Ю. Я. Агранович, Н. В. Концевая, В. Л. Хацкевич

# Сглаживание временых рядов показателей финансовых рынков на основе метода многоугольных чисел

*В работе предложен оригинальный метод расчета весовых коэффициентов для скользящего усреднения. Рассмотрены преимущества данного метода по сравнению с традиционными методами сглаживания.*

**Ключевые слова:** сглаживание, многоугольные числа, весовые коэффициенты, скользящее усреднение.

## 1. Обобщение одной задачи Маркова

Моделируя процесс скользящего усреднения, часто применяющийся в экономической статистике для сглаживания временных рядов, А. А. Марков (1910, с. 227–230), см. также (Гельфонд, 2006, с. 321–324), рассмотрел следующую задачу о предельных коэффициентах.

По заданным $k$ числам $f(0), f(1),\ldots, f(k-1)$ составляется следующая последовательность чисел

$$f(k)=\frac{f(0)+f(1)+...+f(k-1)}{k},\;\; f(k+1)=\frac{f(1)+f(2)+...+f(k)}{k} \;\text{ и т. д.} \qquad (1)$$

так, что каждый член последовательности, начиная с $k$-ого, является средним арифметическим непосредственно предшествующих ему $k$ членов этой последовательности. Иными словами, указанное рекуррентное соотношение определяет уравнение в конечных разностях вида:

$$f(x+k)=\frac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)+...+f(x+k-1)}{k}. \qquad (2)$$

Требуется найти предел

$$f_\infty=\lim_{x\to\infty} f(x)=A_0 f(0)+A_1 f(1)+...+A_{k-1} f(k-1), \qquad (3)$$

то есть предельное распределение коэффициентов при заданных начальных данных. У Маркова (1910) показано, что ответом является следующее соотношение:

$$f_\infty=\frac{1\cdot f(0)+2\cdot f(1)+3\cdot f(2)+...+k\cdot f(k-1)}{k(k+1)/2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим процесс скользящего усреднения с весовыми коэффициентами:

$$f(k)=\frac{p_1 f(0)+p_2 f(1)+p_3 f(2)+...+p_k\, f(k-1)}{p_1+p_2+...+p_k}. \tag{5}$$

Ключевую роль в данной работе играет следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть все весовые коэффициенты положительны* $p_i>0,$ *тогда предел рекуррентной последовательности* $f_\infty$ *существует и выполняется соотношение:*

$$f_\infty=\frac{p_1 f(0)+(p_1+p_2)f(1)+...+(p_1+p_2+...+p_k)\,f(k-1)}{kp_1+(k-1)p_2+...+2p_{k-1}+p_k}. \tag{6}$$

Доказательство данной теоремы основано на свойствах корней характеристического многочлена $(p_1+p_2+...+p_k)\lambda^k-p_k\lambda^{k-1}-...-p_1$, отвечающего уравнению в конечных разностях вида:

$$f(x+k)=\frac{p_1 f(x)+p_2 f(x+1)+...+p_k\, f(x+k-1)}{p_1+p_2+...+p_k}, \tag{7}$$

и следующем утверждении.

**Лемма.** *Пусть все весовые коэффициенты положительны* $p_i>0,$ *тогда все корни характеристического полинома, за исключением* $\lambda=1$*, расположены строго внутри единичного круга.*

Приведенная теорема играет ключевую роль в предлагаемом обобщении задачи Маркова. Коэффициенты в числителе (1):

1, 1, 1,…

являются арифметической прогрессией с первым членом, равным 1 и разностью $d$, равной нулю. Рассмотрим семейство всех арифметических прогрессий, содержащихся в натуральном ряде и начинающихся с числа 1:

1, 1, 1,… (8)

1, 2, 3, … (собственно натуральный ряд)

1, 3, 5, … (ряд нечетных чисел, решение сравнения $x\equiv 1 \pmod 2$)

1, 4, 7, … (решение сравнения $x\equiv 1 \pmod 3$)

1, 5, 9, … (решение сравнения $x\equiv 1 \pmod 4$)

и т. д.

Все эти прогрессии равноправны в том смысле, что любая из них может быть использована в качестве весовых коэффициентов $p_1, p_2, p_3, ...$ в скользящем соотношении (5). Решая задачу Маркова для каждой из этих последовательностей, получим следующие коэффициенты в числителе (6):

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \\
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots \\
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots \\
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, \ldots \\
1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, \ldots \\
1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, \ldots \\
1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, \ldots
\end{array}
\qquad (9)
$$

и т. д.

Из соотношения (6) и определения $m$-угольных чисел, см., например, (Эдвардс, 1980, с. 53–54), следует, что в строчках (9), начиная со второй, расположены треугольные, четырехугольные, пентагональные и т. д. числа. Общая формула $n$-го $m$-угольного числа следующая:

$$q_n^{(m)} = 2n - n^2 + m\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (10)$$

Таким образом, предельное соотношение для скользящих средних принимает вид:

$$f_\infty^{(m)} = \frac{q_1^{(m)} f(0) + q_2^{(m)} f(1) + \ldots + q_k^{(m)} f(k-1)}{M_{m,k}}, \qquad (11)$$

где

$$M_{m,k} = \sum_{i=1}^{k} q_i^{(m)} = \frac{k(k+1)}{6}[(m-2)k + 5 - m] \qquad (12)$$

есть $k$-ое пирамидальное число, соответствующее фиксированному $m$ ($m \geq 2$).

Отметим, что таблица (8) не представляет особенного интереса как средство статистической обработки временных рядов. По существу, она содержит две принципиально различные строчки: первую и вторую. Коэффициенты из первой строки обеспечивают равномерное влияние всех элементов временного ряда, коэффициенты из второй строки позволяют равномерно усиливать влияние элементов ряда.

Таблица (9) содержит $m$-угольные числа и лишена, в этом смысле, указанного недостатка. Каждая ее строка позволяет неравномерно менять влияние элементов ряда так, что более ранние элементы имеют относительно меньшее влияние, нежели более поздние, причем степень этой неравномерности регулируется целочисленным параметром $m$ ($m \geq 2$). Таким образом, в данной работе предложен инструмент обработки временного ряда, обладающий бесконечным репертуаром внутренних состояний.

## 2. Экспериментальная часть

Проиллюстрируем эффективность данного метода предварительной обработки временных рядов на следующих исторических данных: исследуем дневные прибыли валютного курса USD/CHF за период с 6 июня 1972 г. по 31 декабря 2003 г. (8 164 наблюдения, источник котировок EuroClub (http://www.fxeuroclub.ru) и Сембанк (http://www.sembank.ru)).

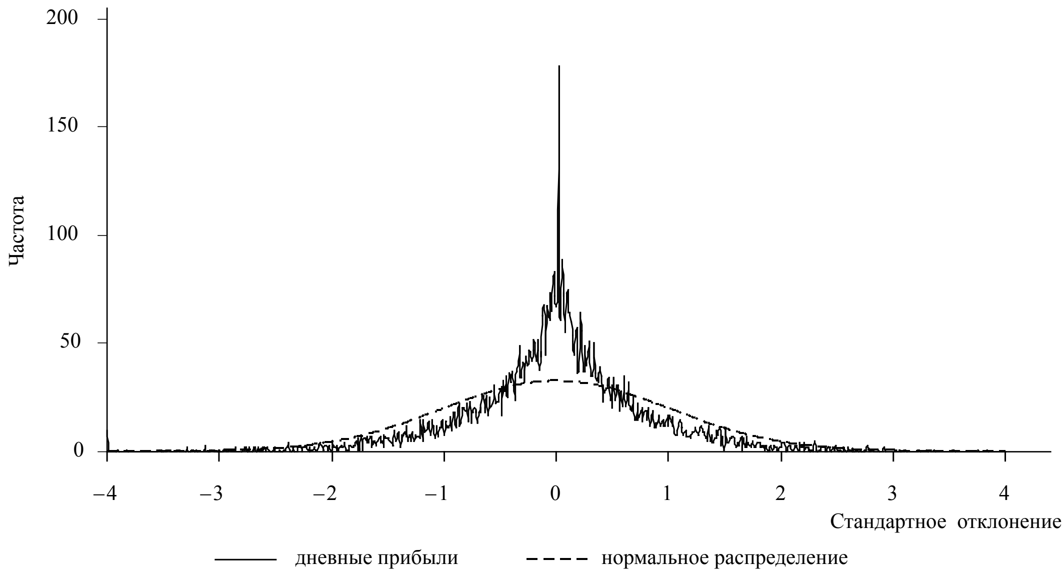


**Рис. 1.** Частотное распределение прибылей USD/CHF

На рисунке 1 представлено частотное распределение прибылей курса USD/CHF. График представляет собой логарифмическую первую разность в ценах открытия. Эти значения пронормированы, т. е. имеют нулевое среднее и единичное стандартное отклонение. На этом же графике представлено частотное распределение гауссовских случайных чисел.

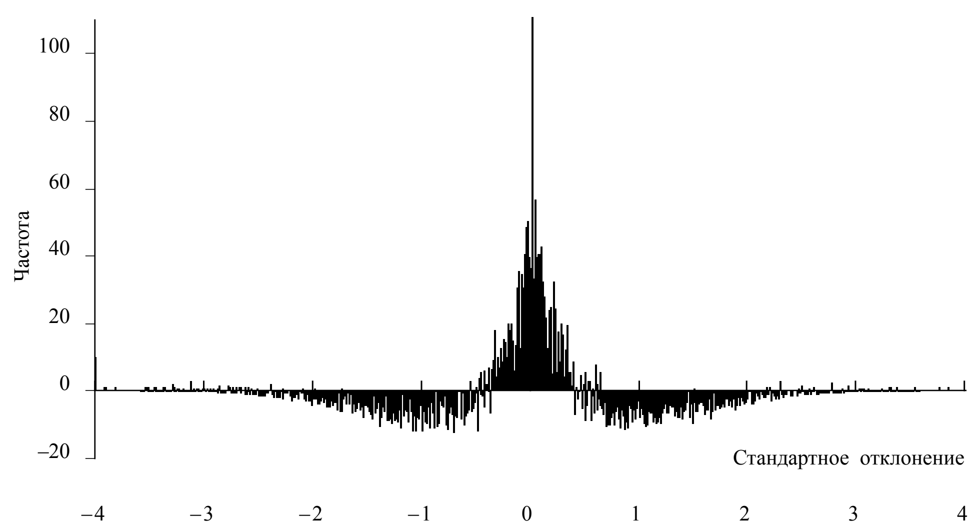


**Рис. 2.** Разности частотных распределений прибылей USD/CHF и нормального распределения

Здесь заметны высокий пик и аномальные хвосты распределения, причем вероятность возрастания курса на 1%-ный пункт оказывается в 5.6 раза выше теоретической вероятности, хотя среднее ожидаемое значение предполагает наиболее вероятным снижение курса на 1 пункт в течение дня. Рисунок 2 показывает разности ординат двух кривых на рис. 1.

Распределение дневных прибылей валютного рынка, очевидно, не подчиняется нормальному закону распределения, что предполагает существование определенных закономерностей внутри данного временного ряда. Предлагаемый авторами метод сглаживания временного ряда позволяет облегчить задачу выявления возможной ритмичности динамики исследуемых показателей.

Интервал сглаживания выбран равным 7 дням (пути оптимизации размера интервала сглаживания исследовались ранее, см., например, (Концевая, 2009)). Для такого ограниченного интервала сглаживания предлагается повторять данную процедуру в целях качественной «очистки» исходного ряда от случайных флуктуаций (для иллюстрации производимого эффекта это было проделано 100 раз, хотя для практических целей можно ограничиться и меньшим числом повторений). Заметим, что использование одной процедуры с большим интервалом и нескольких повторных процедур с малым интервалом усреднения приводят к разным результатам. Ограничивая интервал сглаживания несколькими уровнями (в нашем случае 7), при многократном повторении получаем гладкий тренд, не теряя при этом амплитуды основной динамики, в отличие от однократного усреднения по большому числу уровней.

На первом этапе вычислений использовался метод простой скользящей средней, основным недостатком которого является сильное смещение вправо расчетных сглаженных значений относительно исходных данных и уменьшение амплитуды колебаний.

На втором этапе для взвешенного скользящего усреднения были выбраны наборы удельных коэффициентов, соответствующих верхней и нижней строкам в (9). Процедура сглаживания временного ряда последовательно повторялась (100 раз) для максимальной очистки исходного временного ряда от незначительных возмущений. Введение весовых коэффициентов позволило придать больший удельный вес уровням, близким к тому, для которого вычислялось сглаженное значение, и меньшие веса уровням, по мере их удаления от сглаживаемого.

Ниже приведены результаты сглаживания на всем интервале наблюдений. На рисунке 3 представлены графики вариантов сглаживания с различными наборами коэффициентов — с единичными коэффициентами (усреднение без весов), равномерно изменяющимися весами (первая строка в (9)) и неравномерными весами (последняя строка в (9)):

Рисунок 3 демонстрирует очевидную практическую пользу предлагаемого метода расчета весовых коэффициентов. Более качественное выравнивание временного ряда и небольшое удаление сглаженных значений от исходных обеспечивает в совокупности базу для последующего моделирования и прогнозирования динамики исследуемого показателя. Результаты проведенного исследования показывают пользу предложенного авторами метода расчета весовых коэффициентов, который позволяет приблизить сглаженные значения к исходным, не уменьшая при этом полезность всей процедуры, позволяющей исключить из исходного ряда незначительные колебания без потери периодов роста и спада.

Данная процедура сглаживания является универсальной, сглаживания по другим валютным парам дают аналогичные результаты и здесь не приводятся.

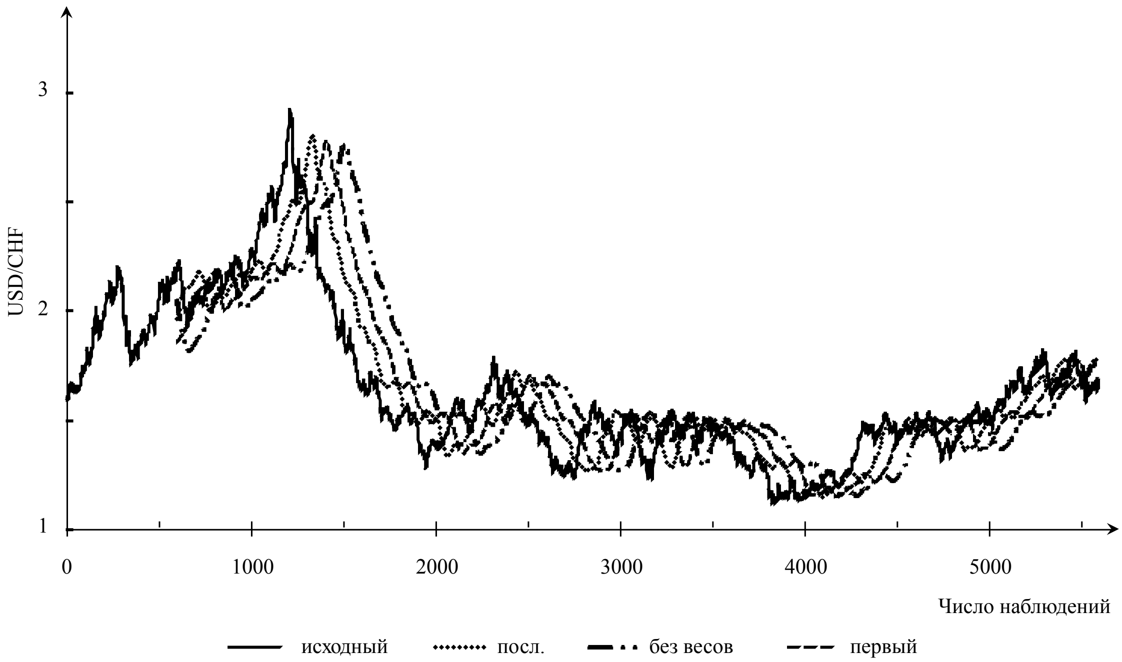


**Рис. 3.** Результаты 100-кратного сглаживания по методу простой (без весов) и взвешенной (первый и последний набор весов из табл. (9)) скользящей средней

## 3. Заключение

Методы моделирования, разработанные авторами, предполагают поэтапную комбинацию процедур, позволяющих более четко оценивать и выявлять возможные закономерности и ритмичность в исследуемых динамических рядах. При выявлении в результате сглаживания объективных закономерностей информация о них может быть использована во многих областях: при обосновании управленческих решений, при планировании на микро- и макроэкономических уровнях, при оценке возможных инвестиций.

## Список литературы

Гельфонд А. О. (2006). *Исчисление конечных разностей*. М.: URSS.

Концевая Н. В. (2009). О моделировании показателей валютного рынка и возможностях оптимизации моделей. *Аудит и финансовый анализ*, 1, 74–80.

Марков А. А. (1910). *Исчисление конечных разностей.* Одесса: MATHESIS.

Эдвардс Г. (1980). *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел.* М.: Мир.