日本機械学会論文集(C編)
62巻603号(1996-11)

論文 No. 95-1942

数値解析の援用による回転自由度モードの推定*
(重ね合せるモードの選択に関する検討)

鞍谷文保*1, 岩壺卓三*2, 沖田耕三*1

Estimation of Rotation Mode Shapes by Use of Numerical Analysis
(How to Select Mode Shapes to Be Combined)

Fumiyasu KURATANI, Takuzo IWATSUBO and Kozo OKITA

This paper presents a procedure to estimate unmeasured rotation mode shapes of a test structure as a linear combination of those of the corresponding finite-element (FE) model. In this procedure, weighting coefficients for each mode shape combined are determined by comparing experimentally measured translation mode shapes with analytical mode shapes of the FE model. Since the accuracy of the estimates strongly depends on the selection of the mode shapes combined, a method based on the modal assurance criterion (MAC) values between experimental and analytical translation mode shapes for assessing the significance of mode shapes to be combined is proposed. The proposed method is shown to be suitable for a proper selection of mode shapes through a numerical example using a frame structure model. In addition, a practical technique to use the MAC values as the mode selection indicator under incomplete conditions of the measurements of translation mode shapes is suggested.

Key Words: Experimental Modal Analysis, Numerical Analysis, Finite-Element Method, Estimation, Rotation Mode Shape, Modal Assurance Criterion (MAC)

1. 緒言

実験データをベースとする構造変更シミュレーションや実験データによる有限要素モデルの修正などの実験データを利用する解析法において，その精度を向上させるためには実験データとして並進自由度だけでなく回転自由度の情報も重要となる．しかし現状では，回転角変位(自由度)を高精度に測定することは容易ではない．この問題を解決するために，実験で得られた並進自由度の振動モード(並進自由度モード)から回転自由度の振動モード(回転自由度モード)を推定する方法が検討されている．一つの考え方として，対象とする構造物の有限要素モデルの振動モードを利用する方法[(1)(2)]があり，特にMCE(Modal Coordinate Expansion)法[(3)~(5)]と呼ばれる方法は他の方法に比べてアルゴリズムが簡単で，計算負荷が小さい特徴がある[(5)]．しかし，この方法では有限要素モデルのいくつかの回転自由度モードの線形結合として対象物の回転自由度モードを推定するので，重ね合せるモードを与える必要があるが，その選択方法は明確ではない．さらに，重ね合せる各モードの重みは実験で得られた並進自由度モードと有限要素モデルの並進自由度モードを比較することで決定されるが，測定点の配置や数によっては重みを算出する方程式が不適切となり，回転自由度モードの推定が困難になるという欠点がある．

その対策として著者ら[(6)]は，1次元のはりモデルの数値計算例を基に重ね合せるモードと推定誤差の関係について検討し，MAC (Modal Assurance Criterion)値が重ね合せるモードを選択するのに利用可能であることを示した．また，並進自由度モードの十分な測定が困難で回転自由度モードが推定できない場合の対策として，MCE法とMSF(Modal Scale Factor)法を組み合わせた推定法を提案した．しかし，MAC値をモード選択の指標として用いる理論的根拠やMSF法を組み込んだときの重ね合せるモードの選択方法を明確にすることはできなかった．

そこで本論文では，重ね合せるモードを選択するための指標としてMAC値が利用可能な根拠を示す．さらに，MAC値を用いてモードを選択するときの具体的な方法を提案する．また，2次元のラーメン構造モデルの数値計算例において提案した方法の有効性を検証するとともに，MSF法を組み込んだときにモードを適切に選択するために留意すべき点を示す．

2. 回転自由度モードの推定法

2・1 MCE(Modal Coordinate Expansion)法 まず，本研究で回転自由度モードの推定法として取り上

* 原稿受付 1995年12月18日.
*1 正員，兵庫県立工業技術センター (〠654 神戸市須磨区行平町3-1-12).
*2 正員，神戸大学工学部 (〠657 神戸市灘区六甲台町1).

げるMCE法[6]について説明する。有限要素法で離散化された機械構造物の運動方程式は，減衰を省略すると次のように表される．

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$[M]$ と $[K]$ は質量行列と剛性行列で，$\{u\}$ と $\{f\}$ は変位ベクトルと外力ベクトルである．要素としてはり要素やシェル要素を用いた場合には，$\{u\}$ は並進と回転の自由度を有する．この運動方程式で表される系の j 次の固有振動数 ω_j と振動モード $\{\phi^A\}_j$ は，次式の固有値問題を解くことで求めることができる．

$$([K]-\omega_j^2[M])\{\phi^A\}_j=\{0\} \quad \cdots\cdots (2)$$

以下では，式(2)の $\{\phi^A\}_j$ は並進自由度モード $\{\phi_t^A\}_j$ と回転自由度モード $\{\phi_r^A\}_j$ に分けて整理してあるとする．

MCE法では，実験で得られた r 次の並進自由度モード $\{\phi_t^X\}_r$ は，式(2)のいくつかの並進自由度モードの線形和として次のように表されると仮定する．

$$\begin{aligned}\{\phi_t^X\}_r &= \{\phi_t^A\}_1\gamma_{r1}+\{\phi_t^A\}_2\gamma_{r2}+\cdots+\{\phi_t^A\}_s\gamma_{rs} \\ &= [\Phi_t^A]\{\gamma\}_r\end{aligned} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，γ_{rj} は重ね合せる各モードの重みで，s は重ね合せるモードの最大次数を表す．式(3)の重み係数ベクトル $\{\gamma\}_r$ が求まれば，実験データとみなせる r 次の回転自由度モードの推定値 $\{\phi_r^P\}_r$ は，式(3)に対応する式(2)の回転自由度モードの重ね合わせとして次式から推定できることになる．

$$\begin{aligned}\{\phi_r^P\}_r &= \{\phi_r^A\}_1\gamma_{r1}+\{\phi_r^A\}_2\gamma_{r2}+\cdots+\{\phi_r^A\}_s\gamma_{rs} \\ &= [\Phi_r^A]\{\gamma\}_r\end{aligned} \quad \cdots\cdots (4)$$

式(3)において，測定点の数より重ね合せるモードの数が多くとも $\{\gamma\}_r$ の一意的な解が得られるように一般逆行列[7]を導入すると，$\{\gamma\}_r$ は次式から算出できる．

$$\{\gamma\}_r=[\Phi_t^A]^+\{\phi_t^X\}_r \quad \cdots\cdots (5)$$

ただし，$[\Phi_t^A]^+$ は $[\Phi_t^A]$ の一般逆行列を表す．

2・2 重ね合せるモードの選択法

次に，MCE法の推定精度に影響を及ぼす重ね合せるモードを適切に選択するための方法を提案する．なお，本研究では回転自由度モードを推定するときに重ね合せるモードの最大次数を与え，1次モードからその次数までのモードを重ね合せる．そこで本研究でモードの選択とは，重ね合せるモードの最大次数を決定し，その次数までのモードをすべて選ぶことを意味する．

MCE法の推定精度は，式(3)で用いる重ね合せるモードに依存する．例えば，式(3)の s を大きくして高次のモードまで用いれば忠実に実験データが再現できるので，式(4)で推定した回転自由度モードの推定精度が高くなると考えられる．しかし，実験データには測定誤差が含まれるので，多くのモードを用いて忠実に実験データを近似した場合には誤差までフィットしてしまい，結果として推定精度が悪くなる．したがって，推定精度を高くするためには適切な次数のモードを重ね合せる必要がある．そこで前報[6]では，実験の並進自由度モードと式(2)の並進自由度モードから計算される次式のMAC(Modal Assurance Criterion)[8]値

$$MAC_{rj}=\frac{(\{\phi_t^X\}_r^T\{\phi_t^A\}_j)^2}{(\{\phi_t^X\}_r^T\{\phi_t^X\}_r)(\{\phi_t^A\}_j^T\{\phi_t^A\}_j)} \quad \cdots\cdots (6)$$

を重ね合せるモードを選択するときの指標として用い，数値計算例でその有効性を示した．しかし，MAC値をモード選択指標とする理論的根拠の検討が不十分であったので，ここでその物理的意味を考察し，指標として適切であることを示す．さらに，MAC値を用いてモードを選択するための具体的な方法を提案する．

今，式(3)において左辺が n 次元のベクトルで，右辺が互いに直交する n 次元の n 組のベクトルであると仮定する．また，各ベクトルの長さは1となるように正規化されているとする（正規化されたベクトルを $\{\bar{\cdot}\}$ と表す）．式(3)の左から $\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T$ を掛けて

$$\begin{aligned}\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^X\}_r &= \{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^A\}_1\gamma_{r1}+\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^A\}_2\gamma_{r2} \\ &\quad +\cdots+\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^A\}_j\gamma_{rj}+\cdots+\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^A\}_n\gamma_{rn}\end{aligned} \quad (7)$$

直交性を考慮すれば，j 次の項以外はすべて0となり，j 次モードの重み係数 γ_{rj} は

$$\gamma_{rj}=\{\bar{\phi}_t^A\}_j^T\{\bar{\phi}_t^X\}_r=\frac{\{\phi_t^A\}_j^T\{\phi_t^X\}_r}{\sqrt{\{\phi_t^A\}_j^T\{\phi_t^A\}_j}\sqrt{\{\phi_t^X\}_r^T\{\phi_t^X\}_r}} \quad (8)$$

として求められる．式(6)は式(8)を二乗したものであるので特性は同じ傾向を示す．そこで，式(8)すなわち式(6)の物理的な意味を考察する．式(3)の実験モード $\{\bar{\phi}_t^X\}_r$ は，各解析モード $\{\bar{\phi}_t^A\}_j$ に式(8)で得られた γ_{rj} を掛けたもののベクトル和として表される．n が3の場合には，その関係は例えば図1のように表される．図1から，実験モードを表すときに γ_{rj} の大きい解析モードを無視すると近似誤差が大きくなるが，γ_{rj} の小さい解析モード（例えば，$\{\bar{\phi}_t^A\}_3$）を無視しても影響は小さい（例えば，$\{\bar{\phi}_t^A\}_1\gamma_{r1}+\{\bar{\phi}_t^A\}_2\gamma_{r2}$ となる）ことがわかる．また，測定誤差はその値が小さく偶然誤差のみと仮定すれば，低次のモードに対してよりモード形状が複雑な高次のモードとの相関が高いと考えられる．したがって，高次の解析モードで γ_{rj} の小さいモードを除いて式(3)を構成すれば，γ_{rj} の大きい解析

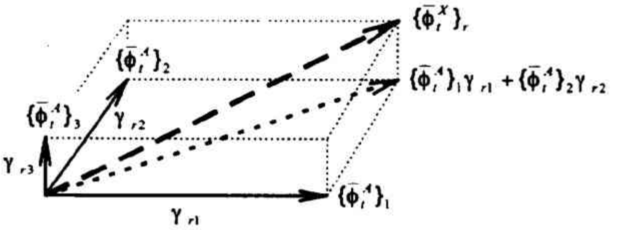

Fig. 1 Relation between experimental and analytical mode shapes in Eq.(3)

モードに直交する測定誤差成分を取り除くことができる(実験モードを構成する真の成分もいくらかは無視されてしまうが)ので，測定誤差までフィットせずにすみ，推定精度が高くなることが期待できる．なお，一般には式(3)の右辺のベクトルは完全な直交性は有しないが，測定位置が適切なら直交に近い関係があるので，上述の議論があてはまると考えられる．

次に，具体的に式(6)のMAC値を用いてモードを選択する方法を示す．式(3)の各ベクトルの長さが1になるように正規化され，右辺の解析モードが完全な直交性を有する場合には

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{rj}^{\,2} = \sum_{j=1}^{n} MAC_{rj} = 1 \quad \cdots\cdots (9)$$

の関係がある．そこで，重ね合せるモードとして式(9)の値が1より小さい設定したある値になるまでのモードを1次モードから順に採用することにすれば，上述のようにγ_{rj}が小さく実験データの再現に影響の少ない高次のモードを除いたモードが自動的に選択されることになる．なお，設定値は測定誤差と並進自由度モードのモード形状を考慮して適切な値を決める必要がある．右辺のベクトルが完全な直交性を有しない場合には，式(9)の代わりに

$$Cumulative\ MAC_r = \frac{\sum_{j=1}^{s} MAC_{rj}}{\sum_{j=1}^{n} MAC_{rj}} \quad \cdots\cdots (10)$$

を用いればよい．ここで，分母は推定しようとする実験モードの次数に比べて十分大きく，実験モードとのMAC値がほとんど0となる高次の解析モードまでのMAC値の合計で，分子は実験モードとのMAC値を1次モードから順に累積したものである．式(9)の場合と同様に，この式の値が設定した値になるまでのモードを1次モードから順に採用すればよい．

2・3　修正MCE法　最後に，前報[6]で提案したMCE法とMSF(Modal Scale Factor)法を組み合わせた推定法(以後，修正MCE法と呼ぶ)について説明する．この推定法は，並進自由度モードの十分な測定が困難で回転自由度モードが推定できない場合の対策として提案したものであるが，前報ではMSF法を組み込んだときの重ね合せるモードの選択方法を明確にすることはできなかった．そこで，第3章の数値計算例でモードを適切に選択するために留意すべき点を示す．

2・1節で説明したMCE法では，重ね合せるモードの重みを算出するときにモード行列$[\Phi_t^A]$の逆行列が必要となる(式(5)参照)．そのとき，構造上の制約などから重ね合せるモードの数より測定点数が少ない場合や数は十分であるが適切な配置が困難な場合には$[\Phi_t^A]$が特異となり，$\{\gamma\}_r$の一意的な解が得られたとしても有意な解が得られないことがある．そこで修正MCE法では，測定困難な位置の並進自由度データをMSF法(次のステップ1と2)で推定し，そのデータと実際に測定されたデータからMCE法で回転自由度モードを推定する．そうすることで，モード行列の不適切性が解消され，不十分な測定条件で測定されたデータだけからMCE法で推定した結果より回転自由度モードの推定精度が向上することが期待できる．修正MCE法では，具体的には次の4つのステップを実行する．

ステップ1：実験の並進自由度モード$\{\phi_t^X\}_r$とモデルの並進自由度モード$\{\phi_t^A\}_j$からMSF値を計算する．

$$MSF_{rj} = \frac{\{\phi_t^X\}_r^T\{\phi_t^A\}_j}{\{\phi_t^A\}_j^T\{\phi_t^A\}_j} \quad \cdots\cdots (11)$$

ステップ2：測定困難な位置の並進自由度データ$\{\phi_{t*}^P\}_r$を対応する位置のモデルの並進自由度データ$\{\phi_{t*}^A\}_j$から推定する(ここで，記号「*」は測定困難な位置のデータを意味する)．

$$\{\phi_{t*}^P\}_r = MSF_{rj}\{\phi_{t*}^A\}_j \quad \cdots\cdots (12)$$

ステップ3：実験データとステップ2で推定したデータから重ね合せる各モードの重みを算出する．

$$\begin{aligned}\{\gamma\}_r = &([\Phi_t^A]^T[\Phi_t^A]+1/\alpha[\Phi_{t*}^A]^T[\Phi_{t*}^A])^{-1} \\ &\times([\Phi_t^A]^T\{\phi_t^X\}_r+1/\alpha[\Phi_{t*}^A]^T\{\phi_{t*}^P\}_r)\end{aligned} \quad \cdots (13)$$

α：実験データに重みを与える係数

ステップ4：モデルの回転自由度モード$[\Phi_r^A]$から回転自由度の実験モードを推定する．

$$\{\phi_r^P\}_r = [\Phi_r^A]\{\gamma\}_r \quad \cdots\cdots (14)$$

なお，ステップ1においては実験モードに対応する解析モードを与える必要があるが，測定された並進自由度モードだけから計算されたMAC値などからモードの対応関係を与えることができると考えられる．

3．数値計算例

本研究では，実験データは誤差を含むものとしている．そこで，測定誤差が混入した場合を想定したデータを数値的に作り，そのデータを用いて推定した回転自由度モードの推定誤差と重ね合せたモードとの関係を考察し，提案したモード選択法の有効性について検討する．数値計算例としては門型のラーメン構造モデルを取り上げた．図2のモデルを実験モデルと考え，このモデルの有限要素法解析で得られたデータを基に誤差が混入した実験データを生成した．なお，測定誤差は偶然誤差だけで，互いに独立であると仮定した．モデルを24個のはり要素に分割し，1次から5次までの振動モードを得た後，X方向10点，Y方向10点の合計20点(白抜きのセンサで示す)の並進自由度データ$\{\phi_t^T\}_r$に，平均値0で次式の変動係数L_rが0.15となる

標準偏差σ_rの乱数を加えて実験データを作成した．

$$L_r = \frac{\sigma_r}{\max(\{\phi_r^T\}_r)} \cdots\cdots (15)$$

以下では，図２の■で示した22箇所における回転自由度モード$\{\phi_r^P\}_r$を推定し，それとモデルの有限要素法解析で得られた真値と考えられる回転自由度モード$\{\phi_r^T\}_r$を比較することで推定精度を評価した．評価関数としては，モード次数ごとに$\{\phi_r^P\}_r$と$\{\phi_r^T\}_r$との差すなわち誤差ベクトルの長さを真値ベクトル$\{\phi_r^T\}_r$の長さで割った

$$E_r = \frac{\left\|\{\phi_r^P\}_r - \{\phi_r^T\}_r\right\|}{\left\|\{\phi_r^T\}_r\right\|} \cdots\cdots (16)$$

を用いた．この式は，モード次数ごとに回転自由度モードの真値ベクトル$\{\phi_r^T\}_r$の長さが１となるように正規化したときの誤差ベクトルの長さ，すなわち各測定点の誤差の二乗和の平方根を表す．

3・1　MAC値によるモード選択　最初に，適切な測定条件で得られたデータの場合について推定誤差とMAC値との関係を考察することで，MAC値を用いたモード選択法の有効性を検討する．実験モデルとわざと違えた図３に示すモデルを解析モデルと考え，このモデルの１次から10次までの解析モードを用いて誤差の混入したデータから１次から５次までの回転自由度モードを推定した．実験データは図２の白抜きのセンサで示す20箇所での並進自由度モードである．解析モデルは実験モデルに比べて下部の部材の幅を1/2とした．なお，以下で考察する推定誤差などの数値は，

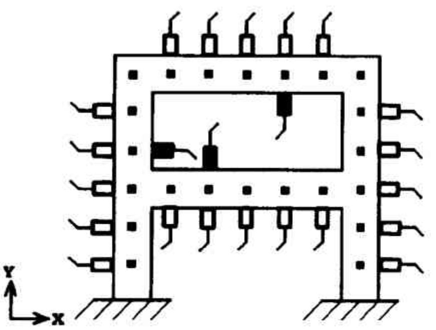

Fig.2　Experimental model and Measuring points

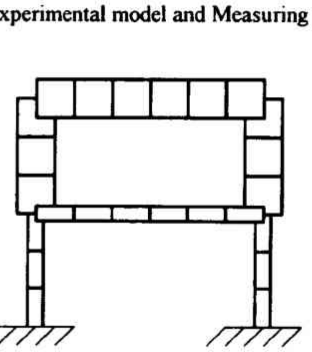

Fig.3　Analytical model

誤差を含む並進自由度モードを任意に10組作り，その各データについて得られた値の平均値である．

図４の(a)から(e)の上側に，重ね合せるモードの最大次数を１から10まで変化させたときの１次から５次までの回転自由度モードの推定誤差の変化を示す．縦軸は式(16)の推定誤差で，横軸は重ね合わせたモードの最大次数を表す．したがって，例えば，横軸"10"は１次から10次までの解析モードを重ね合わせたことを意味する．また下側には，実験と解析の並進自由度モードから計算されたMAC値と式(10)の累積MAC値の変化を示す．なおMAC値に関しては，横軸は重ね合せたモードの最大次数ではなくMAC値を計算したときの解析モードの次数である．

まず推定誤差については，どの実験モードとも重ね合せるモードの最大次数を大きくしていくと誤差が大幅に減少し，あるところで最小となった後，再び誤差が増加する傾向にあることがわかる．したがって，前報で述べたようにやみくもに多くのモードを用いるのではなく，適切な次数のモードを重ね合せることが重要であると言える．そのためには，モードを適切に選択するための指標が必要となる．

そこで次に，MAC値のモード選択指標としての有効性を評価する．実験モードごとに上図と下図を眺めれば，実験モード１次の場合は推定誤差は重ね合せる解析モードの最大次数が３のときに最も小さくなっており，MAC値は解析モードが１次と３次のときに顕著に大きくなっている．したがって，MAC値が大きい解析モードを含むように最大次数を設定すれば推定誤差を小さくできることになる．実験モード３次，４次，５次の場合も同様に，MAC値が大きくなる解析モードを含むように最大次数を設定すればよいことがわかる．なお実験モード２次の場合は，誤差は最大次数が６のときに最小となっているが，MAC値には８次に少し値が大きいものがあるので，完全には対応していない．しかし，６次までと８次までの解析モードを重ね合せたときの誤差の差は小さい．したがって，MAC値から適切なモードが選択できるので，MAC値はモード選択指標として有効であると言える．

前報では，上述のような推定誤差とMAC値の関係を考察するのにとどまっていた．ここではもう一歩進めて，MAC値を基にした式(10)を用いて自動的にモードを選択する方法を説明する．表１に，誤差が最小となったときの重ね合せたモードの最大次数(Max. mode No.で表す)と累積MAC値(式(10))を示す．

今，例えば，表１の累積MAC値を参考にして式(10)のしきい値を0.9に設定すると，実験モード１次から４次までは図４の累積MAC値の変化からもわか

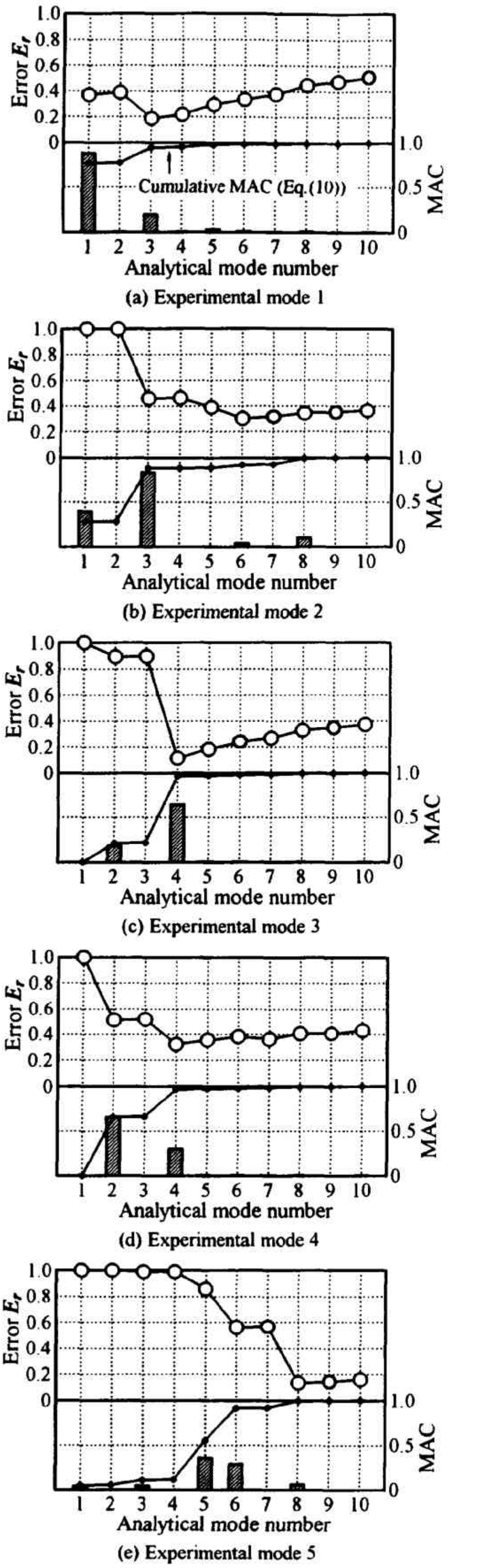

Fig.4　Error in the estimated rotation mode shapes and the MAC values between experimental and analytical mode shapes

Table 1　Maximum mode No. of mode shapes combined and cumulative values of the MAC (Eq.(10)) at minimum of error

Exp. mode No.	Max. mode No.	Cumulative MAC
1	3	0.943
2	6	0.919
3	4	0.964
4	4	0.965
5	8	0.996

るように，誤差が最小となる次数まで累積したときのMAC値で初めて0.9を越える．したがって，MAC値だけでは最大次数の推定が困難であった実験モード２次を含めて，式(10)から重ね合せるモードの最大次数が自動的に決定されることになる．なお実験モード５次に関しては，６次までの累積MAC値が0.9を越えてしまいこのままでは適切なモードが選択されない．これは，実験モード５次についてはMAC値の最大値が0.361と他の実験モードに比べて小さいことから，対応がよい解析モードがなく実験モードを近似するのに多くの解析モードを必要とした．その結果，表１の累積MAC値が大きくなり，他のモードと同じしきい値では対応できなかったためと考えられる．したがって，MAC値の最大値が小さい実験モード５次のような場合には，累積MAC値のしきい値を大きくすることで整合性がとれると思われる．このようにすれば，自動的にモードを選択する基準として式(10)の累積MAC値が利用可能だと言える．

なお，累積MAC値のしきい値については扱う問題ごとにその最適値を決める必要があると思われるので，この点については今後さらに検討を要す．

3・2　測定が不十分なときの対策例　次に，測定条件が十分ではない場合に得られたデータに修正MCE法を適用し，その効果およびモード選択指標として有効にMAC値を利用するために留意すべき点を検討する．ここでは，測定箇所が図２の黒塗りのセンサで示した３点しかない場合を想定した．なお，修正MCE法においてはMSF法で17箇所(図２の白抜きのセンサから黒塗りのセンサを除いたＸ方向９点とＹ方向８点)の並進自由度データを推定したので，修正MCE法で用いたデータは前節と同じ20点のデータとなる．解析モデルおよび実験データは前節と同じである．また修正MCE法において，実験データに重みを与えて回転自由度モードを推定し，その効果を検討した．重みはあまり大きいとモード行列の条件数が大きく，すなわち行列が特異に近づくことになり修正MCE法の効果がなくなるので，モード行列の条件数が大きくならない値として10倍を設定した．ところで，MSF法では実験モードに対応する解析モードを与える必要がある．

ここでは，表２に示す３点の実験データと解析データから計算されたMAC値を基に表３の対応関係を与えた．表２では測定点数が少ないために各実験モードともMAC値の大きいものがいくつか見られるが，実験モードは低次のどれかの解析モードと１対１対応すると考え，実験の１次モードから順に対応する解析モードが重複しないようにして，なるべく低次でMAC値の大きい解析モードを対応させた．その結果，表２の二重線で囲んだ解析モード，すなわち表３の対応関係が得られた．なお，実際の問題では，本例題のモデルと比べて構造が複雑となるために，本例題のような少ない測定点のデータだけでは実験モードと解析モードの対応を決定することが困難な場合があると思われる．その場合には，モードの識別が可能なまで測定点数を増やす必要があると考える．

図５の(a)から(e)の上側に図４と同様に推定誤差を，下側にMAC値を示す．上図において，●印は比較のために計算した３点のデータだけからMCE法で推定したときの結果で，他の２つが修正MCE法の結果である．下図では，■棒が３点のデータだけから計算されたMAC値で，他の２つがMSF法で推定した17箇所のデータを含む20点のデータから計算されたMAC値である．なお，実験データに10倍の重みを与えた場合を“w=10”で，重みなしの場合を“w=1”で表している．

推定誤差に関して，実験モードごとに修正MCE法とMCE法の誤差の最小値を比較すると，どの実験モードとも修正MCE法の方が誤差が大幅に小さくなっていることがわかる．したがって，修正MCE法は本報で取り上げた門型ラーメン構造モデルに対しても有効であると言える．また修正MCE法の重みの影響に関しては，全体としては◎印の実験データに重みを与えない方が

Table 2　MAC values between experimental and analytical mode shapes (3 measuring points)

		Experimental				
	Mode	1	2	3	4	5
Analytical	1	0.915	0.863	0.058	0.036	0.211
	2	0.065	0.048	0.225	0.616	0.242
	3	0.491	0.764	0.092	0.055	0.115
	4	0.133	0.017	0.710	0.441	0.546
	5	0.083	0.064	0.097	0.755	0.411
	6	0.083	0.371	0.507	0.025	0.149
	7	0.698	0.921	0.036	0.040	0.335
	8	0.124	0.015	0.843	0.280	0.456
	9	0.792	0.894	0.020	0.109	0.415
	10	0.433	0.638	0.060	0.178	0.024

Table 3　A set of correlated mode pairs

Experimental mode No.	1	2	3	4	5
Analytical mode No.	1	3	4	2	5

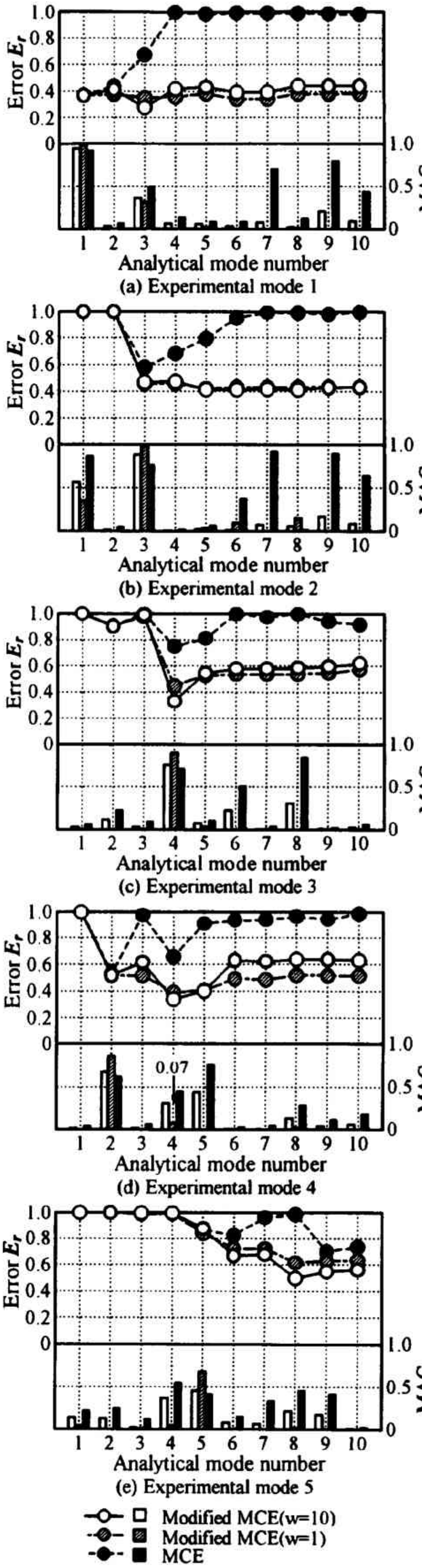

Fig.5　Comparison of error in the estimated rotation mode shapes and the MAC values between the Modified MCE and the MCE methods

推定誤差が小さいようであるが，誤差の最小値だけを整理した図6からもわかるように，最小値は実験データに10倍の重みを与えた○印の方が小さくなっている．これは，実験データに重みを与えた場合には，モード行列の条件数が大きくなるために全体としては誤差が大きくなる．しかし適切なモードが重ね合わされた場合には，条件数の増加に比べて実験データを重視することがより有効に働き誤差が小さくなったためと考えられる．したがって，重みに関しては実験データに重みを与えて推定した方がよいと言える．

次に，MAC値を利用してモード選択するときに留意すべき点を検討する．まず，■棒の3点のデータだけから計算されたMAC値では，実験モード1次から4次において本来相関が高くない高次の解析モードにMAC値の大きいものがあるので，前節のようには重ね合せるモードの最大次数を推定できない．一方，MSF法で推定した17箇所のデータを含む20点のデータから計算されたMAC値は，■棒の場合に比べてMAC値が大きくなるモードと誤差が小さくなる最大次数との対応はよい．したがって，MAC値の算出においてはMSF法で推定したデータを含めた並進自由度モードを用いることが重要であると言える．

重みの影響に関しては，実験モード1次から4次までは▨棒の重みを与えない方が対応がよく，実験モード5次になると重みを与えた□棒の方が高次のモードでMAC値が大きくなっているので対応がよい．前節でも述べたように，実験モード5次についてはMAC値の最大値が小さいことから対応がよい解析モードがなく，MSF法で推定したデータの精度が悪くなる．そこで，重みを与えて実験データを重視した結果，実験モード5次の対応がよくなったと考えられる．したがって，基本的には実験データに重みを与えずにMAC値を求めればよいが，実験データだけから算出したMAC値においてその最大値が小さい場合には，重みを与えてMAC値を算出すればよいと思われる．なお，実験モード1次から4次では重みの与え方が回転自由度モードを推定する場合と異なる．これは，MAC値の算出はモードの推定と異なり一つの解析モードだけを利用するためと考えられる．

ところで，本論文ではモードの推定とMAC値の算出において重み10倍だけを扱ったが，重みの与え方や大きさに関しては最適な条件が存在すると思われるので，この点に関してはさらに検討を要す．

最後に，修正MCE法で推定した回転自由度モードの推定誤差と修正MCE法に組み込んだMSF法だけで推定したときの誤差の比較を図6に示す．修正MCE法の結果(特に，“w=10”の場合)は，一つの解析モードだけを利用するMSF法の結果に比べて大幅に誤差が小さくなっている．これからも，複数のモードを用いるMCE法の有効性がわかる．

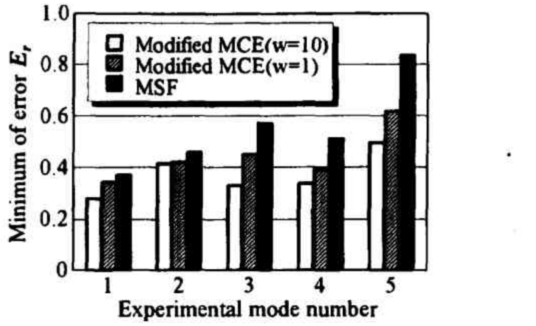

Fig.6 Comparison of minimum of error in the estimated rotation mode shapes between the Modified MCE and the MSF methods

4. 結　　言

本論文では，有限要素モデルの振動モードを利用して回転自由度モードを推定する方法の推定精度および重ね合せるモードの選択方法について，2次元の門型ラーメン構造モデルの数値計算例を基に検討した．その結果，次のことが明らかになった．

(1) MCE(Modal Coordinate Expansion)法においては，実験データに測定誤差が含まれる場合には重ね合せるモードに推定精度が大きく影響を受けるので，適切なモードを重ね合せる必要がある．その重ね合せるモードは，実験で得られた並進自由度モードと有限要素モデルの並進自由度モードから計算されたMAC(Modal Assurance Criterion)値を累積した累積MAC値を用いて推定可能である．

(2) 回転自由度だけでなく，一部の並進自由度も測定困難な場合には，MCE法とMSF(Modal Scale Factor)法を組み合わせることにより回転自由度モードの推定精度が向上する．その場合に，重ね合せるモードを選択するのに用いるMAC値は，MSF法で推定したデータを含めた並進自由度モードから算出することが重要である．

文　　献

(1) Gysin, H., *Proc. 8th IMAC*, (1990), 195-204.
(2) West, M.L., Kissil, A. and Milman, M., *Proc. 12th IMAC*, (1994), 212-218.
(3) Avitabile, P., O'Callahan, J.C., Chou, C.M. and Kalkunte, V., *Proc. 5th IMAC*, (1987), 950-955.
(4) Lipkens, J., Vandeurzan, U., Proc. *12th Int. Seminar on Modal Analysis*, (1987), 1048-1052.
(5) Imregun, M. and Ewins, D.J., *Proc. 11th IMAC*, (1993), 168-175.
(6) 鞍谷・岩壺・沖田，機論，61-587，C(1995)，2875-2881.
(7) 久保，逆問題，(1992)，31，培風館．
(8) Allemang, R.L., Ph.D dissertation, Univ. of Cincinnati, (1980), 151.