

*Ensayos–Volumen XXVII, núm.2, noviembre 2008, pp. 29-48*

## **Varianza condicional de medias móviles no-lineales**

Daniel Ventosa-Santaulària\*  
Alfonso Mendoza Velázquez♦  
Manuel Gómez-Zaldívar\*

Fecha de Recepción: 21 I 2008; Fecha de aceptación 24 IX 2008

### **Abstract**

We present a new heteroskedastic conditional variance model using Non-Linear Moving Average as the basis for this specification [ *NLMACH*( $q$ ) ]. The typical problem of this class of models—i.e., non-invertibility—is solved by means of an intuitive parametric restriction; this allows us to use Maximum Likelihood as the estimation procedure. The statistical properties of the new model are both simple and attractive for empirical purposes in finance: a natural fat-tailed distribution stands out. The Autocorrelation Function of the squared process allows us for identification of the number of lags to be included in the new specification. In addition, we present several Monte Carlo experiments where the properties of the model using finite samples are exhibited. Finally, an empirical application using exchange rates and capital market bonds is shown.

**Keywords:** *Conditionally Heteroskedastic Models, NLMACH*( $q$ ), *Volatility, Fat-tailed Distributions.*

### **Resumen**

Presentamos en este trabajo un nuevo modelo para la varianza condicional, que está fundamentado en medias móviles no-lineales [ *NLMACH*( $q$ ) ]. Mediante una restricción sencilla, se evita el típico problema de no-invertibilidad que aqueja a esta clase de procesos; esto facilita su estimación por Máxima Verosimilitud. Las propiedades estadísticas del nuevo modelo

---

\* Escuela de Economía Universidad de Guanajuato. E-mails:

[daniel@ventosa-santaularia.com](mailto:daniel@ventosa-santaularia.com) y [manuel.gomez@ugto.org](mailto:manuel.gomez@ugto.org), respectivamente.

♦ Departamento de Economía y Centro de Investigación e Inteligencia Económica (CIE), Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla. E-mail: [alfonso.mendoza@upaep.mx](mailto:alfonso.mendoza@upaep.mx)

son simples y a la vez atractivas para el ajuste de series financieras, como sucede con la reproducción natural de colas pesadas. Se desarrolla la función de autocorrelación del proceso al cuadrado, lo que permite identificar con precisión el número de rezagos que serán incluidos en la especificación. Además, se presentan diversos experimentos de Monte Carlo que muestran las propiedades estadísticas del modelo, en muestras finitas. Se concluye el estudio con una aplicación del  $NLMACH(q)$  a tipos de cambio y bonos del mercado de capitales mexicano.

**Palabras Clave:** *Modelos de Varianza Condicional,  $NLMACH(q)$ , Volatilidad, Colas Pesadas.*

**Clasificación JEL:** *C12, C13, C22.*

### **Introducción**

Los modelos  $ARCH$ , introducidos exitosamente por el trabajo seminal de Engle (1982), se han convertido en una de las herramientas de estudio más dinámicas y populares de la econometría aplicada. En los últimos 26 años surgió una gran cantidad de extensiones, las cuales incorporan al modelo básico propiedades estadísticas capaces de captar algunas de las regularidades de los rendimientos financieros. Destaca el modelo  $GARCH$  (Bollerslev 1986), que generaliza el comportamiento de la volatilidad al hacerla dependiente de su propia inercia. Otras variaciones importantes son las que toman en cuenta el impacto de la volatilidad en la esperanza condicional de la variable,  $ARCH-M$  (Engle, Lilien y Robins 1987), aquellas capaces de reproducir los efectos asimétricos de los choques según su signo, como en el modelo  $EGARCH$  (Nelson 1991) y las que intentan capturar la alta persistencia o memoria larga, que está presente en distintas series económicas y financieras (Bollerslev y Mikkelsen 1996).

Toda extensión de un modelo base conlleva necesariamente un grado de complejidad mayor no siempre justificado; las especificaciones más recientes que parecen mejorar sólo marginalmente el ajuste y los pronósticos fuera de muestra, pueden exigir a cambio estimaciones costosas en programación y tiempo. De ahí deriva la “popularidad” del modelo  $GARCH(1,1)$ ; su estimación es sencilla y, tanto en el ajuste como en las predicciones, es comparable con las de modelos más complejos.

Hasta ahora, han dominado las especificaciones autorregresivas en el ajuste de la varianza condicional. Su contraparte de medias móviles ha sido virtualmente ignorada. En ese sentido, Robinson (1977) propuso un modelo de medias móviles no-lineales ( $NLMA$ , por sus siglas en inglés) basado en

una expansión de Volterra truncada. Dicha propuesta no tuvo mucho eco, pues no sólo no aparecieron aplicaciones sino que además existían problemas de invertibilidad y sobre todo, porque resultaba extremadamente difícil de estimar. La aplicación empírica de los modelos *NLMA* ha sido, de hecho, limitada (Tong, 1990; Guégan, 1994; Granger, 1998).

Este trabajo propone el uso y extensión de los modelos *NLMA* en el campo de las Varianzas Condicionales, con objeto de mostrar el potencial de éstos. En lo particular, proponemos una nueva especificación que denominamos Modelo de Varianza Condicional Heteroscedástica y No Lineal de Medias Móviles (*NLMACH*, por sus siglas en inglés). A diferencia de las propuestas autorregresivas, el *NLMACH* condiciona el comportamiento de la varianza a los shocks no observados -pero reconstruibles- que se dan en la serie. Si surge un evento impredecible, éste tendría consecuencias sobre las realizaciones futuras inmediatas de la serie. El proceso es análogo al que dictan los modelos de la clase *ARCH*, sólo que el mecanismo de transmisión no radica en el comportamiento pasado de la serie observada, sino en el de una serie subyacente inobservada, pero reconstruible. Cabe señalar que es posible evitar las dificultades de invertibilidad encontradas por Robinson (1977), mediante la imposición de una restricción en los parámetros, que coincidentemente funge también con la condición de positividad de la varianza condicional.

La nueva especificación incorpora de manera natural características comúnmente encontradas en series financieras, entre éstas destacan: (i) alta frecuencia de grandes variaciones (picos de varianza); (ii) tendencia al agrupamiento (“clustering”) de las grandes desviaciones y, (iii) leptocurticidad de la distribución de la serie. Esta última es quizá una de las ventajas más atractivas de nuestra propuesta, debido a que se ha reportado incansablemente en la literatura la existencia de colas anchas en rendimientos financieros. Otra ventaja, en comparación con especificaciones autorregresivas, es (iv) la existencia de condiciones de estacionariedad mucho más laxas.

Mediante experimentos de Monte Carlo, se muestra que el proceso de estimación del *NLMACH* arroja resultados adecuados con muestras de tamaño relativamente chico (< 500 obs.); y, más importante, nuestra propuesta parece capturar un tipo de volatilidad intrínsecamente distinta a la de los modelos autorregresivos, lo que la posiciona favorablemente como una alternativa viable, cuando las especificaciones clásicas resultan inadecuadas. Finalmente, con el fin de evaluar el desempeño empírico de nuestro modelo, se hace competir al *NLMACH* contra especificaciones *ARCH*, *ARCH* -*t* y *GARCH*(1,1) usando datos de tipo de cambio y bonos del mercado de capitales.

**1. Especificación  $NLMACH(q)$** 

El nuevo modelo propuesto,  $NLMACH(q)$ , condiciona la varianza a un proceso de medias móviles usando un ruido inobservado, pero reconstruible,  $V_t$ . Conviene destacar que dicha especificación no puede ser anidada en el modelo de Robinson (1977), el cual posee algunas características indeseables, en particular la no-invertibilidad y dificultades de estimación (Granger y Andersen, 1978; Granger, 1998). Un  $NLMACH(q)$  se representa, como sigue:

$$X_t = V_t h_t^{1/2} \quad (1)$$

$$h_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2$$

donde  $V_t \sim i.i.d. N(0,1)$  y  $\delta_i \geq 0$  para  $i=1, \dots, q$  con al menos un  $\delta_i$  estrictamente mayor que cero, con  $i=1, 2, \dots, q$ .<sup>1</sup>

La ecuación (1) hace evidentes las similitudes con un  $ARCH(1)$ . No obstante, la variable que explica el comportamiento de la varianza condicional no es  $X_{t-i}^2$  sino más bien  $V_{t-i}^2$ . Los parámetros deben satisfacer una condición (todos deben ser mayores o iguales a cero y al menos uno estrictamente mayor a cero), para asegurar que la varianza condicional sea positiva. Muchas de sus propiedades estadísticas se pueden inferir fácilmente. Por ejemplo, los primeros dos momentos -tanto condicionales como incondicionales- de un  $NLMACH(q)$ , son:

$$E(X_t) = 0$$

$$E(X_t X_{t-j}) = \begin{cases} \sum_{i=0}^q \delta_i & \text{para } j=0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2)$$

$$E(X_t / \Psi_{t-1}) = 0$$

$$E(X_t^2 / \Psi_{t-1}) = \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2$$

Donde  $\Psi_{t-1} = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_0, V_{t-1}, V_{t-2}, \dots, V_0\}$  es el conjunto de información disponible hasta el período  $t-1$ .

---

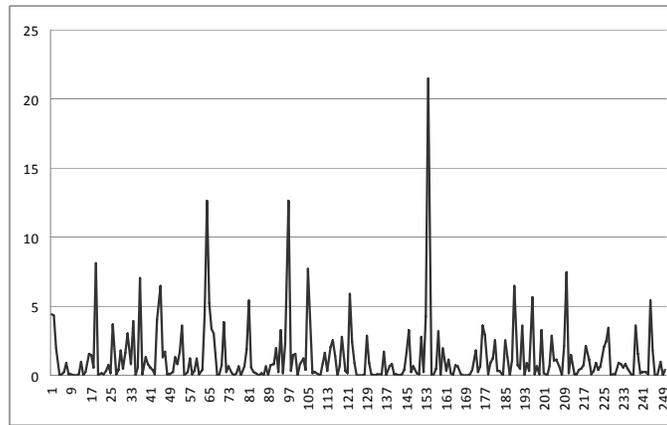
<sup>1</sup> Son éstas las condiciones de estacionariedad débil. La normalidad del ruido, de hecho, es prescindible.

La ecuación (2) muestra que el  $NLMACH(q)$  es débilmente estacionario. Contrariamente a otras especificaciones, existen menos condiciones para la existencia de los momentos de segundo orden.<sup>2</sup> Es importante resaltar que el  $NLMACH(q)$  ofrece implícitamente una distribución con colas pesadas. Su grado de curtosis es superior a tres, siempre y cuando  $\delta_i, i = 1, 2, \dots, q$ , sea mayor o igual a cero con al menos un  $\delta_i$  estrictamente mayor que cero:

$$K = \frac{E(X_t^4)}{\sigma^4} = \frac{3\left[\delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i\right]^2 + 2\sum_{i=1}^q \delta_i^2}{\left(\delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i\right)^2} > 3 \tag{3}$$

La figura (1) muestra una simulación de dicho proceso ( $q = 1$ ).

Figura 1:  $NLMACH(1)$  Simulación:  $h_t = 1 + 0.7V_{t-1}^2$



La estacionariedad en sentido estricto del proceso  $NLMACH(q)$  no requiere condiciones adicionales. La existencia de todos los momentos está asegurada, bajo las ya mencionadas.

**Teorema 1.** Sea  $X_t$  un proceso  $NLMACH(q)$ ,  $q = 1, 2, \dots < \infty$ , que satisfaga la ecuación (1). Entonces, todos los momentos de  $X_t$ ,  $E(X_t^r)$   $\forall r = 1, 2, \dots$ , existen.

<sup>2</sup> No obstante, no hay que olvidar las hipótesis hechas sobre  $V_t$ , así como, tampoco la condición de positividad de los parámetros.

**Prueba:** ver apéndice.

### 1.1. Invertibilidad del proceso NLMACH(q)

La invertibilidad ha sido siempre el punto débil de las medias móviles, tanto lineales como no-lineales. Prueba de la invertibilidad del proceso propuesta es que éste sí permite reconstruir el ruido blanco no observado, tal y como lo señala Granger y Terasvirta (1993).

Por otra parte, las condiciones que aseguran la invertibilidad de un proceso  $MA(q)$  han sido establecidas en la literatura desde hace mucho tiempo. Manipulando la expresión del  $NLMACH(q)$ , se pueden establecer condiciones análogas. Partiendo de la expresión de la varianza condicional establecida en el teorema (1), podemos escribir:

$$\begin{aligned} h_t &= \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i (V_{t-i}^2 - 1) + \sum_{i=1}^q \delta_i \\ &= \zeta + \sum_{i=1}^q \delta_i W_{t-i} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\zeta = \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i$  es una constante y  $W_t = V_{t-i}^2 - 1$  es un ruido no-gaussiano tal que:

$$\begin{aligned} E(W_t) &= 0 \\ E(W_t W_{t-j}) &= \begin{cases} 2 & \text{para } j=0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

La varianza condicional,  $h_t$ , puede ser reinterpretada como un  $MA(q)$  no gaussiano, por lo que las condiciones de invertibilidad estándar aplican al caso. Esto implica que el proceso  $NLMACH(q)$  es invertible si las raíces del polinomio  $(1 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots + \delta_q z^q) = 0$  están fuera del círculo unitario.

### 1.2 Definiendo el valor de $q$ en un NLMACH(q)

Estimar un  $NLMACH(q)$  donde  $q > 1$  requiere seleccionar el número adecuado de rezagos del ruido incluidos en la especificación. De hecho, el orden de un  $NLMACH(q)$  puede ser identificado mediante la función muestral de la autocorrelación cuadrática (QSAcF, por sus siglas en inglés). Las propiedades estructurales del modelo son tales que el verdadero valor de

$q$  se refleja en la QSACF. Sin duda existen otros medios de identificar el valor de  $q$ ; pero, en este estudio, nos concentramos en la QSACF, por su simpleza.

La forma teórica de la función de autocorrelación cuadrática (QACF) es fácilmente calculable: sea  $x_t$  un proceso  $NLMACH(q)$ , donde  $q = 1, 2, \dots$  especificado en la expresión (1); su QACF es:

$$\rho(x_t^2, x_{t-j}^2) = \begin{cases} \frac{\delta_j \sum_{i=0}^q \delta_i + \sum_{i=j+1}^q \delta_i \delta_{i-j}}{\delta_0^2 + 2\delta_0 \sum_{i=1}^q \delta_i + \left(\sum_{i=1}^q \delta_i\right)^2 + 3\sum_{i=1}^q \delta_i^2} & \text{para } j < q \\ \frac{\delta_q \left(\delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i\right)}{\left(\delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i\right)^2 + 3\sum_{i=1}^q \delta_i^2} & \text{si } j = q \\ 0 & \forall j > q \end{cases} \quad (6)$$

Cabe destacar que la QACF es suficientemente flexible como para proponer estructuras similares a las que sugieren las regularidades empíricas en finanzas. No obstante, ello exigiría un número importante de rezagos ( $q$  grande), puesto que dichas regularidades indican una memoria “no tan” corta. Existe la posibilidad de generalizar el  $NLMACH(q)$  incluyendo rezagos de  $h_t$ . Esta idea, aunque prometedora, no es estudiada en el presente artículo, debido a que se está trabajando actualmente en ello.

## 2. Estimación de un $NLMACH(q)$

Ahora que se han presentado ya las propiedades estadísticas principales del modelo, conviene presentar evidencia inherente a la estimación. En particular, se investiga la capacidad estadística de la estimación y la capacidad predictiva del modelo. Para esto, se simula en primer término un  $NLMACH(1)$  y se maximiza su función de verosimilitud, mediante un algoritmo numérico. Se ilustra el hecho de que la estimación, pese a tratarse de una función no lineal, es simple y eficaz. La estimación por Máxima Verosimilitud (MV) es sencilla, puesto que aprovecha la normalidad condicional de la varianza:  $N(0, h_t^{1/2})$ ;  $X_t / \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t^{1/2})$ . Bajo condiciones estándar de regularidad, se puede evaluar la función de log-verosimilitud y optimizarla usando un algoritmo de gradiente.

Ilustramos la capacidad de estimación por MV mediante un experimento de Monte Carlo. La tabla (1) muestra los resultados de la estimación usando Procesos Generadores de Datos (DGP, por sus siglas en inglés), con distintos

valores de parámetros.<sup>3</sup> Se calculan 1,000 réplicas para cada caso, y se transcribe el promedio de cada estimador así como su desviación estándar entre paréntesis.

Tabla 1: **Simulación de Monte Carlo: estimadores de  $NLMACH(1)$ ;**  
 $T=\{200, 500, 700\}$

Parámetros		Tamaño de muestra					
$\delta_0$	$\delta_1$	T=200		T=500		T=700	
		$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$
0.03	0.005	0.0297 (0.0039)	0.0052 (0.0034)	0.0300 (0.0023)	0.0049 (0.0023)	0.0300 (0.0022)	0.0050 (0.0020)
	0.010	0.0300 (0.0044)	0.0100 (0.0051)	0.0300 (0.0028)	0.0099 (0.0030)	0.0301 (0.0023)	0.0099 (0.0025)
	0.020	0.0299 (0.0046)	0.0200 (0.0072)	0.300 (0.029)	0.0199 (0.0044)	0.0300 (0.0024)	0.0200 (0.0038)
0.06	0.005	0.0593 (0.0074)	0.0056 (0.0051)	0.0600 (0.0049)	0.0051 (0.0033)	0.0599 (0.0041)	0.0050 (0.0029)
	0.010	0.0605 (0.0080)	0.0099 (0.0069)	0.0602 (0.050)	0.0097 (0.0044)	0.0601 (0.0045)	0.0101 (0.0038)
	0.020	0.0600 (0.0086)	0.0197 (0.0097)	0.0600 (0.0056)	0.0201 (0.0059)	0.0601 (0.0046)	0.0199 (0.0049)
0.09	0.005	0.0890 (0.0106)	0.0064 (0.0066)	0.0893 (0.0069)	0.0055 (0.0044)	0.0899 (0.0062)	0.0052 (0.0038)
	0.010	0.0897 (0.0114)	0.0106 (0.0086)	0.0905 (0.0076)	0.0097 (0.0057)	0.0901 (0.0062)	0.0100 (0.0049)
	0.020	0.0902 (0.0123)	0.0199 (0.0117)	0.0905 (0.0079)	0.0195 (0.0072)	0.0900 (0.0065)	0.0198 (0.0063)

El experimento revela que, usando un algoritmo quasi-newton estándar se obtiene una estimación consistente de los parámetros del  $NLMACH(1)$ . No sólo los estimadores son muy cercanos (en promedio) al verdadero valor de los parámetros, sino que también, conforme aumenta el tamaño de muestra, su varianza disminuye.

No hace falta mencionar, la gran diversidad de modelos de varianza condicional que hoy se conoce; resulta por ende fundamental comparar la propuesta de este artículo con otras especificaciones empleadas en los estudios empíricos. Estudiar esto último puede ser logrado nuevamente mediante experimentos de Monte Carlo. Para lograr los fines comparativos que se persiguen, el Monte Carlo incluye especificaciones de varianza condicional muy socorridas,  $ARCH(1)$ ,  $GARCH(1,1)$ ,  $ARCH-t(1)$ . Se simulan los cuatro procesos y se estiman a su vez las cuatro especificaciones.

<sup>3</sup> Los parámetros escogidos para simular el proceso  $NLMACH(1)$  son cercanos a los obtenidos en la aplicación empírica de la sección siguiente. También se efectuaron estimaciones de un  $NLMACH(2)$  con datos que corresponden a dicho proceso. Los resultados son similares y por razones de espacio se decidió no incluir estos resultados, aunque están disponibles mediante solicitud a los autores.

Existen entonces cuatro estimaciones basadas en una especificación correcta y doce estimaciones basadas en una especificación incorrecta (estimar un  $NLMACH(1)$  sobre una serie generada mediante un  $GARCH(1,1)$ , por ejemplo). En todos los casos se reportan dos criterios de selección de especificación, el de Akaike (AIC) y el Bayesiano (BIC) así como la log-verosimilitud maximizada. Este ejercicio se realiza para tres tamaños de muestra distintos,  $T = 200$ ,  $T = 500$  y  $T = 700$ . El experimento se repite 10,000 veces y, con base en las replicaciones, se promedian los cálculos antes mencionados. Las tablas (2a), (2b) y (2c) resumen los resultados obtenidos (la especificación estimada que optimiza cada criterio, muestra realizado en negro el valor numérico correspondiente).

Tabla 2a: Simulación y estimación de los procesos  $NLMACH(1)$ ,  $ARCH(1)$ ,  $GARCH(1,1)$  y  $ARCH-t(1)$

Mod. Estimado		Tamaño de Muestra, T=200			
		NLMACH	ARCH	GARCH	ARCH-t
DGP	AIC	<b>-722.93</b>	153.47	155.00	142.51
	BIC	<b>-716.35</b>	160.06	164.88	152.39
	Log-Ver.	<b>-243.59</b>	-254.56	-254.58	-253.13
ARCH	AIC	-248.20	<b>-364.22</b>	-308.04	-361.30
	BIC	-241.61	<b>-357.63</b>	-298.16	-351.42
	Log-Ver	-376.81	-376.53	<b>-376.31</b>	-376.35
GARCH	AIC	-95.09	-87.52	<b>-130.77</b>	-85.25
	BIC	-88.50	-80.93	<b>-120.89</b>	-75.37
	Log-Ver	-427.76	-427.23	<b>-426.57</b>	-427.05
ARCH-t	AIC	219.23	-209.33	-173.63	<b>-240.90</b>
	BIC	225.82	-202.75	-163.75	<b>-231.02</b>
	Log-Ver	-364.73	-364.59	-364.28	<b>-356.42</b>

Tabla 2b: Simulación y estimación de los procesos NLMACH(1), ARCH(1), GARCH(1,1) y ARCH-t(1)

Tamaño de Muestra, T=500					
DGP	Mod. Estimado	NLMACH	ARCH	GARCH	ARCH-t
NLMACH	AIC	<b>-2241.2</b>	498.0	500.5	462.6
	BIC	<b>-2232.8</b>	506.5	513.2	475.2
	Log-Ver	<b>-611.85</b>	-639.61	-639.60	-636.34
ARCH	AIC	-752.5	<b>-1413.2</b>	-1274.0	-1407.4
	BIC	-744.1	<b>-1404.7</b>	-1261.3	-1394.7
	Log-Ver	-946.41	-945.59	<b>-945.36</b>	-945.41
GARCH	AIC	-318.55	-453.80	<b>-721.66</b>	-450.17
	BIC	-310.12	-445.38	<b>-709.02</b>	-437.53
	Log-Ver	-1074.6	-1073.5	<b>-1072.0</b>	-1073.3
ARCH-t	AIC	-555.6	-830.7	-743.5	<b>-1014.5</b>
	BIC	-564.0	-822.3	-730.8	<b>-1001.8</b>
	Log-Ver	-916.52	-916.22	-915.70	<b>-864.19</b>

Tabla 2c: Simulación y estimación de los procesos NLMACH(1), ARCH(1), GARCH(1,1) y ARCH-t(1)

Tamaño de Muestra, T=700					
DGP	Mod. Estimado	NLMACH	ARCH	GARCH	ARCH-t
NLMACH	AIC	<b>-3373.4</b>	732.5	733.0	677.8
	BIC	<b>-3364.3</b>	741.6	746.6	691.5
	Log-Ver	<b>-857.88</b>	-897.01	-897.02	-892.68
ARCH	AIC	-1101.2	<b>-2175.2</b>	-1996.2	-2164.2
	BIC	-1092.1	<b>-2166.1</b>	-1982.5	-2150.6
	Log-Ver	-1325.1	-1323.9	-1323.7	<b>-1323.6</b>
GARCH	AIC	-462.0	-707.2	<b>-1216.2</b>	-705.2
	BIC	-452.9	-698.1	<b>-1202.6</b>	-691.6
	Log-Ver	-1506.1	-1504.6	<b>-1502.6</b>	-1504.3
ARCH-t	AIC	-788.3	-1406.6	-1230.2	<b>-1596.9</b>
	BIC	-797.4	-1397.5	-1216.6	<b>-1583.3</b>
	Log-Ver	-1284.8	-1284.2	-1283.6	<b>-1254.0</b>

Como sería de esperarse, el ajuste de las especificaciones es mejor lógicamente cuando el DGP de base corresponde a su propia especificación. Lo anterior queda manifiesto al estudiar los criterios de selección de especificaciones. De forma interesante, se muestra que tales criterios (tanto el AIC y el BIC) cumplen adecuadamente esta función. Con base en ellos y de acuerdo a este experimento de Monte Carlo, es posible escoger la

especificación que corresponde al proceso que generó los datos. Lo anterior es cierto para todos los tamaños de muestra estudiados.

Por otra parte, la log-verosimilitud no proporciona muchos elementos para distinguir entre especificaciones. Sólo en el caso de los datos generados con base en un  $NLMACH(1)$  así como en un  $ARCH-t(1)$  es posible ver una diferencia considerable en la log-verosimilitud maximizada; dicha diferencia se mantiene en todos los tamaños de muestra estudiados. Ello indica que sería factible distinguir dichas especificaciones del  $ARCH(1)$  así como del  $GARCH(1,1)$ , pero no a la inversa. En otras palabras, con base en este criterio, y siendo los datos generados por un  $ARCH(1)$  o bien por un  $GARCH(1,1)$ , no podrían distinguirse las estimaciones de éstos, de las de un  $NLMACH(1)$  o un  $ARCH-t(1)$ . Este patrón no parece cambiar conforme aumenta el tamaño de la muestra.

Todo esto deja intuir que la utilización del  $NLMACH$  podría revelarse útil para aplicaciones empíricas.<sup>4</sup> Los resultados de este experimento de Monte Carlo permiten pensar que el tipo de volatilidad condicional, capturado por el modelo propuesto, posee una naturaleza distinta a la de los modelos autorregresivos. Esto queda manifiesto específicamente en lo que indican los criterios de selección de modelos, el AIC y el BIC.

### 3. Ejercicio empírico: tipos de cambio y certificados bursátiles

Para poder evaluar el desempeño del  $NLMACH(1)$  con datos empíricos utilizamos información del mercado de divisas internacional y datos sobre las emisiones bursátiles de algunas entidades federativas en México. Se estima el  $NLMACH(1)$ , debido a la propiedad que tienen para generar colas pesadas de manera natural, y se compara con diversas propuestas: un  $ARCH(1)$ , un  $ARCH(1)$  con ruido extraído de una distribución  $t$  [ $ARCH-t(1)$ ] y con el modelo más popular, en esta clase: el modelo  $GARCH(1,1)$  de Bollerslev (1986). Los datos para el tipo de cambio corresponden a ocho monedas duras, y su rendimiento logarítmico diario va desde el 2 enero de 1991 hasta el 29 de diciembre de 1995.<sup>5</sup> Los rendimientos se calculan aplicando la primera diferencia del logaritmo de las cotizaciones spot (1,303 observaciones para cada moneda). En particular, las monedas estudiadas son el dólar australiano (AUS), la libra esterlina (GBR), el dólar canadiense (CAN), el florín holandés (NLG), el franco francés

<sup>4</sup> Es importante señalar que lo anterior se infiere de un experimento de Monte Carlo. No tiene carácter definitivo sino que arroja evidencia sobre un caso particular.

<sup>5</sup> Tales series han sido exhaustivamente estudiadas por Franses and Van Dijk (2000) para el período que se indica, y pueden encontrarse en la página de web del autor.

(FRA), el marco alemán (DEU), el yen japonés (JPY) y el franco suizo (CHF). En lo que concierne a los certificados bursátiles (CBs) se usan muestras provistas por la Bolsa Mexicana de Valores, para distintos emisores en varios periodos. Para el cálculo de los rendimientos logarítmicos diarios se usan los CBs, emitidos por: el estado de Chihuahua en el año 2002 (CHIHCB02), el Chihuahua ‘udizado’ (CHIHCB02U), el estado de Hidalgo serie 1 y 2 de 2003 (EDOHGO03 y EDOHGO032, respectivamente), el estado de Sinaloa (EDOSIN04U) y el gobierno del Distrito Federal en el año 2003 (GDFCB03). La tabla (3) muestra la estadística descriptiva de estas series:

**Tabla 3: Estadística Descriptiva: Tipo de Cambio y Certificados Bursátiles**

	Media	Mediana	Dev. Est.	Mínimo	Máximo	Curtosis	Obs.
Tipos de Cambio							
AUS	0.001300	-0.011700	0.199700	-0.695400	0.852700	1.681100	1302
GBR	0.007500	-0.007900	0.290600	-1.254800	1.427100	2.550600	1302
CAN	0.005500	0.003300	0.121300	-0.704000	0.591100	2.762700	1302
NLG	-0.001600	-0.008300	0.317900	-1.258100	1.306000	1.617300	1302
FRA	-0.001200	-0.001900	0.300400	-1.173400	1.151900	1.676100	1302
DEU	-0.001300	-0.011500	0.319000	-1.257800	1.347600	1.686500	1302
JPY	-0.008800	-0.008700	0.282800	-1.472700	1.401400	3.376100	1302
CHF	-0.003000	0.000000	0.347000	-1.693300	1.351700	1.581700	1302
<b>Certificados Bursátiles<sup>b</sup></b>							
CHIHCB02	0.000032	0.000043	0.001367	-0.016192	0.023090	125.7145	969
CHIHCB2U	0.000031	0.000043	0.001190	-0.016192	0.009627	78.9173	969
EDOHGO03	0.000011	-0.000004	0.000206	-0.001032	0.003653	139.3142	767
EDOHGO032	0.000009	-0.000002	0.000214	-0.000231	0.005597	615.0892	767
EDOSIN04U	0.000075	0.000081	0.000895	-0.008464	0.003847	17.4581	697
GDFCB03	0.000004	-0.000004	0.000110	-0.000751	0.000951	15.0229	728

<sup>a</sup>Dólar Australiano (AUS); Libra Esterlina (GBR), Dólar Canadiense (CAN), Florín Holandés (NLG), Franco Francés (FRA), Marco Alemán (DM), Yen Japonés (JPY) y Franco Suizo (CHF). <sup>b</sup>Certificados Bursátiles emitidos por Chihuahua en el año 2002 (CHIHCB02), Chihuahua “udizado” (CHIHCB02U), Estado de Hidalgo, serie 1 y 2 de 2003 (EDOHGO03 y EDOHGO032 respectivamente), Estado de Sinaloa (EDOSIN04U) y Gobierno del Distrito Federal en el año 2003 (GDFCB03).

Una de las características de interés derivadas de esta tabla es que las series de tiempo correspondientes a los certificados bursátiles, en contraste con los tipos de cambio, muestran una curtosis muy alta. Ello sugiere que la distribución de los rendimientos de estos bonos exhibe colas pesadas.

Un primer ejercicio de estimación se presenta en las tablas (4) y (5) siguientes, donde se examina el caso de los tipos de cambio. Se estudiaron distintos órdenes para cada proceso de acuerdo al Criterio de Información de

Akaike (AIC) y al Criterio de Información Bayesiana (BIC). Sin embargo el  $NLMACH(1)$  fue preferido en la mayoría de las aplicaciones, con el fin último de capturar la propiedad de colas anchas que se derivan del  $NLMACH(1)$  y de mantener la consistencia con el ejercicio de simulación (ver sección 2 y 3, respectivamente). El algoritmo de optimización empleado es BFGS<sup>6</sup> y el código de programación está escrito en RATS. Usando errores estándar robustos se observa que, con la excepción de la constante, todos los demás parámetros son altamente significativos. No obstante la baja curtosis en los tipos de cambio, es curioso observar que el parámetro de forma resulta significativo y mayor a tres, capturando el fenómeno de colas pesadas reportado en otras secciones.

Este primer ejercicio considera la totalidad de las observaciones y compara el  $NLMACH(1)$  con el  $ARCH(1)$ , el  $ARCH(1)-t$  y el  $GARCH(1,1)$ . Los criterios AIC y BIC proveen evidencia mixta. Es decir, de acuerdo con dichos criterios, el  $NLMACH(1)$  tiene un mejor ajuste que el  $ARCH(1)$  para el franco suizo, el yen japonés, el dólar canadiense y la libra esterlina. Cuando se comparan el  $NLMACH(1)$  y el  $GARCH(1,1)$ , entonces, de acuerdo con el AIC y el BIC, el  $NLMACH(1)$  se prefiere en todos los casos.

---

<sup>6</sup> BFGS corresponde al método de optimización desarrollado por Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno en distintos trabajos; algoritmo quasi-newton estándar, consistente con el empleado en las simulaciones.

Tabla 4: Ajuste del modelo para el Florín Holandés (NLG), Franco Suizo (CHF), Franco Francés (FRA) y Marco Alemán (DEU)

	JPY			CAN			GBR			AUS							
	NLMACH	ARCH	GARCH	NLMACH	ARCH	GARCH	NLMACH	ARCH	GARCH	NLMACH	ARCH	GARCH	ARCH <sub>4</sub>				
Coeficientes estimados																	
C	-0.0065	-0.0062	-0.0098	-0.0046	-0.0059	0.0059	0.0025	0.0029	0.0026	0.002	0.002	-0.0015	-0.0041	-0.0003	-0.0001	-0.0011	-0.0061
$\delta_0$	(0.0073) <sup>a</sup>	-0.0076	-0.008	-0.0065	-0.0032	-0.00310	-0.0032	-0.0029	(0.0078) <sup>b</sup>	-0.0076	0.0672 <sup>*</sup>	-0.0069	-0.0066	-0.005	-0.0056	-0.0055	-0.005
	0.0702 <sup>*</sup>	0.0693 <sup>*</sup>	0.0020 <sup>*</sup>	0.0347 <sup>*</sup>	0.0123 <sup>*</sup>	0.0119 <sup>*</sup>	0.001 <sup>*</sup>	0.0067 <sup>*</sup>	0.0701 <sup>*</sup>	0.0008 <sup>*</sup>	0.0008 <sup>*</sup>	0.0329 <sup>*</sup>	0.0329 <sup>*</sup>	0.0367 <sup>*</sup>	0.0367 <sup>*</sup>	0.0025 <sup>*</sup>	0.0206 <sup>*</sup>
	-0.0022	-0.0018	-0.0014	-0.002	-0.0004	-0.0004	-0.0001	-0.0004	-0.0022	-0.0019	-0.0005	-0.002	-0.002	-0.0012	-0.0011	-0.0023	-0.0011
$\delta_1$	0.0089 <sup>*</sup>	0.1286 <sup>*</sup>	0.0484 <sup>*</sup>	0.0751 <sup>*</sup>	0.0024 <sup>*</sup>	0.1992 <sup>*</sup>	0.0517 <sup>*</sup>	0.1178 <sup>*</sup>	0.0144 <sup>*</sup>	0.2138 <sup>*</sup>	0.0507 <sup>*</sup>	0.1490 <sup>*</sup>	0.1490 <sup>*</sup>	0.0032 <sup>*</sup>	0.0813 <sup>*</sup>	0.0595 <sup>*</sup>	0.0723 <sup>*</sup>
	-0.0021	-0.0212	-0.0164	-0.0219	-0.0004	-0.0252	-0.0152	-0.0281	-0.0025	-0.0294	-0.0143	-0.0321	-0.0321	-0.0014	-0.0028	-0.0355	-0.0239
$\delta_2$	-	-	0.251 <sup>*</sup>	-	-	-	-	-	-	-	0.9403 <sup>*</sup>	-	-	-	-	0.8794 <sup>*</sup>	-
	-	-	-0.0279	-	-	-	-	-	-	-	-0.0187	-	-	-	-	-0.0903	-
$V^b$	-	-	-	3.8234 <sup>*</sup>	-	-	-	4.3438 <sup>*</sup>	-	-	-	-	3.8423 <sup>*</sup>	-	-	-	4.4480 <sup>*</sup>
	-	-	-	-0.3451	-	-	-	-0.4418	-	-	-	-	-0.3606	-	-	-	-0.4853
Criterios de decisión																	
$L(\theta)^c$	1005.55	1006.56	1045.43	616.82	2100.63	2102.25	2139.88	451.57	975.2	979.79	1052.46	655.3	1441.2	1441.02	1457.7	219.87	
$AIC^d$	8944.88	8946.19	8997.17	8319.99	8897.44	8897.44	9233.38	7912.92	8905.26	8911.33	9005.84	8993	9410.28	9410.13	9427.01	6981.21	
$BIC^e$	8960.38	8961.68	9017.83	8335.65	9912.94	9912.94	9944.04	7933.55	8920.76	8926.83	9026.5	8413.89	9425.78	9425.62	9447.67	7001.87	

\*, \*\* denotan significancia estadística al 1% y 10%, respectivamente. <sup>a</sup>Errores estándar robustos entre paréntesis. <sup>b</sup>Parámetro de forma. <sup>c</sup>Valor de la verosimilitud optimizada. <sup>d</sup>Criterio de Información de Akaike. <sup>e</sup>Criterio de Información Bayesiana.

Tabla 5: Ajuste del modelo para el Yen Japonés (JPY), Dólar Canadiense (CAN), Libra Esterlina (GBR) y Dólar Australiano (AUS)

	T=200			T=500			T=700					
	NLMACH	ARCH	GARCH	NLMACH	ARCH	GARCH	NLMACH	ARCH	GARCH			
NLG												
L()	48.9	128.14	nd	128.42	188.94	389.68	Nd	400.90	174.25	552.06	nd	569.58
AIC	784.50	981.48	nd	983.91	2632.23	2994.63	Nd	3010.85	3637.18	4431.88	nd	4485.77
BIC	784.41	991.39	nd	997.12	2644.88	3007.28	Nd	3027.72	3623.52	4445.54	nd	4471.98
CHF												
L()	21.92	1007.78	nd	101.10	124.61	323.88	Nd	334.31	174.25	454.52	nd	468.34
AIC	636.57	933.21	nd	935.83	2423.43	2901.96	Nd	2919.85	3623.52	4295.59	nd	4318.59
BIC	636.48	943.12	nd	949.04	2436.08	2914.61	Nd	2936.72	3637.18	4309.25	nd	4336.80
FRA												
L()	65.33	145.24	nd	146.13	234.29	433.66	Nd	434.04	329.23	608.81	nd	620.86
AIC	846.12	1006.65	nd	1009.89	2739.73	3048.21	Nd	3050.63	4069.63	4500.47	nd	4516.21
BIC	856.03	1006.56	nd	1023.10	2752.38	3060.86	Nd	3067.50	4083.28	4514.13	nd	4534.42
DEU												
L()	49.51	129.26	nd	131.13	189.50	389.65	Nd	397.44	272.06	552.79	nd	565.78
AIC	790.35	983.23	nd	988.11	2633.44	2994.59	Nd	3006.50	3935.83	4432.80	nd	4452.32
BIC	800.26	993.14	nd	1001.32	2646.09	3007.24	Nd	3023.37	3949.49	4446.46	nd	4470.53
JPY												
L()	16.72	963.55	nd	103.59	1466.18	346.93	Nd	348.14	202.59	483.72	nd	510.90
AIC	572.12	924.16	nd	940.73	2803.41	2936.41	Nd	2940.15	3729.14	4339.23	nd	4379.56
BIC	582.03	934.07	nd	953.94	2516.66	2949.06	Nd	2957.02	3742.80	4352.89	nd	4397.77
CDL												
L()	224.50	304.99	126.75	305.05	578.60	304.99	338.73	779.82	805.82	1086.52	465.31	1087.81
AIC	1094.19	1155.78	981.29	1157.82	3192.67	1155.78	2926.43	3344.19	4696.99	4906.51	4314.03	4909.34
BIC	1104.1	1165.69	994.50	1171.03	3205.32	1165.69	2943.30	3361.06	4710.65	4920.16	4332.24	4927.55

\*, \*\* denotan significancia estadística al 1% y 10% respectivamente.

<sup>a</sup>Errores estándar robustos entre paréntesis.

<sup>b</sup>Parámetro de forma. <sup>c</sup>Valor de la verosimilitud optimizada. <sup>d</sup>Criterio de Información de Akaike. <sup>e</sup>Criterio de Información Bayesiana.

El interés de nuestro ejercicio empírico es explorar el desempeño del  $NLMACH(1)$ , un modelo parsimonioso capaz de producir colas anchas, con sus mejores alternativas. Resulta que la contraparte natural a nuestra propuesta es en realidad el modelo  $ARCH(1)$ , y mejor aún  $ARCH(1)$  con distribución condicional  $t$  de student. Para mantener la consistencia con nuestro ejercicio de simulación, la tabla 6 compara el  $NLMACH(1)$  con sus principales adversarios  $-ARCH(1)$ ,  $ARCH(1)-t$  y  $GARCH(1,1)$ -para  $T=\{200,500,700\}$ <sup>7</sup>.

Tabla 6. **Criterios de Selección Modelos de Tipo de Cambio.**  
 $T=\{200,500,700\}$

		T=200			T=500			T=700					
		NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH	NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH	NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH
NLG	L( $\theta$ )	48.09	128.14	n.d.	128.42	188.94	389.68	n.d.	400.90	174.25	552.06	n.d.	569.58
	AIC	784.50	981.48	n.d.	983.91	2632.23	2994.63	n.d.	3010.85	3637.18	4431.88	n.d.	4455.77
	BIC	794.41	991.39	n.d.	997.12	2644.88	3007.28	n.d.	3027.72	3623.52	4445.54	n.d.	4473.98
CHF	L( $\theta$ )	21.92	100.78	n.d.	101.10	124.61	323.88	n.d.	334.31	174.25	454.52	n.d.	468.34
	AIC	626.57	933.21	n.d.	935.83	2423.43	2901.96	n.d.	2919.85	3623.52	4295.59	n.d.	4318.59
	BIC	636.48	943.12	n.d.	949.04	2436.08	2914.61	n.d.	2936.72	3637.18	4309.25	n.d.	4336.80
FRA	L( $\theta$ )	65.33	145.24	n.d.	146.13	234.29	433.66	n.d.	434.04	329.23	608.81	n.d.	620.86
	AIC	846.12	1006.65	n.d.	1009.89	2739.73	3048.21	n.d.	3050.63	4069.63	4500.47	n.d.	4516.21
	BIC	856.03	1016.56	n.d.	1023.10	2752.38	3060.86	n.d.	3067.50	4083.28	4514.13	n.d.	4534.42
DEU	L( $\theta$ )	49.51	129.26	n.d.	131.13	189.50	389.65	n.d.	397.44	272.06	552.79	n.d.	566.78
	AIC	790.35	983.23	n.d.	988.23	2633.44	2994.59	n.d.	3006.50	3935.83	4432.80	n.d.	4452.32
	BIC	800.26	993.14	n.d.	1001.32	2646.09	3007.24	n.d.	3023.37	3949.49	4446.46	n.d.	4470.53
JPY	L( $\theta$ )	16.72	96.35	n.d.	103.59	146.18	346.93	n.d.	348.14	202.59	483.72	n.d.	510.90
	AIC	572.12	924.16	n.d.	940.73	2503.41	2936.41	n.d.	2940.15	3729.14	4339.23	n.d.	4379.56
	BIC	582.03	934.07	n.d.	953.94	2516.06	2949.06	n.d.	2957.02	3742.80	4352.89	n.d.	4397.77
CDL	L( $\theta$ )	224.50	304.99	126.75	305.05	578.60	304.99	338.73	779.82	805.82	1086.52	465.31	1087.81
	AIC	1094.19	1155.78	981.29	1157.82	3192.67	1155.78	2926.43	3344.19	4696.99	4906.51	4314.03	4909.34
	BIC	1104.10	1165.69	994.50	1171.03	3205.32	1165.69	2943.30	3361.06	4710.65	4920.16	4332.24	4927.55
GBR	L( $\theta$ )	348.20	549.25	964.15	219.08	348.20	549.25	2425.97	560.51	409.39	690.38	3304.23	719.87
	AIC	2938.29	3166.59	1389.12	1091.28	2938.29	3166.59	3912.79	3178.75	4222.28	4588.61	5688.17	4619.93
	BIC	2950.94	3179.24	1402.33	1104.49	2950.94	3179.24	3929.65	3195.62	4235.93	4602.27	5706.38	4638.14
AUS	L( $\theta$ )	135.24	215.80	39.30	215.83	359.90	560.28	117.89	562.16	461.77	742.32	120.87	746.27
	AIC	992.12	1086.24	745.94	1088.28	2955.04	3176.55	2397.65	3180.23	4306.99	4639.46	3369.09	4645.17
	BIC	1002.03	1096.15	759.15	1101.49	2967.69	3189.20	2414.52	3197.10	4320.65	4653.11	3387.30	4663.38

Notas: Todos los modelos considerados son de primer orden. Para una definición de los criterios y monedas bajo examen, ver tablas 4 y 5; n. d.: modelos sin convergencia satisfactoria.

Tomando como criterios de decisión el AIC y el BIC<sup>8</sup>, se observa que: mientras para muestras pequeñas (i.e.,  $T=200$ ), la evidencia es mixta; para

<sup>7</sup> Las muestras contienen las últimas 200, 500 y 700 observaciones de cada serie respectivamente. Note que para el caso de Sinaloa se contó con 697 observaciones por lo que para  $T=700$  se incluyó la totalidad de las observaciones.

<sup>8</sup> Los dos criterios de bondad ajuste tienen ventajas aunque el criterio de Schwartz tiene una mayor penalización por grados de libertad perdidos [ver Greene (2008)]. La función de verosimilitud maximizada como criterio de selección puede arrojar elecciones que no ponderan el número de observaciones y estimaciones, respectivamente.

muestras medianas y grandes (i.e.,  $T=500$  y  $T=700$ ), el modelo  $NLMACH(1)$  es claramente preferido sobre otras especificaciones, en las primeras cinco monedas de nuestra tabla 6 (ver NLG, CHF, FRA, DEU y JPY);<sup>9</sup> sin embargo, para la libra esterlina, el  $NLMACH(1)$  es superior a otros modelos, cuando  $T=\{500,700\}$  -ver panel GBR y  $T=\{500,700\}$ , en la tabla 6.

Este resultado mixto para los tipos de cambio puede deberse a la inexistencia de colas pesadas como se había sugerido al inicio, por la curtosis de las series (tabla 3). Para explorar esta posibilidad más a fondo, la tabla siete (7) muestra los mismos criterios de selección, pero ahora para los certificados bursátiles, los cuales exhiben colas pesadas.

Con sólo algunas excepciones, se observa que el modelo  $NLMACH(1)$  es ahora superior no únicamente a sus principales competidores  $-ARCH$  y  $ARCH(1)-t$ , sino que también es preferido en general al modelo  $GARCH(1,1)$  de Bollerslev (1986).<sup>10</sup> Este resultado es alentador y sugiere que nuestra propuesta puede constituirse como una alternativa sólida para modelar algunas series financieras, en particular bonos en el mercado de capitales o series de tiempo con distribuciones que exhiban colas pesadas.

Tabla 7. Criterios de Selección Modelos de Certificados Bursátiles;  $T=\{200,500,700\}$

	T=200				T=500				T=700			
	NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH	NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH	NLMACH	ARCH	ARCH-t	GARCH
CHIHCB2												
L(g)	247.41	343.41	460.75	462.58	583.37	878.76	992.46	908.69	877.56	1232.87	1287.08	1243.48
AIC	1113.72	1179.63	1240.71	1241.50	3186.78	3402.03	3465.00	3420.81	4756.78	4995.08	5027.25	5003.10
BIC	1123.63	1189.54	1253.92	1254.71	3209.43	3414.68	3481.86	3427.68	4770.44	5008.74	5045.46	5021.31
CHIHCB2U												
L(g)	246.86	342.16	448.34	376.72	581.65	873.46	966.39	916.33	875.74	1231.49	1274.51	1231.61
AIC	1113.27	1178.89	1235.22	1200.23	3195.30	3399.01	3451.66	3425.01	4755.32	4994.30	5020.37	4996.37
BIC	1123.18	1188.80	1248.43	1213.45	3207.95	3411.66	3468.52	3441.87	4768.98	5007.96	5038.58	5014.58
EDOHGO03												
L(g)	769.87	831.76	809.41	831.74	1747.49	1944.40	1907.91	2043.48	2372.85	2653.99	2470.99	2712.71
AIC	1349.84	1357.43	1353.96	1359.42	3746.43	3799.93	3792.44	3826.83	5454.07	5532.56	5476.66	5549.90
BIC	1359.75	1367.34	1367.17	1372.64	3759.08	3812.58	3809.30	3843.69	5467.72	5546.21	5494.87	5568.11
EDOHGO032												
L(g)	1041.34	939.52	1176.51	942.42	1378.72	1577.70	2698.00	1577.09	2040.04	2321.80	3640.76	2320.70
AIC	1402.60	1381.92	1429.13	1384.56	3627.68	3695.23	3966.03	3697.03	5348.13	5438.82	5756.16	5440.49
BIC	1412.51	1391.83	1442.34	1397.77	3640.33	3707.88	3982.90	3713.89	5361.79	5452.48	5774.37	5458.70
EDOSINO4U												
L(g)	303.68	384.96	249.60	404.91	793.19	993.88	700.39	1037.01	1058.03	1339.15	952.40	1382.41
AIC	1154.91	1202.58	1117.49	1214.74	3350.71	3463.71	3290.37	3486.99	4853.06	5017.06	4781.85	5041.18
BIC	1164.82	1212.49	1130.70	1227.95	3363.36	3476.36	3307.23	3503.86	4866.69	5030.69	4800.04	5059.36
GDFCB03												
L(g)	830.48	903.69	784.63	907.20	1896.61	2097.02	1894.76	2127.14	2591.50	3886.73	2511.51	2919.76
AIC	1357.12	1374.10	1347.71	1376.88	3787.46	3837.78	3788.97	3846.93	5515.86	5591.48	5495.88	5601.46
BIC	1367.03	1384.01	1360.92	1390.10	3800.11	3850.43	3805.84	3863.80	5529.51	5605.14	5514.09	5619.67

Notas: Todos los modelos considerados son de primer orden. Para una definición de los criterios y monedas bajo examen ver tablas 4 y 5.

<sup>9</sup> Desafortunadamente, después de varios intentos de estimación, el modelo  $ARCH(1)-t$  no convergió satisfactoriamente en varios casos como puede apreciarse; lo que hace difícil su comparación.

<sup>10</sup> No se muestran resultados completos de estas estimaciones con el fin de ahorrar espacio; pero, éstos se encuentran disponibles por parte de los autores.

## Conclusiones

Se ha presentado un nuevo modelo fundamentado en medias móviles no-lineales pero instrumentado para la varianza condicional. Mediante una restricción sencilla es posible sortear el típico problema de no-invertibilidad que aqueja a esta clase de procesos y facilitar su estimación por Máxima Verosimilitud. Las propiedades estadísticas del  $NLMACH(q)$  son simples y a la vez atractivas para el modelaje de series financieras. Además se presentó la función de autocorrelación del proceso al cuadrado que permite hacer un ajuste preciso del  $NLMACH$  al volverse factible identificar el número de rezagos a incluir en la especificación.

Los experimentos de Monte Carlo sugieren que nuestra propuesta ofrece un mejor ajuste que los modelos de la clase ARCH bajo cierto tipo de volatilidad. Lo anterior puede ser detectado mediante los criterios de información AIC y BIC. Las simulaciones muestran también que, aún siendo el  $NLMACH$  una especificación incorrecta, la verosimilitud maximizada es equivalente a otras especificaciones (excepto cuando los datos son generados por un  $ARCH-t$ ).<sup>11</sup>

La nueva especificación habrá de competir con una diversidad de variantes pertenecientes a la clase ARCH. Tales competidores comparten el mismo tipo de no-linealidad mientras que el  $NLMACH(q)$  ofrece una alternativa de no linealidad con la capacidad de reproducir naturalmente distribuciones de colas pesadas.

En lo que concierne a la aplicación empírica los resultados sugieren que el NLMACH es una alternativa de modelaje útil y mejor para series que exhiben colas pesadas. En general la especificación  $NLMACH(1)$  es preferida a sus principales adversarios:  $ARCH(1)$ ,  $ARCH(1)-t$  y  $GARCH(1,1)$ .

En síntesis, la intención al presentar este nuevo modelo es rescatar a las medias móviles no-lineales para las que el interés académico ha sido marginal pese a representar, como aquí se muestra, una alternativa potencialmente útil en aplicaciones empíricas.

---

<sup>11</sup> No sobra recalcar que tal experimento de Monte Carlo sólo constituye evidencia particularizada, y que bajo otras circunstancias, lo dicho podría revelarse inexacto.

## Referencias

- Bollerslev, T. [1986]: “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, 309–28.
- Bollerslev, T., and H. Mikkelsen [1996]: “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 74, 3–30.
- Engle, R. [1982]: “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation,” *Econometrica*, 50, 987–1008.
- Engle, R., D. Lilien, and R. Robins [1987]: “Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model,” *Econometrica*, 55, 391–407.
- Franses, P., and D. van Dijk [2000]: *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge.
- Granger, C. W. [1998]: “Overview of Nonlinear Time Series Specifications in Economics,” UCSD, first draft.
- Granger, C. W., and A. Andersen [1978]: *Applied Time Series Analysis*. Academic Press, pp.25-38. Edited by David F. Findley.
- Granger, C. W., and T. Terasvirta [1993]: *Modelling Nonlinear Economic Relationships*. Oxford University Press.
- Greene, W. [2008]: *Econometric Analysis*, 6<sup>th</sup> Edition. Prentice Hall.
- Guégan, D. [1994]: *Séries Chronologiques Non Linéaires à Temps Discret*. Economica.
- Nelson, D. [1991]: “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach,” *Econometrica*, 59, 347–70.
- Robinson, P.M. [1977]: “The Estimation of a Non Linear Moving Average Model,” *Stochastic Processes and their Applications*, 1, 81–90.
- Tong, H. [1990]: *Non-Linear Time Series: A Dynamical Approach*. Oxford Science Publications.

## A. Apéndice: Estacionariedad estricta

Los momentos impares son fácilmente calculables debido a las propiedades del ruido blanco gaussiano  $V_t$ . En efecto, todos los momentos impares son iguales a cero. Sólo falta calcular los momentos pares. La fórmula general de éstos es:

$$E(X_t^{2r}) = E(V_t^{2r}) \cdot E(h_t^r) = \prod_{j=1}^r (2j-1) \cdot \left[ \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right]$$

El primer término,  $\prod_{j=1}^r (2j-1)$ , no tiene condiciones de existencia; en cuanto al segundo, se desarrolla

$$\begin{aligned} E(h_t^r) &= E \left[ \left( \delta_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^r \right] \\ &= E \left[ \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \delta_0^{r-j} \cdot \left( \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^j \right] \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \delta_0^{r-j} \cdot E \left( \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^j \end{aligned}$$

Y se infiere que  $E \left( \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^j$  es la única parte que contiene elementos estocásticos. La desarrollamos por medio del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{i=1}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^j &= E \left[ \sum_{z=0}^j \binom{j}{z} (\delta_i V_{t-i}^2)^{j-z} \cdot \left( \sum_{i=2}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^z \right] \\ &= \sum_{z=0}^j \binom{j}{z} \delta_i^{j-z} E(V_{t-i}^{2(j-z)}) \cdot E \left( \sum_{i=2}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^z \\ &= \sum_{z=0}^j \binom{j}{z} \delta_i^{j-z} \prod_{k=1}^{j-z} (2k-1) \cdot E \left( \sum_{i=2}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^z \end{aligned}$$

Esto último indica que sólo hay que preocuparse de un elemento,  $E \left( \sum_{i=2}^q \delta_i V_{t-i}^2 \right)^z$ . La suma pierde dicho elemento y ahora corre únicamente de  $i=2$  a  $q$ . Repitiendo el procedimiento (es decir, aplicando sobre lo restante el binomio de Newton) es posible eliminar uno a uno los elementos de la suma hasta quedarnos con uno solo:

$$E \left( \delta_q V_{t-q}^2 \right)^s = \delta_q^s \cdot \prod_{l=1}^s (2l-1)$$

Al haber “eliminado” todas las esperanzas de la expresión, descubrimos que no existen condiciones, excepto las impuestas al ruido  $V_t$ , así como las de positividad sobre el conjunto de parámetros para garantizar la existencia de momentos pares superiores.