

Actualización de la
descomposición del BEI cuando
se dispone de nueva información

Por:
Luis Fernando Melo Velandia
José Fernando Moreno Gutiérrez

Núm. 620
2010

Borradores de ECONOMÍA



ta - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

ACTUALIZACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN DEL BEI CUANDO SE DISPONE DE NUEVA INFORMACIÓN*

LUIS FERNANDO MELO VELANDIA

(lmelevel@banrep.gov.co)

JOSÉ FERNANDO MORENO GUTIÉRREZ†

(jmorengu@banrep.gov.co)

BANCO DE LA REPÚBLICA

RESUMEN. Este documento utiliza la metodología de Melo et al. (2003) para la actualización de la descomposición del Break Even Inflation (BEI) presentado en Melo y Granados (2010) cuando se dispone de nuevas observaciones. El procedimiento de actualización utiliza una transformación del modelo de estado espacio del BEI en el que se supone que los parámetros del modelo siguen una caminata aleatoria.

Palabras claves. Break even inflation, filtro de Kalman, modelos de estado espacio.

Códigos de clasificación JEL. C13, C50, E31.

Fecha: Agosto 2010.

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su junta directiva. Los autores agradecen en forma muy especial a Giovanni Castro por su importante colaboración en una versión anterior de este documento. También se agradecen los comentarios y sugerencias de Joan Camilo Granados.

† Asistente de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

Melo y Granados (2010), en adelante MG, desarrollan un modelo de estado espacio para calcular las expectativas de inflación y la prima por riesgo inflacionario, a partir de una medida de compensación inflacionaria (BEI), utilizando los rendimientos de los TES en pesos y de los TES indexados a la UVR para el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Este modelo se estima por el método de máxima verosimilitud usando el algoritmo del filtro de Kalman.

Sin embargo, cuando se dispone de nuevas observaciones, las estimaciones del vector de estado cambian para todos los periodos. Por lo tanto, las series históricas, construidas a partir del vector de estado en los periodos anteriores, son modificadas.

Este artículo utiliza la metodología propuesta en Melo et al. (2003) para actualizar la descomposición del BEI cuando se tienen nuevas observaciones. Bajo este método, las series históricas estimadas en las que se descompone el BEI no cambian cuando se actualizan los datos. Este procedimiento utiliza un modelo de estado espacio que se basa en el modelo presentado en MG y supone que los parámetros del modelo siguen una caminata aleatoria.

El documento se encuentra dividido en seis secciones dentro de las cuales la primera de ellas es la presente introducción. En la segunda, se define el BEI y se describe su descomposición. En la tercera sección se desarrolla el modelo de estado espacio requerido para la actualización. La cuarta presenta los pasos necesarios para llevar a cabo el procedimiento de actualización. En la quinta sección se muestran los resultados obtenidos. Por último, algunos comentarios finales son presentados en la sección seis.

2. BREAK EVEN INFLATION

Tal como se señala en MG, el BEI es una medida basada en la información del mercado que refleja, en parte, la inflación promedio esperada durante el periodo de maduración de los títulos de deuda. Como tal, el BEI refleja la compensación requerida para que los rendimientos de los dos tipos de bonos, nominales y reales, sean equivalentes para un vencimiento dado.

El BEI se define como la diferencia entre los rendimientos de un bono nominal y uno real con el mismo plazo de maduración; es decir:

$$BEI_t^n = y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} \quad (1)$$

Adicionalmente, el BEI se puede descomponer en los siguientes términos: ¹

$$BEI_t^n = E_t(\pi_{t+1,t+n}) + \phi_t^n + \text{Ajuste por convexidad} \quad (2)$$

¹Esta ecuación es obtenida en Christensen et al. (2008) Adrian y Wu (2009), y en García y Werner (2008), entre otros. La deducción de esta ecuación es desarrollada en el Apéndice C de MG.

En las ecuaciones (1) y (2), $y_t^{nom,n}$ y $y_t^{real,n}$ corresponden a los rendimientos de un bono en términos nominales y reales en t con n meses de maduración, respectivamente. $E_t(\pi_{t+1,t+n})$ es la expectativa de inflación promedio para un horizonte temporal entre 1 y n meses a partir de t , y ϕ_t^n es la prima por riesgo inflacionario asociada a n periodos. Por simplicidad, se supone que el ajuste por convexidad² es cero.

En MG, el BEI es calculado a partir de la ecuación (1). Posteriormente, las expectativas de inflación, $E_t(\pi_{t+1,t+n})$, son calculadas con base en la representación de estado espacio de un modelo afín de estructura a término extendido. Finalmente, la prima por riesgo inflacionario, ϕ_t^n , se estima a partir de la ecuación (2).

3. METODOLOGÍA DE ACTUALIZACIÓN PARA EL CÁLCULO DEL BEI

Cabe anotar que una vez estimada la descomposición del BEI bajo la metodología descrita en MG, la estimación del vector de estado para periodos anteriores cambia cuando se agrega una nueva observación. Por lo tanto, los valores históricos ya estimados se modifican.

Para evitar este tipo de inconvenientes Melo et al. (2003) desarrollan un procedimiento de actualización del vector de estado a partir de una metodología basada en modelos de estado espacio. Los principales supuestos del modelo de actualización son que el vector de estado es ‘observado’ para el último periodo de estimación y que los principales parámetros del modelo inicial siguen una caminata aleatoria.

3.1. Modelo de estado espacio inicial. El modelo de estado espacio inicial, especificado en MG, es el siguiente:

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{d} + Z\mathbf{X}_t + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \Phi\mathbf{X}_{t-1} + \Sigma\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (4)$$

Donde el vector de observaciones, \mathbf{W}_t , está dado por los rendimientos nominales y reales de los bonos de deuda colombianos para distintos periodos de maduración, la inflación y la encuesta de expectativas de inflación: $\mathbf{W}_t = \left(y_t^{nom,3}, y_t^{nom,12}, y_t^{nom,24}, y_t^{nom,36}, y_t^{nom,60}, \pi_t, y_t^{real,24}, y_t^{real,36}, y_t^{real,60}, E_t^{enc}[\pi_{t+12}] \right)'$. Por otro lado, el vector de estado \mathbf{X}_t está conformado por la inflación y dos series no observables que recogen el comportamiento (nivel y pendiente) de la curva de rendimientos: $\mathbf{X}_t = (l_t^1, l_t^2, \pi_t)'$.

3.2. Modelo de estado espacio de actualización. La metodología propuesta para actualizar el vector de estado del modelo inicial sin alterar las estimaciones anteriores utiliza un nuevo modelo de estado espacio.

²Para una definición del concepto de ajuste por convexidad, ver Adrian y Wu (2009) y Fabozzi (1996)

El nuevo modelo o modelo de actualización parte de la reformulación del modelo inicial, ecuaciones (3) y (4), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_t &= \mathbf{d} + \text{vec}(Z \mathbf{X}_t) + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t \\ &= \mathbf{d} + (\mathbf{X}'_t \otimes I_{10}) \text{vec}(Z) + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_t \\ \mathbf{X}_t &= \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{X}'_{t-1} \otimes I_3) \text{vec}(\Phi) + \Sigma \boldsymbol{\varepsilon}_t\end{aligned}$$

donde el $\text{vec}(\cdot)$ es el operador que transforma una matriz en un vector, posicionando sus columnas una debajo de otra.

A partir de las ecuaciones anteriores es posible obtener la siguiente ecuación de medida para la nueva representación de estado espacio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W}_t \\ \mathbf{X}_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_t \otimes I_{10} & 0 \\ 0 & \mathbf{X}'_{t-1} \otimes I_3 \end{bmatrix}}_{\tilde{H}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{vec}(Z) \\ \text{vec}(\Phi) \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix}}_{\Sigma^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi}_t}$$

Donde $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_t = \Gamma \boldsymbol{\eta}_t$ y $\Gamma = \text{diag}\{\tilde{\sigma}_\eta(1), \tilde{\sigma}_\eta(1), \tilde{\sigma}_\eta(1), \tilde{\sigma}_\eta(1), \tilde{\sigma}_\eta(1), 0, \tilde{\sigma}_\eta(2), \tilde{\sigma}_\eta(2), \tilde{\sigma}_\eta(2), \tilde{\sigma}_\eta(3)\}$.

Debido que el vector de estado $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t$ contiene algunos valores constantes (ceros y unos),³ se puede plantear una transformación que genera un nuevo vector de estado $\boldsymbol{\alpha}_t$ sin incluir dichos valores; $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t = R \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{e}_{26}$.⁴ A partir de esta transformación y suponiendo que el nuevo vector de estado sigue una caminata aleatoria, se tiene el siguiente modelo de estado espacio de actualización:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{a}_t + H_t \boldsymbol{\alpha}_t + \Sigma^* \boldsymbol{\xi}_t \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \Omega \mathbf{v}_t \quad (6)$$

Donde $H_t = \tilde{H}_t R$, $\mathbf{a}_t = \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{H}_t \mathbf{e}_{26}$, $V(\boldsymbol{\xi}_t) = I$ y $V(\mathbf{v}_t) = I$. Al realizar los cálculos respectivos se obtiene que $\tilde{H}_t \mathbf{e}_{26} = \boldsymbol{\pi}_t \mathbf{e}_6$. Es decir, $\tilde{H}_t \mathbf{e}_{26}$ es un vector de ceros de dimensión 13×1 donde el elemento seis corresponde a $\boldsymbol{\pi}_t$.

Todos los elementos de las matrices que hacen parte del modelo especificado en (5) y (6) son conocidos ya que han sido estimados en el modelo de estado espacio inicial. Sin embargo, la matriz Ω es desconocida; por lo tanto, los elementos de esta matriz son estimados por el método de máxima verosimilitud utilizando el filtro de Kalman.

Los valores iniciales del vector de estado en el modelo de actualización son tomados de las estimaciones finales de las matrices Z y Φ del modelo descrito en MG. El procedimiento utilizado para llevar a cabo la actualización del vector de estado es descrito a continuación.

³Estos ceros y unos hacen parte de las matrices Z y Φ , tal como se especifica en MG.

⁴La matriz R y el vector \mathbf{e}_{26} se encuentran definidos en el Apéndice A.

4. PROCEDIMIENTO DE ACTUALIZACIÓN PARA EL CÁLCULO DEL BEI

Este procedimiento parte de la estimación del vector de estado $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1,2,\dots,T}$ del modelo inicial. Cuando se tiene una nueva observación (en $T + 1$) se actualizan Z y Φ a través del modelo de estado espacio de actualización. Posteriormente, se calcula el vector de estado del modelo inicial para la nueva observación por medio de las ecuaciones del filtro de Kalman. De esta forma se obtienen los nuevos valores de las expectativas de inflación.

El procedimiento en detalle es descrito a continuación:

1. Se estima el modelo de estado espacio de actualización especificado en la ecuaciones (5) y (6) para $t = 1, \dots, T$. De esta forma se obtiene $\alpha_{T+1|T}$.
2. Posteriormente, se reconstruyen las matrices Z y Φ de las ecuaciones (3) y (4) a partir de $\alpha_{T+1|T}$. De esta manera se obtienen los elementos necesarios para llevar a cabo la actualización del vector de estado del modelo de estado espacio inicial en el periodo $T + 1$. Cabe anotar que en este momento se tiene una nueva observación de la muestra; es decir, \mathbf{W}_{T+1} . Los valores del vector de estado en $T + 1$ se obtienen a través de la siguiente ecuación de actualización del filtro de Kalman:

$$\mathbf{X}_{T+1} = \mathbf{X}_{T+1|T} + P_{T+1|T} Z'_{T+1} F_{T+1}^{-1} (\mathbf{W}_{T+1} - Z_{T+1} \mathbf{X}_{T+1|T} - \mathbf{d})$$

$$\text{donde } F_{T+1} = Z_{T+1} P_{T+1|T} Z'_{T+1} + \Gamma \Gamma'$$

Para posteriores actualizaciones ($T + 2, T + 3, \dots$) se repiten los pasos 1 y 2. Por ejemplo, para $T + 2$ la matriz H del modelo de actualización depende del vector de estado del modelo inicial, $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1,\dots,T+1}$. Cabe anotar que este vector se construye como $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1,\dots,T}$ tomado del modelo de MG más \mathbf{X}_{T+1} de la actualización realizada en $T + 1$. Al final del paso 1 se obtiene $\alpha_{T+2|T+1}$.⁵

Posteriormente, se estima el vector de estado \mathbf{X}_{T+2} a partir de la ecuación de actualización del filtro de Kalman, tal como se especificó en el paso 2:

$$\mathbf{X}_{T+2} = \mathbf{X}_{T+2|T} + P_{T+2|T+1} Z'_{T+2} F_{T+2}^{-1} (\mathbf{W}_{T+2} - Z_{T+2} \mathbf{X}_{T+2|T+1} - \mathbf{d})$$

Donde:

$$\begin{aligned} P_{T+2|T+1} &= \Phi P_{T+1} \Phi' + \Sigma \Sigma' \\ F_{T+2} &= Z_{T+2} P_{T+2|T+1} Z'_{T+2} + \Gamma \Gamma' \end{aligned}$$

Por último, las expectativas promedio de inflación hasta 12, 24 y 60 meses se estiman a partir de los pronósticos del vector de estado del modelo inicial. Dado el cálculo del BEI y de las expectativas

⁵Los valores de los vectores y matrices \mathbf{d} , Γ , Σ y μ son tomados de las estimaciones realizadas en MG.

promedio de inflación, se puede obtener una estimación de la prima por riesgo inflacionario por medio de la ecuación (2).

5. RESULTADOS

En la Figura 1 se muestran el BEI y su descomposición para 12, 24 y 60 meses de maduración del periodo comprendido entre enero de 2003 y junio de 2010. Estos resultados incluyen las estimaciones realizadas en MG entre enero de 2003 y noviembre de 2009, los últimos datos a partir de diciembre de 2009 corresponden a las estimaciones utilizando el procedimiento de actualización.

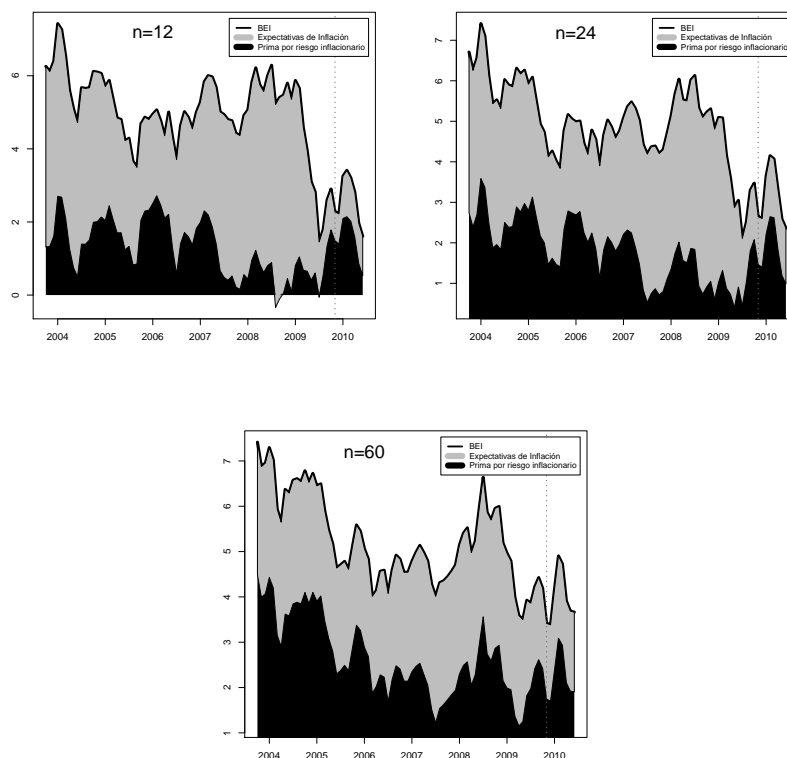


FIGURA 1. Descomposición del BEI para estimaciones 12, 24 y 60 meses adelante. La muestra total y el periodo de actualización corresponden a enero 2003 - junio 2010 y diciembre 2009 - junio de 2010, respectivamente.

En la Figura 1, la línea negra representa el valor del BEI, mientras que las áreas grises y negras corresponden a los valores de las expectativas promedio de inflación y la prima por riesgo inflacionario, respectivamente.

En general, los resultados muestran una tendencia decreciente de las expectativas promedio de inflación. Sin embargo, se observa un crecimiento moderado en los años 2007 y 2008. También se presenta una disminución considerable de las expectativas de inflación al final de la muestra analizada.

En el periodo de actualización (diciembre de 2009 a junio de 2010) se observa un leve crecimiento del BEI seguido de una caída en los dos últimos meses. Este tipo de comportamiento se traslada a la prima por riesgo inflacionario debido a que las expectativas promedio de inflación permanecen aproximadamente constantes dentro de este periodo.

Al igual que en MG, los resultados de la prima por riesgo inflacionario son consistentes con los esperados teóricamente; a medida que aumenta el plazo de maduración la prima por riesgo inflacionario toma valores más altos.

6. COMENTARIOS FINALES

En este documento se aplica la metodología de Melo et al. (2003) para la actualización del modelo de estado espacio desarrollado por MG cuando se agregan nuevas observaciones. Los resultados obtenidos a partir de esta actualización son coherentes con el modelo de estado espacio descrito en MG.

REFERENCIAS

- ADRIAN, T., Y H. WU (2009): "The term structure of inflation expectations," Staff Reports 362, Federal Reserve Bank of New York.
- CHRISTENSEN, J. H. E., J. A. LÓPEZ, Y G. D. RUDEBUSCH (2008): "Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields," Working Paper Series 2008-34, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- FABOZZI, F. J. (1996): *Bonds Markets Analysis and Strategies*. Prentice Hall, 3 edn.
- GARCÍA, J. A., Y T. WERNER (2008): "Inflation risks and inflation risk premia," ECB working paper, European Central Bank.
- MELO, L. F., Y J. C. GRANADOS (2010): "Expectativas y prima por riesgo inflacionario bajo una medida de compensación a la inflación," Borradores de Economía 589, Banco de la República.
- MELO, L. F., F. H. NIETO, Y M. RAMOS (2003): "A leading index for the colombian economic activity," Borradores de Economía 243, Banco de la República.

APÉNDICE A. TRANSFORMACIÓN ENTRE α Y $\tilde{\alpha}$

Sea $\tilde{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \text{vec}(Z) \\ \text{vec}(\Phi) \end{bmatrix}$, donde Z y Φ son matrices del modelo de estado espacio especificado en MG. Adicionalmente, el vector α_t representa los elementos de $\tilde{\alpha}_t$ diferentes de cero y uno. Por lo tanto:

$$\tilde{\alpha}_t = R \alpha_t + \mathbf{e}_{26}$$

Donde R y α_t se definen como:

$$R = \begin{bmatrix} I_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_t = \begin{bmatrix} \alpha_{1,t} \\ \alpha_{2,t} \\ \alpha_{3,t} \\ \alpha_{4,t} \\ \alpha_{5,t} \\ \alpha_{6,t} \end{bmatrix}$$

El vector \mathbf{e}_{26} corresponde a un vector de ceros de dimensión 39×1 donde el elemento 26 es uno. La construcción de los vectores que conforman α_t se realiza de acuerdo al diseño de las matrices Z y Φ especificadas en MG, tal como se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} \alpha'_{1,t} &= \left(-\frac{1}{3} \mathbf{B}_{3,t}^{\text{nom}}[1], -\frac{1}{12} \mathbf{B}_{12,t}^{\text{nom}}[1], -\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{nom}}[1], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{nom}}[1], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{nom}}[1] \right) \\ \alpha'_{2,t} &= \left(-\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{real}}[1], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{real}}[1], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{real}}[1], \mathbf{e}'_n \Phi_t^{12}[1], -\frac{1}{3} \mathbf{B}_{3,t}^{\text{nom}}[2], -\frac{1}{12} \mathbf{B}_{12,t}^{\text{nom}}[2], \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{nom}}[2], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{nom}}[2], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{nom}}[2] \right) \\ \alpha'_{3,t} &= \left(-\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{real}}[2], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{real}}[2], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{real}}[2], \mathbf{e}'_n \Phi_t^{12}[2], -\frac{1}{3} \mathbf{B}_{3,t}^{\text{nom}}[3], -\frac{1}{12} \mathbf{B}_{12,t}^{\text{nom}}[3], \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{nom}}[3], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{nom}}[3], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{nom}}[3] \right) \\ \alpha'_{4,t} &= \left(-\frac{1}{24} \mathbf{B}_{24,t}^{\text{real}}[3], -\frac{1}{36} \mathbf{B}_{36,t}^{\text{real}}[3], -\frac{1}{60} \mathbf{B}_{60,t}^{\text{real}}[3], \mathbf{e}'_n \Phi_t^{12}[3], \Phi_t[1,1], \Phi_t[2,1], \Phi_t[3,1] \right) \\ \alpha'_{5,t} &= \left(\Phi_t[2,2], \Phi_t[3,2] \right) \\ \alpha_{6,t} &= \Phi_t[3,3] \end{aligned}$$

Donde $M[i]$ representa el i -ésimo término del vector M , mientras que $N[i, j]$ es el elemento ubicado en la fila i y columna j de la matriz N .