

**Futuros de Swap de Variância
e Volatilidade Na BM&F -
Apreçamento e Viabilidade
de Hedge Richard John
Brostowicz Junior**

Márcio Poletti Laurini



Copyright Insper. Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução parcial ou integral do conteúdo deste documento por qualquer meio de distribuição, digital ou impresso, sem a expressa autorização do Insper ou de seu autor.

A reprodução para fins didáticos é permitida observando-se a citação completa do documento

FUTUROS DE SWAP DE VARIÂNCIA E VOLATILIDADE NA BM&F - APREÇAMENTO E VIABILIDADE DE HEDGE

RICHARD JOHN BROSTOWICZ JUNIOR
GLOBAL MODELLING ANALYTICS GROUP - CREDIT SUISSE
MÁRCIO POLETTI LAURINI
INSTITUTO INSPER E IMECC-UNICAMP

RESUMO. Um swap de variância pode teoricamente ser apreçado com um conjunto infinito de calls e puts de opções vanillas se considerarmos que a variância realizada segue um processo puramente difusivo com monitoramento contínuo.

Neste artigo, serão analisadas as possíveis diferenças no apreçamento se considerarmos monitoramento discreto da variância realizada. Também será analisado o apreçamento de swaps de variância com payoff em dólares, visto que há um mercado de balcão offshore que funciona desta forma, e que potencialmente serviria de hedge para os swaps de variância da BM&F.

Adicionalmente, será testada a viabilidade de hedge do swap de variância quando há liquidez em apenas alguns preços de exercício, como é o caso de opções de câmbio operadas na BM&F. Desta forma, serão montadas carteiras contendo swaps de variância e a respectiva carteira replicante nos preços de exercício disponíveis como proposto em (DEMETERFI et al., 1999). De posse destas carteiras, a eficácia do hedge não foi robusta na maioria dos testes conduzidos neste artigo.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo aborda dois produtos pouco usuais no mercado brasileiro que podem começar a serem operados num futuro próximo na BM&F. Tratam-se de futuros de swaps de variância e volatilidade da taxa de câmbio. Mas ao contrário de artigos clássicos sobre swaps de variância como (DEMETERFI et al., 1999), que utilizam imediatamente apreçamento por não arbitragem, este artigo busca inferir se realmente há uma carteira replicante disponível para opções de câmbio na BM&F. Mais especificamente, o foco principal de artigo é testar sob quais circunstâncias as opções vanilla européias de câmbio, disponíveis na BM&F, poderiam formar aproximadamente¹ uma carteira replicante para os swaps de variância da taxa de câmbio de reais por dólares.

Se todos os preços de exercício fossem disponíveis e assumindo-se o ativo objeto possuir um processo puramente difusivo, então seria possível construir uma carteira com payoff exatamente igual ao do swap de variância em todos os estados da natureza. Portanto, sob estas circunstâncias, o apreçamento poderia ser perfeitamente realizado por não arbitragem.

Entretanto, a existência de apenas alguns preços de exercício pode tornar insatisfatória a replicação do payoff do swap de variância. Para avaliar sob quais circunstâncias a replicação se torna satisfatória, serão utilizadas simulações de Monte Carlo e back-testing de carteiras contendo o swap de variância e a carteira replicante disponível de opções de câmbio. Caso a replicação seja robusta,² dada a carteira replicante disponível, então pode-se lançar mão de toda a teoria de não arbitragem para o apreçamento de swaps de variância. Caso a replicação se mostre insatisfatória, então o preço de exercício justo obtido por não arbitragem seria meramente teórico. O investidor astuto deveria cobrar um spread, sabendo que em certas situações seu hedge será ineficiente. Inclusive, sob esta hipótese, só seria possível na prática o hedge de um swap de variância com uma posição contrária em outro swap de variância. Portanto, o preço de exercício justo seria dado apenas por leis de oferta e demanda. Contudo, em períodos com escassez de liquidez, qual seria o preço de exercício justo de um swap de variância da taxa de câmbio de reais por dólares cuja replicação por meio de opções vanilla seja insatisfatória? Consequentemente, verificar se a replicação por meio de opções de câmbio disponíveis na BM&F é satisfatória, é vital para podermos finalmente começar a apreçar swaps de variância.

Resumindo, este artigo pretende estudar essencialmente a robustez do hedge de swaps de variância por meio da sua carteira replicante disponível, para que o investidor possa posteriormente ter uma estimativa do spread compatível com o risco não imunizável destes contratos.

Outros aspectos, como apreçamento de swaps de variância assumindo-se monitoramento discreto da variância realizada, e apreçamento de swaps de variância sob hipótese do payoff ser pago em dólares também serão discutidos.

Tentando-se responder as perguntas acima, este trabalho foi dividido em 6 seções. A primeira é uma introdução ao objetivo principal do artigo.

A segunda contém a motivação para utilização de swaps de variância e não opções européias vanilla como ferramenta para operar volatilidade.

A terceira faz uma breve revisão bibliográfica sobre o assunto.

Na quarta, serão apresentados os payoffs e apreçamento de swaps de variância e volatilidade. O artigo (DEMETERFI et al., 1999) e o capítulo 11 sobre derivativos de volatilidade de (GATHERAL, 2006) serão a base para o exposto acima. Uma boa referência para esta parte é também o artigo (DARIO, 2006) que aborda o mesmo tema tratado neste artigo, porém apenas no que se refere a apreçamento e gerenciamento de risco. Nesta seção há dois focos principais. Primeiramente, será apresentada a diferença de apreçamento entre swaps de variância liquidados em reais e em dólares. O último seria útil por apresentar o eventual hedge no mercado offshore para swaps de variância na BM&F. Depois, será investigada a diferença no apreçamento ao ser considerado monitoramento discreto da variância realizada ao invés do habitual monitoramento contínuo que facilita os cálculos. O artigo (BROADIE; JAIN, 2006) será usado para realização do ajuste necessário para calcular a esperança da variância realizada sob monitoramento discreto. Por último, serão evidenciadas algumas potenciais dificuldades para o apreçamento de swaps de variância da taxa de câmbio

¹Aproximadamente, neste caso, sugere uma replicação que gere flutuações de P&L do conjunto swap de variância + hedge apenas marginais.

²Como nos casos estudados em Demeterfi et al., 1999 com 19 preços de exercício disponíveis.

de reais por dólares no Brasil, principalmente no que diz respeito à escolha do ativo a ser usado para liquidação do contrato.

Na quinta seção, será discutida a viabilidade de hedging para os futuros de swap de variância. Como a carteira replicante para swaps de variância é composta por um conjunto infinito de calls e puts vanilla de câmbio no caso de S^* ser igual ao preço a termo do ativo objeto F (explicação mais detalhada virá posteriormente) somada a uma posição continuamente rebalanceada no ativo objeto, então é natural discutir o que acontece com a carteira replicante quando se tem apenas alguns preços de exercício com liquidez, como no caso das opções vanilla de câmbio na BM&F. Inicialmente, o perfil de Variance Vega ($\frac{d\Pi}{d\sigma^2}$) de cada carteira Π será analisado, indicando em quais circunstâncias poderia haver uma ausência de captura de variância realizada para a carteira replicante disponível. Posteriormente, serão feitos back-testings e simulações de carteiras compostas pela carteira replicante e swaps de variância, e a trajetória do P&L destas carteiras será analisada, tentando evidenciar a eficácia ou não do hedge proposto com a carteira replicante. A metodologia a ser implementada para construção da carteira replicante também pode ser encontrada em (DEMETERFI et al., 1999).

A sexta seção apresenta um resumo e a conclusão dos resultados obtidos nas seções anteriores.

2. MOTIVAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE SWAPS DE VARIÂNCIA E VOLATILIDADE

Swaps de variância e de volatilidade, apesar do nome, se assemelham a contratos a termo de variância e volatilidade futura realizada, respectivamente. Estes dois produtos oferecem exposição direta à volatilidade da taxa de câmbio, diferentemente de opções vanilla de câmbio que têm sua exposição à volatilidade de uma certa forma contaminada pela preço corrente da taxa de câmbio. Para isso, basta notar que o Variance Vega, obtido pela diferenciação da fórmula de Black-Scholes adaptada para câmbio com relação à volatilidade ao quadrado, possui dependência no valor do ativo objeto. Mais especificamente, o Variance Vega³ obtido possui dependência no moneyness da opção calculado por $\ln\left\{\frac{S_t}{K}\right\}$, onde S_t é o valor corrente da taxa de câmbio e K é o preço de exercício da opção em questão.

Portanto, para um investidor que queira fazer uma aposta apenas em variância realizada, swaps de variância e de volatilidade são a opção mais natural, visto que não apresentam a dependência descrita acima. Concluindo, para qualquer valor corrente da taxa de câmbio em um instante de tempo fixo, a exposição à variância realizada σ^2 permanece inalterada em swaps de variância. Para ilustrar melhor o exposto acima, seguem abaixo as figuras 1 e 2 com o perfil de Variance Vega de um swap de variância de 1 ano e de um straddle *ATMF* (at-the-money-forward) com $K = 1.9873$ e 1 ano de prazo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Duas referências que tratam o tema swaps de variância de uma maneira mais intuitiva e geral são (ALLEN et al., 2006) e (DEMETERFI et al., 1999).

Swaps de variância, direta ou indiretamente, foram abordados pelos artigos mencionados a seguir. Foi inicialmente apresentado em (NEUBERGER, 1990) a possibilidade de transacionar-se um contrato, que pagasse um payoff baseado apenas na variância realizada de um ativo, sem que dependa da trajetória descrita pelo ativo objeto. Este foi o primeiro artigo que mostra que um contrato a termo ou futuro de variância pode ser sintetizado operando-se um contrato com um payoff logarítmico⁴. Neste artigo, também são comparados dois métodos para operar a volatilidade de um ativo. O primeiro seria via delta hedging de opções vanilla européias. O segundo, via o payoff logarítmico. Os resultados em (NEUBERGER, 1990) mostram que o último método se mostrou superior ao primeiro no período em questão.

Um pouco mais tarde em 1998, algumas idéias de como sintetizar payoffs baseados na variância realizada foram mais explicitamente apresentadas no artigo (CARR et al., 1998). Os autores utilizam as idéias propostas em (BREEDEN; LITZENBERGER, 1978) para replicação do contrato com o payoff logarítmico.

³O Variance Vega de uma call de câmbio é $\frac{S_t \exp\left\{-r_f \tau\right\} \sqrt{\tau} \exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\}}{2\sigma \sqrt{2\pi}}$. Já do payoff do swap de variância é constante com valor unitário.

⁴Um payoff logarítmico tem como $Payoff_T = \ln(S_T)$. Leitores não familiarizados com um swap de variância pode ser replicado por um contrato que pague um payoff logarítmico, mais uma posição rebalanceada continuamente no ativo objeto, podem ver mais detalhes na seção 4 deste artigo ou lerem qualquer uma das referências citadas no início desta seção.

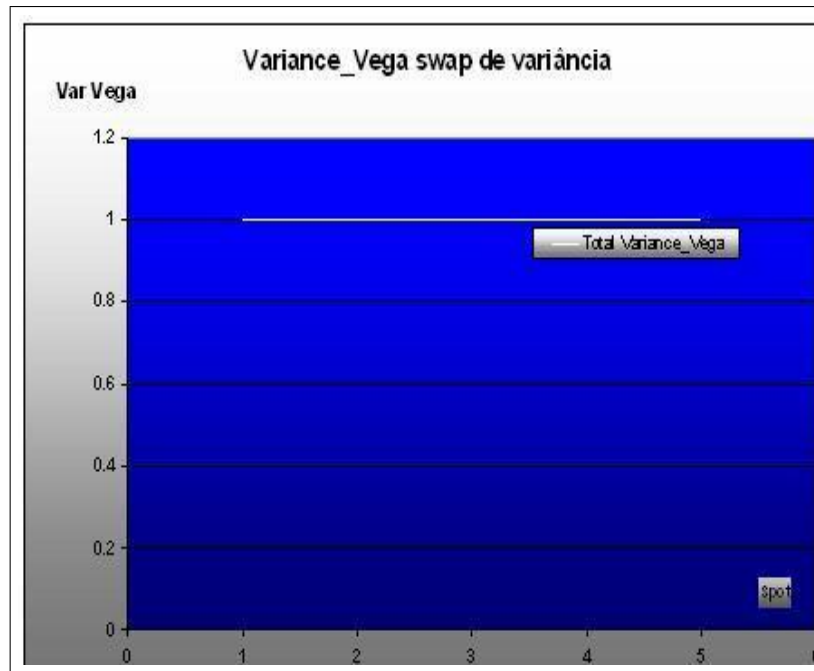
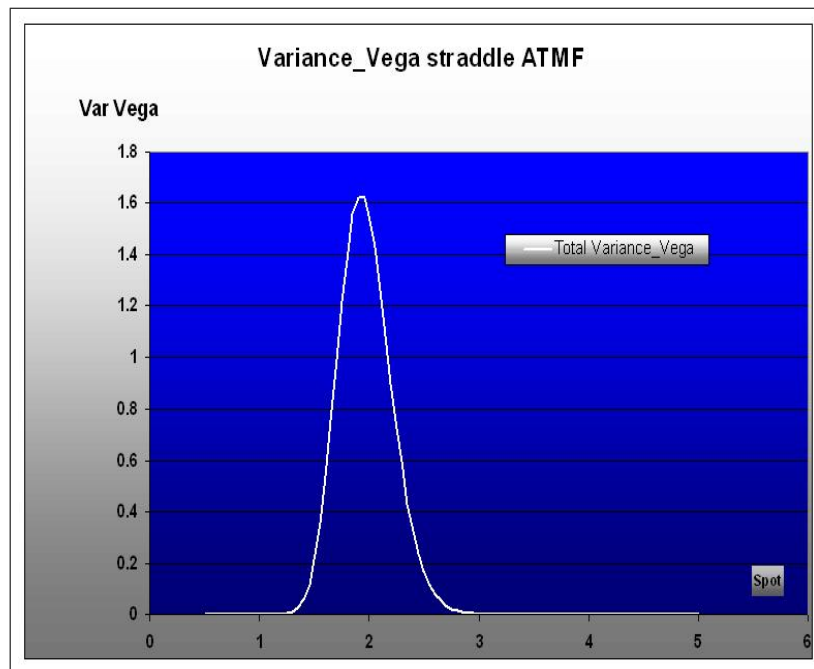


FIGURA 1. Perfil de Variance Vega de um swap de variância com prazo de 1 ano.

FIGURA 2. Perfil de Variance Vega para um straddle com $K = 1.9873$ e 1 ano de prazo.

De acordo com os autores, uma posição estática em opções vanillas combinada com uma posição dinâmica em contratos futuros seria suficiente para criar um payoff que pagasse a diferença entre a variância realizada entre dois instantes de tempo futuros e uma variância apostada. Neste artigo, o autor mostra que operar volatilidade via opções vanilla por meio de delta-hedge gera uma dependência no dollar-gamma $\frac{d^2 \Pi}{dS_t^2} \cdot S_t^2$. Consequentemente, o payoff final é dependente do dollar-gamma que por sua vez é dependente

da trajetória descrita pelo ativo objeto, sendo assim indesejável para um investidor que queira fazer uma aposta somente em volatilidade.

Mas foi em (DEMETERFI et al., 1999) que o tema Swaps de Variância foi abordado mais especificamente. Neste artigo, os autores dão uma noção intuitiva bem como uma derivação mais formal sobre o apreçamento de swaps de variância, inclusive na presença de um "volatility skew". Primeiramente, os autores mostram qual a ponderação necessária para que uma carteira contendo diversas opções européias vanilla tivesse um perfil de Variance Vega constante. Posteriormente, os autores derivam, num contexto onde apenas há a suposição de não haver saltos no processo especificado, qual seria o apreçamento sem arbitragem para swaps de variância. Fórmulas para construção da carteira replicante⁵ também são apresentadas para o caso onde há apenas um número finito de preços de exercício disponíveis. Por último, o autor mostra que swaps de volatilidade são dependentes do modelo escolhido para a variância realizada e devem possuir um ajuste de convexidade quando comparados a raiz quadrada de um preço de exercício justo num swap de variância.

No entanto, em (DEMETERFI et al., 1999), ou é utilizado apreçamento por não arbitragem (considerando todos os preços de exercícios serem disponíveis), ou assume-se que com um número finito de preços de exercício disponíveis é possível construir uma carteira que produza um payoff sempre acima (e tão próximo quanto se queira baseada no espaçamento entre os preços de exercício) do payoff logarítmico. Entretanto, a banda de valores hipoteticamente atribuídos aos preços de exercício é larga, garantindo assim que dificilmente o ativo objeto saia desta banda durante a duração do swap de variância. Nesta circunstância, considera-se que o payoff logarítmico é replicado robustamente. Entretanto, a liquidez de opções de câmbio na BM&F é restrita⁶. Será que isto resulta no payoff logarítmico ser replicado insatisfatoriamente, visto que há boa probabilidade do ativo objeto sair da banda em que a replicação do mesmo é robusta? Se a resposta for positiva, então algum spread deveria ser empregado no apreçamento de swaps de variância da taxa de câmbio. Este artigo pretende estudar justamente esta pequena lacuna na literatura de swaps de variância.

Em (ALLEN et al., 2006), swaps de variância são discutidos profundamente, inclusive sob um ponto de vista mais prático. Em (JAVAHERI; WILMOTT; HAUG, 2004), foi discutido o apreçamento de swaps de volatilidade no modelo $GARCH(1,1)$. Em (CARR; LEE; STAUM, 2005) foram apreçados payoffs arbitrários de variância realizada sob hipótese de correlação nula entre o processo do preço da ação e da variância. Em (WINDCLIFF; FORSYTH; VETZAL, 2003) foram apreçados derivativos de volatilidade num modelo de difusão com saltos. (CARR; LEWIS, 2007) e (BROADIE; JAIN, 2006) são boas referências para ajuste no apreçamento assumindo-se que a variância realizada é monitorada discretamente. Finalmente, (DARIO, 2006) é uma referência em português sobre o assunto.

4. DESCRIÇÃO DOS PAYOFFS E APREÇAMENTO DE CADA CONTRATO

4.1. Swaps de Variância.

4.1.1. **Informações contratuais.** Swaps de variância de câmbio são operados no mercado de balcão. Desta forma, fica difícil generalizar qualquer forma de informação contratual acerca destes contratos. Já futuros de swap de variância são contratos listados por bolsas. Entretanto, as bolsas mundo afora costumam lançar apenas futuros de swap de variância referenciados em índices de ações. Portanto, também há pouca informação sobre futuros de swap de variância de câmbio.

Em (ALLEN et al., 2006), os autores comentam que usualmente swaps de variância referenciados em ações necessitam de margem com um valor inicial alocado como colateral, da mesma forma como acontece com opções. O valor inicial da margem, entretanto, varia de contrato para contrato.

Também é mencionado que em alguns dias pode não ser divulgado o fixing⁷ de referência. Este problema é normalmente chamado de dia corrompido. No caso específico de swaps de variância da taxa de câmbio, há a possibilidade de se escolher a $PTAX800$, o dólar à vista de fechamento, ou o futuro de câmbio com vencimento igual ao do swap de variância como fixing do swap de variância. Caso a $PTAX800$

⁵Na verdade, as carteiras mencionadas são aproximadamente replicantes pois não contém todos os preços de exercício disponíveis. Entretanto, garantem sempre um payoff superior ao do payoff logarítmico caso o ativo objeto tenha uma trajetória dentro dos preços de exercício mínimo e máximo disponíveis.

⁶Nesta artigo, serão consideradas disponíveis calls e puts ATMF e 25% de Black Forward Delta na maioria das situações estudadas.

⁷Fixing é o valor do ativo estipulado para a liquidação do contrato.

seja escolhida, então a chance de haver algum dia corrompido no decorrer do swap é baixa, visto que historicamente este ativo quase nunca deixou de ser divulgado. Na maioria dos casos, o BC sempre consegue arbitrar um valor para este ativo. Já o futuro de câmbio com vencimento igual ao swap de variância possui maiores chances de ter algum dia corrompido, assim como o dólar à vista de fechamento. A falta de liquidez nestes ativos, em situações extremas, pode gerar a falta de um consenso para se arbitrar um valor de fechamento. Ademais, o futuro de câmbio pode sofrer um limite de alta, por exemplo, e não ser mais operado até o final do pregão. Neste caso, fica ainda mais difícil para se arbitrar um valor de fechamento.

4.1.2. **Payoff.** O payoff de um swap de variância de câmbio é dado por:

$$Payoff_{CCY}(T) = NOT_{CCY}[\sigma_R^2 - K_{VAR}]$$

onde,

$$\sigma_R^2 = \frac{A}{N - \zeta} \sum_{i=1}^N (x_i - \zeta \cdot \bar{x})^2$$

$$x_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

A: é o fator de anualização e é tipicamente 252 (mas pode ser acordado diferentemente no contrato).

$\zeta = 1$ ou 0, dependendo se o contrato calcula a variância realizada ajustando-se pela média ou não.

$Payoff_{CCY}(T)$ é o payoff que ocorre em T na moeda CCY especificada no subscrito.

NOT_{CCY} é o Nocional na moeda especificada no subscrito.

K_{VAR} é o preço de exercício do swap de variância, ou alternativamente, o nível de variância no qual o investidor entrou no contrato.

N : é o número de dias úteis entre a data em que ocorreu a transação e a data T .

4.1.3. **Apreçamento considerando-se o Nocional em reais para swaps de variância com monitoramento contínuo do ativo objeto.** O apreçamento consiste em achar o valor de K_{VAR} que zera inicialmente o valor do contrato. Assim sendo temos que:

$$0 = E^Q[\sigma_R^2 - K_{VAR}] \implies K_{VAR} = E^Q[\sigma_R^2]$$

onde,

E^Q : é a esperança na medida de probabilidade neutra a risco em reais.

Portanto, para achar o valor de K_{VAR} basta calcular a esperança acima.

Assumindo-se que o câmbio S_t segue a seguinte EDE (equação diferencial estocástica):

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - rf_t)dt + \sigma_t dW_t^Q$$

sendo que,

S_t : é a taxa de câmbio no instante t .

r_t : é a taxa de juros doméstica (em reais) no instante t no formato de capitalização contínua. Esta taxa pode ser generalizada por um processo adaptado pela filtração⁸ \mathcal{F}_t que representa o conjunto de informações até t . Uma boa referência para revisão dos conceitos usados neste artigo sobre cálculo estocástico seria (SHREVE, 2004).

rf_t : é a taxa de juros estrangeira (em dólares) no instante t no formato de capitalização contínua. Esta taxa pode ser generalizada por um processo adaptado pela filtração \mathcal{F}_t .

σ_t : é a volatilidade instantânea da taxa de câmbio em t . Da mesma forma, σ_t pode ser generalizada como um processo adaptado pela filtração \mathcal{F}_t .

W_t^Q : é um movimento browniano sob a medida de probabilidade neutra a risco em reais Q .

Com $X_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ e utilizando-se o lema de Itô:

$$dX_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt$$

⁸A filtração mencionada possui as condições usuais definidas em Karatzas & Shreve (1991).

$$X_T = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

$$\langle X_T \rangle_T = -2X_T + 2 \int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$$

onde, $\langle X_T \rangle_{t,T} = \int_t^T \sigma_s^2 ds$ é a variação quadrática do processo X entre t e T . Também foi utilizado o seguinte abuso de notação:

$$\langle X_T \rangle_T = \langle X_T \rangle_{0,T}$$

Do exposto acima, nota-se que a variação quadrática do processo pode ser representada por uma posição estática num contrato que pague um payoff logarítmico mais uma posição dinâmica em contratos de dólares à vista (Spot), rebalanceados continuamente de modo a manter um Nocional de $\frac{1}{S_t}$ dólares. Finalmente, a variância realizada de t a T é dada por:

$$V_{t,T} = \frac{\langle X_T \rangle_{t,T}}{T-t}$$

Portanto, para calcularmos a esperança da variância realizada de 0 a T , basta calcularmos a esperança da variação quadrática do processo entre 0 e T .

$$E^Q[\langle X_T \rangle_T] = -2E^Q[X_T] + 2 \int_0^T E^Q\left[\frac{dS_t}{S_t}\right]$$

$$E^Q[\langle X_T \rangle_T] = -2E^Q[X_T] + 2 \int_0^T (r_t - rf_t) dt$$

$$(1) \quad \frac{1}{T} E^Q[\langle X_T \rangle_T] = \frac{2}{T} \int_0^T (r_t - rf_t) dt - \frac{2}{T} E^Q[X_T]$$

Alternativamente também pode-se escrever:

$$(2) \quad \frac{1}{T} E^Q[\langle X_T \rangle_T] = -\frac{2}{T} E^Q\left[\ln \frac{S_T}{F}\right]$$

onde F é o preço a termo do ativo objeto. A seguir, usaremos a seguinte identidade proposta em (DEMETERFI et al., 1999) onde S^* é o valor do preço de exercício que divide a liquidez entre calls e puts:

$$(3) \quad X_T = \ln \frac{S^*}{S_0} + \frac{S^* - S_0}{S_0} - \frac{1}{K^2} \int_0^{S^*} (K - S_T)^+ dK - \frac{1}{K^2} \int_{S^*}^{\infty} (S_T - K)^+ dK$$

De (3) em (1):

$$\frac{1}{T} E^Q[\langle X_T \rangle_T] = \frac{2}{T} \int_0^T (r_t - rf_t) dt - \frac{2}{T} \left\{ \ln \frac{S^*}{S_0} - \frac{1}{K^2} \int_0^{S^*} (K - S_T)^+ dK - \frac{1}{K^2} \int_{S^*}^{\infty} (S_T - K)^+ dK \right\}$$

Utilizando-se $F = S^*$, onde F é o preço a termo da taxa de câmbio, reduz a equação acima para:

$$\frac{1}{T} E^Q[\langle X_T \rangle_T] = \frac{2}{T} \left\{ \frac{1}{K^2} \int_0^F P(K, T) dK + \frac{1}{K^2} \int_F^{\infty} C(K, T) dK \right\}$$

A equação acima representa o preço de um swap de variância para $S^* = F$, onde $P(K, T)$ e $C(K, T)$ representam preços de puts e calls vanilla não descontados dados por:

$$C(K, T) = FN(d1) - KN(d2) \text{ e } P(K, T) = FN(d1) - KN(d2) - (F - K)$$

$$d1 = \frac{\ln\left\{\frac{F}{K}\right\} + 0.5\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d2 = d1 - \sigma\sqrt{\tau} \text{ e } \tau = T - t$$

4.1.4. **Diferença no apreçamento entre o caso de monitoramento contínuo e discreto da variância realizada.** Uma boa referência para esta parte é (BROADIE; JAIN, 2006). O resultado que será utilizado se encontra no apêndice A do artigo citado. Ao considerar-se monitoramento discreto da variância realizada pode-se derivar que:

$$d \ln S_t = (r_t - r f_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t^Q$$

Integrando-se a expressão acima de t_i a t_{i+1} e usando-se uma discretização de Euler:

$$\ln \left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\} = (r_{t_i} - r f_{t_i} - \frac{1}{2} \sigma_{t_i}^2) \Delta t_i + \sigma_{t_i} \sqrt{\Delta t_i} Z_{t_{i+1}}$$

onde, $Z_{t_{i+1}} \sim N(0, 1)$. Elevando-se ambos os lados ao quadrado e somando-se em todos os intervalos de monitoramento resulta em:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2 \left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\} = \sum_{i=0}^{N-1} (r_{t_i} - r f_{t_i} - \frac{1}{2} \sigma_{t_i}^2)^2 \Delta t_i^2 + \sigma_{t_i}^2 \Delta t_i Z_{t_{i+1}}^2 + 2(r_{t_i} - r f_{t_i} - \frac{1}{2} \sigma_{t_i}^2) \Delta t_i^{\frac{3}{2}} \sigma_{t_i} Z_{t_{i+1}}$$

Tirando-se a esperança sob a medida de probabilidades neutra a risco em reais e usando $E^Q[Z_{t_{i+1}}] = 0$ e $E^Q[Z_{t_{i+1}}^2] = 1$ implica que:

$$E^Q \left[\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2 \left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\} \right] = E^Q \left[\sum_{i=0}^{N-1} (r_{t_i} - r f_{t_i} - \frac{1}{2} \sigma_{t_i}^2)^2 \Delta t_i^2 \right] + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{t_i}^2 \Delta t_i$$

Nota-se que o lado direito da equação acima possui um termo dependente de Δt_i^2 e converge para 0 com um aumento na frequência de monitoramento (com Δt_i^2 tendendo a zero). No limite temos que a variância com monitoramento discreto e contínuo são iguais aumentando-se a frequência de monitoramento que é um fato desejável e verificado na equação acima.

Mas o que acontece para monitoramento diário? Neste caso específico, analisaremos as diferenças obtidas calculando-se as variâncias realizadas sob monitoramento contínuo e discreto e explicitaremos as diferenças observadas. No entanto, temos um problema para realização do cálculo da variância sob monitoramento discreto usando-se a equação acima. A diferença entre as variâncias realizadas sob diferentes frequências de monitoramentos depende da esperança na medida de probabilidade neutra a risco da variância instantânea ao quadrado e termos cruzados que dependem do produto da variância instantânea com as taxas de juros. Como não sabemos o processo real da variância instantânea mas sabemos que sua ordem de grandeza é 10 vezes menor que as taxas de juros⁹, então ela será desconsiderada na equação acima. Portanto, a equação que será utilizada para cálculo da variância realizada sob monitoramento discreto será:

$$E^Q \left[\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2 \left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\} \right] \approx E^Q \left[\sum_{i=0}^{N-1} (r_{t_i} - r f_{t_i})^2 \Delta t_i^2 \right] + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{t_i}^2 \Delta t_i$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$E^Q \left[\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2 \left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\} \right] \approx \sum_{i=0}^{N-1} \ln^2 \left\{ \frac{F_{t_{i+1}}}{F_{t_i}} \right\} + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_{t_i}^2 \Delta t_i$$

Pode-se notar pela equação acima que a esperança da variância sob hipótese de monitoramento discreto é sempre superior a esperança sob hipótese de monitoramento contínuo. A taxa de câmbio de reais por dólares seria um exemplo onde isto ocorre.

A seguir segue um exemplo do exposto acima:

Swap de variância com prazo de 1 ano, isto é, com data de negociação em 12/Set/2006 para término em 12/Set/2007. O valor de K_{VAR} assumindo-se monitoramento contínuo é:

⁹Tipicamente as taxas de juros são da ordem de 10% e as variâncias de 10%². Esta hipótese nos leva à afirmação acima que tipicamente a variância é 10 vezes menor que o valor das taxas de juros.

$$\frac{1}{T}E^Q\left[\int_t^T \sigma_s^2 ds\right] = 15.2338927\%{}^2$$

Assumindo-se monitoramento discreto diário o valor de K_{VAR} mudaria para:

$$\frac{1}{T}E^Q\left[\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2\left\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right\}\right] = 15.2428149\%{}^2$$

Swap de variância com prazo de 6 meses, isto é, com data de negociação em 12/Set/2006 para término em 12/Mar/2007.

$$\frac{1}{T}E^Q\left[\int_t^T \sigma_s^2 ds\right] = 13.2697729\%{}^2$$

$$\frac{1}{T}E^Q\left[\sum_{i=0}^{N-1} \ln^2\left\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right\}\right] = 13.2814089\%{}^2$$

Para outros prazos a diferença mostrou ser da mesma ordem de grandeza, isto é, no máximo 3 pontos base ao quadrado. Portanto, para swaps de variância que não subtraem a média para cálculo da variância realizada, as diferenças encontradas para esperança da variância realizada sob os dois tipos de monitoramento são desprezíveis face ao spread de compra-venda de aproximadamente 50 pontos base ao quadrado nestes produtos.

4.1.5. Apreçamento considerando-se o Nocional em dólares para swaps de variância com monitoramento contínuo do ativo objeto. Na subseção anterior, foi abordado o caso onde o payoff se dava em reais. Os investidores podem procurar imunizar a posição original adquirida num swap de variância em reais, transacionando no exterior (offshore), um contrato de swap de variância da taxa de câmbio. A diferença entre o contrato onshore (com pagamento em reais) e offshore (com pagamento em dólares), consiste apenas nesta sutil diferença da moeda de liquidação.

Para o apreçamento deste contrato offshore, utilizaremos a seguinte EDE¹⁰:

$$\frac{dB_t}{B_t} = (rf_t - r_t)dt + \sigma_t dZ_t^{Q^f}$$

onde,

B_t : é a taxa de câmbio no instante t expressa em dólares por reais, isto é, cotada em USD/BRL.

As taxas de juros e volatilidade possuem o mesmo significado descrito acima. A diferença majoritária consiste que $Z_t^{Q^f}$ é agora um movimento browniano na medida neutra a risco em dólares Q^f . Analogamente ao desenvolvido acima, pode-se derivar que:

$$E^{Q^f}\left[\int_0^T \sigma_t^2 dt\right] = \int_0^{F_B} \frac{2}{K_B^2} P_B(K_B, T) dK + \int_{F_B}^{\infty} \frac{2}{K_B^2} C_B(K_B, T) dK$$

Agora, F_B é a taxa forward com cotação em dólares por reais para T. Mais precisamente,

$$F_B = B_0 \exp\left\{\int_0^T (rf_s - r_s) ds\right\}$$

Também, P_B e C_B são preços não descontados de puts e calls, respectivamente, de uma unidade de opção européia de reais (ao invés de dólares como eram P e C definidos anteriormente) com preço de exercício K_B . A relação dos preços para swaps de variância que possuem payoff em reais ou dólares é derivada pela seguinte relação:

$$C(K, T) = FN(d1) - KN(d2) = \frac{1}{F_B} N(-d2_B) - \frac{1}{K_B} N(-d1_B)$$

$$C(K, T) = \frac{1}{F_B K_B} [K_B N(-d2_B) - F_B N(-d1_B)] = \frac{1}{F_B K_B} P_B(K_B, T)$$

¹⁰Inicialmente será ignorado o prêmio de conversibilidade para cálculo da EDE offshore.

onde $d1_B$ e $d2_B$ são calculados de maneira análoga a $d1$ e $d2$, porém com o ativo objeto e preço de exercício com cotações inversas, justificando portanto o subscrito B.

Portanto,

$$\frac{1}{FK}C(K, T) = P_B(K_B, T)$$

$$\frac{1}{FK}P(K, T) = C_B(K_B, T)$$

Isto nos permite concluir que:

$$E^{Q^f} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] = \int_F^\infty \frac{2}{FK} C(K, T) dK + \int_0^F \frac{2}{FK} P(K, T) dK \neq E^{Q^f} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right]$$

Também, usualmente:

$$K_{Var}^{BRL} < K_{Var}^{USD}$$

visto que quando o payoff é em reais, o peso dado às puts é maior¹¹ que no caso onde o payoff é em dólares. Da mesma forma, quando o payoff é dado em dólares, o peso das calls é maior que no caso onde o payoff é em reais. Como tipicamente a superfície de volatilidade da taxa de câmbio de reais por dólares possui valores maiores de volatilidade implícita para calls fora do dinheiro que para puts fora do dinheiro, isto implica que usualmente $K_{Var}^{BRL} < K_{Var}^{USD}$.

A intenção deste item foi mostrar que, mesmo num mundo ideal onde a volatilidade instantânea onshore e offshore são as mesmas, e as taxas de juros para o mercado offshore não possuem prêmio de conversibilidade, os valores de K_{VAR} diferem para swaps de variância com Nocional em reais e em dólares. Obviamente, estes valores divergem mais ainda no mundo real onde a superfície de volatilidade onshore e offshore são distintas e há o prêmio de conversibilidade para apreçamento de contratos a termo offshore.

4.1.6. *Dificuldades adicionais para o apreçamento de swaps de variância da taxa de câmbio no Brasil.*

O fixing mais usual para os contratos operados sobre a taxa de câmbio de reais por dólares é a $PTAX800$ ¹². Esta, por sua vez, é calculada como a média ponderada pelo volume das transações de dólares à vista no mercado de balcão ao longo do dia. Também, para sua construção há um pouco de arbitrariedade, visto que o Banco Central retira alguns outliers da amostra de negócios ao longo do dia usada para o cálculo.

De qualquer modo, a volatilidade da $PTAX800$ a cada dia é usualmente menor que a volatilidade da taxa de câmbio de fechamento S_t , visto que se trata de uma média dos negócios ao longo do dia, suavizando portanto sua volatilidade.

Portanto, caso os swaps de variância tenham a $PTAX800$ de cada dia como fixing, então é de se esperar que se haja uma volatilidade menor do que a implícita no mercado de opções vanilla.

O leitor pode se perguntar o motivo da diminuição da volatilidade para os swaps de variância fixados por $PTAX800$, quando as opções de câmbio vanilla também são fixadas por $PTAX800$. Acontece que as opções vanilla de câmbio necessitam de um processo que descreva o valor da $PTAX800$ numa data futura T . Este processo pode ser perfeitamente aproximado pelo processo descrito pela taxa de câmbio de fechamento S_T , para qualquer data anterior a T , visto que a $PTAX800$ só será formada em T . O único problema com esta aproximação é que, no dia do vencimento da opção, ela deveria ter sua volatilidade corrigida (no caso reduzida) para refletir a $PTAX800$ e não a taxa de fechamento do câmbio S_T . Entretanto, justamente no dia do vencimento o Vega da opção é quase nulo e uma especificação incorreta da volatilidade para este dia gera uma mudança ínfima no preço da opção vanilla, mascarando portanto esta aproximação usualmente utilizada.

Já para os swaps de variância que forem fixados por $PTAX800$, há de se especificar um processo para a taxa $PTAX800$ ao longo do tempo, visto que ao fim de cada dia ela deve ser prevista para fazer o apreçamento do contrato. Mais especificamente, a volatilidade da $PTAX800$ e não do ativo objeto deve ser replicada. Entretanto, não há contratos que operem de alguma forma a volatilidade da $PTAX800$, tornando portanto a construção de uma carteira replicante ainda mais árdua. Portanto, esta possibilidade

¹¹O peso dado é $\frac{1}{K^2}$ quando o payoff é em reais e $\frac{1}{KF}$ quando o payoff é em dólares.

¹²Gostaria de agradecer Marcos Carreira pela discussão bastante esclarecedora a respeito desta subseção.

resultaria em substancial risco de base para o investidor que desejasse replicar com um portfólio de opções vanilla de câmbio os swaps de variância tendo a *PTAX800* como fixing.

Outra possibilidade seria ter a taxa de câmbio do contrato futuro, com vencimento na mesma data do vencimento do swap de variância como fixing. Esta possibilidade ajudaria de várias formas. Primeiro resolveria o problema de apreçamento sob hipótese de juros estocásticos conforme proposto por (MERTON, 1973), visto que sob esta hipótese a volatilidade implícita nas opções é da própria taxa forward/futura de câmbio e não da taxa Spot caso seja usada a seguinte EDE para o processo da taxa forward:

$$dF_{t,T} = F_{t,T} \sigma_{F_{t,T}} dW_t^Q$$

onde,

$F_{t,T}$: é o preço a termo corrente do ativo objeto para a data T .

$\sigma_{F_{t,T}}$: é a volatilidade instantânea do preço a termo para a data T .

Para prazos curtos até o vencimento de opções, este ajuste por estocasticidade de juros é insignificante, mas deve ser considerado para opções com vencimento após 1 ano com taxas de juros bem voláteis. O autor (ALLEN et al., 2006) também cita este potencial risco. A escolha pelos futuros de câmbio em oposição a *PTAX800* também resolveria o problema mencionado acima sobre a correção da volatilidade dos fixings. Então parece mais natural usar os futuros de câmbio divulgados pela BM&F para a data de vencimento do swap de variância como fixing, apesar de não ser a opção mais óbvia. Entretanto, os contratos futuros da taxa de câmbio possuem liquidez apenas nos primeiros dois vencimentos, podendo gerar problemas de dias corrompidos conforme vimos acima, principalmente nos dias que ocorrerem limites de alta acionados pela BM&F para estes contratos.

4.2. Swaps de volatilidade.

4.2.1. **Payoff.** O payoff de um swap de volatilidade de câmbio é dado por:

$$Payoff_{CCY}(T) = NOT_{CCY}[\sigma_R - K_{VOL}]$$

onde,

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{A}{N - \zeta} \sum_{i=1}^N (x_i - \zeta \cdot \bar{x})^2}$$

Pela desigualdade de Jensen, sabe-se que:

$$\sqrt{E[X]} \geq E[\sqrt{X}]$$

Portanto, se tirarmos a raiz quadrada da esperança da variância realizada, ou K_{VAR} , obtemos um limite superior para o preço de um swap de volatilidade. A diferença entre $\sqrt{K_{VAR}}$ e K_{VOL} é usualmente chamada de ajuste de convexidade e este ajuste depende da volatilidade da volatilidade realizada a ser especificada. Isto torna este ajuste, e portanto o preço de exercício justo K_{VOL} de swaps de volatilidade, dependentes da escolha do modelo adotado.

A principal referência adotada nesta seção foi (GATHERAL, 2006). Nela pode-se obter maiores informações sobre o ajuste de convexidade e sobre a dependência da escolha do modelo no apreçamento de swaps de volatilidade.

4.2.2. **Apreçamento de swaps de volatilidade no modelo em que a volatilidade realizada é lognormal.** Assumindo-se que a volatilidade realizada é lognormalmente distribuída com média μ e variância s^2 , temos que:

$$E[\sqrt{\langle X_T \rangle_T}] = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}s^2\right\}$$

e

$$E[\langle X_T \rangle_T] = \exp\left\{2\mu + 2s^2\right\}$$

Resolvendo-se o sistema pode-se achar μ e s^2 :

$$s^2 = 2 \cdot \ln \left\{ \frac{\sqrt{E[\langle X_T \rangle_T]}}{E[\sqrt{\langle X_T \rangle_T}]} \right\}$$

e

$$\mu = \ln \left\{ \frac{E[\sqrt{\langle X_T \rangle_T}]}{\sqrt{E[\langle X_T \rangle_T]}} \right\}$$

Utilizando-se as equações acima chega-se que:

$$E[\sqrt{\langle X_T \rangle_T}] = \frac{\sqrt{E[\langle X_T \rangle_T]}}{\exp \left\{ \frac{s^2}{2} \right\}}$$

Portanto, neste modelo, quanto maior a volatilidade da volatilidade realizada s , menor o preço do swap de vol com relação a raiz quadrada do preço do swap de variância e maior o ajuste de convexidade.

5. VIABILIDADE DE HEDGING PARA FUTUROS DE SWAP DE VARIÂNCIA DA TAXA DE CÂMBIO

Nesta seção, vamos estudar a viabilidade de hedging de swaps de variância da taxa de câmbio a serem implantados na BM&F. Como há em média 4 opções sobre a taxa de câmbio com liquidez na BM&F para cada vencimento, então a composição da carteira replicante para um swap de variância (que pode ser decomposto por um conjunto infinito de calls e puts dinamicamente imunizados por delta-hedge) deve apresentar imperfeições. Para verificar este fato, inicialmente será apresentado o perfil de Variance Vega de diversas possibilidades para a carteira replicante. É desejado que a carteira replicante disponível possua um perfil de Variance Vega constante como o swap de variância apresenta. Posteriormente, serão feitos tanto simulações quanto back-testings de carteiras compostas pelo swap de variância e a carteira replicante disponível. A carteira replicante disponível será composta pelas opções ATMF (at-the-money forward) call e put, 25C (25% de call Black forward delta) e 25P (-25% de put Black forward Delta) salvo alguns poucos casos com propósito meramente ilustrativo. As volatilidades implícitas para estas opções foram obtidas a partir de uma base histórica e interpoladas para os pontos não observados.

A carteira replicante do swap de variância com um número finito de opções será calculada pelas seguintes fórmulas adaptadas de (DEMETERFI et al., 1999).

$$w_c(K_{n,c}) = \frac{f(K_{n+1,c}) - f(K_{n,c})}{K_{n+1,c} - K_{n,c}} - \sum_{i=0}^{n-1} w_c(K_{i,c})$$

$$w_p(K_{n,p}) = -\frac{f(K_{n+1,p}) - f(K_{n,p})}{K_{n+1,p} - K_{n,p}} - \sum_{i=0}^{n-1} w_p(K_{i,p})$$

$w_c(K_{n,c})$ será utilizado para calcular a quantidade de opções 25C e $w_p(K_{n,p})$ será utilizado para calcular a quantidade de opções 25P. A quantidade de opções ATMF é dada por:

$$w_c(K_0) = \frac{f(K_{1,c}) - f(K_0)}{K_{1,c} - K_0}$$

e

$$w_p(K_0) = -\frac{f(K_{1,p}) - f(K_0)}{K_{1,p} - K_0}$$

Neste contexto, a função f é dada por:

$$f(S_T) = \frac{2}{T} \left[\frac{S_T - F}{F} - \ln \left\{ \frac{S_T}{F} \right\} \right]$$

onde, F é o preço a termo para a data T e

$$K_0 = F \leq K_{1,c}$$

$$K_0 = F \geq K_{1,p}$$

Utilizando agora a derivação proposta em (DEMETERFI et al., 1999) para K_{VAR} :

$$K_{VAR} = \frac{2}{T} E^Q \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \frac{S_T - S^*}{S^*} - \ln \frac{S^*}{S_0} + \frac{S_T - S^*}{S^*} - \ln \frac{S_T}{S^*} \right]$$

$$K_{VAR} = \frac{2}{T} \left[\int_0^T (r_t - r f_t) dt - \left(\frac{F}{S^*} - 1 \right) - \ln \frac{S^*}{S_0} \right] + \Pi_{CP}$$

onde, Π_{CP} : é a carteira de opções (call e puts) não descontadas com pesos dados por $w_c(K_{n,c})$ e $w_p(K_{n,p})$ cuja combinação dá o seguinte payoff na data de vencimento:

$$f(S_T) = \frac{2}{T} \left[\frac{S_T - S^*}{S^*} - \ln \frac{S_T}{S^*} \right]$$

No nosso caso, consideraremos que $S^* = F = K_0$, chegando-se portanto às fórmulas inicialmente apresentadas nesta seção.

5.1. Análise do perfil de Variance Vega de carteiras replicantes. Conforme dito acima, inicialmente vamos analisar o perfil de Variance Vega de diversas implementações da carteira replicante de um swap de variância de 1 ano, variando-se o número de preços de exercício e o espaçamento entre eles. Os gráficos obtidos devem ser semelhantes à figura 1 de (DEMETERFI et al., 1999). Primeiramente, será observado se uma carteira replicante composta por opções vanillas de câmbio (com pesos inversamente proporcionais a K^2), com preço de exercício inicial 1, preço de exercício final 4 e com preços de exercício intermediários espaçados a cada 0.01, mantém um perfil de Variance Vega constante entre 1 e 4 (para referência, o valor de F é de 1.9873 para este prazo). Esta é a nossa expectativa após a observação do gráfico h da figura 1 de (DEMETERFI et al., 1999). A figura 3 ilustra o resultado obtido.

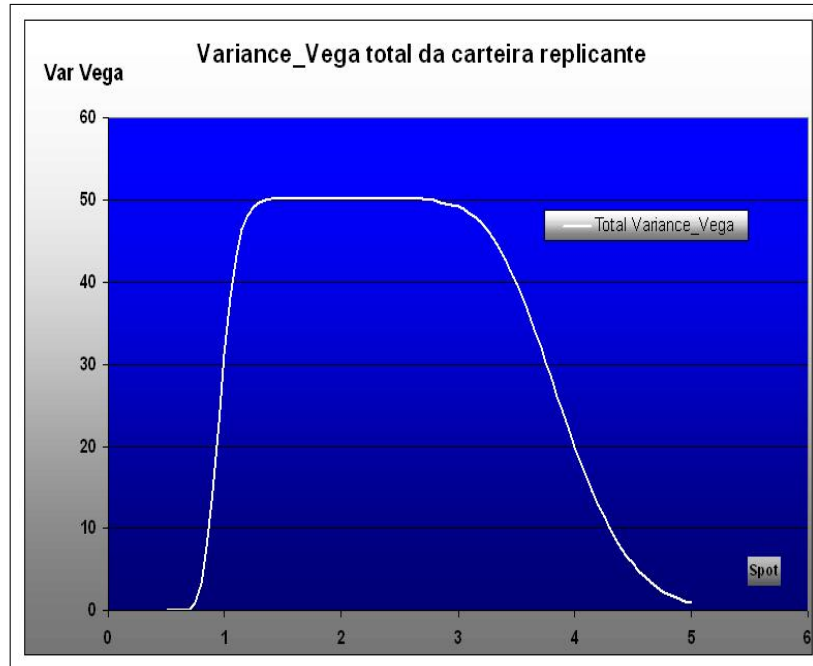


FIGURA 3. Perfil de Variance Vega em função da taxa de câmbio à vista para espaçamento entre preços de exercício de 0.01 e $K_i = 1$ e $K_f = 4$.

A figura 3 apresenta o perfil de Variance Vega esperado, visto que o mesmo apresenta perfil constante para valores de câmbio entre 1 e 4. Na verdade, o perfil começa a perder Variance Vega um pouco antes de 4, assim como o gráfico h da figura 1 de (DEMETERFI et al., 1999) também começa a perder Variance Vega antes de 180, que é o último preço de exercício em que se compra as opções vanillas naquela situação.

Ao começarmos a aumentar o espaçamento entre os preços de exercício, o perfil de Variance Vega começa a ficar oscilatório, indicando que se captura variância realizada mais para certos valores do câmbio

do que em outros. Este perfil de Variance Vega é indesejado para replicação do swap de variância. Pode-se também verificar o exposto acima pelo gráfico d da figura 1 de (DEMETERFI et al., 1999). A figura 4 ilustra o Variance Vega resultante para uma carteira replicante com preço de exercício inicial 1, preço de exercício final 4 e com preços de exercício intermediários espaçados a cada 0.5.

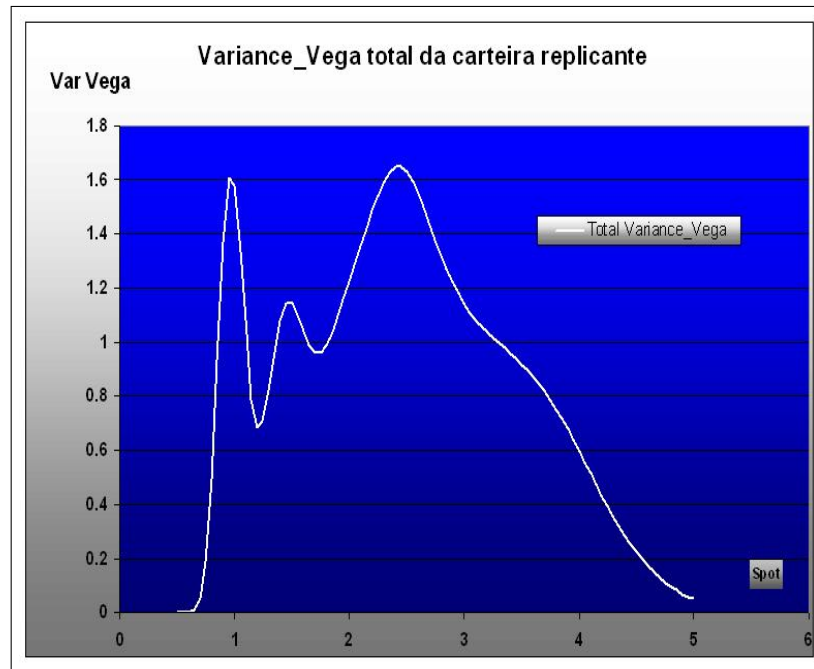


FIGURA 4. Perfil de Variance Vega em função da taxa de câmbio à vista para espaçamento entre preços de exercício de 0.5 e $K_i = 1$ e $K_f = 4$.

Também será avaliado o que acontece com o Variance Vega de carteiras com espaçamento de 0.01, mas estreitando-se gradualmente o intervalo entre os preços de exercício iniciais e finais da carteira replicante disponível. Vale lembrar que o primeiro resultado a ser analisado é o da figura 3, onde o preço de exercício inicial é 1, o preço de exercício final é 4 e o espaçamento entre preços de exercício é de 0.01. Nesta situação, o Variance Vega possui o perfil constante desejado. A próxima situação a ser analisada será o Variance Vega de uma carteira com espaçamento de 0.01 e preço de exercício inicial 1.25 e preço de exercício final 3. Esta situação está ilustrada na figura 5.

Nota-se na figura 5 que o perfil de Variance Vega já começa a se tornar mais côncavo na região que supostamente deveria ser constante. Será analisado agora o que acontece com o Variance Vega de uma carteira replicante com espaçamento entre preços de exercício de 0.01 e com preço de exercício inicial 1.5 e preço de exercício final 2.5. A figura 6 ilustra esta situação.

Nota-se que a medida que a distância entre o preço de exercício inicial e final encurta, o perfil de Variance Vega se torna mais côncavo perto de seu pico. No limite onde o preço de exercício inicial é igual ao preço de exercício final, há apenas um straddle na carteira replicante que tem o perfil de Variance Vega da figura 7.

Pelas figuras de 5 a 7, pode-se afirmar que o estreitamento do intervalo entre os preços de exercício inicial e final da carteira replicante prejudica a formação de uma carteira com perfil de Variance Vega constante. De fato, quanto mais estreito o intervalo entre os preços de exercício disponíveis, mais côncavo é o perfil de Variance Vega que se torna altamente dependente do valor do câmbio. Este fato é indesejado para replicação de swaps de variância que possuem perfil de Variance Vega constante para qualquer valor do câmbio.

5.2. Simulação de carteiras contendo o swap de variância e carteiras replicantes. Nesta subseção, serão realizadas algumas simulações de trajetórias do ativo objeto S_t , analisando posteriormente a replicação

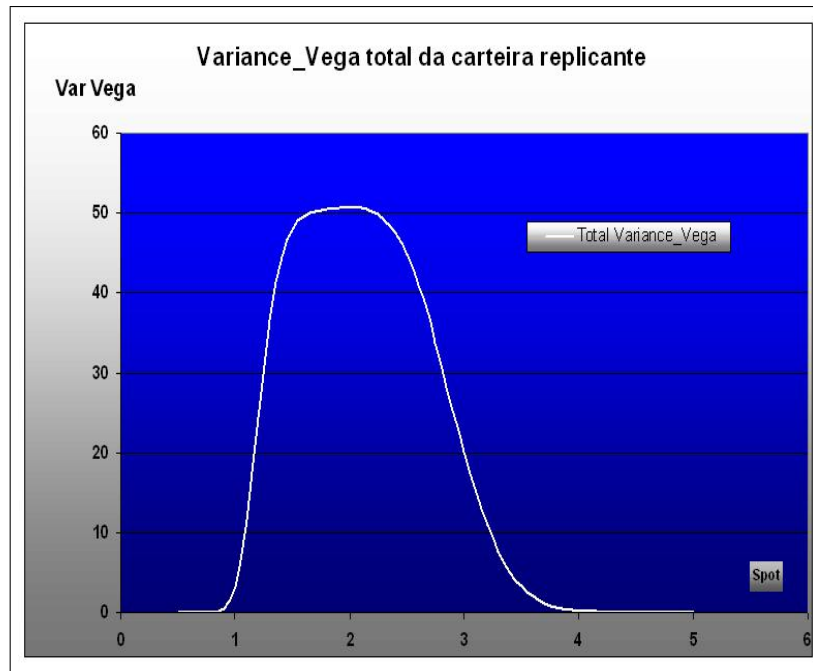


FIGURA 5. Perfil de Variance Vega em função da taxa de câmbio à vista para espaçamento entre preços de exercício de 0.01, $K_i = 1.25$ e $K_f = 3$.

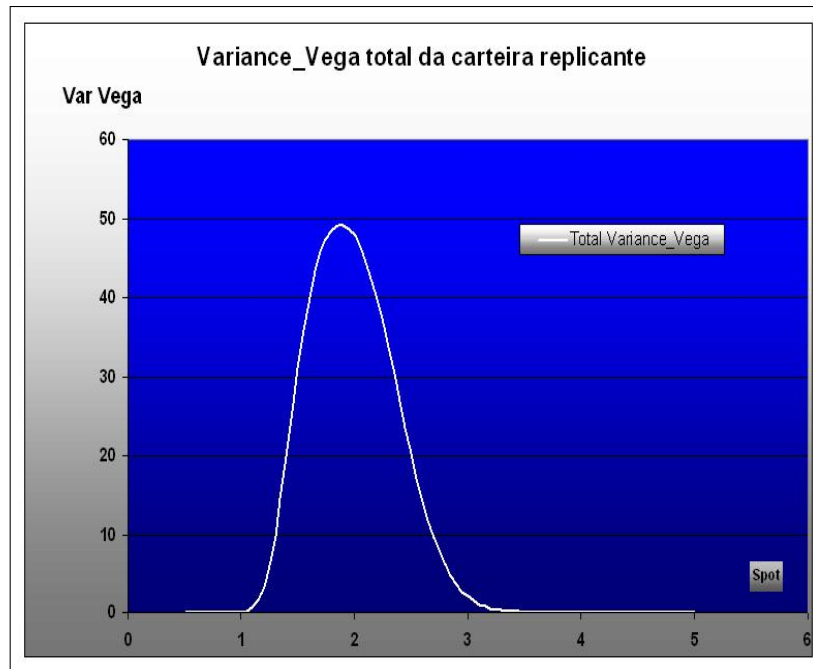


FIGURA 6. Perfil de Variance Vega em função da taxa de câmbio à vista para espaçamento entre preços de exercício de 0.01, $K_i = 1.5$ e $K_f = 2.5$.

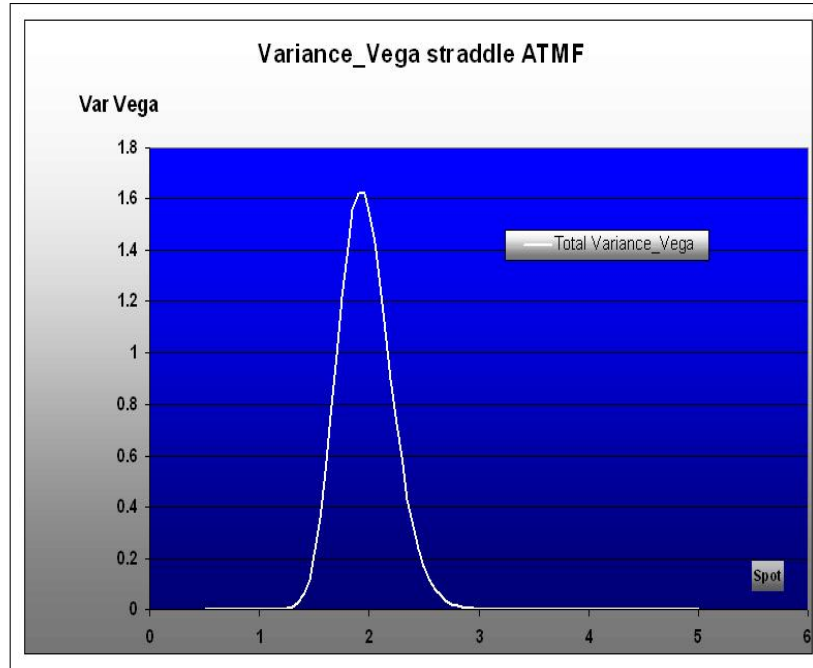


FIGURA 7. Perfil de Variance Vega em função da taxa de câmbio à vista para straddle com preço de exercício a 2 e $F = 1.987$.

obtida do payoff logarítmico pela carteira replicante selecionada naquela trajetória, bem como a diferença de PV_t das duas carteiras. Mais especificamente, será detalhada sob quais trajetórias do ativo objeto S_t , a carteira replicante tem boa aderência ao payoff logarítmico. Como consequência deste fato, as carteiras que tiverem boa aderência ao payoff logarítmico também terão pouca diferença de PV_t ¹³ para o swap de variância e podem ser consideradas bons hedges.

Os preços de exercício inicialmente selecionados para composição da carteira replicante são a call e put *ATMF* junto com a call e put de 25% Forward Delta, conforme já foi previamente mencionado. Todas as simulações nesta subseção se situam num mundo onde o ativo objeto segue o movimento browniano geométrico abaixo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - rf)dt + \sigma dW_t^Q$$

onde, $r = 10\%$, $rf = 5\%$, $\sigma = 15\%$ e W_t^Q é um movimento Browniano na medida de probabilidades neutra a risco em reais.

Nesta subseção, será considerado um swap de variância de 1Y em 12 – *Set* – 06. Uma aposta considerável seria operar o equivalente a 400,000 dólares de Vega ($\frac{\partial PV_t}{\partial \sigma} \cdot \frac{1\%}{S_t}$). Para obtermos este valor de Vega, o Nocial do swap de variância em reais teria que ser calculado por:

$$NOT_{BRL} = \frac{VEGA(USD) \cdot S_t}{1\% \cdot 2 \cdot \sqrt{\sigma_R^2}} = 289,053,333$$

De posse do Nocial a ser operado para obter-se a exposição desejada, o próximo passo seria calcular os pesos das opções vanillas presentes na carteira replicante disponível.

Sabe-se que um swap de variância pode ser replicado por uma carteira de opções imunizadas dinamicamente ao final do dia por delta-hedge. Neste trabalho, o foco está na composição estática da replicação do swap de variância formada pela carteira de opções. Portanto, será analisada a diferença diária entre o valor presente da carteira de opções¹⁴ contra a variância futura calculada do swap de variância. Vale notar

¹³ PV_t é o valor presente visto em t.

¹⁴somada a um caixa mais um contrato a termo para replicação estática do payoff logarítmico.

que ambos sofrem um decaimento natural do seu valor presente devido ao theta $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$. Desta forma, perguntas relacionadas ao quanto de variância realizada é capturada pela estratégia de delta-hedge da carteira replicante, referentes à composição dinâmica da replicação, não serão abordadas neste artigo.

Consequentemente, o valor presente da carteira replicante disponível será dado por:

$$PV_t = Var_Futura_t$$

onde,

$$Var_Futura_t = Not_{BRL} \left\{ \frac{2}{T} \left[\ln \frac{F_{t,T}}{S^*} - \left(\frac{F_{t,T}}{S^*} - 1 \right) \right] + \Pi_{CP_t} \right\}$$

e Π_{CP_t} é a carteira de calls e puts não descontadas na data t com pesos calculados pelas fórmulas apresentadas na seção anterior e sugeridas por (DEMETERFI et al., 1999). Já $F_{t,T}$ é o preço a termo visto em t para vencimento em T.

A primeira simulação efetuada foi checar se sob realizações de taxas de câmbio iguais as projetadas pelas taxas de câmbio forward a carteira replicante possui boa aderência ao payoff logarítmico. Nossa intuição nos diz que sim, visto que os valores dos preços de exercício foram inicialmente calculados com base nas curvas iniciais de juros e na superfície inicial de volatilidade. A figura 8 nos mostra o gráfico de replicação do payoff logarítmico simulado nestas circunstâncias.

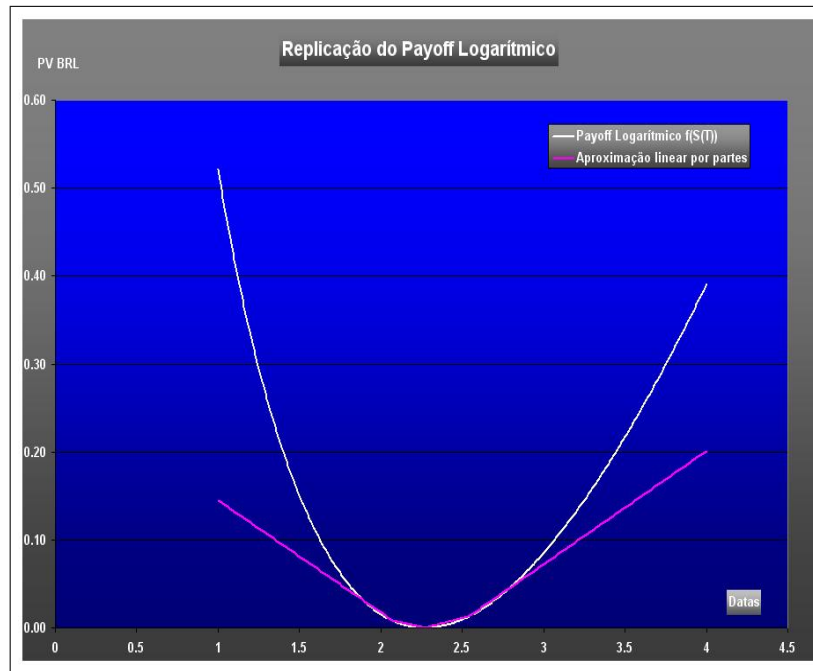


FIGURA 8. Replicação do payoff logarítmico assumindo-se o mundo lognormal descrito acima.

Na figura 8, pode ser observado que para valores do câmbio entre 1.9 e 3, a carteira replicante disponível replica de maneira satisfatória o payoff logarítmico. A figura 9 ilustra a trajetória do câmbio S_t prevista na curva de preços a termo F .

Como a taxa de câmbio S_t nesta simulação se manteve entre 2.15 e 2.3, e como vimos acima a replicação do payoff logarítmico seria boa para valores de S_t entre 1.9 e 3, então é de se esperar que a carteira replicante tenha seu PV_t sempre próximo do swap de variância. Este resultado pode ser constatado observando a figura 10 que ilustra a diferença de PV_t das duas carteiras.

Portanto, de posse da carteira replicante disponível, e com uma trajetória suave e bem comportada do ativo objeto, pode-se afirmar que a replicação foi de certa forma satisfatória¹⁵.

¹⁵A diferença de PV_t foi inferior a uma vol pois o Vega era inicialmente de 400,000 dólares.

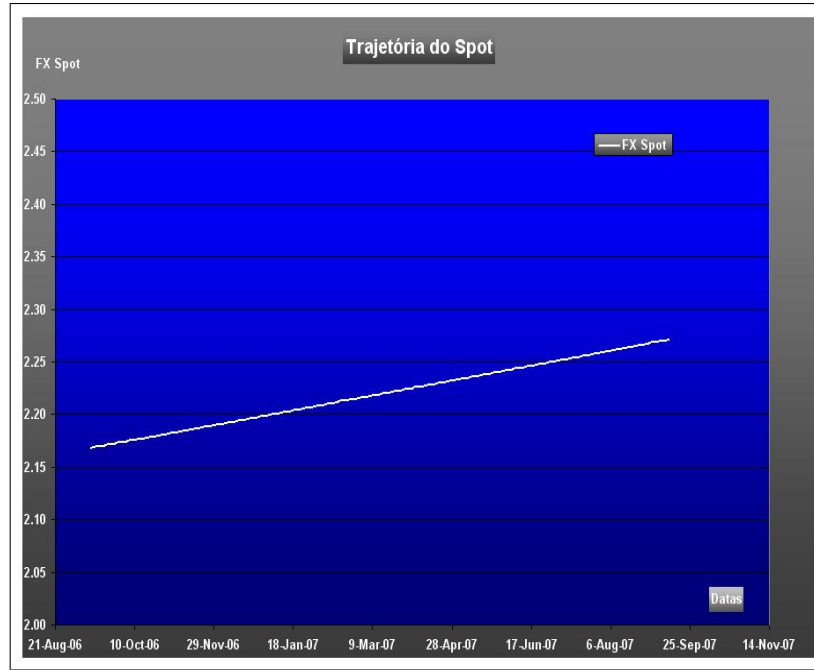


FIGURA 9. Trajetória do câmbio S_t ao longo do tempo prevista pela curva dos preços a termo F .

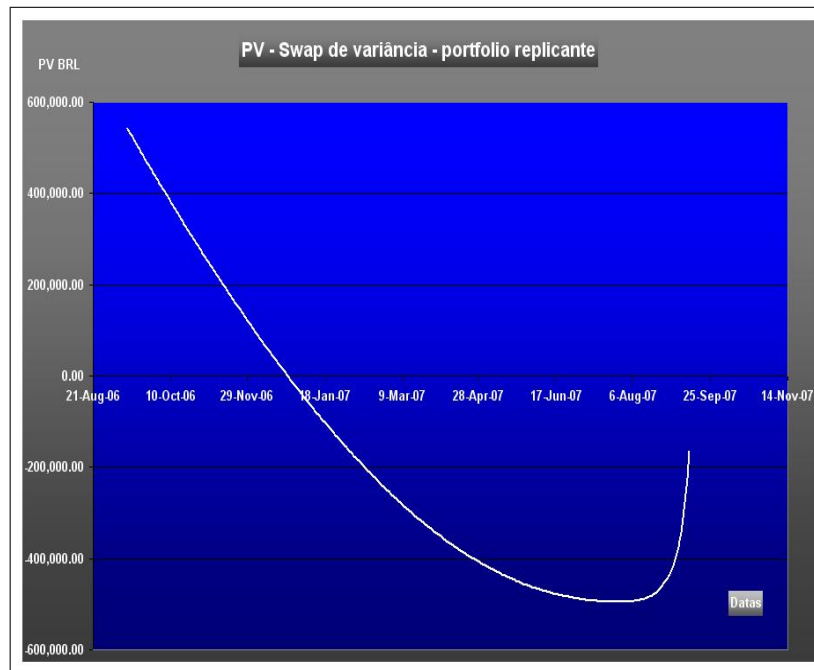


FIGURA 10. Diferença de PV_t das duas carteiras quando S_t segue uma trajetória de acordo com o previsto pelos preços a termo.

Agora será analisada uma situação extrema. Será escolhida uma trajetória de S_t obtida por simulação de Monte Carlo de acordo com a figura 11.

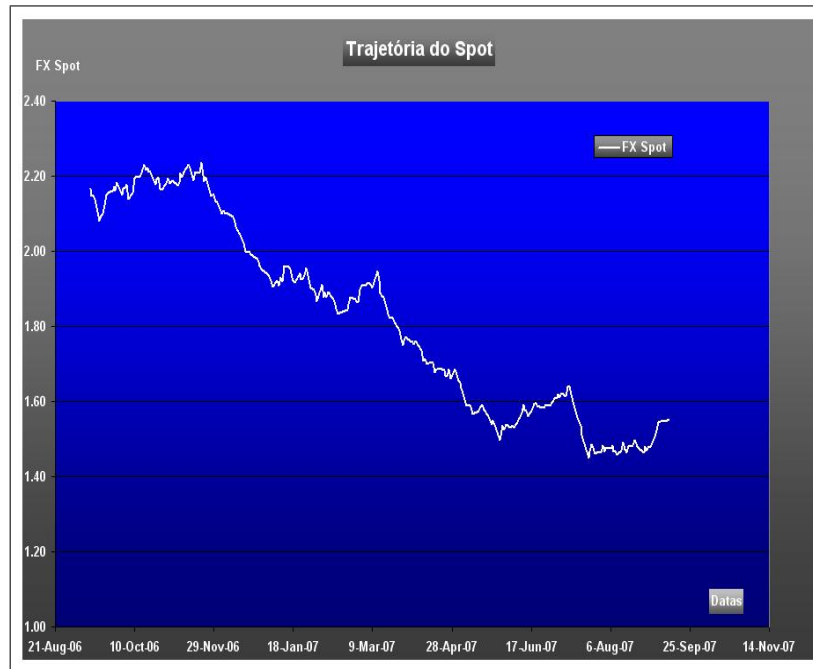


FIGURA 11. Trajetória hostil do ativo objeto S_t por simulação de Monte Carlo.

Nota-se pela figura 11 que em determinados instantes o ativo objeto S_t chegou próximo ao valor 1.40. A replicação do payoff logarítmico permanece igual a da figura 8, visto que não foi alterada a carteira replicante. Vale ressaltar, conforme foi dito acima, que esta carteira replicante tem boa aderência ao payoff logarítmico apenas para S_t entre 1.9 e 3. Portanto, nossa intuição é que nesta situação deve ter havido uma grande diferença de PV_t das duas carteiras. A figura 12 corrobora este fato.

Desta forma, conclui-se que para esta realização da trajetória de S_t , a replicação foi insatisfatória, gerando diferenças de PV_t na casa de 25,000,000 de reais. Vale ressaltar que o Vega desta operação era de 850,000 reais, o que dá uma diferença de aproximadamente 30 vols¹⁶.

Portanto, de posse da carteira replicante disponível na BM&F¹⁷, mesmo num mundo lognormal controlado, fica evidente que o grau de aversão ao risco do investidor deveria ser incluso de alguma forma no apreçamento do swap de variância. Para aqueles investidores que acreditam que o câmbio S_t dificilmente sairia da banda entre 1.9 e 3, então a carteira replicante seria um hedge razoável e as fórmulas apresentadas em (DEMETERFI et al., 1999) poderiam ser empregadas. Já para um investidor que acreditasse na possibilidade de S_t sair da banda entre 1.9 e 3, um prêmio por risco deveria ser naturalmente embutido no apreçamento do swap de variância, visto que nesta circunstância o hedge pela carteira replicante foi insatisfatório.

A situação reportada acima poderia ser razoavelmente alterada caso existissem outras possibilidades de preços de exercício disponíveis no mercado (logicamente há outras possibilidades de preços de exercício no mercado caso o investidor se predisponha a pagar um spread de compra-venda substancial). Por exemplo, poderia se alterar o vetor de preços de exercício iniciais utilizados para cálculo dos pesos de [1.9907, 2.1556, 2.3362, 2.6500, 3.0551] para [1.35, 1.6, 1.8, 2.2, 2.5]. Com estes novos preços de exercício para a carteira replicante, a figura muda radicalmente de cenário. O payoff logarítmico agora é protegido de 1.35 a 2.5 conforme a figura 13.

¹⁶Nesta situação, a convexidade do swap de variância com relação a volatilidade deveria ter sido contabilizada para se ter um resultado mais exato, visto que o choque na volatilidade foi muito grande.

¹⁷Assumindo-se novamente liquidez apenas na call e put ATMF e 25% Black Forward Delta.

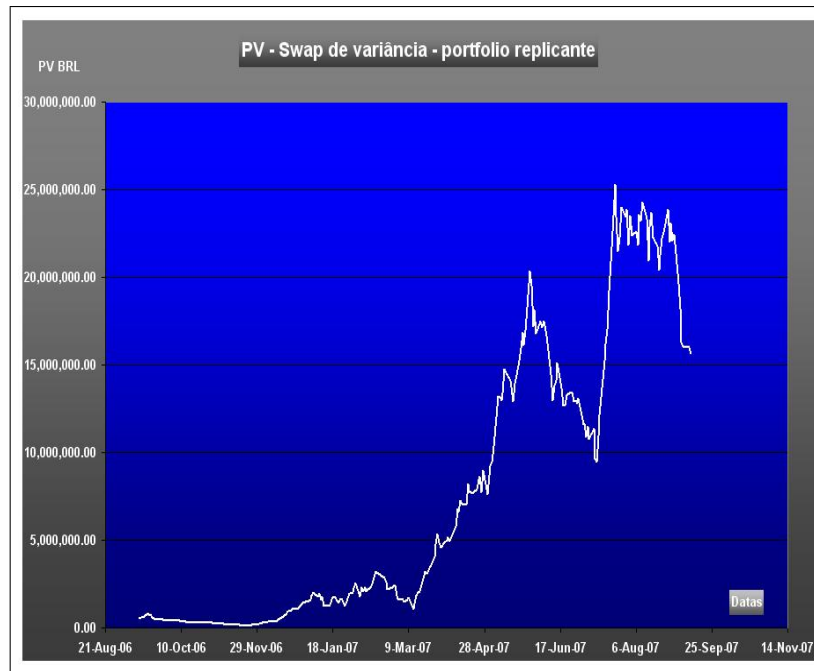


FIGURA 12. Diferença de PV_t quando o ativo objeto S_t segue a trajetória de acordo com a figura 11.

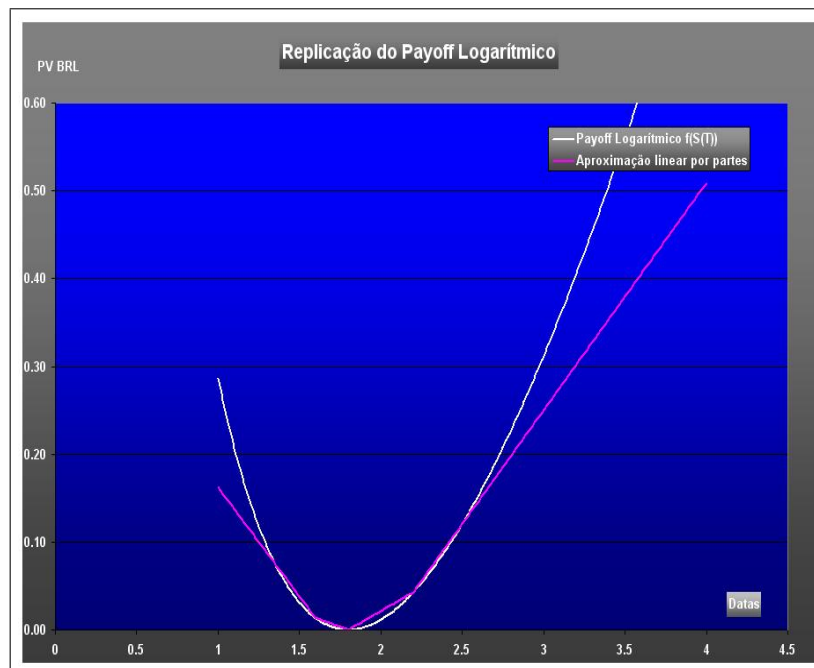


FIGURA 13. Replicação do payoff logarítmico assumindo-se um mundo lognormal com alteração nos preços de exercício disponíveis.

Sob esta nova hipótese, pode-se mostrar a trajetória mais estável da diferença do PV_t das carteiras através da figura 14. Agora, a maior diferença de PV_t foi da ordem de 1,850,000 reais, que dá um pouco mais de 2 vols de diferença.

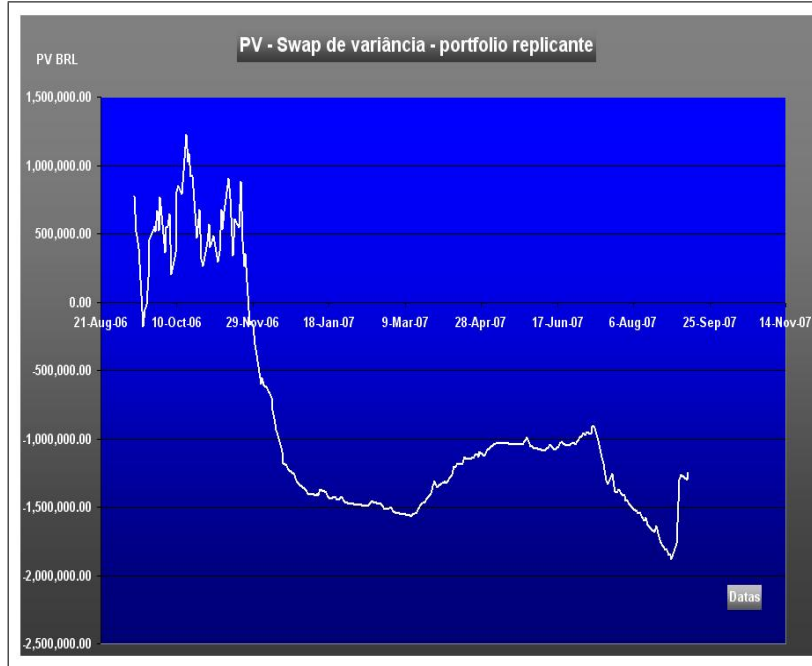


FIGURA 14. Diferença de PV_t agora mudando-se os preços de exercício da carteira replicante.

Através desta análise, fica evidente que dependendo da trajetória descrita por S_t , uma escolha mais apropriada dos preços de exercício para composição da carteira replicante pode gerar uma carteira total (swap de variância + carteira replicante) com PV_t mais próximo de zero ao longo do tempo. Infelizmente, a falta de liquidez das opções de câmbio no mercado brasileiro nos restringe desta possibilidade sem incorrer em custos substanciais de spread de compra-venda.

5.3. Back-testing de carteiras contendo o swap de variância e a carteira replicante disponível. Iniciamos esta subseção operando o mesmo swap de variância de 1Y em 12 – Set – 06, mas agora efetuando-se um back-testing. Será feita a mesma aposta de 400,000 dólares de Vega . Para obtermos este valor de Vega, o Nocional do swap de variância em reais teria que ser calculado por:

$$NOT_{BRL} = \frac{VEGA(USD) \cdot S_t}{1\% \cdot 2 \cdot \sqrt{\sigma_R^2}} = 283,317,759$$

Utilizaremos as mesmas equações para cálculo de PV_t apresentadas na subseção anterior.

A figura 15 apresenta o valor presente, de agora em diante chamado sempre de PV_t , do swap de variância e da carteira replicante disponível montada no início da transação, ao longo do tempo.

Na figura 15, nota-se que a carteira replicante comportou-se de maneira razoável até maio de 2007. Porém, de maio de 2007 a agosto de 2007 os dois PV_t 's descolaram. Inclusive, depois de maio de 2007, a carteira replicante passou a ter um PV_t negativo¹⁸. Este fato é consequência da carteira replicante calcular naquele período uma variância futura negativa, fato que mais uma vez corrobora a ineficiência de hedge para o swap de variância.

A figura 16 ilustra melhor o fato mencionado acima através de um gráfico onde o PV total é calculado por:

$$PV_{Total} = PV_{VarSwap} - PV_{\Pi Replicante}$$



FIGURA 15. PV de um swap de variância X PV da carteira replicante disponível para um swap de variância de 1Y iniciado em 12 – Set – 06.

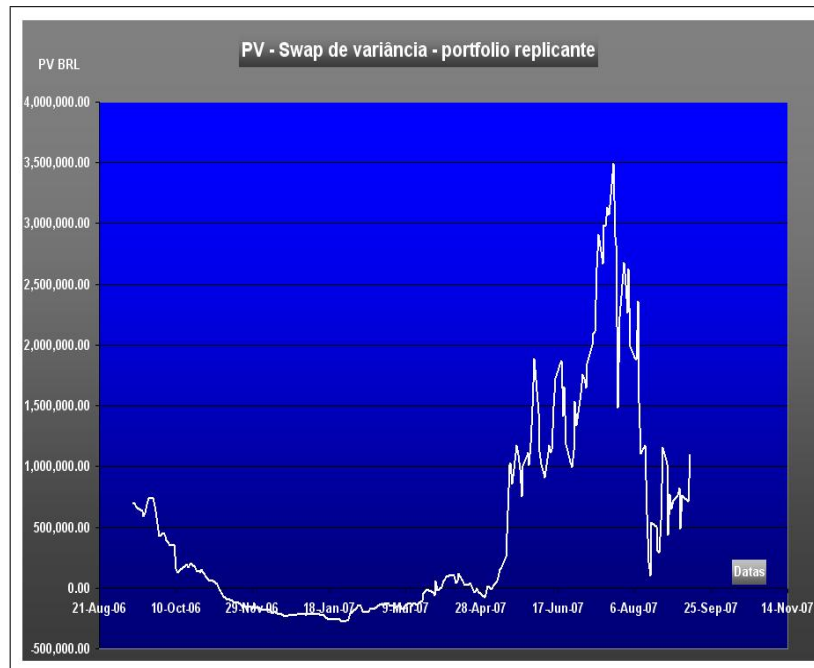


FIGURA 16. PV da carteira total contendo o swap de variância de 1Y com o hedge dado pela carteira replicante disponível.

A figura 16 mostra que houve uma variação de PV de até 3,500,000 reais em alguns períodos (vale refrisar que o swap de variância transacionado tinha inicialmente 400,000 dólares de Vega). Este fato de uma certa forma limita a viabilidade do hedge de um swap de variância com as opções de câmbio mais líquidas na BM&F.

Uma possível explicação para a ineficácia do hedge proposto está apresentada na figura 17. Esta figura mostra a replicação do payoff logarítmico conforme proposto em (DEMETERFI et al., 1999). Contudo, nota-se que a replicação só é eficiente dentro de uma certa banda de valores para o câmbio, visto que a extrapolação linear proposta em (DEMETERFI et al., 1999) não captura a curvatura necessária para valores extremos do câmbio (para valores do câmbio fora da banda entre preços de exercício da call 25% Black Forward Delta e put -25% Black Forward Delta).

Foi exatamente no período em que o câmbio baixou de 2.0 que o PV da carteira replicante descolou do valor do PV do swap de variância. A figura 17 mostra que para valores do câmbio abaixo de 1.9, por exemplo, a replicação proposta em (DEMETERFI et al., 1999) começa a sofrer imperfeições. Nesta parte do gráfico, fica evidente a ausência de curvatura capturada na replicação proposta. A figura 18 mostra a trajetória descrita pelo ativo objeto até a data de vencimento do swap de variância em questão.

Vale ressaltar que nos exemplos citados por (DEMETERFI et al., 1999), este potencial problema na replicação do payoff logarítmico não fica tão evidente. Isto porque o ativo subjacente utilizado por ele tinha 19 preços de exercício com liquidez com cobertura de preços de exercício para deltas muito menores que 25% como utilizados na nossa análise. Desta forma, os autores obtinham uma robusta replicação do payoff logarítmico para uma grande banda de valores do ativo subjacente.

Novamente, algum spread deveria ser cobrado pelo investidor que acreditasse que o ativo objeto S_t pudesse sair da banda onde o payoff logarítmico fosse bem replicado.

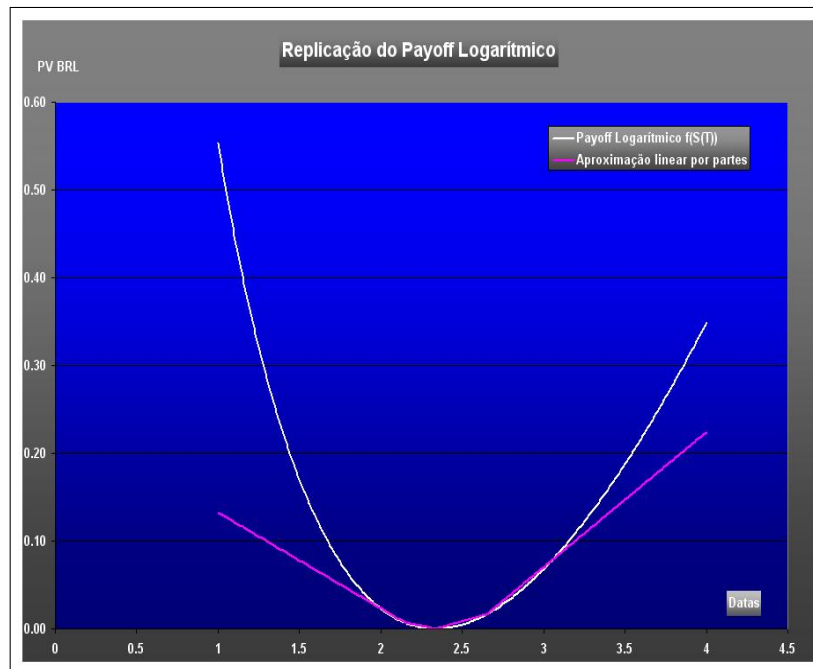


FIGURA 17. Replicação do payoff logarítmico do swap de variância de 1Y em 12 – Set – 06 pelo método proposto em (DEMETERFI et al., 1999).

O problema se torna ainda mais grave para um swap de variância de 6M transacionado em 12 – Jul – 2008. No período no qual este swap será diariamente marcado ocorreu uma grave crise do setor imobiliário. Analogamente, serão apresentados os mesmos gráficos vistos acima, tendo agora este swap como objeto de análise.

¹⁸É o caixa mais o contrato a termo que geram este PV_t negativo, e não as opções, que sempre têm PV_t estritamente positivo.



FIGURA 18. Trajetória descrita pelo ativo objeto até a data de vencimento do swap de variância de 1Y .

Da mesma forma, efetuaremos uma posição no swap de variância com 400,000 dólares de Vega. Utilizando-se a mesma equação utilizada acima nos dá o Nocional em reais do swap:

$$NOT_{BRL} = \frac{VEGA(USD) \cdot S_t}{1\% \cdot 2 \cdot \sqrt{\sigma_R^2}} = 247,422,747$$

A figura 19 apresenta o PV_t do swap de variância e da carteira replicante disponível montada no início do trade ao longo do tempo. Novamente, nesta figura pode ser observado um PV_t negativo para a carteira replicante em alguns períodos, que representa um fato altamente indesejável.

A figura 20, analogamente ao apresentado anteriormente, mostra o gráfico do PV total de uma carteira contendo tanto o swap de variância de 6M quanto sua carteira replicante.

Na figura 20 fica evidente que a replicação proposta por (DEMETERFI et al., 1999) é ineficiente, e que temos 73,000,000 de reais de flutuação de PV . Em setembro, o câmbio disparou e mudou de 1.65 para 2.3 em um mês. Esta disparada no câmbio, certamente resultou em imperfeições na replicação do payoff logarítmico linear por partes proposta por (DEMETERFI et al., 1999). A figura 21 ajudará melhor a visualizar até que valor do câmbio a replicação proposta seria válida. A figura 22 mostra a trajetória descrita pelo ativo objeto até o vencimento do swap.

Nota-se pela figura 21 que para valores do câmbio acima de 2, a aproximação já seria insatisfatória. Entretanto, em alguns períodos, o câmbio chegou até a 2.52, gerando portanto uma péssima replicação do swap de variância nestes períodos.

5.4. Back-testing de carteiras contendo o swap de variância e a carteira replicante disponível estendida. Nesta subseção, será feita a mesma análise anterior, mas agora será assumida a possibilidade de haver uma carteira replicante disponível estendida. Esta nova carteira, agora contém, calls e puts ATMF e com 25% e 10% de Black Forward Delta. Portanto, a replicação agora deve ser melhor, visto que estamos aumentando a banda de replicação robusta do payoff logarítmico.

Novamente a aposta de Vega será de 400,000 dólares, resultando no mesmo valor de Nocional em reais calculado anteriormente.

A figura 23 mostra a replicação do payoff logarítmico para o mesmo swap de variância com prazo de 1 ano detalhado anteriormente. Conforme o esperado, agora a replicação é robusta para uma banda maior de

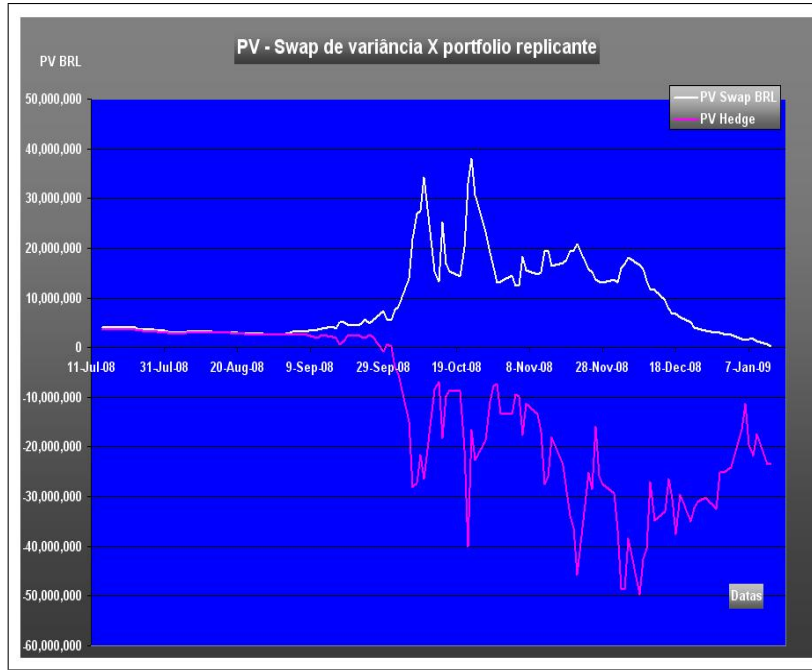


FIGURA 19. PV de um swap de variância X PV da carteira replicante disponível para um swap de variância de 6M iniciado em 12 – Jul – 08.

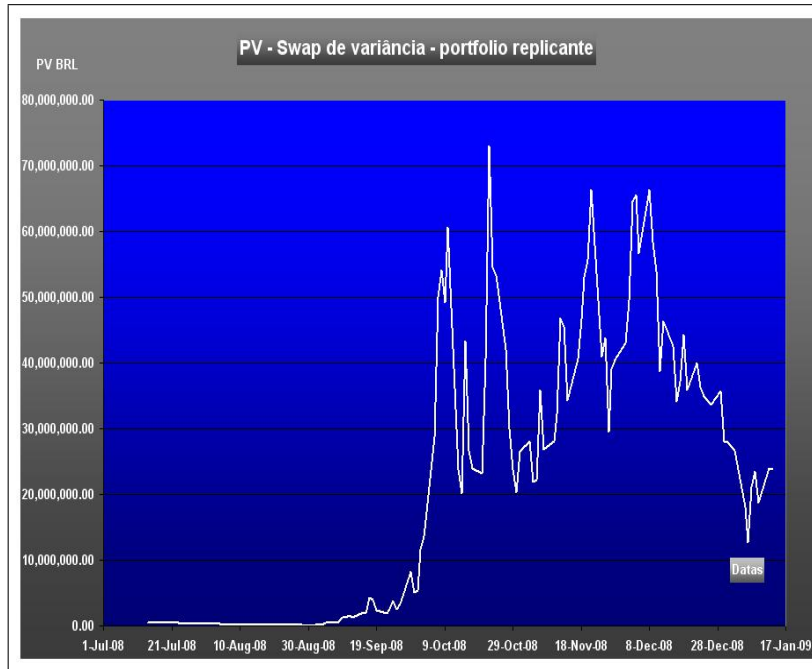


FIGURA 20. PV da carteira total contendo o swap de variância de 6M com o hedge dado pela carteira replicante disponível.

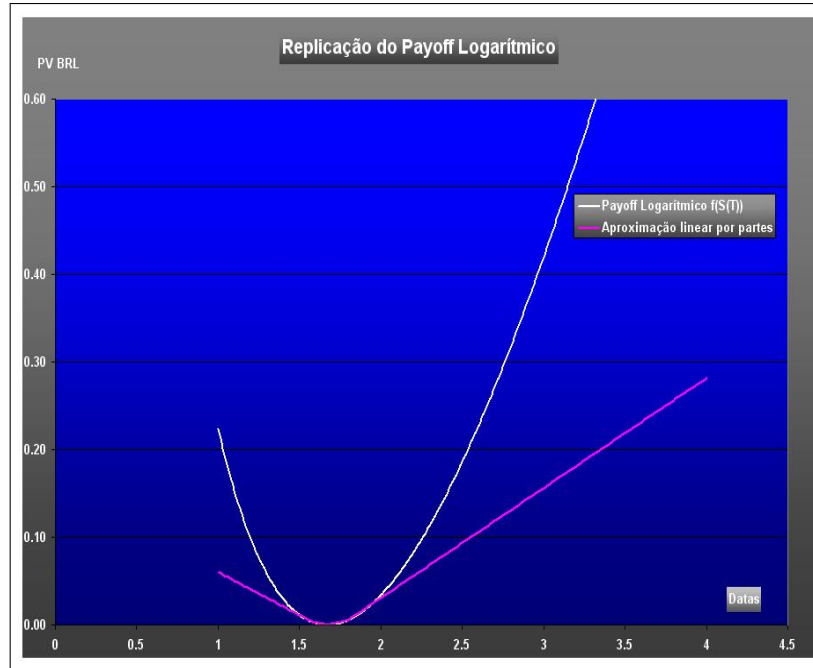


FIGURA 21. Replicação do payoff logarítmico do swap de variância de 6M em 12 – Jul – 08 pelo método proposto em (DEMETERFI et al., 1999).

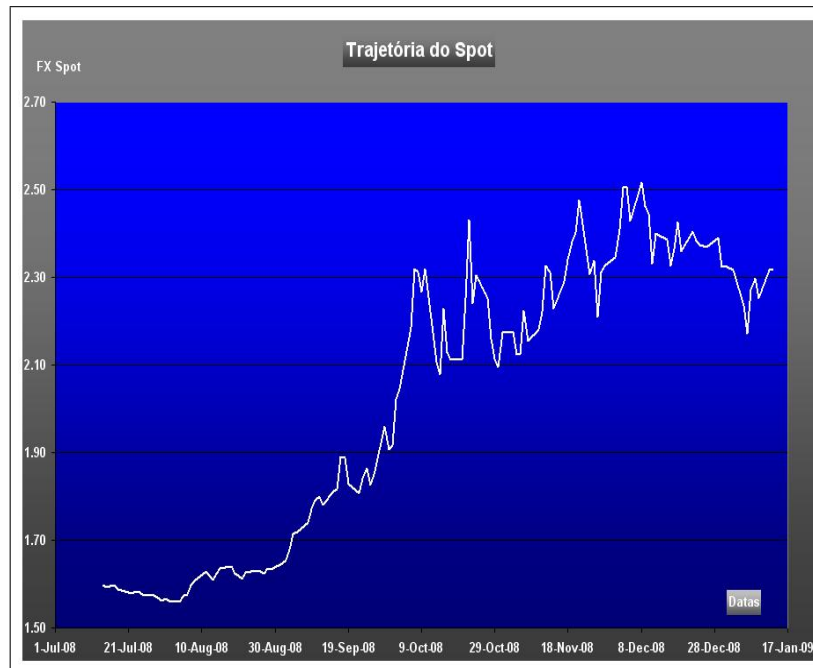


FIGURA 22. Trajetória descrita pelo ativo objeto até o vencimento do swap de variância de 6M.

valores do ativo objeto S_t . Anteriormente, com apenas as 4 opções, a replicação era robusta entre 2 e 3. Agora, a replicação é satisfatória entre 1.75 e 4.

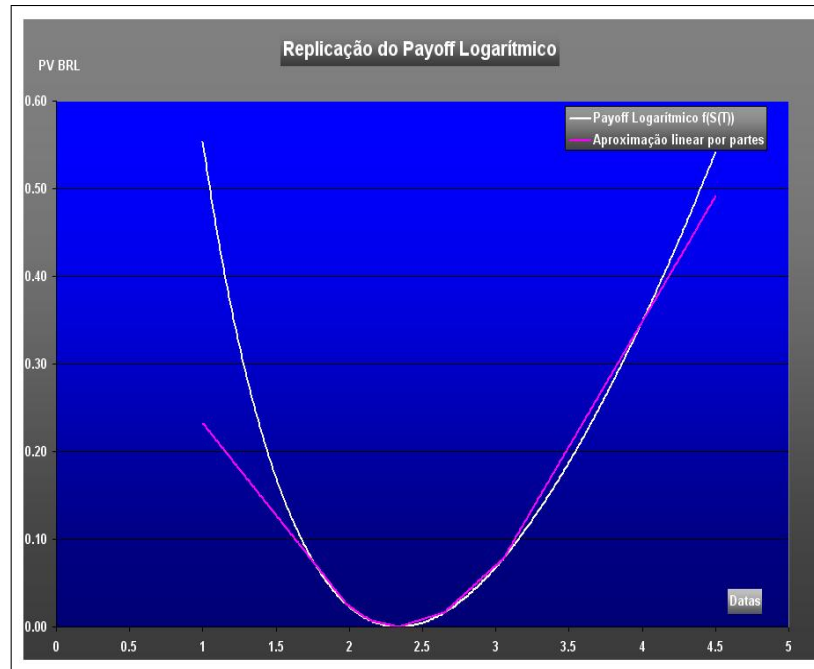


FIGURA 23. Replicação do payoff logarítmico do swap de variância de 1Y em 12 – Set – 06 pelo método proposto em (DEMETERFI et al., 1999), agora assumindo-se haver as calls e puts de 10% Black Forward Delta.

O valor mais baixo atingido pelo ativo objeto foi perto de 1.85 durante a existência do swap em questão, acima do ponto até aonde a replicação seria satisfatória. Pela figura 24, nota-se que o PV_t do swap de variância e da carteira replicante (agora estendida) não descolam como acontecia com apenas 4 opções.

A figura 25 mostra o PV_t da carteira total contendo o swap de variância e a carteira replicante estendida.

Nota-se que agora a maior diferença obtida foi de aproximadamente 800,000 reais para o valor do PV_t total. Como o Notional em Vega era de aproximadamente 850,000 reais, então agora há menos de 1 vol de diferença. Portanto, para este período, pode-se afirmar que a inclusão das opções call e put com 10% de Black Forward Delta melhoraram substancialmente o desempenho da carteira replicante. Pode-se explicar este fato pois neste período o ativo subjacente não saiu da banda (agora estendida) onde o payoff logarítmico era replicado robustamente.

Agora será feito o teste para a carteira replicante estendida no período da crise imobiliária recente, através do mesmo swap de 6M detalhado anteriormente. A replicação do payoff logarítmico é agora mais robusta que a anterior, porém não é suficiente para cobrir os avanços do ativo objeto até o valor de 2.52 que ocorreram durante este swap. A figura 26 ilustra tal fato.

Agora será mostrada as diferenças de PV_t para a carteira total contendo o swap de variância e a carteira replicante estendida através da figura 27. Grandes diferenças de PV_t ainda são esperadas, visto que o payoff logarítmico não foi devidamente replicado na trajetória descrita pelo ativo objeto S_t .

Nesta figura, nota-se que houve diferenças de PV_t da ordem de 45,000,000 de reais. Portanto, comparada às diferenças anteriores de 75,000,000 de reais, houve uma relativa melhora. Mas ao contrário do caso anterior referente ao swap de 1Y, neste caso a melhora não foi suficiente para considerarmos que a replicação obtida foi robusta.



FIGURA 24. PV de um swap de variância X PV da carteira replicante disponível estendida para um swap de variância de 1Y iniciado em 12 – Set – 06.

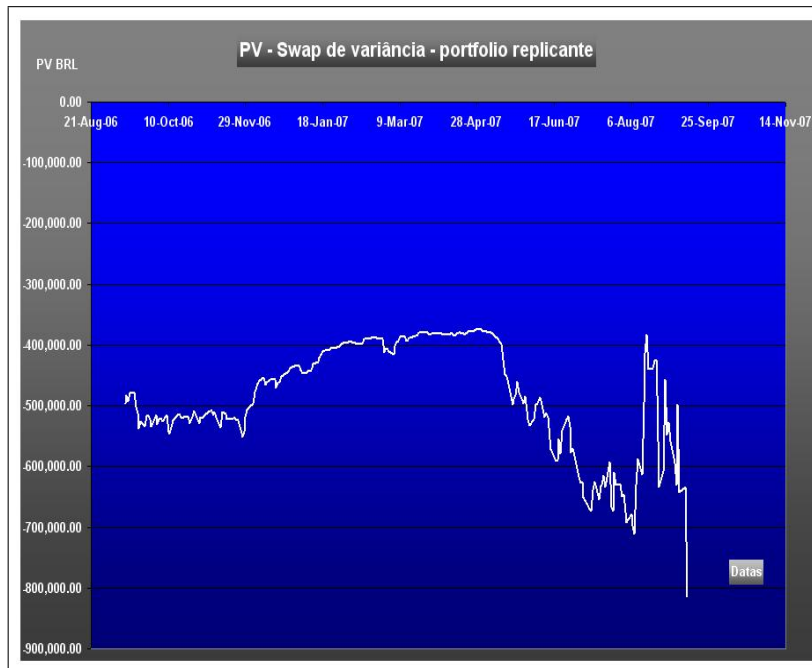


FIGURA 25. PV da carteira total contendo o swap de variância de 1Y com o hedge dado pela carteira replicante disponível estendida.

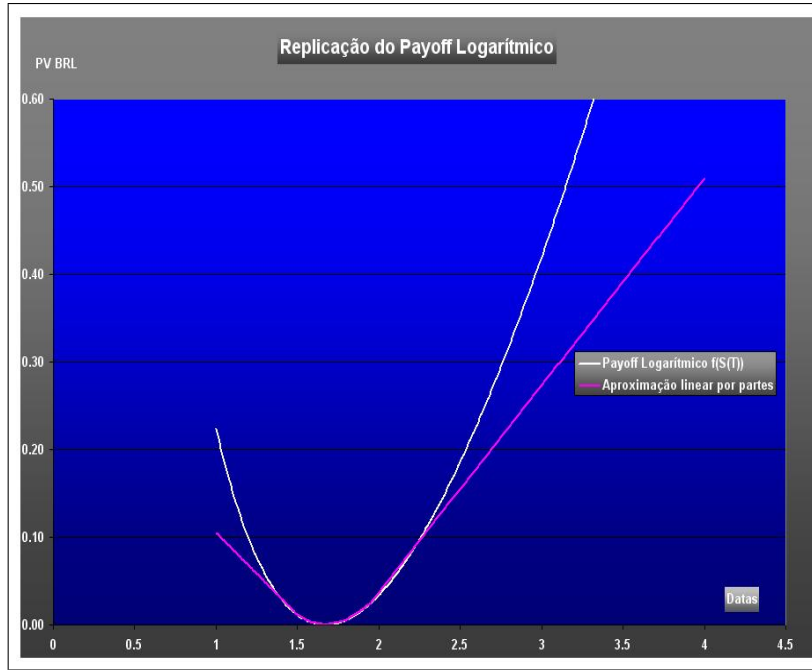


FIGURA 26. Replicação do payoff logarítmico do swap de variância de 6M em 12 – Jul – 08 pelo método proposto em (DEMETERFI et al., 1999), agora assumindo-se haver as calls e puts de 10% Black Forward Delta.

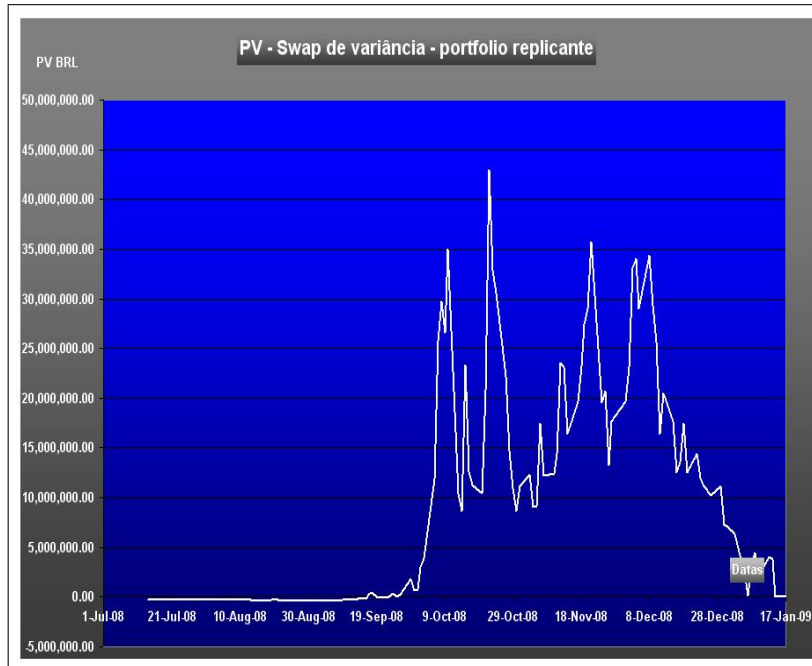


FIGURA 27. PV da carteira total contendo o swap de variância de 6M com o hedge dado pela carteira replicante disponível estendida.

6. CONCLUSÃO

Este artigo mostrou inicialmente que a hipótese de se utilizar monitoramento contínuo ao invés do discreto resulta em apenas pequenas diferenças no apreçamento de swaps de variância que são insignificantes face ao spread de compra-venda destes produtos de aproximadamente 50 pontos base.

Também, swaps de variância liquidados em dólares (offshore) possuem fórmula distinta de apreçamento que os equivalentes liquidados em reais. Desta forma, mesmo num mundo ideal sem prêmios de conversibilidade, swaps de variância liquidados em dólares não são hedge perfeitos de swaps de variância liquidados em reais. Também, usualmente o preço justo, ou K_{VAR} , de swaps de variância liquidados em reais são menores que os equivalentes liquidados em dólares.

No que se refere a viabilidade do hedge com apenas um número finito de preços de exercício, o maior espaçamento entre eles causa um perfil de Variance Vega oscilatório não desejável. Já uma menor diferença entre os preços de exercício iniciais e finais gera um perfil de Variance Vega mais côncavo onde deveria ser idealmente constante.

Com relação ao foco principal deste trabalho, supondo-se que há apenas calls e puts ATMF e 25% Black Forward Delta no mercado, então a eficácia do hedge com a carteira replicante conforme proposto em (DEMETERFI et al., 1999) depende da trajetória a ser descrita pelo ativo objeto até o vencimento do swap de variância. Se o ativo objeto permanecer dentro da banda onde o payoff logarítmico é bem replicado, então não há grandes problemas e o hedge seria eficiente de uma certa forma. Caso contrário, o hedge se mostra ineficiente como testado na crise imobiliária que nos atingiu em 2008. Incluindo-se as calls e puts de 10% Black Forward Delta aumenta a banda robusta de replicação do payoff logarítmico. Entretanto, se o ativo objeto sair desta banda (agora estendida), a replicação volta a ser ineficiente.

Portanto, supondo-se disponibilidade restrita a diferentes preços de exercício conforme o exposto acima, o apreçamento de swaps de variância da taxa de câmbio em reais por dólares, na prática, não deveria depender apenas de argumentos baseados em não arbitragem, visto que sua replicação aceitável depende da trajetória a ser descrita pelo ativo objeto no futuro. Sob estas circunstâncias, investidores deveriam cobrar um spread devido à exposição não imunizável de swaps de variância da taxa de câmbio de reais por dólares.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, P. et al. Variance swaps. 2006.
- BREEDEN, D. T.; LITZENBERGER, R. H. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, v. 51, n. 4, p. 621–51, October 1978.
- BROADIE, M.; JAIN, A. *Discrete and Continuously Sampled Volatility and Variance Swaps*. [S.l.], 2006.
- CARR, P.; LEE, R.; STAUM, J. *Robust Replication of Volatility Derivatives*. 2005.
- CARR, P.; LEWIS, K. *Corridor Variance Swaps*. 2007.
- CARR, P. et al. Towards a theory of volatility trading. In: *Reprinted in Option Pricing, Interest Rates, and Risk Management, Musiella, Jouini, Cvitanic*. [S.l.]: University Press, 1998. p. 417–427.
- DARIO, A. Apreçamento de ativos referenciados em volatilidade. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 4, n. 2, 2006.
- DEMETERFI, K. et al. More than you ever wanted to know about volatility swaps. *The Journal of Derivatives*, v. 6, n. 4, p. 9–32, 1999.
- GATHERAL, J. *The Volatility Surface - A Practitioner's Guide*. [S.l.]: Wiley, 2006.
- JAVAHERI, A.; WILMOTT, P.; HAUG, E. Garch and volatility swaps. *Quantitative Finance*, v. 4, p. 589–595, 2004.
- MERTON, R. C. *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*. [S.l.], 1973.
- NEUBERGER, A. *Volatility Trading*. 1990.
- SHREVE, S. *Stochastic Calculus for Finance II - Continuous-Time Models*. [S.l.]: Springer, 2004.
- WINDCLIFF, H.; FORSYTH, P. A.; VETZAL, K. R. *Pricing Methods and Hedging Strategies for Volatility Derivatives*. 2003.