

Inferência indireta em modelos fracionários de taxas de juros de curto prazo

Márcio Poletti Laurini

Luiz Koodi Hotta

Insper Working Paper

WPE: 128/2008



Copyright Insper. Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução parcial ou integral do conteúdo deste documento por qualquer meio de distribuição, digital ou impresso, sem a expressa autorização do Insper ou de seu autor.

A reprodução para fins didáticos é permitida observando-se a citação completa do documento

INFERÊNCIA INDIRETA EM MODELOS FRACIONÁRIOS DE TAXAS DE JUROS DE CURTO PRAZO

MÁRCIO POLETTI LAURINI
LUIZ KOODI HOTTA

RESUMO. Neste artigo discutimos a estimação de modelos de taxas de juros em tempo contínuo, quando o processo de choques é dirigido por um Movimento Browniano Fracionário (fBm). Na presença de um Movimento Browniano Fracionário as técnicas usuais de estimação de modelos em tempo contínuo usando dados discretos não são aplicáveis, já que o em geral fBM não é um semimartingale, nem um processo de Markov. Neste contexto discutimos a estimação usando o princípio de Inferência Indireta (Gourieroux and Monforte - Journal of Applied Econometrics (1993)).

1. INTRODUÇÃO

O uso de modelos em tempo contínuo em finanças, iniciada no trabalho seminal de [Bachelier, 1900], permite o uso de todo um arcabouço de probabilidade e processos estocásticos para a derivação de preços de ativos. O princípio de precificação por *Não-Arbitragem*, formalizado em [Harrison & Kreps, 1979] e [Harrison & Pliska, 1981], pode ser resumido como a imposição de um conjunto de restrições nos processos estocásticos medidos em tempo contínuo que impedem a possibilidade de lucros certos sem risco.

[Delbaen & Schachermayer, 1994] provam que precificação por não-arbitragem somente é possível na classe de processos conhecidos como semimartingales, e processos que não pertencem a esta classe não poderiam ser utilizados como processos de choques na modelagem de ativos financeiros. Mas artigos recentes (discutidos na seção 2 do texto) mostram que na presença de custos de transação e restrições no conjunto de estratégias possíveis aos agentes, processos mais gerais que semimartingales podem ser usados como processos de preços em finanças, sendo compatíveis com o princípio de não-arbitragem.

Um resultado particular derivado nestes artigos é que um processo estocástico em especial seria compatível com não-arbitragem nestas condições - o processo conhecido como Movimento Browniano Fracionário. O Movimento Browniano Fracionário (abreviado por fBm no texto) é uma generalização do Movimento Browniano que permite a possibilidade de incrementos dependentes e a presença de memória longa. Dado que os incrementos deste processo são dependentes ele não é um processo de Markov; e exceto para um caso particular onde o processo se reduz ao Browniano padrão este processo não é um semimartingale.

Neste artigo discutimos as implicações do Movimento Browniano Fracionário não ser um processo de Markov nem um semimartingale na estimação de processos de difusão em tempo contínuo usando dados observados discretamente. Nesta situação a maioria dos estimadores definidos para processos em tempo contínuo usando dados discretos não pode ser aplicada, dada a violação da propriedade Markoviana e a propriedade de memória longa no processo a construção e a avaliação da função de verossimilhança exata em forma fechada não é possível.

Entretanto, podemos utilizar o princípio de Inferência Indireta ([Gourieroux *et al.*, 1993]) para construir um estimador para equações diferenciais estocásticas baseadas no Movimento Browniano Fracionário. O princípio de Inferência Indireta utiliza um modelo auxiliar (instrumental), baseado em uma especificação aproximada e analiticamente tratável do modelo. A correção da inconsistência gerada pela especificação incorreta é realizada através de simulações do verdadeiro processo gerador dos dados. O princípio de Inferência Indireta pode ser utilizado neste contexto de equações diferenciais estocásticas não-Markovianas e em processos diferentes de semimartingales já que ele não exige o conhecimento da função de verossimilhança exata do processo, sendo necessário apenas a possibilidade de realizar simulações de trajetórias do processo de interesse.

Neste artigo mostramos como implementar o princípio de Inferência Indireta para equações diferenciais estocásticas dirigidas pelo Movimento Browniano Fracionário, discutindo com especial atenção as dificuldades computacionais existentes na implementação do estimador. Para mostrar uma aplicação prática da metodologia realizamos a estimação do modelo Cox-Ingersoll-Ross ([Cox *et al.*, 1985]) dirigido por um Movimento Browniano Fracionário para uma série de taxas de juros estudadas na literatura de modelos de taxas de juros de curto prazo.

O artigo está estruturado da seguinte forma - na Seção 2 fazemos uma breve revisão da conexão entre o princípio de Não-Arbitragem e processos semimartingales, mostrando que os recentes desenvolvimentos teóricos que permitem a compatibilidade entre Não-Arbitragem e processos distintos de semimartingales justificam a busca de estimadores para equações diferenciais estocásticas nestes contextos; na Seção 3 mostramos uma descrição do Movimento Browniano Fracionário e algumas propriedades deste processo relevantes no processo de estimação. A Seção 5 mostra algumas evidências obtidas por simulações de Monte Carlo sobre a influência de um Movimento Browniano Fracionário quando incorretamente utilizamos estimadores designados para o caso do Movimento Browniano Padrão. Na seção 6 descrevemos o estimador de Inferência Indireta utilizado e as dificuldades envolvidas na estimação de equações diferenciais estocásticas baseadas em fBM. A Seção 7 mostra a aplicação da metodologia para um conjunto de séries de taxas de juros e na Seção 8 temos as considerações finais. As seções 2 e 3 podem ser ignoradas pelos leitores mais familiares com as idéias de precificação por Não-Arbitragem e o Movimento Browniano Fracionário.

2. ARBITRAGEM E SEMIMARTINGALES

O princípio de precificação por Não-Arbitragem ([Harrison & Kreps, 1979],[Harrison & Pliska, 1981]), estabelece que o preço justo de um ativo pode ser calculado como o valor de uma carteira de replicação que reproduza o pay-off descontado derivado do processo estocástico de interesse que represente as variáveis envolvidas na precificação.

Podemos formalizar¹ este princípio através da definição em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n>0}, P)$ de um espaço com $d+1$ ativos, sendo um ativo particular uma conta bancária (que representa o ativo livre de risco) $B = (B_n)_{n > 0}$, \mathcal{F}_{n-1} mensurável, e um vetor de preços de ativos com risco $S = (S^1, \dots, S^d)$ de dimensão d , com $S^i = (S_n^i)_{n \geq 0}$, e \mathcal{F}_n -mensuráveis. Podemos definir o valor do portfólio $(X_n^\pi)_{n \geq 0}$ no período n através da expressão:

$$(2.1) \quad X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

¹Esta exposição segue [Shiryayev, 1999], e para uma exposição em um nível matemático mais rigoroso veja [Delbaen, 2006].

Definimos que uma estratégia $\pi = (\beta, \gamma)$ é a escolha em cada instante de tempo das participações na carteira do ativo livre de risco e dos ativos com risco. Uma estratégia π é uma estratégia autofinanciável se pode ser escrita como:

$$(2.2) \quad X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k).$$

Em geral na precificação por não-arbitragem escolhemos um dos ativos como numerário, e o valor descontado do portfólio $\widetilde{X}_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}$ satisfaz as relações:

$$(2.3) \quad \Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right).$$

Uma estratégia autofinanciável representa uma oportunidade de arbitragem se, para um valor inicial de capital $X_0^\pi = 0$, temos $X_N^\pi \geq 0$ (P-q.c) e $X_N^\pi > 0$ com uma probabilidade $P(X_N^\pi > 0) > 0$, e assim o valor esperado da carteira $EX_N^\pi > 0$, o que é sinônimo de um investimento que representa um lucro certo (probabilidade estritamente positiva) sem risco.

Definindo Sf_{arb} como a classe de estratégias autofinanciáveis com oportunidades de arbitragem, dizemos que um mercado é livre de arbitragem se $Sf_{arb} = \emptyset$. e assim temos que $P(X_N^\pi = 0) = 1$. O resultado fundamental da precificação por Não-Arbitragem, conhecido como o Teorema Fundamental da Precificação de Ativos, estabelece que um mercado é livre de arbitragem se e somente se existe (pelo menos uma) medida de Probabilidade Q equivalente a medida P tal que a seqüência descontada:

$$(2.4) \quad \frac{S}{B} = \frac{S_n}{B_n},$$

é um processo Martingale na medida Q^2 . Um processo Martingale é um processo estocástico com as duas propriedades a seguir:

$$(2.5) \quad E_Q \frac{S_n}{B_n} < \infty$$

e

$$(2.6) \quad E_Q \left(\frac{S_n}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

A equação 2.6 mostra a propriedade fundamental, que está relacionada ao conceito de Eficiência de Mercado - o valor esperado da carteira para o período futuro n, dada a informação contida em \mathcal{F}_{n-1} , é o valor observado da carteira no período n-1, e desta forma variações no valor da carteira não podem ser previstas de forma sistemática. Se este princípio é violado existe alguma oportunidade de arbitragem, já que é possível montar uma estratégia $\pi = (\beta, \gamma)$ de arbitragem que aproveite da previsibilidade dos ativos com risco S_n

²Essa definição é matematicamente informal. Na definição rigorosa do Teorema Fundamental da Precificação de Ativos ([Delbaen & Schachermayer, 1994]) a condição para a existência de uma medida Martingale Equivalente é a validade de de um condição conhecida como *No Free Lunch With Vanishing Risk*. Não-Arbitragem e *No Free Lunch With Vanishing Risk* são equivalente no caso de um espaço amostral Ω finito.

A precificação de ativos segue este procedimento - a idéia é verificar se existe alguma *Medida Martingale Equivalente*, isto é, se existe alguma mudança de medida que torne o processo um Martingale, em geral usando o Teorema de Girsanov. A forma mais utilizada de obter a medida martingale equivalente é através de uma mudança no drift de um processo de difusão. Dado um processo de difusão:

$$(2.7) \quad dX_t(\omega) = f(X_t(\omega))dt + \sigma(X_t(\omega))dW_t(\omega)$$

na medida P, podemos definir uma mudança de medida para uma nova medida Q usando o Teorema de Girsanov como::

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{dQ}{dP}(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{f^*(X_s(\omega)) - f(X_s(\omega))}{\sigma(X_t(\omega))}\right)^2 ds \right. \\ \left. + \int_0^t \left(\frac{f^*(X_s(\omega)) - f(X_s(\omega))}{\sigma(X_t(\omega))}\right) dW_t(\omega)\right). \end{aligned}$$

Assim Q é equivalente (mesmo conjuntos de medida nula) a P. E também

$$(2.9) \quad dW_t^*(\omega) = - \left[\frac{f^*(X_s(\omega)) - f(X_s(\omega))}{\sigma(X_t(\omega))} \right] dt + dW_t(\omega)$$

é um movimento Browniano em Q e

$$(2.10) \quad dX_t(\omega) = f^*(X_t(\omega))dt + \sigma(X_t(\omega))dW_t^*(\omega).$$

A idéia fundamental do teorema é possibilitar uma mudança no drift do processo tornando o processo um Martingale na medida Q. A precificação por não-arbitragem procura encontrar restrições no processo de difusão que tornem o termo de drift na medida Q $f^*(X_t(\omega))$ igual a zero. Se existe uma medida e ela é única então existe um único preço de não-arbitragem e o mercado é completo³.

A definição formal para espaços Ω de dimensão infinita é conhecida como Teorema Fundamental da Precificação de Ativos, que diz que a precificação por não-arbitragem só é possível se, e somente, se estratégias descontadas na medida Q são processos semimartingales (e.g. [Delbaen & Schachermayer, 1994]), utilizando uma condição técnica conhecida como *No Free Lunch With Vanishing Risk*. Semimartingales são processos estocásticos que podem ser decompostos na forma:

$$X_t = M_t + A_t$$

onde M_t é um Martingale Local e A_t é um processo previsível condicional a uma filtração \mathcal{F}_{n-1} , cadlag⁴ e de variação finita.

³Esta é uma definição informal do Segundo Teorema da Precificação de Ativos - veja por exemplo [Shiryaev, 1999] e [Delbaen, 2006].

⁴A definição de processo previsível estabelece que dado o conjunto de informação contido na filtração \mathcal{F}_{n-1} o processo é observado sem erro em n. Processos cadlag são processos contínuos a direita com limites definidos a esquerda.

Mas o resultado de [Delbaen & Schachermayer, 1994] é claro - precificação por não-arbitragem só é possível para processos semimartingales. Desta forma classes mais gerais de processos que não são semimartingales não podem ser usadas como geradores de processos em finanças. Note que esta limitação pode ser bastante restritiva, já que existem processos que não são semimartingales com características interessantes (como por exemplo alguma forma de dependência nos incrementos) que poderiam ser utilizados como geradores de processos de preços em finanças.

3. MOVIMENTO BROWNIANO FRACIONÁRIO

Um processo com características interessantes para representar propriedades de preços é o processo conhecido como Movimento Browniano Fracionário⁵. O movimento Browniano Fracionário, introduzido em [Kolmogorov, 1940] e formalizado por [Mandelbrot & van Ness, 1968] é o processo estocástico em tempo contínuo mais simples com a propriedade de dependência (memória) longa.

Seus incrementos são estacionários mas não são independentes, e desta forma não são um processo de Markov. Para definir um fBm, considere um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) ; um fBm normalizado é caracterizado pela sua estrutura de covariância:

$$(3.1) \quad EX_s X_t = \frac{1}{2} \{ |s|^{2\mathbb{H}} + |t|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}} \}.$$

Em (3.1) o coeficiente \mathbb{H} é conhecido como o coeficiente de Hurst, em homenagem ao climatologista britânico H.E. Hurst, que primeiro estudou os fenômenos de dependência longa.

O processo fBm tem a propriedade conhecida como *auto-similaridade*, significando que para a e b dados temos:

$$(3.2) \quad F(X_{at}, t \geq 0) = F(bX_t, t \geq 0).$$

F representa a distribuição do processo X , e nós podemos interpretar esta propriedade como o fato de que mudanças na escala de tempo tem o mesmo efeito que mudanças na escala⁶. A auto similaridade pode ser vista no fBm pelas propriedades da sua estrutura de covariância:

$$(3.3) \quad EX_{as} X_{at} = a^{2\mathbb{H}} EX_s X_t = E(a^{2\mathbb{H}} X_s)(a^{2\mathbb{H}} X_t),$$

e desta forma temos que $F(X_{as}, X_{at}) = F(a^{2\mathbb{H}} X_s, a^{2\mathbb{H}} X_t)$.

A representação do fBm usada em [Mandelbrot & van Ness, 1968] usava uma formulação usando integrais estocásticas com respeito a um movimento Browniano $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$, com $W_0 = 0$. Para $0 < \mathbb{H} < 1$ o processo fBM $B_{\mathbb{H}}(t)$ é dado por:

$$(3.4) \quad B_{\mathbb{H}}(t) = c_{\mathbb{H}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[(t-s)^{\mathbb{H}-1/2} - (-s)^{\mathbb{H}-1/2} \right] dW_s + \int_0^t (t-s)^{\mathbb{H}-1/2} dW_s \right\},$$

com a constante de normalização $c_{\mathbb{H}} = \sqrt{\frac{2\mathbb{H}\Gamma(\frac{3}{2}-\mathbb{H})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mathbb{H})\Gamma(2-\mathbb{H})}}$.

Podemos relembrar algumas propriedades relevantes do fBm:

⁵Uma compilação de resultados sobre o movimento Browniano Fracionário pode ser encontrada em [Mishura, 2008].

⁶Veja [Shiryaev, 1999], ch. III para maiores detalhes.

- (1) Incrementos estacionários com $E(B_{\mathbb{H}}(t) - B_{\mathbb{H}}(s)) = |t - s|^{2\mathbb{H}}$, $t, s > 0$.
- (2) Processo inicia em zero, i.e. $B_{\mathbb{H}}(0) = 0$.
- (3) Média e Variância: $E(B_{\mathbb{H}}(t)) = 0$ e $E(B_{\mathbb{H}}(t))^2 = |t|^{2\mathbb{H}}$, $t > 0$.
- (4) Com $\mathbb{H} = 1/2$ o processo se reduz a um Browniano padrão com incrementos independentes.
- (5) Incrementos são negativamente correlacionados para $\mathbb{H} < 1/2$ e positivamente correlacionados para $\mathbb{H} > 1/2$.
- (6) Para $\mathbb{H} > 1/2$ o fBm é um processo de memória longa, já que a estrutura de covariância decai para zero por uma lei de potência:

$$\rho(n) = E[B_{\mathbb{H}}(1)(B_{\mathbb{H}}(1+n) - (B_{\mathbb{H}}(n)))] \sim C_{\mathbb{H}}n^{2\mathbb{H}-2},$$

$$\text{e } \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

- (7) As trajetórias são Hölder contínuas para ordens menores que \mathbb{H} e, da mesma forma que o Browniano padrão, o processo é sempre contínuo, mas não é diferenciável em nenhum ponto.
- (8) O processo tem variação $1/\mathbb{H}$ para qualquer \mathbb{H} :

$$0 < \sup_{\Pi} E \sum_{t_i \in \Pi} [|B_{\mathbb{H}}(t) - B_{\mathbb{H}}(t_i)|^{1/\mathbb{H}}] < \infty.$$

- (9) Para $\mathbb{H} \neq 1/2$ o fBm não é nem um semimartingale nem um processo de Markov, pertencendo a classe de processos conhecida como processos de Dirichlet, processos que são a soma de um martingale local e um processo de variação quadrática zero. Para $\mathbb{H} < 1/2$ a variação quadrática do fBm é infinita, e para $\mathbb{H} > 1/2$ a variação quadrática é zero.

Em aplicações financeiras e na estimação de processos de difusão a propriedade 9 é a mais importante. Como vimos na seção 2, essencialmente todas as aplicações usam propriedades relacionadas ao processo semimartingale, ligando a propriedade de não-arbitragem para a propriedade Martingale por meio de uma mudança de medida através do teorema de Girsanov.

Mas, exceto para o caso $\mathbb{H} = 1/2$, a construção de uma Medida Martingale Equivalente não funciona para o fBm, já que o processo não é um semimartingale e, pelo resultado de [Delbaen & Schachermayer, 1994], o processo fBm não poderia ser usado como um processo de choques em aplicações financeiras, e sua presença deveria levar a condições de arbitragem. A existência de arbitragem na presença de um fBm foi inicialmente apontada por [Hu & Oksendal, 2000] e formalizada por [Rogers, 1997]. A intuição utilizada na prova de [Rogers, 1997] é que podemos criar uma estratégia de arbitragem montando uma carteira comprada (vendida) quando a estrutura de dependência nos incrementos levar a um movimento de aumento (diminuição) no preço do ativo; e esta estratégia seria explorada transacionando estas carteiras de arbitragem em tempo contínuo⁷.

Mas estudos mais recentes mostram que é possível utilizar o fBm em aplicações financeiras, i.e., é possível construir processos livres de arbitragem, desde que sejam realizadas certas modificações. No próprio artigo de [Rogers, 1997] ele apresenta uma modificação no kernel do processo fBm que evita as estratégias de arbitragem apresentadas. Uma outra forma de construir processos livres de arbitragem com modificações na representação do fBm foi apresentada em

⁷Uma discussão detalhada sobre o problema de arbitragem com o fBm se encontra em [Mishura, 2008].

([Hu & Oksendal, 2000]), usando uma representação alternativa do fBm usando integrais estocásticas de Wick-Itô-Skorohod (e.g. [Duncan *et al.*, 2000]), que entretanto não tem nenhuma interpretação econômica⁸.

Formas mais intuitivas de obter processos financeiros livres de arbitragem para o movimento Browniano Fracionário podem ser obtidas através de restrições no conjunto de estratégias possíveis aos agentes ([Cheridito, 2003] e [Jarrow *et al.*, 2007]) e pela presença de custos de transação ([Guasoni, 2006]). Em [Cheridito, 2003] e [Jarrow *et al.*, 2007] uma forma simples de obter uma condição de não-arbitragem é colocar uma restrição que os agentes não possam transacionar continuamente; em especial esta restrição impede a estratégia de arbitragem no fBm explorada por [Rogers, 1997]. Na presença de custos de transação ([Guasoni, 2006]) estratégias de arbitragem no fBm levariam a custos infinitos, e desta forma pode-se obter uma representação livre de arbitragem.

Em nosso problema particular de modelagem de taxas de juros os resultados fundamentais foram obtidos por [Ohashi, 2007]. Neste artigo são derivadas condições de não-arbitragem e consistência para uma classe de modelos Heath-Jarrow-Morton ([Heath *et al.*, 1992]) de estrutura a termo de taxas de juros, usando a metodologia de custos de transação proporcionais utilizada em [Guasoni, 2006]. Como a classe de modelos Heath-Jarrow-Morton contém como casos particulares a maioria dos modelos de curto prazo (em especial a classe de modelos Cox-Ingersoll-Ross utilizada neste artigo) temos a compatibilidade entre os processos de equações diferenciais estocásticas frequentemente utilizados na modelagem de taxas de juros e o movimento Browniano Fracionário.

4. ESTIMAÇÃO DE PROCESSOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

Em geral podemos definir os processos de taxas de juros de curto prazo, medidos em tempo contínuo, como equações diferenciais estocásticas na forma geral:

$$(4.1) \quad d(X(t)) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t),$$

onde $a(X(t))$ é o termo relacionado ao drift do processo, $b(X(t))$ é o termo relacionado ao processo de difusão (volatilidade) do processo e $W(t)$ é o movimento Browniano padrão. Em geral trabalhamos com expressões para o drift e a volatilidade que dependem de um conjunto de parâmetros. Se estes parâmetros são constantes no tempo a notação usual é que temos processo homogêneos e no caso de processos com parâmetros variantes no tempo temos processos heterogêneos. Em modelos heterogêneos de taxas de juros em geral não utilizamos estimação estatística de parâmetros, e sim calibração, onde os parâmetros do modelo são ajustados para reproduzir variáveis observadas no mercado, como por exemplo curvas de desconto ou preços de derivativos⁹.

A estimação de equações diferenciais estocásticas se refere ao procedimento de obter estimativas para os parâmetros do processo através das trajetórias observadas. Note que para processos em finanças temos um problema fundamental - embora o processo seja definido em tempo contínuo, dados financeiros são observados em uma amostragem discreta. Por exemplo dados de taxas de juros são usualmente observados em frequências diárias ou mensais.

⁸Para uma discussão detalhada sobre este problema veja a seção 5.2.2 em [Mishura, 2008].

⁹Veja [Brigo & Mercurio, 2006], caps. 4,6 e 7 para maiores referências sobre estes procedimentos.

A amostragem discreta é um problema de fundamental importância, já que usando apenas dados discretos para estimação de modelos formulados em tempo contínuo temos um problema de especificação incorreta, situação que em geral conduz para a inconsistência dos estimadores. A construção de estimadores econométricos para processos contínuos trata da construção de estimadores consistentes usando dados discretos, e na literatura temos ampla gama de metodologias para tratar este problema. Podemos listar as principais formas de estimação de equações diferenciais estocásticas para dados discretos como:

- (1) Métodos baseados na discretização exata do processo
- (2) Verossimilhança baseada na densidade de transição
- (3) Métodos de Momentos Generalizados
- (4) Quasi-Máxima Verossimilhança
- (5) Máxima Verossimilhança Simulada
- (6) Máxima Verossimilhança Aproximada (Expansões)
- (7) Inferência Indireta
- (8) Métodos de Momentos Eficientes
- (9) Método de Momentos Simulados
- (10) Martingale Estimating Equations
- (11) Métodos Não-Paramétricos
- (12) Markov Chain Monte Carlo
- (13) Métodos Baseados em Filtragens
- (14) Discretização das Integrais Estocásticas

Os estimadores podem ser agrupados em várias categorias. Por exemplo poderíamos agrupar os estimadores em métodos que utilizam alguma forma exata ou aproximada da função de verossimilhança (1,2,4,5,6,12,13); métodos que exploram condições de momentos geradas pelo processo de difusão (3,7,8,9), aproximações não-paramétricas (8,11) ou então estimadores que usam alguma forma de simulação de Monte Carlo (5,7,8,9,12,13) contra estimadores baseados em fórmulas analíticas (1,2,14).

Os estimadores baseados na função de verossimilhança podem ser formulados com base em uma discretização exata do processo, ou seja, a distribuição do processo discretizado X_t é conhecida e coincide com a distribuição contínua. Este é o caso do Movimento Browniano Geométrico (e.g. [Campbell *et al.*, 1997]). Outra forma é o uso de formas analíticas para a da densidade de transição do processo $f(X_{t+\Delta}|X_t)$ como as formas analíticas obtidas por [Ait-Sahalia, 1999] ou então as aproximações usando expansões de Hermite obtidas por [Ait-Sahalia, 2002]. Nestes três casos o estimador é baseado em fórmulas fechadas, mas também temos técnicas que fazem avaliações da função de verossimilhança usando simulações, como a metodologia de Máxima Verossimilhança Simulada que utiliza trajetórias simuladas por discretizações de Euler ou Millstein na avaliação da verossimilhança ([Pedersen, 1995]), estimações Bayesianas usando Markov Chain Monte Carlo ou Particle Filter (e.g. [Johanes & Polson, 2005]). Em casos da avaliação de modelos com volatilidade estocástica uma técnica bastante usada é o estimador de quasi-máxima verossimilhança ([Lund & Andersen, 1997]) onde a função de verossimilhança utilizada na estimação não corresponde a verossimilhança verdadeira e o estimador, embora viesado, tem propriedades de mínimo erro quadrático médio.

Estimadores utilizando condições de Momentos também são freqüentemente utilizados na estimação de equações diferenciais estocásticas. A estimação utilizando o Método de Momentos Generalizados utilizando uma discretização do processo talvez seja a forma mais amplamente utilizada (e.g. [Chan *et al.*, 1992a]). Também temos as condições de momentos derivadas dos geradores infinitesimais do processo Markoviano ([Hansen & Scheinkman, 1995]). No caso em que os momentos teóricos não são conhecidos uma metodologia bastante útil é o Método de Momentos Simulados ([McFadden, 1989]), onde estimadores são definidos minimizando a distância entre momentos simulados do processo e os momentos amostrais. Nesta categoria de estimadores baseados em momentos também podemos colocar os estimadores baseados em equações de estimação ([Kessler, 1997],[Kessler, 2000]) e a metodologia de *martingale estimating equations* ([Bibby & Sorensen, 1995], [Bibby *et al.*, 2007]).

Estimadores utilizando métodos não-paramétricos para processos de difusão foram discutidos em [Ait-Sahalia, 1996], onde o drift e a volatilidade do processo são estimados através de regressões por Kernel, e a densidade de transição do processo pode ser estimada via estimadores não-paramétricos de densidade, como estimadores de kernel, com o objetivo de precificação não-paramétrica de opções. Uma outra utilização de métodos não-paramétricos é na construção do modelo auxiliar na estimação pelo Métodos de Momentos Eficientes ([Gallant & Tauchen, 1989] e [Gallant & Tauchen, 2001]) utilizando expansões de séries por polinômios de Hermite.

Uma outra forma de definir estimadores é através da discretização aproximada das integrais estocásticas que definem a solução das equações diferenciais estocásticas. Uma aplicação para a estimação de processos Cox-Ingersoll-Ross generalizados pode ser encontrada em [Bishwal, 2007].

4.1. Limitações dos Estimadores Usuais em equações diferenciais estocásticas Dirigidas por um fBm. Quando estudamos o problema da estimação de processos dirigidos por um Movimento Browniano Fracionário, vemos que existem poucos resultados conhecidos. [Decreusefond & Ustunel, 1999] obteve um estimador de Máxima Verossimilhança para o drift do processo em um fBm puro; as propriedades deste estimador foram estudadas por [Norros *et al.*, 1999], que mostrou que este estimador era não viesado, com distribuição normal e consistência forte. O estudo de equações diferenciais estocásticas dirigidas pelo fBm foi tratada por [Le Breton, 1998], que obteve estimadores de mínimos quadrados e estimadores na classe dos estimadores lineares não viciados, e mostrou que estes estimadores em particular são equivalentes ao estimador de máxima verossimilhança.

Mas todos estes resultados são baseados em amostragem contínua, i.e., o problema assume que existe um contínuo de observações do processo. Ainda não existem resultados analíticos ou empíricos de estimadores para processos fBm no contexto de amostragem discreta.

Note que para o caso da estimação de um processo de difusão dirigido por um fBm a maioria das técnicas utilizadas anteriormente não é diretamente utilizável. A utilização da maioria dos estimadores é inviabilizada pelo fato de que o processo fBm não é um semimartingale nem um processo de Markov. Para deixar estes problemas mais claros, note que a propriedade Markoviana estabelece que condicionado à uma filtração \mathcal{F}_n , realizações futuras e passadas do processo são independentes, e assim a distribuição do processo é dada por:

$$(4.2) \quad f(FP|\mathcal{F}_n) = f(F|\mathcal{F}_n)f(P|\mathcal{F}_n),$$

onde F denota o futuro e P o passado do processo. Uma condição necessária para que o processo seja Markoviano é que sua densidade de transição satisfaça a equação de Chapman-Kolmogorov na forma:

$$(4.3) \quad p(y, t_3|x, t_1) = \int_{z \in \Omega} p(y, t_3|x, t_2)p(y, t_2|x, t_1),$$

para cada $t_3 > t_2 > t_1$ e $x, y \in \Omega$, ou de forma equivalente, a densidade de transição do processo deve obedecer as equações *forward* e *backward* de Kolmogorov (e.g. Definição 5.1.1 em [Karatzas & Shreve, 1987]).

Se a propriedade Markoviana é satisfeita podemos formular a função de log-verossimilhança do processo como:

$$(4.4) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\theta, \Delta) \equiv \sum_{i=1}^N \ln P_x(X_{n\Delta}|X_{(n-1)\Delta}, \theta, \Delta),$$

onde θ é o vetor de parâmetros. Na validade da propriedade Markoviana podemos definir a função de verossimilhança como o produto das densidades de transição do processo, que só dependem do instante imediatamente anterior, e desta forma estamos assumindo que os incrementos do processo são independentes.

A conexão entre a propriedade Markoviana (validade da propriedade Markoviana Forte) e a processos semimartingales também pode ser vista pelo Teorema 5.4.20 de [Karatzas & Shreve, 1987], que estabelece que a propriedade Markoviana forte pode ser obtida quando os coeficientes do drift e da volatilidade são limitados em espaços compactos de \mathbb{R}^d e a solução para o problema martingale homogêneo no tempo (definição 5.4.15 de [Karatzas & Shreve, 1987]) é bem definida. Entretanto na presença de um fBm em lugar do Browniano padrão o problema martingale homogêneo não é bem colocado (a equação 5.4.21 em [Karatzas & Shreve, 1987] tem valor esperado diferente de zero na presença de um fBM), inviabilizando o uso desta propriedade e demonstrando que na presença de um fBm a propriedade Markoviana não é válida.

No caso de processos com incrementos dependentes, a densidade do processo não depende só do passado mais recente mais de toda a história do processo, e assim cada X_t na função de verossimilhança tem que ser condicionado a princípio em todas as observações anteriores X_{t-n} . No caso de processos dependentes mas de memória curta, temos a propriedade de independência assintótica relacionada ao conceito de mistura exponencial (*exponential α -mixing* e *ρ -mixing*, e.g [Genon-Catalot *et al.*, 1992]), mas no caso de processos de memória longa, como o fBm para $H > 1/2$ esta propriedade não pode ser utilizada.

A violação da propriedade Markoviana torna o uso métodos de estimação da máxima verossimilhança em modelos contínuos um problema de difícil solução, dada a complexidade da avaliação da função de verossimilhança. Este problema é análogo ao problema de estimação de processos de memória longa baseada em uma formulação discreta (como processos de integração fracionária como processos ARFIMA (p,d,q)) usando uma formula exata para o algoritmo de Durbin-Levison (e.g. [Palma, 2007], pgs. 66-67), dado que este algoritmo dependeria de um passado infinito de observações discretas; no caso contínuo de memória longa a densidade de transição do processo depende de um contínuo de observações passadas do processo.

Note que o problema da violação da propriedade Markoviana não afeta somente os estimadores baseados na função de verossimilhança; por exemplo, o estimador de [Hansen & Scheinkman, 1995] é construído com base nos geradores infinitesimais de um processo Markoviano, e mesmo estimadores não-paramétricos como o estimador de regressão por kernel como os utilizados em [Ait-Sahalia, 1996] teriam que ser modificados para levar em conta a influência das observações passadas do processo.

O fato de que o movimento Browniano Fracionário também não seja um semimartingale também tem conseqüências sérias sobre as propriedades da maioria dos estimadores. Em geral propriedades assintóticas dos estimadores de processos em tempo contínuo usam resultados de convergências e teoremas do limite central para semimartingales (e.g. [Jacod & Shiryaev, 2002]), e alguns estimadores são baseados explicitamente na propriedade martingale, como os estimadores propostos em [Bibby & Sorensen, 1995] e [Bibby *et al.*, 2007]. Da mesma forma ainda não existem resultados conhecidos para estimadores baseados em aproximações da integral estocástica para o fBm para o caso discreto, notando que neste caso não poderíamos recorrer ao calculo estocástico de Itô e sim a ferramentas de cálculo estocástico Fracionário (e.g. [Bishwal, 2007] e [Mishura, 2008]).

Neste contexto as técnicas para a estimação de processos não-Markovianos que podem ser implementadas com mais facilidade são as metodologias baseadas em simulação, como o princípio de Inferência Indireta, o Método de Momentos Simulados e o Método dos Momentos Eficientes. Neste artigo discutimos a implementação do estimador de Inferência Indireta (Seção 6), mas uma alternativa possível, discutida rapidamente abaixo, é a implementação do Método de Momentos Simulados.

O Método de Momentos Simulados define estimadores através da minimização da seguinte distância¹⁰:

$$(4.5) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^s(\theta) \right]^2,$$

onde y_i são as trajetórias observadas do processo e $y_i^s(\theta)$ são trajetórias simuladas do processo para um dado vetor tentativo θ , que converge para a solução:

$$\theta_{\infty} = \arg \min_{\theta} [E y_i - E y_i^s(\theta)].^2$$

Neste caso poderíamos definir estimadores para equações diferenciais estocásticas dirigidas pelo fBm através de condições de momentos derivadas dos momentos amostrais (em especial os momentos derivados da função de covariância do fBm) e dos momentos simulados derivados da simulação de equações diferenciais estocásticas dirigidas por processos fBm. Esta oportunidade ainda precisa ser explorada e dado alguns dos problemas computacionais envolvidos na estimação pela Metodologia de Inferência Indireta, pode ser uma alternativa interessante. O método de Momentos Eficientes é um refinamento do princípio de Inferência Indireta, e sua possibilidade será discutida na Seção 6.

4.2. Cox-Ingersoll-Ross Fracionário. Para referenciar nossa discussão, iremos trabalhar com um modelo específico de taxas de juros de curto prazo, embora a discussão seja a princípio válida

¹⁰Veja [Gourieroux & Monfort, 1996] e [Singleton, 2006] para referências mais completa sobre estimadores de Momentos Simulados.

para qualquer modelo cujos componentes sejam diretamente observáveis¹¹. Um modelo simples e com propriedades interessantes na modelagem de taxas de juros de curto prazo é o modelo conhecido como Cox-Ingersoll-Ross ([Cox *et al.*, 1985]). O modelo Cox-Ingersoll-Ross (abreviado por CIR no texto) é um modelo de um único fator que possui expressões analíticas para a densidade de transição do processo ([Ait-Sahalia, 1999]) e também fórmulas fechadas para a precificação de títulos.

Este processo é representado em tempo discreto como:

$$(4.6) \quad x_t = (1 - \phi)\mu + \phi x_{t-1} + \sqrt{x_t} e_t,$$

com $e_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Este modelo pode ser visto como uma forma de um processo autoregressivo de primeira ordem, onde μ é a média de longo prazo do processo, ϕ um parâmetro de persistência e σ^2 a variância do componente de erros. Mas note que temos uma diferença em relação a um processo AR(1), dada pelo termo $\sqrt{x_t}$ multiplicando o componente de choque. Este componente tem dois objetivos - o primeiro é colocar uma dependência da volatilidade do processo em relação ao nível do processo, capturando o fato estilizado de que taxas de juros mais altas são também mais voláteis. Este termo também tem o objetivo de evitar taxas de juros negativas, já que quanto mais o processo se aproxima de zero, menor será a volatilidade do processo e assim a probabilidade de alcançar taxas negativas é cada vez menor. Outra característica importante é que para $|\phi| < 1$ o processo tem reversão à média de longo prazo dada por μ .

A representação deste processo em tempo contínuo é dada pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$(4.7) \quad dx_t = \phi(x_t - \mu)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t,$$

onde μ, ϕ e σ tem a mesma interpretação do processo em tempo discreto e agora dW_t é um movimento Browniano padrão, e a condição de positividade no processo é dada por $2\mu\phi > \sigma^2$. Note que neste processo a volatilidade muda no tempo e é dada por $dx_t^2 = \sigma^2 x_t dW_t$.

O que iremos chamar de processo Cox-Ingersoll-Ross Fracionário (CIR-fBm) é uma difusão na forma

$$(4.8) \quad dx_t = \phi(x_t - \mu)dt + \sigma\sqrt{x_t}dB_{\mathbb{H}}(t),$$

onde $dB_{\mathbb{H}}(t)$ é um fBm com coeficiente de Hurst \mathbb{H} , conforme definido pela equação (3.4). Neste processo unimos a estrutura de dependência do processo CIR com incrementos dados por um processo fBm, permitindo a possibilidade de memória longa no processo quando $\mathbb{H} > 1/2$, mas também uma dinâmica de memória curta dado pelo componente de reversão à média. Até o presente momento este modelo ainda não foi estudado na literatura (conforme aponta [Bishwal, 2007]), e a forma mais próxima estudada na literatura é o chamado modelo Ornstein-Uhlenbeck Fracionário, que pode ser representado como:

¹¹Modelos com componentes não-observáveis, como por exemplo modelos com volatilidade estocástica, poderiam ser tratados com algumas modificações referentes a avaliação dos momentos dos componentes não-observáveis (e.g. [Gourieroux & Monfort, 1996]).

$$(4.9) \quad dx_t = \phi(x_t - \mu)dt + \sigma dB_{\mathbb{H}}(t),$$

que é uma forma restrita do modelo CIR-fBm sem o componente de raiz quadrada multiplicando a volatilidade. Propriedades deste modelo estão compiladas em [Bishwal, 2007], sendo importante notar que metodologias de inferência para este processo são também baseadas em amostragem contínua.

5. EVIDÊNCIA DE MONTE CARLO

Um primeiro passo no estudo de estimadores para equações diferenciais estocásticas dirigidas por fBm é verificar a influência do fBm em estimadores desenvolvidos para o caso do Browniano Padrão. Dado que estaremos trabalhando com estimadores especificados incorretamente, para avaliar o viés causado pela especificação errônea desenvolveremos um estudo de Monte Carlo, mostrando como três estimadores normalmente utilizados na estimação de processos de difusão se comportam quando existe um fBm como um processo de choque.

O experimento de Monte Carlo foi realizado com a seguinte estrutura - para uma grade de valores do coeficiente \mathbb{H} de Hurst variando entre .5 até .90, com incrementos de .05, simulamos 1000 realizações de um processo CIR dado pela equação (4.8) com parâmetros $\mu = .1$, $\phi = .5$ e $\sigma = .3$, e amostras de tamanho 200 e 500. Como não existe uma densidade de transição conhecida para o caso de um processo CIR com incrementos dados por um fBm, simulamos cada trajetória¹² usando uma discretização de Euler-Maruyama com $[t_{i+1} - t_i] = .1$, para a equação diferencial estocástica dada pela equação (4.8).

Para uma difusão na forma:

$$(5.1) \quad d(X(t)) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t)$$

A aproximação de Euler-Maruyama é dada pela simulação recursiva dada por:

$$(5.2) \quad \hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))[t_{i+1} - t_i] + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{[t_{i+1} - t_i]}B_{\mathbb{H}}(t),$$

onde $B_{\mathbb{H}}(t)$ denota um incremento obtido de um fBm. A partir desta simulações estimamos o vetor de parâmetros (μ, ϕ, σ) para cada trajetória do processo usando três estimadores: Máxima Verossimilhança exata usando a densidade de transição do processo Cox-Ingerson-Ross, Máxima Verossimilhança baseada na discretização de Euler do processo e o Método de Momentos Generalizados (GMM).

A estimação por Máxima Verossimilhança usando a densidade de transição é baseada na fórmula analítica da densidade de transição do processo CIR derivada por ([Ait-Sahalia, 1999]). A aproximação de Euler é baseada em uma função de verossimilhança baseada na aproximação de Euler do processo de difusão (e.g. [Elerian *et al.*, 2001]). A estimação por GMM, seguindo o procedimento adotado em [Chan *et al.*, 1992a]) é baseada na discretização¹³ do modelo CIR dada por:

¹²A construção do processo de difusão dirigido pelo Movimento Browniano Fracionário será detalhada na Seção 6.

¹³As condições de Momentos utilizadas estão colocadas na Seção 6.

TABELA 1. Média das estimações do modelo CIR-fBm baseadas em 1000 simulações - Tamanho de Amostra 200, valores simulados $\mu = 0.1$, $\phi = 0.5$ e $\sigma = .3$.

ML usando a densidade de transição									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.1458775	0.1134305	0.09509974	0.09683407	0.1030691	0.1188226	0.1265792	0.1317436	0.1345096
ϕ	0.512685	0.5703563	0.4815641	0.469679	0.4688932	0.5464706	0.5780457	0.6153487	0.6471074
σ	0.3479737	0.4014056	1.364213	1.55437	1.543064	1.753845	1.40321	1.727352	1.83721
ML baseada na aproximação de Euler									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.1458775	0.1134305	0.09509974	0.09683407	0.1030691	0.1188226	0.1265792	0.1317436	0.1345096
ϕ	0.5635175	0.4474295	0.5361329	0.548791	0.5497883	0.4874829	0.4654402	0.4304067	0.4193980
σ	0.3002251	0.2754534	0.2318571	0.4262613	0.8918149	1.579008	1.835250	1.373994	1.528249
GMM									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.115501	0.1145403	.08700724	0.07145202	0.0560945	0.04643310	0.0431905	0.04196120	0.04087077
ϕ	0.4998864	0.5717272	0.4325775	0.3553912	0.2732842	0.224805	0.2062955	0.1998206	0.1905817
σ	0.3475374	0.3881546	0.3382794	0.294583	0.2588234	0.2271535	0.2276487	0.2709468	0.2713994

TABELA 2. Média das estimações do modelo CIR-fBm baseadas em 1000 simulações - Tamanho de Amostra 500, valores reais $\mu = 0.1$, $\phi = 0.5$ e $\sigma = .3$.

ML usando a densidade de transição									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.1348921	0.1232934	0.1143757	0.1298886	0.1341568	0.1392551	0.1474232	0.1487161	.
ϕ	0.5292128	0.5464539	0.5964127	0.7294346	0.773075	0.7655826	0.8083488	0.943861	.
σ	0.2794959	0.3659509	1.825951	1.547492	1.494382	1.679199	1.792744	1.809987	.
ML baseada na aproximação de Euler									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.170231	0.129059	0.1218682	0.1661310	0.1734377	0.1992791	0.1958566	0.3140093	.
ϕ	0.5627962	0.3948839	0.4436547	0.3965095	0.4003226	0.380165	0.3353381	0.4066419	.
σ	0.2479737	0.2014936	1.76823	1.655987	1.550644	1.553799	1.208276	1.424135	.
GMM									
H	.5	.55	.6	.65	70	.75	.80	.85	.90
μ	0.1042228	0.090686	0.06572463	0.05402191	0.04677832	0.04899353	0.05384942	0.05760389	.
ϕ	0.5126528	0.4529054	0.3283621	0.2698209	0.2337225	0.2426560	0.2609257	0.2706834	.
σ	0.3518613	0.3042927	0.25735	0.227723	0.262664	0.2853901	0.295324	0.2973890	.

$$(5.3) \quad r_{t+1} - r_t = \alpha_0 + \beta_0 r_t + \sqrt{r_t} \varepsilon_{t+1}$$

com as condições:

$$E(\varepsilon_{t+1}) = 0 \text{ e } E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma_0^2 r_t^2.$$

As tabelas 1 e 2 mostram as médias dos estimadores nas 1000 simulações obtidas para cada tamanho de amostra e cada método de estimação. Note que é difícil caracterizar o viés causado pelo fBm nos estimadores usuais de uma forma sistemática. O resultado geral é que o estimador da volatilidade é sempre viesado para cima, enquanto que os estimadores da persistência e do nível de longo prazo são afetados de forma diferente para cada estimador. Por exemplo os estimadores de ϕ usando a estimação pela densidade de transição são em geral viesados para cima, enquanto

que os estimadores de GMM são viesados para baixo. O efeito na média de longo prazo μ tem um comportamento análogo ao comportamento obtido para ϕ .

Também é interessante observar que para valores elevados do coeficiente de Hurst a estimação fica muito problemática - por exemplo para valores acima de .90 é muito difícil obter uma estimação convergente por qualquer um dos métodos; no caso da amostra de tamanho 500 em maioria das estimações para este valor de parâmetro não funcionam, e desta forma decidimos não reportar os resultados para este valor.

Mas o resultado geral do estudo de Monte Carlo é mostrar que os estimadores usuais são severamente afetados na presença de um fBM. Pelas razões discutidas na Seção 4.1, o fato do fBM não ser um processo de Markov nem um semimartingale inviabiliza o uso dos estimadores mais utilizados para estimação de processos contínuos usando dados discretos, o que fica evidente com este estudo empírico, que embora limitado (o viés pode ser diferente para outras configurações de parâmetros) mostra que são necessárias correções para o caso fBM. .

6. ESTIMAÇÃO POR INFERÊNCIA INDIRETA

Conforme discutido na seção 4.1 ocorrem situações onde não existe uma forma analítica para função de verossimilhança ou então a avaliação desta função é extremamente complicada. Exemplos desta situação, além dos discutidos em processos de difusão, são modelos com variáveis latentes, como modelos de volatilidade estocástica, modelos de mudanças endógenas de regime ou modelos de escolha discreta multivariados com dependência serial. Em todas estas situações a avaliação da verossimilhança envolve a integração de todos os fatores latentes, representando uma integral de dimensão igual ao número de fatores latentes¹⁴, representando um enorme desafio analítico e computacional.

Nestas situações onde a avaliação da função de verossimilhança exata não é factível, uma possibilidade é o uso de um modelo instrumental mais simples de ser avaliado. Mas como este modelo auxiliar não corresponde à verdadeira especificação, em geral os estimadores baseados no modelo instrumental serão inconsistentes. Entretanto em situações onde é possível obter simulações de observações do modelo verdadeiro, é possível corrigir a inconsistência dos estimadores usando uma etapa de calibração, minimizando uma função critério que mede a distância entre o parâmetro obtido pelo modelo instrumental e estimações baseadas em simulações do modelo verdadeiro.

O método de Inferência Indireta ([Gourieroux *et al.*, 1993], [Smith, 1993] e [Gallant & Tauchen, 1996]) é baseado na construção de um estimador consistente, através da correção por simulação do viés existente pelo uso de um modelo instrumental baseado em uma especificação incorreta do modelo. O procedimento de Inferência Indireta pode ser formulado através dos 3 passos seguintes:

- (1) Estimação dos parâmetros do modelo instrumental a partir das observações na amostra:

$$(6.1) \quad \hat{\theta}_{aux} = Argmax \sum_{i=1}^T \log f_t(x_t|\theta).$$

- (2) Simulação de uma trajetória do modelo verdadeiro, condicional a um vetor de parâmetros, gerando uma série artificial y_t^s de tamanho T e a estimação do modelo auxiliar para esta série artificial:

¹⁴Veja [Gourieroux & Monfort, 1996] para uma discussão sobre as aplicações possíveis.

$$(6.2) \quad \widehat{\theta}_{sim} = \underset{\theta}{\operatorname{Argmax}} \sum_{i=1}^T \log f_t(x_t^s | x_{t-1}^s, \theta).$$

- (3) Estimação do vetor de parâmetros θ do modelo original através da calibração do viés existente na estimação do vetor $\widehat{\theta}_{aux}$, através da minimização da seguinte função critério:

$$(6.3) \quad \widehat{\theta}_{II} = \arg \min_{\theta} (\widehat{\theta}_{aux} - \widehat{\theta}_{sim}(\theta))^\top \Omega (\widehat{\theta}_{aux} - \widehat{\theta}_{sim}(\theta)).$$

onde Ω é uma matriz positiva-definida que pondera o peso dado a cada elemento do vetor de parâmetros. Esta etapa é usualmente realizada usando algum algoritmo de minimização numérica para calcular $\widehat{\theta}_{II} = \lim_{p \rightarrow \infty} \widehat{\theta}_{II}^p$, onde $\widehat{\theta}_{II}^p$ é a p-ésima iteração dada por $\widehat{\theta}_{II}^p = h(\widehat{\theta}_{aux}, \widehat{\theta}_{sim}^p(\theta))$, sendo h uma função de atualização do algoritmo.

A distribuição assintótica do estimador de Inferência Indireta é dada por:

$$(6.4) \quad \sqrt{T}(\widehat{\theta}_{II} - \theta_0) \underset{d}{\rightarrow} N[0, W(S, \Omega)],$$

com

$$(6.5) \quad W(S, \Omega) = \left(1 + \frac{1}{S}\right) \left[\frac{\partial b^\top}{\partial \theta}(\theta_0) \frac{\partial b}{\partial \theta^\top}(\theta_0) \right]^{-1} \frac{\partial b^\top}{\partial \theta}(\theta_0) \Omega \Omega^{*-1} \frac{\partial b}{\partial \theta^\top}(\theta_0) \left[\frac{\partial b^\top}{\partial \theta}(\theta_0) \frac{\partial b}{\partial \theta^\top}(\theta_0) \right]^{-1},$$

onde S é um fator de escala relacionado ao número de condições de momentos utilizadas, $b(\theta_0) = E_{\theta_0} k(y_t)$ define a distância entre o momento marginal de y_t e seu valor esperado θ , $\Omega^{*-1} = J_0 \bar{I}_0^{-1} J_0$ com J_0 dado por:

$$(6.6) \quad J_0 = p \lim_T \frac{\partial^2 \psi(y_t; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} [y_t; b(\theta_0)],$$

$$(6.7) \quad \bar{I}_0^{-1} = \sqrt{T} \frac{\partial \psi(y_t; \theta)}{\partial \theta} [y_t; b(\theta_0)] - E_{\theta_0} \left[\sqrt{T} \frac{\partial \psi(y_t; \theta)}{\partial \theta} \right],$$

e a uma função critério $\psi(y_t; \theta)$ dada por:

$$(6.8) \quad \psi(y_t; \theta) = - \left[\frac{1}{T} k(y_t) - \theta \right]^\top \left[\frac{1}{T} k(y_t) - \theta \right].$$

Este resultado mostra que os estimadores são consistentes e assintoticamente normais¹⁵. No caso de um modelo exatamente identificado - o número de parâmetros do modelo auxiliar é igual ao número de parâmetros do modelo verdadeiro, temos que $W(S, \Omega)$ se reduz a:

$$(6.9) \quad W(S, \Omega) = \left(1 + \frac{1}{S}\right) \left[\frac{\partial b^\top}{\partial \theta}(\theta_0) \frac{\partial b}{\partial \theta^\top}(\theta_0) \right]^{-1}$$

¹⁵Para uma prova dessa propriedade veja [Gourieroux & Monfort, 1996], apêndice 4A.

Em nosso problema os objetivos da aplicação do método de inferência indireta são corrigir o viés causado pela discretização do processo e o problema de inconsistência gerado pela violação da propriedade Markoviana, já que não é possível gerar uma função de verossimilhança completa para capturar o efeito da memória longa gerada pela estrutura de dependência do fBm.

6.1. Descrição do procedimento adotado. Embora o procedimento de Inferência Indireta seja em princípio fácil de ser aplicado, a implementação do processo envolve uma série de decisões, com relação ao modelo auxiliar escolhido, o procedimento de simulação do processo gerador dos dados e a metodologia de otimização numérica utilizada na etapa de calibração. Descrevemos estes procedimentos a seguir.

6.1.1. Escolha do Modelo Auxiliar. Para determinarmos qual o modelo auxiliar utilizado no procedimento, em princípio apenas precisamos obedecer a uma restrição de identificação, i.e., que seja possível recuperar os parâmetros do modelo verdadeiro através dos parâmetros do modelo auxiliar. Esta questão é análoga ao procedimento de estimação de um modelo estrutural a partir de um modelo em forma reduzida. Neste ponto, a questão de identificação surge pela necessidade de ter um número de parâmetros (e consequentemente de condições de momentos) no modelo auxiliar igual ou maior ao número de parâmetros do modelo verdadeiro.

Outro ponto é que a eficiência do procedimento depende da qualidade do ajuste do modelo auxiliar. O método de Momentos Eficientes ([Gallant & Nychka, 1987], [Gallant, 2007]) é um refinamento do método de inferência indireta, onde se obtém estimadores eficientes através do uso de um modelo auxiliar não-paramétrico, utilizando uma estrutura para o modelo auxiliar com um elevado número de parâmetros e obtendo um ajuste muito bom para a amostra observada. Entretanto existem evidências que o comportamento do Método de Momentos Eficientes em amostras pequenas pode ser inferior ao estimador de Inferência Indireta, como apontam os estudos de [Chumacero, 1997], [Michaelides & Ng, 2000], [Ghysels *et al.*, 2003] e [Zivot & Czellar, 2008].

Mas outro ponto fundamental é que a estimação do modelo auxiliar deve ser rápida, já que cada etapa do processo de calibração envolve uma estimação para cada amostra simulada e questões computacionais podem limitar o uso deste procedimento. Dada a complexidade de implementação do Método de Momentos Eficientes, neste estudo implementamos apenas o princípio de Inferência Indireta.

Em nosso problema a escolha do modelo auxiliar para a estimação dos parâmetros (α, β, σ) tem um candidato natural, que é o uso do método de Momentos Generalizados (GMM) para a estimação da discretização simples do processo CIR¹⁶, dada pela equação 5.3.

A estimação do modelo usando GMM é útil neste contexto, já que a matriz de ponderação ótima pode ser construída usando métodos robustos para heterocedasticidade e autocorrelação serial, aumentando a eficiência na estimação do modelo auxiliar. Note que poderíamos usar como modelo auxiliar a estimação por verossimilhança usando da densidade de transição do processo CIR ([Ait-Sahalia, 1999]), mas este procedimento se mostrou bastante instável na etapa de estimação com dados simulados, em especial para parâmetros elevados do coeficiente de Hurst. Este mesmo problema ocorreu no procedimento de Monte Carlo realizado na seção 5, e assim a escolha do

¹⁶Veja [Chan *et al.*, 1992b] para maiores detalhes sobre estimação de processos de difusão para taxas de juros usando GMM.

método de GMM foi determinada pela eficiência assintótica do procedimento e a maior estabilidade na estimação.

Para construir o estimador GMM assumimos que $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$ e $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma_0^2 r_t^2$, e desta forma temos as seguintes quatro condições de momentos:

$$(6.10) \quad f_t(\Theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} r_t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma_0^2 r_t^2 \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma_0^2 r_t^2) r_t \end{bmatrix}.$$

O estimador GMM é obtido tornando estas condições de momentos iguais a zero ([Hansen, 1982]). Note que neste procedimento estimamos apenas os parâmetros (μ, ϕ, σ) . Para obter um estimador para o parâmetro \mathbb{H} nós utilizamos um procedimento de estimação através de uma decomposição de Wavelets (e.g. [Percival & Walden, 2000],[Palma, 2007]), utilizando a série de resíduos do modelo CIR estimado por GMM.

Como a função de Wavelets também será utilizada no passo de simulação, é válida uma descrição mais detalhada do método. Para definir este estimador note que uma função de Wavelet é uma função $\psi(t)$ com a seguinte propriedade:

$$(6.11) \quad \int \psi(t) dt = 0.$$

Definimos dilatações e translações da função de Wavelet pela expressão:

$$(6.12) \quad \psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k).$$

A conhecida transformação discreta de Wavelet (dwt) é definida por:

$$(6.13) \quad d_{jk} = \int y(t) \psi_{jk}(t) dt,$$

onde $j, k \in \mathbb{N}$. A função de Wavelet forma uma base ortogonal se:

$$(6.14) \quad \int \psi_{ij}(t) \psi_{kl}(t) dt = 0.$$

A principal vantagem do uso de Wavelets é que podemos obter uma representação ortogonal para uma função real através da seguinte expressão:

$$(6.15) \quad y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \psi_{jk}(t).$$

Para obter um estimador para o parâmetro \mathbb{H} definimos $\widehat{\mu}_j$ usando a transformada discreta d_{jk} :

$$(6.16) \quad \widehat{\mu}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \widehat{d}_{jk}^2,$$

com a seguinte propriedade:

$$(6.17) \quad \widehat{\mu}_j \sim \frac{2^{2dj}}{n_j} \chi_{n_j}^2$$

e tomando logaritmos temos a expressão:

$$(6.18) \quad \log_2 \widehat{\mu}_j \sim 2dj + \log_2 c + \log \chi_{n_j}^2 / \log 2 - \log_2 n_j,$$

com $E(\log \chi_n) = \psi(n/2) + \log 2$, $Var(\log \chi_n) = \zeta(2, n/2)$, onde ψ é a função psi, ζ é a função Zeta de Riemman e $\psi(z) = d/dz \log \Gamma(z)$. Definindo $E(\varepsilon_j) = 0$ e $Var(\varepsilon_j) = \zeta(2, n/2) / \log(2)^2$, a estimação do parâmetros \mathbb{H} pode ser realizada através da seguinte regressão linear:

$$(6.19) \quad y_j = \alpha + \beta x_j + \varepsilon_j$$

onde $y_j = \log_2 \widehat{\mu}_j - g_j$, $\alpha = \log c$ e $\beta = 2(\mathbb{H} - .5)$. A variância de $\widehat{\mathbb{H}}$ é dada por $Var(\widehat{\beta})/4$. Utilizamos neste procedimento de estimação e no procedimento de simulação de fBm utilizamos a decomposição de Wavelets dada pela família Daubechies-10.

Com a estimação de \mathbb{H} completamos a estimação do modelo auxiliar $\widehat{\theta}_{aux} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}, \widehat{\mathbb{H}})$.

6.2. Passo de simulação. No passo de simulação precisamos simular trajetórias do processo CIR-fBm para um vetor de parâmetros determinado na etapa de calibração. Conforme discutido na seção 5, não existe uma densidade de transição ou discretização exata conhecida para este processo, e precisamos simular através de discretizações de Euler dadas pelas equações (5.1 e 5.1). Nesta etapa iremos detalhar o processo de simulação de uma trajetória de um fBm.

6.2.1. Simulação de um fBm usando Wavelets. A simulações de movimentos Brownianos Fracionários não é trivial, e existe uma gama de métodos possíveis¹⁷. Alguns métodos são exatos (método de Hoskings; Cholesky; Davies e Harte), e alguns métodos são aproximados (como métodos baseados na representação de Integral Estocástica e baseados em Wavelets). Métodos exatos são extremamente lentos e consomem muita memória, e no nosso problema como temos que realizar seguidas simulações para cada passo do procedimento de otimização a velocidade de simulação é um fator relevante.

A forma mais computacionalmente eficiente de simular uma trajetória de um fBm é através do processo conhecido como Wavelet Synthesis, que é a forma escolhida neste artigo. Lembrando as definições de uma função de Wavelet (Equações 6.11-6.15) temos que a transformada discreta de Wavelet de um fBm é dada pela seguinte expressão:

$$(6.20) \quad d_{B_H} = \int B_h(t) \psi_{jk}(t) dt.$$

Nosso interesse não é decompor um fBm, mas sim compor uma trajetória deste processo. Uma forma possível ([Dieker, 2004]) é através da seguinte expressão para a simulação de uma observação no período t de um processo fBm:

¹⁷Uma discussão detalhada sobre as várias metodologias de estimação e simulação de processos fBm se encontra em [Dieker, 2004], e para uma referência detalhada de simulação de processos de Memória longa usando Wavelet Synthesis veja [Percival & Walden, 2000], cap 9.

$$B_h(t) = \lim_{\mathfrak{S} \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{\mathfrak{S}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{d}_{B_H}(j, k) 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) dt,$$

onde $\widehat{d}_{B_H}(j, k)$ são variáveis aleatórias Gaussianas com variância dada $\sigma^2 2^{j(2\mathbb{H}+1)}$. Utilizando este método temos trajetórias de processos fBM, e assim podemos gerar trajetórias simuladas do processo CIR-fBm usando discretização de Euler. Note que o uso da discretização de Euler é uma aproximação para a solução do processo de difusão e desta forma nossos resultados são condicionais a validade desta aproximação para um Δ fixo. Veja [Kloeden & Platen, 1992] para uma discussão detalhada. As propriedades da aproximação de Euler para equações diferenciais estocásticas dirigidas por um fBm foram estudadas em [Nourdin, 2005] e [Neunkirch & Nourdin, 2006], que mostram que o erro de aproximação é equivalente quase certamente a um processo dado por $\delta^{2\alpha} \xi_t$, com a forma analítica de ξ_t dada explicitamente. Em [Mishura, 2008] o estudo de convergência é realizado para várias formas de aproximação.

Para completar esta etapa, para cada simulação realizada estimamos novamente os parâmetros do modelo, usando o modelo auxiliar definido anteriormente.

6.3. Passo de otimização. O estimador de Inferência Indireta é obtido de forma a minimizar a distância entre o estimador do modelo instrumental e o estimado usando os dados simulados, definida pela Equação (6.3). Nesta etapa o procedimento de otimização numérica determina valores para o vetor θ escolhido para simular trajetórias do processo, e para cada trajetória simulada, com os valores estimados no passo 2 é avaliada a função critério (6.3).

A implementação computacional dos passos 2 e 3 requer a imposição de algumas restrições. A primeira restrição é que precisamos impor que cada trajetória simulada corresponda a uma série de taxas de juros positivas. Assim se a simulação gerou uma taxa com pontos negativos, simulamos uma nova trajetória do fBm até que se que se gerem taxas positivas, em um procedimento de amostragem com rejeição.

Neste caso também estaremos realizando uma minimização com restrições, impondo as restrições de positividade do modelo CIR e adicionalmente uma condição sobre o intervalo do coeficiente de Hurst, que está definido para valores entre 0 e 1.

Um detalhe adicional é que conforme já discutido temos muitos problemas de convergência para valores elevados de H , e desta forma o procedimento é bastante ineficiente nestas regiões. Outro ponto é determinar o número ótimo de simulações em cada passo da etapa de avaliação da função critério, e verificamos que um número de 20 simulações em cada etapa de avaliação da função critério gera resultados satisfatórios. Note que o estimador é extremamente intensivo computacionalmente.

7. APLICAÇÕES

Implementamos o procedimento de estimação por Inferência Indireta para três séries de taxas de juros. A primeira série estudada é uma série mensal de taxas de juros referentes de Treasury Bills de 03/1964 até 12/1989 (305 observações), sendo a série de juros estudadas em [Chan *et al.*, 1992b]. A segunda série analisada é uma série de taxas de juros diárias de taxas Eurolibor, com a amostra com datas de 01/03/2000 até 27/03/2008 (2610 observações). A última série estudada contém dados mensais de taxas de juros de títulos Canadenses com maturidade de 1 mês, com a amostra indo

FIGURA 7.1. Treasury Bills 1964-1989

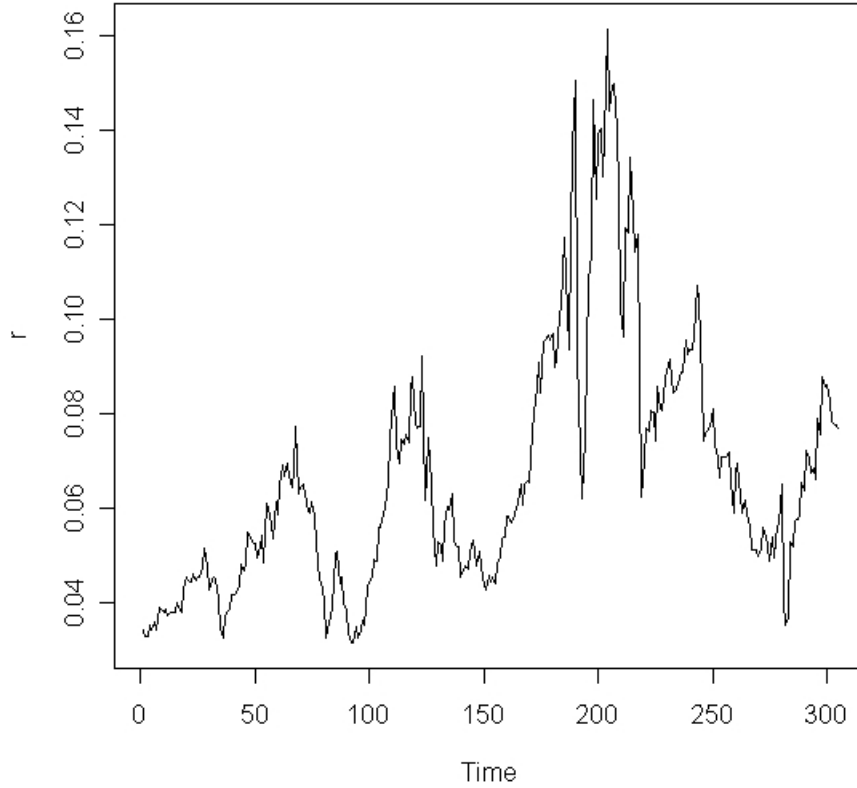


TABELA 3. Estimação - GMM e Inferência Indireta - US Treasury Bills

	μ	ϕ	σ	\mathbb{H}
GMM - Parâmetro	0.04546093	0.81964484	0.05349082	0.44146423
GMM. s.e.	0.090080400	0.029319553	0.014459598	0.005245541
II - Parâmetro	0.03238156	0.69379688	0.05813648	0.48755111
II - s.e.	0.09030874	0.029371080	0.014485505	0.005261965

de 1956:11 até 1996:6 (512 observações). Estes dados são os mesmo analisados em [Tkacz, 2001]. As Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 mostram os gráficos destas séries.

As tabelas 3, 4 e 5 mostram o resultados da estimação do modelo auxiliar estimado pelo Método de Momentos Generalizados (GMM) e o do estimador de Inferência Indireta (II) para o processo CIR-fBm, para as séries estudadas. Para a série de Treasury Bills vemos que os resultados da estimação do modelo por GMM e Inferência Indireta são muito próximos, e o parâmetro \mathbb{H} estimado, é estatisticamente diferente de $1/2$, com $\mathbb{H} < 1/2$ e apontando para uma evidência de memória curta e autocorrelação negativa nos incrementos do processo. Também é interessante notar que a persistência no modelo estimado por Inferência Indireta é significativamente inferior a obtida pela estimação por GMM, indicando que parte da dinâmica de persistência não estava no componente de reversão a média e sim na estrutura de correlação dos incrementos do processo.

FIGURA 7.2. Eurolibor

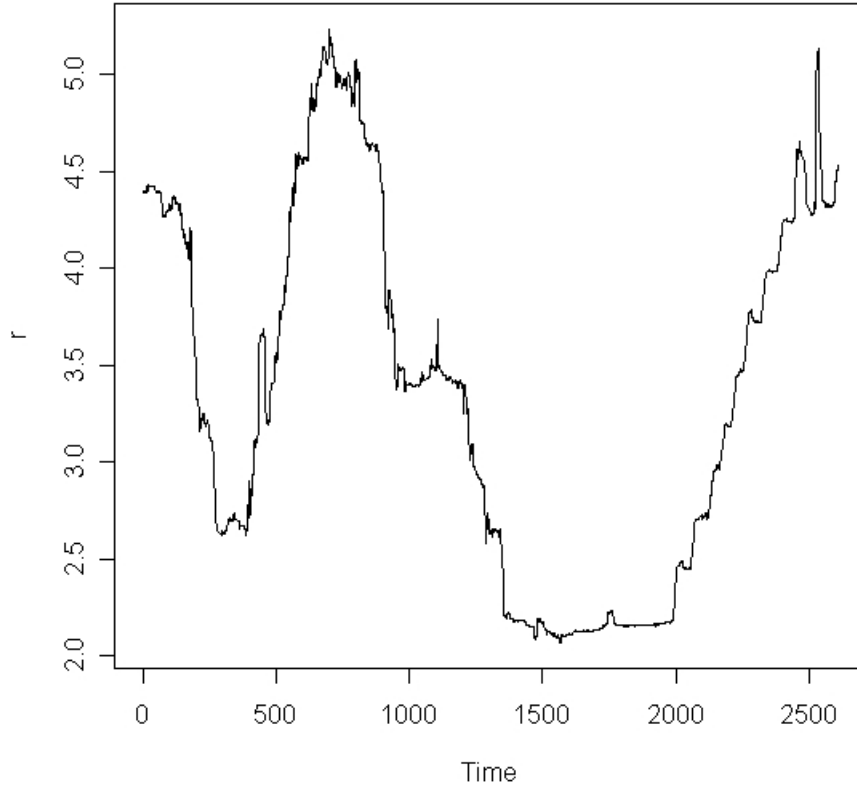


TABELA 4. Estimação - GMM e Inferência Indireta - Taxas EuroLibor

	μ	ϕ	σ	\mathbb{H}
GMM - Parâmetro	0.3355136	0.1167345	0.2066294	0.5653880
GMM. s.e.	0.03030097	0.12100467	0.01191316	0.04937245
II - Parâmetro	0.3000884	0.1196627	0.194989	0.5478063
II - s.e.	0.03030312	0.1210105	0.01191479	0.04938462

Para a série de taxas Eurolibor (Tabela 4) a estimação do parâmetro \mathbb{H} não é estatisticamente diferente de $1/2$, indicando que para esta taxa o pressuposto de um Browniano Padrão não pode ser rejeitada. Uma evidência a favor deste resultado é que a estimação do modelo auxiliar e do modelo por Inferência Indireta são muito próximas, indicando que a correção pela presença de um possível componente de fBm não é necessária.

A série de taxas de juros do Canadá, segundo o estudo de [Tkacz, 2001] já apresentava evidências de ser um processo de memória longa. Neste estudo foi utilizado um estimador de Wavelet-OLS para o processo de memória longa, mas onde não havia um controle para a estrutura de memória curta do processo. Usando o estimador de Inferência Indireta proposto no artigo, obtemos suporte a evidência de memória longa obtida por [Tkacz, 2001], mas adicionalmente controlando para a

FIGURA 7.3. Taxas de Juros - Canadá

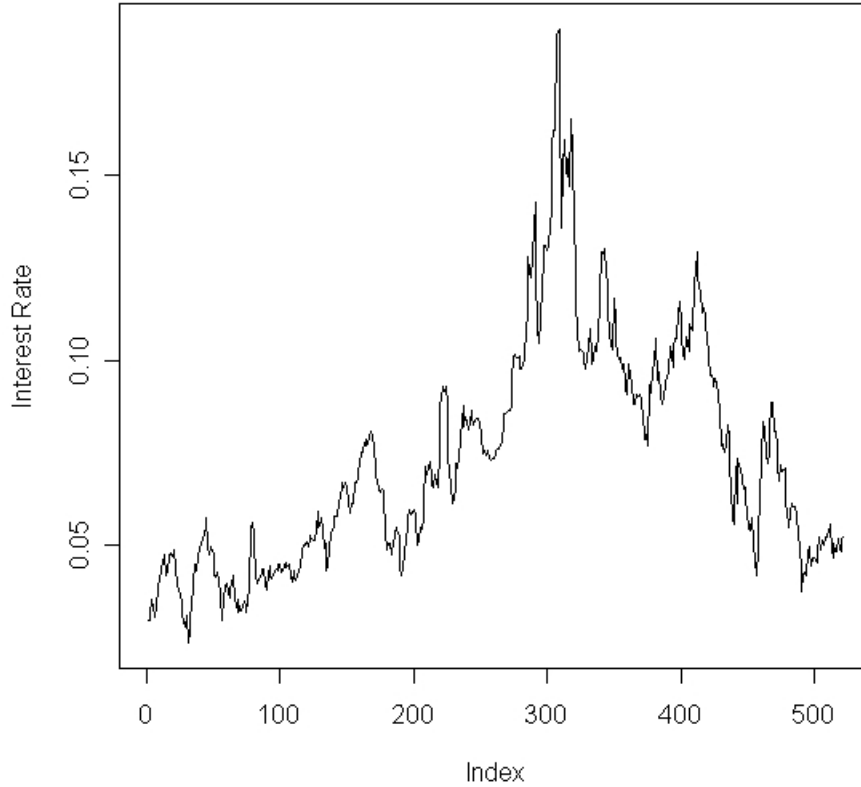


TABELA 5. Estimação - GMM e Inferência Indireta - Taxas de Juros - Canadá

	μ	ϕ	σ	\mathbb{H}
GMM - Parâmetro	0.01949002	0.33922906	0.04861706	0.63476452
GMM. s.e.	0.079312567	0.027278700	0.0116461	0.004259617
II - Parâmetro	0.01444128	0.2848528	0.1868208	0.6107441
II - s.e.	0.10894435	0.03331045	0.03897676	0.01146291

estrutura de reversão a média existente no processo CIR e a suposição de um modelo em tempo contínuo, conforme mostra a tabela 5.

8. CONCLUSÕES

Discutimos neste artigo a estimação de processos de difusão dirigidos por um Movimento Browniano Fracionário, em um contexto de amostragem discreta. Em vista dos recentes resultados teóricos (e.g. [Cheridito, 2003],[Guasoni, 2006] e [Jarrow *et al.*, 2007]) apontando a compatibilidade entre precificação por Não-Arbitragem e processos que não são semimartingales, e a representação obtida por [Ohashi, 2007] para a classe de modelos HJM ([Heath *et al.*, 1992]) utilizando o movimento Browniano Fracionário, temos a necessidade do desenvolvimento de metodologias de estimação para equações diferenciais estocásticas não-markovianas e processos mais gerais que

semimartingales. Dadas as dificuldades teóricas e práticas envolvidas na derivação destes estimadores, como a complexidade da função de verossimilhança, mostramos que neste contexto metodologias de estimação usando simulação como o princípio de Inferência Indireta representam uma primeira forma de abordar estes problemas.

Outras possibilidades para a derivação de um estimador neste contexto seriam o Método de Momentos Simulados e o Método de Momentos Eficientes. Embora em algumas situações os estimadores do Método de Momentos Eficientes e Inferência Indireta sejam equivalentes ([Gourieroux & Monfort, 1996]), no Método de Momentos Simulados poderíamos construir estimadores usando a informação dos momentos derivadas da estrutura de covariância do fBm, dada pela Equação 3.1. Esta possibilidade é interessante em especial quando o coeficiente \mathbb{H} de Hurst se aproxima de um. Nestes casos os estimadores usuais para o modelo auxiliar tem problemas de convergência, mas a estrutura de covariância dos incrementos será mais forte possibilitando condições de momentos mais efetivas para o estimador de Método de Momentos Simulados. O Método de Momentos Eficientes pode ser visto com uma sofisticação do método de Inferência Indireta, utilizando uma forma não-paramétrica de dimensão paramétrica grande para o modelo auxiliar. Neste contexto faz sentido utilizar a informação da estrutura de covariância do fBm conforme discutido no caso do estimador de Momentos Simulados.

Outras modificações possíveis são ampliar o número de modelos estudados no procedimento. Uma modificação simples e bastante interessante é trabalhar com o modelo CIR generalizado estudado por [Chan *et al.*, 1992b], onde o processo de difusão para o caso do fBm seria dado por $dx_t = \phi(x_t - \mu)dt + \sigma x_t^\gamma dB_{\mathbb{H}}(t)$. Como este modelo engloba vários submodelos de processos de difusão utilizados em finanças, seria possível verificar de forma mais completa a validade da metodologia para dados reais.

A metodologia também poderia ser generalizada para modelos de difusão multifatoriais. Nessa categoria a classe de modelos de volatilidade estocástica seria um objetivo natural da metodologia, já que a evidência de memória longa na volatilidade é muito mais forte (e.g. [Bandi & Perron, 2006]) e tem sido documentada na literatura com uma frequência muito maior do que evidências para memória longa na média condicional do processo.

Mas talvez a aplicação mais relevante da metodologia seja a estimação de processos de difusão para dados de alta frequência em finanças. Em dados de alta frequência a estimação de equações diferenciais estocásticas enfrenta um problema grave, que é a contaminação pelos efeitos de microestrutura de mercado. A validade da estimação de vários processos com dados de alta frequência, como por exemplo a estimação da volatilidade integrada do processo (e.g. [Barndorff-Nielsen & Shephard, 2002], [Barndorff-Nielsen & Shephard, 2004]), relacionada ao processo de variação quadrática, é válida quando o intervalo de amostragem tende para zero. Mas exatamente nesta situação o ruído da microestrutura de mercado domina o processo de variação quadrática e as estimações ficam inconsistentes. Este problema tem sido estudado e tentativamente tratado por vários autores na literatura de estimação de volatilidade realizada (e.g. [Bandi & Russell, 2005], [Hansen & Lunde, 2006]).

Mas em geral todos os procedimentos estudados assumem uma estrutura de memória curta para os efeitos de microestrutura de mercado e os procedimentos de inferência em geral usam resultados assintóticos derivados de processos semimartingales, como discutido em [Mykland & Zhang, 2005]. Se os efeitos de microestrutura de mercado forem efetivamente consistentes com um processo de

memória longa, a estimação de processos de difusão com efeitos de microestrutura de mercado poderia ser realizada com o estimador de inferência indireta discutido neste artigo, dada a dificuldade de obtenção dos estimadores de verossimilhança ou baseados em momentos.

Em nosso artigo tratamos apenas de processos de equações diferenciais estocásticas dirigidos por um fBm puro, ou seja, toda a dinâmica de incerteza é direcionada apenas pelo componente do fBm. Mas também existem resultados de existência de condições de não arbitragem para processos mistos, onde o processo é dirigido por uma mistura de um Browniano padrão e um Browniano Fracionário; uma discussão detalhada destes resultados se encontra em [Mishura, 2008]. Neste artigo existem alguns resultados para a estimação de processos mistos Browniano-Browniano Fracionários, mas novamente todos os resultados se referem ao caso de amostragem contínua e novamente não existem resultados para o caso de amostragem discreta.

REFERÊNCIAS

- [Ait-Sahalia, 1996] Ait-Sahalia, Y. 1996. Nonparametric pricing of interest rate derivative securities. *Econometrica*, **64**(Nov.), 527–64. Working Paper, MIT.
- [Ait-Sahalia, 1999] Ait-Sahalia, Y. 1999. Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions. *Journal of Finance*, **54**, 1361–1395.
- [Ait-Sahalia, 2002] Ait-Sahalia, Y. 2002. Maximum-Likelihood Estimation of Discretely-Sampled Diffusions: A Closed-Form Approximation Approach. *Econometrica*, **70**, 223–262.
- [Bachelier, 1900] Bachelier, L. 1900. *Theorie de la Speculation*. English translation by A J Boness in *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. Paul H Cootner, pg 17–78, Cambridge, Mass, MIT press 1967.
- [Bandi & Perron, 2006] Bandi, F., & Perron, B. 2006. Long Memory and the Relation Between Implied and Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, **4**(4), 636–670.
- [Bandi & Russell, 2005] Bandi, F. M., & Russell, J. R. 2005. *Microstructure noise, realized volatility, and optimal sampling*. Working paper, Graduate School of Business, The University of Chicago.
- [Barndorff-Nielsen & Shephard, 2004] Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. 2004. Econometric analysis of realised covariation: High frequency based covariance, regression and correlation in financial economics. *Econometrica*, **72**, 885–925.
- [Barndorff-Nielsen & Shephard, 2002] Barndorff-Nielsen, O.E., & Shephard, N. 2002. Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance. *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 455–457.
- [Bibby & Sorensen, 1995] Bibby, B., & Sorensen, M. 1995. Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli*, **1**, 17–39.
- [Bibby *et al.*, 2007] Bibby, B. M., Jacobsen, M., & Sorensen, M. 2007. *Handbook of Financial Econometrics*. Elsevier. Chap. Estimating Functions for Discretely Sampled Diffusion-Type Models.
- [Bishwal, 2007] Bishwal, J. P. N. 2007. *Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations*. Springer.
- [Brigo & Mercurio, 2006] Brigo, D., & Mercurio, F. 2006. *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer.
- [Campbell *et al.*, 1997] Campbell, J., Lo, A. W., & MacKinlay, A.C. 1997. *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press.
- [Chan *et al.*, 1992a] Chan, K. G., Karolyi, G., Longstaff, F., & Sanders, A. 1992a. An Empirical Comparison of Alternative Models of Short Term Interest Rate. *Journal of Finance*, **47**, 1209–1297.
- [Chan *et al.*, 1992b] Chan, K. G., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., & Sanders, A. B. 1992b. An Empirical Comparison of Alternative Models of Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- [Cheridito, 2003] Cheridito, P. 2003. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance and Stochastics*, **7**(4), 533–553.
- [Chumacero, 1997] Chumacero, R. 1997. Finite sample properties of the Efficient Method of Moments. *Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **2**, 35–51.
- [Cox *et al.*, 1985] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**, 385–408.

- [Decreusefond & Ustunel, 1999] Decreusefond, L., & Ustunel, A. S. 1999. Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion. *Potential Analysis*, **10**, 177–214.
- [Delbaen & Schachermayer, 1994] Delbaen, F., & Schachermayer, W. 1994. A General Version of The Fundamental Theory of Asset Pricing. *Mathematische Annalen*, **300**, 463–250.
- [Delbaen, 2006] Delbaen, F. e Schachermayer, W. 2006. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer.
- [Dieker, 2004] Dieker, T. 2004. *Simulation of Fractional Brownian Motion*. Tech. rept. CWI and University of Tenesse.
- [Duncan *et al.*, 2000] Duncan, T.E., Hu, Y., & Pasik-Duncan, B. 2000. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion. *Siam. J. Control. Optim.*
- [Elerian *et al.*, 2001] Elerian, O., Chib, S., & Shepard, N. 2001. Likelihood Inference for Discretely Observed Diffusion Process. *Econometrica*, **69**, 959–993.
- [Gallant & Tauchen, 2001] Gallant, A. R., & Tauchen, G. 2001. Efficient Method of Moments. *unpublished*, **xx**, xx.
- [Gallant, 2007] Gallant, A. R. Tauchen, G. 2007. *Handbook of Financial Econometrics*. Elsevier. Chap. Simulated Score Methods and Indirect Inference for Continuous-time Models.
- [Gallant & Nychka, 1987] Gallant, R. A., & Nychka, D. W. 1987. Semi-nonparametric Maximum Likelihood estimation. *Econometrica*, **55**, 363–390.
- [Gallant & Tauchen, 1989] Gallant, R. A., & Tauchen, G. 1989. Semionparametric Estimation of conditional constrained heterogenous processes: Asset pricing applications. *Econometrica*, **57**, 1091–1121.
- [Gallant & Tauchen, 1996] Gallant, R. A., & Tauchen, G. 1996. Which Moments to Match. *Econometric Theory*, **12(4)**, 657–681.
- [Genon-Catalot *et al.*, 1992] Genon-Catalot, V., Jentheau, T., & LarÅ©do, C. 1992. Stochastic Volatility Models as hidden Markov models ans statistical applications. *Bernoulli*, **6**, 1051–1079.
- [Ghysels *et al.*, 2003] Ghysels, E., Khalaf, L., & Vodounou, C. 2003. Simulation Based Inference in Moving Average Models. *Annales D Economie et de Statistique*, **69**, 85–89.
- [Gourieroux & Monfort, 1996] Gourieroux, C., & Monfort, A. 1996. *Simulation-Based Econometric Models*. Oxford University Press.
- [Gourieroux *et al.*, 1993] Gourieroux, C. A, Monfort, A., & Renault, E. 1993. Indirect Inference. *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 85–118.
- [Guasoni, 2006] Guasoni, P. 2006. No Arbitrage with Transaction Costs, with Fractional Brownian Motion and Beyond. *Mathematical Finance*, **16**, 569–582.
- [Hansen, 1982] Hansen, L. P. 1982. Large sample properties of Generalized Method of Moments estimators. *Econometrica*, **50**(July), 1029–1054.
- [Hansen & Scheinkman, 1995] Hansen, L. P., & Scheinkman, J. A. 1995. Back to the Future: Generating Moment Implications for continous time Markov processes. *Econometrica*, **63**(4), 767–804.
- [Hansen & Lunde, 2006] Hansen, P., & Lunde, A. 2006. Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Journal of Business and Economic Statistics*, **24**, 127–218.
- [Harrison & Kreps, 1979] Harrison, J M, & Kreps, D. 1979. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, **20**, 381–408.
- [Harrison & Pliska, 1981] Harrison, J M, & Pliska, S. 1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, **11**, 215–260.
- [Heath *et al.*, 1992] Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. 1992. Bond Pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, **60**(1).
- [Hu & Oksendal, 2000] Hu, Y., & Oksendal, B. 2000. *Fractional white noise calculus and application to Finance*. Preprint, University of Oslo.
- [Jacod & Shiryaev, 2002] Jacod, J., & Shiryaev, A. 2002. *Limit Theorems for Stochastic Process (2nd Edition)*. Springer.
- [Jarrow *et al.*, 2007] Jarrow, R., Protter, P., & Sayit, H. 2007. *No-arbitrage without semimartingales*. Unpublished Working Paper.
- [Johanes & Polson, 2005] Johanes, M., & Polson, N. 2005. *Handbook of Financial Econometrics*. Elsevier-North-Holland. Chap. MCMC for Financial Econometrics.

- [Karatzas & Shreve, 1987] Karatzas, I., & Shreve, S. E. 1987. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag.
- [Kessler, 1997] Kessler, M. 1997. Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–22.
- [Kessler, 2000] Kessler, M. 2000. Simple and Explicit Estimating Functions for a Discretely Observed Diffusion Process. *Scandinavian Journal of Statistics*, **27**, 65–82.
- [Kloeden & Platen, 1992] Kloeden, P., & Platen, E. 1992. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [Kolmogorov, 1940] Kolmogorov, A. N. 1940. Wiener'sche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum. *Comptes Rendus (Dklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS (N.S.)*, **26**, 115–118.
- [Le Breton, 1998] Le Breton, A. 1998. Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by fractional Brownian Motion. *Statistics and Probability Letters*, **38**, 263–274.
- [Lund & Andersen, 1997] Lund, J., & Andersen, T. 1997. Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal Of Econometrics*, **77**, 343–377.
- [Mandelbrot & van Ness, 1968] Mandelbrot, B. B., & van Ness, J. W. 1968. Fractional brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, **10**, 422–437.
- [McFadden, 1989] McFadden, D. 1989. A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration. *Econometrica*, **57**, 995–1026.
- [Michaelides & Ng, 2000] Michaelides, A., & Ng, S. 2000. Estimating the Rational Expectations Model of Speculative Storage: A Monte Carlo Comparison of Three Simulation Estimators. *Journal Of Econometrics*, **96**, 231–266.
- [Mishura, 2008] Mishura, Y. 2008. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Process*. Lecture Notes In Mathematics - Springer.
- [Mykland & Zhang, 2005] Mykland, P. A., & Zhang, L. 2005. Comment: A Selective Overview of Nonparametric Methods in Financial Economics. *Statistical Science*, **20(4)**, 347–350.
- [Neunkirch & Nourdin, 2006] Neunkirch, A., & Nourdin, I. 2006. *Exact Rate of convergence is some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian Motion*. Preprint, available online at <http://arxiv.org/abs/math.PR/0601038>.
- [Norros *et al.*, 1999] Norros, I., Valkeila, E., & J., Virtamo. 1999. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results for fractional Brownian motion. *Bernoulli*, **5**, 571 –587.
- [Nourdin, 2005] Nourdin, I. 2005. Schemas d' approximation associes a une equation differentielle dirige par une fonction holderienne; cas du mouvement brownien fractionnaire. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **340**, 611–614.
- [Ohashi, 2007] Ohashi, A. 2007. *Fractional Term Structure Models: No Arbitrage and Consistency*. Unpublished Working Paper.
- [Palma, 2007] Palma, W. 2007. *Long Memory Time Series - Theory and Methods*. Wiley.
- [Pedersen, 1995] Pedersen, A. R. 1995. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*.
- [Percival & Walden, 2000] Percival, D., & Walden, A. 2000. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- [Rogers, 1997] Rogers, L. C. G. 1997. Arbitrage with Fractional Brownian Motion. *Mathematical Finance*, **7(1)**, 95–105.
- [Shiryayev, 1999] Shiryayev. 1999. *Essentials of Stochastic Finance*. World Scientific.
- [Singleton, 2006] Singleton, K. J. 2006. *Empirical Dynamic Asset Pricing*. Princeton University Press.
- [Smith, 1993] Smith, A. 1993. Estimating Nonlinear Time Series Models Using Simulated Vector Autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 63–84.
- [Tkacz, 2001] Tkacz, G. 2001. Estimating the Fractional Order of Integration of Interest Rates Using A Wavelet OLS Estimator. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **5(1)**, 19–32.
- [Zivot & Czellar, 2008] Zivot, E., & Czellar, V. 2008. *Improved Small Sample Inference for Efficient Method of Moments and Indirect Inference Estimators*. available at <http://faculty.washington.edu/ezivot/research/CZ2007Latex2.pdf>.