

組合せ荷重を受ける周辺固定直角二等辺三角形板の座屈

若 杉 昇 八^{*}・後 藤 善 弘^{**}・阪 口 健 一^{***}

Buckling of a Clamped Isosceles Right Triangular Plate under Combined Load.

Shohachi WAKASUGI, Yoshihiro GOTŌ, Kenichi SAKAGUCHI

(Received Apr. 15, 1968)

Abstract

In this paper, the buckling problem of a clamped isosceles triangular plate under uniformly distributed compressive and shearing load is solved by the Galerkin's method as described in the previous paper. The numerical results obtained giving the buckling load are shown in Table 1, 2 and Figs. 2 (a)~(b).

1 結 言

斜めの補強材を有する長方形板や航空機の後退翼等においては、補強材で区切られた板の部分——パネル——の基本形として三角形板が生ずる。このような板の座屈あるいは振動など構造に関する問題について著者は一連の報告^{1)~(3)}を発表してきた。本論文では、その一つとして組合せ荷重をうける周辺固定の直角二等辺三角形板の座屈について解析し、実用の便に供することを目的とする。パネルとしては周辺支持と周辺固定が実際の支持状態の両極限の状態と考えられ、周辺支持の板については幾つかの報告をすでに行なった。またその中で、無限長帯板と直角二等辺三角形板に対する解とより任意の形状の周辺支持された三角形板に対する解が近似的に推測できる⁽⁴⁾ことを示した。この意味で周辺固定の直角二等辺三角形板に関する問題を解析することは、任意の形状の周辺固定三角形板に対する解が推測できることになるので、ここにこの問題を取上げるものである。

2 基礎方程式

一般に周辺に沿って図1に示すように分布圧縮荷重 $\sigma_x \cdot t$, $\sigma_y \cdot t$ およびせん断荷重 $\tau \cdot t$ (t : 板厚) をうける板の座屈荷重を定める微分方程式は、 w をたわみとして、次式で与えられる。

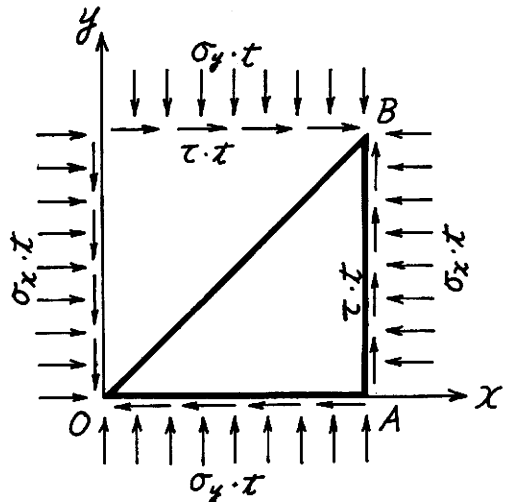


図-1 座標系および荷重状態

$$\Delta \Delta w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2R \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\sigma_x}{\sigma_e}, \quad Q = \frac{\sigma_y}{\sigma_e}, \quad R = \frac{\tau}{\sigma_e} \\ \sigma_e &= \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2)$$

*教授 **助教授 ***福井高専助手

ここに E, ν はそれぞれ材料の縦弾性係数およびポアソン比, a は三角形板の一边 OA の長さである。ただし, (1)式においては座標軸 x, y は OA の長さが π となるように無次元化してある。また, P, Q, R は座屈応力を与える無次元の係数値 (固有値) である。

(1)式を周辺でたわみ およびその傾斜が零の境界条件のもとに解けばよいが, 現在のところ厳密に解くことは不可能なので Galerkin 法により近似的に解くことにする。もちろん, この方法によっては厳密値より大きい近似解が得られる。Galerkin 法によるためには, まず座屈波形を仮定しなければならないが, これに対して少なくとも均等圧縮座屈の場合に近似が良い⁽²⁾ように思われる次式を仮定する。

$$w = \sum_{m,n} a_{mn} w_{mn} \quad \dots\dots(3)$$

ただし

$$w_{mn} = 4 (\sin 2x \sin y - \sin x \sin 2y) (\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my) \quad \dots\dots(4)$$

また m, n は相異なる正の整数とし, 一般性を失うことなしに $m > n$ と仮定する。(4)式に採用する w_{mn} としては $m^2 + n^2$ の値の小さいものより数項採用するものとし, 具体的には後の計算で明らかにする。なお $m + n =$ 奇数のとき w_{mn} は対称, $m + n =$ 偶数のとき w_{mn} は逆対称のたわみ波形を表わすことは周辺回転の場合と同じである。かくして次式:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi w_{mn} \left[\Delta \Delta w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2R \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dy dx = 0 \quad \dots\dots(5)$$

$m + n =$ 奇数 (対称たわみ) の場合

a_{21}	a_{32}	a_{41}	a_{48}	
500 - 35P + b ₁₁ R	-72 + 7P + b ₁₂ R	-220 + 16P + b ₁₃ R	-150 + 10P + b ₁₄ R	... = 0
-72 + 7P + b ₂₁ R	1233 - 49.5P + b ₂₂ R	-441 + 14.5P + b ₂₃ R	45 - 0.5P + b ₂₄ R	... = 0
-200 + 16P + b ₃₁ R	-441 + 14.5P + b ₃₂ R	1733 - 60.5P + b ₃₃ R	-527 + 13.5P + b ₃₄ R	... = 0
-150 + 10P + b ₄₁ R	45 - 0.5P + b ₄₂ R	-527 + 13.5P + b ₄₃ R	2941 - 74.5P + b ₄₄ R	... = 0

$m + n =$ 偶数 (逆対称たわみ) の場合

a_{31}	a_{42}	a_{51}	a_{58}	
819 - 39P + c ₁₁ R	-523.5 + 24.5P + c ₁₂ R	-270.75 + 13.75P + c ₁₃ R	126.25 - 5.25P + c ₁₄ R	... = 0
-523.5 + 24.5P + c ₂₁ R	1826.5 - 58.5P + c ₂₂ R	-690.5 + 15.5P + c ₂₃ R	-961 + 29P + c ₂₄ R	... = 0
-270.75 + 13.75P + c ₃₁ R	-690.5 + 15.5P + c ₃₂ R	3062.5 - 76.5P + c ₃₃ R	-486.25 + 9.25P + c ₃₄ R	... = 0
126.25 - 5.25P + c ₄₁ R	-961 + 29P + c ₄₂ R	-486.25 + 9.25P + c ₄₃ R	3722 - 78P + c ₄₄ R	... = 0

ただし

b ₁₁ = - 8.431981	c ₁₁ = 6.424367
b ₁₂ = b ₂₁ = -10.038073	c ₁₂ = c ₂₁ = -16.352933
b ₁₃ = b ₃₁ = - 0.803046	c ₁₃ = c ₃₁ = - 0.584033
b ₁₄ = b ₄₁ = 16.863962	c ₁₄ = c ₄₁ = 15.963577
b ₂₂ = -18.068531	c ₂₂ = 15.574222

を計算すれば Galerkin 法による基礎方程式が得られる。ただし(5)式中の w_{mn} は(3)式中の w_{mn} を順次一項ずつ用いるものとする。したがって(5)式は用いた項の数だけの連立一次方程式になる。(5)式の計算を実際に遂行すれば次節以下に示すようになる。ただし積分計算は相当複雑なので, たとえば

$$\int_0^\pi \int_0^\pi w_{mn} \frac{\partial^2 w_{m'n'}}{\partial x^2} dy dx = \int_0^\pi \int_0^\pi w_{m'n'} \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2} dy dx$$

$$\int_0^\pi \int_0^\pi w_{mn} \frac{\partial^2 w_{m'n'}}{\partial x \partial y} dy dx = \int_0^\pi \int_0^\pi w_{m'n'} \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x \partial y} dy dx$$

のごとき関係を利用し, 両辺で示される積分を計算して結果の一致することを確かめ, 誤りのないよう注意した。

3 均等圧縮とせん断荷重が作用する場合

この場合は $P = Q$ であって, Galerkin 法により求めた基礎方程式は次のようになる。ただし, 簡単のため係数のみを最上段の a_{mn} の下にならべて書いてある。また周辺支持の場合と同様に現在の場合にも $m + n =$ 奇数または偶数によって次の二群の方程式に分れる。

$$\left. \begin{aligned}
 b_{23} = b_{32} &= 25.186437 & c_{23} = c_{32} &= 17.431148 \\
 b_{24} = b_{42} &= -22.752965 & c_{24} = c_{42} &= -34.622693 \\
 b_{33} &= -2.190125 & c_{33} &= -3.519175 \\
 b_{34} = b_{43} &= -5.402308 & c_{34} = c_{43} &= -3.803704 \\
 b_{44} &= -31.391791 & c_{44} &= 27.962807
 \end{aligned} \right\} \dots(8)$$

表-1 P_{cr} , R_{cr} 計算値

No.	荷重状態	用いた項の数	1	2	3	4	注
1	P = Q R = 0	対 称	$P_{cr} = 14.29$	14.24	14.23 ₁	14.23 ₀	均等圧縮
		逆 対 称	$P_{cr} = 21.00$	20.99 ₆	20.99 ₈	20.99 ₀	
2	P = Q = 0 R ≠ 0	対 称	$R_{cr} = \left\{ \begin{array}{l} 59.30 \\ \hline \end{array} \right.$	31.78	31.75 -63.86	31.72 -50.46	純粹せん断
		逆 対 称	$R_{cr} = \left\{ \begin{array}{l} \hline \\ -127.0 \end{array} \right.$	110.3 -66.25	102.9 -54.80	71.8 -47.37	
3	P = Q = R	対 称	$P_{cr} = 11.51$	10.99	10.93	10.85	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\xi / \sigma_e = 2P \\ \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0 \end{array} \right.$
		逆 対 称	$P_{cr} = 25.14$	21.02 ₀	21.01 ₉	20.94	
4	P = Q = -R	対 称	$P_{cr} = 18.82$	16.51	14.72	14.06	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\eta / \sigma_e = 2P \\ \sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0 \end{array} \right.$
		逆 対 称	$P_{cr} = 18.03$	16.94	16.60	16.36	

(注) σ_ξ , σ_η , $\tau_{\xi\eta}$: ξ 軸 (斜辺法線方向) η 軸 (斜辺方向) に関する荷重の応力度成分

$$\frac{\sigma_\xi}{\sigma_e} = \frac{P+Q}{2} + R, \quad \frac{\sigma_\eta}{\sigma_e} = \frac{P+Q}{2} - R, \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{Q-P}{2}$$

(6), (7)式の係数行列式 = 0 より係数值 P, R の値が定められることは、周辺支持の場合と同様である。二三の特別な場合について計算した結果を示すと表 1 のようになる。

表 1 を見ると、まず No. 1 ではすでに述べた⁽²⁾のであるが、対称座屈の場合に絶対値の小さい根すなわち真の座屈係数值 P_{cr} が得られること、収束の状態より見て良好な近似解らしく思われることがわかる。No. 2 は純粹せん断の荷重状態であるが、根の収束状態は周辺支持の場合⁽²⁾によく似ているように思われる。すなわち R_{cr} の正根 (斜辺が引張りをうける方向のせん断) については対称座屈のほうが絶対値が小であり、その近似も良好のように思われる。負根については表に示されている範囲では逆対称座屈のほうが、絶対値小で

あるが、さらにじゅうぶんの項数をとって計算すると対称座屈の場合に絶対値の小さい値が得られるのではないかと思われる。そのときの値は収束状態からみて、だいたい - (40~45) くらいではないかと思われる。このことより次節の図 2(d) の B 点における値としては -43 の値をとることにする。No. 3, No. 4 は斜辺の法線方向および接線方向の一方方向圧縮の場合であり、対称座屈が実際に生ずることを示している。また根の近似も良いように思われる。

4 任意の組合せ荷重が作用する場合

この場合について、Galerkin 法により求めた基礎方程式を示せば次のとおりである。

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{21} & a_{31} & a_{32} & a_{41} & a_{42} & \\
 500 - 17.5S + b_{11}R & d_1 T & -72 + 3.5S + b_{12}R & -220 + 8S + b_{13}R & d_4 T & \dots = 0 \\
 d_1 T & 819 - 19.5S + c_{11}R & d_2 T & d_3 T & -523.5 + 12.25S + c_{12}R & \dots = 0 \\
 -72 + 3.5S + b_{21}R & d_2 T & 1233 - 24.75S + b_{22}R & -441 + 7.25S + b_{23}R & d_5 T & \dots = 0 \\
 -220 + 8S + b_{31}R & d_3 T & -441 + 7.25S + b_{32}R & 1733 - 30.25S + b_{33}R & d_4 T & \dots = 0 \\
 d_4 T & -523.5 + 12.25S + c_{21}R & d_5 T & d_6 T & 1826.5 - 29.25S + c_{22}R & \dots = 0 \\
 & & & & & \dots(9)
 \end{array}$$

表—2 P_{cr}, R_{cr} 計算結果

No.	用いた項の数		1	2	3	4	5	注
	荷重状態							
1	$Q = R = 0$		$P_{cr} = 28.57$	26.00	25.33	25.05		一方向圧縮
2	$P = -Q, R = 0$		$P_{cr} = \text{---}$	± 70.28	± 49.24	± 39.10	± 39.05	$\tau_{xy}/\sigma_e = P$ $\sigma_z = \sigma_y = 0$
3	$P = R, Q = 0$		$P_{cr} = 19.28$	18.79	16.76	16.61		
4	$P = -R, Q = 0$		$P_{cr} = \begin{cases} 55.14 \\ \text{---} \end{cases}$	28.81	25.10	24.20 -128		
5	$P = -Q = R$		$P_{cr} = \begin{cases} 59.30 \\ \text{---} \end{cases}$	42.82 -69.77	31.77 -42.44	31.71 -39.89		X軸に 22.5° 方向のせん断

(注) $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{xy}$: 表—1 参照

ただし

$$S = P + Q, T = P - Q$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 4.55246 & d_4 &= 2.87524 \\ d_2 &= -7.90691 & d_5 &= 5.84793 \\ d_3 &= 9.27919 & d_6 &= -15.20136 \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

b_{mn}, c_{mn} : (8)式に同じ

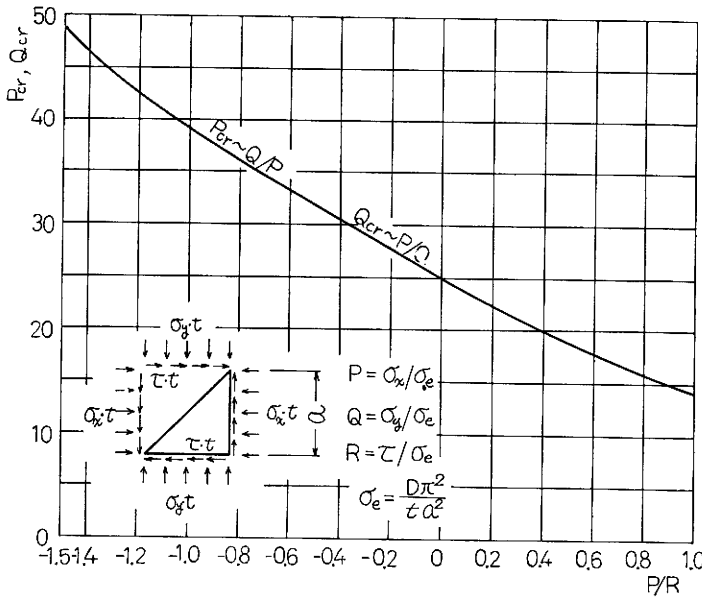
これより二三の特別な場合について計算した結果を表2に示す。No.1は一方向圧縮, No.2は斜辺方向の純粹せん断の状態である。No.3, 4および5は特別な場合として参考のため示した。この表よりみるとNo.4の負根を除く他の第4近似値はいずれも相当に良好な近似値のように思われる。

前節および本節の計算を通じてみると, 根の収束状

態や近似の程度, 対称座屈と逆対称座屈における座屈係数値の大小関係など周辺支持の場合ときわめてよく似ているように思われる。それで現在の場合に対しても4項用いたとき(対称座屈のときは対称波形の項のみを3項 w_{21}, w_{32}, w_{41} 用いたときに相当する)の座屈係数値の計算式を次に示す。

$$\begin{aligned} & (1.915217S^4 + 1.523226S^3R - 2.080666S^2R^2 \\ & - 0.650789SR^3 + 0.363208R^4 - 0.641090S^2T^2 \\ & - 0.328762ST^2R + 0.586639T^2R^2) \times 10^{-6} \\ & + \{-3.520280S^3 - 2.175012S^2R + 1.789683SR^2 \\ & + 0.298099R^3 + 0.567475ST^2 + 0.188414T^2R\} \\ & \times 10^{-4} \\ & + \{2.367281S^2 + 1.003071SR - 0.374290R^2 \\ & - 0.118990T^2\} \times 10^{-2} \\ & + \{-6.884372S - 1.520299R\} \\ & \times 10^{-1} \\ & = 0 \end{aligned} \dots\dots(11)$$

この式より座屈係数値を一部計算した結果を図2(a)~(d)に示す。前に述べたように $P, Q=0, R<0$ の付近では誤差が大きいのので, 図2(d)のA点 ($R_{cr} = -63.9$) の代りにB点 ($R_{cr} = -43$, 前節参照) を各曲線が通るものと仮定し, これ以外の部分では図示の値とあまり差はないと考えて補正した値を用いるのが実用上よいであろう。図に示したB点を通る破線は著者が試みにかいた推測補正曲線である。図2(b)の破線もまたそうである。これらの結果は設計資料などに利用できよう。



図—2—(a) P_{cr}, Q_{cr} 計算値 ($R = 0$ の場合)

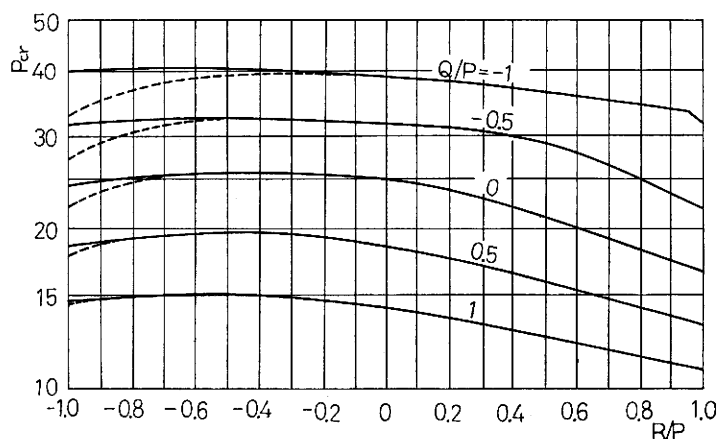


図-2-(b) $P_{cr} (> 0)$ 計算値 (破線:推測補正值)

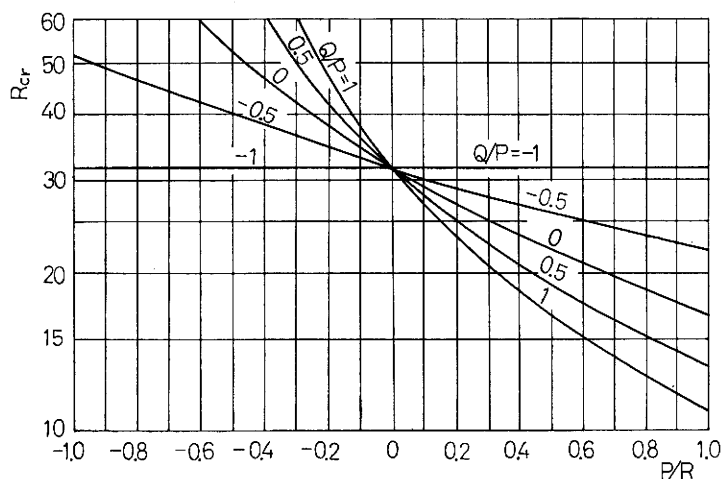
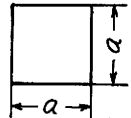
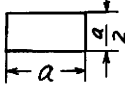
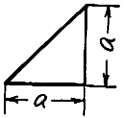


図-2-(c) $R_{cr} (> 0)$ 計算値

表-3 座屈係数の比較 (周辺固定または支持)

No.	荷重状態	板の形状			
1	$P=Q$ $R=0$		$P_{cr}=5.304$ 〔2〕	17.0 〔5〕	14.2 〔5〕
2	$Q=R=0$		$P_{cr}=10.0$ 〔4〕	31.4 〔16〕	25.1 〔9.06〕
3	$P=R=0$		$Q_{cr}=10.0$ 〔4〕	19.3 〔6.25〕	25.1 〔9.06〕
4	$P=Q=0$		$R_{cr}=\pm 14.7$ 〔 ± 9.35 〕	± 41.3 〔 ± 25.9 〕	+31.7 -47(-43) 〔+11.57 -33(-30)〕

注1) [] 内は周辺支持のときの値

2) () 内は推測補正值 (本文参照)

3) 正方形板, 長方形板のときの値は文献(5)による。

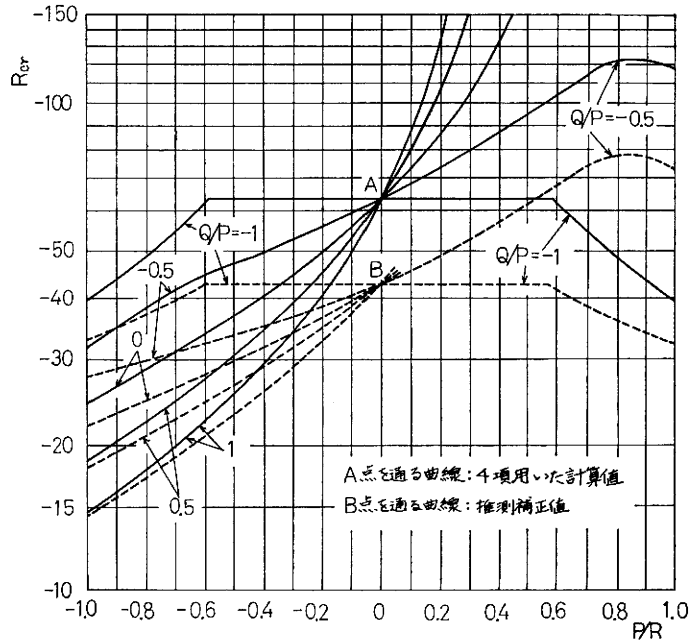


図-2-(d) $R_{cr} (< 0)$ 計算値

5 考 察

Cox-Klein⁽⁴⁾ が純粋せん断の場合 ($P=Q=0, R>0$) について $R_{cr} \approx 26$ の値を得ており、著者の値 $R_{cr} = 31.7$ とじゅうぶんによくは一致していないが、彼らの解はきわめて大略的な近似解で比較できない。このほかに本論文で扱った問題を解いている研究は見あたらないようである。

また本論文で得た数値的結果を周辺支持の場合と比較すると、周辺を固定することによって座屈荷重は周辺支持の場合のほぼ2~3倍に高められることがわかる。例外は斜辺が圧縮をうける方向のせん断座屈 ($P=Q=0, R<0$) のときで、周辺支持のときの値 -33 (推測値約 -30) が -47 (推測値 -40~45) となる程度で約1.5倍に過ぎない。正方形板のときも9.35 → 14.7と約1.57倍程度である。(表3参照)

長方形板にその一側辺に平行に補強材をつけることがしばしば行なわれる。斜めにつけるときの優劣を比較する意味で正方形板、辺比1:2の長方形板および直角二等辺三角形板の座屈係数値を比較すると表3のようになる。これをみると補強材をつけて板の座屈荷重を高めるには一方向圧縮のときは荷重に平行に、せん断座屈のときは補強材が圧縮される方向の斜めにつけるのがよいことがわかる。ただしこれは補強材の曲げ剛性が比較的大きくて補強材は座屈しないときの議論であり、補強材を含めた構造物全体については考

えていない。補強材を含めて考えれば建築構造における「筋かい」のごとき作用も加わって全体の剛性、強度は大きく高められるものと考えられる。

6 結 言

本論文において周辺固定の直角二等辺三角形板の座屈荷重を Galerkin法により求めた。得られた数値結果は図および表に示した。設計資料などに利用できよう。このほか次の諸点が明らかとなった。

1. 根の収束状態などは周辺支持の場合と同様な傾向を示す。
2. 周辺固定のときの座屈荷重は周辺支持のときのそれらのほぼ2~3倍である。
3. 正方形板がせん断荷重をうける場合は斜めに補強材を入れると座屈荷重が高められて有効である。

文 献

- 1) 若杉：機械学会論文集, 19-83 (昭28) 59
- 2) 若杉：同上, 21-107 (昭30) 474, Proc. NCTAM 4 (1954) 49
- 3) 若杉：機械学会論文集 26-164 (昭35) 530, 538, Bulletin of JSME 4-3 (1961) 16, 20 ほか
- 4) H. L. Cox, B. Klein; JAS 22 (1955) 321
- 5) F. Bleich: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill (1952) 396
長柱研究委員会；弾性安定要覧 (改訂増補), コロナ社 (昭35) 407

(昭和43年4月15日受理)