

## **Regensburger Diskussionsbeiträge zur Wirtschaftswissenschaft**

**Universität Regensburg**

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

# **Auswirkungen unterschiedlicher Assetkorrelationen in Mehr-Sektoren-Kreditportfoliomodellen**

Alfred Hamerle, Michael Knapp, Nicole Wildenauer \*

11. Oktober 2005

Nr. 409

JEL Klassifikation: C1, G21

Schlüsselwörter: Probability of Default, PD, Ausfallwahrscheinlichkeit,  
Assetkorrelation, Ausfallkorrelation, Kreditrisiko, Kreditrisikomanagement

---

\* Prof. Dr. Alfred Hamerle, Dr. Michael Knapp, Dipl.-Kffr. Nicole Wildenauer, Lehrstuhl für Statistik, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Tel.: +49-941-943-2588, Fax: +49-941-943-4936  
Email: [Alfred.Hamerle@wiwi.uni-regensburg.de](mailto:Alfred.Hamerle@wiwi.uni-regensburg.de),  
[Michael.Knapp@wiwi.uni-regensburg.de](mailto:Michael.Knapp@wiwi.uni-regensburg.de), [Nicole.Wildenauer@wiwi.uni-regensburg.de](mailto:Nicole.Wildenauer@wiwi.uni-regensburg.de)  
Internet: <http://www.wiwi.uni-regensburg.de/hamerle>

# **Auswirkungen unterschiedlicher Assetkorrelationen in Mehr-Sektoren-Kreditportfoliomodellen**

## **Zusammenfassung**

Im vorliegenden Beitrag wird untersucht, wie die Assetkorrelation zwischen zwei Sektoren auf einfache Weise berechnet werden kann und wie sich unterschiedliche Korrelationsannahmen auf die Form und Risikomaße von Verlustverteilungen auswirken. Dazu werden Ausfallzeitreihen von zwei us-amerikanischen Sektoren untersucht. Zum einen wird das Segment „Industrieunternehmen“ und zum anderen das Retailsegment „Kreditkarten“ betrachtet. Es wird gezeigt, wie unter Verwendung eines dynamischen Modells die Schuldnerbonität bzw. die Ausfallwahrscheinlichkeit unter Einbeziehung schuldnerspezifischer und makroökonomischer Faktoren geschätzt werden kann. Es stellt sich heraus, dass durch die Einbeziehung vor allem makroökonomischer Größen die Ausfallwahrscheinlichkeit „Point in Time“ prognostiziert und sowohl die Assetkorrelation innerhalb eines Sektors bzw. Risikosegments als auch die intersektorale Korrelation verringert werden können. Dies führt im Allgemeinen zu präziseren Prognosen der Verlustverteilungen.

## **Abstract**

In this paper we focus on the analysis of the effect of the asset correlation between two segments, its basic calculation and its impacts on the risk measures of loss distributions. For an empirical study we examine default histories of two American segments. One is the sector “industry” and the other is the (retail) segment “credit cards”. We show how the borrowers’ creditworthiness and the probability of default can be estimated using issuer-specific and macroeconomic variables in a dynamic approach. Using macroeconomic variables the probability of default can be predicted “point in time”. The asset correlation within a sector as well as the asset correlation between sectors can be reduced leading to a more precise prediction of loss distributions.

## 1 Einleitung

Nicht zuletzt durch die vom Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht erarbeiteten Neuregelungen der Eigenkapitalausstattung wurde der Messung und Steuerung von Kreditrisiken in den letzten Jahren verstärkt Beachtung geschenkt. Den Kreditinstituten wird gestattet, interne Schätzungen wichtiger Determinanten des Kreditrisikos wie Ausfallwahrscheinlichkeit (PD), Loss Given Default (LGD) und Exposure at Default (EAD) zu verwenden. Eine weitere zentrale Größe beim Übergang zum Kreditportfolio sind die Ausfallkorrelationen. Die Modellierung von Ausfallkorrelationen bzw. der Korrelation von Bonitätsveränderungen stellt eine große Herausforderung dar, und es besteht noch Forschungsbedarf.

Zur Beschreibung und Quantifizierung von Kreditportfoliorisiken existiert eine Reihe von Modellen, von denen insbesondere CreditMetrics, CreditRisk+ und CreditPortfolioView größere Verbreitung in der bankbetrieblichen Praxis gefunden haben. Es lässt sich zeigen, dass bei vergleichbarer Spezifikation und einheitlicher Schätzung der Inputparameter sich die Momente der Verteilungen der Ausfallraten in allen drei Modellen ineinander überführen lassen und sich folglich die prognostizierten Verlustverteilungen kaum mehr voneinander unterscheiden.<sup>1</sup>

Im vorliegenden Beitrag werden Mehr-Sektoren-Kreditportfoliomodelle untersucht. Die Inputparameter Ausfallwahrscheinlichkeit, Asset- und Ausfallkorrelation werden anhand von Defaulthistorien mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Dabei werden für die Sektoren jeweils unterschiedliche Modelle angenommen. Innerhalb eines Sektors wird in Analogie zur Basel II-Spezifikation ein Ein-Faktor-Modell mit derselben Assetkorrelation für alle Schuldner des Sektors angenommen. Zur simultanen Ermittlung von Ausfallwahrscheinlichkeiten und -korrelationen werden statistische Defaultmodelle in Form von Faktormodellen spezifiziert, welche systematische und unsystematische Risikokomponenten enthalten. Die systematische Risikokomponente wird in einen beobachtbaren und einen nicht beobachtbaren Teil aufgespalten. Der beobachtbare Teil wird durch

---

<sup>1</sup> Vgl. Koyluoglu/Hickman (1998), Gordy (2000) und Hamerle/Rösch (2005).

makroökonomische Risikofaktoren abgebildet, der nicht beobachtbare Teil wird mit Hilfe von zufälligen Zeiteffekten modelliert. Daneben enthalten die Modelle auch schulnerspezifische Informationen, z.B. in Form von Ratinginformationen. Die unbekanntes Modellparameter werden anhand der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Die Risikoparameter EAD und LGD stehen nicht im Fokus der Analyse und werden in dieser Untersuchung deterministisch vorgegeben.<sup>2</sup>

Bei der Betrachtung mehrerer Sektoren stellt sich die Frage, welche Korrelationen zwischen den Ausfallereignissen von Schuldnern aus verschiedenen Sektoren bzw. Risikosegmenten gelten. Im vorliegenden Beitrag wird empirisch untersucht, welche Auswirkungen unterschiedliche Korrelationsannahmen auf die Schadensverteilung eines Mehr-Sektoren-Kreditportfolios haben. Ferner wird eine einfache Möglichkeit vorgestellt, wie Assetkorrelationen zwischen verschiedenen Sektoren aus den dynamischen Hazardratenmodellen für die Risikosegmente empirisch ermittelt werden können. Die verwendeten Verfahren werden anhand von Datensätzen von Moody's und us-amerikanischen Retailkrediten veranschaulicht und interpretiert.

Dieser Beitrag ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt zwei wird dargestellt, wie die schulnerspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten und –korrelationen geschätzt und Verlustverteilungen prognostiziert werden können. Abschnitt drei umfasst eine Darstellung der verwendeten Daten und der empirischen Ergebnisse. Die Interpretation der Modelle und ihrer Ergebnisse und die Auswertung der empirischen Schadensverteilungen beschließen diesen Abschnitt. Abschnitt vier fasst die Ergebnisse dieses Beitrags zusammen und gibt einen Ausblick.

---

<sup>2</sup> Eine Möglichkeit, den LGD engagementspezifisch zu modellieren findet sich z.B. in Hamerle/Knapp/Wildenaue (2005).

## 2 Statistische Modellierung

### 2.1 Simultane Modellierung von Defaultwahrscheinlichkeiten und -korrelationen

Es wird eine Periode  $t$  – in den meisten Fällen ein Jahr – betrachtet. Die Zustände „Ausfall“ bzw. „Nichtausfall“ von Schuldner  $i$  in der Periode  $t$  werden über die Indikatorvariable  $D_{it}$  modelliert, d.h.

$$D_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Schuldner } i \text{ fällt in Periode } t \text{ aus} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$i \in N_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ .  $N_t$  stellt die „Risikomenge“ dar, die aus denjenigen Schuldnern des betrachteten Risikosegments besteht, die zu Beginn der Periode  $t$  nicht ausgefallen sind.

Das Ausfallereignis kann äquivalent dazu durch Unterschreiten einer bestimmten Schwelle durch eine metrische Variable zu einem Zeitpunkt (in der Zeitperiode)  $t$  modelliert werden. Wegweisend für diese Überlegungen sind die Arbeiten von Merton (1974, 1977) bzw. Black/Scholes (1973). Dort wird angenommen, dass die das Ausfallereignis auslösende Zufallsvariable durch den (vom Zufall abhängigen) Firmenwert  $V_{it}$  eines Unternehmens  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  repräsentiert wird. Dieser setzt sich aus der Summe der Marktwerte von Eigen- und Fremdkapital zusammen. Die Schranke stellt die Höhe des Fremdkapitals dar, wobei vereinfachend angenommen wird, dass das Fremdkapital nur aus einem ungesicherten, nicht kündbaren Zero-Bond-Kredit mit einperiodiger Laufzeit besteht, und dass das Unternehmen während der Laufzeit keine weiteren Wertpapiere emittiert und keine Dividenden an die Anteilseigner ausschüttet. Ist zum Zeitpunkt der Fälligkeit der Firmenwert kleiner als der Nominalbetrag des Kredits, haben die Eigenkapitalgeber das Wahlrecht, aufgrund dieser ökonomischen Überschuldung in Konkurs zu gehen und den Kreditgebern den Marktwert des Unternehmens zu übergeben.

Das Firmenwert-Modell stellt sehr hohe Anforderungen an die Informationen über die Unternehmen, die in der Praxis kaum vorliegen. Neben der genauen Kenntnis der Kapitalstruktur muss der als handelbar unterstellte Firmenwert

jederzeit bestimmbar sein. Gerade bei mittelständischen Unternehmen, die den Großteil der Portfolios der Banken ausmachen, ist dies in aller Regel nicht möglich. Deshalb wird hier das Defaultereignis als exogen gegeben und stets beobachtbar angenommen. Darüber hinaus wird eine das Ausfallereignis auslösende Zufallsvariable  $R_{it}$  ( $i \in N_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ) angenommen, die als „standardized return of a firm’s assets“ interpretierbar ist, jedoch selbst nicht beobachtbar ist. In Analogie zum Firmenwert-Modell wird angenommen, dass das Ausfallereignis genau dann eintritt, wenn  $R_{it}$  eine bestimmte Schranke  $c_{it}$  unterschreitet, d.h.

$$R_{it} < c_{it} \Leftrightarrow D_{it} = 1. \quad (1)$$

Bezüglich der Ausfallschranke werden im Folgenden verschiedene Spezifikationen untersucht.

In Analogie zu den aus dem Kapitalmarktrisikobereich bekannten Index- oder Faktormodellen wird auch hier angenommen, dass sich bei den Kreditausfallrisiken systematische und unsystematische Risikokomponenten unterscheiden lassen.

Im Folgenden wird für die das Ausfallereignis auslösende Zufallsvariable  $R_{it}$  das Modell von CreditMetrics angenommen, das auch der Ermittlung der Risikogewichtungsfunktionen in Basel II zugrunde liegt, d.h.

$$R_{it} = \sqrt{\rho} F_t + \sqrt{1-\rho} U_{it} \quad (2)$$

( $i \in N_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ), wobei  $F_t \sim N(0;1)$  die standardnormalverteilten systematischen, d.h. alle Unternehmen zu einem Zeitpunkt betreffenden und damit nicht diversifizierbaren Risikoquellen, und  $U_{it} \sim N(0;1)$  die standardnormalverteilten unsystematischen, nur jeweils ein Unternehmen betreffenden, und damit diversifizierbaren Risikotreiber darstellen. Es wird angenommen, dass die unsystematischen Risiken verschiedener Unternehmen gemeinsam normalverteilt und unkorreliert sind. Das „Gewicht“ des systematischen Faktors wird mit  $\sqrt{\rho}$  bezeichnet. Die Korrelation der Schwellenwertvariablen  $R_{it}$  und  $R_{jt}$  zweier Unternehmen erhält man als  $\rho$ . Da diese Variablen als normalisierte Renditen des Unternehmenswertes interpretiert werden können, wird  $\rho$  häufig als Assetkorrelation bezeichnet.

Zusammen mit (1) erhält man bei gegebener Schranke  $c_{it}$  in Abhängigkeit des systematischen Risikofaktors  $F_t$  die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit

$$\lambda_{it}(F_t) = P(D_{it} = 1 | F_t) = P(U_{it} < \frac{c_{it} - \sqrt{\rho} F_t}{\sqrt{1-\rho}}) = \Phi(\frac{c_{it} - \sqrt{\rho} F_t}{\sqrt{1-\rho}}). \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Für eine gegebene Realisation  $f_t$  des systematischen Faktors eines Risikosegments sind nur noch die unsystematischen Risiken wirksam, die annahm gemäß unabhängig sind. Damit sind auch die Ausfallereignisse zweier Schuldner in Periode  $t$  unabhängig mit den jeweiligen (bedingten) Auftretenswahrscheinlichkeiten (3).

Bei der Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeiten gemäß (3) ist implizit die zusätzliche Bedingung enthalten, dass in den Vorperioden noch kein Ausfall des Schuldners erfolgt ist. Somit können die Wahrscheinlichkeiten in (3) auch als „zeitdiskrete Hazardraten“ interpretiert werden (vgl. z.B. Hamerle/Tutz, 1989). Die hier betrachteten Modelle repräsentieren einfache zeitdiskrete Versionen der „intensity based models“ (vgl. z.B. Duffie/Singleton, 1999, Jarrow/Turnbull, 1995), die häufig bei Arbitrageansätzen insbesondere zur Bepreisung von ausfallrisikobehafteten Bonds oder bei Kreditderivaten eingesetzt werden. Intensitätsmodelle sind in stetiger Zeit formuliert und stellen Verallgemeinerungen von zeitstetigen Hazardraten-Modellen dar.

Die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten erhält man als Erwartungswert bezüglich der Verteilung von  $F_t$ , d.h.

$$\lambda_{it} = E(\lambda_{it}(F_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{it}(f_t) \varphi(f_t) df_t. \quad (4)$$

Dabei bezeichnet  $\varphi(z)$  die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung. Aufgrund der Normalverteilungsannahmen bzgl.  $F_t$  und  $U_{it}$  folgt

$$\lambda_{it} = \Phi(c_{it}),$$

d.h. der Erwartungswert der bedingten Ausfallrate entspricht der „unbedingten“ Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens der Ausfallsschwelle.

Es wird angenommen, dass der Modellzusammenhang für ein Risikosegment gilt, das von denselben gemeinsamen Risikofaktoren mit denselben Sensitivitäten beeinflusst wird, etwa eine Branche oder ein bestimmtes

Kundensegment. Damit besitzen die latenten Schwellenwertvariablen  $R_{it}$  und  $R_{jt}$  zweier Schuldner des Risikosegments dieselbe Assetkorrelation  $\rho$ .

In unbedingter Betrachtungsweise sind die Ausfälle einer Periode korreliert. Es resultiert

$$\rho(D_{it}, D_{jt}) = \frac{\Phi_2(c_{it}, c_{jt}, \rho) - \lambda_{it}\lambda_{jt}}{\sqrt{\lambda_{it}(1-\lambda_{it})} \sqrt{\lambda_{jt}(1-\lambda_{jt})}}. \quad (5)$$

$\Phi_2(z_1, z_2, \rho)$  stellt dabei die Verteilungsfunktion der zweidimensionalen Normalverteilung mit Korrelationsparameter  $\rho$  dar. Die Ausfallkorrelationen zwischen je zwei Schuldnern sind im Allgemeinen unterschiedlich, da die Ausfallsschwellen schuldnerspezifisch sein können.

Bei der gemeinsamen Betrachtung der Ausfallereignisse der  $N_t$  Schuldner des Risikosegments in der Periode  $t$  erhält man bei gegebenem Wert  $f_t$  des systematischen Risikofaktors

$$P(D_{1t} = d_{1t}, \dots, D_{N_t t} = d_{N_t t} | f_t) = \prod_{i \in N_t} \lambda_{it}(f_t)^{d_{it}} [1 - \lambda_{it}(f_t)]^{(1-d_{it})} \quad (6)$$

mit  $d_{it} \in \{0,1\}$ .

In unbedingter Betrachtungsweise ergibt sich für die gemeinsame Auftretenswahrscheinlichkeit der Ausfallereignisse in Periode  $t$ :

$$P(D_{1t} = d_{1t}, \dots, D_{N_t t} = d_{N_t t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \in N_t} \lambda_{it}(f_t)^{d_{it}} [1 - \lambda_{it}(f_t)]^{(1-d_{it})} \varphi(f_t) df_t. \quad (7)$$

Im nächsten Schritt werden in einer dynamischen Modellierung beobachtbare schuldnerspezifische und systematische Risikofaktoren in den Ansatz integriert.

Die systematischen Risikoquellen werden in einen beobachtbaren und einen nicht beobachtbaren Teil aufgespalten. Die beobachtbaren Komponenten bilden Veränderungen des makroökonomischen Umfelds, insbesondere der konjunkturellen Entwicklung, ab. Gesamtwirtschaftliche Indikatoren wie z.B. Zinssätze, Arbeitslosenquote, Wachstumsrate des BIP, Auftragseingänge oder Geschäftsklimaindizes spielen dabei eine zentrale Rolle. Außerdem stellt sich heraus, dass die wesentlichen makroökonomischen Risikotreiber mit einer



Zeitverzögerung von ein bis zwei Jahren auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten wirken, vgl. hierzu auch Rösch (2003) und Hamerle/Liebig/Rösch (2003). Damit kann die Modellierung bzw. Prognose der Ausfallwahrscheinlichkeiten auf der Basis bereits bekannter Werte dieser Risikofaktoren erfolgen. Die beobachtbaren Komponenten des systematischen Risikos werden im Vektor  $\mathbf{z}_{t-1}$  zusammengefasst. Dabei können einige Werte auch aus weiter zurückliegenden Zeitperioden stammen. Daneben verbleibt jedoch im Allgemeinen ein nicht beobachtbarer Teil des systematischen Risikos im Modell, der wieder durch den zeitspezifischen „Random Effect“  $F_t$  repräsentiert wird. Dabei kann es sich beispielsweise um kontemporär wirkende systematische Risikofaktoren handeln, deren Werte zum Zeitpunkt des Ratings bzw. der Erstellung der Prognosen der Defaultwahrscheinlichkeiten noch nicht vorliegen. Die Sensitivitäten bezüglich der beobachteten Risikofaktoren werden im Vektor  $\gamma$  zusammengefasst.

Bei den schulnerspezifischen Risikofaktoren kann es sich um Ratinginformationen, etwa in Form von Ratingklassen oder individuellen Bonitätscores, handeln. Es kommen aber auch Faktoren wie beispielsweise Größenklasse, Rechtsform oder Alter des Unternehmens in Betracht. In jedem Fall wird davon ausgegangen, dass die Informationen in der Vorperiode  $t-1$  gemessen werden. Sie werden im Vektor  $\mathbf{x}_{i,t-1}$  zusammengefasst. Die zugehörigen Sensitivitäten sind im Parametervektor  $\beta$  enthalten.

Bei der dynamischen individuellen Modellierung werden für jeden Schuldner individuelle zeitabhängige Ausfallschranken  $c_{it}$  festgelegt, die mit Hilfe von (zeitverzögerten) schulnerspezifischen und systematischen Risikofaktoren folgendermaßen modelliert werden:

$$c_{it} = \beta_0 + \beta' \mathbf{x}_{i,t-1} + \gamma' \mathbf{z}_{t-1}. \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung von (3) erhält man für die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten die Probitspezifikation

$$\lambda_{it}(f_t) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta' \mathbf{x}_{i,t-1} + \gamma' \mathbf{z}_{t-1} - \sqrt{\rho} f_t}{\sqrt{1-\rho}}\right). \quad (9)$$

Zum Vergleich werden zwei weitere Spezifikationen der Ausfallschranke  $c_{it}$  untersucht. Im ersten Fall werden ausschließlich schulderspezifische Informationen einbezogen, d.h.

$$c_{it} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{i,t-1}. \quad (10)$$

Da in (8) ein Teil des systematischen Risikos erklärt wird, sollte dieser Ansatz im Vergleich zu (10) zu einer geringeren Asset- bzw. Ausfallkorrelation führen. Als Benchmark wird schließlich noch der Fall

$$c_{it} = \beta_0 \quad (11)$$

untersucht, wobei zeitkonstante homogene Ausfallwahrscheinlichkeiten der Schuldner des betrachteten Risikosegments unterstellt werden.

## 2.2 Parameterschätzung

Zur Modellierung der Defaultverteilung für gegebene Anzahl  $N_t$  der Schuldner in einem Segment (z.B. Branche) in der Periode  $t$  ist die Annahme der Unabhängigkeit der unsystematischen Risiken zentral. Für gegebene Realisierungen  $f_t$  der nicht beobachteten systematischen Risikokomponenten sowie von  $\mathbf{x}_{i,t-1}$  und  $\mathbf{z}_{t-1}$  gilt

$$P(D_{1t} = d_{1t}, \dots, D_{N_t t} = d_{N_t t} | f_t) = \prod_{i \in N_t} \lambda_{it}(f_t)^{d_{it}} [1 - \lambda_{it}(f_t)]^{(1-d_{it})}. \quad (12)$$

Dabei sind  $d_{it} \in \{0,1\}$  und  $\lambda_{it}(f_t)$  gegeben durch die Probitspezifikation (9) bzw. die in (10) und (11) festgelegten Spezialfälle.

Da  $f_t$  nicht beobachtet werden kann, ist (12) zur Parameterschätzung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode nicht einsetzbar. Man benötigt dazu die unbedingte Verteilung (7) der Ausfälle.

Werden alle  $T$  Zeitperioden einbezogen, erhält man für die Log-Likelihood-Funktion des Gesamtmodells

$$\begin{aligned}
& l(\beta_0, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \rho) \\
& = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \in N_t} \lambda_{it}(f_t)^{d_{it}} [1 - \lambda_{it}(f_t)]^{(1-d_{it})} \varphi(f_t) df_t \right\}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (13) kann mit numerischen Methoden, etwa der Gauss-Hermite-Prozedur, ermittelt werden.

Das Maximum-Likelihood-Prinzip besteht darin, bei Vorliegen der Daten (Ausfallindikatoren  $d_{it}$  und Risikofaktoren  $\mathbf{x}_{i,t-1}$ ,  $\mathbf{z}_{t-1}$ ,  $i \in N_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ) die Parameterschätzwerte  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  und  $\hat{\rho}$  so zu wählen, dass die Log-Likelihood-Funktion maximal wird und damit die vorliegenden Daten die höchste Auftretenswahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte haben. Als notwendige Bedingung (first order condition) ergibt sich das Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Log-Likelihood-Funktion nach den Parametern. Die resultierenden Maximum-Likelihood-Gleichungen sind in der Regel nicht explizit lösbar und müssen mit iterativen numerischen Methoden (z.B. Quasi-Newton-Verfahren) gelöst werden.

Ein Vorteil der Maximum-Likelihood-Methode besteht darin, dass sie gewisse Optimalitätseigenschaften aufweist. Diese gelten allerdings nur für große Stichprobenumfänge, was im Bereich der Kreditrisikomodellierung (im Querschnitt) praktisch immer erfüllt ist. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, Varianzschätzungen für die ML-Schätzungen anzugeben und mit deren Hilfe Tests für die Parameter oder Modellteile durchzuführen bzw. Konfidenzintervalle zu konstruieren. Für eine umfassende Theorie der ML-Schätzungen vergleiche man Davidson/MacKinnon (1993).

### 2.3 Simultane Modellierung für verschiedene Risikosegmente

Bisher wurde vorausgesetzt, dass das statistische Defaultmodell für ein spezielles Risikosegment, z.B. eine Branche, eine Branche in einem Land bzw. einer Region oder ein bestimmtes Kundensegment gilt. Eine derartige Modellierung ist sinnvoll, da insbesondere makroökonomische Risikofaktoren in verschiedenen Segmenten mit unterschiedlichen Sensitivitäten oder Zeitverzögerungen wirken können. So können bestimmte Risikofaktoren in

einem Segment gar nicht wirksam sein, während sie in einem anderen Segment einen dominierenden Einfluss besitzen.

Im Folgenden werden zwei Risikosegmente betrachtet, die der Einfachheit halber mit 1 und 2 indiziert werden. Für Schuldner  $i$ , der aus Segment 1 stammt, gelte entsprechend (9) die Spezifikation

$$\lambda_{it1}(f_t^{(1)}) = \Phi \left( \frac{\beta_0^{(1)} + \beta_1' \mathbf{x}_{i,t-1}^{(1)} + \gamma_1' \mathbf{z}_{i,t-1}^{(1)} - \sqrt{\rho_1} f_t^{(1)}}{\sqrt{1 - \rho_1}} \right),$$

für Schuldner  $j$ , der annahmegemäß aus Segment 2 stammt, gelte

$$\lambda_{jt2}(f_t^{(2)}) = \Phi \left( \frac{\beta_0^{(2)} + \beta_2' \mathbf{x}_{j,t-1}^{(2)} + \gamma_2' \mathbf{z}_{j,t-1}^{(2)} - \sqrt{\rho_2} f_t^{(2)}}{\sqrt{1 - \rho_2}} \right). \quad (14)$$

Dabei können  $\mathbf{x}_{i,t-1}^{(1)}$  und  $\mathbf{x}_{j,t-1}^{(2)}$  bzw.  $\mathbf{z}_{i,t-1}^{(1)}$  und  $\mathbf{z}_{j,t-1}^{(2)}$  unterschiedliche Komponenten enthalten und die Anzahl der Komponenten kann ebenfalls verschieden sein.

Im nächsten Schritt ist die gemeinsame Verteilung von  $(f_t^{(1)}, f_t^{(2)})$  zu spezifizieren. Es wird eine zweidimensionale Normalverteilung mit  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  und  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  unterstellt, so dass lediglich der Korrelationskoeffizient  $\rho_{12}$  zu bestimmen ist.

### 1. Unabhängigkeitsannahme: $\rho_{12} = 0$

In diesem Fall wird unterstellt, dass die nicht beobachteten systematischen Faktoren unabhängig sind. Dann sind auch die latenten Schwellenwertvariablen und die Ausfallereignisse für Schuldner aus verschiedenen Risikosegmenten nicht mehr korreliert.

### 2. Konservativer Ansatz: $\rho_{12} = 1$

Eine konservative Vorgehensweise besteht darin, die Faktorkorrelation gleich Eins zu setzen. Aus statistischer Sicht ist dies gleichbedeutend damit, dass in beiden Risikosegmenten derselbe nicht beobachtbare systematische Faktor wirkt, d.h. es wird ein Ein-Faktor-Modell unterstellt. In diesem Fall erhält man für die Assetkorrelation von zwei Schuldnern  $i$  und  $j$  aus verschiedenen Risikosegmenten

$$\rho_{ij} = \sqrt{\rho_1 \rho_2}. \quad (15)$$

### 3. Empirische Schätzung der Faktorkorrelation

Im Allgemeinen ergibt sich

$$\rho_{ij} = \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_{12}}. \quad (16)$$

Eine nahe liegende Möglichkeit besteht darin, aus den geschätzten Realisierungen  $\hat{f}_t^{(1)}$  und  $\hat{f}_t^{(2)}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , eine Schätzung der Faktorkorrelation  $\rho_{12}$  zu berechnen. Dies setzt allerdings die Verfügbarkeit von hinreichend langen Zeitreihen voraus.

## 2.4 Prognose der Verlustverteilung

Hat man je nach Modellspezifikation die unbekannt Parameter geschätzt, können mit Hilfe dieser Schätzungen Prognosen ermittelt werden. Umfasst der Schätzzeitraum  $T$  Perioden, so betreffen die Prognosen die unmittelbar bevorstehende Periode  $T + 1$ . Mit Hilfe der in Periode  $T$  gemessenen Werte  $x_{iT}$  und  $z_T$  der Risikofaktoren erhält man individuelle PD-Prognosen

$$\hat{\lambda}_{i,T+1} = \hat{\lambda}(x_{iT}, z_T).$$

Für Kreditrisikomodelle sind letztendlich die Prognosen der Schadensverteilung für die nächste Zeitperiode (z.B. Jahr)  $T + 1$  zu ermitteln. Anhand der Schadensverteilung können Risikomaße wie Expected Loss, Value at Risk (VaR) oder Conditional Value at Risk (CVaR) berechnet werden.<sup>3</sup>

Im vorliegenden Beitrag wird in Anlehnung an den IRB-Basisansatz von Basel II stets eine Loss (Rate) Given Default von 45% unterstellt, da dieser Risikoparameter nicht im Fokus der Analyse steht. Betrachtet wird ein homogenes Portfolio mit einem EAD von 100 Geldeinheiten pro Schuldner.

Für den prognostizierten Verlust in der Folgeperiode  $T + 1$  erhält man

$$L_{T+1} = \sum_{i \in N_{T+1}} D_{i,T+1} EAD_{i,T+1} LGD_{i,T+1},$$

---

<sup>3</sup> Der Value at Risk ist hier als Quantil der Verlustverteilung zu einem bestimmten Niveau, der Conditional Value at Risk als bedingter Erwartungswert der Verluste, die größer als das entsprechende Quantil der Verlustverteilung sind, definiert.

dabei gibt  $N_{T+1}$  die Menge der Schuldner im Portfolio zu Beginn der Periode  $T+1$  an.

Als „relativen“ prognostizierten Verlust als Anteil am Gesamtexposure erhält man

$$L_{T+1}^* = \frac{L_{T+1}}{\sum_{i \in N_{T+1}} EAD_{i,T+1}}.$$

Da die Exposures fest vorgegeben sind, bildet die gemeinsame Verteilung (7) der prognostizierten Ausfallereignisse die Grundlage zur Ermittlung der prognostizierten Verlustverteilung. Man erhält

$$\begin{aligned} & \hat{P}(D_{1,T+1} = d_{1,T+1}, \dots, D_{N_{T+1},T+1} = d_{N_{T+1},T+1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \in N_{T+1}} \hat{\lambda}_{i,T+1}(f_{T+1})^{d_{i,T+1}} [1 - \hat{\lambda}_{i,T+1}(f_{T+1})]^{(1-d_{i,T+1})} \varphi(f_{T+1}) df_{T+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Bei der dynamischen individuellen Modellierung muss die Prognoseverteilung im Allgemeinen per Simulation ermittelt werden, da in (13)  $2^{N_{T+1}}$  verschiedene Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind, welche dann die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten von  $L_{T+1}$  festlegen.

### 3 Empirische Untersuchungen

#### 3.1 Datenbasis

Für die empirischen Untersuchungen werden zwei Sektoren untersucht. Ein Sektor umfasst Schuldner der Branche „Industrieunternehmen“<sup>4</sup> aus Moody's Default Risk Service. Da die Ratingausprägungen von Moody's im Jahr 1982 wesentlich verändert wurden, wird bei diesen empirischen Untersuchungen ein Datensatz verwendet, der Beobachtungen der Jahre 1983 bis 2003 enthält. Ein Großteil der von Moody's gerateten Schuldner stammt aus den USA, daher werden auch nur diese Schuldner bei den empirischen Auswertungen berücksichtigt. Dieser Sektor enthält nach den o. g. Einschränkungen ca. 3.800 geratete Schuldner und ca. 27.500 „Unternehmensjahre“, d.h. Beobachtungen. Als Ausfallzeitpunkt wird der Zeitpunkt des erstmaligen Ausfalls eines Schuldners definiert.

In der empirischen Untersuchung dieses Sektors wird u.a. der Einfluss der nachfolgenden schulnerspezifischen Einflussgrößen  $x_{i,t-1}$  untersucht:

- Rating des Schuldners: Das Rating von Moody's wird als kategoriale Einflussgröße betrachtet. Dabei werden für die Untersuchungen verschiedene der 23 Ratingklassen zusammengefasst, da die einzelnen Ratingklassen für eine separate Betrachtung nicht ausreichend besetzt sind. Es werden die Ratingklassen mit einem Emittentenrating von „Aaa“ bis „A3“, die Ratingklassen mit „Baa1“ bis „Baa3“, die Ratingklassen mit „Ba1“ bis „Ba3“, die Ratingklassen mit „B1“ bis „B3“ und die Ratingklassen „Caa1“ bis „C“ zusammengefasst. Das Emittentenrating fließt mit einem Jahr Zeitverzögerung in die Analyse ein.
- Sitzland des Schuldners: Dieses wird durch die Beschränkung auf us-amerikanische Daten berücksichtigt.

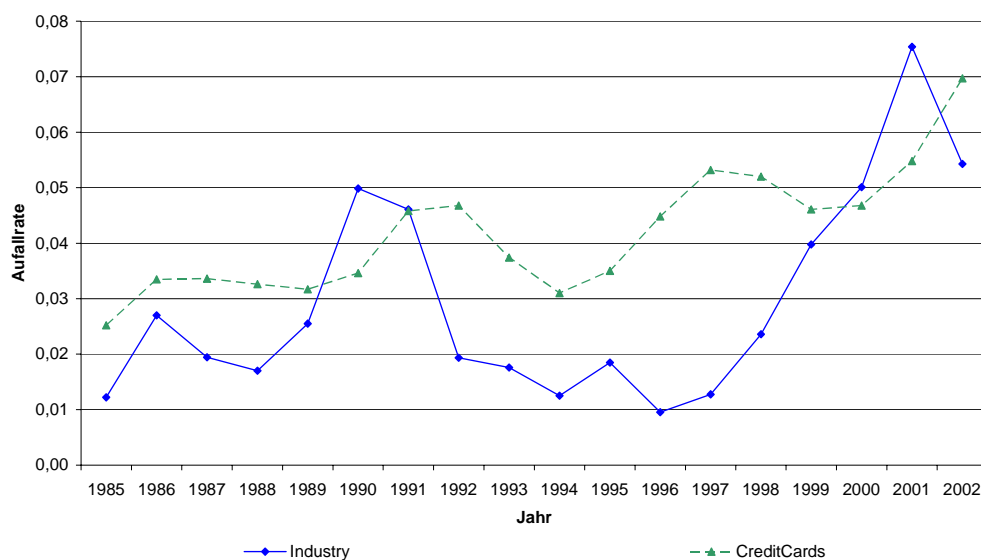
---

<sup>4</sup> Die Branche „Industrieunternehmen“ umfasst die Branchen „Industrial“, „Transportation“ und „Other Non-Bank“ der zwölf Klassen umfassenden Brancheneinteilung von Moody's.

- Darüber hinaus wird die zeitverzögerte Ausfallrate in der Branche „Industrieunternehmen“ in das Modell aufgenommen.

Zur Modellierung eines zweiten Sektors werden us-amerikanische Daten von Retailkrediten verwendet. Diese stammen aus den vierteljährlichen „Consolidated Reports of Condition and Income“ des “Federal Financial Institution Examination Council”<sup>5</sup>. Dort werden die jährlichen “charge-off-rates”<sup>6</sup> veröffentlicht, die für us-amerikanische Banken erhoben werden. Dabei wird die Annahme getroffen, dass die “charge-off-rates” die Ausfallraten eines Jahres gut approximieren können.<sup>7</sup> Diese Daten umfassen neben Hypothekarkrediten für Wohnimmobilien auch Kreditkartenkredite und andere Konsumentenkredite. Für diese Untersuchung werden Kreditkartendarlehen verwendet. Die Daten sind von 1985 bis 2002 vorhanden. Für die Modellschätzung wird von einer Stichprobe von 10.000 Schuldnern ausgegangen.

Die folgende Grafik gibt einen Überblick über den Verlauf der Ausfallraten der beiden Sektoren:



**Abbildung 1: Ausfallraten in den Sektoren „Industrieunternehmen“ und „Kreditkarten“**

<sup>5</sup> <http://www.ffiec.gov>.

<sup>6</sup> Die „charge-off-rates“ können mit „Ausbuchungen“ übersetzt werden.

<sup>7</sup> Vgl. Rösch/Scheule (2004), S. 19 f.



Betrachtet man die durchschnittlichen jährlichen Ausfallraten im Sektor „Kreditkarten“ und in der Branche „Industrieunternehmen“, so erkennt man, dass die Ausfallraten im Zeitablauf zyklisch schwanken. Außerdem wird ersichtlich, dass in beiden Sektoren zwar eine ähnliche, keinesfalls aber eine gleichläufige zyklische Entwicklung vorliegt. Dies deutet auf unterschiedliche systematische Risiken hin. Daher versucht man, mit Hilfe makroökonomischer Einflussgrößen die konjunkturellen Schwankungen der Ausfallraten abzubilden. Hierzu werden verschiedene potenzielle makroökonomische Einflussgrößen wie z.B. Zinssätze, Arbeitsmarktzahlen, Umsätze bzw. Auftragseingänge in verschiedenen Branchen, Wirtschaftsindikatoren wie Bruttoinlandsprodukt, Konjunkturindikatoren wie Konsumentenpreisindex oder der Index des Verbrauchervertrauens, Inflationsdaten, Aktienindizes und die Ausfallrate der Schuldner in der Branche „Industrieunternehmen“ untersucht. Diese Einflussgrößen gehen mit mindestens einem Jahr Zeitverzögerung in die Auswertungen ein. Die Berücksichtigung dieser zeitabhängigen Einflussgrößen ermöglicht tendenziell eine „Point in Time“-Modellierung der Ausfallwahrscheinlichkeit.

### **3.2 Empirische Ergebnisse der Parameterschätzung**

Es werden drei unterschiedliche Modellspezifikationen für die Branche „Industrieunternehmen“ untersucht. In Modell A werden nur die Konstante und der zufällige Zeiteffekt geschätzt (vgl. (11)), Modell B beinhaltet zusätzlich schuldnerepezifische Einflussgrößen (vgl. (10)). In Modell C, das auch als „Point in Time“-Modell bezeichnet werden kann, fließen zusätzlich makroökonomische Einflussfaktoren ein (vgl. (8)).<sup>8</sup>

Die unten angegebene Tabelle fasst die wichtigsten Modellergebnisse zusammen:

---

<sup>8</sup> Vgl. auch Walter (2004).

<b>Modellparameter</b>	<b>Modell A Effekt (p-Value)</b>	<b>Modell B Effekt (p-Value)</b>	<b>Modell C Effekt (p-Value)</b>
$\sqrt{\rho}$	0,2418 ( $\leq 0,0001$ )	0,2346 ( $\leq 0,0001$ )	0,1245 (0,0009)
Konstante	-1,9609 ( $\leq 0,0001$ )	-0,8374 ( $\leq 0,0001$ )	-1,6319 ( $\leq 0,0001$ )
Emittentenrating „Aaa“ bis „A3“ (t-1)		-2,6267 ( $\leq 0,0001$ )	-2,6775 ( $\leq 0,0001$ )
„Emittentenrating „Baa1“ bis „Baa3“ (t-1)		-1,8768 ( $\leq 0,0001$ )	-1,9081 ( $\leq 0,0001$ )
„Emittentenrating „Ba1“ bis „Ba3“ (t-1)		-1,3663 ( $\leq 0,0001$ )	-1,3960 ( $\leq 0,0001$ )
„Emittentenrating „B1“ bis „B3“ (t-1)		-0,6974 ( $\leq 0,0001$ )	-0,7123 ( $\leq 0,0001$ )
(kurzfristiger) Geldmarktzinssatz (t-1)			0,08905 ( $\leq 0,0001$ )
Ausfallrate in der Branche „Industrieunternehmen“ (in Prozent) (t-1)			0,08846 (0,0002)

**Tabelle 1: Ergebnisse der Modellschätzungen für den Sektor „Industrieunternehmen“**

Die Ergebnisse der Modelle B und C können folgendermaßen interpretiert werden:

Erwartungsgemäß gibt die aufsteigende Reihenfolge der negativen Koeffizienten für die Ratingklassen die sukzessive Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei Verschlechterung der Bonität wieder.

In Modell C wird versucht, die konjunkturellen Schwankungen der Ausfallwahrscheinlichkeit durch die zusätzliche Aufnahme von makroökonomischen Faktoren abzubilden. Diese Einflussfaktoren können wie folgt interpretiert werden:

Zur Erklärung zyklischer Schwankungen der PDs wird die durchschnittliche Ausfallrate des Bondmarkts in der Branche der Industrieunternehmen mit einem Jahr Zeitverzögerung als mögliche Proxy für den konjunkturellen Einfluss im Modell berücksichtigt. Je höher die um ein Jahr zeitverzögerte durchschnittliche Ausfallrate des Bondmarkts in der Branche „Industrieunternehmen“ ist, desto signifikant höher ist ceteris paribus die Ausfallwahrscheinlichkeit.

Als weitere Proxy für die konjunkturelle Entwicklung fließt in diesem Modell der zeitverzögerte (kurzfristige) Geldmarktzinssatz ein. Ein höherer Geldmarktzinssatz führt ceteris paribus zu einer signifikant höheren Ausfallwahrscheinlichkeit.

Im Sektor „Kreditkarten“ werden zwei verschiedene Modellspezifikationen untersucht. In Modell D werden nur die Konstante und der sich ergebende zufällige Zeiteffekt geschätzt, in Modell E fließen zusätzlich noch makroökonomische Einflussfaktoren ein. Für diesen Datensatz sind keine schuldnerspezifischen Informationen vorhanden.

<b>Modellparameter</b>	<b>Modell D Effekt (p-Value)</b>	<b>Modell E Effekt (p-Value)</b>
$\sqrt{\rho}$	0,1167 ( $\leq 0,0001$ )	0,03904 ( $\leq 0,0001$ )
Konstante	-1,7290 ( $\leq 0,0001$ )	-2,8666 ( $\leq 0,0001$ )
Refinanzierungszinssatz (t-2)		0,03620 ( $\leq 0,0001$ )
Konsumentenpreisindex (t-1)		0,006379 ( $\leq 0,0001$ )

**Tabelle 2: Ergebnisse der Modellschätzungen für den Sektor „Kreditkarten“**

Die Ergebnisse von Modell E können wie folgt interpretiert werden:

Der Refinanzierungszinssatz, der mit einer Zeitverzögerung von zwei Jahren in das Modell einfließt, hat einen positiven Einfluss auf die Ausfallwahrscheinlichkeit. Steigt der Refinanzierungszinssatz, so steigt ceteris paribus auch die Ausfallwahrscheinlichkeit. Eine analoge Interpretation ergibt sich für den Konsumentenpreisindex des Vorjahres.

Die Assetkorrelation der Sektoren „Industrieunternehmen“ und „Kreditkarten“ variiert je nach betrachtetem Modell. Verwendet man für beide Sektoren das Modell, das keine makroökonomische Information enthält, so erhält man eine empirische Faktorkorrelation zwischen den Realisierungen der zufälligen zeitspezifischen Effekte  $\hat{f}_t^{(1)}$  und  $\hat{f}_t^{(2)}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , der Modelle B und D von -0,01261, die jedoch nicht signifikant ist. Man kann daher von Unkorreliertheit der beiden Sektoren ausgehen.

Berücksichtigt man in beiden Sektoren die makroökonomischen Informationen, d.h. vergleicht man die Modelle C und E, so sinkt die empirische Faktorkorrelation auf -0,42957. Diese ist auf dem 10%-Niveau signifikant. Die Assetkorrelation zwischen Schuldnern aus den beiden Segmenten beträgt dann -0,0021.

### 3.3 Simulation der Schadensverteilung

Die Ermittlung der prognostizierten Schadensverteilung erfolgt mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation, wobei die Schadensverteilung für das Jahr 2003 prognostiziert wird. Dazu wird ein Portfolio aus 1.566 im Jahr 2002 nicht ausgefallenen Schuldnern des Sektors „Industrieunternehmen“ und 1.500 Schuldnern des Sektors „Kreditkarten“ betrachtet. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

- Schritt 1: Zunächst werden die Realisierungen der zufälligen Effekte der beiden Sektoren  $\hat{f}_t^{(1)}$  und  $\hat{f}_t^{(2)}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , gezogen. Dabei kann die Ziehung korreliert oder unkorreliert erfolgen.<sup>9</sup> Bei der korrelierten

---

<sup>9</sup> In welchen Simulationen die zufälligen zeitspezifischen Effekte korreliert bzw. unkorreliert gezogen werden, wird in Abschnitt 3.4 erläutert.

Ziehung der zufälligen Effekte wird eine multivariate Normalverteilung von  $(f_t^{(1)}, f_t^{(2)})$  angenommen, wobei die Korrelation zwischen diesen zufälligen Effekten empirisch aus den Realisationen der zufälligen Effekte bestimmt wird.

- Schritt 2: Anschließend wird die bedingte PD für jeden Schuldner unter Berücksichtigung des in Schritt 1 gezogenen zufälligen Effekts gemäß Formel (14) ermittelt. Aufgrund der bedingten Unabhängigkeit werden  $N_{T+1}$  Bernoulli-Ereignisse mit diesen bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten erzeugt und unter Einbeziehung der zugehörigen Exposures at Default und des Loss Given Default der Portfolioverlust, d.h. die zugehörige Schadensrealisierung, berechnet.
- Die Schritte 1 und 2 werden 1.000.000 mal wiederholt und die Häufigkeitsverteilung des simulierten Portfolioverlusts ermittelt.

### 3.4 Simulationsergebnisse und Interpretation

In dieser Untersuchung werden drei unterschiedliche Konstellationen zur Simulation der Schadensverteilung betrachtet. Dabei wird jeweils das Portfolio aus Abschnitt 3.3 betrachtet.

#### Simulation 1:

Zunächst wird die bedingte PD ohne Berücksichtigung der makroökonomischen Information, d.h. unter Verwendung der Modelle B und D aus Abschnitt 3.2 prognostiziert. Da die empirische Korrelation nicht signifikant ist, wird sie für die Simulationen auf Null gesetzt. Die zufälligen zeitspezifischen Effekte  $\hat{f}_{T+1}^{(1)}$  und  $\hat{f}_{T+1}^{(2)}$  der beiden Sektoren werden unkorreliert gezogen.

#### Simulation 2:

Die bedingte PD wird unter Berücksichtigung der makroökonomischen Faktoren prognostiziert. Dabei werden die Modelle C und E aus Abschnitt 3.2 verwendet. Die zufälligen zeitspezifischen Effekte  $\hat{f}_{T+1}^{(1)}$  und  $\hat{f}_{T+1}^{(2)}$  werden unter Verwendung der empirischen Korrelation von -0,42957 gezogen.

**Simulation 3:**

Im Unterschied zu Simulation 2 werden die zufälligen zeitspezifischen Effekte  $\hat{f}_{T+1}^{(1)}$  und  $\hat{f}_{T+1}^{(2)}$  der beiden Sektoren unkorreliert gezogen. Diese Simulation soll verdeutlichen, welcher Teil der Reduzierung des VaR auf die genauere PD-Schätzung, und welcher auf eine negative Korrelation zwischen den zufälligen zeitspezifischen Effekten  $\hat{f}_{T+1}^{(1)}$  und  $\hat{f}_{T+1}^{(2)}$  zurückzuführen ist.

**Simulation 4:**

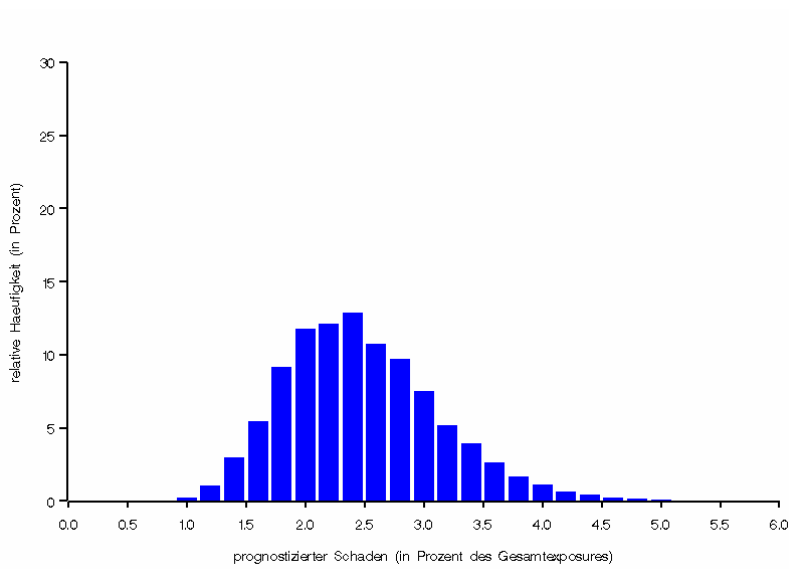
Die zufälligen zeitspezifischen Effekte  $\hat{f}_{T+1}^{(1)}$  und  $\hat{f}_{T+1}^{(2)}$  der beiden Sektoren werden im Unterschied zu Simulation 2 mit einer Korrelation von Eins gezogen. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass ein Ein-Faktor-Modell vorliegt.

Man erhält folgende Kenngrößen für die vier verschiedenen Simulationen der Schadensverteilung, wobei die Risikoparameter als prozentualer Anteil am Gesamtexposure angegeben werden:

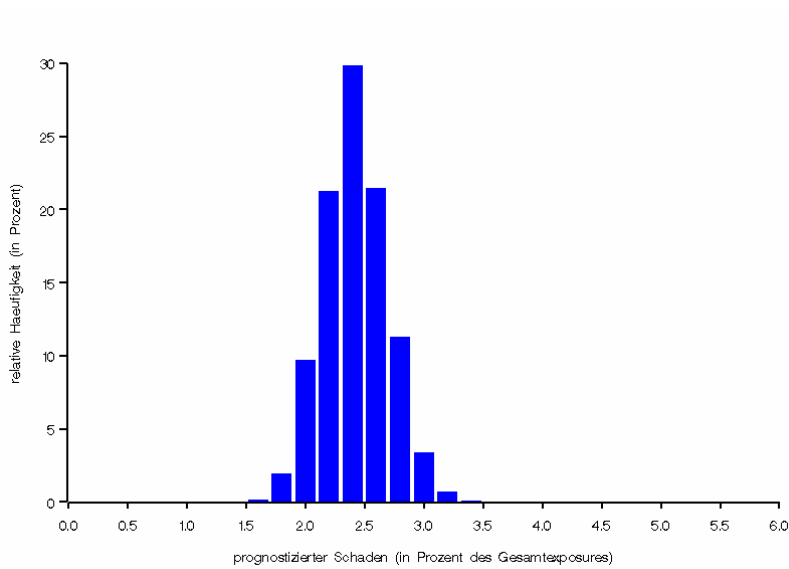
Portfolioschaden als Anteil des Exposures	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Simulation 4
Expected Loss	2,4790%	2,4203%	2,4359%	2,4361%
VaR (99%)	4,3004%	3,0822%	3,2583%	3,4491%
VaR (99,9%)	5,1076%	3,3170%	3,5812%	3,8454%
Differenz zwischen VaR (99%) und Expected Loss	1,8214%	0,6619%	0,8224%	1,0130%
Differenz zwischen VaR (99,9%) und Expected Loss	2,6287%	0,8967%	1,1453%	1,4093%
CVaR (99%)	4,6635%	3,1869%	3,4023%	3,6224%
CVaR (99,9%)	5,4486%	3,4065%	3,7132%	3,9963%
Standardabweichung	0,6535%	0,2691%	0,3224%	0,3911%

**Tabelle 3: Darstellung der Simulationsergebnisse**

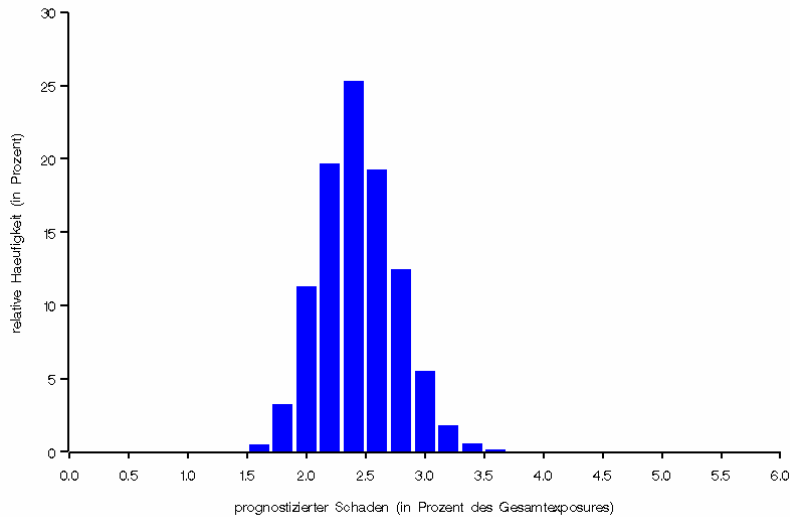
Grafisch lassen sich die Verlustverteilungen folgendermaßen darstellen:



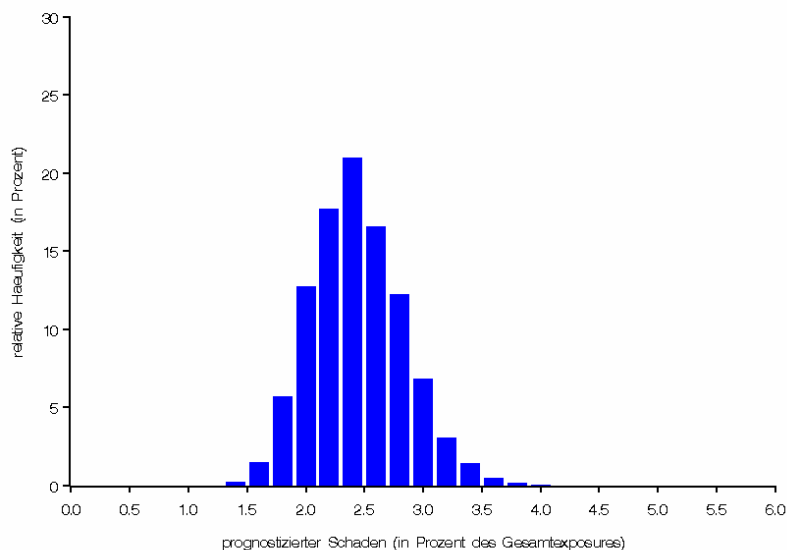
**Abbildung 2: Verlustverteilung Simulation 1 (ohne makroökonomische Faktoren, unkorrelierte Sektoren)**



**Abbildung 3: Verlustverteilung Simulation 2 (mit makroökonomischen Faktoren, empirische Korrelation  $-0,42957$  zwischen den Sektoren)**



**Abbildung 4: Verlustverteilung Simulation 3 (mit makroökonomischen Faktoren, unkorrelierte Sektoren)**



**Abbildung 5: Verlustverteilung 4 (mit makroökonomischen Faktoren, Korrelation von 1 zwischen den Sektoren)**

Bei einem Vergleich der Verlustverteilungen erkennt man, dass die Expected Losses in Simulation 2, 3 und 4 bis auf zufällige Abweichungen gleich groß sind. Der etwas höhere Expected Loss in Simulation 1 ist auf die PD-Modellierung ohne makroökonomische Einflussgrößen zurückzuführen. Dies führt vor allem im Fall von Modell B für den Sektor „Industrieunternehmen“ dazu, dass die prognostizierte bedingte PD größer ist als bei Verwendung des



„Point in Time“-Modells C, das in den Simulationen 2, 3 und 4 für diesen Sektor verwendet wird.

Betrachtet man den VaR (99%), so sinkt dieser von 4,3004% in Simulation 1 auf 3,2583% in Simulation 3. Dieser Effekt beruht auf der Einbeziehung der makroökonomischen Faktoren in beiden Sektoren.<sup>10</sup> Der VaR (99%) sinkt in Simulation 2 auf 3,0822%. Dies ist auf die Verwendung der (negativen) empirischen Korrelation zwischen beiden Sektoren zurückzuführen, durch die ein gewisser zusätzlicher „Diversifikationseffekt“ im Portfolio erreicht wird. Aufgrund der sehr niedrigen Assetkorrelationen ist dieser Effekt aber bei weitem nicht so hoch wie er bei der Analyse von Marktpreisrisiken anzutreffen ist.

In Simulation 4 steigt der VaR (99%) auf 3,4491%. Dies ist auf die angenommene Faktorkorrelation von 1 zwischen den beiden Sektoren zurückzuführen. Daher wirken sich extreme Ausprägungen des zufälligen Effekts und damit auch hohe bzw. geringe PDs auf die Verluste des Portfolios in besonderem Maße aus. Dies spiegelt sich in einer breiteren Verlustverteilung wider.

---

<sup>10</sup> Die beiden Sektoren sind in Simulation 1 und 3 unkorreliert, sodass der gesamte Effekt auf die Einbeziehung der makroökonomischen Faktoren zurückzuführen ist.

## 4 Schlussfolgerungen und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wird untersucht, wie Ausfallwahrscheinlichkeiten sowie Asset- und Ausfallkorrelationen bei Betrachtung mehrerer Risikosegmente geschätzt und in die Simulation der Schadensverteilung integriert werden können.

Den empirischen Analysen liegt ein Datensatz des Moody's Default Risk Service zu Grunde, der u.a. die Ausfalldaten von us-amerikanischen Industrieunternehmen enthält, sowie us-amerikanische Daten von Retailkrediten, die vom "Federal Financial Institution Examination Council" erhoben werden.

Zur Prognose der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten wird ein statistisches Defaultmodell geschätzt, das eine individuelle dynamische Erweiterung der Basel II-Probispezifikation darstellt und auch makroökonomische Informationen enthält. Als makroökonomische Einflussfaktoren werden im Sektor der Industrieunternehmen der kurzfristige Geldmarktzinssatz des Vorjahres und die Ausfallrate der Industrieunternehmen des Vorjahres einbezogen. Im Sektor Kreditkarten werden als makroökonomische Informationen der Refinanzierungssatz mit einer Zeitverzögerung von zwei Jahren und der Konsumentenpreisindex des Vorjahres berücksichtigt. Daneben werden im Sektor der Industrieunternehmen auch schulderspezifische Informationen, hier durch die Einbeziehung von Emittentenratingklassen, im Modell berücksichtigt.

Durch die Einbeziehung von makroökonomischen Informationen kann die PD „Point in Time“ geschätzt werden, was bei dem im Beitrag verwendeten Portfolio zu einer Verringerung des ökonomischen Eigenkapitals führt. Die empirisch geschätzte negative Korrelation der systematischen zufälligen Effekte zwischen den beiden Sektoren des Portfolios führt zu einer weiteren Verringerung des ökonomischen Eigenkapitals. Diese Mehr-Sektoren-Sichtweise sollte in Zukunft bei der Berechnung des ökonomischen Eigenkapitals der Banken verstärkt beachtet werden, wobei zusätzliche Studien über die Auswirkungen der Berücksichtigung der Korrelationen zwischen mehreren Sektoren eines Portfolios durchgeführt werden sollten.

**Literatur**

- Basel Committee on Banking Supervision (2004): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework.
- Black, Fischer; Scholes, Myron (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *Journal of Political Economy*, 637-654.
- Davidson, Russell; MacKinnon, James G. (1993): *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford, New York, Toronto, Oxford University Press.
- Duffie, Darrell; Singleton, Kenneth J. (1999): Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. In: *Review of Financial Studies*, 12, 687-720.
- Gordy, Michael B. (2000): A comparative anatomy of credit risk models. In: *Journal of Banking and Finance*, 24, 119-149.
- Hamerle, Alfred; Knapp, Michael; Wildenauer, Nicole (2005): Modelling Loss Given Default: A "Point in Time"-Approach. Working Paper, September.
- Hamerle, Alfred; Liebig, Thilo; Rösch, Daniel (2003): Credit Risk Factor Modeling and the Basel II IRB Approach. In: Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Supervision, 02/2003, Deutsche Bundesbank.
- Hamerle, Alfred; Rösch, Daniel (2005): Bankinterne Parametrisierung und empirischer Vergleich von Kreditrisikomodellen. In: *Die Betriebswirtschaft*, 65, 179-196.
- Hamerle, Alfred; Tutz, Gerhard (1989): *Diskrete Modelle zur Analyse von Verweildauer und Lebenszeiten*, Frankfurt u.a, Campus-Verlag.
- Jarrow, Robert A.; Turnbull, Stuart M. (1995): Pricing Derivatives of Financial Securities Subject to Credit Risk. In: *Journal of Finance*, 50, 53-85.
- Koyluoglu, H. Ugur; Hickman, Andrew (1998): A Generalized Framework for Credit Risk Portfolio Models. In: Working Paper, Oliver, Wyman & Co., September.
- Merton, Robert (1974): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. In: *Journal of Finance*, 29, 449-470.
- Merton, Robert (1977): On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem. In: *Journal of Financial Economics*, 5, 241-249.

- Rösch, Daniel (2003): Correlations and Business Cycles of Credit Risk: Evidence from Bankruptcies in Germany. In: Financial Markets and Portfolio Management, 17, No. 3, 309-331.
- Rösch, Daniel; Scheule, Harald (2004): Forecasting Retail Portfolio Credit Risk. In: The Journal of Risk Finance, Winter/Spring.
- Walter, Roland (2004): Integration mehrjähriger Prognosen von PD und LGD in Kreditportfoliomodelle: Eine empirische Studie anhand von Daten des amerikanischen Bondmarkts. Lehrstuhl für Statistik. Regensburg, Universität Regensburg, Diplomarbeit.