel de bienestar $\bar{U}$. La función anterior cumple:

$$\frac{\partial W'_{m_i}(\bar{U},n)}{\partial n}<0,$$

es decir, cuando mayor es el número de ciudades n que conforman el sistema de ciudades, menor será el ingreso marginal $W'_{m_i}(\bar{U},n)$ que cada familia ha de recibir para mantener el nivel de utilidad $\bar{U}$.

Por el contrario, el salario monetario W_{m_i} que recibe la fuerza laboral ocupada en el sector X (ver apéndice A.7) será:

$$W_{m_i}(n)=\left(\frac{\eta}{n}-\frac{2t}{3\pi^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\eta}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{L_0}{1-\gamma}\right)^{n}.$$

Se puede demostrar que $\dfrac{\partial W_{m_i}}{\partial n} \gtrless 0 \;\; \forall n \lessgtr \left(\dfrac{\eta t}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)$, esto es, en la fase

[12] Esta nueva especificación de la función de utilidad indirecta $V_i(r)$ de la ciudad i.

inicial de formación del sistema de ciudades (en la que existen economías de localización), un incremento infinitesimal del número de aglomeraciones n que conforman el mismo, se traduce en un aumento del salario monetario $W_{m_i}(n)$ que se ha de pagar a la mano de obra empleada en la industria X; mientras que, en la etapa siguiente de deseconomías de localización, donde se ha encontrado el techo a los efectos desbordamiento, un incremento del número de ciudades n que conforman el sistema, provocará una disminución de la remuneración $W_{m_i}(n)$ de los empleados en el sector producción.

A partir de todo lo anterior, podemos deducir el tamaño de un sistema de ciudades en equilibrio, es decir, cual es el número de aglomeraciones n en una situación como la descrita:

Teorema 7. Para un nivel de bienestar $\bar{U}$, existe un tamaño de equilibrio del sistema de ciudades (n^*, n^{**}) positivo.

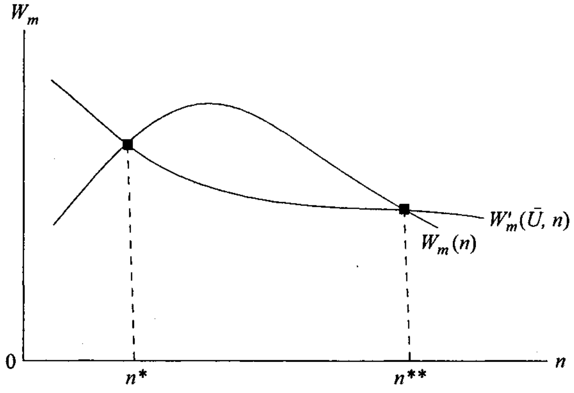
Interpretación geométrica: En la gráfica **4** se aprecian geométricamente, las dos afirmaciones anteriormente lanzadas:

$$\frac{\partial W'_{m_i}(\bar{U},n)}{\partial n} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial W_{m_i}}{\partial n} \gtrless 0 \ \forall n \lessgtr \left(\frac{\eta t}{\pi^{\frac{1}{2}}} \right);$$

y por tanto, observamos que cualquiera de los posibles puntos de equilibrio del sistema (n^*, n^{**}) son positivos.

Gráfica 4

Número de ciudades en un sistema en equilibrio



No obstante, hemos de reseñar que cuando el equilibrio del sistema se alcanza para un número de ciudades reducido n^*, éste es estable, debido a que $\frac{\partial W_{m_i}(n)}{\partial n} > 0$; sin embargo, si el punto de equilibrio fuese n^{**}, se trataría de una solución inestable, ya que con una reducción del tamaño del sistema n, las familias lograrían incrementar sus ingresos $W'_{m_i}(\bar{U},n)$ y, simultáneamente, los asalariados experimentarían un aumento en sus remuneraciones.

5.4 *Tamaño del sistema de ciudades cuando varía la utilidad*

Hasta ahora hemos considerado que el nivel de utilidad era constante, sin embargo, en el siguiente teorema vamos a analizar el tamaño de un sistema de ciudades en una situación de equilibrio, cuando éste varía:

Teorema 8. *i) Si* $\frac{\partial W_{m_i}(n)}{\partial n} > 0$, *el número de ciudades* n^* *del sistema en equilibrio aumentará si se incrementa el nivel de bienestar* $\bar{U}$ *de las economías domésticas.*

ii) $\frac{\partial W_{m_i}(n)}{\partial n} < 0$ *el número de ciudades* n^* *del sistema en equilibrio disminuirá si se incrementa el nivel de bienestar* $\bar{U}$ *de las economías domésticas.*

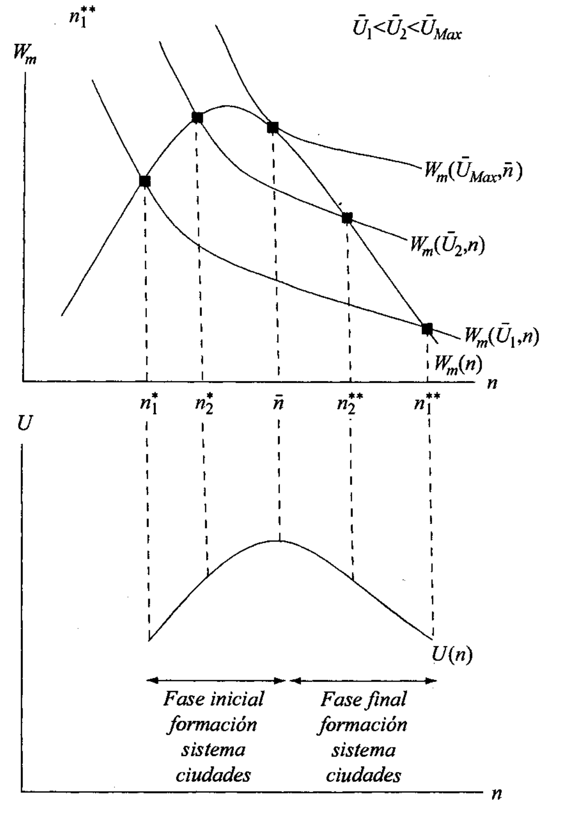
Interpretación geométrica: i) En la gráfica 5 se observa que cuando $\frac{\partial W_{m_i}(n)}{\partial n} > 0$, i.e., en presencia de efectos desbordamiento, si se incrementa el nivel de utilidad $\bar{U}$ de las economías domésticas (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$, siendo $\bar{U}_1 < \bar{U}_2$), apreciamos que aumenta el número de ciudades n que conforman el sistema (se pasa de n_1^* a n_2^*, siendo $n_1^* < n_2^*$).

ii) En la gráfica 5 se observa[13] que cuando $\frac{\partial W_{m_i}(n)}{\partial n} < 0$, i.e. en la fase de congestión, si se incrementa el nivel de utilidad $\bar{U}$ de las economías domésticas (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$, siendo $\bar{U}_1<\bar{U}_2$), apreciamos que disminuye el número de ciudades n que conforman el sistema (se pasa de n_1^{**} a n_2^{**} siendo $n_1^{**} < n_2^{**}$).

[13] La fase incial de formación del sistema, podría ser una ciudad textil; la final, una ciudad financiera (agradecimientos en este punto al evaluador anónimo).

Gráfica 5

Funciones de utilidad para distintos tamaños del sistema



Se concluye por tanto, que en la fase inicial de formación del sistema de ciudades $\overline{0\bar{n}}$, un incremento del número, n, de ciudades que componen el sistema, se traduce en un aumento del nivel de utilidad $\bar{U}$, ya que los beneficios que obtienen familias $W'_{m_i}(\bar{U},n)$, al poder acceder a una mayor variedad de bienes X_i $(i=1,2,\ldots,n)$, son superiores a los derivados de la mayor remuneración salarial W_m, motivada por la presencia de economías de localización.

Sin embargo, en la etapa final de formación del sistema $\overline{\bar{n}\infty}$, un incremento del número de ciudades n que componen el sistema se traduce en una disminución del nivel de utilidad $\bar{U}$, ya que los beneficios que obtienen familias $W'_{m_i}(\bar{U},n)$, por poder acceder a una mayor variedad de bienes X_i

$(i=1,2,\ldots,n)$ son inferiores a los derivados de la mayor remuneración salarial W_m, que genera la presencia de economías de localización.

6. Conclusiones

Una vez expuesto el modelo que explica la formación y crecimiento de un sistema de ciudades en situaciones de diferenciación del producto, ha llegado el momento de enumerar las principales conclusiones que se extraen del mismo. Sin embargo, antes de comenzar a enunciar los principales resultados del estudio, es preciso recordar algunos de los supuestos realizados, dado que en gran medida explican algunas de las conclusiones obtenidas. Se supone que en cada aglomeración urbana existen dos sectores: economías domésticas y producción. Las familias poseen un nivel de utilidad exógeno y revelan preferencias por la variedad de servicios; mientras que el sector productivo oferta n tipos de servicios diferenciados, y un bien X.

En equilibrio, las economías domésticas necesitan, en la fase inicial de formación del sistema, menores incrementos de renta para mantener el nivel de utilidad, a medida que se incrementa el número de servicios (o lo que es igual, el número de empresas), debido a la presencia de efectos externos de localización; sin embargo, en la siguiente fase, requerirán incrementos mayores de renta, dado que se enfrentan a una situación de deseconomías de aglomeración. No obstante, hemos de reseñar, que la primera situación de equilibrio es estable, mientras que la segunda es inestable.

Cuando la situación de equilibrio es estable, el tamaño de la ciudad disminuye, siempre que se incremente el nivel de bienestar de las familias que habitan en la misma en la fase de deseconomías de aglomeración. También se puede hacer la lectura inversa, es decir, cuando el nivel de utilidad de las economías domésticas aumenta, la ciudad adquiere una dimensión mayor.

Del análisis de las condiciones de optimización y transversalidad concluimos, en primer lugar, que la producción óptima y de equilibrio de cada empresa de servicios coincide con la de equilibrio; segundo, cuando la ciudad alcanza su dimensión óptima, el diferencial de renta del suelo es mayor o igual que el coste fijo de producción; tercero, en una situación de equilibrio, la dimensión de la ciudad (o lo que es igual, la variedad de servicios) no se corresponde con el tamaño óptimo de la misma; cuarto, el gobierno local puede establecer un impuesto directo y un subsidio a las empresas de servicios, que permita alcanzar una situación de equilibrio eficiente.

Una de las principales aportaciones que hacemos con este estudio, al legado del análisis económico urbano, es la que hace referencia a la dimensión de un sistema de ciudades en equilibrio. El número de aglomeraciones urbanas que forman dicho sistema es siempre positivo, aunque si este es reducido (es decir, en la fase inicial de formación del sistema, en la que existen economías de localización), estamos ante una situación estable, mientras que si es suficientemente elevado (es decir, cuando surgen las deseconomías de localización), la solución es inestable. La última conclusión reseñable es, que el número de ciudades que componen un sistema aumenta si se incrementa el nivel de utilidad de las familias y, además, hay efectos externos de localización; sin embargo, el tamaño del sistema se reduce, cuando se incrementa el bienestar de las economías domésticas y, simultáneamente, aparecen las deseconomías de localización.

No podemos finalizar, sin afirmar, que aún siendo importantes las conclusiones que de este estudio se extraen y, por tanto, las aportación que el mismo supone a la literatura del análisis económico urbano, sin embargo, hay aspectos que no son tratados en este trabajo por diversos motivos, y muy singularmente, el tamaño de ciudad en un sistema en el qué las distintas aglomeraciones urbanas comercian entre los servicios diferenciados que producen; además, con ello, sabremos si el planteamiento de Krugman (1979)[14] es defendible, o por el contrario, no. No obstante, hemos de reseñar que estos y otros aspectos referidos a la teoría económica urbana son objeto de investigación en estos momentos.

Bibliografia

Abdel-Rahman, H.M (1988). "Product differentiation, monopolistic competition and city size", *Regional Science and Urban Economics* 18, pp. 69-86.

——— (1987). *Market structure, agglomeration and systems of cities in spatial economies,* University of Pennsylvania Press.

Alonso, W. (1964). *Location and Land Use: Towards a General Theory of Land Rent,* Harvard University Press, Cambridge, Ma.

Alonso-Villar, O. y De Lucio, J. (1999). "Una aproximación a la economia urbana", *Revista de Economia Aplicada* 21(7), pp. 121-157.

[14] Vid. Krugman (1979) y Abdel-Rahman, H. M. (1987-1988). Krugman alegaba que en un sistema de dos ciudades que no comercian entre sí, el equilbirio se lograba cuando la mano de obra se concentraba en la ciudad que produjese una mayor variedad de servicios.

Arnott, R. J. (1979). "Optimal city size in a spatial economy" *Journal of Urban Economics,* 6, pp. 65-89.

——— y Stiglitz, J. E. (1979). "Aggregate land rents, expenditure on public goods, and optimal city size", *Quarterly Journal of Economics,* 93 (4), pp. 471-490.

Arthur, B. (1990). "'Silicon Valley' locational clusters: when do increasing returns imply monopoly?", *Mathematical Social Sciences,* 19, pp. 235-251.

Artís, M.; Romani, J. y Surinach, J. (2000). "Determinants of Individual Commuting in Catalonia, 1986-91: Theory and Empirical Evidence", *Urban Studies,* 37(8), pp. 1431-1450.

Atkinson, A. B y Stiglitz, J. E. (1988). *Lecciones sobre economía pública,* Instituto de Estudios Fiscales, Madrid (Traducción del original de 1980).

Becker, G. S. (1968). "Crime and Punishment: An Economic Approach", *Journal of Political Economy,* 76, pp. 169-217.

Benabou, R. (1993). "Working of a city: location, education and production", *Quarterly Journal of Economics,* 106, pp. 619-652.

Brakman, S. *et al.* (1999). "The return of Zipf: Towards a further understanding of the rank-size distribution", *Journal of Regional Science,* 39, pp. 183-213.

Christaller, W. (1933). *Die Zentralen Orte in Süddeutschland,* Berlin, Gustav Fisher Verlag. Traducción inglesa: The Central Places of Southern Germany, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice-Hall (1966).

David, P. A. y Rosenbloom, J. L. (1990). "Marshallian factor market externalities and the dynamics of industrial localization", *Journal of Urban Economics,* 28, pp. 349-370.

De Salvo, J. (1977). "Urban Household Behavior in a Model of Completely Centralized Employment", *Journal of Urban Economics,* 4, pp. 1-14.

Dixit, A. y Stiglitz, J. E. (1973). "Monopolistic competition and optimum product diversity", *American Economic Review* 67, pp. 297-308.

Fujita, M. (1989). *Urban economics theory: land use and city size,* Cambridge University Press, Cambridge, Ma.

Fujita, M. y Thisse, J. F. (1996). "Economics of agglomeration.", *Journal of the Japanese and International Economies,* 10, pp. 339-378.

Gaspar, J. y Glaeser, L. (1998). "Information technology and the future of cities", *Journal of Urban Economics,* 43(1), pp. 136-156.

Glaeser, E. (1998). "Are cities dying?", *Journal of Economic Perspectives,* 12(2), pp. 139-160.

Henderson, J. V. (1974). "The sizes and types of cities", *American Economic Review,* 44, pp. 640-656.

Hirschman, A. O. (1958). *The strategy of economic development, Yale University Press,* New Haven.

Hochman, E. (1981). "Land rents, optimal taxation and local fiscal independence in an economy with local public goods", *Journal of Public Economics,* 15.

Hoover, E. U. (1948). *The location of economic activity,* McGraw-Hill.

Imagawa, T. (1997). *Essays on telecommunications, cities and industry in Japan,* Harvard PHD Disertation.

Jacobs, J. (1969). *The Economy of Cities,* Vintage Books, New York.

Kanemoto, Y. (1980). "Theories of urban externalities", en: *Handbook of Urban Economics*, North-Holland, Amsterdam.

Khan, M. (1996). The silver lining of rust belt decline: Killing off pollution externalities. (mimeo).

Krugman, P. (1991). "Increasing returns and economic geography", *Journal of Political Economy,* 99, pp. 483-99.

———, P. (1979). "Increasing returns, monopolistic competition and international trade", *Journal of International Economics, 9.*

———, P. y Livas Elizondo, R. (1996). "Trade policy and the third world metropolies", *Journal of Development Economics,* 49, pp. 137-150.

Lucas, R. J. (1988). "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-42.

Marshall, A. (1890). *Principles of economics,* Macmillan, London.

Mills, E. S. (1967). "An aggregate model of resource allocation in a metropolitan area", *American Economic Review,* 57, pp. 197-210.

Muth, R. F. (1969). *Cities and housing,* Chicago University Press, Chicago.

Myrdal, G. (1957). *Economic theory and under-developed regions*, Duckworth, London.

Rauch, J. E. (1993). "Does history matter only when it matters little? The case of city-industry location", *Quarterly Journal of Economics*, 108, pp. 380-400.

——— (1991). "Comparative advantage, geographic advantage and the volume of trade", *The Economic Journal,* 101, pp. 1230-1244.

Saxenian, A. (1994). *Regional advantage: culture, and competition in Silicon Valley and route*, Harvard University Press, Cambridge, Ma.

Von Thünen, J. H. (1826). *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft un Nationalökonomie,* Perthes, Hamburg. (Traducción inglesa: *The isolated State,* Pergammon Press, Oxford, 1966).

Weber, A. (1929). *Theory of the location of industries,* Chicago University Press, Chicago.

——— (1909). *Ueber den Standort der Industrien,* J.C.B. Mohr, Tübingen. (Traducción inglesa: *The theory of the location of industries*, Chicago University Press, Chicago, 1929).

Yang, C. H. y Fujita, M. (1983). "Urban spacial structure with open space", *Environment and Planning,* 15, pp. 259-269.

Apéndice

A. Notas matemáticas

A.1.
No olvidemos que $\frac{\partial B(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial r} < 0$; $\frac{\partial B(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial I} < 0$;

$\frac{\partial B(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial \bar{U}} < 0$ y $\frac{\partial B(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial Y} < 0$.

A.2.
La función de demanda se caracteriza por ser:

$$\frac{\partial \hat{h}(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial r} > 0;$$

$$\frac{\partial \hat{h}(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial I} > 0; \quad \frac{\partial \hat{h}(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial \bar{U}} > 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial \hat{h}(Y-T(r),I,\bar{U})}{\partial Y} < 0.$$

A.3.
El tamaño de una ciudad en equilibrio n^* viene determinado por el punto de intersección de la línea de salario W_m y la curva de ingreso marginal privado W'_m. Por otra parte, no debemos de olvidar que $W'_{\underset{n\to\infty}{m}}(\bar{U}, n, L^X) = 0$, es decir, cuando el número de firmas productoras de servicios n localizadas en la ciudad es muy grande, el ingreso marginal privado es casi nulo, dado que los efectos externos de aglomeración generados por la gran variedad de servicios apenas suponen incrementos en el bienestar de las economías domésticas.

A.4.
La función auxiliar de Hamilton es:

$$H = -\left[T(r) + \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\times\alpha}}\right] m(r) - \zeta m(r) + \gamma m(r).$$

La de Lagrange es:

$$L = H + R_S(r)[d(r) - m(r)h(r)] + \Psi[cL^X - X] +$$
$$\eta[L_Z - lZ - L_0] + \chi[N - nL_Z - L^X].$$

A.5.
El diferencial de renta del suelo de la ciudad i con respecto a las restantes del sistema dR_i es:

$$dR_i = 1 - \int_0^{r_i} 2\pi t_i r^2 dr = \frac{1}{3}\pi^{-\frac{1}{2}} t_i N_i^{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte, la población total de la ciudad i N_i es igual:

$N_i = \int 2\pi r dr = r_i^2 \pi = \frac{\eta}{n}$ (véase ecuación (18)),

siendo η el nivel de población de la ciudad i (que además está plenamente ocupada).

A.6.
Debido a las limitaciones de extensión a las que estamos sometidos, hemos reducido el análisis del sector producción al estudio de los efectos externos de localización. El análisis podría ampliarse al caso de na relación de producción con dos funciones de aglomeración: localización y urbanización. La ecuación de efectos externos de urbanización sería:

$$Z_i^k = Z(L_{Z_i}, L_{X_i})L_{Z_i}^k \ \forall k \in Z \text{ e } i = 1,2,\ldots,n.$$

siendo:

L_{Z_i} = El volumen de población activa del sector servicios Z en la ciudad i.

L_{X_i} = El volumen de población activa de la industria X en la cindad i.

$L_{Z_i}^k$ = El trabajo necesario para producir una unidad de Z en la empresa k de la ciudad i.

A.7.
Esta función del salario monetario se ha definido, sabiendo que:
$N_i = L_Z + L_{X_i}$ siendo $L_Z = L_0(1-\gamma)^{-1}$ (ecuación (11)).

$N_i = \frac{\eta}{n}$

D. Demostraciones

D.1. *Demostración del teorema* 3

Al igualar las expresiones (17) y (21), obtenemos:

$$\frac{1}{\gamma}\zeta Z = \chi L_Z n. \tag{D.1.1}$$

Si dividimos la ecuación anterior por $Z\eta$ y sustituimos η por ζl^{-1} (expresión 23) y L_Z por $L_0 + lZ$ (ecuación (15)), obtenemos:

$$Z^0 = \frac{\gamma L_0}{l(1-\gamma)}. \tag{D.1.2}$$

Si comparamos las ecuaciones (D.1.2) y (10), concluimos que $Z^0 = Z^*$. □

D.2. *Demostración del teorema* 4

Al multiplicar la expresión (15) por $m(r)$ e integrando la ecuación resultante, obtenemos:

$$N\phi = \int_0^{r_f} \left[T(r) + \overline{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\delta}{\alpha}} z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}} \right] m(r)\, dr + \zeta Z + \int_0^{r_f} h(r) R(r) m(r)\, dr \tag{D.2.1}$$

Si sustituimos esta expresión en la función objetivo (14), obtenemos:

$$S = P_X X + \zeta Z - \phi N + \int_0^{rf} R(r) h(r) m(r) dr. \tag{D.2.2}$$

Si sustituimos $N = L_X + nL_0(1-\gamma)^{-1}$ y $\phi L_x = P_X X$ en la ecuación anterior, tenemos que:

$$S = \zeta Z - \phi n L_0 (1-\gamma)^{-1} + \int_0^{rf} R(r) h(r) m(r) dr. \tag{D.2.3}$$

Por otra parte (esta expresión se obtiene multiplicando la ecuación (23) por Z y, sustituyendo ésta por su valor óptimo Z^0, ecuación (D.1.2)) sabemos que:

$$\zeta Z=\frac{\chi n\gamma L_0}{1-\gamma}. \tag{D.2.4}$$

Si sustituimos la expresión anterior, en la función objetivo (D.2.3), tenemos:

$$S=-nL_0\phi+\int_0^{r_f} R(r)h(r)m(r)dr, \tag{D.2.5}$$

donde $\int_0^{r_f} R(r)h(r)m(r)dr$, es el diferencial de renta entre las distintas familias de la zona residencial, y $nL_0\phi$ es el coste fijo de producción de los servicios.

Como el excedente de renta S es mayor o igual a cero, concluimos que $\int_0^{r_f} R(r)h(r)m(r)dr \geq nL_0\phi$, es decir, que el diferencial de renta entre las distintas familias de la zona residencial es mayor o igual que el coste fijo de producción de los servicios. □

D.3. *Demostración del teorema* 5

A partir de las ecuaciones (15), (16) y (17) podemos derivar la función de demanda de suelo para uso residencial:

$$h\left(\bar{U},\phi-T(r),I\right)=\alpha^{-\frac{\alpha}{\beta}}\delta^{-\frac{\delta}{\beta}}\bar{U}^{\frac{1}{\beta}}I^{\frac{\delta}{\beta}}\left(\phi-T(r)\right)^{\frac{(\phi-\delta)}{\beta}} \tag{D.3.1}$$

Si sustituimos la expresión (D.3.1) en (15), tenemos:

$$\phi+\zeta m(r)=\left[T(r)+\bar{U}^{\frac{1}{\alpha}}\left(\alpha^{-\frac{\alpha}{\beta}}\delta^{-\frac{\delta}{\beta}}\bar{U}^{\frac{1}{\beta}}I^{\frac{\delta}{\beta}}\left(\phi-T(r)\right)^{\frac{(\phi-\delta)}{\beta}}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}Z^{-\frac{\delta}{\alpha}}n^{-\frac{\delta}{\gamma\times\alpha}}\right]+R_s(r) \tag{D.3.2}$$

Al integrar la expresión anterior, obtenemos:

$$\phi\left(\bar{U},N\right)=\int_0^{r_f}\phi+\zeta m(r)dr=\left[\frac{N\bar{U}^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta)t^2I^{\frac{\delta}{\beta}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}\delta^{\frac{\delta}{\beta}}2\pi\beta^2}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}} \tag{D.3.3}$$

Si sustituimos $I=(\eta l)^{\frac{\delta}{\beta}}n^{\frac{1-\delta}{\gamma\beta}}$ y $N=L^X+\dfrac{nL_0}{1-\gamma}$ en la expresión anterior, e igualando η y ϕ, conforme a las restricciones (21) y (22), obtenemos:

$$\phi(\bar{U},n,L^X)=\left[\frac{\bar{U}(1+\beta)t^2 l^{\frac{\delta}{\beta}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}\delta^{\frac{\delta}{\beta}}\,2\pi\beta^2}\left(\frac{L^X}{n^{\frac{(1-\gamma)\gamma}{\gamma\beta}}}+\frac{L_0 n^{\frac{\gamma\beta-(1-\gamma)\delta}{\gamma\beta}}}{1-\gamma}\right)\right]^{\frac{\beta}{2\beta+\alpha}} \tag{D.3.4}$$

Si comparamos el resultado anterior, con la ecuación (13), concluimos que $n^*\neq n^O$, ya que $\phi(\bar{U}, n, L^X)\neq W_\cdot(\bar{U}, n, L^X)$, para cualquier valor de $\bar{U}$ y L^X, y por tanto, el número de variedades de servicios no coincidirá con el óptimo. Recordemos que el número óptimo de servicios viene definido por el punto de intersección entre la línea de salario W_m y la curva de ingreso marginal privado W_m. □

D.4. *Demostración del teorema* 6

Sabemos que a largo plazo, el beneficio es nulo, de modo que:

$$(1+G_S)P_Z Z=W_m(L_0+lZ). \tag{D.4.1}$$

Si sustituimos G_S en la ecuación anterior, obtenemos una expresión idéntica a (D.1.1), ya que $W_\cdot=\chi$ y $P_Z=\zeta$ y, por tanto, podemos concluir que $Z^O=Z^*$ (teorema 3).[15] □

[15] Los resultados aquí obtenidos están en la línea de los alcanzados por Abdel-Raman (1987) y Abdel-Raman (1988); sin embargo, contradicen las conclusiones de Dixit y Stiglitz (1973).