

Escola de **ECONOMIA** de São Paulo

**Textos para
Discussão**

292

Junho
de 2011



MODELANDO CONTÁGIO FINANCEIRO ATRAVÉS DE CÓPULAS

RICARDO PIRES DE SOUZA SANTOS
PEDRO L. VALLS PEREIRA



Os artigos dos *Textos para Discussão da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas* são de inteira responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente a opinião da FGV-EESP. É permitida a reprodução total ou parcial dos artigos, desde que creditada a fonte.

Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas FGV-EESP
www.eesp.fgv.br

Modelando Contágio Financeiro através de Cópulas*

Ricardo Pires de Souza Santos[†] Pedro L. Valls Pereira[‡]

EESP-FGV

CEQEF e EESP-FGV

23 de maio de 2011

Resumo

O presente artigo tem por objetivo testar a hipótese de contágio entre os índices dos mercados financeiros dos Estados Unidos, Brasil, Japão e Inglaterra para o período de 2000 a 2009. Cópulas variantes no tempo foram usadas para captar o impacto da crise do Subprime na dependência entre mercados. O modelo implementado foi um modelo ARMA(1,0) st-GARCH(1,2) para as distribuições marginais e cópulas Normal e Joe-Clayton (SJC) para a distribuição conjunta. Os resultados obtidos permitem concluir que tanto para a cópula gaussiana quanto para a cópula SJC há evidências de contágio entre o mercado americano e o mercado

*O segundo autor agradece financiamento do CNPq e da FAPESP

[†]Rua Itapeva 474 sala 1214, 01332-000, São Paulo, S.P. Brasil. E-mail: ricardopss@gmail.com

[‡]Rua Itapeva 474 sala 1307, 01332-000, São Paulo, S.P. Brasil. E-mail: pedro.valls@fgv.br

brasileiro. Para os outros dois mercados londrino e japonês, as evidências da presença de contágio entre estes mercados e o americano não mostraram-se suficientemente claras em ambas as cópula

Palavras Chaves: Contágio, Cópulas Variantes no Tempo

JEL Codes: C10, C12, C13, G10 e G15

Resumo

This article aims to test the hypothesis of contagion between the indices of financial markets from the United States to Brazil, Japan and England for the period 2000 to 2009. Time varying copulas were used to capture the impact of Sub-prime crisis in the dependence between markets. The implemented model was a ARMA(1,0) st-ARCH(1,2) to the marginal distributions and Normal and Joe- Clayton (SJC) copulas for the joint distribution. The results obtained allow to conclude that both for the gaussian copula and for the SJC copula there is evidence of contagion between the American market and the Brazilian market. For the other two markets Londoner and Japanese, the evidence of the presence of contagion between these markets and the American has not been sufficiently clear in both copula.

Key Words: Contagion, Time Varying Copula

JEL Codes: C10, C12, C13, G10 e G15

1 Introdução

As medidas de dependência entre mercados financeiros exercem notável influência e são de extensa aplicação. Administradores de carteiras exploram

as correlações entre mercados de modo a se beneficiar da diversificação internacional. Formuladores de política monitoram a dependência entre mercados financeiros a fim de avaliar a possibilidade de contágio financeiro.

O presente artigo testa a hipótese de contágio financeiro entre quatros mercados selecionados seguindo-se a metodologia de cópulas.

A hipótese da ocorrência de contágio financeiro entre mercados desenvolveu-se principalmente a partir de crises financeiras que ocorreram na década de 90. O corpo teórico que abrange tal hipótese consiste na identificação dos canais de transmissão internacional de choque e na avaliação de sua estabilidade durante os períodos de crise, *i.e.* da sua intensidade na transmissão de choques. No presente estudo, contágio financeiro será interpretado como um aumento significativo das conexões entre mercados após choque em um país específico. Tal definição se encaixa na classe de definições de contágio, identificada e denominada por Rigobon (2002) de *shift-contagion*. A presença do fenômeno, portanto, será evidenciada por meio de uma quebra estrutural do comportamento padrão da dependência entre os mercados. De acordo com Forbes e Rigobon (2002), o uso desta definição apresenta a vantagem da não necessidade de explicitação do canal de transmissão do choque.

A vantagem da modelagem do contágio financeiro por meio de funções cópulas é evidente, posto que tomam as medidas de dependência como protagonista de seus corpos teóricos. A teoria de cópulas é uma metodologia de modelagem de distribuições multivariadas. Como alicerce principal, admite que toda distribuição multivariada pode ser decomposta em uma estrutura para

as distribuições marginais e uma estrutura de dependência, representada pelas funções cópulas que, por sua vez, "ligam" as distribuições marginais numa estrutura única. A metodologia sobressai-se a outras abordagens alternativas, *e.g.* valores extremos, por modelar toda a distribuição conjunta das variáveis, fornecendo além de medidas de localização e dispersão, *e.g.* média e variância, outras medidas de dependência como dependências de cauda e correlações de postos.

Não se questiona o extraordinário avanço dos instrumentos financeiros e do setor de tecnologia de informação, que reduziram as barreiras para a movimentação da informação e pode-se inferir que os mercados financeiros, de forma geral, estejam mais interligados. Entretanto, não é possível afirmar que estes mercados estejam mais suscetíveis a contágio financeiro. De acordo com o *Global Financial Report*, FMI (2008), com a recente crise do *Subprime*, iniciada nos Estados Unidos, a hipótese de descolamento¹ (que pode ser interpretada como hipótese de não-contágio) das economias emergentes foi posta a teste.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 é feita uma concisa revisão bibliográfica acerca da teoria de contágio financeiro expondo, inclusive, definições e alguns estudos sobre contágio financeiro envolvendo o Brasil. A seção 3 apresenta a teoria de cópulas, destacando sua finalidade para modelagem de distribuições multivariadas. A seção 4 introduz algumas medidas de dependência, objeto de estudo na teoria de contágio. Por fim, a teoria de cópulas condicionais e o método para modelagem do fenômeno contágio são tratados na seção 5. Na seção 6 as evidências empíricas deste artigo, os

¹Do inglês *decoupling*.

princípios, testes e procedimentos são apresentadas e na seção 7 são apresentadas as conclusões.

2 Contágio financeiro

De acordo com Edwards (2000), a literatura sobre contágio desenvolveu-se a partir das crises financeiras da década de 90, que se espalharam para os países emergentes. Mesmo antes da crise financeira mexicana de 1995, estudos e investigações relacionados ao tema já constituíam parte da literatura econômica. Em pesquisa realizada pelo mesmo autor no *EconLit* para o período de 1969-2000, de 147 estudos onde a palavra “contágio” apresentava-se no abstract e/ou título, apenas 17 datavam de épocas anteriores à 1990.

No que se refere-se às principais crises financeiras dos últimos anos, encontram-se trabalhos sobre contágio aplicados à crise do México de 1995 (desvalorização do peso mexicano em dezembro de 1994), à crise asiática de 1997 (desvalorização da moeda tailandesa em julho de 1997), à crise russa de 1998 (com a declaração de moratória do país em agosto de 1998), à desvalorização do Real em janeiro de 1999, às quedas das ações das empresas de tecnologia ao fim de 2000, à crise argentina em 2001 (com o colapso do *currency board* em dezembro de 2001), e mais recentemente à crise do *Subprime* em 2007 com a subsequente quebra do Banco Lehman Brothers no segundo semestre de 2008.

Ressalta-se que muito embora o fenômeno contágio tenha se iniciado a partir de crises financeiras em mercados emergentes, não se restringe apenas a estes. É

possível encontrar uma série de estudos acerca de contágio financeiro entre países desenvolvidos, como por exemplo, sobre a crise do *Exchange Rate Mechanism* em 1992, que atingiu vários países da Europa, ver Favero e Giavazzi (2000).

Segundo Rigobon (2002), acredita-se que o estudo do contágio começou com as três grandes crises financeiras de meados dos anos 90 (mexicana, asiática e russa) que colocaram vários países em desenvolvimento sob intenso estresse financeiro. Ainda, o autor afirma que a propagação das crises da Ásia e da Rússia, diferentemente da crise mexicana, ainda é de difícil explicação tendo-se como base apenas as teorias² existentes sobre o assunto.

2.1 Definições de contágio financeiro

Embora não exista uma concordância clara que refira-se à definição de contágio e à sua identificação empírica/científica, pode-se estabelecer certa identidade comum em todas as suas definições: crises econômicas em fase inicial podem propagar-se para outros países por meio do aumento das conexões entre os países envolvidos (Rigobon (2002)).

Claessens *et al.* (2000) definem contágio como a propagação de perturbações no mercado de um país para o mercado de um outro país, evidenciadas por meio de co-movimentos nas taxas de câmbio, preços de ações, fluxos de capitais e *spreads* soberanos.

Entre as definições apresentadas em Pericoli e Sbracia (2003) está a que

²Nas palavras do autor: “Era quase impossível se prever qual seria o próximo país a ser atingido” (tradução).

considera contágio financeiro um aumento significativo da probabilidade de crise em um país, condicional a uma crise em outro país. Trata-se esta da definição também utilizada no estudo de Eichengrenn *et al.* (1996) que pretenderam verificar se a ocorrência da crise cambial em país aumenta a probabilidade de ataques especulativos em outros países. Após análise, nos últimos trinta anos, de vinte países industrializados os autores encontraram evidências de que o canal de transmissão de comércio entre países aumenta a probabilidade de contágio durante crise cambiais.

Como apontado por Pericoli e Sbracia (2003), qualquer corpo teórico sobre contágio deve ser capaz de i) identificar quais são os canais de transmissão internacional do choque e ii) verificar se estes são estáveis, *i.e.* se há descontinuidades nesses canais, se há canais ativos apenas em períodos de crise, etc.

Seguindo a taxionomia adotada por Rigobon (2002), é possível agrupar as distintas definições de contágio em duas classes: *shift-contagion* e *contágio puro*.

A primeira classe de contágio – *shift contagion* – engloba todas as definições relacionadas a aumentos significativos dos mecanismos de propagação de choques entre países. Nestas, as transmissões de choques durante períodos de estabilidade econômica são admitidas como um canal estável de propagação. Intuitivamente, havendo aumento de intensidade na transmissão dos choques durante os períodos de crise econômica em relação aos períodos de estabilidade, esse aumento pode ser considerado contágio. Assim, as relações entre mercados podem ser mensuradas por diversas estatísticas como a correlação entre os retornos de ativos financeiros, a probabilidade de um ataque especulativo e a transmissão

de choques ou volatilidade.

Nota-se que esta classe de definições encara o fenômeno do contágio como um aumento na intensidade das relações entre os países, sem focar em como essa mudança ocorre. As definições de Claessens *et al.* (2000) e Eichengrenn *et al.* (1996) situam-se aqui.

A segunda classe de contágio – *contágio puro* – foca no tipo de mecanismo de propagação que transmite o choque. O princípio base dessas definições é considerar apenas os choques que não são transmitidos pelos canais padrões de transmissão (*e.g.* relações comerciais) e que, portanto, não podem ser explicados pelos fundamentos econômicos, como contágio. Assim, a presença de contágio fica evidenciada pelos excessos de transmissão de choques que não são explicados pelos fundamentos econômicos-financeiros do país.

A principal vantagem desta segunda classe com relação a primeira (*shift contagion*), segundo Rigobon (2002), está em sua definição extensa de contágio. Nas definições pertencentes a *contágio puro*, os mecanismos de transmissão de choques são explicitamente modelados e, portanto, apresentam uma resposta de como o fenômeno contágio se manifesta. Na prática, entretanto, a vantagem pode tornar-se inconveniente, posto que a implementação empírica necessária para testar essa classe de definições é consideravelmente mais complexa do que no caso do *shift contagion*. Na maior parte dos estudos relacionados a *contágio puro*, o contágio é tratado como o resíduo de uma regressão (*i.e.* a propagação que não é explicada pelos canais explicitamente modelados). Assim, se algum canal relevante de transmissão não for considerado na especificação, as

conclusões da análise empírica poderão ser viesadas.

No presente estudo, contágio financeiro é definido como o aumento significativo das conexões entre mercados após choque em um país específico, nos moldes da classe de *shift-contagion*. Dessa forma, a presença de contágio financeiro se provará por meio de uma quebra (estrutural) do comportamento padrão dessas relações entre países. De acordo com Forbes e Rigobon (2002), o uso desta definição apresenta a vantagem da não necessidade de explicitação do canal de transmissão do choque. E dada a extensa literatura sobre canais de propagação internacional de choques, ao definir-se contágio como retro-proposto, evita-se a necessidade de mensuração e diferenciação desses diversos canais de transmissão de choques. Tal proveito deverá estender-se também a questões empíricas, posto não ser possível observar todos os canais de transmissão de choques entre países (a definição em questão contorna tal restrição ao considerar toda informação disponível pelas observações em períodos de estabilidade econômica).

Patton (2009) identifica, porém, uma relevante dificuldade enfrentada ao se utilizar essa definição, visto que a mesma exige a proposição de um ponto de referência para o que seria um nível normal (padrão) de dependência entre mercados, devendo este ser estabelecido antes de se testar a hipótese da ocorrência de contágio.

Outra limitação, apresentada por Rigobon (2002), reside no fato de a definição aqui pretendida ser aplicável apenas no sentido afirmativo e não no sentido restritivo. Em outras palavras, a presença de um aumento da intensidade dos co-movimentos nos preços de mercados, condicionada a uma crise ocorrendo em

um país específico, é manifestação de contágio financeiro. Já a ausência dessa mudança nos canais de transmissão não pode ser considerada uma evidência da inexistência de contágio. Segundo o autor, a definição, portanto, não permite testar a ausência de contágio financeiro uma vez que não explicita um canal específico de transmissão de choques.

Por fim, vale ressaltar - princípio básico da teoria sobre investimento - que grande parte dos distúrbios econômicos são idiossincráticos a cada país, de modo que os mercados de ações em diferentes países devem apresentar, relativamente, baixas correlações. A correlação entre mercados nacionais é um dos principais elementos para administração de carteiras internacionais e a diversificação internacional entre mercados permite reduzir o risco total dessas carteiras sem, aparentemente, sacrifícios sobre o retorno. Entretanto, se as correlações entre mercados aumentam após um choque negativo, *i.e.* em períodos onde os benefícios da diversificação do risco são mais demandados, a evidência do fenômeno contágio financeiro pode ser interpretada como contrária à eficácia da diversificação internacional, por reduzir o risco de uma carteira em períodos de crise.

2.2 Testes empíricos sobre contágio

Como visto na seção anterior, uma teoria sobre contágio deve ser capaz de identificar os canais de transmissão do choque e verificar se estes são estáveis ou ativos apenas em períodos de crise.

As dificuldades econométricas enfrentadas na modelagem de contágio devem-se basicamente ao fato do fenômeno ser, muitas vezes, mensurado com variáveis

de frequência diária, por exemplo retornos dos mercados de ações, taxas de juros, *spread* soberano e taxas de câmbio. Dentre os problemas que essas variáveis apresentam, Rigobon (2001) aponta para os seguintes: viés de omissão, simultaneidade, heteroscedasticidade condicional e incondicional, correlação serial, não linearidade e a não normalidade.

Tomando-se como exemplo os retornos diários sob a ótica do mercado financeiro, estes apresentam heteroscedasticidade condicional e incondicional, correlação serial e são não-normais. Sob a perspectiva macroeconômica, retornos internacionais são simultaneamente determinados e estão constantemente sujeitos a choques comuns e não observáveis como mudanças de expectativa do investidor e choques de liquidez.

Dentre as principais metodologias para se mensurar contágio financeiro, encontram-se na literatura estudos envolvendo o coeficiente de correlação linear, modelos de componentes principais, regressões lineares, modelos *logit-probit* e, mais recentemente, os modelos GARCH multivariados, regressões quantílicas e a modelagem por cópulas. Uma recomendável revisão bibliográfica de algumas metodologias utilizadas para mensurar o contágio financeiro pode ser encontrada em Rigobon (2001).

2.3 Contágio financeiro no Brasil

Entre os primeiros trabalhos realizados sobre o tema, destaca-se, dentro do propósito aqui pretendido, o de Baig e Goldfajn (2000), que examina a ocorrência de contágio na crise russa com relação ao Brasil, através da análise

dos *spreads* de títulos Brady e índices de mercado de ações. Os autores, dotando-se de uma técnica de ajuste dos coeficientes de correlação, proposta por Forbes e Rigobon (2002)³, concluem a ocorrência do contágio, por meio de uma parada súbita no fluxo de capitais para Brasil e Rússia, sob o mecanismo de propagação do mercado de títulos da dívida.

O estudo de Mendes (2005) se distingue por utilizar uma metodologia semelhante à empregada neste estudo. A autora procura, por meio da teoria de cópulas, evidências de excesso de co-movimentos entre mercados que não sejam, necessariamente, explicados por teorias econômicas. A análise é feita para sete mercados de ações da América Latina, Ásia e África. Dentre os resultados encontrados, destaca-se o aumento de dependência durante perdas conjuntas, para os pares de países Argentina e México e Brasil e México.

Em Marçal e Valls Pereira (2008), testa-se a hipótese de contágio financeiro no mercado de títulos soberanos de quatro países emergentes (Brasil, Argentina, México e Rússia) durante as crises da década de 90. O teste é feito a partir de diferentes modelos de volatilidade multivariada. Os resultados evidenciaram que as estruturas de volatilidade não foram constantes durante as crises financeiras do período.

No recente trabalho de Marçal *et al.* (2010), os autores seguem percurso ainda mais rigoroso ao analisarem a presença de contágio financeiro condicionada aos fundamentos econômicos específicos de cada país. O procedimento de ajuste por meio de fundamentos foi muito bem exposto no trabalho de Pesaran e Pick

³O artigo usado por Baig e Goldfajan foi o texto para discussão do MIT de 1998.

(2007). Nele, os autores investigam as condições sob as quais o fenômeno do contágio pode ser diferenciado de movimentos de interdependência⁴.

Em Marçal *et al.* (2010), a partir da utilização de modelos multivariados DCC, testa-se a hipótese de contágio entre os países da América Latina e Ásia durante as crises financeiras ocorridas entre 1994 e 2003. Entre os resultados, os autores apresentam evidências de contágio regional na América Latina e Ásia, e contágio financeiro da Ásia para América Latina. Os resultados apontam ainda para os Estados Unidos como vetor de contágio para os países da América Latina e o Japão, como vetor de contágio para países da Ásia e América Latina.

Por fim, vale a menção ao recente estudo feito por Souza e Tabak (2009), como exemplo ilustrativo da aplicabilidade da teoria de contágio financeiro. Estes autores estendem a definição de contágio para investigar sua ocorrência entre os mercados bancários, durante a crise do *Subprime*. Considerando uma amostra de 48 países e realizando testes com base na metodologia proposta por Forbes e Rigobon (2002), os autores criaram um *ranking* dos países que mais sofreram contágio. No que se aplica ao Brasil, concluem que, de maneira geral, o efeito do contágio sobre os bancos brasileiros foi limitado.

3 Introdução à cópulas

A teoria de cópulas está diretamente ligada à teoria de modelagem de distribuições multivariadas e, portanto, ao conceito de dependência.

⁴A grosso modo, movimentos de interdependência são co-movimentos entre mercados que são explicados por fundamentos econômicos

Com efeito, toda distribuição multivariada possui informações sobre as distribuições marginais e sobre as relações de dependência entre as variáveis.

A modelagem da distribuição multivariada por cópulas permite isolar dessa estrutura de dependência a estrutura das distribuições marginais, permitindo, como apontado por McNeil, *et al.* (2005), uma modelagem das distribuições multivariadas do “específico para o geral”.

A teoria de cópulas possibilita a combinação das distribuições marginais com uma variedade de modelos de dependência representados pelas funções cópulas. Para simplificar a exposição, a teoria apresentada focará apenas nas distribuições bivariadas, muito embora seja aplicável também a dimensões maiores.

3.1 Cópulas

Antes de apresentar o Teorema de Sklar – base para a teoria de cópulas e pelo qual se faz a ligação entre a função cópula e a distribuição conjunta – a função cópula associa o plano unitário (no caso bidimensional) ao intervalo unitário. Ou alternativamente, e de acordo com Nelsen (2006), cópulas são distribuições conjuntas cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo $(0, 1)$.

3.1.1 Transformação Integral de probabilidade

Uma função cópula possui informações, a respeito da distribuição conjunta, que não pertencem às distribuições marginais. O isolamento das informações contidas nas distribuições marginais é obtido pela *transformação integral de probabilidade*, também conhecida como transformação quantílica.

Seja F_i a função de distribuição de uma variável Y_i , a função quantílica de F_i é definida para todo $u \in (0, 1)$ pela sua inversa generalizada⁵, como segue

$$F_i^{\leftarrow}(u) = \inf \{y_i \in \mathbb{R} : F_i(y_i) \geq u\} \quad (1)$$

Assim, a transformação integral de probabilidade assegura que Y_i distribui-se de forma F_i . Definindo as variáveis aleatórias U_1 e U_2 como $U_i \equiv F_i(Y_i)$, então U_i distribui-se uniformemente no intervalo unitário $(0, 1)$. Vale ressaltar que a recíproca também é válida, *i.e.* se $U_i \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ então para $Y_i \equiv F_i^{\leftarrow}(U_i)$, temos $Y_i \sim F_i$.

3.2 Teorema de Sklar

Pelo Teorema de Sklar (1959), é possível obter a distribuição conjunta de um vetor de variáveis a partir da função cópula e das transformações das variáveis em suas respectivas distribuições marginais uniformes, como segue:

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq F_1(y_1), U_2 \leq F_2(y_2)) \\ &= C(F_1(y_1), F_2(y_2)) \end{aligned} \quad (2)$$

Pelo Teorema de Sklar e pela definição da função densidade de probabilidade temos que :

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial y_1 \partial y_2} f_1(y_1) f_2(y_2) \\ &= c(u_1, u_2) f_1(y_1) f_2(y_2) \end{aligned} \quad (3)$$

⁵A inversa generalizada F^{\leftarrow} é a função inversa F^{-1} , quando F é contínua e estritamente crescente. A função inversa pode, portanto, ser considerada como um caso específico da inversa generalizada. Para uma leitura mais aprofundada, ver Magalhães (2006).

onde $c(\cdot)$ é a função de densidade cópula⁶.

Assim, a função cópula contém informações, sobre a distribuição conjunta, que não estão presentes nas distribuições marginais. Ao converter-se, por meio da transformação quantílica, as variáveis Y_1 e Y_2 em variáveis uniformes, a informação das distribuições marginais será filtrada, posto que U_1 e U_2 serão uniformes $(0, 1)$, independente de F_1 e F_2 . Segundo Patton (2002), por essa razão a função cópula também é conhecida como função de dependência.

3.3 Funções cópulas

Essa seção apresenta de maneira sucinta as funções cópulas. que serão utilizadas neste artigo.

A função cópula gaussiana será definida a seguir. Supondo Y_1 e Y_2 duas variáveis que se distribuem conjuntamente como uma distribuição gaussiana bivariada, com coeficiente de correlação linear ρ , *i.e.*

$$F(y_1, y_2) = \Phi_\rho(y_1, y_2)$$

As distribuições marginais serão distribuições gaussianas univariadas, *i.e.* $F_1(y_1) = \Phi(y_1)$ e $F_2(y_2) = \Phi(y_2)$. Assim, pela transformação quantílica, $y_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ e $y_2 = \Phi^{-1}(u_2)$. A representação da cópula gaussiana é dada por

$$\begin{aligned} C_G(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \end{aligned}$$

⁶ A relevância da função de densidade *copula* fica evidente na sua utilização na construção das funções verossimilhanças para estimação dos parâmetros das *copulas*, que é baseada no método de máxima verossimilhança.

A *cópula* gaussiana é, portanto, a função de dependência associada a uma normal bivariada, e embora não possua uma fórmula fechada, sua forma funcional é dada por

$$C_G(u_1, u_2 | \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt \quad (4)$$

onde $\rho \in (-1, +1)$. Assim, à medida que o coeficiente de correlação linear se aproxima dos limites de seu domínio, a dispersão das variáveis uniformes u_1 e u_2 no quadrado unitário diminui.

Outro exemplo de função *cópula* é a Joe-Clayton, também conhecida como *cópula* BB7 de Joe (1997). Essa função *cópula* é construída a partir da transformação de Laplace da *cópula* Clayton, e sua especificação é dada por

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \kappa, \gamma) = 1 - \left(1 - \left\{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5)$$

onde $\kappa \geq 1$ e $\gamma > 0$. Dentre as propriedades dessa função *cópula*, destaca-se que ela converge para a *cópula* Clayton para $\kappa = 1$, e para $\kappa \rightarrow \infty$ ou $\gamma \rightarrow \infty$ a função C_{JC} atinge a fronteira superior de Fréchet-Hoeffding⁷. Outra propriedade útil dessa função é o fato de que κ e γ são diretamente relacionados com as medidas de dependência de cauda, que captam o comportamento de variáveis aleatórias durante eventos extremos.

⁷Veja Trivedi & Zimmer (2007)

3.4 Métodos de estimação

A principal metodologia de estimação utilizada é o método da máxima verossimilhança (MV) e a estimação pode ser feita por meio de três abordagens distintas: MVE (Máxima Verossimilhança Exata), IM (Inferência para as Marginais) e MVC (Máxima Verossimilhança Canônica).

3.4.1 Máxima Verossimilhança Exata

Seja $\{y_{1,t}, y_{2,t}\}_{t=1}^T$ uma amostra aleatória de duas variáveis de interesse com T observações. Pelo Teorema de Sklar, a distribuição conjunta dessas variáveis é descrita por $C(F_1(y_{1,t}), F_2(y_{2,t}))$. A função log-verossimilhança é obtida a partir da equação 3 e dada por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_{1,t}), F_2(y_{2,t}) | \theta_c) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(y_{1,t} | \theta_1) + \sum_{t=1}^T \ln f_2(y_{2,t} | \theta_2) \quad (6)$$

onde, $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor de parâmetros que inclui os parâmetros da cópula e das distribuições marginais. O estimador MV – $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVE}$ – é determinado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVE} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} l(\boldsymbol{\theta})$$

Os parâmetros das distribuições marginais e da função cópula são estimados conjuntamente. Uma desvantagem, apontada por Bouyé *et al.* (2000) e Patton (2002), fica evidente ao utilizar-se a abordagem MVE para distribuições com grandes dimensões. O método torna-se computacionalmente intensivo, uma vez que a maximização é feita numericamente – não há solução analítica para a maximização da função log-verossimilhança. Outra desvantagem da abordagem

MVE se deve ao fato de que os parâmetros da cópula são estimados sob hipóteses acerca das distribuições das marginais.

3.4.2 Inferência para as Marginais

A abordagem IM, proposta por Joe (1997), tem como princípio a própria teoria de cópulas. Nessa abordagem há uma separação do vetor de parâmetros θ em parâmetros específicos para as distribuições marginais (θ_1 e θ_2) e em parâmetros comuns para a estrutura de dependência (θ_c).

Da equação 6, a função log-verossimilhança é dada por

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(y_{1,t}), F_2(y_{2,t}) | \theta_c) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(y_{1,t} | \theta_1) + \sum_{t=1}^T \ln f_2(y_{2,t} | \theta_2)$$

Sendo a função log-verossimilhança composta por dois termos aditivos, um envolvendo a função de densidade da *cópula* e outro envolvendo a função de densidade das marginais, a estimação de θ é feita em dois estágios: estimação dos parâmetros das distribuições marginais e estimação dos parâmetros da função cópula, condicionada nas estimativas obtidas para as marginais.

3.4.3 Máxima Verossimilhança Canônica

Diferentemente das abordagens MVE e IM, a abordagem MVC não depende de hipóteses sobre as distribuições das marginais para estimar os parâmetros θ_c da função cópula. A transformação das observações $(y_{1,t}, y_{2,t})$ em variáveis uniformes $(u_{1,t}, u_{2,t})$ é feita utilizando-se as funções de distribuições empíricas $F_j^T(y)$, onde

$$F_j^T(y) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbb{I}(Y_{j,t} \leq y) \quad (7)$$

onde $\mathbb{I}(\cdot)$ é uma função indicadora. Após tal transformação, os parâmetros da função cópula são determinados por

$$\hat{\theta}_c = \arg \max_{\theta_c \in \Theta} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_{1,t}, \hat{u}_{2,t} | \theta_c)$$

O estimador para θ_c é chamado de estimador Omnibus⁸. A matriz de informação de Godambe ou a matrix de covariância semi-paramétrica, dada em Genest *et al.* (1995), podem ser usadas para inferência.

4 Medidas de Dependência

Em Nelsen (2006), é possível encontrar duas métricas de associação que definem duas classes de medidas: a métrica da *concordância* (κ) e a métrica da *dependência* (δ). O autor lista uma série de propriedades que uma medida deve atender para pertencer a cada uma das métricas.

Uma diferença entre as medidas de dependência e as medidas de concordância é dada no intervalo na qual elas estão definidas, onde $\kappa(\cdot) \in [-1, +1]$ e $\delta(\cdot) \in [0, +1]$. Nota-se que essa propriedade permite que as medidas de concordância indiquem qual a “direção” da associação entre as variáveis. Já as medidas de dependência apenas mostram se as variáveis são funcionalmente dependentes ou não.

Em Embrechts *et al.* (2002), são listadas algumas propriedades, consideradas pelos autores, necessárias à uma medida para que esta possa medir de forma adequada a associação entre variáveis aleatórias. Seja $\delta(\cdot)$ uma medida

⁸Ou pseudo estimador de verossimilhança.

de dependência⁹ que designa um número real para qualquer par de variáveis aleatórias então, de acordo com os autores, as propriedades desejáveis dessa medida são: simetria, normalização, co-monotonicidade, contra-monotonicidade e transformações monotônicas.

O coeficiente de correlação linear satisfaz apenas as duas primeiras propriedades. As medidas obtidas a partir das correlações de posto satisfazem todas as propriedades se as variáveis forem contínuas.

Dentre as medidas de concordância, destacam-se a correlação de Spearman e o tau de Kendall. Ambas são medidas de correlação entre os postos (*ranking*) das variáveis, ao invés de seus valores efetivos e, por isso, são também conhecidas como correlações de posto (*rank correlation*). Dentre as medidas de dependência, destacam-se a dependência quantílica e a dependência de caudas.

4.1 Correlação de Pearson (coeficiente de correlação linear)

O coeficiente de correlação linear é freqüentemente usado como medida de dependência linear entre duas variáveis. Seja Y_1 e Y_2 , duas variáveis aleatórias com variâncias finitas e não nulas, a correlação entre elas é definida por

$$\rho = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{var(Y_1)}\sqrt{var(Y_2)}} \quad (8)$$

⁹Os autores usam o termo *dependência* como sinônimo de associação, não considerando a distinção entre os conceitos e as propriedades de dependência e concordância apresentados em Nelsen (2006). Assim, a lista pode ser interpretada como uma lista de propriedades de uma medida global de dependência.

onde, $Cov(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}(Y_1 Y_2) - \mathbb{E}(Y_1) \mathbb{E}(Y_2)$.

A correlação de Pearson, embora possa ser escrita a partir das funções cópulas, ela terá o seu valor como função do tipo de distribuição marginal, pois

$$\begin{aligned} cov(Y_1, Y_2) &= \int \int_D (F(y_1, y_2) - F_1(y_1) F_2(y_2)) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) dF_1^{-1}(u_1) dF_2^{-1}(u_2) \end{aligned}$$

onde D é o domínio em que Y_1 e Y_2 são definidas.

Embora o coeficiente de correlação linear seja a medida mais popular utilizada para medir a associação entre duas variáveis, ele apresenta várias deficiências, conforme Embrechts *et al.* (2002). Além disso, as variáveis precisam atender a uma série de requisitos para que o coeficiente de correlação linear seja de fato uma medida de concordância. O estudo de Embrechts *et al.* (2002) relata com maiores detalhes as limitações desta medida.

4.2 Correlação de Spearman

A correlação de Spearman é uma medida não-paramétrica de associação baseada em dados ordenados (*ranked*). Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas. A correlação de Spearman (ρ_S) é definida por:

$$\rho_S = \rho(F_X(X), F_Y(Y)) \tag{9}$$

Como foi dito antes, as medidas de associações podem ser diretamente obtidas a partir das funções cópulas e, no caso da correlação de Spearman, sua

representação fica como segue:

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3 \quad (10)$$

Nota-se que a integral acima é apenas o valor esperado do produto de duas variáveis uniformes em $(0, 1)$, cuja distribuição conjunta é dada pela cópula C e, portanto, pode ser reescrita de forma idêntica a correlação linear entre as duas variáveis uniformes U_1 e U_2 .

4.3 Tau de Kendall

O tau de Kendall também é uma medida de correlação de posto. Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) dois pares de variáveis aleatórias idênticas e independentemente distribuídas, o tau de Kendall τ_K entre as variáveis é definido pela diferença entre a probabilidade de concordância e a probabilidade de discordância entre os pares (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , *i.e.*

$$\tau_K = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (11)$$

A definição de τ_K acima é equivalente a $\tau_K = cov[\text{sign}(X_1 - X_2), \text{sign}(Y_1 - Y_2)]^{10}$, e sua representação em termos da função cópula C é dada por

$$\tau_K = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad (12)$$

Segundo Balakrishnan e Lai (2009), $\hat{\tau}_K$ e $\hat{\rho}_S$ são, relativamente ao $\hat{\rho}$, estimadores menos sensíveis à presença de *outliers*.

¹⁰A função $\text{sign}(x)$ retorna o sinal da variável x , *i.e.* será -1 para $x < 0$, 0 para $x = 0$ e $+1$ para $x > 0$.

De acordo com Gibbons (1993), a vantagem do tau de Kendall sobre a correlação de Spearman reside na sua simples interpretação como a diferença, na amostra, entre a proporção de pares concordantes e pares discordantes.

4.4 Dependência quantílica

A dependência quantílica está relacionada à medida de Coles *et al.* (1999) e mede a probabilidade de duas variáveis estarem ambas abaixo ou acima de um determinado quantil de suas distribuições univariadas, *i.e.* sendo ε_- o limiar inferior e ε_+ o limiar superior, a dependência quantílica superior e inferior entre as duas variáveis é dada por

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon_+) &= \mathbb{P}[Y_1 > F_1^{-1}(\varepsilon_+) | Y_2 > F_2^{-1}(\varepsilon_+)] \\ \lambda(\varepsilon_-) &= \mathbb{P}[Y_1 \leq F_1^{-1}(\varepsilon_-) | Y_2 \leq F_2^{-1}(\varepsilon_-)]\end{aligned}\tag{13}$$

Pela equação 13, percebe-se que a dependência quantílica é uma medida diretamente associada ao conceito econômico de *Valor em Risco* (VaR) e pode ser representada equivalentemente por

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon_+) &= \mathbb{P}[Y_1 > VaR_{Y_1}(\varepsilon_+) | Y_2 > VaR_{Y_2}(\varepsilon_+)] \\ \lambda(\varepsilon_-) &= \mathbb{P}[Y_1 \leq VaR_{Y_1}(\varepsilon_-) | Y_2 \leq VaR_{Y_2}(\varepsilon_-)]\end{aligned}$$

ou seja, a dependência quantílica é representada como a probabilidade de ambas as variáveis ultrapassarem seus valores em risco.

Pela transformação de probabilidade integral é possível obter a representação da medida em termos da função cópula C , onde

$$\lambda(u) = \begin{cases} \mathbb{P}(U_1 > u | U_2 > u) = \frac{C(u,u)}{u} = \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}, & \text{para } u > 1/2 \\ \mathbb{P}(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \frac{C(u,u)}{u}, & \text{para } u \leq 1/2 \end{cases}$$

4.5 Dependência das caudas

Sendo U_1, U_2 duas variáveis aleatórias distribuídas uniformemente no intervalo unitário $(0, 1)$ a dependência das caudas é definida como o limite das dependências quantílicas, com o limiar u direcionando-se aos extremos zero (no caso de dependência da cauda inferior) ou 1 (dependência da cauda superior), *i.e.*

$$\begin{aligned}\tau^U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(U_1 > u | U_2 > u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(U_2 > u | U_1 > u) \\ \tau^L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_1 \leq u | U_2 \leq u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(U_2 \leq u | U_1 \leq u)\end{aligned}\tag{14}$$

Do mesmo modo apresentado até agora para as demais medidas, τ^U e τ^L podem ser obtidas diretamente a partir da função *cópula* C , onde:

$$\begin{aligned}\tau^U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ \tau^L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}\end{aligned}$$

Assim se $\tau^U \in (0, 1]$ então a cópula C apresenta dependência na cauda superior e C não terá dependência na cauda superior se $\tau^U = 0$. Similarmente, se $\tau^L \in (0, 1]$, a cópula C possui dependência na cauda inferior e para $\tau^L = 0$, a cópula C não tem dependência na cauda inferior. No caso em que $\tau^U, \tau^L = 0$, as variáveis são assintoticamente independentes nas caudas superior e inferior.

4.6 Outras medidas de associação

Entre outras medidas que merecem destaque e possuem aplicabilidade na modelagem financeira estão o índice de Gini, a Dependência do Quadrante Positivo (DQP) e o beta de Blomqvist.

O índice de Gini ι de duas variáveis aleatórias, cuja função cópula é C , é dado por

$$\iota = 2 \int_0^1 \int_0^1 (|u_1 + u_2 - 1| - |u_1 - u_2|) dC(u_1, u_2) \quad (15)$$

O índice de Gini é, do mesmo modo que o tau de Kendall e a correlação de Spearman, uma medida de associação baseada na métrica da concordância.

O beta de Blomqvist também é uma medida de associação que segue a métrica da concordância e avalia a dependência no centro da distribuição, dado pelas medianas das distribuições marginais. sendo conhecido como o coeficiente de correlação mediana. Assim, sendo $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ as medianas de duas variáveis aleatórias, o índice de dependência é dado por

$$\beta = 2\mathbb{P}[(Y_1 - \tilde{y}_1)(Y_2 - \tilde{y}_2) > 0] - 1 = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1 \quad (16)$$

O beta de Blomqvist, por medir a dependência em torno da mediana é mais robusta à presença de *outliers*.

Por fim, destaca-se a Dependência do Quadrante Positivo (DQP), uma associação muito utilizada em finanças que, diferentemente das últimas medidas retro-mencionadas, é uma medida de dependência. Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias, elas serão dependentes no quadrante positivo, se

$$\mathbb{P}(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 > y_1) \mathbb{P}(Y_2 > y_2) \quad (17)$$

Assim se as variáveis aleatórias representam perdas financeiras, a dependência do quadrante positivo implicará em uma perda simultânea maior sob dependência entre as variáveis do que sob variáveis independentes. Se as variáveis se

distribuem de acordo com uma distribuição $F(\cdot)$, então a DQP implica que

$$F(y_1, y_2) \geq F_1(y_1) F_2(y_2) \text{ para todo } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pelo *Teorema de Bayes*, a desigualdade da DQP implica em $\mathbb{P}(Y_1 \leq y_1 | Y_2 \leq y_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 \leq y_1)$, ou equivalentemente, $\mathbb{P}(Y_2 \leq y_2 | Y_1 \leq y_1) \geq \mathbb{P}(Y_2 \leq y_2)$.

5 Cópulas condicionais

Esta seção faz a conexão entre as teorias de contágio financeiro e a de cópulas, *i.e.* como é possível a modelagem de contágio com cópulas.

5.1 Cópulas condicionais

De acordo com Patton (2002), a teoria de cópulas condicionais, salvo algumas ressalvas, é simplesmente uma extensão da teoria incondicional de cópulas. Sejam $Y_{1,t}$ e $Y_{2,t}$ duas variáveis aleatórias que representam dois retornos para o período t e, $F_{1,t}(Y_{1,t}|\Omega_{t-1})$ e $F_{2,t}(Y_{2,t}|\Omega_{t-1})$ suas respectivas funções de distribuição marginais condicionais ao conjunto de informação Ω_{t-1} gerado até o período $t-1$ e definindo $U_{1,t}$ e $U_{2,t}$ como a equivalente condicional das transformações de probabilidade integral das variáveis *i.e.* $U_{1,t} \equiv F_2(Y_{1,t}|\Omega_{t-1})$ e $U_{2,t} \equiv F_2(Y_{2,t}|\Omega_{t-1})$ então, a extensão do Teorema de Sklar para o caso condicional assegura que uma distribuição conjunta condicional ao conjunto de informação Ω_{t-1} das variáveis estudadas, pode ser decomposta nas respectivas funções de distribuição marginais condicional ao conjunto de informação Ω_{t-1}

e em uma função cópula também condicionada ao conjunto Ω_{t-1} , *i.e.*

$$F(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1}) = C(F_1(y_{1,t} | \Omega_{t-1}), F_2(y_{2,t} | \Omega_{t-1}) | \Omega_{t-1}) \quad (18)$$

A representação em termos de função de densidade é dada por

$$f(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1}) = c(u_{1,t}, u_{2,t} | \Omega_{t-1}) f_1(y_{1,t} | \Omega_{t-1}) f_2(y_{2,t} | \Omega_{t-1}) \quad (19)$$

onde $c(\cdot | \Omega_{t-1})$ é a densidade cópula condicional.

A versão condicional da função log-verossimilhança é dada por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \ln c(u_{1,t}, u_{2,t}; \boldsymbol{\theta}_c | \Omega_{t-1}) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(y_{1,t}; \boldsymbol{\theta}_1 | \Omega_{t-1}) + \sum_{t=1}^T \ln f_2(y_{2,t}; \boldsymbol{\theta}_2 | \Omega_{t-1})$$

Observa-se que, tanto as distribuições marginais como a função cópula, devem ser condicionadas ao mesmo conjunto de informações Ω . No contexto da teoria de contágio, e sob a definição utilizada no presente trabalho, equivale a dizer que a quebra estrutural deve ser condicionada a todas as distribuições marginais, além da cópula.

Patton (2002) mostra que cópulas condicionais possuem as mesmas propriedades que as cópulas incondicionais. A modelagem da distribuição conjunta condicional permite extrair, além da média e variância condicional, outras diversas medidas de dependência que são objeto de estudo na teoria de contágio, tais como correlações lineares, correlações de posto (correlação de Spearman, tau de Kendall) e dependências de caudas.

5.2 Cópulas condicionais variantes no tempo

Para modelar a transformação variante no tempo, assumiu-se que a forma funcional da função cópula permaneceu constante ao longo do tempo, enquanto que o seu parâmetro de dependência variou segundo alguma equação de evolução. É possível encontrar em Patton (2002) diversos exemplos de cópulas cujo parâmetro de dependência é uma função paramétrica de transformações de observações defasadas mais um termo auto-regressivo¹¹. Segundo o autor, essa metodologia segue o espírito das funções de densidade condicionais autoregressivas, proposta por Hansen (1994). De acordo com a classificação proposta por Manner e Reznikova (2009), essa metodologia se engloba na classe de modelos de cópulas orientados a observações.

A maior dificuldade ao especificar como os parâmetros evoluem no tempo é, segundo Patton (2002), identificar a variável motriz. Na cópula SJC, a equação de evolução utilizada, para a dependência da cauda, foi

$$\tau_t = \Lambda \left(\omega_\tau + \beta_\tau \cdot \tau_{t-1} + \alpha_\tau \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \right) \quad (20)$$

onde $\Lambda(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ é uma transformação logística usada para que o parâmetro de dependência permaneça no intervalo $(0, 1)$. Pela especificação acima, pode-se perceber que o parâmetro de dependência segue, antes da transformação¹², um processo $ARMA(1, n)$, onde o termo auto-regressivo τ_{t-1} cap-

¹¹Outras especificações similares são encontradas em Creal *et al.* (2008).

¹²Após a transformação, o processo deixa de seguir uma estrutura ARMA, pois esta transformação não é linear e, portanto, não preserva a estrutura linear necessária nos processos tipo ARMA.

tura uma parte da persistência do parâmetro de dependência e os parâmetros restantes capturam certa variação na dependência.

A variável motriz escolhida pelo autor nessa especificação é, portanto, a média da diferença absoluta entre $u_{1,t}$ e $u_{2,t}$ sobre as últimas n observações.

Outras variações dessa variável motriz foram tentadas em Patton (2002), como *e.g.* ponderar as observações pela proximidade dos extremos ou usar uma variável indicadora para caso da observação pertencer a cada um dos quatros quadrantes. Porém nenhuma dessas variações apresentou melhoras significantes.

Para a cópula gaussiana, Patton (2002) utilizou um critério similar ao proposto pela cópula SJC, para fins de comparação. A equação de evolução utilizada na cópula gaussiana para a correlação linear, foi

$$\rho_t = \tilde{\Lambda} \left(\omega_\rho + \beta_\rho \cdot \rho_{t-1} + \alpha_\rho \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(u_{1,t-i}) \Phi^{-1}(u_{2,t-i}) \right) \quad (21)$$

onde $\tilde{\Lambda}(x) = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ é uma transformação logística modificada, conhecida como *transformação de Fisher*, usada para estabilizar a variância do coeficiente de correlação linear e permitir que ρ_t permaneça, em todo os períodos, no intervalo $(-1, +1)$. Pelo mesmo princípio que a cópula SJC, o parâmetro de dependência segue, antes da transformação, um processo $ARMA(1, n)$, com um termo auto-regressivo ρ_{t-1} para captar uma parte da persistência e os parâmetros restantes capturando certa variação na dependência.

Nota-se, pela especificação, que o autor escolheu como variável motriz a média de $\Phi^{-1}(u_{1,t-i}) \Phi^{-1}(u_{2,t-i})$ sobre as últimas n observações, escolha que foi feita para que a especificação da cópula gaussiana fosse comparável com a

da cópula SJC.

O parâmetro n , que representa o tamanho da janela, pode ser interpretado, segundo Creal *et al.* (2008), como um parâmetro suavizador. Na literatura é possível encontrar diferentes tamanhos de janelas que vão de $n = 1$, *e.g.* Dias e Embrechts (2003), até $n = 20$, como o caso de Benediktsdottir e Scotti (2009). O tamanho adotado em Patton (2002) foi $n = 10$ e é o tamanho utilizado no presente trabalho.

6 Testando a hipótese de contágio financeiro

6.1 Dados

Foram selecionados índices que representem quatro distintos mercados no mundo, para a América Latina foi escolhido o IBOVESPA (IBOV), América do Norte o índice *Standard & Poor's 500* (SP500), o *Financial Times Stock Exchange* (FTSE) de Londres foi selecionado para o mercado europeu e o índice NIKKEI 225 (NIKKEI) para o mercado asiático.

O período usado foi de 04/01/2000 a 30/12/2009¹³, foi feito um ajuste nas observações de cada um destes índices para eliminar diferenças de tamanho nas amostras (causados por feriados nacionais). Para tanto, utilizou-se o procedimento de recompor os valores em falta por meio de um *modelo de nível local*¹⁴.

¹³A base de dados foi obtida através do YAHOO!®FINANCE. Os códigos das séries são BVSP para o IBOVESPA, GSPC para o S&P500, FTSE para o FTSE e N225 para o NIKKEI.

¹⁴Os valores faltantes foram substituídos pelas estimativas suavizadas do componente de nível. A estimação do modelo foi feita no STAMP 8.2 ver Koopman *et alli* (2009).

Após o ajuste, a base de dados passou a contar com 2.607 observações para todos os índices. A evolução no tempo de cada índice está ilustrada na Figura 6.1.1.

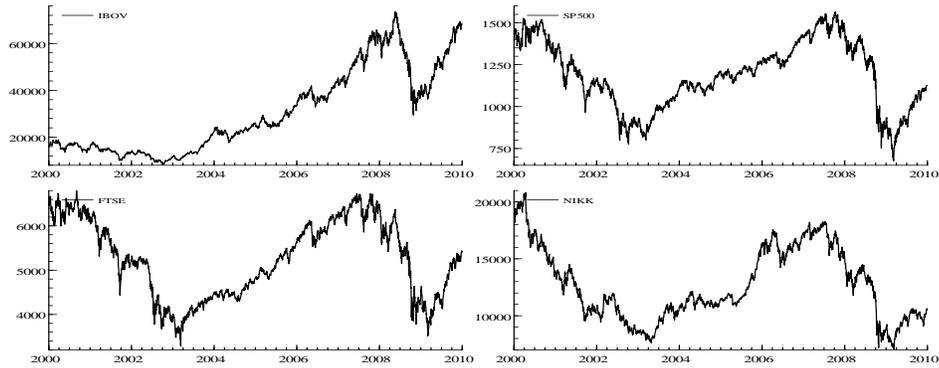


Figura 6.1.1 - Índices de mercados selecionados

Ainda, por causa dos diferentes fusos horários, foi realizado um segundo ajuste na base de dados. Em relação à Hora de Greenwich (GMT), Nova Iorque está GMT - 5h00, São Paulo está GMT - 3h00 e Tóquio está GMT + 9h00. Tomando-se como exemplo Brasil e Japão, que possuem uma diferença de 12 horas, os negócios efetuados na Bolsa de Tóquio estão virtualmente um dia à frente dos negócios realizados no Brasil. Para corrigir tal efeito, os retornos foram sincronizados segundo o seguinte corte temporal: $[r_t^{IBOV}, r_t^{SP500}, r_t^{FTSE}, r_{t+1}^{NIKK}]$. A base de dados final conteve uma amostra de retornos entre os períodos de 05/01/2000 - 29/12/2009 com total de 2.605 observações.

6.2 Estatísticas descritivas dos retornos

Essa seção apresenta algumas estatísticas acerca dos momentos das distribuições dos retornos e da associação entre os mercados, fornecendo uma primeira ilustração da dependência entres os retornos.

Os retornos dos índices foram computados de forma logarítmica, por meio da diferença de logs, *i.e.* $r_t^i = \ln [I_t/I_{t-1}] \times 100$, onde I_t representa o fechamento diário do índice no período t .

A evolução dos retornos no período de 2000 a 2009 é apresentada na Figura 6.2.1.

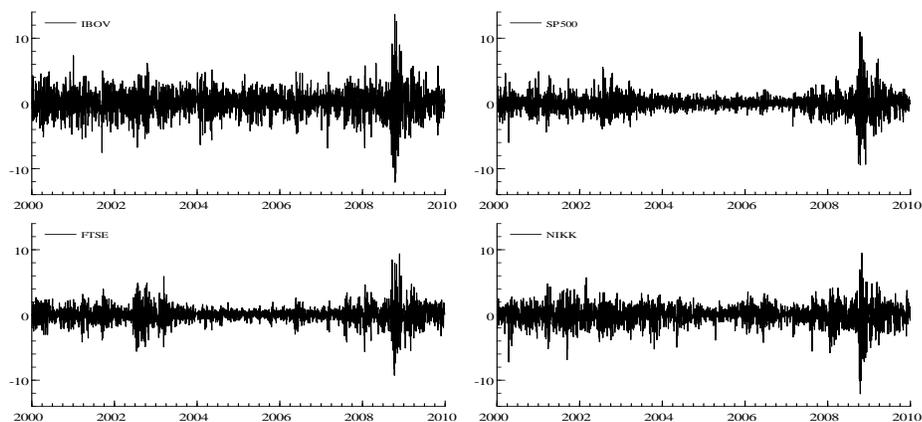


Figura 6.2.1 - Retornos (logarítmicos) diários

Pelos gráficos sugere-se que o índice BOVESPA apresenta retornos bem mais voláteis, seguido pelo índice NIKKEI, em comparação com os outros dois índices.

Ainda, para o período de 2008 a 2009, o aumento de volatilidade dos retornos está presente em todos os índices analisados.

Como foi visto na seção 2, a definição de contágio utilizada no presente estudo requer, para testar a hipótese referida, que seja estabelecido um período de referência ou estabilidade e outro representando o período de crise. O período de referência compreende observações entre início de 2000 e fim de 2006 e o outro período com as observações entre início de 2007 a fim de 2009.

De acordo com as estatísticas dos retornos (Tabela 1), sugere-se, inicialmente, para os quatros índices, que a média dos retornos no período pré-crise é superior à média para toda amostra e a média dos retornos no período de crise é inferior à média de toda amostra. Ainda em relação aos quatros índices, nota-se que para períodos de crise, a volatilidade¹⁵ é superior à média (valor para a amostra toda) e para o período de estabilidade financeira, a volatilidade é inferior à média. Para o período analisado, o aumento de volatilidade do período de crise em relação ao período de estabilidade ficou em 45% para o IBOVESPA, 75% para o S&P500, 60% para o FTSE e 55% para o NIKKEI.

No que diz respeito à presença de valores extremos, o curtose é maior no período de crise comparativamente à amostra toda e ao período pré-crise. Em relação aos dois período analisados, o valor da curtose mais que dobrou para o IBOVESPA (foi de 3.72 para 8.16), aumentou em 85% para o S&P500, 45% para o FTSE e dobrou para o NIKKEI.

Quanto à simetria das distribuições, todas as séries apresentaram assimetria

¹⁵Medida como o desvio padrão dos retornos diários.

negativa para a amostra toda, indicando que a presença de valores extremos negativos é mais recorrente (*i.e.* a cauda esquerda é mais pesada). A série que apresentou maior assimetria foi o NIKKEI com -0.61, seguido pelo FTSE com -0.12, IBOVESPA com -0.09 e, por último, S&P500 com -0.06.

As estatísticas Jarque-Bera rejeitam a hipótese nula de normalidade dos retornos para todos os índices em todos os grupos amostrais, com o *p-valor* inferior a 0.01.

Tabela 1: Estatísticas Descritivas dos Retornos Diários

Estatística	Período de Estabilidade Econômica				Período de Crise Econômica				Amostra Toda			
	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
Média	0.057	0.001	-0.004	-0.004	-0.029	-0.086	-0.065	-0.126	0.056	-0.008	-0.008	-0.022
Mediana	0.086	0.027	0.045	0.013	0.173	0.038	-0.012	0.007	0.128	0.038	0.045	0.030
Máximo	7.335	5.574	5.904	5.735	13.677	10.957	9.384	9.494	13.677	10.957	9.384	9.494
Mínimo	-7.539	-6.005	-5.589	-7.234	-12.096	-9.470	-9.265	-12.111	-12.096	-9.470	-9.625	-12.111
Desvio Padrão	1.747	1.087	1.108	1.334	2.546	1.927	1.803	2.083	1.945	1.358	1.311	1.544
Assimetria	-0.15	0.18	-0.14	-0.29	0.04	-0.20	-0.01	-0.87	-0.09	-0.06	-0.12	-0.61
Curtose	3.72	5.68	6.34	4.70	8.16	10.58	9.28	9.43	6.28	11.31	9.57	8.67
Jarque Bera	46.58	555.51	853.22	244.82	581.11	1256.25	858.26	966.69	1589.68	7498.67	4694.96	3646.27
No. Obs.	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]	[0.000]
	1823	1823	1823	1823	523	523	523	523	2605	2605	2605	2605

Obs: Valores entre colchetes representam o p-valor das estatísticas Jarque-Bera. A amostra toda compreende os retornos entre 05/01/2000 e 31/12/2009. O período pré crise econômica compreende os retornos entre 05/01/2000 até 29/12/2006. O período de crise econômica compreende os valores entre 01/01/2007 e 31/12/2009.

Como para o presente trabalho foram escolhidos quatro diferentes índices, temos um total 6 possíveis relações bivariadas de dependência. Entretanto, como o interesse é analisar o contágio durante a crise dos *Subprime*, que se iniciou nos Estados Unidos, foram escolhidas apenas as relações que envolvam o índice americano S&P500. A Figura 6.2.2 apresenta o gráfico de dispersão, feito com amostra toda.

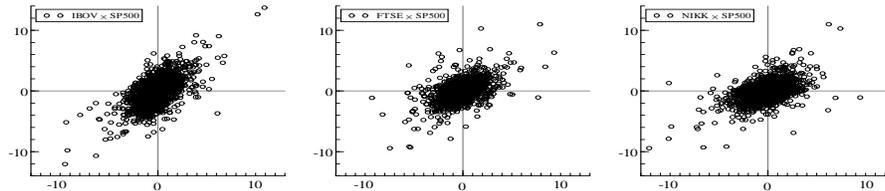


Figura 6.2.2 - Diagrama de Dispersão dos retornos diários

É possível afirmar, através da Figura 6.2.2 que o mercado apresenta uma maior associação em relação ao mercado norte-americano é o mercado brasileiro, uma vez que a associação entre estes dois mercados parece ser maior do que entre os outros embora nenhum teste estatístico tenha sido feito para confirmar esta hipótese.

A falta de constância da volatilidade das séries financeiras é fato estilizado que pôde ser modelado a partir do surgimento dos modelos da família ARCH e de volatilidade estocástica. Também tem sido incorporado como fato estilizado o fenômeno de que a correlação entre os retornos dos ativos não é constante no

tempo. Este encontra-se documentado pelos trabalhos de Erb *et. al* (1994), Longin e Solnik (2001), Engle (2002) e Patton (2006).

Além da correlação linear, a correlação de Spearman e o tau de Kendall foram escolhidas como medidas de concordância, e a dependência quantílica¹⁶, como medida de dependência. Estas foram computadas para captar associações não lineares entre as variáveis. Os resultados das estatísticas foram sintetizados na figura abaixo.

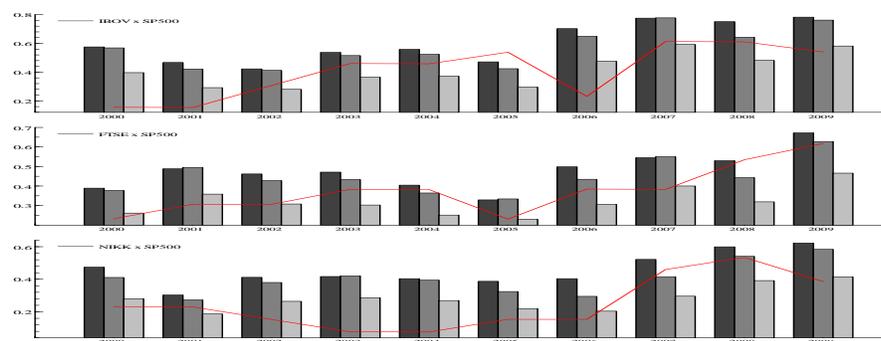


Figura 6.2.3 - Medidas de associação - ρ (escuro), ρ_S (médio), τ_K (claro) e λ (linha)

Percebe-se, independentemente da medida utilizada, que houve um aumento de associação entre todas as possíveis relações dois a dois nos anos entre 2007 a 2009.

Em relação à média no ano dos retornos diários, a Figura 6.2.4, apresenta os resultados para o mesmo intervalo de anos. De acordo com a figura, percebe-se

¹⁶Dependência quantílica inferior a 5%.

que a média no ano foi negativa para os quatro índices nos anos entre 2000 e 2002. De fato durante esse período, os países analisados vivenciaram algumas crises econômicas, *e.g.* quedas das ações das empresas de tecnologia em 2000, crise argentina em 2001). O período entre 2003 e 2006 apresentou retornos médios positivos para todos os índices analisados. E por fim os anos entre 2007 e 2009 foram marcados pela crise do *Subprime*. O Relatório de Inflação do Banco Central do Brasil de dezembro de 2008 apresenta um cronograma com respostas governamentais dos principais bancos centrais do mundo para conter os efeitos da crise do *Subprime*. De acordo com esse relatório, em meados de 2007 já haviam episódios de intervenções por parte das autoridades monetárias. Em Murphy (2009), o autor apresenta que os preços das hipotecas nos Estados Unidos atingiram o pico em meados de 2006. Segundo o mesmo autor, e em consonância com o relatório do Banco Central do Brasil, em meados de 2007 já havia evidências das dificuldades de alguns bancos em levantar caixa, causadas pela uma maior aversão ao risco das exposições das hipotecas. Por fim, o *Global Financial Stability Report* (outubro de 2008) do FMI, estabelece o verão de 2007 (*i.e.* meados de 2007) como marco para o início da crise financeira.

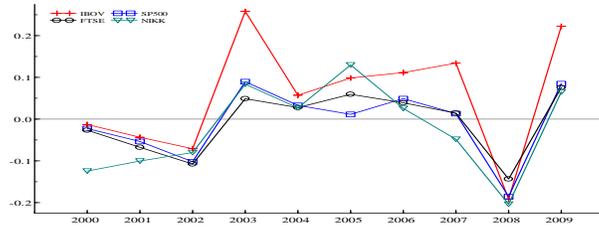


Figura 6.2.4 - Média anual dos retornos (logarítmicos)
diários

6.2.1 Períodos de análise

A fim de testar a hipótese de contágio financeiro, nos termos do *shift contagion*, a amostra foi dividida em dois grupos: um de referência, representando a dependência entre mercados em períodos de estabilidade, e outro com as observações representando o período de crise. Com base nas informações obtidas nessa seção, estabeleceu-se, exogenamente, como período de crise e (pós crise) as observações contidas entre 2007 e 2009. Por exclusão, o grupo de referência conta com as observações entre 2000 a 2006. O uso exógeno do estabelecimento do período de crise também foi utilizado em Horta, Mendes e Viera (2007). Neste artigo os autores também testaram a hipótese de contágio financeiro durante a crise do Subprime para um grupo de 7 países desenvolvidos¹⁷. Também é possível encontrar na literatura sobre contágio financeiro, tratamentos endógenos da determinação do período de crise. Dentre as abordagens empregadas, destaca-se

¹⁷Diferentemente que o presente artigo, os autores utilizaram a teoria de cópulas incondicionais (*i.e.* não variantes no tempo) para modelar o contágio financeiro.

o uso de modelos com mudança de regime (seguindo cadeias de Markov), sendo algumas referências, os artigos de Rodriguez (2007) e Samitas, Kenourgeos e Pattalides (2007) que tratam endogenamente o contágio financeiro utilizando a teoria de cópulas com mudança de regime. Outra abordagem que se destaca é o uso de testes de mudanças de pontos¹⁸ para identificar quebras estruturais na função cópula. O trabalho de Dias e Embrechts (2004) é uma das referências que utilizam estes testes e o artigo de Manner e Candelon (2007) faz uma aplicação destes testes para analisar a hipótese de contágio financeiro durante a crise asiática.

6.3 Modelos para as distribuições marginais

A distribuição marginal de cada retorno foi parametrizada de acordo com os modelos ARMA(m,n)-GARCH(p,q), *i.e.* para $i = IBOV, SP500, FTSE, NIKKEI$,

$$\begin{aligned}\Psi(L)r_t^i &= \Theta(L)\varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= z_t\sigma_t, \text{ onde } z_t \sim iid(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta(L)\sigma_{t-1}^2\end{aligned}\tag{22}$$

onde L é o operador de defasagem e $\Psi(L)$, $\Theta(L)$, $\alpha(L)$ e $\beta(L)$ são os polinômios de defasagem com as respectivas ordens m , n , q e p . Uma vez que a estimação dos parâmetros foi feita pelo método de máxima verossimilhança, foi necessário fazer hipóteses adicionais sobre a distribuição do processo de inovação z_t . Dado que as estatísticas descritivas dos retornos apresentaram indícios de assimetria e excesso de curtose, foram utilizadas, além da distribuição normal, a distribuição

¹⁸ *Change-point tests.*

t-Student e *t-Student* assimétrica. De acordo com o critério de informação BIC, a distribuição que melhor se ajustou foi a *t-Student* assimétrica. Seguindo Bauwens e Laurent (2005), para captar o excesso de curtose (incondicional), os modelos GARCH foram primeiramente combinados com erros na forma de *t-Student* que, para modelagem de séries financeiras, exibiram uma melhor performance do que o uso de erros normais. Entretanto, o *efeito alavancagem*, fato estilizado presente nas séries financeiras, não é captado por nenhuma das duas densidades, uma vez que ambas são simétricas. Uma alternativa para modelar tal assimetria das séries financeiras, faz-se a combinação do uso de distribuições com caudas pesadas (*e.g.* *t-Student*) e “especificações GARCH assimétricas” (*e.g.* EGARCH, GJR-GARCH). Os autores, porém, afirmam que essa alternativa geralmente não consegue captar completamente a assimetria da série. Uma outra explorada foi o desenvolvimento de distribuições assimétricas. As estimações foram feitas no GARCH 6.1 ver Laurent (2009), onde a densidade *t-Student* assimétrica utilizada é uma re-parametrização¹⁹ da distribuição proposta por Fernández e Steel (1998)²⁰.

A forma funcional de sua densidade é dada por $f(z|\xi, \nu)$, onde

$$f(z|\xi, \nu) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \text{sg}[\xi(sz + m)|\nu], & \text{se } z < -m/s \\ \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \text{sg}[\xi(sz + m)/\xi|\nu], & \text{se } z \geq -m/s \end{cases}$$

sendo $2 < \nu < \infty$, os graus de liberdade (para captar o excesso de curtose) e ξ , o

¹⁹Desenvolvida por Lambert e Laurent (2001). A re-parametrização foi realizada para que a função de densidade pudesse ser expressa em termos de média e variância.

²⁰Outras distribuições *t-Student* assimétricas podem ser encontradas em Hansen (1994) e Paolella (1997).

parâmetro que capta a assimetria da distribuição. A função $g(\cdot|\nu)$ é a densidade de uma *t-Student* simétrica com variância unitária. Os valores das constantes m e s , que representam a média e a variância de uma *t-Student* assimétrica não padronizada, são determinados por

$$s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2}, \quad m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)$$

O parâmetro da assimetria da distribuição é apresentado na forma logarítmica, *i.e.* $\log \xi$, para que seu sinal siga a direção da assimetria (*i.e.* se for negativo a distribuição é assimétrica negativa e se for positivo a distribuição é assimétrica positiva).

De acordo com a significância dos parâmetros estimados, os diagnósticos dos resíduos (teste Box-Pierce e teste LM) e o critério de informação BIC, as especificações escolhidas das distribuições marginais dos retornos foram: ARMA(0,0) *st*-GARCH(1,2) para o IBOVESPA, ARMA(1,0) *st*-GARCH(1,2) para o S&P500, ARMA(1,0) *st*-GARCH(1,1) para o FTSE e ARMA(0,0) *st*-GARCH(1,2) para o índice NIKKEI. Os valores dos parâmetros estimados são apresentados na Tabela 2.

O parâmetro ψ_1 que capta persistência dos retornos na equação da média não foi significativo para o IBOVESPA e o índice NIKKEI, e mesmo para os outros dois índices, S&P500 e FTSE, ele apresentou baixa magnitude, em torno de -0.07, indicando uma baixa persistência dos retornos do dia anterior sobre o retorno corrente. Em relação à equação da variância, a restrição de positividade

Tabela 2: Modelos ARMA *st*-GARCH para as distribuições marginais

Equação da Média				
Parâmetros	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
δ	0.103	0.207	0.032	0.018
	(0.033)	(0.016)	(0.015)	(0.023)
ψ_1		-0.066	-0.075	
		(0.018)	(0.020)	
Equação da Variância				
Parâmetros	IBOVESPA	S&P500	FTSE	NIKKEI
ω	0.120	0.010	0.010	0.305
	(0.058)	(0.004)	(0.003)	(0.012)
α_1	0.017	0.003	0.104	0.025
	(0.019)	(0.019)	(0.013)	(0.029)
α_2	0.074	0.095		0.073
	(0.033)	(0.026)		(0.033)
β	0.874	0.897	0.890	0.890
	(0.038)	(0.016)	(0.013)	(0.018)
$\log \xi$	-0.088	-0.099	-0.139	-0.117
	(0.026)	(0.023)	(0.028)	(0.026)
ν	10.764	9.200	15.388	10.593
	(2.124)	(1.736)	(4.081)	(2.192)
$\bar{\sigma}$	3.489	2.333	1.995	2.537

Obs: Valores entre parênteses representam o erro padrão das estimativas.

A variável $\bar{\sigma}$ representa a variância incondicional. A estimação dos parâmetros de ambas equações foi feita simultaneamente no G@RCH 5.1.

dos parâmetros, que garante a não-negatividade da variância incondicional, é atendida nas quatro distribuições²¹. Todas as distribuições apresentaram uma alta persistência da variância, *i.e.* o somatório dos α_i e dos β_i são próximos de 1.

Em relação a variância incondicional ($\bar{\sigma}$), nota-se que a variância IBOVESPA é maior que a dos outros índices, em torno de 3.49, sendo 50% maior que a variância incondicional do S&P500, 75% maior que a variância do FTSE e 40% maior que a do índice NIKKEI. O parâmetro de assimetria $-\log \xi$ foi significativo e negativo para os quatro índices, em concordância com as estatísticas encontradas anteriormente. Os graus de liberdade da distribuição, que medem o “peso da cauda”, apontaram para o S&P500 como o índice com menores graus de liberdade (em torno de 9.2) e, portanto, com maior peso nas caudas, seguido do índice NIKKEI, com 10.6. Para o IBOVESPA esse número ficou em 10.7 e para o FTSE 15.4, indicando o índice com a menor presença de eventos extremos.

A diferença entre os graus de liberdade estimados para cada retorno mostra uma vantagem da modelagem por cópula sobre, por exemplo, uma distribuição *t-Student* bivariada, uma vez que esta última requer que as distribuições marginais tenham o mesmo número de graus de liberdade.

Foi visto na seção 5 que, tanto as distribuições marginais como a função cópula devem ser condicionadas ao mesmo conjunto de informações, caso con-

²¹A restrição de positividade requer que $\omega \geq 0$, $0 \leq \alpha(L) + \beta(L) \leq 1$ e $\alpha_i + \beta_i \geq 0$ para todo i .

trário, não é possível afirmar que $F(y_1, y_2)$ atenda as propriedades definidas na seção 3. Nos modelos ARMA-GARCH das distribuições marginais, a distribuição dos resíduos padronizados é condicionada no respectivo passado de cada variável. Para assegurar que as distribuições marginais estão condicionadas a um mesmo conjunto de informação, foi empregada a estratégia proposta por Patton (2002) e (2006), que consiste em regredir os resíduos padronizados dos modelos marginais estimados contra as defasagens dos retornos das outras variáveis (quando houver). Se os coeficientes dessa regressão forem não significantes, então uma variável não afeta a distribuição da outra e, portanto, a teoria de cópulas é válida na construção da função de distribuição condicional. Para avaliar o efeito sobre a equação da variância o mesmo princípio é empregado contra os quadrados dos retornos defasados. A influência da "*outra variável*" sobre as equações da média e da variância não foi significativa para todos as combinações estudadas. As variáveis *dummies*, que serão usadas para diferenciar os dois períodos, também não foram significantes na equação da média e da variância para todas as combinações estudadas.

6.4 Modelos para as cópulas

Após a modelagem das estruturas da média e da variância das distribuições marginais pelos modelos ARMA-GARCH, os resíduos padronizados foram transformados em observações uniformes $u_{1,t}$ e $u_{2,t}$ por meio da função empírica de distribuição (equação 7). As pseudo-observações resultantes foram utilizadas para estimar os parâmetros desconhecidos das funções cópulas.

6.4.1 Cópula gaussiana

Numa primeira análise da dependência entre os índices, foi utilizado a cópula gaussiana (normal), referência na área de finanças. A partir da *moderna teoria de carteira* de Markowitz (1987), a correlação linear entre ativos passou a assumir uma posição fundamental na construção de carteiras. Dentre os estudos que envolvem a utilização da cópula gaussiana, destaca-se o trabalho de Li (2000), tratando da correlação de *default* nos modelos de risco de crédito, e concluindo que a abordagem *CreditMetrics* para modelar correlação de *default* através de correlação entre ativos é equivalente a utilizar-se uma função cópula gaussiana. O estudo de Malevergne e Sornette (2003) mostra que as distribuições bivariadas da maioria dos índices de mercado são compatíveis com a cópula gaussiana.

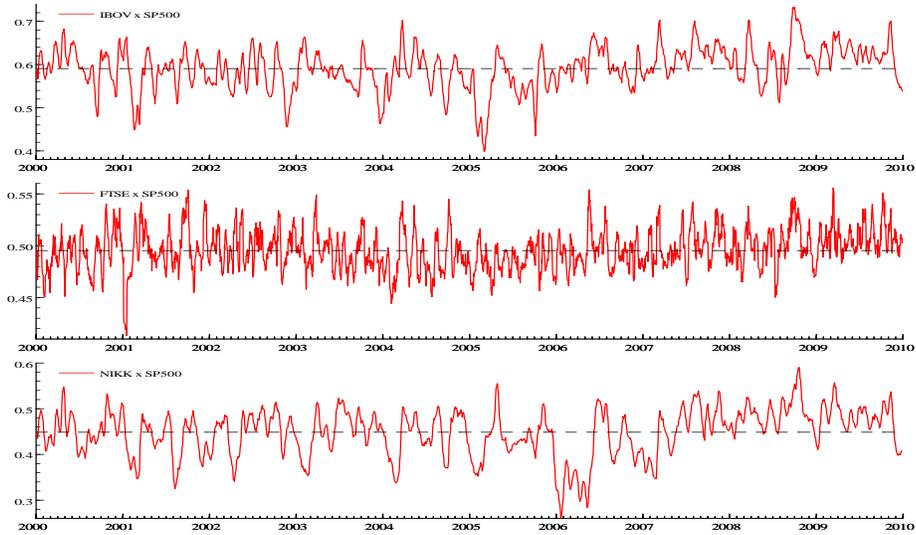


Figura 6.4.1.1 - Cópula gaussiana - coeficiente de correlação linear ρ_t

A Figura 6.4.1.1 apresenta a evolução de ρ_t para as diferentes relações entre mercados. De acordo com o gráfico, nota-se que o nível do coeficiente de correlação incondicional, captado pela cópula constante, entre o S&P500 e o IBOVESPA é superior ao nível nas outras relações. A correlação incondicional entre o IBOVESPA e o S&P500 foi de 0.59, enquanto que para as outras relações envolvendo os índices FTSE e NIKKEI foi de 0.49 e 0.45, respectivamente. Todas as estruturas de correlação apresentaram um padrão semelhante, sendo que a partir de meados de 2007, a correlação ficou acima da média constante²². De fato, ρ_t permaneceu acima da média incondicional, no intervalo 2007 a 2009, em torno de 80% das vezes para as relações envolvendo o IBOVESPA e NIKKEI e em torno de 60% das vezes para a relação entre o FTSE e S&P500. No intervalo

²²Para as relações envolvendo o IBOVESPA e o NIKKEI, o padrão é mais visível.

restante, de 2000 a 2006, ρ_t situou-se em torno de 45% das vezes acima da média incondicional nos três modelos.

Para analisar a presença de contágio financeiro entre os índices, a cópula gaussiana foi re-estimada com a presença de quebras estruturais – *dummies* (γ) – segregando os períodos de pré-crise e crise nos parâmetros que governam a evolução de ρ_t . Testar a hipótese de contágio financeiro implica em analisar se essas variáveis são significantes, o que representaria uma intensificação do canal de transmissão de choques durante o período de crise. Os resultados²³ dos parâmetros estimados e sua evolução são apresentados na Tabela 3 e Figura 6.4.1.2.

Pelos resultados da tabela percebe-se que o valor da função log-verossimilhança aumenta na presença de quebras estruturais para todos os grupos. e que o critério de informação BIC se reduz.

As estimativas dos parâmetros das cópulas incondicionais apontam para um aumento da correlação incondicional, no período de crise em relação ao período de estabilidade, para os três modelos (*p-valor* para esse teste foi menor que 0.01). Para o modelo envolvendo o IBOVESPA e o NIKKEI, o aumento da correlação incondicional ficou em torno de 40% e para o modelo envolvendo o FTSE ficou em torno de 25%.

Em relação às estimativas de β_ρ , o processo que governa a dependência entre IBOVESPA e S&P500 mostrou-se como o mais persistente, em torno de -2.8.

²³ As estimações foram feitas no MATLAB, com base nas rotinas disponibilizadas publicamente por Andrew Patton.

As estimativas das outras duas relações não foram significantes.

A variável *dummy* γ_ω , que capta o deslocamento no nível, foi significativa e positiva para a relação entre o S&P500 e o IBOVESPA, indicando que o nível do processo que governa a correlação linear ρ_t se eleva no período de crise, evidência esta a favor da presença de contágio financeiro. Pela Figura 6.4.1.2, percebe-se um aumento da correlação condicional de 0.53 para 0.73, no período de crise. Para as outras duas relações, FTSE e NIKKEI, a variável *dummy* γ_ω não foi significativa. A única relação que não apresentou mudanças significantes em toda dinâmica da dependência foi NIKKEI \times S&P500.

A variável *dummy* γ_β , que capta mudanças de persistência do processo, foi significativa apenas para o modelo envolvendo o IBOVESPA, representando o processo com uma persistência ainda maior no período de crise.

A variável *dummy* γ_α , que capta aumentos de dependência causados pelos movimentos das variáveis motrizes, foi significativa para os modelos envolvendo o IBOVESPA e o FTSE, indicando aumento da dependência captada pelo comportamento conjunto dessas variáveis em períodos anteriores.

De forma geral, a cópula gaussiana apontou evidências de contágio no mercado brasileiro e algum efeito sobre o mercado de Londres. Para as relações envolvendo o NIKKEI, o modelo não apresentou sinais de contágio no mercado japonês. As evidências encontradas para esse modelo não permitem concluir que o canal de transmissão entre os mercados alterou-se nos dois períodos em questão.

Tabela 3: Estimativas das *copulas* condicionais: gaussiana

Relações	Cópula gaussiana					
	ω_ρ	α_ρ	β_ρ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	2.731	-0.126	-2.765	1.170	0.785	-0.702
	(0.186)	(0.181)	(0.140)	(0.496)	(0.395)	(0.303)
FTSE \times S&P500	0.771	0.158	0.343	0.626	-0.299	1.850
	(0.506)	(0.110)	(1.555)	(0.554)	(0.133)	(1.206)
NIKKEI \times S&P500	1.594	0.214	-2.086	0.814	-0.348	0.200
	(0.203)	(0.175)	(0.400)	(0.820)	(0.287)	(1.419)

Relações	Cópula gaussiana					
	$\bar{\rho}_1$	$\bar{\rho}_2$	LL	ll	BIC	bic
IBOVESPA \times S&P500	0.530	0.729	-601.65	-571.68	-1203.2	-1143.3
	(0.015)	(0.013)				
FTSE \times S&P500	0.460	0.572	-375.99	-365.09	-751.97	-730.19
	(0.017)	(0.021)				
NIKKEI \times S&P500	0.398	0.562	-306.06	-297.46	-612.11	-594.91
	(0.019)	(0.021)				

Obs: Os valores entre parênteses são os erros padrões. As colunas LL e BIC representam os valores da log-verossimilhança e do critério de informação BIC, sob a presença de quebra estrutural. As colunas ll e bic representam os mesmos valores sem a presença de quebra. Os valores $\bar{\rho}_i$ são as estimativas da cópula constante, *i.e.* a cópula gaussiana é estimada sem a equação de evolução 5.4. O número 1 representa o período pré crise e 2 representa o período de crise.

Na Figura 6.4.1.2 percebe-se que após o período pré-crise, o padrão de ρ_t se torna mais volátil e, freqüentemente, ultrapassa o intervalo de confiança de 95% em torno do valor constante, possivelmente indicando que nessas situações, o coeficiente de correlação não consegue captar de forma adequada a dependência entre os índices.

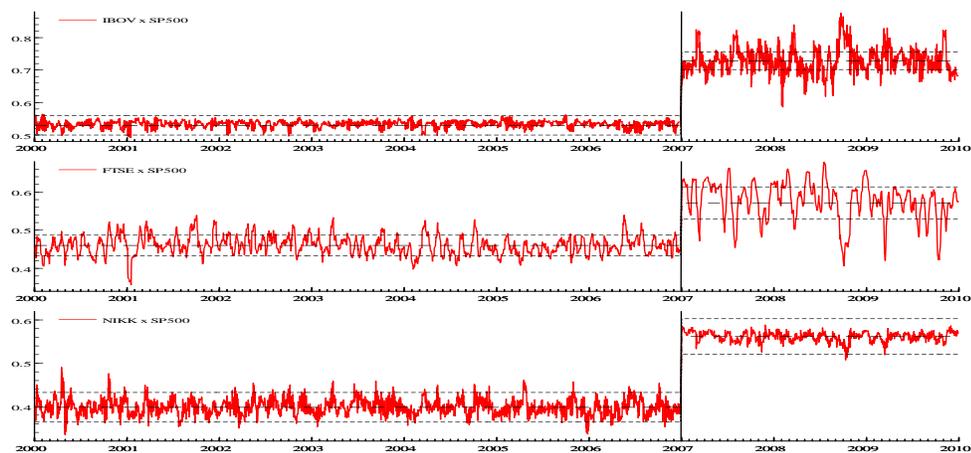


Figura 6.4.1.2 - Cópula gaussina - correlação linear ρ_t com a presença de quebra estrutural

6.4.2 Cópula SJC

Vários estudos²⁴ utilizam o coeficiente de correlação como medida de mensuração do padrão de contágio financeiro. Contudo, o coeficiente de correlação linear possui diversas limitações como medida de dependência entre variáveis.

A correlação de Pearson possui ainda, de acordo com Forbes e Rigobon (2002) e

²⁴Por exemplo, Ramchmand e Susmel (1998) e Ang e Chen (2002).

Rigobon (2002), uma outra relevante limitação enquanto medida do contágio entre mercados. De acordo com os autores, um aumento na correlação condicional entre duas variáveis pode ser o reflexo apenas do aumento da volatilidade de uma das variáveis²⁵. Supondo duas variáveis aleatórias Y_1 e Y_2 , representando variáveis econômicas de interesse, e supondo que uma crise econômica ocorra no país 2. Seja Y_2 condicionada a um conjunto de informação \mathcal{A} e denotando $\rho_{\mathcal{A}}$ a correlação condicional entre os dois países e ρ a correlação incondicional, Boyer *et al.* (1999) mostram que

$$\rho_{\mathcal{A}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (1 - \rho^2) \frac{\text{var}(Y_2)}{\text{var}(Y_2|Y_2 \in \mathcal{A})}}}$$

Assim nota-se que $\rho_{\mathcal{A}}$ e ρ terão o mesmo sinal, $\rho_{\mathcal{A}} = 0$ se $\rho = 0$ e que $\rho_{\mathcal{A}}$ poderá ser maior (menor) que ρ , uma vez que $\text{var}(Y_2|Y_2 \in \mathcal{A})$ pode ser maior (menor) que $\text{var}(Y_2)$. Assim, de acordo com Forbes e Rigobon (2002), testes para contágio financeiro baseados no coeficiente de correlação linear são viesados, posto que a correlação linear entre mercados é condicionada à volatilidade do mercado em crise.

Segundo Pericoli e Sbracia (2003), uma definição geral de contágio financeiro é o aumento significativa da probabilidade de crise financeira em um país, condicionado a ocorrência da crise em outro país. Assim fenômeno contágio financeiro entre dois países – do país 2 para o país 1 – pode ser expresso como

$$\mathbb{P}(Y_1 > y_1 | Y_2 > y_2) \geq \mathbb{P}(Y_1 > y_1) \quad (23)$$

²⁵Para contornar esse efeito os autores sugerem um ajuste nas variâncias das variáveis analisadas

Ou seja, a definição de contágio em (23) implica que dada a ocorrência de uma crise financeira no país 2, a probabilidade de crise no país 1 é maior independentemente do que aconteceu no país 2. Essa definição coincide com a definição de dependência no quadrante positivo (DQP), apresentada na seção 4. Ainda, pode-se mostrar que a DQP converge assintoticamente para a dependência de cauda e as dependências das caudas podem ser interpretadas como fenômenos de contágios extremos positivos e negativos.

Para mensurar a dependência de cauda, duas cópulas muito utilizadas são a *t-student* e a SJC²⁶. Para captar-se a presença de eventuais dependências nas caudas, foi então sugerida a cópula SJC, construída a partir da cópula Joe-Clayton, apresentada na seção 3. Como visto, a cópula JC é uma transformação de Laplace da cópula Clayton, cuja especificação é dada por (5). Os parâmetros κ e γ estão diretamente relacionados com as dependências das caudas, onde $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$ e $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$, sendo τ^U e τ^L as dependências da cauda superior e inferior. Assim, a cópula JC, por ser parametrizada por medidas de dependência da cauda, é mais adequada para modelar eventos extremos positivos e negativos. Entre suas propriedades está o fato de que mesmo que os índices de cauda superior e inferior sejam idênticos, ainda assim haverá uma assimetria na cópula JC devido, simplesmente, à sua especificação.

Para corrigir tal assimetria, foi proposta por Patton (2002), a seguinte especificação alternativa denominada cópula *JC simétrica* (SJC), cuja especificação é

²⁶Uma propriedade da *copula* gaussiana é a ausência de dependência das caudas para $\rho < 1$, *i.e.* assintoticamente $\tau^U = \tau^L = 0$.

dada por

$$C_{SJC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) = \frac{1}{2} [C_{JC}(u_1, u_2 | \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \tau^U, \tau^L) + u_1 + u_2 - 1]$$

A cópula SJC nada mais é, portanto, uma modificação da cópula JC para que ela seja simétrica toda vez que $\tau^U = \tau^L$. A vantagem desta sobre uma cópula com dependências de cauda simétrica (e.g. cópula *t-student*) é justamente permitir que a simetria seja um caso especial.

A evolução das caudas superior e inferior segue a equação adotada em Patton (2002),

$$\tau_t^U = \tilde{\Lambda} \left(\omega_{\tau_1} + \beta_{\tau_1} \tau_{t-1}^U + \alpha_{\tau_1} \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \right) \quad (24)$$

$$\tau_t^L = \tilde{\Lambda} \left(\omega_{\tau_2} + \beta_{\tau_2} \tau_{t-1}^L + \alpha_{\tau_2} \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \right) \quad (25)$$

A evolução das dependências de cauda superior e inferior no tempo está ilustrada na Figura 6.4.2.1.

Dentre as trajetórias das dependências de caudas, destaca-se a evolução tanto da cauda inferior como da cauda superior, onde a dependência de ambas as caudas apresentaram-se, em torno de 2007, acima da dependência média constante. De fatos, as duas dependências permaneceram acima da média incondicional em torno de 80% das vezes no intervalo de crise.

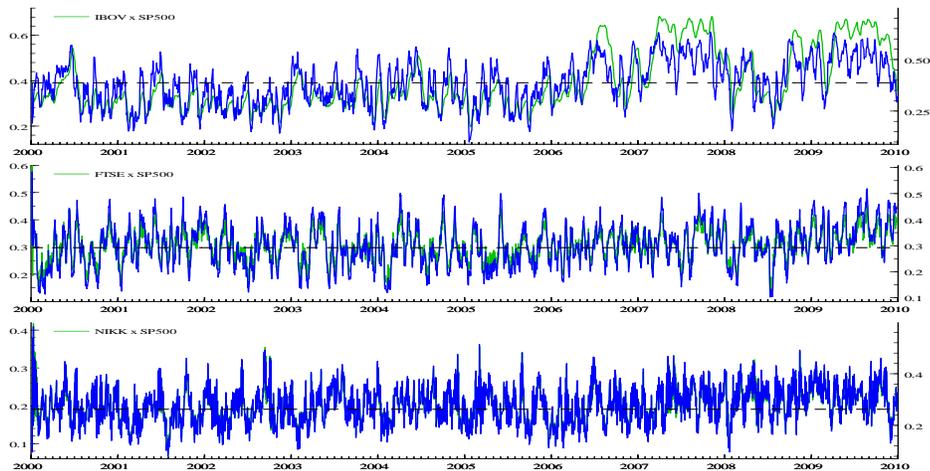


Figura 6.4.2.1 - Cópula SJC - Dependência das caudas superior τ^U (verde, escala esquerda) e inferior τ^L (azul, escala direita)

Para analisar a presença de contágio financeiro foi utilizado o mesmo princípio das cópulas gaussianas. Para as três possíveis combinações, a cópula SJC foi re-estimada com a presença de quebras estruturais, *dummies* γ segregando os períodos de pré-crise e crise, nos parâmetros que governam a evolução dos índices de cauda, equações 24 e 25, a fim de averiguar se houve uma mudança do processo nos dois períodos. Os resultados das estimativas são apresentados na Tabela 4 e nas figuras 6.4.2.2 e 6.4.2.3. Os valores das funções log-verossimilhança apresentaram um melhor ajuste para os três modelos em relação a ausência de mudança nos parâmetros.

Para o IBOVESPA, as estimativas das dependências de ambas caudas incondicionais ($\bar{\tau}$) foram maiores (*p-valor* menor que 0.01) no período de crise, representado um aumento de 70% da ocorrência de eventos extremos positivos

e um aumento de 50% da presença de eventos extremos negativo, ambos condicionados a ocorrência dos mesmo no S&P500.

O modelo que envolve o FTSE não apresentou um aumento significativo da dependência da cauda incondicional positiva ($\bar{\tau}^U$) e o aumento da dependência da cauda incondicional negativa é significativa a 5%, indicando um aumento de 30% da ocorrência de eventos negativos condicionada a ocorrência dos mesmo no S&P500.

Para o índice NIKKEI, as estimativas de ambas caudas incondicionais foram significantes e maiores no período de crise (*p-valor* menor que 0.01), indicando que a dependência da cauda positiva mais que dobrou e a dependência da cauda negativa aumento em 45%.

Analisando o processo que governa a dependência na cauda superior, o parâmetro β_τ que mede a persistência do processo foi maior para a relação que envolve o FTSE e, para a dependência na cauda inferior, ele foi maior no modelo com o IBOVESPA.

No que se refere a dependência na cauda superior, a única relação que apresentou uma mudança em todos os parâmetros que governam a dependência foi entre o IBOVESPA e o S&P500. O parâmetro γ_ω , que representa o deslocamento no nível do processo, foi positivo e significativo (em torno de 0.70), representando um aumento no nível da dependência – evidência da presença de contágio. Para as outras duas relações, esta variável *dummy* não foi significativa. O parâmetro γ_β foi significativo para os modelos envolvendo o IBOVESPA e o FTSE, indicando uma mudança de persistência entre os dois períodos. Para a

relação envolvendo o NIKKEI não houve evidências de mudanças de persistência.

O padrão de contágio foi mais evidente para o processo que governa a dependência na cauda inferior. O modelo envolvendo o IBOVESPA continuou apresentando uma mudança em todos os parâmetros que governam τ^L . Em relação a γ_ω , o parâmetro mostrou-se positivo e significativo para as relações envolvendo o IBOVESPA e FTSE (em torno de 4.3 e 3.1, respectivamente), indicando que no período de crise houve um deslocamento para cima no processo de dependência. Para a relação envolvendo o NIKKEI, o mesmo parâmetro foi também positivo, porém significativo apenas a 10%. O parâmetro γ_β foi significativo para todos os modelos, sugerindo que nesse período houve, em relação ao S&P500 e aos mercados estudados, uma mudança de persistência na evolução de τ^L .

Tabela 4: Estimativas das *copulas* condicionais: SJC

Relações	Cópula SJC – cauda superior τ^U					
	ω_τ	α_τ	β_τ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	1.466 (0.189)	-5.199 (0.965)	-3.328 (0.548)	0.703 (0.191)	-1.908 (0.444)	4.273 (0.393)
FTSE \times S&P500	1.847 (0.312)	-6.158 (0.476)	-5.100 (0.472)	-0.796 (0.436)	0.537 (1.919)	3.419 (1.468)
NIKKEI \times S&P500	1.212 (0.671)	-8.342 (2.863)	-5.732 (0.990)	-1.330 (0.825)	10.428 (1.739)	2.646 (3.538)
Relações	Cópula SJC – cauda inferior τ^L					
	ω_τ	α_τ	β_τ	γ_ω	γ_α	γ_β
IBOVESPA \times S&P500	-1.650 (0.152)	-1.328 (0.401)	3.692 (0.227)	4.246 (0.373)	-6.663 (0.609)	-6.187 (0.629)
FTSE \times S&P500	-0.271 (0.453)	-4.545 (1.124)	1.160 (1.019)	3.102 (0.907)	-5.029 (3.719)	-5.012 (0.778)
NIKKEI \times S&P500	1.547 (0.385)	-6.099 (1.614)	-4.766 (0.406)	0.911 (0.483)	-2.458 (0.914)	1.143 (0.236)
Relações	<i>cópula</i> SJC					
	$\bar{\tau}_1^U$	$\bar{\tau}_1^L$	$\bar{\tau}_2^U$	$\bar{\tau}_2^L$	LL	ll
IBOVESPA \times S&P500	0.322 (0.029)	0.330 (0.029)	0.556 (0.002)	0.506 (0.011)	-620.08	-611.09
FTSE \times S&P500	0.281 (0.029)	0.269 (0.030)	0.337 (0.041)	0.355 (0.038)	-391.25	-383.06
NIKKEI \times S&P500	0.141 (0.032)	0.240 (0.029)	0.334 (0.042)	0.351 (0.035)	-296.72	-287.42

Obs: Os valores entre parênteses são os erros padrões. A coluna LL representa os valores da log-verossimilhança, sob a presença de quebra estrutural. A coluna ll representa os mesmos valores

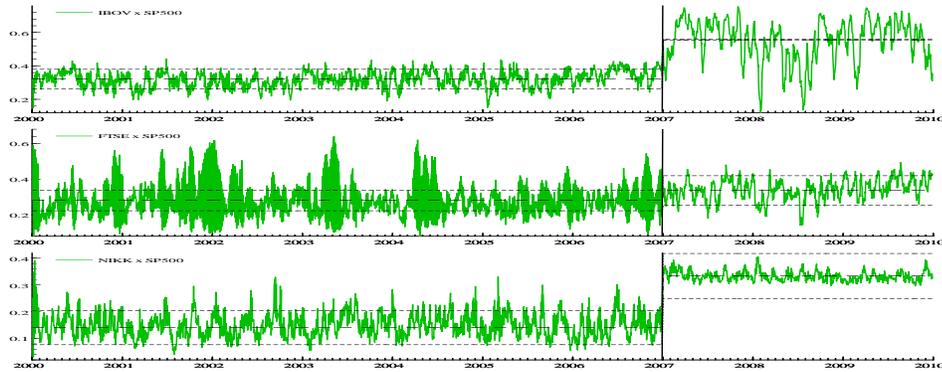


Figura 6.4.2.2 - *Copula* SJC – dependência da cauda superior τ^U com a presença de quebra estrutural

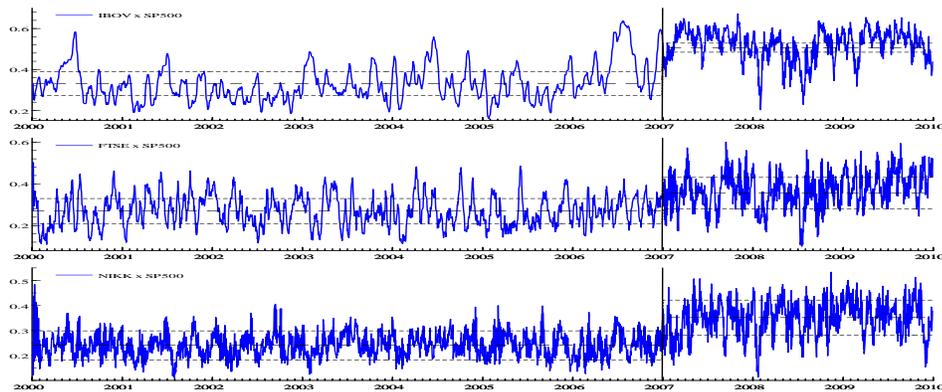


Figura 6.4.2.3 - *Cópula* SJC – dependência da cauda inferior τ^L com a presença de quebra estrutural

Os resultados encontrados pela cópula SJC apontam para claros sinais de contágio entre o S&P500 e o IBOVESPA, levando a caracterização desses mercados como altamente dependentes. Ainda, as evidências apontam que na presença

de um choque em um deles, essa dependência aumenta de forma significativa. Sob o ponto de vista da teoria de carteiras internacionais, os resultados encontrados sugerem que os benefícios da diversificação não são válidos para carteiras com ativos desses dois países, principalmente para as carteiras mantidas durante a crise do *Subprime*.

Os sinais de contágio encontrados pela cópula SJC não foram tão claros para outros modelos envolvendo o FTSE e o índice NIKKEI²⁷. Para a dependência da cauda superior, *i.e.* contágio extremo de eventos positivos, uma mudança de persistência foi identificada apenas para a relação entre o FTSE e o S&P500 e nenhum dos modelos apresentou um deslocamento positivo e significativo do nível de dependência. Já para a dependência da cauda negativa, *i.e.* contágio extremo de eventos negativos, os sinais de contágio foram, relativamente, mais visíveis. Ainda que os dois modelos não apresentem uma mudança em todos os parâmetros de τ , foi detectado um deslocamento positivo e significativo do nível de τ^L . Ambos os processos apresentaram, também, mudanças de persistência de τ^L , durante o período de crise.

²⁷As evidências encontradas para o mercado japonês vão contra as encontradas em Horta, Mendes e Viera (2007). De uma lista de 7 países desenvolvidos, o mercado japonês foi o que apresentou maiores evidências de contágio financeiro. Entretanto, nossos resultados não são diretamente comparáveis uma vez que utilizamos amostra e índices de mercado diferentes.

7 Conclusão

O presente artigo testou a hipótese de ocorrência de contágio financeiro durante a crise do Subprime entre quatro distintos mercados no mundo.

A definição de contágio financeiro adotada foi a proposta por Rigobon (2002) a saber, como o aumento significativo da dependência entre mercados após choque em um país específico, nos moldes da classe *shift-contagion*. Não compôs o escopo do teste aqui em questão considerar os fundamentos econômicos específicos de cada país envolvido, na mesma linha exibida em Pesaran e Pick (2007) e Marçal *et al.* (2010).

A hipótese da ocorrência de contágio foi testada por meio da teoria cópulas. A cópula gaussiana foi utilizada para modelar as dependências entre mercados sob a ausência de eventos extremos (*i.e.* num ambiente cotidiano), e a cópula SJC foi utilizada para captar as dependências entre mercados sob eventos extremos positivos e negativos.

Os resultados encontrados para cópula gaussiana apontam a presença de contágio no mercado brasileiro, sob uma completa intensificação dos canais de transmissão durante o período de crise, e algum efeito significativo sobre os mercados de Londres. Esta cópula não apresentou sinais de contágio no mercado japonês, indicando uma ausência de alteração do canal de transmissão de choques durante o período de crise.

Os resultados encontrados para cópula SJC exibiram sinais de contágio entre o mercado americano e brasileiro, nos ambientes de eventos extremos positivos e negativos. Para os outros dois mercados, londrino e japonês, as evidências da

presença de contágio não mostraram-se suficientemente claras. A cópula SJC não apresentou sinais de contágio sob eventos extremos positivos para estes dois últimos mercados. No que se refere-se a dependência durante eventos extremos negativos, a cópula SJC indicou sinais de contágio para ambos os mercados londrino e japonês, encontrando um deslocamento positivo e significativo.

Em reflexão geral acerca de ambos os modelos (gaussiana e SJC), os mercados americano e brasileiro apresentaram-se altamente dependentes em relação aos outros dois. A estrutura de dependência condicional entre IBOVESPA e S&P500 mostrou claras evidências de contágio financeiro em ambos modelos.

Este estudo remata seu propósito com a advertência de que o método utilizado para testar a hipótese da ocorrência de contágio, bem como as evidências encontradas, não permitem concluir sobre a direção causal entre o choque inicial em um país e o país que sofre o contágio.

8 Referências

- Ang, A. e Chen, J. (2002). Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, Volume 63, No. 3, pp. 443-94.
- Baig, T. e Goldfajn, I. (2000). The Russian Default and the Contagion to Brazil. *Working Paper 00/160, International Monetary Fund*, Washington, DC.
- Balakrishnan, N. e Lai, C. D. (2009). *Continuous Bivariate Distribution*. 2a. Edição. New York: Springer-Verlag.
- Bauwens, L. e Laurent, S. (2005). A new class of multivariate skew den-

sities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, Volume 23, No. 3, 346-54.

Benediktsdottir, S. e Scotti, C. (2009). Exchange Rates Dependence: What Drives It? *FRB International Finance Discussion Paper No. 969*, Federal Reserve Board.

Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. e Roncalli, T. (2000). Copulas for finance, a reading guide and some applications. *Working paper, Financial Econometrics Research Center, City University, London*.

Boyer, B. H., Gibson, M. S. e Loretan, M. (1999). Pitfalls in tests for changes in correlations. *IFS Discussion Paper No. 597R*, Federal Reserve Board.

Claessens, S., Dornbusch, R. e Park, Y. C. (2000). Contagion: understanding how it spreads. *World Bank Research Observer*, Volume 15, No.2, pp. 177-97.

Coles, S., Heffernan, J. e Tawn, J. (1999). Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, Volume 2, No. 4, pp. 339-365.

Creal, D. D., Koopman, S. J. e Lucas, A. (2008). A general framework for observation driven time-varying parameter models. *Discussion Paper, Tinbergen Institute*.

Dias, A. e Embrechts, P. (2003). Dynamic copula models for multivariate high frequency data in finance. *Working Paper, ETH Zurich: Department of Mathematics*.

Dias, A. e Embrechts, P. (2004). Change-Point Analysis for Dependence Structures in Finance and Insurance, In Giorgio, Szegoe Ed. *Risk Measures for*

the 21st Century, Wiley Finance Series, Capítulo 16, pp. 321-335.

Edwards, S. (2000). Contagion. *The World Economy*, Volume 23, No. 7, pp. 873-900.

Eichengreen, B., Rose, A. K. e Wyplosz, C. (1996). Contagious currency crises. *NBER Working Paper No. 5681*, National Bureau of Economic Research.

Embrechts, P., McNeil, A. J. e Strauman, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In M.A.H. Dempster Ed. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Capítulo 7, pp. 176-223.

Engle, Robert F. (2002). Dynamic Conditional Correlation - a simple class of multivariate GARCH models. *NYU Working Paper No. FIN-02-038*, New York University.

Erb, C. B., Harvey, C. R. e Viskanta, T. E. (1994). Forecasting international equity correlations. *Financial Analysts Journal*, Volume 50, pp. 32-45.

Favero, C. A. e Giavazzi, F. (2000). Looking for contagion: evidence from the ERM. *NBER Working Paper No. 7797*, National Bureau of Economic Research.

Fernández, C., e Steel, M. F. J. (1998). On bayesian modelling of fat tails and skewness, *Journal of the American Statistical Association*, Volume 93, No. 441, pp. 359-371.

FMI (2008). *Global financial stability report: financial stress and deleveraging - macrofinancial implications and policy*. International Monetary Fund, Washington, DC.

Forbes, K. e Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: mea-

suring stock market comovements. *Journal of Finance*, Volume 57, No. 5, pp. 2223-2261.

Genest, C., Ghoudi, K. e Rivest, L. (1995). A semi-parametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, Volume 82, No. 3, pp. 543-552.

Gibbons, J. D. (1993). *Nonparametric measures of association*. Sage University Papers Series: Quantitative Applications in the Social Sciences. Sage Publications.

Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, Volume 35, No. 3, pp. 705-730.

Horta, P., Mendes, C. e Vieira, I. (2007). Contagion Effects of the US Subprime Crisis on Developed Countries. *CEFAGE-UE Working Paper 2008/08*. Universidade de Évora, Portugal.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Chapman Hall.

Koopman, S. J., Harvey, A. C., Doornik, J. A. e Shephard, N. (2009). *STAMP 8.2: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. London: Timberlake Consultants Press

Lambert, P. e Laurent, S. (2001). Modelling financial time series using GARCH-type models and a skewed Student Density, *Discussion Paper 01-25*, *Institut de Statistique*, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.

Laurent, S. (2009) *G@RCH 6 Estimating and Forecasting ARCH Models*.

London: Timberlake Consultants Press

Li, D. X. (2000). On default correlation: a copula function approach. *Journal of Fixed Income*, Volume 9, No. 4, pp. 43-45.

Longin, F. e Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance*, Volume 56, No. 2, pp. 649-676.

Magalhães, M. N. (2006). *Probabilidade e variáveis aleatórias*. 3a. Edição, São Paulo: Edusp.

Malevergne, Y. e Sornette, D. (2003). Testing the gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. *Quantitative Finance* Volume 3, 231-250.

Manner, H. e Candelon, B. (2007). Testing for Market Linkages: A New Approach Based on Time-Varying Copulas. *Research Memoranda No.052*. Faculty Economy and Business Administration, Universiteit of Maastricht.

Manner, H. e Reznikova, O. (2009). Time varying copulas: a survey. *Working Paper DP 0917, Institut de Statistique*, Université Catholique de Louvain

Marçal, E. F. e Valls Pereira, P. L. (2008). Testing the hypothesis of contagion using multivariate volatility models. *Brazilian Review of Econometrics*, Volume 28, No. 2, pp. 191-216.

Marçal, E. F., Valls Pereira, P. L., Martin, D. M. L. e Nakamura, W. T. (2010). Evaluation of contagion or interdependence in the financial crises of Asia and Latin America, considering the macroeconomic fundamentals. *Applied Economics*, forthcoming

Markowitz, H. M. (1987). *Mean Variance Analyses in Portfolio Choice and Capital Markets*. Basil Blackwell, Oxford.

McNeil, A. J., Frey, R., e Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Mendes, B. V. M. (2005). Asymmetric extreme interdependence in emerging equity markets. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Volume 21, No. 6, pp. 483-498.

Murphy, D. (2009). *Unravelling the credit crunch*. Chapman and Hall/CRC Press

Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. 2a. Edição, New York: Springer-Verlag.

Paoletta, M. S. (1997). Using flexible GARCH models with asymmetric distributions. *Working Paper, Institute of Statistics and Econometrics Christian Albrechts*, University at Kiel.

Patton, A. J. (2002). *Applications of copula theory in financial econometrics*. Unpublished Thesis (PhD), University of California, San Diego.

Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, Volume 47, No. 2, pp. 527-556.

Patton, A. J. (2009). Copula-based models for financial time series. In Andersen, Torben G., Davis, Richard A., Kreiß, Jeans-Peter, Mikosch, Thomas Eds. *Handbook of Financial Time Series*, Berlin: Springer.

Pericoli, M., e Sbracia, M. (2003). A primer on financial contagion. *Journal of Economic Surveys*, Volume 17, No. 4, pp. 571-608.

Pesaran, M. H. e Pick, A. (2007). Econometric issues in the analysis of

contagion. *Journal of Economic Dynamic and Control*, Volume 31, No. 4, pp. 1245-1277.

Rachmand, L. e Susmel, R. (1998). Volatility and cross correlation across major stock markets. *Journal of Empirical Finance*, Volume 5, No. 4, pp. 397-416.

Rigobon, R. (2001). Contagion: how to measure it? In Edwards, Sebastian e Frankel, Jeffrey A. Eds. *Preventing Currency Crises in Emerging Markets*, Capítulo 6, pp. 269-334, University of Chicago Press.

Rigobon, R. (2002). *International financial contagion: theory and evidence in evolution*. Research Foundation of the Association for Investment Management and Research (AIMR).

Rodriguez, J. C. (2007). Measuring financial contagion: a copula approach. *Journal of Empirical Finance*. Volume 14, No. 3, pp. 401-423.

Samitas, A.; Kenourgios, D. e Paltalidis, N. (2007). Financial Crisis and Stock Market Dependence. In *14th Annual Conference of the Multinational Finance Society*, Thessaloniki, Greece.

Sklar, A. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, Volume 8, pp. 229-231.

Souza, M. M. e Tabak, B. M. (2009). Testes de contágio entre sistemas bancários - a crise do Subprime. *Trabalhos para Discussão No. 194*, Departamento de Pesquisas, Banco Central do Brasil.

Trivedi, P. K. e Zimmer, D. M. (2007). *Copula modeling: an introduction*

for practitioners. Boston, MA: Now Publishers.