Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal : un estudio de casos en el nivel universitario

Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:

Diana Lucía Vasco Mora

Fecha de lectura: 16 de diciembre de 2015

Bajo la dirección de la doctora:

Nuria Climent Rodríguez

Huelva, 2015

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE ÁLGEBRA LINEAL. UN ESTUDIO DE CASOS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Tesis doctoral de

DIANA LUCÍA VASCO MORA

Realizada bajo la dirección de

DRA. NURIA CLIMENT RODRÍGUEZ

2015

UNIVERSIDAD DE HUELVA

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

TESIS DOCTORAL

“CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE ÁLGEBRA LINEAL. UN ESTUDIO DE CASOS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO”

Tesis doctoral de
DIANA LUCÍA VASCO MORA

Realizada bajo la dirección de
DRA. NURIA CLIMENT RODRÍGUEZ

HUELVA, ESPAÑA

2015

DEDICATORIA

A mis padres, Sonia y Alfonso, por todo su amor, enseñanzas y apoyo constante en mi formación académica.

A mis hermanos, Paola y Fabricio, por el respeto, la confianza y el amor de hermanos que nos unirá para siempre.

A mi esposo, Marcos Javier, por su infinito amor y paciencia. A pesar del tiempo y la distancia siempre estuviste alentándome para culminar mis estudios.

A mi hija, Isabella, mi regalito de vida y motivación.

A mis sobrinos, Emilia y Andrés, por alegrar mi vida con sus ocurrencias.

A mis suegros, Marisol y Marcos Enrique, por todo su cariño y sus consejos.

A mis cuñados, María Paulina, Emilio, Marcos Daniel, Denisse, George, Elizabeth y Marcos Emanuel, por acompañarme y apoyarme en diferentes etapas de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a Dios, por bendecir mi vida y acompañarme siempre.

A la Dra. Nuria Climent Rodríguez, Directora de tesis, a quien admiro, quiero mucho y constituye un ejemplo para mí. Agradezco tus enseñanzas, paciencia y sabios consejos, tanto en lo académico como en lo personal, sin ti no hubiera sido posible alcanzar esta meta, infinitas gracias.

Al Dr. José Carrillo Yánez, hombre sabio y de excelente calidad humana, muchas gracias por las enseñanzas y valiosos aportes a este trabajo de investigación.

A los Dres. Luis Carlos Contreras, Cinta Muñoz-Catalán y Leticia Sosa, por los acertados comentarios y sugerencias que contribuyeron a la finalización de este trabajo de investigación.

A los Dres. Pablo Flores Martínez y Tomás Ortega Del Rincón, por la revisión y aportaciones realizadas a esta tesis doctoral.

A mis queridos compañeros y amigos Dinazar Escudero Ávila, Eric Flores Medrano, Miguel Ángel Montes Navarro, Enrique Carmona, Nielka Rojas, Álvaro Aguilar y Jorge Luis Huitrado, por el tiempo, las experiencias vividas y el placer de haber compartido reflexiones y tareas durante mi estancia en España. Ustedes son de esas personas que nunca se olvidan y se recuerdan siempre con una sonrisa.

A la memoria del Ing. M. Sc. Manuel Haz Álvarez, ex Rector de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Ing. M. Sc. Roque Vivas Moreira, ex Rector de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Ing. M. Sc. Tito Cabrera Vicuña, ex Vicerrector de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Ing. M. Sc. William Burbano Montecé, ex Vicerrector Académico de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Dr. Eduardo Díaz Ocampo, Rector de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, por el apoyo constante en mi formación académica.

A la Ing. M. Sc. Guadalupe Murillo Campuzano, Vicerrectora Académica de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Ing. M. Sc. Roberto Pico Saltos, Vicerrector Administrativo de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

Al Dr. Délsito Zambrano Gracia, ex Decano de la Facultad de Ciencias Pecuarias.

Al Ing. M. Sc. Hugo Medina Quinteros, ex Subdecano de la Facultad de Ciencias Pecuarias.

Al Ing. M. Sc. Gerardo Segovia Freire, ex Decano de la Facultad de Ciencias Pecuarias.

A la Dra. Kassia Gómez-Coelho, mi primera amiga en España, a pesar de los años nunca te olvidé y sé que un día te volveré a ver.

A Emilia Bejarano, a quien considero parte de mi familia, gracias por tu cariño.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Índice de Tablas………………………………………………………………….. xi
Índice de Figuras………………………………………………………………… xii

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN…………………………………………….. 15

1.1. Motivación y contextualización del estudio……………………………....... 15

1.2. Estructura de la memoria de investigación……………………………….. 17

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO………………… 20

2.1. Introducción…………………………………………………………….... 20

2.2. Conocimiento profesional……………………………………………….. 21

2.2.1. Antecedentes……………………………………………………...... 21

2.2.1.1. Conocimiento profesional del profesor…………………………. 23

2.2.1.2. Conocimiento profesional del profesor de Álgebra…………….. 30

2.2.2. Marco Teórico……………………………………………………. 32

2.2.2.1. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge………………... 32

2.2.2.2. Ejemplos para la enseñanza como parte del conocimiento del profesor de matemáticas……………………………………...... 40

2.3. Creencias y concepciones………………………………………………… 43

2.3.1. Algunas definiciones sobre creencias y concepciones……………… 44

2.3.2. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…...... 46

2.3.2.1. Características o aspectos didácticos de los profesores…………. 48

2.4. Análisis didáctico sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales……………………………………………………………………… 52

2.4.1. Análisis de contenido…………………………………………….. 53

2.4.1.1. Desarrollo histórico de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales…………………………………………...... 54

2.4.1.2. Estructura conceptual (mapa conceptual)………………………. 61

2.4.1.3. Sistemas de representación……………………………………... 64

2.4.1.4. Fenomenología…………………………………………………. 69

2.4.1.4.1. Ejemplos de aplicaciones de las matrices…………………… 72

2.4.1.4.2. Ejemplos de aplicaciones de los determinantes…………….. 77

2.4.1.4.3. Ejemplos de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales……………………………………………………… 84

2.4.2. Análisis cognitivo……………………………………………... 90

2.4.2.1. Aprendizaje, errores y dificultades en relación al Álgebra Lineal y al contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales……………………………………………... 91

Resumen………………………………………………………………………. 101

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA…………………………………………….. 105

3.1. Introducción………………………………………………………………… 105

3.2. Pregunta y objetivos de investigación…………………………………… 106

3.2.1. Objetivo general……………………………………………………. 107

3.2.2. Objetivos específicos……………………………………………….. 107

3.3. Caracterización de la investigación: paradigma y perspectivas ontológica, epistemológica y metodológica……………………………………………... 107

3.4. Diseño de investigación…………………………………………………….. 110

3.4.1. El estudio de caso…………………………………………………… 111

3.4.2. Selección de los casos y contexto…………………………………… 112

3.4.2.1. Caso de Jordy…………………………………………………… 113

3.4.2.2. Caso de Carlos………………………………………………….. 113

3.5. Proceso e instrumentos de recogida de información……………………… 113

3.5.1. Observaciones de aula………………………………………………. 114

3.5.2. Entrevista semiestructurada………………………………………… 116

3.5.2.1. Preguntas de la entrevista semiestructurada 1…………………... 117

3.5.2.2. Preguntas de la entrevista semiestructurada 2…………………... 119

3.5.2.3. Preguntas de la entrevista semiestructurada 3…………………... 120

3.5.2.4. Preguntas de la entrevista semiestructurada 4…………………... 122

3.6. Proceso e instrumentos de análisis de información……………………….. 123

3.6.1. Instrumento de análisis de conocimiento……………………………. 125

3.6.2. Instrumento de análisis de concepciones……………………………. 126

3.6.2.1. Metodología…………………………………………………….. 127

3.6.2.2. Sentido de la asignatura………………………………………… 130

3.6.2.3. Concepción del aprendizaje…………………………………….. 132

3.6.2.4. Papel del alumno………………………………………………….. 136

3.6.2.5. Papel del profesor………………………………………………. 139

Resumen………………………………………………………………………… 145

CAPÍTULO 4. RESULTADOS………………………………………………... 149

4.1. Introducción…………………………………………………………… 149

4.2. Análisis de conocimiento de Jordy……………………………………….. 151

4.2.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Jordy. 151

4.2.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)………………………………. 152

4.2.1.2. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)……………….. 155

4.2.1.3. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)…… 156

4.2.1.4. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)…………………………………………... 157

4.2.2. Conocimiento especializado de Jordy………………………………. 158

4.2.2.1. Conocimiento sobre matrices …………………………………... 163

4.2.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales…………………………………………….. 187

4.2.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Jordy sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales………. 204

4.3. Análisis de conocimiento de Carlos……………………………………… 214

4.3.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Carlos…………………………………………………………….. 214

4.3.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)………………………………. 214

4.3.1.2. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)……... 216

4.3.1.3. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)………………………………………….. 217

4.3.2. Conocimiento especializado de Carlos……………………………… 217

4.3.2.1. Conocimiento sobre matrices…………………………………… 222

4.3.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales…………………………………………….. 237

4.3.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Carlos sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales……………………………………………………………… 242

4.4. Análisis de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…………………………………………………….. 249

4.4.1. Metodología…………………………………………………… 249

4.4.2. Sentido de la asignatura……………………………………….... 258

4.4.3. Concepción del aprendizaje……………………………………… 263

4.4.4. Papel del alumno………………………………………………. 274

4.4.5. Papel del profesor……………………………………………… 277

4.4.6. Resumen de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas……………………………… 280

4.5. Análisis de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…………………………………………………… 283

4.5.1. Metodología…………………………………………………… 283

4.5.2. Sentido de la asignatura………………………………………….. 291

4.5.3. Concepción del aprendizaje……………………………………… 298

4.5.4. Papel del alumno………………………………………………. 305

4.5.5. Papel del profesor…………………………………………………… 310

4.5.6. Resumen de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas……………………………………… 313

4.6. Conocimiento especializado y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…………………………………………… 315

4.6.1. Relaciones entre el conocimiento especializado de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas… 316

4.6.2. Relaciones entre el conocimiento especializado de Carlos y sus con concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas… 322

Resumen……………………………………………………………………… 326

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES………………………………………….. 329

5.1. Respecto de los objetivos planteados…………………………………….. 329

5.2. Aportaciones de la investigación………………………………………….. 334

5.3. Limitaciones y perspectiva de la investigación……………………………. 335

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS……………………………………... 338

INDICE DE ANEXOS DIGITALES……………………………………….. 355

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Aplicaciones de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales……………………………………………………….............	70
Tabla 2.	Fenómenos a los que responden las aplicaciones de las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales……………….......	71
Tabla 3.	Fecha de observación, tema y tiempo de duración de las sesiones de clases de Jordy observadas durante dos períodos lectivos…………	114
Tabla 4.	Fecha de observación, tema y tiempo de duración de las sesiones de clases de Carlos observadas durante dos períodos lectivos…...........	115
Tabla 5.	Guion de la entrevista semiestructurada 1 con su respectiva justificación…………………………………………………...........	118
Tabla 6.	Guion de la entrevista semiestructurada 2 con su respectiva justificación………………………………………………………...	119
Tabla 7.	Guion de la entrevista semiestructurada 3 con su respectiva justificación…………………………………………………….…......	121
Tabla 8.	Guion de la entrevista semiestructurada 4 con su respectiva justificación…………………………………………………….......	123
Tabla 9.	Categorías y subcategorías correspondientes a cada uno de los subdominios del MTSK consideradas en el análisis del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal…	126
Tabla 10.	Resumen de indicadores para análisis de tendencias didácticas…….	142
Tabla 11.	Unidades de información correspondientes al MTSK evidenciado en la práctica de aula de Jordy………………………………………	161
Tabla 12.	Conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Jordy bajo el enfoque del MTSK…………………………………………………	208
Tabla 13.	Unidades de información correspondientes al MTSK evidenciado en la práctica de aula de Carlos……………………………………..	221
Tabla 14.	Conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Carlos bajo el enfoque del MTSK…………………………………………………	246

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza…………………………………………………..	27
Figura 2.	Dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas……………………………………….	34
Figura 3.	Componentes del análisis didáctico…………………………...	52
Figura 4.	Dimensiones del análisis de contenido que abarcan el significado de un concepto…………………………………………………	53
Figura 5.	Mapa conceptual de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales…………………………………………….	63
Figura 6.	Representación de un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado…………………………………………………...	67
Figura 7.	Representación esquemática-pictográfica de una matriz simétrica	68
Figura 8.	Sistemas de representación de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales…………………………………………	69
Figura 9.	Paralelepípedo con vértice en el origen de coordenadas…………	81
Figura 10.	Red eléctrica…………………………………………………...	87
Figura 11.	Constitución del capítulo de antecedentes y marco teórico de la investigación………………………………………………….....	103
Figura 12.	Proceso metodológico seguido en la investigación………………	146
Figura 13.	Subdominios y categorías del MTSK evidenciados en la práctica de Jordy………………………………………………………….	159
Figura 14.	Conocimiento de Jordy sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK………………	160
Figura 15.	Esquema que detalla el conocimiento especializado de Jordy sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK……………………………………..	206
Figura 16.	Subdominios y categorías del MTSK evidenciados en la práctica de Carlos……………………………………………………	219
Figura 17.	Conocimiento de Carlos sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK………………	220
Figura 18.	Esquema que detalla el conocimiento especializado de Carlos sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK……………………………………..	244

Figura 19.	Relaciones entre el conocimiento especializado de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas………………………………………………………...	321
Figura 20.	Relaciones entre el conocimiento especializado de Carlos y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas………………………………………………………...	325

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación y contextualización del estudio

1.2. Estructura de la memoria de investigación

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación y contextualización del estudio

Con el afán de implementar la mejora continua y alcanzar estándares de calidad, la Educación Superior en el Ecuador ha experimentado procesos de cambio en los últimos años. La preocupación constante por optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los futuros profesionales constituyó la motivación inicial para la realización de este estudio, considerando que el profesor debe reflexionar sobre la compleja tarea de enseñar matemáticas en las instituciones de educación superior[1].

En el Ecuador, un tema prioritario lo constituye la evaluación y acreditación institucional de carreras y profesores de la educación superior para lograr un mejoramiento continuo y la entrega a la sociedad de profesionales de calidad (CEAACES, 2011)[2]. Sobre esta base, se requieren una serie de acciones y, entre otros aspectos, se puede mencionar la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje en el contexto universitario que contribuirá a la búsqueda de conocimiento y mejora de la docencia.

Es de gran relevancia realizar investigaciones que contribuyan a comprender el pensamiento y acciones del profesor en la enseñanza, y el aprendizaje. La mejora de las enseñanzas impartidas por los profesores en los salones de clases es clave para la mejora del aprendizaje, y aquí tiene un papel esencial el conocimiento del contenido y didáctico del contenido del profesor. La gran mayoría de los profesores universitarios de matemáticas, a diferencia de otros colectivos docentes, no cuenta con la formación necesaria específica relativa a la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, que les faculte para realizar representaciones que ayuden a desarrollar habilidades matemáticas en los estudiantes. La determinación de la validez de un argumento matemático, o la selección de una representación matemática, si bien requiere

---

[1] Según el Art. 14, de la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador, Registro Oficial N° 298; son instituciones de Educación Superior a) Las universidades, escuelas politécnicas públicas y particulares, debidamente evaluadas y acreditadas conforme a dicha Ley; b) Los institutos superiores técnicos, tecnológicos, pedagógicos, de artes y los conservatorios superiores, tanto públicos como particulares, debidamente evaluados y acreditados, conforme a dicha Ley. La presente investigación se desarrolló en el contexto de una Universidad pública del Ecuador.

[2] Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior del Ecuador.

conocimientos amplios de la disciplina, también requiere conocimiento y habilidad matemática, ya que ambos son importantes para la enseñanza.

Nuestra inquietud inicial (donde nos preguntábamos por cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas en las aulas universitarias, y qué debería conocer el profesor para optimizar este proceso) nos llevó a involucrarnos en el apasionante mundo de la educación matemática y, a medida que reflexionábamos nos formulamos estas dos preguntas: ¿qué debería conocer el profesor universitario? y ¿cómo es el conocimiento del profesor que enseña en las aulas universitarias?, considerando que en ocasiones estos profesores no han tenido una formación específica en el campo de la docencia, y pensando que la comprensión del conocimiento que pone en juego en las aulas contribuiría a tener una idea más amplia para participar en el futuro en el diseño de un programa de capacitación para el docente universitario de matemáticas.

Así, nuestro interés surge por profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas. En un primer momento pensamos en hacerlo bajo el enfoque del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008). No obstante, debido a las dificultades encontradas en nuestro grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, en la caracterización y delimitación de los distintos subdominios que integran el MKT, reportadas en los trabajos de Flores, Escudero & Carrillo (2013), decidimos realizar nuestro estudio bajo el enfoque del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). Elegimos este modelo teórico-analítico por su carácter integrador, ya que, por una parte, pretende captar la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas en su conjunto y, por otra, porque pone su foco en el conocimiento específico del profesor de matemáticas, frente al de otros profesionales que usan la matemática.

Por tanto, centrados ya en una disciplina específica, y considerando que aún es escaso el estudio del conocimiento del profesor universitario en el entorno de la Educación Matemática, en esta investigación nuestro objetivo central es aproximarnos al conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal a través del análisis de su práctica educativa que versa sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Además, se incluye como objetivo secundario identificar las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de manera que podamos establecer relaciones entre su conocimiento especializado y sus concepciones. A su vez, está presente nuestro interés por contrastar la validez del MTSK para el análisis del conocimiento de profesores universitarios.

1.2. Estructura de la memoria de investigación

Nuestra memoria de investigación se compone de cinco capítulos, referencias bibliográficas y anexos. En el presente capítulo, correspondiente a la Introducción, exponemos la motivación y contextualización del estudio, y cómo está estructurado este trabajo.

En el segundo capítulo, denominado antecedentes y Marco Teórico, presentamos las bases teóricas de la investigación. Se compone de una introducción; dos primeros apartados relativos a la investigación sobre conocimiento profesional del profesor de matemáticas (uno de antecedentes, donde incluimos una revisión sobre varios modelos de conocimiento de los profesores, y otro con nuestro marco teórico, en el que figura el modelo de conocimiento MTSK); una revisión sobre creencias y concepciones de los profesores; y un análisis didáctico compuesto a su vez por el análisis de contenido y cognitivo correspondiente a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

El tercer capítulo, que está dedicado a la Metodología, describe el camino que hemos seguido en la investigación para alcanzar los objetivos propuestos. Está constituido por una introducción; pregunta de investigación y objetivos del estudio; fundamentos como el paradigma de investigación y nuestra perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica; el diseño de investigación que incluye el método cualitativo que hemos empleado (estudio de casos); las técnicas o instrumentos de recogida de información (observaciones de aula no participantes y entrevistas semiestructuradas); y los instrumentos de análisis, tanto del conocimiento especializado de los profesores como de sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el cuarto capítulo presentamos los resultados del estudio y consta de una introducción; el análisis detallado del conocimiento de los profesores a la luz del modelo MTSK, y los dominios, subdominios y categorías que lo componen; el análisis de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas focalizado en el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; y el apartado correspondiente al establecimiento de posibles relaciones entre el conocimiento especializado y las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el quinto y último capítulo exponemos las Conclusiones. Allí están detalladas las aportaciones de la investigación de acuerdo a los objetivos que nos hemos planteado, así como las limitaciones del estudio y nuestra perspectiva hacia futuras investigaciones.

Presentamos además el listado de Referencias Bibliográficas de la investigación, y en versión digital los Anexos. En ellos hemos incluido la transcripción de las sesiones de clases de los dos profesores, así como sus respuestas a las entrevistas semiestructuradas, el análisis preliminar del conocimiento especializado de cada sesión de clases con figuras que lo representan, y el análisis preliminar de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

2.2. Conocimiento profesional

2.2.1. Antecedentes

2.2.1.1. Conocimiento profesional del profesor

2.2.1.2. Conocimiento profesional del profesor de Álgebra

2.2.2. Marco Teórico

2.2.2.1. Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge

2.2.2.2. Ejemplos para la enseñanza como parte del conocimiento del profesor de matemáticas

2.3. Creencias y concepciones

2.3.1. Algunas definiciones sobre creencias y concepciones

2.3.2. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

2.3.2.1. Características o aspectos didácticos de los profesores

2.4. Análisis didáctico sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

2.4.1. Análisis de contenido

2.4.1.1. Desarrollo histórico de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

2.4.1.2. Estructura conceptual (mapa conceptual)

2.4.1.3. Sistemas de representación

2.4.1.4. Fenomenología

2.4.1.4.1. Ejemplos de aplicaciones de las matrices

2.4.1.4.2. Ejemplos de aplicaciones de los determinantes

2.4.1.4.3. Ejemplos de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

2.4.2. Análisis cognitivo

2.4.2.1. Aprendizaje, errores y dificultades en relación al Álgebra Lineal y al contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Resumen

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

Un marco teórico o conceptual es aquel que incluye diferentes puntos de vista y destaca una serie de razones para adoptar algunos puntos y no otros (Einsenhart, 1991). Estamos de acuerdo con Lester (2010) al afirmar que el uso de un marco de referencia en una investigación proporciona una estructura para el diseño, la concepción y la visualización del estudio, además de establecer las bases que permiten identificar la información relevante y justificar las evidencias que se muestren, las cuales conducen a la presentación de las conclusiones y, finalmente, a una comprensión más profunda del fenómeno que se está investigando.

Este capítulo está destinado a la exposición de los componentes teóricos que sustentan nuestra investigación. El mismo se compone de un apartado sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, acompañado de literatura sobre modelos de conocimiento del profesor desarrollados por diversos investigadores; el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas propuesto por el Grupo SIDM[3] de la Universidad de Huelva (España) a través del cual analizamos el conocimiento de los dos profesores participantes en la presente investigación; y fundamentación sobre el uso de ejemplos para la enseñanza.

El siguiente apartado está compuesto por referentes teóricos de creencias y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la descripción de las principales características de las tendencias didácticas de los profesores que forman parte del instrumento de Carrillo (1998) y Contreras (1999), y que nos ha sido de utilidad para analizar las concepciones de los profesores.

En el último apartado incluimos información correspondiente al análisis didáctico (de contenido y cognitivo) (Rico, 1997; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009) sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que hemos creído conveniente realizar

[3] El SIDM es el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática. Tiene su sede en la Universidad de Huelva, España. En el grupo participan investigadores de universidades de España, Portugal, México, Chile, Perú, Ecuador y Brasil, entre los que se encuentra la autora de este estudio.

como una forma de profundizar en el contenido con el objeto de comprender el conocimiento especializado en relación a dicho contenido de los profesores que forman parte de esta investigación. Así, el análisis de contenido se enfoca en el desarrollo histórico del contenido en mención, su estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Por su parte, en el análisis cognitivo hemos hecho una revisión de literatura sobre los principales errores y dificultades relacionados al Álgebra Lineal y específicamente al contenido ya citado.

2.2. Conocimiento profesional

2.2.1. Antecedentes

El interés de nuestra investigación se centra en el conocimiento del profesor y, por tanto, creemos conveniente empezar refiriéndonos al constructo conocimiento y cómo lo asumimos en este estudio.

De forma general y relacionado al conocimiento de un individuo y sus usos, Pajares (1992) indica que usa el término conocimiento para referirse a un gran campo de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por los seres humanos. Esta afirmación la asociamos con la definición mostrada por Schoenfeld (2010): *Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!* (p. 25). Consideramos que ambas definiciones son compatibles en su sentido de información de la que disponen los seres humanos.

Por su parte, Skemp (1978) relaciona el conocimiento con la comprensión, que define como la asimilación de diferentes elementos dentro de esquemas que constituyen el conocimiento. Ligado a la comprensión, el autor propone inicialmente dos categorías, siendo estas la comprensión *relacional,* referida a saber qué hacer y por qué se debe hacer; y la comprensión *instrumental,* definida como saber las reglas sin las razones. A posteriori, propuso dos categorías más: la comprensión *lógica,* entendida como la organización de acuerdo con una prueba formal (conciencia de la estructura de lo que se hace) (Skemp, 1979); y la comprensión *simbólica,* relacionada con una conexión de simbolismo y notación para las ideas asociadas (Skemp, 1982). Estas categorías, que podrían asociarse con la caracterización del conocimiento del profesor, nos llevan a pensar que éste va más allá de saber las reglas, y que, además, se compone del conocimiento de fundamentos, conexiones y estructuras que le dan sentido a sus acciones.

Lo anterior pone de manifiesto un conocimiento profundo del profesor que relacionamos con una disciplina, en este caso, matemáticas, y de acuerdo con el criterio de Ma (1999) el conocimiento profundo de la matemática fundamental se caracteriza por poseer amplitud (capacidad de conectar un tópico con otros similares), profundidad (capacidad de conectar un tópico con aquellos de mayor potencia conceptual) y rigurosidad (capacidad de conectar todos los tópicos). Un profesor con dicho conocimiento es capaz de revelar y representar conexiones entre conceptos y procedimientos matemáticos a los estudiantes; aprecia diferentes facetas de una idea y varias aproximaciones a una solución, así como sus ventajas y desventajas, y tiene una comprensión fundamental de todo el currículo matemático elemental.

En cuanto a los referentes de este conocimiento del profesor, para Ponte & Chapman (2008), el conocimiento de matemáticas tiene un referente en la disciplina académica de la matemática (uno de los más sofisticados y formalizados campos de pensamiento humano), mientras que el conocimiento sobre la enseñanza de la matemática lo tiene en el dominio del conocimiento profesional (un terreno altamente dependiente de condiciones y de valores sociales y educativos en constante evolución, orientaciones curriculares y recursos tecnológicos).

Cabe mencionar que para nuestros fines investigadores, al interior del grupo SIDM de la Universidad de Huelva, consideramos las definiciones de Pajares (1992) y Schoenfeld (2010) como punto de acuerdo en lo referente a lo que entendemos por conocimiento en el modelo MTSK (Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado & Flores, 2014). En cuanto al conocimiento profesional, lo asumimos en este estudio como la conjunción de saberes y experiencias de un profesor, aquellos que posee y de los que hace uso en el desarrollo de su práctica docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2005). El mismo *se genera por la relación dialéctica entre teoría y práctica, indisociable del sujeto que conoce, del contexto donde lo construye y a partir de indagaciones intencionales* (Climent, 2011, p. 52).

Son cuatro los factores a los que se atribuye el origen del conocimiento profesional del profesor: estos son la cosmovisión o ideología, su experiencia como discente, experiencia como docente y los saberes académicos adquiridos. La cosmovisión del profesor es vista como su forma de interpretar el mundo, relacionada con sus creencias (sobre el mundo en general), que pueden ser compartidas socialmente y estar escasamente fundamentadas. La experiencia discente del profesor es adquirida a lo largo de su formación y también tiene un impacto en sus concepciones. Con su experiencia como docente el profesor adquiere y modifica su conocimiento y concepciones. Finalmente, los saberes académicos están relacionados con las disciplinas que institucionalmente se consideran fuentes del conocimiento del profesor y repercuten sobre su conocimiento de la materia y sus concepciones sobre la misma, así como su conocimiento y concepciones sobre enseñanza y aprendizaje, y conocimiento del currículo matemático escolar (Climent, 2005[4]).

Estos factores indican que el conocimiento profesional de un profesor no es estático, y se relacionan con lo sostenido por Ribeiro (2010) en cuanto a que el conocimiento profesional se (re) construye, (re) adecúa y (re) elabora a lo largo del tiempo, siendo influenciado por un conjunto de factores, donde la experiencia con que somos confrontados asume un papel destacado. Estamos de acuerdo con el autor, quien afirma que el proceso de enseñanza no debe ser rutinario y monótono, es necesario saber más que solamente el contenido que se pretende enseñar. En esta misma línea, Prieto (2007) indica que la experiencia de enseñar permite adquirir y mejorar las destrezas, si bien por sí sola no es suficiente para llegar a dominarlas. Así, transformar la experiencia docente en conocimiento sobre la enseñanza depende de la capacidad de reflexionar, lo que equivale a decir que la experiencia docente de los profesores es la base fundamental sobre la que se asienta su proceso de reflexión.

2.2.1.1. Conocimiento profesional del profesor

En los últimos años, diversos grupos de investigación han centrado sus esfuerzos por caracterizar el conocimiento del profesor. De ahí, que en este apartado referimos modelos como el de Shulman (1986, 1987) que guarda relación con el conocimiento del profesor

[4] Las reflexiones de Climent (2005) reflejadas en este párrafo surgen de las discusiones mantenidas en el grupo de investigación DESYM, y constan en un documento elaborado con los profesores Ana María Wamba (Didáctica de las Ciencias Experimentales) y José María Cuenca (Didáctica de las Ciencias Sociales).

para la enseñanza en general y que constituye la base teórica de otros modelos que caracterizan el conocimiento para la enseñanza de la matemática. De ellos citaremos a Fennema & Franke (1992); Ball et al. (2008) y Rowland, Huckstep & Thwaites (2005). Hay otros modelos relacionados con el conocimiento del profesor en un área específica como el álgebra, entre los que nombramos los de Artigue, Assude, Grugeon & Lenfant (2001), y McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk (2012).

Shulman (1986), apoyándose en las investigaciones de Schwab (1978), sostiene que el conocimiento de un tema para la enseñanza requiere conocer más que solo conceptos; es decir, en el caso de las matemáticas el profesor además de conocer un determinado concepto o procedimiento debe entender por qué es así. Este investigador (1987, p.8) propuso siete categorías referentes a lo que un docente necesita conocer para desarrollar una enseñanza eficaz. Las cuatro primeras categorías corresponden a aspectos generales del conocimiento y las tres últimas hacen referencia a aspectos específicos vinculados con el contenido que se enseña:

Conocimiento pedagógico general (PK)[5]***:*** Incluye los principios generales y estrategias de gestión y organización del aula.

Conocimiento de las características de los estudiantes: Se refiere al conocimiento de las concepciones e ideas de los alumnos para el estudio de los temas frecuentemente enseñados.

Conocimiento del contexto educativo: Abarca el funcionamiento del grupo o de la clase, la financiación y gobierno de los distritos escolares, con el carácter de las comunidades y las culturas.

Conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores: Incluye sus bases filosóficas e históricas.

Conocimiento del contenido (SMK[6]*):* Definido como el conocimiento de la asignatura en sí, que incluye la cantidad y organización del conocimiento en la mente del profesor.

[5] Siglas en inglés PK, correspondientes a Pedagogical Knowledge.
[6] Siglas en ingles SMK, correspondientes a Subject Matter Knowledge.

Conocimiento pedagógico del contenido (PCK[7]): Considerado como la dimensión del conocimiento para la enseñanza, que incluye conocer aquellas formas más útiles para representar las ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Este conocimiento le permite al profesor hacer comprensible un tema, así como saber las razones o por qué el aprendizaje de ciertos temas es fácil o difícil.

Conocimiento del currículo: Abarca el conocimiento de programas de estudio, los materiales didácticos disponibles que guardan relación con esos programas y las indicaciones y contraindicaciones del uso del programa de estudios o materiales en circunstancias determinadas. Se divide en *conocimiento curricular vertical* y *conocimiento curricular lateral*. El primero incluye el conocimiento de temas que han sido y serán impartidos en la escuela en la misma asignatura durante los años anteriores y posteriores y el segundo, comprende la capacidad que tiene el profesor para relacionar los contenidos de un curso con aquellos temas que simultáneamente están siendo discutidos en otras clases.

Las categorías propuestas por Shulman (1986) constituyeron también el punto de partida para la construcción de otros modelos como el de Fennema & Franke (1992) que se sustenta en el carácter interactivo y dinámico del conocimiento para la enseñanza y en el hecho de que ocurre en un contexto único, el del aula del propio profesor, concediendo un papel muy relevante a las creencias de este.

El modelo de Fennema & Franke (1992) contiene el *conocimiento de las matemáticas* que incluye los conceptos, procedimientos y la resolución de problemas dentro del dominio donde se enseña. El *conocimiento pedagógico* encierra estrategias, rutinas de enseñanza y habilidades de gestión en el aula. El *conocimiento de los aprendices* abarca conocimiento sobre las dificultades y procesos de aprendizaje específicos. Para estos investigadores es importante tener en cuenta el contexto y las creencias de los profesores y el reto está en buscar las interacciones entre todas las componentes del conocimiento del profesor, ver el papel que juegan en la enseñanza de las matemáticas y cómo los roles de cada una cambian en las interacciones con los estudiantes.

En los últimos años, Ball et al. (2008) han trabajado arduamente en el modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) y señalan que este incluye

[7] Siglas en ingles PCK, correspondientes a Pedagogical Content Knowledge.

los conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo la labor de enseñanza de matemáticas; se refiere a las tareas implicadas en la enseñanza y las exigencias matemáticas de estas tareas (p. 395). El MKT confirma la especificidad del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, diferencia componentes de conocimiento (dominios, subdominios, descriptores) e incluye el subdominio de conocimiento especializado del contenido, que es primordial en la tarea del profesor (Carreño, Rojas, Montes & Flores, 2013).

Asimismo, es necesaria la comprensión del currículo escolar, ya que la enseñanza consiste en mostrar a los estudiantes cómo resolver problemas, responder sus preguntas y comprender el trabajo que realizan. El MKT puede actuar sobre la capacidad de los profesores para motivar a los estudiantes a aprender, para organizar las aulas en la búsqueda de una enseñanza provechosa y sobre todo, para producir avances en el aprendizaje (Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007).

El modelo de Ball et al. (2008) (Figura 1) hace referencia a dos dominios: conocimiento del contenido[8] y conocimiento didáctico del contenido[9]. El conocimiento del contenido se subdivide en: *conocimiento común del contenido* (CCK[10]); *conocimiento especializado del contenido* (SCK[11]) y *conocimiento del horizonte matemático* (HCK[12]). El conocimiento didáctico del contenido se subdivide en: *conocimiento del contenido y estudiantes* (KCS[13]); *conocimiento del contenido y enseñanza* (KCT[14]) y *conocimiento del contenido y el currículo* (KCC[15]).

Conocimiento común del contenido (CCK): Se refiere al conocimiento de las matemáticas y competencias necesarias para resolver las tareas, y el término "común" en este caso significa que se trata de un conocimiento usado en una amplia variedad de escenarios, es decir, no es único para la enseñanza (Ball et al., 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008).

---

[8] Denominación en ingles: Subject matter knowledge.
[9] Denominación en ingles: Pedagogical content knowledge.
[10] Siglas en inglés CCK, correspondientes a Common content knowledge.
[11] Siglas en inglés SCK, correspondientes a Specialized content knowledge.
[12] Siglas en ingles HCK, correspondientes a Horizon content knowledge.
[13] Siglas en inglés KCS, correspondientes a Knowledge of content and students.
[14] Siglas en inglés KCT, correspondientes a Knowledge of content and teaching.
[15] Siglas en ingles KCC, correspondientes a Knowledge of content and curriculum.

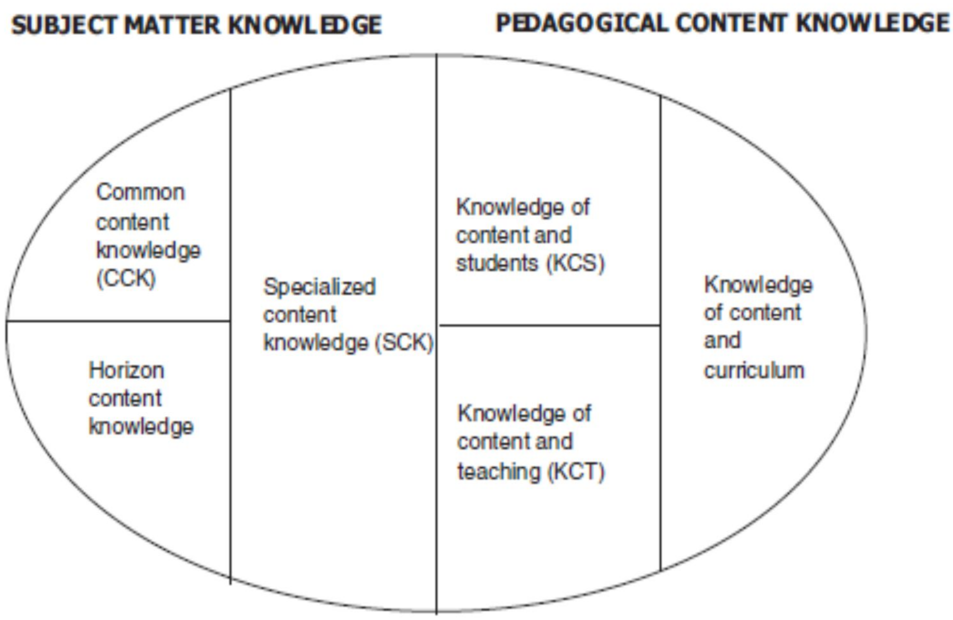


Figura 1. Dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 403)

Conocimiento especializado del contenido (SCK): Es el conocimiento matemático y habilidad única para la enseñanza de ésta; las demandas de la enseñanza de matemáticas requieren un conocimiento especializado que no es necesario en otros ámbitos (Ball et al., 2008). Incluye no sólo la conciencia por el profesor de los distintos métodos de resolución posibles, sino también su disposición a valorar la variedad y la capacidad para interpretar la validez de las soluciones alternativas o inesperadas en la inspección del trabajo de los estudiantes. Además, esta particular forma de conocimiento permite a los maestros identificar y analizar los errores de los estudiantes, y reconocer soluciones generalizables interesantes que pueden ser productivas para compartir con los demás (Hill et al., 2008).

El conocimiento del horizonte matemático (HCK): Es la toma de conciencia de la forma en que se relacionan los temas de matemáticas incluidos en el plan de estudios; es decir, los profesores necesitan conocer cómo las matemáticas que enseñan están relacionadas (conexiones) con las matemáticas que aprenderán los estudiantes en un nivel superior (Ball et al., 2008). Un maestro que deroga este conocimiento es menos probable que sea capaz de comunicar a los estudiantes experiencias actuales, y seguramente tendría dificultades para hacer esto de forma interactiva (Hill et al., 2008).

Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS): Es el conocimiento que combina saber acerca de los estudiantes y de las matemáticas. Los maestros deben anticipar lo que los estudiantes puedan pensar y lo que les causará confusión. Al elegir un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador. Al asignar una tarea, los profesores tienen que anticipar lo que los estudiantes pueden hacer con ella y si les resultará fácil o difícil. Los maestros también deben ser capaces de escuchar e interpretar a sus estudiantes (Ball et al., 2008). Incluye tener expectativas realistas y desafiantes para los logros de los estudiantes, a sabiendas de que pueden trabajar de manera idiosincrásica y emocionante, incluso, y conocer la manera de comprometer a los individuos en su aprendizaje. También encierra el saber cómo apoyar a los estudiantes que pueden experimentar dificultades y a aquellos a los que la tarea encomendada no constituyó un reto (Hill et al., 2008).

Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT): Combina el saber acerca de la enseñanza y sobre las matemáticas. Los profesores eligen con qué ejemplos comenzar con un tema y con cuáles profundizar en el contenido; evalúan las ventajas y desventajas de las representaciones utilizadas para enseñar una idea específica y determinan qué métodos y procedimientos son instructivos. Incluye el conocimiento de formas de representación de los conceptos, y la conciencia de que los estudiantes pueden contribuir productivamente, esta última referida a la decisión del profesor sobre qué contribuciones de los estudiantes desarrollar, cuáles ignorar o retomar más adelante. Cada una de estas tareas requiere de una interacción entre el conocimiento matemático específico y una comprensión de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje del estudiante (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008).

Conocimiento del contenido y el currículo (KCC): Incluye el conocimiento de los programas de estudio, orientaciones curriculares y materiales disponibles para la enseñanza, que le permiten al profesor seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes (Ball et al., 2008).

Distinguir los dominios y subdominios del MKT a través de la observación de las labores del profesor en el salón de clases constituye una tarea bastante compleja. Al respecto, Ball et al. (2008) indican que es difícil discriminar el conocimiento especializado (SCK) del conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), y explica esta afirmación con el siguiente ejemplo: Teniendo en cuenta lo que involucra la selección de un ejemplo numérico para determinar la comprensión de los números decimales por parte de los estudiantes se pueden definir cuatro dominios: ordenar una lista de decimales (CCK); con la generación de la lista de decimales revelar cuestiones matemáticas claves (SCK); reconocer qué parte de la enseñanza de números decimales podría causar a los estudiantes mayor dificultad (KCS) y decidir qué hacer con las dificultades de los estudiantes (KCT).

Por su parte, Rowland et al. (2005), también basados en las categorías propuestas por Shulman (1986, 1987), realizaron un estudio para determinar los conocimientos de contenido matemático y pedagógico de estudiantes para profesores de formación elemental y desarrollaron un marco conceptual para identificar y definir las diversas formas en que el conocimiento del contenido de matemáticas influye en las decisiones y acciones de los nuevos maestros en el aula; proponiendo finalmente cuatro categorías que denominaron "cuarteto del conocimiento" (KQ[16]). Estas categorías son las siguientes:

Fundamentos: Se trata de conocimientos que ya se poseen, con independencia de si se estaban utilizando en forma intencionada. La característica clave de esta categoría es su forma proposicional, es decir, lo que los profesores aprenden en su educación personal. Otros componentes que incluye son el conocimiento y la comprensión de las matemáticas en sí, el pensamiento que ha resultado de la investigación sistemática en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y propósitos de la educación matemática.

Transformación: El conocimiento en la acción, se relaciona con la capacidad de un maestro para transformar el conocimiento del contenido matemático, de manera que pueda ayudar a alguien a aprender (Shulman, 1986; Ball, 1988). Para presentar ideas a los estudiantes se utiliza la representación, ejemplos, explicaciones y demostraciones.

Conexión: Comprende la integridad de los contenidos matemáticos en la mente del maestro y su manejo del discurso matemático en el aula; además, la secuencia de los temas de instrucción en y entre las clases, orden de las tareas y ejercicios.

Contingencia: Se refiere a los acontecimientos en el aula, que son casi imposibles de planificar. Está compuesto por la disposición de responder a las ideas de los estudiantes.

[16] Siglas en inglés KQ, correspondientes a Knowledge Quartet.

Como hemos visto, los modelos presentados tienen en común el estar fundamentados en los trabajos de Shulman (1986, 1987) y el reconocimiento de que el conocimiento profesional del profesor de matemáticas engloba componentes específicos del contenido y también de su enseñanza y aprendizaje.

2.2.1.2. Conocimiento profesional del profesor de Álgebra

En el mundo de la Educación Matemática también ha surgido el interés por el conocimiento del profesor en una disciplina específica, y en este caso el Álgebra. Así, en la caracterización del conocimiento profesional del profesor de Álgebra y la forma en que este se desarrolla, Artigue et al. (2001) distinguen tres dimensiones del conocimiento que no son independientes entre sí. Estas dimensiones representan el conocimiento que un profesor ha adquirido o adquirirá dejando de lado el conocimiento sobre los procesos y contextos en los que el profesor desarrolla tal conocimiento (Li, 2007). Estas dimensiones son:

Dimensión epistemológica: Abarca el conocimiento de a) la complejidad del sistema simbólico algebraico y las dificultades de su desarrollo histórico; b) cómo usar de forma flexible herramientas algebraicas en la solución de diferentes tipos de problemas que son internos o externos al campo de las matemáticas; c) el contenido y estructura del álgebra; d) cómo tratar con objetos algebraicos, tomando en cuenta su semántica y sintaxis; e) el papel y el lugar del álgebra en las matemáticas; f) la naturaleza de las tareas (relación entre estas y el mundo); y g) las conexiones entre el álgebra y otras áreas de las matemáticas y los fenómenos físicos.

Dimensión cognitiva: Incluye el conocimiento sobre el proceso de aprendizaje en álgebra, es decir, saber a) sobre el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes; b) interpretación de los estudiantes de conceptos y notación algebraica; c) ideas erróneas de los estudiantes y dificultades en álgebra; y d) formas de motivar a los alumnos.

Dimensión didáctica: Implica el conocimiento de a) plan de estudios del álgebra; b) objetivos específicos de la enseñanza algebraica en un nivel determinado; c) posibles progresiones y actividades para la enseñanza de álgebra; d) tareas de evaluación; y e) álgebra relacionada con recursos educativos como libros de texto, otros materiales, sitios web y herramientas informáticas.

Las dimensiones propuestas por Artigue et al., (2001) pueden verse como un modelo amplio para caracterizar el conocimiento del profesor, donde lo considerado en la dimensión epistemológica es el conocimiento de Álgebra del profesor sobre un contenido matemático desarrollado social y culturalmente; la dimensión cognitiva es el conocimiento del profesor en relación al aprendizaje de los estudiantes de Álgebra; y la dimensión didáctica es el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de Álgebra (Li, 2007).

Otro modelo que surge de la necesidad de estudiar el conocimiento del profesor de Álgebra para la enseñanza es el de McCrory et al. (2012). Estos investigadores, en base al análisis de textos de Álgebra Lineal de secundaria, entrevistas y vídeos, establecieron un marco con dos dimensiones denominadas: *Knowledge of Algebra for Teaching* y *Mathematical Uses of Knowledge in Teaching* (or *Teaching Practices*).

A su vez, la dimensión *Knowledge of Algebra for Teaching* incluye las categorías *Knowledge of School Algebra* (conocimiento del contenido que se enseña en los cursos de secundaria de Álgebra), *Knowledge of Advanced Mathematic*s (conocimientos matemáticos avanzados, en particular del nivel universitario, que da al profesor una perspectiva sobre ideas matemáticas más allá del Álgebra Escolar) y *Mathematics-for-Teaching Knowledge* (abreviado *Teaching Knowledge*) (conocimiento de la matemática que es útil para la enseñanza, es el contenido que puede ser enseñado en una clase de matemáticas para profesores o aprendido en la práctica de enseñanza, pero que, para la mayoría de los profesores no va incluido en su proceso de educación matemática formal).

En cuanto a la dimensión *Mathematical Uses of Knowledge in Teaching* (o *Teaching Practices*), McCrory et al. (2012) señalan que se compone de las categorías *descompressing* [en la línea de "unpacking" (Ball & Bass, 2000; Cohen, 2004) referente al conocimiento del profesor para descomprimir los procedimientos o algoritmos, implica asignar un significado fundamental a los símbolos y algoritmos que son empleados en matemáticas avanzadas de forma automática]; *trimming* (basado en la idea de Bruner, 1960) de enseñanza de conceptos de forma "intellectually honest", incluye el conocimiento de versiones simples de conceptos avanzados que se examinarán en cursos posteriores, por ejemplo, determinados conceptos de Álgebra de secundaria que se revisan en el Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta y Cálculo; finalmente, *bridging*, que comprende el conocimiento del profesor de Álgebra para conectar y vincular las matemáticas a través de temas, cursos, conceptos y objetivos, incluyendo la conexión de las ideas del Álgebra Escolar con el Álgebra Abstracta y el Análisis Real.

Podemos apreciar cómo las categorías propuestas por McCrory et al. (2012) incluyen no sólo conocimiento, sino también acciones de enseñanza (en la dimensión de *Teaching Practices*). Por otra parte, en las categorías referidas a conocimiento (dimensión *Knowledge of Algebra for Teaching*) se reconoce la necesidad de lo que podría entenderse como *Common Content Knowledge*, un conocimiento avanzado (ligado, quizás al establecimiento de relaciones entre contenidos) y un conocimiento en el que se podrían identificar elementos de PCK y *Specialized Content Knowledge* (*Teaching Knowledge*).

Actualmente, se continúa tratando de comprender y desarrollar aspectos referentes al conocimiento profesional que deben tener los profesores sobre una asignatura y la enseñanza de la misma, en los diferentes niveles de escolaridad (primaria, secundaria y superior). Consideramos valiosos los aportes a nivel teórico y analítico de los modelos arriba citados para el estudio del conocimiento del profesor y compartimos el criterio de González, Hernández de Rincón & Hernández (2007), quienes señalan que *el profesor requiere de un conocimiento profundo de sus estudiantes, que sólo podrá obtener al considerar cuáles son sus necesidades, intereses, conocimientos previos, estilos de aprendizaje, motivaciones intrínsecas y extrínsecas, hábitos de trabajo, actitudes y valores, entre otros aspectos. La función del docente no debe limitarse al sólo hecho de impartir clases, debido a que él es el encargado de regular y matizar la enseñanza para promover el aprendizaje en sus alumnos* (p. 124).

2.2.2. Marco Teórico

2.2.2.1. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013) se considera una propuesta teórica y una herramienta metodológica que nos permite analizar la práctica de una profesor de matemáticas (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar & Carrillo, 2014). Este ha sido propuesto por el grupo SIDM de la Universidad de Huelva y se centra en el conocimiento que tiene sentido solo para el profesor de matemáticas porque busca una caracterización que muestre la especificidad del conocimiento matemático. Es a través de este modelo que analizamos la práctica de aula de los profesores participantes en esta investigación.

Surge a partir del trabajo desarrollado usando el modelo descriptivo MKT (Ball et al., 2008) y ante las dificultades encontradas en la caracterización y delimitación de distintos subdominios de cara a su aplicación en la investigación sobre profesores (Flores, Escudero & Carrillo, 2013). El MTSK (Figura 2), a diferencia del MKT contempla la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas en su conjunto, es decir, consideramos como conocimiento especializado del profesor de matemáticas el conjunto de los subdominios del modelo. Se compone de los dominios *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

El MK abarca tanto conceptos como procedimientos, la estructuración de las ideas, el conocimiento de las conexiones entre los conceptos, la razón de los procedimientos, los medios de prueba y cualquier forma de proceder en matemáticas, considerando además, conocimiento del lenguaje matemático y su precisión (Carrillo et al., 2013). Incluye los subdominios de *conocimiento de los temas* (KoT[17]), *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM[18]), y *conocimiento de la práctica matemática* (KPM[19]).

El PCK está relacionado con el conocimiento del profesor para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Lo conforman los subdominios del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT[20]), *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM[21]), y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS[22]).

En la línea de Bromme (1994), el MTSK adicionalmente contempla las concepciones del profesor sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, vistas como elementos que permean conocimientos y que dan sentido a su práctica.

[17] Siglas en inglés KoT, correspondientes a Knowledge of topics.
[18] Siglas en inglés KSM, correspondientes a Knowledge of the structure of mathematics.
[19] Siglas en inglés KPM, correspondientes a Knowledge of practices in mathematics.
[20] Siglas en inglés KMT, correspondientes a Knowledge of mathematics teaching.
[21] Siglas en inglés KFLM, correspondientes a Knowledge of features of learning mathematics.
[22] Siglas en inglés KMLS, correspondientes a Knowledge of mathematics learning standards.

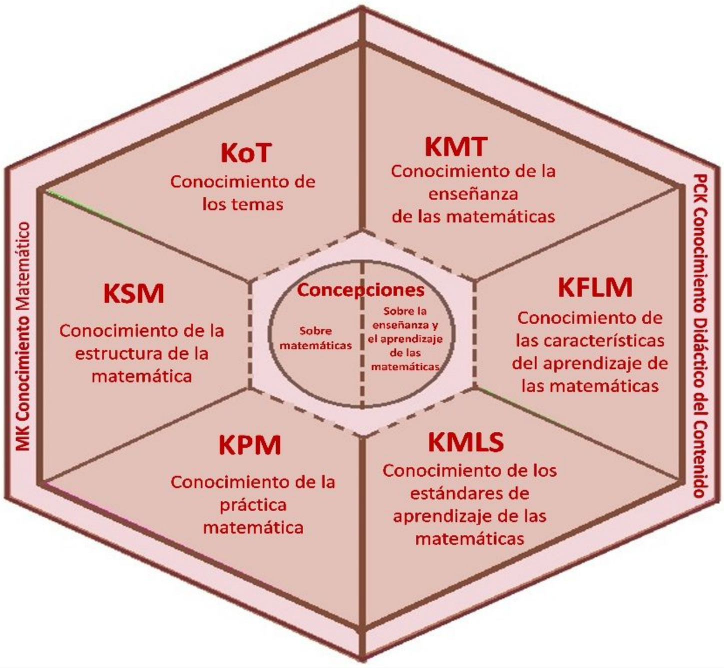


Figura 2. Dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2013)

Conocimiento de los temas (KoT): Surge al reflexionar sobre el *common content knowlegde* (CCK) *y specialized content knowledge* (SCK) del MKT y la difícil delimitación de estos dos subdominios. Se define como un conocimiento profundo y fundamentado de los contenidos matemáticos, propio de los profesores de matemáticas y de su labor de enseñar.

Con el término “temas” nos referimos a los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas. Como referente, tomamos las áreas propuestas por el NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas.

Para caracterizar este subdominio se proponen cinco categorías: *Fenomenología y aplicaciones, Propiedades y sus fundamentos, Registros de representación, Definiciones* y *Procedimientos*.

- *Fenomenología y aplicaciones:* Conocimiento de fenómenos o situaciones asociados a los significados de un tema matemático (Freudenthal, 1983). Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor sobre el tipo de problemática *ad* *hoc* a cada algoritmo para resolver una división de fracciones (Flores, 2008). Esta categoría incluye también el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema. Por ejemplo, que el profesor conozca que una aplicación de la derivada es determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo dado.

- *Propiedades y sus fundamentos:* Consideramos aquí el conocimiento de las propiedades de un objeto matemático o aquellas necesarias para llevar a cabo un proceso. Incluimos además en esta categoría, el conocimiento del profesor sobre las bases, cimientos o exhaustividad del empleo de una propiedad, ligado al tema a estudiar. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre la propiedad no conmutativa del producto de matrices y que una excepción de la misma es el producto de una matriz por su inversa y por la matriz identidad.
- *Registros de representación:* Conocimiento sobre las distintas formas en que se puede representar un tema, incluyendo la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones. Por ejemplo, que el profesor conozca el registro algebraico y matricial de un sistema de ecuaciones lineales.
- *Definiciones:* Conocimiento para describir o caracterizar un concepto, incluyendo los ejemplos e imágenes asociados. Por ejemplo, que el profesor conozca la definición del objeto matemático triángulo.
- *Procedimientos:* Aquí consideramos a) ¿cómo se hace?, referido al conocimiento que tiene el profesor sobre algoritmos convencionales y alternativos; b) ¿cuándo se puede hacer?, son las condiciones suficientes y necesarias para proceder; c) ¿por qué se hace así?, fundamentos de los algoritmos; y d) características del resultado, las que tendrá el objeto matemático resultante asociadas a un tema. Por ejemplo, en el caso del producto de matrices particionadas (multiplicación en bloques), sería el conocimiento del profesor sobre el algoritmo para multiplicar matrices (las filas por las columnas), asociado al conocimiento de las condiciones para que se pueda efectuar la multiplicación (que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda) y al conocimiento de las dimensiones de la matriz resultante (la matriz resultante debe tener el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda).

Este subdominio incluye, además, el conocimiento del profesor sobre *conexiones intraconceptuales*, las cuales tienen lugar en la proximidad de un único concepto (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras & Deulofeu, 2011).

Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): Surgió en base a la reflexión sobre el conocimiento del horizonte matemático (HCK) del modelo MKT (Ball et al., 2008), específicamente del trabajo de Ball & Bass (2009), de donde se considera el HCK(T) referido a las conexiones tanto entre temas matemáticos como con temas de otras disciplinas.

Incluye el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores (Carrillo et al., 2013). Como componentes importantes del KSM están, por un lado la consideración de cómo se interconectan internamente las matemáticas, lo cual permite entender cómo los profesores construyen su conocimiento matemático y, por otro lado el conocimiento de las conexiones con otras disciplinas (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013).

Las conexiones entre contenidos a las que nos referimos en este subdominio son las *interconceptuales*, considerando como conectores aquellas ideas matemáticas que permiten vincular diferentes conceptos (Martínez et al., 2011).

Se distinguen en este subdominio las categorías: *Conexiones de complejización, Conexiones de simplificación, Conexiones de contenidos transversales* y *Conexiones auxiliares*.

- *Conexiones de complejización:* Implica ver el contenido en perspectiva, las matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado (Carrillo et al., 2013), es el conocimiento para relacionar los contenidos enseñados con contenidos posteriores. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor del trabajo con escalas como una complejización de la actividad de ordenar por tamaños de educación infantil (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Conexiones de simplificación:* Visión de las matemáticas avanzadas desde un punto de vista elemental (Carrillo et al., 2013), es el conocimiento para relacionar los contenidos enseñados con contenidos anteriores (Flores-Medrano et al., 2014). Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor al sugerir que el tratamiento para simplificar una expresión algebraica que resulta de obtener la derivada

segunda de una función es equivalente a manipular una expresión aritmética con fracciones (Montes, Contreras & Carrillo, 2013).

- *Conexiones de contenidos transversales:* es la cualidad común que relaciona contenidos matemáticos, y los modos de pensamiento asociados a esos contenidos contemplan esta característica común. Por ejemplo, los patrones de igualdad y similitud relacionan estos temas: propiedades de relaciones de equivalencia (propiedad conmutativa, $a \cdot b = b \cdot a$), resultados de aplicar operadores a conjuntos numéricos ($f(x) = e^{x-1}$ aplicada al conjunto de los números reales), y la congruencia y semejanza entre figuras ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (Flores et al., 2014).
- *Conexiones auxiliares:* consideradas cuando un objeto matemático sirve como auxiliar de otro. Es el caso, por ejemplo, de encontrar las raíces de una ecuación como un elemento auxiliar para una función (Flores-Medrano et al., 2014).

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): Tiene como base el conocimiento del horizonte de la práctica (HCK(P)) (Ball & Bass, 2009) que contempla cómo es construida la matemática. Consiste en el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático. Incluye aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la comprobación; cómo definir y el papel que tienen las definiciones; cómo establecer relaciones, correspondencias y equivalencias; seleccionar representaciones; argumentar, generalizar y explorar (Carrillo et al., 2013).

Además, se considera también el conocimiento del profesor acerca de la lógica proposicional y de la sintaxis de la propia matemática. Comprende el conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas necesario por proveer al profesor de estructuras lógicas de pensamiento (Flores-Medrano et al., 2014), es decir, las *Formas de proceder*, sean estas independientemente del concepto abordado o referidas a conceptos o temas específicos. Incluimos aquí, el énfasis o la importancia que da el profesor a la notación matemática en sus clases, ya que el conocer o manejar dicha notación es parte del KoT.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): Integra el conocimiento de las matemáticas y su enseñanza, que permite al profesor seleccionar una representación particular o un determinado material para el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático, la elección de un ejemplo o un libro de texto (Carrillo et al., 2013). No constituye un conocimiento matemático, sin embargo, el profesor necesita de dicho conocimiento para poder desarrollarlo.

Para ayudar a los alumnos a comprender el significado de un objeto matemático, en este subdominio ubicamos el conocimiento para acercarse a una serie estructurada de ejemplos, y el conocimiento de los recursos desde el punto de vista de su contenido matemático (Carrillo et al., 2013).

Las categorías que se consideran en este subdominio son: *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, Recursos materiales y virtuales,* y *Ejemplos y actividades para la enseñanza.*

- *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza:* conocimiento de teorías de enseñanza específicas de la Educación Matemática, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un tema matemático, así como los alcances que estas tienen. Por ejemplo, el conocimiento de la estructura general propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Recursos materiales y virtuales:* conocimiento de libros de texto, pizarras normales y electrónicas, software como Cabri o Matlab, etc., como herramientas para enseñar matemáticas.
- *Ejemplos y actividades para la enseñanza:* conocimiento del profesor sobre ejemplos y potencialidad de algunas actividades de acuerdo al tema abordado.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM): Es el conocimiento de cómo se aprende un contenido matemático. El foco principal no está en el estudiante, sino en el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático como objeto de aprendizaje.

En este subdominio consideramos las categorías: *Formas de aprendizaje, Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático* y *Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas*.

- *Formas de aprendizaje:* incluye el conocimiento del significado de las teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante, lo que estas aportan a la caracterización del proceso de aprender matemáticas (por ejemplo, Skemp, 1978: la diferencia entre aprender matemáticas de un modo mecánico o con significado; Sfard, 1991: el tránsito que recorre el alumno desde la familiarización con un objeto hasta su cosificación; Asiala et al., 1996: el proceso que lleva desde la etapa de acción a la de esquema en la perspectiva APOS) (Carrillo et al., 2013).

- *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje:* incluye el conocimiento del profesor acerca de las dificultades o facilidades que podría tener el alumno con relación a un cierto tema matemático.
- *Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático:* conocimiento del profesor sobre las estrategias habituales y no habituales de los estudiantes, así como el conocimiento del lenguaje usado comúnmente al abordar un contenido matemático (Sosa, Aguayo & Huitrado, 2013). Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre los algoritmos típicamente usados para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo a la forma en que se presenta la ecuación (general, punto pendiente, ordenada al origen) (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas:* conocimiento sobre las expectativas e intereses de los estudiantes con relación a un contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre las percepciones del estudiante acerca del estudio de un contenido matemático al considerarlo fácil o difícil.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Incluye el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares, su secuencia por cursos, la existencia de materiales para desarrollarlos, requisitos impuestos para su superación (Carrillo et al., 2013). Además, contempla aspectos de conocimiento derivados de revistas científicas, grupos de investigación, asociaciones profesionales como el National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (Carreño et al., 2013).

Se considera un estándar de aprendizaje como aquel que indica el nivel de capacidad atribuible a los estudiantes en un determinado momento escolar, para aprender, construir y saber en matemáticas (Flores-Medrano et al., 2014). Las categorías de este subdominio son: *Contenidos matemáticos que se requieren enseñar, Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado,* y *Secuenciación de diversos temas.*

- *Contenidos matemáticos que se requieren enseñar:* conocimiento del profesor de acuerdo al grado escolar en el que imparta sus clases (Flores-Medrano et al., 2014).

- *Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado:* relacionado con un tema matemático en un determinado momento escolar (Flores-Medrano et al., 2014).
- *Secuenciación de diversos temas:* ya sea en a) el mismo curso escolar, b) cursos anteriores, c) cursos posteriores (Flores-Medrano et al., 2014).

Por otra parte, en el MTSK también se contemplan los indicios de conocimiento especializado (Moriel-Junior & Carrillo, 2014), es decir, aquellos que aparecen cuando investigamos el conocimiento de un profesor pero que no podemos atribuir con total certeza por cuanto se precisa de información adicional. Algunos indicios pueden constituir una oportunidad de investigación (Flores, Escudero & Aguilar, 2013) para profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas.

2.2.2.2. Ejemplos para la enseñanza como parte del conocimiento del profesor de matemáticas

Hemos creído importante incluir un apartado relacionado con investigaciones sobre el empleo de ejemplos en la enseñanza de temas matemáticos, que nos ayude a discutir el conocimiento sobre ejemplos observados en las sesiones de clases de los profesores participantes en esta investigación.

Los ejemplos constituyen una parte que integra las matemáticas y un elemento significativo del conocimiento especializado (Rissland-Michener, 1978). Dichos ejemplos pueden ser entendidos como una situación general referida ya sea a un concepto, definición, procedimiento o teorema (Zodik & Zaslavsky, 2007), es decir, como una forma de introducir o abordar un contenido matemático, y cuyas características van a depender del conocimiento de quien los plantea y de los objetivos que se busca alcanzar con el tema que se pretende enseñar.

El uso de ejemplos para incorporar conceptos abstractos y procedimientos generales es una práctica pedagógica común. Tienen un papel fundamental en el desenvolvimiento de competencias matemáticas, aprendizaje de conceptos matemáticos y técnicas de razonamiento (Rowland, Thwaites & Huckstep, 2003). Zazkis & Leikin (2008) usan el término *ejemplo* para designar una circunstancia, ilustración, caso o elemento de una idea, objeto o proceso. Algunos ejemplos tienen como objetivo introducir un nuevo tema, o para proporcionar una perspectiva diferente sobre él, otros sirven para introducir un conflicto cognitivo (*pivotal examples*) o para resolver ese conflicto (*pivotal-bridging example*) (Zazkis & Chernoff, 2008).

A la hora de clasificar los ejemplos, Bills et al. (2006) los distinguen por su naturaleza en:

- Ejemplos resueltos: son aquellos explicados y comentados por el profesor o por el autor del libro.
- Ejemplos genéricos: pueden ser ejemplos de conceptos o ilustraciones de procedimientos.
- Contraejemplos: necesitan de una hipótesis o de una afirmación contraria. Puede ser en el contexto de un concepto, de un procedimiento o en algún paso de una demostración. Rissland-Michener (1978) indica que se pueden utilizar para revelar mejor las diferencias entre conceptos (lo que verifica determinada definición puede contrariar a otra), y también para demostrar que son falsos determinados argumentos y afirmaciones.
- No ejemplos: sirven para definir los límites de un concepto, de un caso en que un procedimiento no se aplique o falle en la obtención del resultado deseado; o para demostrar que las condiciones de un teorema son precisas, bien definidas.
- Ejercicios: destinados a ser resueltos por los estudiantes.

Para estos autores, el papel del profesor que favorece el aprendizaje del alumno consiste en crear circunstancias favorables que envuelvan una gran variedad de ejemplos.

Por su parte, Figueiredo, Contreras & Blanco (2009) sostienen que *el ambiente, los contenidos, la forma como el profesor presenta los ejemplos y sus características más relevantes pueden hacer la diferencia entre un ejemplo bien comprendido y útil, y apenas otro ejemplo más* (p. 41).

Así, mencionan la importancia de que el profesor tome conciencia de la *transparencia* y *variación* para maximizar la efectividad de los ejemplos que se usan en la enseñanza de conceptos matemáticos, siendo parte del papel del profesor en el aula potenciar el uso de los ejemplos, clarificar su importancia y determinar la función que se pretende que desempeñen en el proceso de enseñanza aprendizaje.

La *transparencia es* entendida como la capacidad que tiene un ejemplo para llamar la atención de un alumno hacia aspectos importantes que vuelven el ejemplo ejemplar. Estos ejemplos son aquellos casos generales cuya finalidad es ilustrar un determinado concepto (Figueiredo et al., 2009). La noción de transparencia está fuertemente ligada a la representación que se utiliza para un concepto cualquiera (Figueiredo & Contreras, 2013).

Para el caso de la *variación* de ejemplos, Figueiredo & Contreras (2013) refieren lo que Marton & Booth (1997) denominan *dimensiones de variación*, que viene a ser aquello que puede ser modificado sin que se altere su sentido general. En esencia aprendemos del discernimiento de la variación y lo que varía en nuestra experiencia determina lo que aprendemos (Rowland et al., 2003). Más tarde, este concepto fue ampliado por Watson & Mason (2005) denominándolo *dimensiones de variación posibles*, que son aspectos o detalles que pueden variar, sin que el ejemplo deje ser un ejemplo del concepto en cuestión (formas diferentes de abordar un mismo concepto), y además introdujeron la noción de *amplitud de mudanza permisible* (referida al alcance de cada una de esas formas de abordar un mismo concepto).

Así, en la teoría de la variación, aprender es estar consciente de lo que puede variar (dimensión de variación posible) o de la medida de la amplitud en que esa variación se pueda efectuar (amplitud de mudanza permisible), sin que se alteren sustancialmente las características del objeto (Mason, 2011).

Se pueden usar los ejemplos, por una parte, para ayudar a los alumnos a generalizar o abstraer conceptos, y por otra, para ejercitar rutinas y procedimientos, siendo la sinergia entre la transparencia y variación el factor de enseñanza que posibilita que los alumnos generalicen y abstraigan. Por un lado, la transparencia de una representación es importante para que los alumnos puedan ver la variación, y por otro, la variación es fundamental en la percepción de aquello en que la representación es transparente (Figueiredo & Contreras, 2013).

La conciencia del profesor sobre esta dimensión de variación posible (entendida también como la conciencia de la generalidad de un ejemplo) es esencial para los espacios destinados a los ejemplos. La variación de los ejemplos va orientada a llamar la atención de los alumnos, de modo que para aprender debe haber variación suficiente en dichos ejemplos (Mason & Watson, 2005), los mismos que pueden ser presentados a los estudiantes como una serie que les proporcione una variación perceptible (Bills et al., 2006).

Los ejemplos proporcionados por el profesor deben ser el resultado de un proceso reflexivo, una selección deliberada y con conocimiento de las opciones disponibles, unos mejores que otros (Rowland et al., 2003).

Todo profesor de matemáticas es consciente (en mayor o menor grado) de que los ejemplos que usa en sus clases tienen un papel preponderante en la enseñanza, ya que un correcto aprendizaje de los conceptos en estudio depende de los ejemplos que escoja y del uso que haga de ellos (Figueiredo & Contreras, 2013). Aprender un concepto matemático requiere de la toma de conciencia de las características, de las relaciones y de las propiedades que son invariantes, así como, simultáneamente, de los aspectos y de las características importantes en que se permite la variación (Mason, 2005).

Zaslavsky (2010) considera un buen ejemplo para la enseñanza a aquel que promueve la generalización, realzando aspectos importantes del caso a ilustrar e indicando aquellos aspectos que son arbitrarios y modificables.

2.3. Creencias y concepciones

Las creencias de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje también son de interés en el campo de la Educación Matemática, y constituyen uno de los aspectos del pensamiento del profesor que han sido objeto de estudio. Se ha identificado que existe relación entre las creencias de los profesores, su práctica de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes (Raymond, 1997; Clark & Peterson, 1986; Wilson & Cooney, 2002). Este paradigma de investigación denominado *pensamiento del profesor*, se centra en procesos que ocurren en la mente de los profesores y que a pesar de tener carácter implícito, pueden dotar de sentido a su práctica docente (Clark & Peterson, 1986).

Nuestro objetivo principal está relacionado con el conocimiento especializado del profesor de Álgebra Lineal. Estudiamos las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas porque pensamos que el conocimiento del profesor está relacionado con su modo de enseñanza. De allí que vamos a acceder a las concepciones que emergen de su actuación en el aula, sin el afán de contrastarlas con las declaradas, y en varias ocasiones asociamos a este análisis algunas de las respuestas dadas por los profesores en entrevistas semiestructuradas donde se busca profundizar en su conocimiento. Nos interesan las concepciones del profesor inferidas fundamentalmente de la acción, no con el sentido de contraste que les da Ernest (1989a) quien describe las concepciones en la acción como modelos mentales que pueden constituir la trasformación de concepciones expuestas o declaradas en práctica de aula, sino como elementos complementarios cuando se trata de analizar el conocimiento del profesor.

2.3.1. Algunas definiciones sobre creencias y concepciones

Conocemos de antemano que existen una serie de definiciones sobre creencias y concepciones y que aún no existe un límite claro entre ambos términos, por tanto, presentamos algunas definiciones de creencias y concepciones y nuestro posicionamiento en este estudio con relación a las mismas.

Algunos autores hacen diferencias entre creencias y concepciones, dando a las primeras una componente afectiva y a las segundas una componente cognitiva. Es el caso de Ponte (1994), quien siguiendo a Pajares (1992) define creencias como *"verdades" personales incontrovertibles que tiene cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen una fuerte componente afectiva y evaluativa* (p. 199)*;* y concepciones como *los esquemas subyacentes de organización de los conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva. Ambos, creencias y concepciones forman parte del conocimiento* (p.199).

Pajares (1992) le da a las creencias un sentido personal, es decir, dependen de cada individuo y se basan en evaluaciones y juicios, y las contrasta con el conocimiento considerando que este último tiene un carácter más objetivo y no discutible. Relacionado a lo anterior, para Jarauta & Medina (2009), la distinción entre las creencias y el conocimiento responde a dos cuestiones elementales. En primer lugar, las creencias parten de una valoración afectiva y personal antes que objetiva. Y, en segundo lugar, las creencias son más discutibles que el conocimiento en tanto que, con frecuencia, se justifican o mantienen por razones que no satisfacen aquellos criterios o cánones de evidencia utilizados para el desarrollo del conocimiento y, por tanto, están más abiertas al debate.

En sintonía con el carácter personal que se da a las creencias en las definiciones anteriores y atribuyendo además un carácter social, Cross (2009), define creencias como ideas consagradas, conscientes e inconscientes y pensamientos sobre uno mismo, del mundo y la propia posición en él, desarrollados a través de la pertenencia a diversos grupos sociales; siendo consideradas estas ideas por la persona como verdad. Las creencias son personales, y a menudo, residen en un nivel más allá del control inmediato del individuo o el conocimiento.

Porlán (1995) reconoce el carácter personal de las creencias y les atribuye además un sentido de jerarquía, considerando que algunas creencias son más influenciables que otras. El autor sostiene que las creencias o constructos se presentan asociados e interconectados en sistemas organizados y jerarquizados de alguna manera. No todas las creencias o constructos de un sistema tienen la misma influencia en la persona. La mayoría presentan un carácter más o menos dinámico y pueden cambiar con relativa facilidad, son aquellas más influenciables por la experiencia, más explícitas y que poseen un grado de abstracción menor. Otras, sin embargo, son muy estables y resistentes al cambio, permanecen en un nivel más oculto de la persona y poseen mayor grado de abstracción. Estas últimas constituyen el sustrato epistemológico del edificio cognitivo del profesor y de ellas depende, en gran medida, el resto de las concepciones personales.

Por su parte, Thompson (1992) se refiere a las concepciones del profesor con un sentido de inclusión, donde el término abarca también las creencias. Así indica que las concepciones son *una estructura mental más general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias* (p. 130).

Otros investigadores como Agudelo-Valderrama, Clarke & Bishop (2007) también confieren a las concepciones el sentido de inclusión, y además de considerar las creencias, indican que las concepciones abarcan incluso el conocimiento. Según los autores el término concepción se ha definido para incluir conocimientos de los profesores, creencias y actitudes. Las creencias, a diferencia del conocimiento, llevan la connotación de disputa (es decir, es consciente la persona de que otros pueden pensar de manera diferente), y tienen un factor afectivo en ellas. Esto concuerda con lo descrito por Arbeláez (2005), para quien las concepciones implican una creación resultante de la convergencia de los conceptos, los conocimientos, las ideas, las creencias, las opiniones sobre el contexto de las sensaciones y las percepciones; de allí que su estudio cobre tanta importancia cuando se trata de explicar las motivaciones que inducen las acciones de los profesores.

En el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva, las creencias y concepciones, las entendemos en la línea propuesta por Ponte (1994), que las considera parte del conocimiento, y se propone un tratamiento integrado evitando la diferencias explícitas entre ambos términos (Montes et al., 2014). Aquí en nuestro estudio no diferenciamos ambos términos, utilizamos como sinónimos creencias y concepciones, y siguiendo a autores como Carrillo (1998), Contreras (1999) y Climent (2005), por concepción o creencia se entiende al conjunto de posicionamientos que el investigador interpreta posee el profesor universitario a partir del análisis de su práctica en el aula y de sus opiniones sobre la enseñanza y aprendizaje de Álgebra Lineal.

2.3.2. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Los investigadores tienden a clasificar las creencias de los profesores de matemáticas en creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el aprendizaje de los estudiantes. Estas creencias, entre otras cosas, reflejan cómo los profesores conceptualizan sus roles en el aula, la elección de las actividades del aula y las estrategias de enseñanza que utilizan (Cross, 2009). Además, las creencias de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas y sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están claramente relacionadas (Forgasz & Leder, 2008; Barkatsas & Malone, 2005).

Numerosos trabajos e investigaciones han pretendido contrastar cómo las creencias de los profesores influyen y determinan la conducta docente. La mayoría de las investigaciones realizadas, además, comparten el objetivo común de adentrarse en la mente de los profesores para llegar a describir los distintos tipos de creencias de las que son poseedores y el modo en el que estas se relacionan con sus estrategias de enseñanza. El problema reside en la dificultad para inferir los procesos de pensamiento docente capaces de explicar las estrategias de enseñanza características de los profesores, aspecto que han tratado de solventar las diversas opciones metodológicas desarrolladas para aproximarse a esta compleja realidad (Prieto, 2007).

El estudio de las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje se ha suscitado en los diferentes niveles escolares. Para el caso del nivel universitario referimos por ejemplo el trabajo de Gow & Kember (1993), quienes concluyeron después de un estudio para determinar las creencias de profesores universitarios sobre la enseñanza, como facilitación del aprendizaje y como transmisión de conocimiento, que los métodos de enseñanza que emplean los profesores, las actividades de aprendizaje que proponen, las tareas de evaluación que sugieren y el trabajo que demandan están fuertemente influidos por su orientación hacia la enseñanza. En función del tipo de creencias que albergan los profesores al respecto, elaboran su propia idea de su rol docente que, en última instancia, determina su modo particular de enseñar. De este modo, los profesores que identifican la enseñanza como facilitación del aprendizaje, conciben la función docente como el proceso de ayudar a los alumnos a adquirir destrezas de resolución de problemas y la capacidad de pensamiento crítico y, los que orientan su enseñanza a la transmisión de conocimientos, se centran en la comunicación de contenidos al estudiante.

Por su parte, Moreno & Azcárate (2003) presentaron una aproximación a las concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, donde a partir de los resultados obtenidos explican la persistencia de la utilización de métodos tradicionales de enseñanza. Aunque las concepciones sobre las matemáticas de la mayoría de los profesores estudiados se aproximaron a ideas formalistas (donde se dejan de lado los fundamentos, el profesor actúa como transmisor y el estudiante se convierte en un receptor pasivo de los conocimientos matemáticos), en líneas generales concluyeron que su práctica docente era esencialmente instrumentalista (en el sentido descrito por Carrillo, 1998, donde la matemática se concibe como un conjunto de resultados de marcado carácter utilitario). La propia concepción formalista de las matemáticas se convierte en un obstáculo para la mayoría de los profesores. Esto conduce a contradicciones: por un lado, consideran incompletas las explicaciones y la presentación de determinados temas sin un peso considerable de los contenidos teóricos matemáticos que los sustentan; pero, por otro lado, son conscientes que trabajan con estudiantes cuyo nivel de competencia matemático elemental impide que utilicen de forma significativa dichos conocimientos teóricos.

En nuestro estudio exploramos las concepciones de dos profesores a partir de su práctica en el aula, y nos centramos en aquellas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.3.2.1. Características o aspectos didácticos de los profesores

Las tendencias didácticas constituyen posturas respecto de cómo se comprende el proceso de enseñanza-aprendizaje. Carrillo (1998) para la identificación de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas diferenció las siguientes tendencias didácticas (lo que podríamos entender como modelos didácticos de los mismos): tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa; y elaboró un instrumento a través del cual se determinan distintas formas de concebir la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Este instrumento nos informa sobre las diferencias que pueden establecerse en distintos aspectos (categorías) que intervienen en la enseñanza-aprendizaje: metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno, papel del profesor y evaluación. Además, afirma que no existe una relación directa entre las concepciones que posee un determinado profesor y una tendencia específica, existiendo diversidad de posibilidades entre la relación de las concepciones y la simultaneidad de tendencias para un mismo profesor. Es decir, que de acuerdo a la interpretación que realiza el investigador sobre las concepciones de los profesores, lo natural es encontrar características no solo correspondientes a una tendencia (tradicional, tecnológica, espontaneísta o investigativa), sino matices o rasgos de varias de ellas a la vez.

Carrillo (1998) y Contreras (1999) presentan una definición de cada una de las tendencias didácticas de los profesores, y Climent (2005) agregó a ellas algunas características. A continuación presentamos un resumen de los aspectos didácticos de cada tendencia:

- **Tradicional**

El profesor se dirige al estudiante de forma magistral, que conlleva a que no se establezcan relaciones entre los temas que se enseñan, siendo guiado por una programación rígida y elaborada externamente. La asignatura se enfoca en la adquisición de conceptos y reglas con una finalidad informativa, dando lugar a un aprendizaje memorístico. El proceso de aprendizaje es deductivo y el sentido de la interacción que se produce en el aula va en dirección profesor-alumno, sin enfatizar en la argumentación por parte de los estudiantes. El profesor considera que el alumno debe trabajar de forma individual, sin participar ni directa ni indirectamente en el diseño didáctico, siendo su papel totalmente receptivo al dedicarse a escuchar, copiar y aceptar lo indicado por el docente, que es quien valida la información en el aula.

- **Tecnológica**

Se caracteriza por la transmisión de los contenidos mediante la simulación de su proceso de construcción empleando estrategias expositivas, regida por una programación cerrada y lógica. La asignatura se orienta hacia la adquisición de conceptos y reglas e interesa el desarrollo de procesos lógicos y su reproductibilidad. El profesor considera que su finalidad a más de informativa es utilitaria, ya sea dentro de la propia matemática, en otras ciencias o en la vida cotidiana. Se produce un aprendizaje memorístico, con un proceso que aunque tiene características inductivas termina siendo deductivo. El sentido de la interacción va en dirección profesor-alumno, pudiendo el estudiante explicitar con las palabras del profesor la comprensión del contenido. El trabajo del alumno debe darse en forma individual, siendo su papel el de reproducir el proceso lógico transmitido por el profesor, que es quien valida la información en el aula a través de interrogantes a los alumnos.

- **Espontaneísta**

El profesor no transmite directamente el conocimiento, sino que presenta actividades de manipulación de modelos, de manera que el alumno adquiera el conocimiento de forma espontánea. La programación se construye de acuerdo a los intereses y negociación con los estudiantes, por tanto, no dispone de una organización inicial. El interés de la asignatura se orienta hacia los procedimientos y el fomento de actitudes positivas, ya que su finalidad es promover un cambio actitudinal en el alumno con respecto al aprendizaje, el cual tiene un significado para el alumno. El proceso de aprendizaje puede ser deductivo e/o inductivo, se da una interacción entre los alumnos, el profesor y los compañeros, y el profesor da importancia a la comunicación de conclusiones por parte de los alumnos. Se considera que el trabajo del alumno debe darse en grupos y se fomenta el debate. El profesor crea un ambiente dinámico donde el alumno actúa constantemente en las actividades que promueve y la información del aula es validada por el grupo clase, aunque sin una reflexión profunda sobre sus ideas.

- **Investigativa**

El conocimiento es transmitido a los estudiantes de un modo organizado y a través de su investigación, enfrentando situaciones para las que no poseen un proceso de resolución establecido (resolución de problemas). La programación no se vincula a un recorrido concreto y el profesor se mueve a través de ella dependiendo del nivel e intereses de los alumnos. La asignatura se orienta hacia la adquisición de conceptos, reglas, procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, siendo la finalidad última la preparación del estudiante para el aprendizaje autónomo. Se busca dotar de significado a los objetos de aprendizaje de manera que puedan ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos a través de un proceso inductivo. La interacción es equilibrada entre el profesor y el alumno y se promueve la argumentación de conclusiones. El alumno participa directa e indirectamente en el diseño didáctico y el profesor considera que la forma de agrupamiento de los alumnos depende de la actividad a desarrollar, siendo necesario que este investigue, reflexione y cuestione, tomando conciencia de lo que hace y para qué lo hace. L información que se produce en el aula puede ser validada por el grupo clase, el profesor o el propio alumno potenciando la reflexión.

Mostramos a continuación las visiones de Kuhs & Ball (1986) sobre la enseñanza de las matemáticas, que de hecho son consideradas por Carrillo en su construcción de los modelos didácticos:

- Centrada en el aprendiz
- Centrada en la clase con foco en el contenido a través de la actividad del aula
- Centrada en el contenido con énfasis en la comprensión (conceptual)
- Centrada en el contenido con énfasis en la actuación (procedimental)

Desde la visión centrada en el aprendizaje, el profesor es visto como un estimulador y facilitador del aprendizaje del estudiante, proponiendo cuestiones interesantes y situaciones para investigar, retando a los estudiantes a pensar y ayudándolos a superar deficiencias en su comprensión. Los estudiantes son vistos como responsables últimos para juzgar la adecuación de sus ideas. El conocimiento es evaluado en términos de la consistencia entre las ideas construidas por los estudiantes y el conocimiento compartido de la idea en la disciplina, así como en términos de la habilidad para validar conjeturas y defender o argumentar sus conclusiones (Thompson, 1992). Esta clasificación está relacionada con las características investigativas descritas por Carrillo (1998).

La visión centrada en la clase con foco en el contenido a través de la actividad del aula, al parecer es un modelo donde el profesor tiene el papel de protagonista principal y no se hacen planteamientos sobre el contenido de la instrucción, que se considera establecido por el currículo (tomado de Climent, 2005). Lo cual concuerda con algunas características tradicionales descritas por Carrillo (1998).

En lo referente a la clasificación centrada en el contenido con énfasis en la comprensión (conceptual), se considera una visión platónica (Ernest, 1989b), de la matemática[23]. El contenido se organiza conforme a la estructura de la matemática, siguiendo cierta noción de perspectiva y secuencia que el profesor puede tener. Por un lado, el contenido es fundamental, y por otro, la comprensión es vista como construida individualmente (Kuhs & Ball, 1986). El fin que persigue la creación del conocimiento matemático es el desarrollo de la propia matemática, que, aun siendo consciente de sus posibles aplicaciones, se desarrolla de forma independiente respecto de ellas (Carrillo, 1998).

La visión centrada en el contenido con énfasis en la actuación (procedimental), se relacionaría con una visión de la matemática instrumentalista (Ernest, 1989b). En ella las reglas son los bloques de construcción básicos de todo el conocimiento matemático; el estudiante debe ser capaz de dar respuestas y resolver problemas aplicando las reglas aprendidas; no es necesario comprender el origen o razones de los errores de los estudiantes, ya que la instrucción posterior sobre el procedimiento correcto derivará en un aprendizaje adecuado; saber matemáticas significa ser capaz de demostrar dominio de las técnicas descritas por los objetivos de la instrucción (Kuhs & Ball, 1986). Relacionando las visiones conceptual y procedimental de Kuhs & Ball (1986) se

[23] En la descripción de las visiones sobre la enseñanza de la matemática de Kuhs & Ball (1986) se incluyen en algunos casos aspectos de concepciones sobre la matemática y concepciones sobre la enseñanza de la matemática (Carrillo, 1998). Siguiendo a este último autor y en coherencia con los resultados de su trabajo (donde no se encuentran relaciones directas entre ambas concepciones), en nuestro estudio las consideraremos de manera diferenciada, ocupándonos de las que se refieren a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

vislumbra relación con las tendencias didácticas tradicional y tecnológica de Carrillo (1998).

Como se mencionó anteriormente, en esta investigación se utilizan indistintamente los términos concepción y creencia. Lo que se destaca son las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que emergen de la práctica en el aula de dos profesores universitarios, diferenciadas de conocimientos, actitudes y afectos, como un elemento para comprender el conocimiento del profesor.

2.4. Análisis didáctico sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos que la investigación sobre el conocimiento especializado del profesor requiere una profundización en el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que nos interesa como objeto matemático de estudio. Por tanto, desde una perspectiva teórica y considerando aspectos de enseñanza y aprendizaje, realizamos un *Análisis Didáctico*, que tiene sus orígenes en los estudios de Rico (1997), quien propone organizadores para el currículo de matemáticas como: desarrollo histórico, estructura de los contenidos, análisis fenomenológico, sistemas de representación, errores y dificultades, materiales y recursos; los cuales pasaron a formar parte del llamado análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009).

Para Gómez (2007), el análisis didáctico *es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje* (p.18-19).

La estructura propuesta para el análisis didáctico (Figura 3) va encaminada a la planificación de una unidad didáctica, y se compone de 1) análisis de contenido, 2) análisis cognitivo, 3) análisis de instrucción, y 4) análisis de actuación (Gómez, 2007).

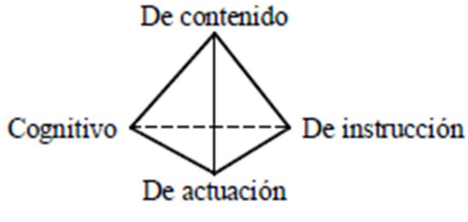


Figura 3. Componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 29)

Esta investigación tiene como objetivo central indagar sobre el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. Pensamos que profundizar en el contenido matemático nos ayudará a comprender el conocimiento que ponen en juego los profesores, cuando enseñan el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Por tanto, de la estructura que compone el análisis didáctico, realizaremos el análisis de contenido, que nos permitirá explorar los diferentes significados de los conceptos matemáticos a través de su desarrollo histórico, sistemas de representación y fenomenología, y el análisis cognitivo, mediante el cual profundizaremos en el aprendizaje del contenido y principales errores y dificultades.

2.4.1. Análisis de contenido

El análisis de contenido le permite al profesor identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática (Gómez, 2007). Se realiza para identificar y organizar conceptos y procedimientos relevantes que componen el contenido en cuestión. A un mismo concepto matemático se le atribuyen diferentes significados, dados por la terna estructura conceptual, sistemas de símbolos (representaciones), y objetos de los que surge y que le dan sentido (fenómenos) (Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez, 2008).

El significado de un concepto matemático se aborda en base a tres dimensiones que se presentan en la Figura 4.

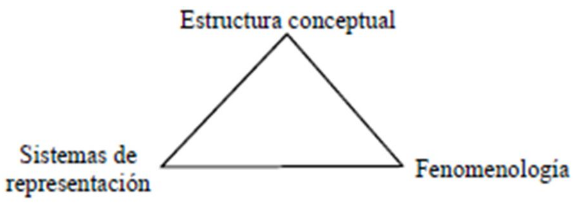


Figura 4. Dimensiones del análisis de contenido que abarcan el significado de un concepto (Gómez, 2007, p. 27)

- Estructura conceptual: a través de su delimitación se ubican conceptos y procedimientos de un tema matemático y sus relaciones, se establecen prioridades, conexiones y diversas opciones y trayectorias que pueden trazarse para organizar expectativas sobre el aprendizaje de dichos tópicos. Se identifican aquí *focos* *conceptuales prioritarios*, que establecen prioridades sobre las expectativas de aprendizaje de un tema y permiten una adecuada secuenciación de tareas para su enseñanza. La clasificación del contenido matemático se puede realizar desde el punto de vista conceptual y procedimental, incluyendo relaciones entre ambos. En el campo conceptual se incluyen *hechos* (nivel básico de complejidad conceptual: términos, notaciones, convenios o resultados), *conceptos* (nivel de complejidad medio) y *estructuras* (nivel de complejidad superior). Para el campo procedimental se consideran los niveles *destrezas, razonamientos y estrategias* (Rico et al., 2008, p. 10-13).

- Sistemas de representación: son las formas de representación del contenido matemático y sus relaciones con otros conceptos. Distintos tipos de símbolos, gráficos o signos pueden constituir una representación de conceptos y procedimientos (Castro & Castro, 1997).
- Fenomenología: Considerada una dimensión del significado de un concepto que hace referencia a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto, es decir, este último permite describir situaciones relevantes vinculadas con el fenómeno (Gómez, 2007). A través de la fenomenología se delimitan las situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquéllas en las que estos muestran su funcionalidad (Rico et al., 2008).

Realizaremos el análisis de contenido presentando en primer lugar, el desarrollo histórico del contenido matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, nos referiremos a las tres dimensiones propuestas por Gómez (2007) (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología).

2.4.1.1. Desarrollo histórico de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

El término “matriz” fue usado por primera vez en el año 1850 por el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897), definiendo una matriz como un *oblong arrangement of terms* (Silvester, 1850, 1904, citado por Luzardo & Peña, 2006). Sin embargo, los orígenes de matrices y determinantes se remontan al siglo II a.C., a través del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, los babilonios estudiaron problemas que conducen a ecuaciones lineales simultáneas como aquel que se conserva en una tablilla de arcilla de alrededor del 300 a.C. (O'Connor & Robertson, 1996):

Hay dos campos cuya superficie total es de 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en una proporción de 2/3 de bushel[24] por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en una proporción de 1/2 bushel por yarda cuadrada. Si la producción total es de 110 bushels, ¿cuál es el tamaño de cada campo?

Entre el 200 a.C. y 100 a.C., la cultura china da a conocer a través del texto *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* (o *Jiuzhangsuanshu*), escrito durante la dinastía Han, el primer ejemplo conocido de métodos matriciales:

Hay tres tipos de maíz, de los cuales, tres paquetes del primer tipo, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas, ¿cuántas medidas de cada tipo de maíz están contenidas en un paquete?

El método de resolución de este problema conocido como regla "fan-chen" constituye los orígenes del método de eliminación de Gauss (Luzardo & Peña, 2006; Ferro, 2011). En este caso, según O'Connor & Robertson (1996), los matemáticos chinos escribían las ecuaciones lineales en columnas, en lugar de filas (como se hace actualmente), quedando el sistema correspondiente al problema anterior de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Para resolverlo se recomienda multiplicar la primera columna por tres y restarla de la tercera. Luego, la columna central habrá que multiplicarla por tres, y restarla de la de la derecha las veces que sea posible:

[24] Unidad de medida.

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Después, se multiplica por 5 la primera columna y se resta la columna central tantas veces como sea posible:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Finalmente se obtiene un sistema de fácil solución (Ferro, 2011):

$$36z = 99$$

$$5y + z = 24$$

$$3x + 2y + z = 39$$

En 1545, en *Ars Magna*, Cardano da una regla llamada *regula de modo*, que considera *mother of rules*, para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La misma, es esencialmente la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Aunque Cardano no define determinante, su método constituye la génesis del mismo (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006; Rosales, 2008).

Antes de que apareciera la noción de matriz, resultados estándar de la teoría de matriz elemental fueron objeto de investigación matemática. Por ejemplo, en la publicación *Elements of curves*, como parte de los comentarios de la versión en latín de 1660 de la *Géométrie de Descartes*, De Witt mostró cómo una transformación de los ejes reduce una ecuación dada para una cónica a la forma canónica, que equivale a diagonalizar una matriz simétrica, sin embargo, esto no fue pensado por De Witt en ese momento (O'Connor & Robertson, 1996).

Casi al mismo tiempo apareció la idea de determinante en Japón y Europa. Fue Takakasu Seki (1642-1708), quien en 1683 publicó *Method of solving the dissimulated problems*, que contiene métodos matriciales escritos en forma de tablas. A pesar de que no utilizó la palabra "determinante", Seki los introdujo exponiendo métodos generales para calcularlos en base a ejemplos. Así, fue capaz de encontrar determinantes de orden 2, 3, 4 y 5 aplicándolos a la resolución de ecuaciones, aunque no a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006).

En el mismo año de 1683 aparece la idea de determinante en Europa, cuando Leibniz escribe una carta a Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) manifestándole que el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución: 10+11x+12y=0, 20+21x+22y=0, 30+31x+32y=0. Leibniz sostenía que el sistema tiene solución porque el determinante de la matriz de los coeficientes es igual a cero, entonces: $10{\cdot}21{\cdot}32 + 11{\cdot}22{\cdot}30 + 12{\cdot}20{\cdot}31 = 10{\cdot}22{\cdot}31 + 11{\cdot}20{\cdot}32 + 12{\cdot}21{\cdot}30$. El sistema propuesto no posee coeficientes numéricos, en la notación usada por Leibniz, 21 denota por ejemplo el elemento a_{21} del determinante. Los manuscritos escritos por Leibniz contienen más de 50 formas diferentes de escribir sistemas de coeficientes trabajados durante un período de 50 años (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006).

En ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante, Leibniz utilizó la palabra *resultante*, así probó varios resultantes, incluyendo lo que hoy se conoce como regla de Cramer. Del mismo modo, conocía que un determinante se puede ampliar usando columnas, lo cual constituye la expansión de Laplace; además, estudió sistemas de coeficientes de ecuaciones cuadráticas, que lo condujeron hacia la teoría de matrices (O'Connor & Robertson, 1996).

En el *Treatise of algebra*, publicado en 1748 por Colin Maclaurin, se prueba la regla de Cramer para sistemas 2x2, 3x3, y se deja indicado cómo funcionaría en el caso de un sistema 4x4, como por ejemplo los siguientes sistemas (Rosales, 2008; Ferro, 2011):

- Sistema de ecuaciones lineales 2x2

ax+by=c

dx+ey=f

cuya solución viene dada por la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos, tomados de los órdenes que afectan a las tres incógnitas:

$$y = \frac{af-dc}{ae-db}$$

- Sistema de ecuaciones lineales 3x3

ax+by+cz=m

dx+ey+fz=n

gx+hy+kz=p

cuya solución es:

$$z = \frac{aep-ahn+dhm-dbp+gbn-gem}{aek-ahf+dhc-dbk+gbf-gec}$$

Nótese que los numeradores en las fórmulas de Maclaurin difieren de los denominadores sólo por la sustitución en los segundos de los términos constantes por los términos en que figura la incógnita que se está calculando.

Pero fue Gabriel Cramer (1704-1752), quien en 1750 enunció la denominada regla de Cramer para sistemas nxn en *Introduction to the analysis of algebraic curves,* cuando buscaba la ecuación de una cónica pasando por cinco puntos dados. La regla está enunciada en el apéndice: *One finds the value of each unknown by forming n fractions of which the common denominator has as many terms as there are permutations of n things.* Cramer explica exactamente cómo se calculan los términos como productos de determinados coeficientes en las ecuaciones y cómo determinar el signo (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006; Ferro, 2011).

Nuevos métodos para calcular determinantes fueron mostrados por Etienne Bézout (1730-1783) en el año 1764 y por Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) en 1771

(Luzardo & Peña, 2006). Este último, creó una regla para el cálculo del determinante usando menores, aparte de su uso para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En 1772, en el ensayo *Recherches sur le calcul intégral et sur le systéme du monde*, Laplace desarrolla un determinante por una columna, lo que actualmente se conoce con su nombre (Ferro, 2011).

Por su parte, en 1773, en un artículo de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) aparece por primera vez la interpretación del determinante como volumen, probando que el tetraedro formado por O(0,0) y los puntos M(x, y, z), M'(x', y', z') y M"(x", y", z") tiene un volumen 1/6[z(x'y" – y'x") + z'(yx" – xy") + z"(xy' – yx')] (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006).

En el año de 1801, Gauss empleó por primera vez el término determinante en *Disquisitiones arithmeticae*, en el estudio de formas cuadráticas. Sin embargo, el concepto dado por Gauss no es el mismo que se conoce en la actualidad. Explica la multiplicación de matrices (considerándola como una composición) y la matriz inversa en el contexto de la matriz de coeficientes de las formas cuadráticas (O'Connor & Robertson, 1996). Usando las observaciones del asteroide Pallas, tomadas entre 1803 y 1809, Gauss utilizó su método de eliminación con sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas (Ferro, 2011).

El trabajo de Cauchy se considera el más completo de los primeros trabajos sobre determinantes y fue él quien en 1812 utilizó el término determinante en el sentido que le damos en la actualidad y dio nuevos resultados sobre menores y adjuntos. Además, prueba por primera vez el teorema de la multiplicación de determinantes: det(AB) = det(A) det(B). En un contexto de formas cuadráticas de n variables, en 1826, Cauchy utiliza el término *tableau* para la matriz de coeficientes, dio resultados de la diagonalización de una matriz, introdujo la idea de matrices similares demostrando que si son similares tienen la misma ecuación característica y por último, demostró que cada matriz real simétrica es diagonalizable (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006).

Heinrich Scherk, en el año 1825, formuló en *Mathematische Abhandlungen* (Disertación Matemática), reglas para multiplicar una constante por un determinante y para sumar dos determinantes que tienen en común una columna o una fila. Indicó a su vez, que el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, y que el determinante de una matriz es nulo cuando una fila es combinación lineal de dos o más filas (Ferro, 2011).

Alrededor de 1830, Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), y más tarde Kronecker y Weierstrass en 1850 y 1860, analizaron resultados de matrices en el contexto del estudio de transformaciones lineales. Los tres tratados de Jacobi publicados en 1841 se consideran importantes porque hicieron ampliamente conocida la idea de determinante, ya que en ellos fue dada por primera vez la definición de determinante en forma algorítmica; las entradas del determinante no se especificaban, por tanto, los resultados se aplicaban tanto en aquellas entradas con números como con funciones (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006).

La notación que se utiliza en la actualidad para los determinantes se debe a Cayley, quien en 1841 publicó la primera contribución a la teoría de los determinantes, usando dos líneas verticales a los lados de una matriz para denotar el determinante (O'Connor & Robertson, 1996). Cayley también comprobó que una matriz cuadrada es invertible si y sólo si el determinante de la matriz es diferente de cero (Luzardo & Peña, 2006).

En 1858, Cayley publica *Memoir on the theory of matrices* en *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* En dicha memoria introduce la matriz nula, matriz unitaria, suma de matrices, la conmutatividad de la suma de matrices, multiplicación por un escalar, multiplicación de matrices, con sus propiedades no conmutativa y asociativa, la potencia n-ésima de una matriz M ($M^n \cdot M^p = M^{n+p}$), la matriz inversa, y que el producto de una matriz y su inversa es la matriz unidad denotado por I. Además, indica que cuando el determinante de una matriz es cero, la matriz es indeterminada (singular) y no posee inversa. Enuncia que una matriz de orden nxm puede sumarse a una matriz del mismo orden, el producto de una matriz nxm por otra matriz puede realizarse si esta última es de orden mxp, y la traspuesta de una matriz nxm es la matriz mxn. Fue Henry Smith (1826-1883), quien en la resolución de m ecuaciones lineales con n incógnitas introdujo las nociones de matriz de los coeficientes y matriz ampliada (Ferro, 2011).

Por el año de 1870, en el *Treatise on substitutions and algebraic equations*, apareció la forma canónica de Jordan. Por su parte, Frobenius, en 1878 escribió *On lineal substitutions and bilinear forms*, donde no usa el término matriz, sino que se refiere a coeficientes de formas, demostrando resultados importantes en matrices canónicas como representativas de equivalencias de matrices y que una matriz satisface su ecuación característica; además, definió rango de una matriz, lo cual utilizó en su trabajo sobre formas canónicas y en la definición de matrices ortogonales. En 1884, Sylvester define la nulidad de una matriz cuadrada; siendo en 1896, que Frobenius conoció la Memoria de Cayley de 1858 y empezó a emplear el término *matriz* (O'Connor & Robertson, 1996); él probó que si A y B son matrices semejantes y f es un polinomio con coeficientes matriciales (del mismo orden de A y B), entonces las matrices f(A) y f(B) también lo son (Luzardo & Peña, 2006).

En 1903, se publicó una definición axiomática de determinante de Weierstrass y las conferencias de Kronecker sobre el mismo tema. La teoría de matrices empezó a alcanzar la importancia que tiene en la actualidad a partir de la publicación en 1907 del texto *Introduction to higher algebra*, cuyo autor es Bôcher. En 1930, Turnbull y Airen, también publicaron textos importantes al respecto, y Leonid Mirsky (1918-1983) escribió *An Introduction to Linear Algebra* (O'Connor & Robertson, 1996; Luzardo & Peña, 2006), siendo además editor del *Journal of Linear Algebra and its Applications, Journal of mathematical Analysis and Applications*, y *Mathematical Spectrum*.

2.4.1.2. Estructura conceptual (mapa conceptual)

En nuestra investigación, la finalidad de realizar el análisis de contenido consiste en delimitar los conceptos matemáticos, determinar sistemas de representación y la fenomenología del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales[25], en relación con un curso universitario de iniciación al Álgebra Lineal. De allí, que en la estructura conceptual presentamos una delimitación de los *focos conceptuales prioritarios* (Rico et al., 2008) de este contenido, basándonos en documentos curriculares (libros de texto) de Álgebra Lineal. Los libros consultados fueron los siguientes:

Becerril, J., Benítez, L., Rivera, I., & Zubieta, C. (2002). *Problemario. Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan.* Recuperado de http://galois.azc.uam.mx/mate/propaganda/GAUSSJORDAN.pdf

[25] Haremos referencia sólo a aquellos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales relacionados con matrices y determinantes.

Kolman, B. & Hill, D. (2006). *Algebra Lineal.* México: Pearson Educación de México, S.A de C.V.

Larson, R., Edwards, B., & Falvo, D. (2009). *Elementary Linear Algebra.* Boston, MA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Lay, D.C. (2001). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson Educación de México, S.A de C.V.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal, una introducción moderna*. México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de V.

Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. México, D.F.: International Thomson Editores, S.A. de V.

Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Los focos conceptuales prioritarios que consideramos para el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, los mencionamos a continuación, a sabiendas de que cada uno de ellos incluye hechos, conceptos y procedimientos ligados al mismo (Rico et al., 2008); sin embargo, nosotros nos limitaremos a mostrar el mapa conceptual general (Figura 5) que refleja los principales conceptos que componen los focos que mencionamos.

- Eliminación gaussiana
- Eliminación de Gauss-Jordan
- Operaciones con matrices, propiedades y transformaciones lineales
- La inversa de una matriz
- Factorización LU de una matriz
- Rango de una matriz
- Determinantes (menores y cofactores, regla de Sarrus, teorema de Laplace)
- Propiedades de los determinantes
- Regla de Cramer

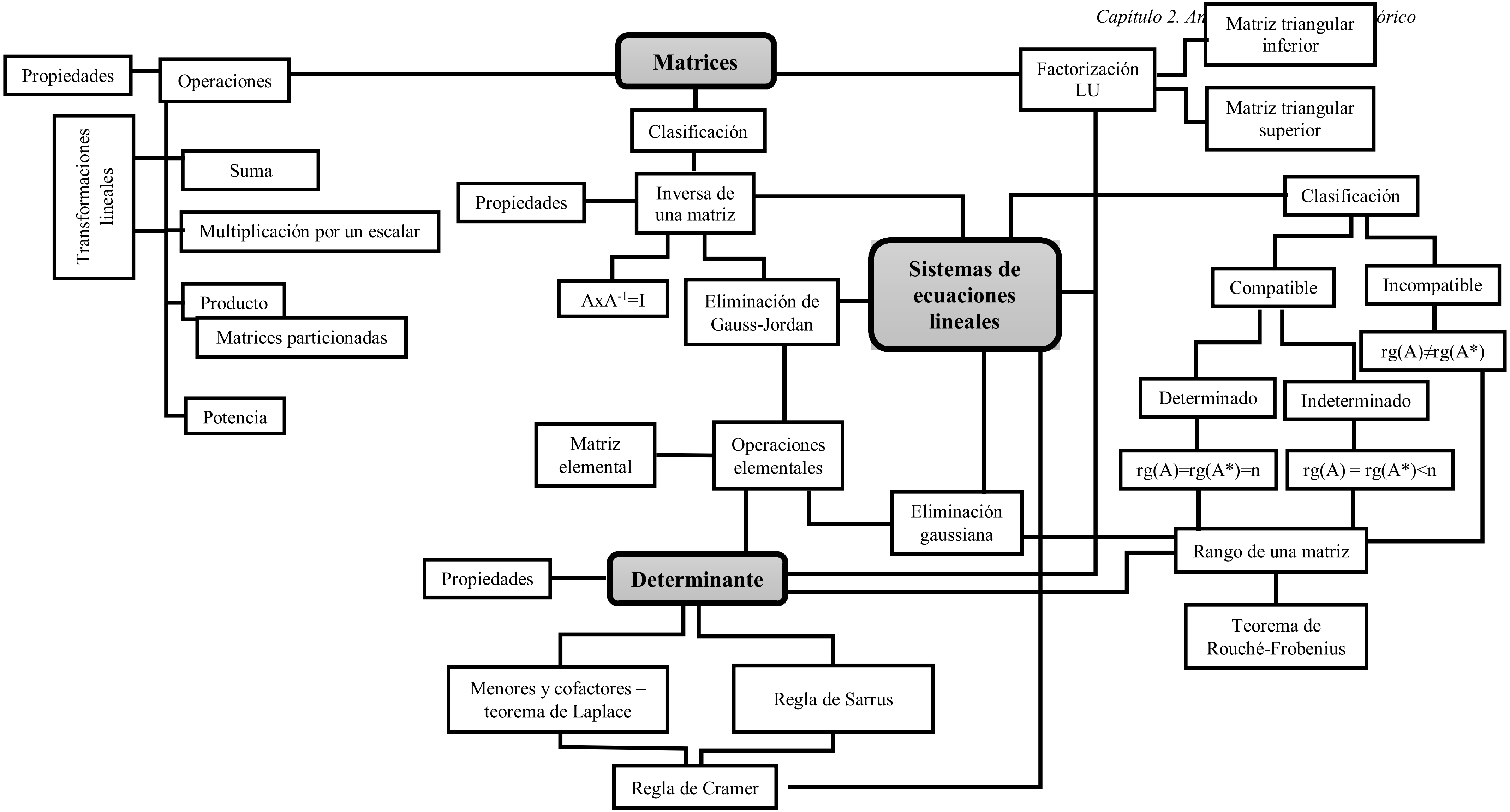


Figura 5. Mapa conceptual de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Coincidimos con Lupiáñez (2009) en que seleccionar nociones centrales de un tema matemático u organizar sus conceptos y procedimientos en focos de contenido es lo que nos va a permitir una profundización en la complejidad de contenidos matemáticos. De allí, que en la Figura 5 se muestra una estructura conceptual del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales constituida por la clasificación de matrices y las operaciones con las mismas (suma; multiplicación por un escalar; producto de matrices, incluyendo matrices particionadas, y potencia), con sus respectivas propiedades.

Las transformaciones lineales permiten transformar vectores R^n en vectores R^m (en otro espacio distinto), siendo exactamente lo que hace una matriz de m por n, es decir, la transformación puede representarse mediante una matriz (Strang, 2007), y las operaciones sobre la condición de linealidad son las que se pueden realizar con las matrices (fundamentalmente la suma y multiplicación por un escalar).

Podemos apreciar además, que las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales se relacionan y complementan entre sí, por ejemplo, para obtener la matriz inversa se puede utilizar el determinante (calculado por distintos métodos: operaciones elementales entre filas y propiedades, menores y cofactores, regla de Sarrus, factorización LU). Las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales se pueden obtener por el método de Gauss-Jordan (que a su vez también puede emplearse en el procedimiento de la matriz inversa), regla de Cramer (relacionada con el cálculo del determinante), a través de la matriz inversa, eliminación gaussiana y factorización LU. Las operaciones elementales, pueden ser consideradas transversales tanto para matrices, como para determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, tomando en cuenta ciertas características en cada caso. El rango de una matriz, obtenido por eliminación gaussiana o por determinantes, se relaciona con sistemas de ecuaciones lineales y nos da la pauta sobre si el sistema es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible, de acuerdo a los vectores fila o columna que son linealmente independientes.

2.4.1.3. Sistemas de representación

Los sistemas de representación (definidos como un conjunto de símbolos, gráficos y reglas, por medio de los cuales se pueden representar conceptos y procedimientos, incluyendo sus características y propiedades más relevantes, Castro & Castro, 1997), resultan ser esenciales para caracterizar el significado de nociones matemáticas, contribuyendo a la comprensión de conceptos y procedimientos. La complejidad de significados inmersos en la estructura conceptual de un tema de matemáticas se vuelve operativa a través de sus diferentes sistemas de representación (Rico et al., 2008).

Los sistemas de representación, a lo largo de los años, se han denominado de formas distintas: *símbolos* (Skemp, 1980), *sistemas de notación* (Kaput, 1992), *registros de representación semióticos* (Duval, 1993), y *sistemas de representación* (Castro, Rico & Romero, 1997). Los trabajos de Duval han constituido una teoría sobre registros de representación, donde se consideran fundamentales los signos matemáticos (Souto, 2013). Duval (1993, 1995) define las *representaciones semióticas* como producciones hechas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias restricciones de significado y funcionamiento. Hay que mencionar que este autor distingue *semiosis* (comprensión o producción de una representación por un signo) de *noesis* (comprensión conceptual de un objeto), afirmando que ambos no pueden ser separados en los procesos cognitivos reales. Un registro de representación semiótica permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- La formación de una representación identificable: una representación perceptible, cuya función es asegurar el reconocimiento de la representación y hacer factible la posibilidad de su utilización para el tratamiento (Duval, 1993). Por ejemplo: escribir la fórmula general para la obtención de raíces de ecuaciones cuadráticas.
- El tratamiento de una representación: transformación de una representación en el mismo registro en que se ha formado. Consiste en una transformación interna al registro. Por ejemplo: la paráfrasis (Duval, 1993).
- La conversión de una representación: es la transformación de una representación semiótica de un registro a otro (Duval, 1993). Por ejemplo: graficar una función cuadrática, cuya fórmula fue definida previamente (paso del registro algebraico al gráfico).

Dorier & Sierpinska (2001) indican que el Álgebra Lineal se compone de lenguajes y sistemas de representación, destacando entre los primeros el lenguaje *geométrico* de líneas y planos; el lenguaje *algebraico* de ecuaciones lineales, n-uplas (conjunto de matrices de una fila y n columnas) y matrices; y el lenguaje *abstracto* de espacios vectoriales y transformaciones lineales. Entre los sistemas de representación nombran el *gráfico, tabular* y *simbólico*, adicionalmente las representaciones *cartesianas* y *paramétricas* de subespacios. Por su parte, Duval (1995), hace referencia al *registro de la lengua natural, simbólico, gráfico, algebraico, figural* y *pictográfico*. Castro & Castro (1997), al trabajar con el concepto de función identifican sistemas de representación como: *verbal, tabular* (numérico), *gráfico* (visual) y *algebraico* (simbólico y formal). D' Amore (2004), reflexionando sobre la teoría de los registros semióticos de Duval, se refiere a registros de representación semiótica como: *lenguaje común, lenguaje aritmético, lenguaje algebraico, lenguaje figural* y *esquemas pictográficos*. Prieto y Vicente (2006), mencionan en su trabajo los registros semióticos: *verbal, analítico, figural* y *gráfico*. Ramírez, Romero & Oktaç (2013), en su investigación con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (en un curso de Álgebra Lineal) analizan la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas; finalmente, tomando como referencia la teoría de registros de representación semiótica de Duval, precisan los registros: *gráfico sintético, gráfico cartesiano, algebraico* y *matricial*.

Para nuestros propósitos, interesa determinar los distintos sistemas de representación considerados para matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, de manera que tengamos un conocimiento fundamentado que nos permita discernir el conocimiento sobre registros de representación del contenido que ponen de manifiesto los dos profesores participantes en nuestra investigación. En el caso del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de representación que se podrían emplear serían:

- Registro algebraico: es uno de los más usados para definir conceptos o redactar teoremas, se utilizan letras, números y símbolos para representar varios tipos de objetos matemáticos (Ramírez et al., 2013). Nos permite representar cada sistema de ecuaciones lineales, siendo considerado como un registro simbólico (Dorier & Sierpinska, 2001).

  Como parte de este registro, diferenciamos el registro matricial: que permite representar en forma de matriz los objetos matemáticos considerados en Álgebra Lineal (Ramírez et al., 2013; Retamosa, 2011), como por ejemplo los mismos sistemas de ecuaciones, polinomios y los determinantes. Por otro lado, mediante este registro también se pueden representar conceptos como el de transformación lineal, empleando una matriz que al multiplicarla por un vector cualquiera se obtenga la imagen del vector bajo la transformación lineal.

$$\begin{aligned} x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Registro algebraico

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad S=\begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{Det (A)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Registro algebraico matricial: AX = S

- Registro aritmético: los elementos numéricos antes de conformar una matriz pueden ser presentados en tablas o cuadros, siendo así un registro aritmético (D'Amore, 2004) conformado por los número reales; o también se usa este tipo de registro cuando se trata de describir las operaciones entre matrices.
- Registro gráfico: considerado un registro visual (Castro & Castro, 1997). Por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales se puede representar de forma gráfica (Figura 6).

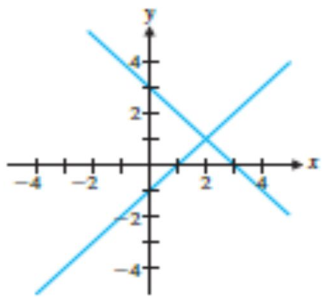


Figura 6. Representación de un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado (Poole, 2011, p. 66)

- Registro esquemático-pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004)**:** mediante un esquema y/o dibujo se intenta representar el contenido matemático. Por ejemplo, Poole (2011, p. 158) utiliza este tipo de registro para representar una matriz simétrica, que tiene la propiedad de que es su propia "imagen especular" a través de su diagonal principal, y las formas correspondientes representan entradas iguales (Figura 7).

Figura 7. Representación esquemática-pictográfica de una matriz simétrica (Poole, 2011, p. 158)

- Registro verbal: visto como la expresión oral del sistema de representación simbólico (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006). Se puede utilizar para la lectura de los términos del sistema de ecuaciones lineales, los elementos de una matriz, de un determinante o para enunciar un problema donde haya que plantear un sistema de ecuaciones lineales.
- A través de herramientas manipulativas como el Geoespacio y calculadoras gráficas, y con software como Mathematica y Derive, podemos representar sistemas de ecuaciones lineales (Retamosa, 2011). En el caso de las matrices se usa, por ejemplo el software Matlab.

En la Figura 8 mostramos los diferentes sistemas de representación para matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

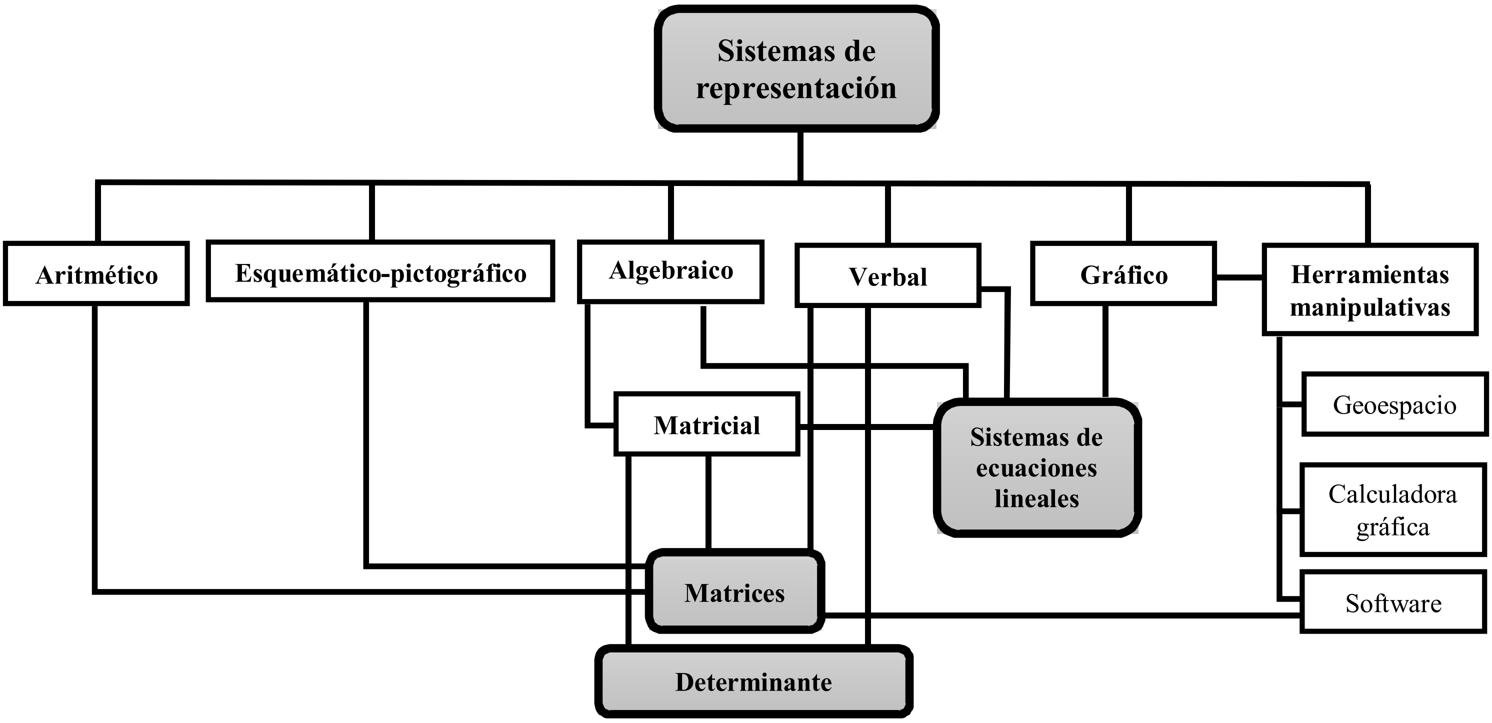


Figura 8. Sistemas de representación de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

2.4.1.4. Fenomenología

El significado de los conceptos matemáticos se puede alcanzar mostrando sus conexiones con los fenómenos del mundo real, con aquellos contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego, o en cuyo tratamiento se envuelven tales conceptos (Lupiáñez, 2009). El análisis fenomenológico es definido, en consecuencia, como *una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras; pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos* (Rico et al., 2008, p. 17).

Resulta importante por tanto, delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, es decir, aquellas en las que estos muestran su funcionalidad. En nuestro análisis fenomenológico identificaremos las principales aplicaciones (Tabla 1) que dan sentido a las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, las cuales han sido extraídas de los libros que se consultaron para armar la estructura conceptual del contenido.

Tabla 1. Aplicaciones de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

TEMA	APLICACIÓN
Matrices	Cadenas de Markov (teoría de probabilidad)
	Crecimiento poblacional
	Criptografía
Determinantes	Matriz inversa
	Regla de Cramer (Solución de Ax=b)
	Rango
	Área
	Volumen
	Ecuación de la recta
	Ecuación del plano
Sistemas de ecuaciones lineales	Situaciones cotidianas
	Asignación de recursos
	Balanceo de ecuaciones químicas
	Análisis de redes y redes eléctricas
	Modelos económicos lineales (Modelos entrada-salida de Leontief)

Cada una de estas aplicaciones responde a un determinado fenómeno y contexto en el cual tienen lugar dichos fenómenos (Tabla 2).

Tabla 2. Fenómenos a los que responden las aplicaciones de las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

	APLICACIÓN	FENÓMENO	CONTEXTO
MATRICES	Cadenas de Markov	Analizar la probabilidad de que ocurra un evento, lo cual depende del evento inmediato anterior	De la vida real
	Crecimiento poblacional	Predecir el crecimiento de la porción femenina de una población	De la vida real
	Criptografía	Codificar y decodificar mensajes	De la vida real
DETERMINANTES	Matriz inversa	Determinar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales	Matemático
	Regla de Cramer (Solución de Ax=b)	Satisfacer sistemas de n ecuaciones lineales en n variables (sólo para sistemas compatibles determinados).	De la vida real Matemático
	Rango	Determinar el número de filas o columnas de una matriz que son linealmente independientes	Matemático
	Área	Estudiar el área de un triángulo en el plano xy	Matemático
	Volumen	Estudiar el volumen de un tetraedro y un paralelepípedo	Matemático
	Ecuación de la recta	Estudiar una ecuación de la recta que pasa por dos puntos	Matemático
	Ecuación del plano	Estudiar una ecuación del plano que pasa por dos puntos	Matemático
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	Situaciones cotidianas	Satisfacer sistemas de n ecuaciones lineales en n variables (eliminación gaussiana, eliminación por Gauss-Jordan, por matriz inversa, regla de Cramer, factorización LU)	De la vida real
	Asignación de recursos	Asignar recursos limitados sujetos a un conjunto de restricciones	De la vida real
	Balanceo de ecuaciones químicas	Proporcionar los números relativos de reactivos y productos en una reacción química	De la vida real
	Análisis de redes y redes eléctricas	Estudiar posibles flujos a través de las redes	De la vida real
	Modelos económicos lineales (Modelos entrada-salida de Leontief)	Analizar procesos de entrada y salida en sistemas de economía (planificación y pronósticos económicos)	De la vida real

Finalmente exponemos ejemplos de las aplicaciones citadas.

2.4.1.4.1. Ejemplos de aplicaciones de las matrices

- Cadenas de Markov (tomado de Williams, 2002)

Desarrollar un modelo de movimiento de población entre las ciudades y sus alrededores en Estados Unidos. Se estima que el número de personas que vivían en las ciudades de estados Unidos en el año 2000 era 58 millones y el número de personas que vivían en los alrededores de las ciudades era 142 millones.

Represente esta información mediante una matriz

$$x_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix}$$

Considere ahora el flujo de la ciudad a los alrededores. Durante el año 2000, la probabilidad de que una persona se quedara en la ciudad era 0.96, por lo que la probabilidad de que se desplazara a los alrededores era 0.04 (suponiendo que todos los que cambiaban lo hacían a los alrededores). La probabilidad de que una persona se cambiara a la ciudad era de 0.01; la probabilidad de que se quedara en los alrededores era 0.99. Estas probabilidades se pueden escribir como elementos de una matriz estocástica P:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Ciudad} & \text{Alrededor} \end{array} \\ P= & \begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Ciudad} \\ \text{Alrededor} \end{array} \end{array}$$

Una *matriz estocástica* es una matriz cuadrada cuyos elementos son probabilidades y la suma de sus columnas es igual a 1. La probabilidad de cambiarse de la ubicación A a la ubicación B está dada por los elementos en la columna A y la fila B. En este contexto a la matriz estocástica se le llama *matriz de probabilidades de transición*.

Considere ahora la distribución de la población un año después, en el año 2001:

Población en la ciudad en el año 2001	=	Personas que pertenecieron desde el año 2000	+	Personas que vinieron de los alrededores
	=	(0.96 x 58) + (0.01 x 142)		
	=	57.1 millones		

Población en los alrededores en el año 2001	=	Personas que llegaron de la ciudad	+	Personas que pertenecieron desde el año 2000
	=	(0.04 x 58) + (0.99 x 142)		
	=	142.9 millones		

Observe que mediante una multiplicación de matrices puede llegar a estas cantidades:

$$\begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57.1 \\ 142.9 \end{bmatrix}$$

Tomando 2000 como el año base, sea X_1 la población un año más tarde, en 2001. Se puede escribir $X_1 = PX_0$

Al suponer que el flujo de población representado por la matriz P permanece constante a través de los años. La distribución de población después de dos años, X_2; está dada por $X_2 = PX_1$

Después de tres años la distribución de la población está dada por $X_3 = PX_2$

Después de n años $X_n = PX_{n-1}$

Las predicciones de este modelo (con cuatro decimales) son:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ciudad} \\ \text{alrededor} \end{array} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 57.1 \\ 142.9 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 56.245 \\ 143.755 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 55.4327 \\ 144.5672 \end{bmatrix} \qquad X_4 = \begin{bmatrix} 54.6611 \\ 145.3389 \end{bmatrix}$$

Y así sucesivamente. Observe cómo la población de las ciudades disminuye cada año, mientras que la de los alrededores aumenta.

- Crecimiento poblacional (tomado de Poole, 2011)

Cierta especie de escarabajo alemán llamado VW (Vollmar-Wasserman), vive cuando mucho 3 años. Las hembras del escarabajo VW se dividen en tres clases etarias de 1 año cada una: jóvenes (0-1 año), juveniles (1-2 años) y adultas (2-3 años). Las jóvenes no ponen huevos; cada juvenil produce un promedio de cuatro escarabajos hembras; y cada adulta produce un promedio de tres hembras. La tasa de supervivencia para jóvenes es 50% (esto es: la probabilidad de que una joven sobreviva hasta volverse juvenil es 0.5), y la tasa de supervivencia de las juveniles es 25%. Suponga que comienza con una población de 100 escarabajos VW hembras: 40 jóvenes, 40 juveniles y 20 adultas. Prediga la población de escarabajos para cada uno de los siguientes 5 años.

Para el primer año, el número de jóvenes será el número producido durante dicho año:

$$40 \times 4 + 20 \times 3 = 220$$

El número de juveniles será el número de jóvenes que sobrevivió:

$$40 \times 0.5 = 20$$

El número de adultas será el número de juveniles que sobrevivió:

$$40 \times 0.25 = 10$$

Puede combinar esto en una sola ecuación matricial L

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}}_{x_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}}_{x_1}$$

Lo que corresponde a $Lx_0 = x_1$, donde x_0 es el vector de distribución de población inicial y x_1 es la distribución después de 1 año. Con una estructura $x_{k+1} = Lx_k$ para k = 0, 1, 2,…

$$x_2 = \quad Lx_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \quad Lx_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 455 \\ 55 \\ 27.5 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \quad Lx_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 455 \\ 55 \\ 27.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 302.5 \\ 227.5 \\ 13.75 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = \quad Lx_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 302.5 \\ 227.5 \\ 13.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 951.2 \\ 151.2 \\ 56.88 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el modelo predice que, después de 5 años, habrá aproximadamente 951 hembras jóvenes de escarabajo VW, 151 juveniles y 57 adultas.

- Criptografía (tomado de Williams, 2002)

Sea el mensaje PREPARE TO ATTACK y la matriz codificadora sea:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A cada letra del alfabeto se le asigna un número, así la A es 1, la B es 2, y así sucesivamente. Al espacio entre palabras se denota con el número 27. El mensaje, entonces será:

P R E P A R E * T O * A T T A C K

16 18 5 16 1 18 5 27 20 15 27 1 20 20 1 3 11

Como se usará una matriz 3 x 3 para codificar el mensaje, divida el mensaje numerado en matrices columna de 3 x 1:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Se agregó un espacio al final del mensaje para completar la última matriz. El mensaje se pone en código multiplicando cada una de las matrices columna por la matriz codificadora:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 5 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38 \\ 138 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{bmatrix}$$

Las columnas de esta matriz producen el mensaje codificado. El mensaje se trasmite en forma lineal:

-122, 23, 138, -123, 19, 139, -176, 47, 181,
-130, 28, 145, -124, 21, 144, -150, 38, 153

Para decodificar el mensaje, el receptor escribe esta lista como una sucesión de matrices columna de 3 x 1 y repite la técnica anterior usando la inversa de la matriz codificadora que sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Para decodificar el mensaje, se multiplican:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38 \\ 138 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 5 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

El mensaje original se obtiene al escribir en forma lineal las columnas de la última matriz:

16 18 5 16 1 18 5 27 20 15 27 1 20 20 1 3 11

P R E P A R E * T O * A T T A C K

2.4.1.4.2. Ejemplos de aplicaciones de los determinantes

- Matriz inversa (tomado de Larson et al., 2009)

Hallar la matriz inversa de:

$$A= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El cofactor C_{11} viene dado por:

$$A= \begin{bmatrix} -1 & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & -2 & 1 \\ \cancel{1} & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow C_{11}= (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Se obtiene la siguiente matriz de cofactores de A:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Su traspuesta es la matriz adjunta de A:

$$\text{adj (A)}= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

El determinante de A es $|A| = 3$ y la inversa de A es:

$$A^{-1}= \frac{1}{|A|}\ \text{adj}(A) = 1/3 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2 & 7/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

- Regla de Cramer (tomado de Lay, 2001)

Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$

$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Vea el sistema como Ax = b

$$A= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_1(b)= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2(b)= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Puesto que det A = 2, el sistema tiene una solución única. Por la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{24+16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{24+30}{2} = 27$$

- Rango de una matriz por determinantes

A través de los determinantes se puede calcular el rango de matrices cuadradas. El rango de una matriz nos permite definir el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (teorema de Rouché-Frobenius). Si el determinante es diferente de cero, el rango es igual al número de filas de la matriz y todas son linealmente independientes. Si el determinante es igual a cero, se deberá definir cuántas filas son linealmente independientes.

Calcular el rango de las matrices A y B:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow Rg\,(A) = 3$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow Rg\ (B) < 3 \rightarrow Rg\ (B) = 2$$

- Área (tomado de Larson et al., 2009)

Calcular el área del triángulo con vértices en (1, 0), (2, 2) y (4, 3).

El área del triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) viene dada por:

$$\text{Área} = \pm \tfrac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde el signo ± se elige de modo que el área sea positiva.

No es necesario conocer las posiciones relativas de los tres vértices. Basta evaluar el determinante.

$$\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3/2$$

Para concluir que el área del triángulo es $3/2\ u^2$.

- Volumen (tomado de Larson et al., 2009)

a) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son (0, 4, 1), (4, 0, 0), (3, 5, 2) y (2, 2, 5)

El volumen de un tetraedro con vértices en los puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) viene dado por:

$$\text{Volumen} = \pm\, 1/6 \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde el signo ± debe tomarse de modo que el volumen sea positivo.

Aplicando la fórmula del determinante se obtiene:

$$1/6 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1/6(-72) = -12$$

Por tanto, el volumen de este tetraedro es 12 u^3.

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene un vértice en el origen de coordenadas (A) y cuyos vértices consecutivos son B(2, 0, 0); C(0, 0, 3) y D(0, 2, 0).

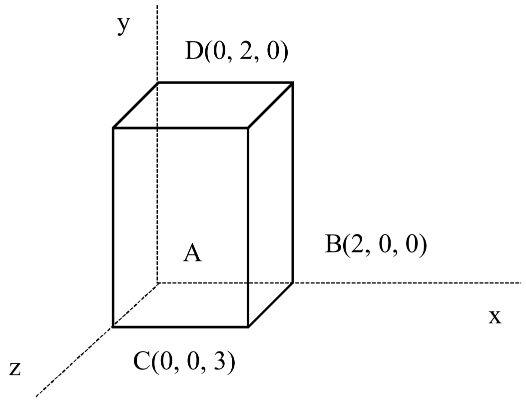


Figura 9. Paralelepípedo con vértice en el origen de coordenadas

El volumen es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores (B, C y D), siempre y cuando estos concurran o partan del mismo sitio (A).

AB = B – A = (2, 0, 0) – (0, 0, 0) = (2, 0, 0)

AC = C – A = (0, 0, 3) – (0, 0, 0) = (0, 0, 3)

AD = D – A = (0, 2, 0) – (0, 0, 0) = (0, 2, 0)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 \text{ u}^3$$

Por tanto, el volumen del paralelepípedo es 12 u^3.

- Ecuación de la recta (tomado de Larson et al., 2009)

Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 4) y (-1, 3).

Una ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2) viene dada por:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Aplicando la fórmula anterior se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculamos este determinante desarrollando en cofactores la primera fila.

$$x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad -y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad +1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$

Por tanto, la recta en cuestión tiene ecuación $x - 3y = -10$

- Ecuación del plano (tomado de Larson et al., 2009)

Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos (0, 1, 0), (-1, 3, 2) y (-2, 0, 1).

Una ecuación del plano que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) viene dada por:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación que acabamos de establecer en forma de determinante da aquí:

$$\det\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para calcular este determinante, restamos la cuarta columna de la segunda, con lo que se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora, desarrollando en cofactores por la segunda fila, resulta:

$$4x - 3y + 5z = -3$$

2.4.1.4.3. Ejemplos de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

- Situaciones cotidianas (tomado de Becerril, Benítez, Rivera & Zubieta, 2002)

Una cadena de supermercados en México vende carne molida del tipo popular y selecta. Un lote de molida popular contiene 3 kg de grasa y 17 kg de carne roja, un lote de molida selecta contiene 2 kg de grasa y 18 kg de carne roja. Si en un momento dado cuenta con 10 kg de grasa y 90 kg de carne roja ¿Cuántos lotes de molida popular y selecta pueden producir utilizando toda la carne y toda la grasa sin desperdiciar nada?

Sean x el número de lotes de carne molida popular e y el número de lotes de carne molida selecta, la cantidad de grasa utilizada en la molida popular es 3x, la cantidad de grasa utilizada en la molida selecta es 2y.

Por tanto, el sistema sería:

$$3x + 2y = 10$$

$$17x + 18y = 90$$

Lo podemos resolver rápidamente aplicando la regla de Cramer, el determinante del sistema es:

$$\text{detsist} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 17 & 18 \end{vmatrix} = 54 - 34 = 20$$

El determinante para x:

$$\det x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 90 & 18 \end{vmatrix} = 180 - 180 = 0$$

El determinante para y:

$$\det y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 17 & 90 \end{vmatrix} = 270 - 170 = 100$$

El valor de las incógnitas es:

$$x = \frac{\text{detsist}}{\det x} = \frac{0}{180} = 0$$

$$y = \frac{\text{detsist}}{\det x} = \frac{100}{20} = 5$$

La cadena de supermercados deberá producir cinco lotes de carne molida selecta y cero de la popular, para no desperdiciar nada.

- Asignación de recursos (tomado de Poole, 2011)

Una bióloga colocó tres cepas de bacterias (denominadas I, II y III) en un tubo de ensayo, donde se alimentarán de tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día, 2300 unidades de A, 800 unidades de B y 1500 unidades de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día (lo cual se muestra en la tabla) ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Bacteria cepa I	**Bacteria cepa II**	**Bacteria cepa III**
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Sean x_1, x_2 y x_3 los números de bacterias de las cepas I, II y III, respectivamente. Dado que cada una de las bacterias x_1 de la cepa I consume 2 unidades de A por día, la cepa I consume un total de $2x_1$ unidades por día. De igual modo, las cepas II y III consumen un total de $2x_2$ y $4x_3$ unidades de alimento A diariamente. Puesto que se quiere consumir las 2300 unidades de A, se tiene la ecuación:

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$$

Del mismo modo, se obtienen ecuaciones correspondientes para el consumo de B y C:

$$x_1 + 2x_2 \qquad = 800$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500$$

Por tanto, se tiene un sistema de tres ecuaciones lineales. La reducción por renglones de la matriz aumentada correspondiente produce:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2300 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 350 \end{bmatrix}$$

En consecuencia $x_1 = 100$, $x_2 = 350$ y $x_3 = 350$. La bióloga debe colocar 100 bacterias de cepa I y 350 de cada una de las cepas II y III en su tubo de ensayo si quiere que consuman todo el alimento.

- Balanceo de ecuaciones químicas (tomado de Poole, 2011)

La combustión de amoniaco (NH_3) en oxígeno produce nitrógeno (N_2) y agua. Encuentre una ecuación química balanceada para esta reacción.

Si el número de moléculas de amoniaco, oxígeno, nitrógeno y agua se denotan w, x, y, z, respectivamente, entonces se busca una ecuación de la forma:

$$wNH_3 + xO_2 \longrightarrow yN_2 + zH_2O$$

Al comparar el número de átomos de nitrógeno, hidrógeno y oxígeno en los reactivos y productos, se obtienen tres ecuaciones lineales:

Nitrógeno: $w = 2y$

Hidrógeno: $3w = 2z$

Oxígeno: $2x = z$

Al reescribir estas ecuaciones en forma estándar se obtiene un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con cuatro variables. La correspondiente matriz aumentada se reduce por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{lllll} w & & -2y & & =0 \\ 3w & & & -2z & =0 \\ & 2x & & -z & =0 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto, $w = 2/3z$, $x = ½ z$, $y = 1/3z$. El valor positivo más pequeño de z que producirá valores *enteros* para las cuatro variables es el mínimo común denominador de las fracciones 2/3, ½ y 1/3, a saber, 6, lo que produce $w = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$. Por tanto, la ecuación química balanceada es:

$$4NH_3 + 3O_2 \longrightarrow 2N_2 + 6H_2O$$

- Redes eléctricas (tomado de Poole, 2011)

Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 en la red eléctrica que se muestra en la Figura 10

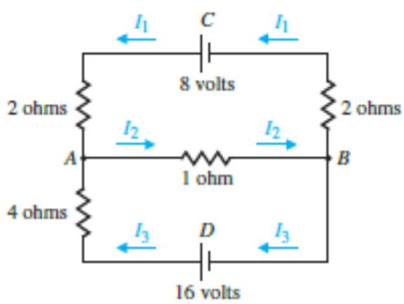


Figura 10. Red eléctrica (Poole, 2011, p. 111)

Leyes de Kirchhoff:

Ley de corriente (nodos): la suma de las corrientes que fluyen hacia cualquier nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de dicho nodo.

La ley de voltaje (circuitos): la suma de las caídas de voltaje alrededor de cualquier circuito es igual al voltaje total alrededor del circuito (proporcionado por las baterías).

Esta red tiene dos baterías y cuatro resistores. La corriente I_1 fluye a través de la rama superior BCA, la corriente I_2 fluye a través de la rama media AB y la corriente I_3 fluye a través de la rama inferior BDA.

En el nodo A, la ley de corriente produce $I_1 + I_3 = I_2$ o

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

En el nodo B se obtiene la misma ecuación. Se aplica la ley de voltaje para cada circuito. Para el circuito CABC, las caídas de voltaje en los resistores son $2I_1$, I_2 y $2I_1$. Por tanto, se tiene la ecuación:

$$4I_1 + I_2 = 8$$

De igual modo, para el circuito DABD, se obtiene:

$$I_2 + 4I_3 = 16$$

Ahora se tiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 4I_1 + I_2 \qquad &= 8 \\ I_2 + 4I_3 &= 16 \end{aligned}$$

La eliminación de Gauss-Jordan produce:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Por tanto, las corrientes son $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 4$ amps e $I_3 = 3$ amps.

- Modelos económicos lineales - Modelos entrada-salida de Leontief (tomado de Larson et al., 2009)

Un sistema económico formado por tres industrias tiene la siguiente matriz de entrada-salida:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Usuario (salida)} \\
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
D= & \left[\begin{array}{ccc} 0.1 & 0.43 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.37 \\ 0.23 & 0.03 & 0.02 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \\ C \end{array}
\quad \text{Suministro (entrada)}
$$

Hallar la matriz de salida X si la demanda externa viene dada por

$$
E= \begin{bmatrix} 20\ 000 \\ 30\ 000 \\ 25\ 000 \end{bmatrix}
$$

El modelo de Leontief de entrada-salida o ecuación de producción:

$$
\underset{\substack{\text{Cantidad} \\ \text{producida}}}{x} = \underset{\substack{\text{Demanda} \\ \text{intermedia}}}{Dx} + \underset{\substack{\text{Demanda} \\ \text{final}}}{E}
$$

Escribiendo x como Ix (I denota la matriz identidad) y usando álgebra de matrices, podemos reescribir:

$$Ix - Dx = E$$

$$(I - D)x = E$$

Usando la matriz D dada, se obtiene:

$$
I - D= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.43 & 0 \\ -0.15 & 1 & -0.37 \\ -0.23 & -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}
$$

Finalmente, aplicando eliminación de Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones lineales, representado por $(I - D)x = E$, resulta:

$$I - D = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.43 & 0 & 20\,000 \\ -0.15 & 1 & -0.37 & 30\,000 \\ -0.23 & -0.03 & 0.98 & 25\,000 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46\,616 \\ 0 & 1 & 0 & 51\,058 \\ 0 & 0 & 1 & 38\,014 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz de salida es:

$$E = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 46\,616 \\ 51\,058 \\ 38\,014 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

Para producir la demanda externa, las salidas de las tres industrias deben ser:

Salida de la industria A: 46 616 unidades

Salida de la industria B: 51 058 unidades

Salida de la industria C: 38 014 unidades

2.4.2. Análisis cognitivo

Este análisis pone su foco en el aprendizaje del estudiante, y es considerado como un procedimiento que permite al profesor elaborar una descripción de la problemática de aprendizaje de un tema matemático específico, desde los puntos de vista curricular y funcional. Está conformado por tres organizadores: *expectativas de aprendizaje* (delimitan y organizan lo que el profesor espera que aprenda el estudiante), *limitaciones de aprendizaje* (errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje), *y oportunidades de aprendizaje* (ofrecidas por el profesor a sus estudiantes a través de la organización de tareas) (Lupiáñez, 2009).

La finalidad de desarrollar cada uno de estos organizadores es que contribuyan a la planificación de una unidad didáctica. No obstante, como ya se ha mencionado, en nuestro caso específico, nos interesa indagar sobre el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal, por tanto, en el análisis cognitivo abordaremos lo referente al aprendizaje del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y los principales errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de enseñanza de este contenido, de manera que esta información nos ayude en la discusión del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) de los profesores que colaboran en nuestro estudio.

2.4.2.1. Aprendizaje, errores y dificultades en relación al Álgebra Lineal y al contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales constituyen uno de los contenidos del Álgebra Lineal, siendo esta asignatura una rama del Álgebra que tiene aplicaciones en otras ciencias como la física, estadística, ingeniería, ciencias sociales, análisis numérico, entre otras, cuyo tema fundamental es la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales (Larson et al., 2009), y su principal creación el espacio vectorial (Ortega, 2002). En las carreras de Ingeniería se plantea como base el aprendizaje del Álgebra Lineal, y para el caso de nuestro contenido matemático, las expectativas del profesor irán encaminadas a que el estudiante opere con matrices, matriz inversa y sus respectivas propiedades, sea capaz de trabajar con operaciones elementales diferenciado los métodos de eliminación gaussiana, Gauss-Jordan y factorización LU para resolver sistemas de ecuaciones lineales, aplique el módulo de una matriz (determinante) en la obtención de la inversa y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer), determine filas y columnas linealmente independientes de una matriz (rango) asociado a los tipos de sistemas de ecuaciones lineales. Lo anterior deberá ir de la mano con los correspondientes sistemas de representación, así como, con las principales aplicaciones (fenomenología-ver análisis de contenido) del contenido matemático, tanto en un contexto matemático como de la vida real, siendo importante además, evidenciar la conexión entre la teoría R^n y la teoría de los espacios vectoriales, así como el promover el manejo de software.

Sin embargo, no siempre se alcanzan las expectativas, debido a una serie de factores, entre ellos, el enfoque que se da a la asignatura, y los errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la misma. En el análisis cognitivo, el estudio de errores y dificultades tiene la finalidad de determinar qué puede limitar el aprendizaje de un contenido matemático. Nos referiremos, por tanto, a las principales dificultades consideradas en el aprendizaje del Álgebra Lineal de forma general, y a aquellas relacionadas con matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Strang (2007) plantea que se debe aprender sobre las matrices a partir de ejemplos, ya que en un curso de Álgebra Lineal, el estudiante se iniciará en el formalismo matemático. Poole (2011) sostiene que el Álgebra Lineal trata esencialmente de vectores y, por tanto, es lo primero que se debe abordar con la finalidad de obtener cierta comprensión geométrica, considerando que así los estudiantes serán capaces de ver cómo los sistemas de ecuaciones surgen de manera natural de problemas geométricos. Otros autores de libros de Álgebra Lineal proponen iniciar su aprendizaje con el tratamiento de las matrices como arreglos de números que surgen de manera natural en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y como agentes de cambio (transformaciones lineales), considerando que los conceptos abstractos deben presentarse de manera gradual y basarse en fundamentos firmes (Kolman & Hill, 2006; Larson et al., 2009; Lay, 2001; Williams, 2002), preparando de esta manera el escenario para los vectores y proyecciones ortogonales.

Hay que mencionar que el Álgebra Lineal es considerada una disciplina que goza de un elevado grado de abstracción (Ortega, 2002), es reconocido que su aprendizaje es difícil para la mayoría de estudiantes (Dorier, 2002; Gueudet-Chartier, 2004; Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010), por ser una disciplina altamente demandante desde el punto de vista cognitivo, que requiere que el estudiante sea capaz de moverse entre diferentes lenguajes (por ejemplo, el lenguaje de la teoría de matrices y el leguaje de la teoría de los espacios vectoriales), puntos de vista cartesiano y paramétrico, y registros semióticos (Dorier & Sierpinska, 2001). De forma general, Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (1994) citados por Harel & Trgalová (1996), analizando trabajos de estudiantes de Álgebra Lineal enumeraron varias dificultades:

- Insuficiente conocimiento y control del lenguaje de la teoría de conjuntos, tales como la confusión entre inclusión e igualdad, o entre implicación y equivalencia.
- Muchos de los conceptos del Álgebra Lineal son vistos como objetos innecesarios, antes que como herramientas para resolver problemas.
- Dificultades en el manejo de conceptos abstractos, donde el control de la intuición y la verificación pragmática no son posibles.

- Dificultades en la comprensión de conceptos centrales, en particular el concepto de espacio vectorial.
- Dificultades en el manejo de definiciones formales.
- Dificultades en realizar cálculos de precisión.
- Dificultades relacionadas con la prueba y el rigor.

El elevado grado de abstracción de la asignatura propicia el llamado *obstáculo del formalismo*, descrito como la dificultad que presentan los estudiantes para reflexionar sobre objetos matemáticos y sus conexiones con aquellos objetos estudiados previamente (Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999). Por ello, iniciar el aprendizaje de esta asignatura de manera formal, a través de la teoría axiomática de los espacios vectoriales marca un alto nivel de abstracción, provocando por un lado que los estudiantes no puedan establecer conexiones con el conocimiento previo y, por otro, que las aplicaciones del Álgebra Lineal no sean suficientemente enfatizadas. El enfoque axiomático se convirtió en una forma universal de pensamiento y organización del Álgebra Lineal y su utilización no vino de la posibilidad de llegar a una solución de problemas matemáticos sin resolver, sino más bien de su poder de unificación y generalización, en consecuencia de la simplificación en la búsqueda de métodos para resolver problemas matemáticos (Dorier & Sierpinska, 2001).

Para atender la problemática de la abstracción se recomienda introducir a los estudiantes al formalismo realizando un cierto tipo de reflexión sobre los usos del conocimiento previo en relación con los nuevos conceptos formales. De este modo, las llamadas *meta level activities* (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000), consisten en que el profesor promueva en su discurso el significado de la introducción de conceptos de teoría general, su carácter unificador y generalizador, de manera que el estudiante se cuestione sobre nuevas posibilidades conceptuales proporcionadas por el uso de métodos, herramientas y conceptos del Álgebra Lineal (Dorier, 2002).

De hecho, Dorier & Sierpinska (2001) distinguen dos etapas en la construcción de un concepto unificador y generalizador correspondientes a dos procesos mentales de aprendizaje:

- El reconocimiento de similitudes entre objetos, herramientas y métodos trae a la existencia la unificación y generalización de conceptos.

- La unificación y generalización de conceptos explicitan cómo un objeto induce a la reorganización de competencias y elementos de conocimientos previos.

Por su parte Hillel (2000), enfoca las dificultades conceptuales de los estudiantes que son específicas del Álgebra Lineal y su origen, donde incluye la existencia de varios lenguajes o modos de descripción, el problema de las representaciones y la aplicabilidad de la teoría general. Conocer cómo se conectan los diferentes lenguajes y cuándo uno de ellos se adapta mejor que otro constituye una gran dificultad para los estudiantes. El autor hace referencia a tres niveles de lenguaje:

- *Lenguaje abstracto*: usos del lenguaje y conceptos de la teoría formal general, que incluye espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores.
- *Lenguaje algebraico*: usos del lenguaje y conceptos de la teoría más específica de $R^{n,}$ que incluye matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones, vector fila.
- *Lenguaje geométrico*: usos del lenguaje y conceptos relacionados con espacios en dos y tres dimensiones, que incluye la orientación de segmentos, puntos, líneas, planos, transformaciones geométricas.

La tradición de los textos de Álgebra Lineal en América del Norte siguió el estilo de Bourbaki (de lo general a lo particular), introduciendo de manera general la teoría de los espacios vectoriales seguido de la teoría más específica R^n. Ya desde la década de los 80's se abandonó este enfoque prefiriendo uno más analítico basado en el estudio de R^n y cálculo de matrices (Hillel, 2000; Dorier, 2002). Fue este segundo enfoque estudiado por el mismo Hillel (2000), corroborando que los profesores cambiaban constantemente los modos de descripción o lenguajes, es decir, pasando de la presentación analítica de los contenidos a la presentación geométrica de los mismos contenidos, pero sin alertar a los estudiantes sobre estos cambios de manera explícita, sosteniendo que esto conlleva a que a los estudiantes se les dificulte comprender las diferentes representaciones de los vectores y trasformaciones, y cómo pasar de un tipo de descripción a otro (-*noción de flexibilidad cognitiva*- Alves-Dias & Artigue, 1995; Dorier, 2002), indicando que el estudiante no sólo tiene que ser capaz de manejar una representación matricial de un operador lineal en una base dada, sino que también necesita pensar en representaciones de matrices de operadores lineales y ser capaz de considerar las condiciones generales bajo las cuales un operador lineal puede tener una representación particularmente deseable.

Cuestiones relacionadas con la dependencia/independencia lineal, bases, subespacios pueden ser resueltas por la manipulación directa de técnicas (la mayoría se reducen a menudo a problemas de sistemas de ecuaciones y al uso de la reducción de Gauss-Jordan, sin el uso de la teoría axiomática), lo que provoca que los estudiantes no se familiaricen con el uso del concepto de espacio vectorial (Hillel, 2000), no teniendo éxito, por tanto, la axiomatización, ya que el estudiante no llega a comprender la unificación y generalización de conceptos, y en consecuencia no se plantea la búsqueda de otros métodos para resolver problemas matemáticos (Dorier, 2002).

Dorier & Sierpinska (2001) hacen alusión a dos tipos de dificultades del Álgebra lineal: *dificultades conceptuales* (propias de la naturaleza de la disciplina), y *dificultades cognitivas* (aquellas relacionadas al tipo de pensamiento necesario para comprender la disciplina), haciendo hincapié en que ambas están integradas.

En relación a las *dificultades cognitivas*, Sierpinska (2000) postuló ciertas características de la forma de pensar de los estudiantes (*theoretical thinking* y *practical thinking*) que se podrían catalogar como responsables en parte de su entendimiento erróneo y de sus dificultades para hacer frente a ciertos problemas, especialmente el problema de extender una transformación de una base a una transformación lineal de un plano conjunto. En sus investigaciones, esta autora indica que el comportamiento de los estudiantes que presentan dificultades, sugiere que sus formas de pensar tienen más características de *practical thinking* antes que *theoretical thinking*. En particular, las dificultades estuvieron relacionadas a las representaciones gráficas y dinámicas que estaban observando y manipulando en Cabri, su relación con estas representaciones fue más bien fenomenológica antes que analítica. El pensamiento práctico de los estudiantes tiene tendencia a basar la comprensión de un concepto abstracto en ejemplos prototípicos y no en su definición. Esta forma de entender hace que, por ejemplo, sea difícil para los estudiantes ver cómo una transformación lineal podría ser determinada por su valor sobre una base y, consecuentemente, su noción de matriz de una transformación lineal se mantiene a un nivel de procedimiento (Dorier & Sierpinska, 2001).

Relacionado con la abstracción y paralelo a los tres lenguajes identificados por Hillel, Sierpinska (2000) enfoca tres modos de pensamiento que son útiles cada uno en su propio contexto, para fines específicos y, especialmente, cuando están en interacción: *sintético-geométrico, analítico-aritmético,* y *analítico-estructural*. La diferencia entre el sintético y los modos analíticos es que en el sintético un objeto, en cierto modo, parece como directamente accesible a la mente que luego trata de describirlo, mientras que en los modos analíticos, un objeto es concebido o construido por la definición de las propiedades de sus elementos. Por ejemplo: en el modo sintético, una línea es vista como un objeto pre-determinado, de una forma determinada, sobre algún lugar en el espacio; se podría hablar de las propiedades que describen la línea recta, pero estas no la definen. En el modo analítico, la línea recta se define como relación específica entre las coordenadas de puntos en un espacio de una dimensión dada. Por tanto, el modo sintético pertenece a la forma de pensamiento práctico (*practical thinking*), y el modo analítico, a la forma de pensamiento teórico (*theoretical thinking*).

Se describen los tipos de pensamiento a modos de ejemplos relacionados con matrices y sistemas de ecuaciones lineales, tomados de Sierpinska (2000):

- Si se piensa en posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales mediante la visualización de tres planos en el espacio, se trata del modo de pensamiento *sintético-geométrico*. Si se piensa en el mismo sistema en términos de los posibles resultados de la reducción de una fila de una matriz 3x4, se trata del modo *analítico-aritmético*. Pensar en dicho sistema en términos de matrices singulares y no singulares sería un ejemplo de modo de pensamiento *analítico-estructural*.
- Con las matrices A y B, comprobar si B es inversa de A. Si el estudiante calcula la matriz inversa de A usando la fórmula del determinante y los cofactores y la compara con B, estaríamos frente al modo de pensamiento *analítico-aritmético*. Ahora, si el estudiante multiplica A por B, estaría utilizando la definición de matriz inversa, siendo su modo de pensamiento *analítico-estructural*. Por tanto, mientras que el pensamiento *analítico-aritmético* tiene como objetivo la simplificación de los cálculos haciéndolos de forma precisa; el pensamiento *analítico estructural* tiene como objetivo ampliar nuestro conocimiento sobre conceptos.

Estos modos de pensamiento presentan dificultades específicas para los estudiantes, como por ejemplo moverse con flexibilidad entre ellos (*flexibilidad cognitiva*), siendo a su vez, muy difícil que utilicen cada uno de ellos de manera consciente (Dorier & Sierpinska, 2001).

En la misma línea, Carlson (2004) distingue dificultades conceptuales asociadas al carácter formal del Álgebra Lineal como aquellas relacionadas con: la lógica formal (dificultades en el manejo de cuantificadores); las definiciones (dificultades para distinguir entre frases que son definiciones y las que son implicaciones); la demostración (no la utilizan para probar la veracidad de un resultado y más bien emplean pruebas empíricas); la abstracción (a menudo se emplean ejemplos tipo para reducir el carácter abstracto del Álgebra Lineal, habiendo poco énfasis en las definiciones).

Un estudio concerniente a las dificultades en la adquisición de conceptos de Álgebra Lineal, realizado a través de un cuestionario conformado por preguntas conceptuales relacionadas con la geometría, matriz y representación algebraica, mostró que los estudiantes tienen dificultades para comprender las definiciones, existiendo una tendencia hacia un enfoque procedimental antes que conceptual y una aparente falta de versatilidad en las representaciones (Stewart & Thomas, 2003).

Ya específicamente en el caso de las matrices, en una investigación con alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas de una universidad argentina, Hurman (2007) aplicó un curso con una orientación matricial, donde los estudiantes tenían que completar afirmaciones mostrando los pasos intermedios para llegar a un resultado final, encontrando errores como el no tener en cuenta la característica de los entes con que están operando (siguen trabajando con matrices como si fuesen números o con los determinantes como si fuesen matrices); la no conmutatividad del producto de matrices sigue siendo sólo declarativo, debido a que no se considera al realizar operaciones matriciales.

Relacionado a lo anterior, Ferro (2011) en una investigación con estudiantes de Álgebra Lineal en bachillerato, concluyó que en el tema de matrices y determinantes los ejercicios de cálculo matricial resultan sencillos para los estudiantes porque quizás son los que más se trabajan en el aula, sin embargo indican que:

- Existen dificultades en aquellos problemas relacionados con la modelización algebraica.
- Se detectaron problemas a la hora de utilizar notación adecuada, indicando que en su mayoría los estudiantes se preocupan por llegar al resultado final sin tomar en

cuenta la forma correcta de describir los procesos que se ponen en juego y las justificaciones de los mismos.

- Si tienen que desarrollar un determinante por una columna, realizan bien el cálculo si en la columna de ceros el otro elemento es un 1, pero se equivocan si aparece un número distinto de 1.
- Tienen dificultad para plantear y resolver sistemas de dos ecuaciones por el método de Gauss, mientras que resuelven perfectamente los de tres ecuaciones, que son los que aparecen mayoritariamente en los libros de ese nivel.
- Se presentan errores en operaciones simples (sumas, restas), el alumno no se percata de la incoherencia de los resultados, mostrando falta de espíritu crítico.
- Aplican incorrectamente resultados teóricos, sobre todo cuando se trata del teorema de Rouché-Fröbenius y las propiedades de los determinantes.
- Existe imprecisión en las definiciones de conceptos, que indica una comprensión insuficiente.
- Persiste la confusión entre la notación y concepto de matriz y determinante.
- Realizan incorrectamente las demostraciones, excepto aquellas abordadas con anterioridad en clase y que suponen memorización.

Corroborando algunos de los errores mencionados por Ferro (2011), Barros, Mendes & Fernandes (2013) investigaron acerca del razonamiento de estudiantes universitarios de carreras de ingeniería que cursaban las asignatura de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, a quienes les solicitaron resolver tareas relacionadas con matrices y determinantes, encontrando que entre las principales dificultades de los estudiantes están las relacionadas con el cálculo matricial (multiplicación de matrices); dificultades relacionadas con procesos de prueba y conocimientos de lógica clásica; y centrarse apenas en parte de la expresión dada, es decir, el alumno presta atención a determinados cálculos previos olvidando el verdadero sentido de la pregunta. Estos autores establecen categorías con el propósito de caracterizar los principales errores cometidos por los estudiantes:

- *Dificultades en las operaciones con matrices:* multiplicación incorrecta de matrices, dificultades para reconocer las condiciones en que es posible efectuar el producto, deducción incorrecta de la dimensión de la matriz producto.
- *Ejemplo que verifica la afirmación:* en esta categoría más que dificultades en el ámbito del Álgebra Lineal, están presentes dificultades en el ámbito de la lógica

clásica, ya que los alumnos aceptan que basta un ejemplo para confirmar la validez de una afirmación y no reconocen el tipo de razonamiento que utilizan cuando verifican un contraejemplo.

- *Análisis incompleto:* los estudiantes, con base en un ejemplo concreto o haciendo referencia a la dimensión de matrices, hacen un análisis solo de una parte de la expresión dada, generalmente lo que está entre paréntesis; en algunos casos, están próximos a la respuesta correcta pero de forma incompleta.
- *Recurrir a propiedades no válidas:* los alumnos recurren a propiedades que parecen ser una adaptación de varias propiedades válidas en otros contextos.
- *Incomprensión de conceptos:* no tienen ideas muy claras de conceptos envueltos en una afirmación dada, entre ellos, el concepto de la traspuesta de una matriz, de matriz cuadrada y de dimensión de una matriz.
- *Recurrir a argumentos irrelevantes:* los estudiantes hacen referencia a argumentos válidos, pero considerados irrelevantes para dar respuesta a las preguntas planteadas, o que no son aplicados debidamente a la situación. Por ejemplo: el más usado es el argumento relativo a la suma de matrices *"*Verdadero porque sólo se pueden sumar matrices que tengan las mismas dimensiones*"*.
- *Prueba de falsedad del recíproco*: los alumnos parten de un ejemplo (concretando las matrices) o de clases de ejemplos (indicando la dimensión de las matrices) que confirman la afirmación dada y concluyen que el antecedente es falso, es decir, que la expresión dada no está definida, por lo que, en general, llegan a la conclusión correcta de que la afirmación no es válida pero utilizando un razonamiento que no es válido.

Los determinantes también representan una dificultad para el estudiante, según indican Ozdag & Aygor (2012) en su investigación con estudiantes del primer año de Licenciatura en Matemáticas, la cual consistió en indagar sobre su desempeño en la factorización del determinante de una matriz, partiendo de la dimensión 3x3. Constataron que, a medida que aumentaba la dimensión de la matriz, el desempeño de los estudiantes bajaba considerablemente, concluyendo que la dimensión de una matriz afecta negativamente el desempeño de los estudiantes.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, los estudios indican que aun cuando los estudiantes hayan recibido un curso de Álgebra Lineal, les resulta difícil formular y resolver sistemas de ecuaciones lineales en relación con problemas de la vida real, así como intentar relacionar la solución de ecuaciones a su representación gráfica (Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007). Asociado a lo anterior, otra dificultad consiste en la comprensión de los enunciados de problemas de aplicación y el planteamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, el paso del registro verbal al algebraico (Segura, 2004).

Regolini (2011), determinó que las conexiones entre los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000) de estudiantes de Álgebra Lineal en el nivel universitario, al trabajar distintas actividades sobre sistemas de ecuaciones lineales, constituye una dificultad para ellos, ya que en la mayoría de las clasificaciones de los sistemas lineales la cantidad de estudiantes que realizaron conexiones entre los modos de pensamiento fueron menos de la mitad. Así por ejemplo, en las clasificaciones de los sistemas lineales en *homogéneo* o *no homogéneo*, y *cuadrado* o *rectangular*, es casi inexistente el modo de pensamiento *analítico-estructural*, mientras que el modo *analítico-aritmético* fue referido, principalmente, al reconocimiento de las ecuaciones lineales a partir de las rectas graficadas conforme a errores detectados, ya que algunos estudiantes indicaron que las ecuaciones pasan por el origen del sistema cartesiano*;* o emplean la palabra "sistema" pero sin especificar si se trata del sistema de ecuaciones lineales o el sistema de coordenadas cartesianas. La autora establece además, basándose en la clasificación de errores de Radatz (1980), que cuando se trata de sistemas de ecuaciones lineales, es difícil identificar unos errores de otros, sin embargo, los principales errores que percibió fueron:

- *Errores debidos a dificultades en el lenguaje*: aquellos relacionados a la notación como las expresiones simbólicas del conjunto vacío, de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos, del determinante de la matriz de coeficientes; y aquellos relacionados con el vocabulario detectados a través de expresiones como "las ecuaciones se cruzan en un punto", "las rectas se intersecan en un punto a lo largo de las mismas", "el sistema lineal es compatible ya que al menos en un punto se cruzan las ecuaciones".
- *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*, es decir, aquellos que aparecen en la representación espacial de una situación matemática, los cuales se presentaron en un ejercicio donde se les solicitaba a los estudiantes representar gráficamente, a mano alzada, un sistema de ecuaciones lineales que

cumpliera con ciertas características, y a partir del gráfico clasificar dicho sistema de ecuaciones.

- *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.*
- *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento*: que podrían estar indicando problemas conceptuales.

De acuerdo al análisis cognitivo que hemos realizado existen diversas dificultades relacionadas con el aprendizaje del Álgebra Lineal como el pasar de un lenguaje matemático a otro, el manejo de definiciones formales, el uso de la teoría axiomática, el aprendizaje de conceptos abstractos, entre otras.

Y en relación al contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, los errores y dificultades se presentan en las operaciones con matrices (por ejemplo, en el producto los estudiantes suelen no reconocer las condiciones en las que se puede efectuar la operación y no tienen en cuenta la no conmutatividad de la misma); en las transformaciones lineales, al ser entendidas a nivel de procedimiento y no en su definición; en los conceptos (por ejemplo, de matriz y determinante); en el uso de la notación; al recurrir a propiedades no válidas para el objeto matemático abordado; en la comprensión de los enunciados de los problemas y el planteamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, entre otras.

Resumen

En la Figura 11 resumimos la conformación de este capítulo en el que hemos presentado antecedentes, donde exponemos cómo entendemos el conocimiento (Pajares, 1992; Schoenfeld, 2010) y el conocimiento profesional (Climent, 2005, 2011) e incluimos una revisión sobre el conocimiento profesional del profesor partiendo de los trabajos de Shulman (1986, 1987) seguido de varios modelos desarrollados para el estudio del conocimiento del profesor (Fennema & Franke, 1992; Ball et al., 2008; Rowland et al., 2005), y del conocimiento del profesor de Álgebra (Artigue et al., 2001; McCrory et al., 2012).

Enseguida presentamos nuestro marco teórico donde figura el MTSK (Carrillo et al., 2013) con sus diferentes dominios, subdominios y categorías, constituyendo el modelo de conocimiento que empleamos en esta investigación para caracterizar y comprender el conocimiento de dos profesores de Álgebra Lineal. Así mismo, exponemos un apartado referido a los ejemplos para la enseñanza como parte del conocimiento del profesor de matemáticas.

Posteriormente exponemos cómo entendemos las creencias y concepciones (Ponte, 1994), y nuestro posicionamiento en este estudio sobre las mismas (Carrillo, 1998; Contreras, 1999; Climent, 2005), acompañado de una revisión acerca de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y algunos aspectos didácticos de los profesores (Carrillo, 1998; Contreras, 1999). Este apartado fue incluido como un marco adicional que creemos es de utilidad para comprender el conocimiento especializado del profesor.

Finalmente, mostramos el análisis didáctico (Rico, 1997; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009) sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. El análisis didáctico, pensado para la planificación de una unidad didáctica, se compone de 1) análisis de contenido, 2) análisis cognitivo, 3) análisis de instrucción, y 4) análisis de actuación (Gómez, 2007). Hemos desarrollado las dos primeras componentes (análisis de contenido y análisis cognitivo) del contenido en mención, ya que el análisis didáctico en esta investigación nos interesa para adquirir sensibilidad teórica que contribuya a identificar elementos de conocimiento en la práctica de los profesores.

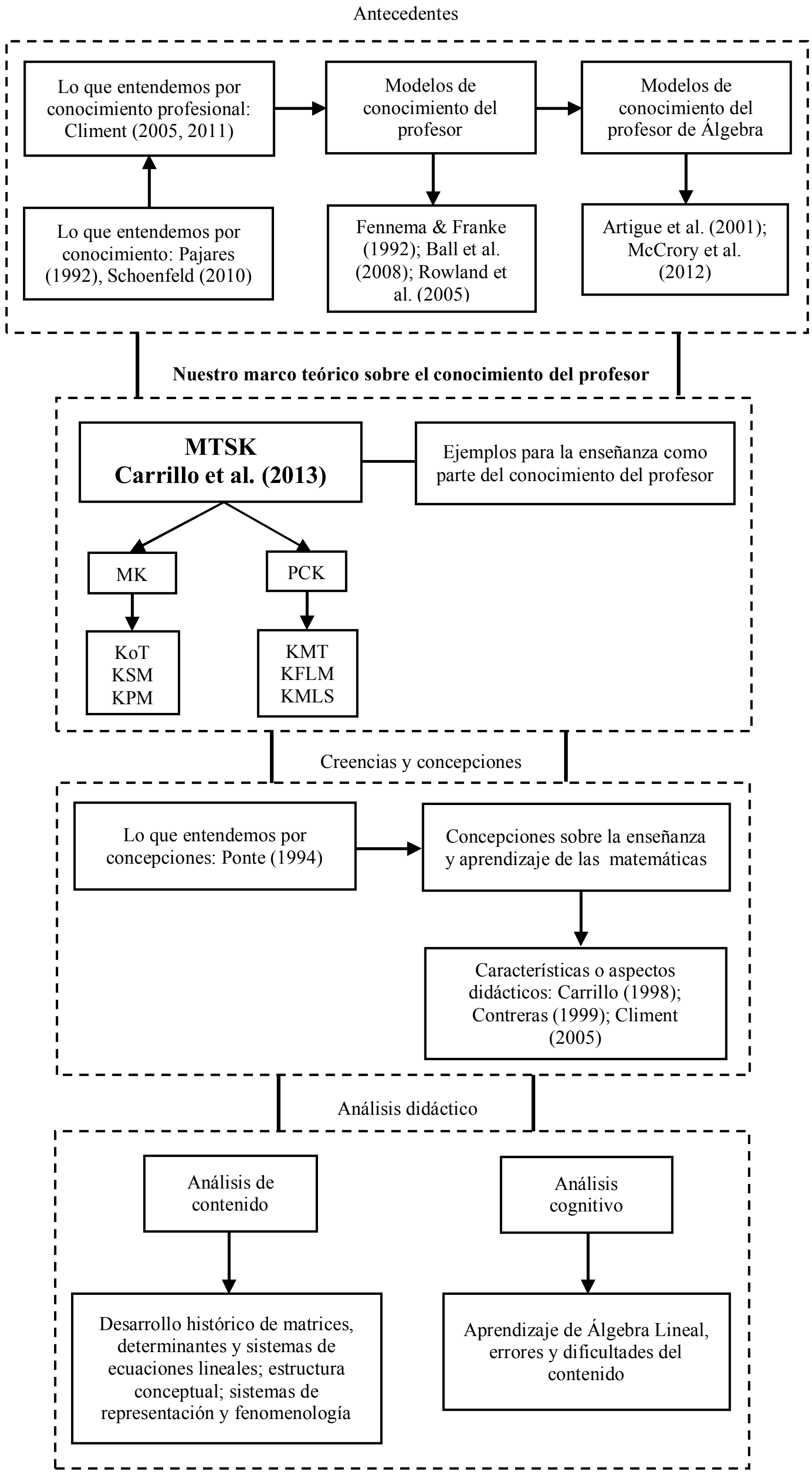


Figura 11. Constitución del capítulo de antecedentes y marco teórico de la investigación

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

3.2. Pregunta y objetivos de investigación

3.2.1. Objetivo general

3.2.2. Objetivos específicos

3.3. Caracterización de la investigación: paradigma y perspectivas ontológica, epistemológica y metodológica

3.4. Diseño de investigación

3.4.1. El estudio de caso

3.4.2. Selección de los casos y contexto

3.4.2.1. Caso de Jordy

3.4.2.2. Caso de Carlos

3.5. Proceso e instrumentos de recogida de información

3.5.1. Observaciones de aula

3.5.2. Entrevista semiestructurada

3.5.2.1. Preguntas de la entrevista semiestructurada 1

3.5.2.2. Preguntas de la entrevista semiestructurada 2

3.5.2.3. Preguntas de la entrevista semiestructurada 3

3.5.2.4. Preguntas de la entrevista semiestructurada 4

3.6. Proceso e instrumentos de análisis de información

3.6.1. Instrumento de análisis de conocimiento

3.6.2. Instrumento de análisis de concepciones

3.6.2.1. Metodología

3.6.2.2. Sentido de la asignatura

3.6.2.3. Concepción del aprendizaje

3.6.2.4. Papel del alumno

3.6.2.5. Papel del profesor

Resumen

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

La preocupación de matemáticos y educadores hacia cómo y qué matemática es, o debería ser enseñada y aprendida en la escuela, ha contribuido al desarrollo de la investigación del campo de la Educación Matemática a lo largo de los dos últimos siglos (Kilpatrick, 1992). Así, se han empleado métodos cuantitativos y cualitativos en los procesos de investigación.

En nuestro caso, considerando que el objetivo principal de la investigación es caracterizar y comprender el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal en el nivel universitario, empleamos la metodología cualitativa y nos posicionamos en el paradigma interpretativo. No se trata de una generalización del conocimiento especializado de los profesores de Álgebra Lineal, sino más bien intentamos profundizar en el conocimiento que ponen en juego dos profesores cuando enseñan el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y establecer posibles relaciones con sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De ahí que el diseño de investigación es el estudio de caso (Stake, 1999; Yin, 2003), siendo los instrumentos de recogida de información la observación de clases no participante y la entrevista semiestructurada; y los instrumentos de análisis, el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013) y las categorías e indicadores para el análisis de concepciones propuestas por Carrillo (1998) con algunas modificaciones incorporadas por Climent (2005).

Este capítulo se compone de seis apartados: el primero constituye una introducción; en el segundo presentamos la pregunta y objetivos de investigación; el tercero, es la caracterización de la investigación que incluye el paradigma en el que nos posicionamos y nuestra perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica; el cuarto, corresponde al diseño de investigación acompañado de información sobre los profesores participantes; el quinto, detalla el proceso e instrumentos de recogida de información como son observaciones de clases no participantes y entrevistas semiestructuradas; y en el sexto, presentamos el proceso de análisis de la información, con detalle de los dominios, subdominios, categorías y subcategorías del instrumento que hemos empleado para analizar el conocimiento de los profesores, así como, del instrumento de análisis de concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.2. Pregunta y objetivos de investigación

Coincidimos con Hernández, Fernández & Baptista (2006), quienes sostienen que plantear el problema de investigación no es sino afinar y estructurar más formalmente la idea de investigación. De las matemáticas impartidas a nivel universitario en el año básico de las carreras de ingeniería, uno de los principales cursos es el de Álgebra Lineal, que es importante por sus amplias aplicaciones. Al respecto, estamos de acuerdo en que *los contenidos básicos del Álgebra Lineal son el cimiento de una buena formación matemática para cualquier ingeniero* (Ortega, 2002, p. 74), siendo fundamental por tanto que el profesor posea un conocimiento sólido y fundamentado de la asignatura, sin dejar de lado otros conocimientos que le permitan organizar el aprendizaje de los estudiantes (nos interesarán los relativos a la matemática, objeto de estudio del MTSK).

La preocupación ante la falta de propuestas formativas y el poco éxito de los programas de capacitación para el profesor universitario de matemáticas en nuestro contexto, así como los escasos estudios sobre el conocimiento profesional del profesor universitario de matemáticas constituyen dos problemáticas de interés. De ahí que, partiendo de investigaciones previas acerca del conocimiento matemático para la enseñanza de Álgebra en bachillerato (Sosa, 2010), se considere como enfoque principal de esta investigación profundizar en el conocimiento del profesor de Álgebra Lineal en el nivel universitario. Y, a raíz del surgimiento del modelo analítico MTSK (Carrillo et al., 2013) se aborde como problema principal de investigación:

¿Cuál es el conocimiento especializado sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de dos profesores de Álgebra Lineal en el nivel universitario?

Y como subproblemas se planteen los siguientes:

¿Qué aspectos del conocimiento especializado sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales se evidencian en la práctica de los dos profesores y cómo estos aspectos se relacionan entre sí?

¿Cómo interaccionan el conocimiento especializado sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de estos profesores con sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

De forma implícita nos preguntamos además si resulta válido el modelo analítico MTSK en el estudio del conocimiento especializado del profesor universitario de matemáticas.

Los objetivos de investigación, por su parte, constituyen las guías del estudio y deben tenerse presentes durante todo el desarrollo del mismo. A continuación enunciamos los objetivos general y específicos de nuestra investigación:

3.2.1. Objetivo general

- ❖ Realizar una aproximación al conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal a través del análisis de su práctica.

3.2.2. Objetivos específicos

- ❖ Caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal enfocando el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.
- ❖ Identificar las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de dos profesores de Álgebra Lineal como un marco para comprender su conocimiento especializado.
- ❖ Establecer posibles relaciones entre el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.3. Caracterización de la investigación: paradigma y perspectivas ontológica, epistemológica y metodológica

El paradigma es definido en el ámbito de la investigación educativa como *un punto de vista o modo de ver, analizar e interpretar los procesos educativos que tienen los miembros de una comunidad científica y que se caracteriza por el hecho de que tanto* *científicos como prácticos comparten un conjunto de valores, postulados, fines, normas, lenguajes, creencias y formas de percibir y comprender los procesos educacionales* (De Miguel, 1988, p. 66). Un paradigma, por tanto, comprende supuestos teóricos, leyes y técnicas que adoptan los miembros de una determinada comunidad científica.

En la investigación educativa se distinguen fundamentalmente tres paradigmas: positivista[26] (también denominado empírico-analítico, que conlleva preferentemente a una metodología cuantitativa); interpretativo (también denominado naturalista, humanista o etnográfico, que conlleva preferentemente a una metodología cualitativa); y crítico[27] (basado en la tradición filosófica de la teoría crítica, cuya metodología es preferentemente cualitativa) (Latorre, Del Rincón & Arnal, 1996).

Toda investigación se rige por un conjunto de creencias y sentimientos sobre el mundo y sobre cómo debe ser entendido y estudiado (Denzin & Lincoln, 2003). Así, nuestra investigación se enmarca en el paradigma interpretativo, como aquel que pone el énfasis en la perspectiva de los participantes durante las interacciones educativas, en un intento de obtener comprensiones en profundidad de casos particulares y encontrar sentido a los fenómenos en términos de los significados que las personas les otorguen (Hernández et al., 2006). No tratamos de producir un conocimiento generalizable, explicar, predecir o controlar (propio del paradigma positivista) ni transformar la realidad (característica del paradigma crítico).

Cada paradigma incluye tres perspectivas: ontológica (interpretación particular de la realidad), epistemológica (naturaleza y formas del conocimiento, cómo se puede adquirir y comunicar a otras personas) y metodológica (modelos, reglas, técnicas y métodos de investigación) (Lincoln & Guba; 1985; Cohen & Manion, 2002; Muñoz-Catalán, 2009).

En lo referente a la perspectiva ontológica, abordamos una realidad social en su forma natural haciendo una interpretación particular de la misma con base en las percepciones y acciones de los dos profesores de Álgebra Lineal que participan en la investigación. De la interacción entre el investigador, el investigado y la construcción de significados, a su

---

[26] En el ámbito educativo, la aspiración básica del paradigma positivista es descubrir las leyes por las que se rigen los fenómenos educativos y elaborar teorías científicas que guíen la acción educativa (Latorre et al., 1996).

[27] Los pilares básicos sobre los que se asienta este paradigma parten del proyecto intelectual de recuperar elementos del pensamiento social, como valores, juicios e intereses, para integrarlos en una nueva concepción de ciencia social que mantenga un concepto riguroso del conocimiento objetivo en el estudio de la vida humana y social (Rubio, 1984).

vez surge o se construye conocimiento, es decir, nos referimos a la perspectiva epistemológica. Con base en aspectos epistemológicos, Ritchie & Lewis (2005) consideran importante organizar cuestiones en investigación social como son la relación entre el investigador y el investigado, las teorías de verdad y el modo en que se adquiere el conocimiento.

La relación entre el investigador y el investigado, en nuestro caso, se desarrolla en un ambiente de respeto, fundamentalmente observando su práctica durante el desarrollo de uno de los contenidos contemplado en el programa de estudios; y también a partir de la interacción que tiene lugar en el transcurso de las entrevistas semiestructuradas que se realizaron. En esta parte, relacionada con la recogida de información, y aunque se intentó interferir lo menos posible durante la observación de las clases de ambos profesores, es inevitable que se vaya construyendo la investigación conjuntamente (entre el investigador y el investigado) y se establezca una influencia mutua, ya que por lo general los profesores al saber que serán observados podrían modificar su práctica, y durante las entrevistas el investigador inconscientemente puede llegar a hacer explícitas sus creencias y emociones.

Al referirnos a las teorías de verdad, situamos nuestra investigación en la teoría consensual de la verdad o teoría intersubjetiva de verdad, que a su vez, se enmarca en una concepción de la racionalidad configurada por la teoría de las pretensiones de validez de la comunicación lingüística (inteligibilidad o condición de la comunicación misma; verdad y rectitud, que son pretensiones resolubles en el discurso; y veracidad, que es sólo resoluble en la acción) (Habermas, 1973). Según esta teoría, todo conocimiento o toda verdad consiste en una acción comunicativa en la se comparten algunos criterios, y se llega o no a un acuerdo acerca de algún hecho, es decir, la verdad gira en torno a una noción de consenso. En el caso de nuestro estudio, dicho consenso se ha establecido entre el investigador y los investigados a través de una entrevista que nos ayudó a corroborar la veracidad de nuestros resultados, ya que las preguntas se orientaron con base en situaciones y ejemplos observados en sus clases. Además, los resultados de la investigación se han discutido en distintos foros y con distintos investigadores, por lo que podemos hablar también de consenso entre investigadores.

En cuanto al modo en que se adquiere el conocimiento, existen dos estrategias: deductiva e inductiva. La primera, asociada a la investigación cuantitativa, mediante la cual las hipótesis se alcanzan teóricamente a través de un proceso derivado lógicamente, y la segunda, asociada a la investigación cualitativa, que comprende un proceso de construcción de proposiciones (Muñoz-Catalán, 2009). En esta investigación, el modo en que se adquiere el conocimiento sigue un proceso deductivo-inductivo, ya que contamos con un marco teórico referencial como es el MTSK (Carrillo et al., 2013) mediante el cual analizamos la información recogida en las clases de Álgebra Lineal de dos profesores, lo que nos llevó a la caracterización del conocimiento especializado de dos profesores sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo a los subdominios, categorías y subcategorías que constituyen el modelo teórico referido.

En este estudio la metodología empleada es cualitativa[28], cuya característica es evaluar el desarrollo natural de los sucesos. Sandín (2003) manifiesta que *la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento.* (p. 276). Definida la metodología pasamos a referirnos al diseño de investigación.

3.4. Diseño de investigación

El término diseño se refiere al plan o estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere en una investigación. El diseño de investigación constituye la manera práctica y concreta de responder a las preguntas de investigación, además de

[28] Eisner (1998) indica que la metodología cualitativa supone la realización de estudios con los siguientes rasgos comunes:

- Reivindican la vida cotidiana y el contexto natural de los acontecimientos como escenario básico para comprenderlos, interfiriendo lo menos posible con ellos.
- Los investigadores participan de la investigación y son el principal instrumento de medida: filtran la realidad de acuerdo con su propio criterio y le dan sentido, la interpretan. Para evitar los resultados subjetivos, la mayoría utiliza la "triangulación" como estrategia fundamental para la recogida y análisis de la información: se obtienen datos sobre la realidad desde distintas perspectivas – la propia y la de los participantes en ella – y a través de diferentes fuentes de información (personas, instrumentos, documentos o la combinación de todos ellos).
- Tienen una naturaleza interpretativa por un doble motivo: A) Lo fundamental de estos métodos es atribuir significado a la situación estudiada y descubrir el significado que los acontecimientos tienen para quienes los experimentan. B) La recogida de información está estrechamente unida al mismo proceso de análisis, pues el investigador no se limita a describir qué pasa sino que indaga por qué pasa y analiza críticamente aquello que está captando.
- Es importante el uso del lenguaje. Se incorporan los aspectos expresivos y connotativos al lenguaje proposicional.
- La atención a lo concreto: interesa la profundización del objeto de estudio; tomar un caso para su comprensión en profundidad, o un grupo, lo cual determina una selección que obedece a unos criterios propios, intencionales, para captar justamente la singularidad de los acontecimientos.

cubrir los objetivos fijados. Para el contexto particular de nuestro estudio hemos elegido el método denominado estudio de caso.

3.4.1. El estudio de caso

El método a emplearse en esta investigación cualitativa es el estudio de caso, que constituye una estrategia de diseño de la investigación que permite seleccionar el objeto/sujeto del estudio y el escenario real que se constituye en fuente de información (Rodríguez, Gil & García, 1996). Stake (1995) lo define como el *estudio de la particularidad y la complejidad de un caso, por el que se llega a comprender su actividad en circunstancias que son importantes* (p. 11).

Un caso es la descripción detallada y exhaustiva de una situación real, que ha sido investigada y adoptada para ser presentada de modo tal que posibilite un amplio análisis e intercambio de ideas (Ballester, 2001). Un estudio de caso permite realizar una investigación empírica sobre un fenómeno contemporáneo dentro de un contexto de la vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes (Yin, 2003).

La particularidad más característica de este método es el estudio intensivo y profundo de un(os) caso(s) o una situación con cierta intensidad, entendido éste como un sistema acotado por los límites que precisa el objeto de estudio, pero enmarcado en el contexto global donde se produce.

Stake (1999, 2003) identifica tres tipos de estudio de caso: 1) *intrínseco,* que es aquel donde el investigador busca una mayor comprensión de un caso en particular. No se lleva a cabo debido a que el caso representa a otros casos o porque ilustra un rasgo o problema en particular, sino porque la particularidad del caso resulta de interés; por tanto, su propósito no es entender algún constructo abstracto o fenómeno genérico ni la construcción de teoría; 2) *instrumental,* que es aquel donde un caso particular se examina para proporcionar información sobre una cuestión que desempeña un papel de apoyo. Aquí el caso se mira en profundidad, pero su elección se hace para ayudar al investigador en la comprensión de otro tema, fenómeno o interés; y 3) *colectivo*, considerado como un estudio instrumental extendido a varios casos. Los casos individuales que conforman este tipo de estudio pueden ser similares o diferentes y son elegidos porque se cree que la comprensión de ellos dará lugar, a su vez, a una mejor comprensión de una colección de casos aún mayor.

A partir de esta clasificación, nuestra investigación se enmarca en un estudio de casos *instrumental*, por cuanto procuramos una mayor comprensión del conocimiento especializado sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, a través de la observación de la práctica y entrevistas de dos profesores (casos) que enseñan dicho contenido.

3.4.2. Selección de los casos y contexto

En este estudio participaron dos profesores titulares de una Universidad del Ecuador, que de aquí en adelante llamaremos "Jordy" y "Carlos", quienes imparten clases de Álgebra Lineal en el primer año de la carrera de Ingeniería en Sistemas.

El módulo de Álgebra Lineal tiene una duración de 16 semanas y cada curso está conformado por un promedio de 20 estudiantes, quienes reciben dos sesiones de clases por semana. El programa de estudios de la asignatura tiene como punto de partida el contenido de matrices (tipos, operaciones), determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; posteriormente se imparten temáticas como vectores en R^2, R^3 y R^N; espacios vectoriales y transformaciones lineales. Para la investigación, se eligió observar el desarrollo de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales porque constituye la base de las temáticas que se abordan en Álgebra Lineal.

En cuanto a la selección de los casos, Simons (2011) indica que cuando se realiza un estudio de caso instrumental, se puede escoger cualquiera de una serie de casos para investigar el tema que se esté estudiando. Los dos profesores fueron elegidos por su disposición y motivación para colaborar en la investigación, y debido a que forman parte de la población de profesores donde la autora de esta investigación se desempeña como docente. Además, porque se pretende intervenir a posteriori con una propuesta de implementación de actividades didácticas elaboradas con la participación del grupo de profesores de matemáticas de la carrera, para lo cual creemos necesario indagar en primera instancia sobre el conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido (dominios del conocimiento matemático especializado) de los profesores y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.4.2.1. Caso de Jordy

Jordy tiene una formación como Licenciado en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemáticas. Inició su carrera profesional como profesor de matemáticas de secundaria en el año 1993, la misma que desempeña hasta la actualidad en un colegio particular. Desde el año 2006 empezó a desempeñarse como profesor de asignaturas relacionadas con matemáticas en los cursos propedéuticos de una universidad del Ecuador, donde desde el año 2009 hasta la actualidad imparte la asignatura de Álgebra Lineal en el año básico de carreras de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería, siendo la carrera de Ingeniería en Sistemas donde ha impartido sus clases por más tiempo y a las que nos permitió acceder para llevar a cabo este estudio. Por tanto, cuenta con 22 años de experiencia en la enseñanza de matemáticas en el nivel de secundaria y 9 años en el universitario.

3.4.2.2. Caso de Carlos

Carlos tiene formación como Geólogo. Inició su carrera profesional como profesor de cartografía en la carrera de Geología en el año 1988, y en el año 1998 se inició como profesor de asignaturas relacionadas con matemáticas en la Facultad de Ciencias Pecuarias de una universidad del Ecuador. Desde el año 2008 hasta la actualidad imparte clases de Álgebra Lineal en la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la misma universidad, específicamente en las carreras de Ingeniería Agroindustrial, Ingeniería Eléctrica e Ingeniería en Sistemas, siendo las clases correspondientes a esta última a las que nos permitió acceder para cumplir con los fines de esta investigación. Cuenta por tanto, con 27 años de experiencia como docente universitario, de los cuales 17 han estado dedicados a la enseñanza de matemáticas.

3.5. Proceso e instrumentos de recogida de la información

Lo que se busca en un estudio de tipo cualitativo es obtener datos (que se convertirán en información) de personas, seres vivos, comunidades, contextos o situaciones en profundidad; en las propias formas de expresión de cada uno de ellos. En nuestro caso, al tratarse de seres humanos, los datos que interesan, como indica Hernández et al. (2006), son conceptos, percepciones, imágenes mentales, creencias, emociones, interacciones, pensamientos, experiencias, procesos y vivencias manifestadas en el lenguaje de los participantes; y se recolectan con la finalidad de analizarlos y comprenderlos, para así responder a la pregunta de investigación y objetivos, y generar conocimiento. Estos datos pueden obtenerse con diferentes instrumentos y técnicas, nosotros empleamos observaciones de aula y entrevistas.

3.5.1. Observaciones de aula

Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso (Stake, 1999). De allí, que se realizaron grabaciones en vídeo (observaciones de aula no participante) de las clases de Jordy y Carlos, durante el desarrollo del primer contenido contemplado en el programa de estudios de la asignatura Álgebra Lineal, que como ya hemos mencionado se refiere a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Las clases fueron observadas en dos períodos: noviembre de 2011 – enero de 2012 (año 1) y noviembre de 2012 – enero de 2013 (año 2). La observación de las clases durante dos períodos lectivos obedece a la posibilidad de extraer la mayor información posible para profundizar en el conocimiento especializado de los profesores. Se analizan los dos períodos por separado y se es sensible a posibles cambios.

En el caso de Jordy se realizaron vídeo grabaciones de un total de trece sesiones de clases (Tabla 3), siete en el primer año de observaciones y seis en el segundo año, cuya transcripción consta en los ANEXOS 2 y 4.

Tabla 3. Fecha de observación, tema y tiempo de duración de las sesiones de clases de Jordy observadas durante dos períodos lectivos.

Año de observ.	Nº sesión de clases	Fecha de observación	Tema	Tiempo de duración
1	S1	30-11-2011	Definición de matriz, clasificación de matrices, suma de matrices y producto por un escalar	1h38m25s
1	S2	03-12-2011	Producto de matrices y álgebra de matrices	56m15s
1	S3	07-12-2011	Matriz inversa 2x2, matriz escalonada y matriz canónica	1h31m36s
1	S4	14-12-2011	Matriz canónica y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a la forma canónica	1h11m41s
1	S5	21-12-2011	Matriz inversa 3x3, cálculo del determinante 2x2, 3x3 y resolución de	1h19m39s

			sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer	
1	S6	28-12-2011	Matriz de cofactores, matriz adjunta y matriz inversa	48m44s
1	S7	04-01-2012	Cálculo del determinante empleando cofactores, operaciones elementales entre filas y propiedades	1h23m11s
2	S1	09-11-2012	Clasificación de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante operaciones elementales entre filas	1h31m23s
2	S2	23-11-2012	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 y 4 incógnitas mediante operaciones elementales entre filas	1h45m9s
2	S3	03-12-2012	Cálculo del determinante 3x3 y 4x4 por el método del menor y cofactores	49m12s
2	S4	04-01-2013	Propiedades de los determinantes y cálculo del determinante por el método del menor y cofactores	1h40m6s
2	S5	07-01-2013	Cálculo del determinante por la regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer.	1h51m5s
2	S6	14-01-2013	Calculo de la matriz inversa 2x2 y 3x3	1h29m56s

En el caso de Carlos se filmaron un total de siete sesiones de clases (Tabla 4), cuatro en el primer año de observaciones y tres en el segundo año, cuya transcripción consta en los ANEXOS 13 y 15. Cabe indicar que en el caso de este profesor, por las funciones administrativas que desempeñaba, además de las académicas, el desarrollo de las clases fue irregular, razón por la cual hay un menor número de sesiones de clases en comparación a Jordy.

Tabla 4. Fecha de observación, tema y tiempo de duración de las sesiones de clases de Carlos observadas durante dos períodos lectivos.

Año de observ.	Nº sesión de clases	Fecha de observación	Tema	Tiempo de duración
1	S1	11-11-2011	Clasificación y suma de matrices	1h30m43s
1	S2	18-11-2011	Producto de un escalar por una matriz, producto de matrices y producto de matrices por bloques	3h26m39s
1	S3	29-11-2011	Cálculo del determinante 3x3 por regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer	2h6m20s
1	S4	13-12-2011	Matriz inversa 2x2 y 3x3	2h1m15s
2	S1	07-11-2012	Definición de matriz, filas, columnas e igualdad de matrices	1h10m35s
2	S2	12-12-2012	Matriz escalonada y matriz identidad (operaciones elementales entre filas).	3h20m15s

			Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss (matriz escalonada)	
2	S3	26-12-2012	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 mediante matriz inversa	1h47m17s

Como ya hemos dicho, las clases a las que hemos accedido y que se nos permitió grabar en el caso de ambos profesores, fueron las correspondientes a la asignatura de Álgebra Lineal en la carrera de Ingeniería en Sistemas, la misma que se imparte en dos horarios en la universidad. Durante el primer año de observaciones, la participación de los estudiantes en las clases fue escasa, y cabe mencionar que ambos profesores, preocupados porque haya una mayor participación de los estudiantes en sus clases, decidieron en el segundo año de observaciones, conformar grupos de trabajo de estudiantes, de manera que sean ellos quienes expongan parte del contenido matemático a sus compañeros.

La importancia de realizar grabaciones en vídeo se refleja en que los fenómenos observados mediante este sistema tienen carácter longitudinal (se desarrollan en el tiempo en una sucesión a veces conteniendo una serie no interrumpida de información), y pueden transformarse en fenómenos transversales que son separables en unidades de diferente tamaño (Rodríguez et al., 1996).

3.5.2. Entrevista semiestructurada

Una de las más importantes fuentes de información del estudio de casos es la entrevista (Yin, 2003). La entrevista constituye un modo directo de recogida de datos en el que se da una relación personal entre quien los recoge y quien los ofrece (Colás & Buendía, 1998). Se emplea con el propósito de conseguir la mayor cantidad de información relevante y válida. Esta es la tarea principal encomendada al entrevistador, para lo cual deberá establecer y mantener una relación interpersonal lo más adecuada posible (Ballester, 2001).

En esta investigación se empleó la entrevista semiestructurada, la cual se basa en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados; es decir, no todas las preguntas están predeterminadas. Es una modalidad que permite ir entrelazando temas e ir construyendo un conocimiento holístico y comprensivo de la realidad. A la vez, obliga al investigador a estar muy atento a las respuestas para poder establecer dichas conexiones (Massot, Dorio & Sabariego, 2004). El entrevistador tiene la libertad para alterar el orden y la forma de preguntar, así como el número de preguntas. Se dispone de un guion base que puede modificarse por interés de la entrevista, aunque manteniéndose el objetivo para el cual fue preparado y los diversos puntos sobre los que debe obtenerse información.

A la entrevista se le atribuyen funciones como: a) ser un instrumento de exploración que ayuda a identificar variables y relaciones, a sugerir hipótesis y guiar otras fases de la investigación; b) ser un instrumento de recogida de información de las variables de la investigación; y c) función de complementación de otros métodos, sobre todo para la validación (Kerlinger, 1982, citado por Colás & Buendía, 1998). En nuestro estudio se realizaron un total de cuatro entrevistas semiestructuradas, conformadas por preguntas abiertas, a través de las cuales se pretendía recabar información adicional a la obtenida mediante las observaciones de aula, que nos permitiera profundizar en la caracterización y comprensión del conocimiento de dos profesores de Álgebra Lineal en el nivel universitario, y a su vez, validar algunas de las interpretaciones hechas por el investigador en el análisis de conocimiento.

A continuación presentamos las preguntas de las cuatro entrevistas semiestructuradas realizadas durante el desarrollo de esta investigación con una justificación de la inclusión de dichas preguntas. Las respuestas de los profesores, correspondientes a cada una de las entrevistas constan en los ANEXOS 1, 3, 5 y 6 para el caso de Jordy; y ANEXOS 12, 14, 16 y 17 para el caso de Carlos.

3.5.2.1. Preguntas de la entrevista semiestructurada 1

La primera entrevista, considerada como introductoria se realizó a cada profesor previo a iniciar las observaciones de aula. Con ella pretendíamos obtener información general sobre los profesores como años de experiencia en la enseñanza de matemáticas, años impartiendo Álgebra Lineal, formación profesional, cursos de formación y expectativas. Además, preguntamos sobre los principales objetivos de la asignatura, contenido del programa de estudios, conocimientos previos que se espera que tengan los estudiantes, formas de abordar el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, formas de evaluación, principales tareas, principales dificultades de los estudiantes con el contenido, recursos empleados incluyendo libros de texto, y las principales aplicaciones del contenido matemático. En la Tabla 5 detallamos el guion de la entrevista con su respectiva justificación.

Tabla 5. Guion de la entrevista semiestructurada 1 con su respectiva justificación.

Preguntas entrevista semiestructurada 1	**Justificación**
¿Hace cuántos años imparte asignaturas relacionadas con Matemáticas?	Obtener información sobre la experiencia, formación y expectativas del profesor.
¿Hace cuántos años imparte Álgebra Lineal en el nivel universitario?	
¿Cuánto tiempo tiene trabajando como docente en la universidad?	
¿Cuál es su titulación de pregrado?	
¿Ha recibido cursos para impartir la asignatura de Álgebra Lineal? ¿Cuántos y qué duración han tenido?	
¿Ha participado en cursos relacionados con Didáctica y Pedagogía?	
¿Qué expectativas tiene usted en lo referente al desempeño de sus estudiantes?	
¿Especifica objetivos de aprendizaje de los temas incluidos en el programa de estudios que espera que alcancen sus estudiantes? A su respuesta, si es afirmativa: ¿Cómo?, ¿Cuándo?, ¿Los hace explícitos para usted? ¿Para los estudiantes? ¿Fija objetivos por temas más concretos que los que fije el programa de la materia?	Determinar las concepciones del profesor respecto a los objetivos de la asignatura.
Escogiendo por ejemplo el tema "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices" elaborar un mapa conceptual de los contenidos del mismo destacando aquellos que para usted son claves en el aprendizaje.	Obtener información del conocimiento del profesor en cuanto a temas del curso; ejemplos y actividades para la enseñanza; procedimientos, registros y propiedades; y relaciones entre contenidos, ya sea dentro del mismo curso o con anteriores y/o posteriores.
¿Cómo aborda usted la enseñanza de esos contenidos clave?	
¿Cómo cree usted que dichos contenidos clave se relacionan con otros contenidos y cómo se trabajan esas relaciones en sus clases?	
Cuando introduce usted un tema nuevo como por ejemplo "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices", ¿Considera indispensable hacer una relación con conceptos matemáticos vistos anteriormente? ¿Por qué?	
¿Cómo decide qué temas incluir en el curso de Álgebra Lineal y cuánto tiempo dedicar a cada tema?	Determinar las concepciones del profesor en relación al diseño del programa de estudios.
¿Qué conocimiento previo deben poseer los estudiantes para abordar con éxito el tema de matrices?	Obtener información del conocimiento del profesor en cuanto al contenido matemático en cuestión y conocimientos previos.
¿Cuál es la importancia del tema (de matrices) en el currículo?	
¿Qué espera que aprendan sus estudiantes con relación al contenido (matrices)?	
¿Cómo evalúa a los alumnos en el tema?	
¿Cuáles son las tareas de esta unidad?	

¿Qué partes del contenido a priori va a evaluar y por qué elige dichos contenidos?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre actividades, tareas y evaluaciones del contenido.
¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del tema? Elija una dificultad y conteste ¿qué cosas concretas le funcionan para paliar la misma? ¿Analiza usted los errores cometidos por los estudiantes en el desarrollo del tema de matrices? ¿Cómo? ¿Qué acciones ha tomado para tratar de disminuir la incidencia de estos errores?	Obtener información del conocimiento del profesor relativo a errores y dificultades de los estudiantes con el contenido matemático.
¿Qué hace para que todos participen en el desarrollo (explicaciones y resolución de problemas) de un tema determinado del contenido de matrices?	Obtener información del conocimiento del profesor acerca de las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático.
¿Qué libro de texto utiliza en particular para enseñar este contenido (matrices)? ¿Por qué?	Determinar las concepciones del profesor en relación a los recursos de enseñanza.
¿Cómo motivaría a los estudiantes para que aprendan el contenido de matrices? Explique con un ejemplo concreto	Obtener información del conocimiento del profesor sobre ejemplos para abordar el contenido matemático.
¿Qué recursos utiliza generalmente en las clases para el desarrollo del tema de matrices? ¿Emplea algún software específico?	Determinar las concepciones del profesor en relación a la praxis.
¿Qué utilidad/aplicación tiene para usted el tema de matrices? ¿Lo hace explícito a los estudiantes? ¿Cómo?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre aplicaciones del contenido matemático.

3.5.2.2. Preguntas de la entrevista semiestructurada 2

La segunda entrevista se llevó a cabo al culminar las observaciones de aula correspondientes al año uno con la finalidad de obtener información adicional a la registrada en las observaciones que nos permitiera sustentar el análisis, tanto de conocimiento del profesor como de sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas de las preguntas de esta entrevista fueron realizadas específicamente a uno de los profesores, de manera que sus respuestas nos ayudaran a validar nuestra interpretación del conocimiento del profesor extraído de las observaciones de clases del primer año. En la Tabla 6 presentamos las preguntas efectuadas en la entrevista semiestructurada 2 y su justificación.

Tabla 6. Guion de la entrevista semiestructurada 2 con su respectiva justificación.

Preguntas entrevista semiestructurada 2	**Justificación**
¿Qué métodos emplea usted para saber que han aprendido (matrices)?	Obtener información del conocimiento del profesor acerca de actividades y tareas, y determinar sus concepciones sobre el proceso de aprendizaje.

¿Qué dificultades experimentó durante el desarrollo de la clase?	Obtener información del conocimiento del profesor respecto a errores y dificultades de los estudiantes con el contenido matemático.
¿Cómo evalúa o verifica que se hayan alcanzado los objetivos de aprendizaje planteados?	Determinar las concepciones del profesor sobre los objetivos de la asignatura, y el aprendizaje.
¿Considera que se alcanzaron los objetivos propuestos para la clase?	
¿Cree que se han trabajado bien los aspectos principales del contenido de matrices? ¿Qué aspectos y por qué? ¿Cree que en general los alumnos lo han comprendido?	
¿Han tenido todos los estudiantes la oportunidad de participar con preguntas y respuestas sobre el tema de la clase?	Determinar las concepciones del profesor sobre la importancia de la argumentación y papel del alumno en sus clases.
¿Cree indispensable que los estudiantes conozcan la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos? ¿Por qué?	Obtener información del conocimiento del profesor en relación a los fundamentos de los procedimientos y sobre la práctica matemática
¿Qué criterios considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para abordar un tema de matrices? Por ejemplo, en el caso del producto de matrices	Obtener información del conocimiento del profesor en relación a ejemplos para la enseñanza y fenomenología y aplicaciones del contenido matemático.
¿Qué criterios considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para reforzar o generalizar cierta idea sobre matrices? Por ejemplo en el caso del producto de matrices (pregunta para Carlos)	
¿En base a qué criterios escoge usted los ejercicios sobre matrices que les dejará de tarea para que practiquen?	
¿Cómo sabe que un estudiante aprendió o captó la clase?	Obtener información del conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje de los estudiantes y determinar las concepciones del profesor sobre el papel del alumno en sus clases.
¿Qué recursos materiales utilizó en el desarrollo de este contenido? (pregunta para Carlos)	Determinar el conocimiento del profesor acerca de recursos materiales y virtuales para la enseñanza.
¿Qué mejoraría en el desarrollo de sus clases para contribuir al aprendizaje de los estudiantes? (pregunta para Jordy)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre recursos para la enseñanza y sus concepciones sobre la metodología y concepción de aprendizaje.
¿Ha mejorado el desempeño de sus estudiantes con la aplicación de talleres (ejercicios previamente elaborados por el profesor y desarrollados por los estudiantes después que ha explicado la clase) en sus clases como estrategia didáctica? ¿Por qué? (pregunta para Jordy)	
¿Son satisfactorios los resultados de las evaluaciones de sus estudiantes sobre el contenido de matrices? ¿Por qué? (pregunta para Carlos)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre actividades, tareas y ejemplos para la enseñanza.
Considerando los resultados de las evaluaciones de sus estudiantes el tema de matrices, ¿qué actividades implementaría usted en sus clases para contribuir al aprendizaje de los estudiantes? (pregunta para Carlos)	

3.5.2.3. Preguntas de la entrevista semiestructurada 3

La entrevista 3 se realizó posterior a las observaciones de aula correspondientes al segundo año. Una vez que efectuamos el informe de análisis preliminar del conocimiento de los profesores extraído de los dos años de observaciones de su práctica elaboramos el guion de esta entrevista, con la finalidad de validar nuestra interpretación del conocimiento de los profesores, de allí que existan algunas preguntas específicas para cada uno de ellos. Además, pretendíamos que los indicios de conocimiento de los profesores, extraídos del análisis de su práctica en los dos años de observaciones se transformaran en evidencias de conocimiento; y se esperaba que varias de las preguntas incluidas aporten información acerca de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la Tabla 7 exponemos las preguntas realizadas en la entrevista semiestructurada 3 y su justificación.

Tabla 7. Guion de la entrevista semiestructurada 3 con su respectiva justificación.

Preguntas entrevista semiestructurada 3	**Justificación**
Según su criterio, ¿Cómo se aprende en esta asignatura (Álgebra Lineal)?	Determinar las concepciones del profesor sobre el aprendizaje de la asignatura y del contenido de matrices.
¿Cómo cree que se aprende matrices?	
¿Cómo planifica usted su clase?	Determinar las concepciones del profesor sobre el diseño didáctico.
¿De dónde extrae usted las actividades (ejemplos, ejercicios, tareas) que usted emplea en sus clases?	Determinar las concepciones del profesor en relación a los recursos de enseñanza.
¿Qué potencialidad ve en los ejercicios con matrices que incluye en los talleres para los estudiantes? ¿En base a qué los elige? (pregunta para Jordy)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre la variabilidad de ejemplos para la enseñanza.
¿De qué serviría al alumno que existan ejercicios en los que no sea posible realizar alguno de los productos de matrices por ejemplo? (pregunta para Jordy)	
¿Cómo elige los ejemplos que usted emplea en el desarrollo de su clase? Por ejemplo, en este episodio, ¿En base a qué eligió (o se inventó) estos tres ejemplos de matrices escalonadas?(pregunta para Jordy)	
De acuerdo a las dificultades de aprendizaje detectadas en los estudiantes, ¿Crea usted contextos específicos de aprendizaje? Cite un ejemplo	
Para explicar el producto de matrices por un escalar, el producto de dos matrices o el cálculo de sistemas de ecuaciones lineales con matrices usted emplea ejemplos prácticos, es decir que representen alguna situación y no sólo elementos de la matriz que hay que multiplicar ¿Por qué emplea este tipo de ejemplos? ¿Qué potencialidad tienen para explicar ese contenido? (pregunta para Carlos)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre ejemplos prácticos para la enseñanza y su potencialidad.
¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer los estudiantes al realizar el producto de matrices?, ¿Por qué cree que es importante definir las dimensiones de las matrices?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre errores y dificultades de los estudiantes con el contenido matemático.

Tomando como base este episodio (matrices escalonadas), usted en sus clases ¿puede detectar las dificultades de un estudiante en particular? ¿Cómo? (pregunta para Jordy)	
Tomando como base un episodio, usted en sus clases ¿Puede detectar las dificultades de un estudiante en particular? ¿Cómo? (pregunta para Carlos)	
Cuando los estudiantes van a calcular el determinante empleando la regla de Sarrus, ¿Cree que es una dificultad para ellos identificar la diagonal principal y secundaria? ¿Se presenta esta dificultad en sus clases? ¿A qué cree que se deba?(pregunta para Jordy)	
¿Cree usted que los estudiantes tienen dificultades para realizar operaciones elementales entre filas al resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan por ejemplo? ¿A qué se debe? ¿Qué hace usted frente a esas dificultades?	
¿Cómo fundamentaría usted el algoritmo del producto de dos matrices, es decir, se ha planteado usted el por qué se hace y/o utiliza así dicho algoritmo? ¿Y en el caso de la multiplicación por bloques?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre los fundamentos de los algoritmos.
Generalmente el producto de matrices no es conmutativo. ¿Conoce usted casos donde el producto de matrices sí es conmutativo? Cite ejemplos	Obtener información del conocimiento del profesor sobre las propiedades del producto de matrices y sus fundamentos.
En sus explicaciones, ¿qué énfasis le da usted al lenguaje matemático? ¿Por qué cree que es importante? ¿Cómo se lo hace saber al estudiante? Cite un ejemplo (pregunta para Jordy)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre la práctica matemática.
¿Por qué cree que es importante la notación en matemáticas? ¿Qué papel le da usted a la notación en sus clases?	
Para usted son muy importantes los ejemplos cuando explica una clase. Por tanto, ¿Cómo definiría usted una demostración matemática? Cite un ejemplo	
¿Cree usted que los estudiantes tienen un aprendizaje significativo si son ellos mismos quienes preparan un contenido matemático (producto de matrices, cálculo de determinante, resolución de sistemas de ecuaciones)? Explique por qué	Determinar las concepciones del profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas.
¿Cree usted que es importante que un estudiante participe activamente mientras usted explica un contenido? ¿Por qué? ¿Realiza usted preguntas constantemente para que el estudiante se involucre en su explicación? Cite un ejemplo	
¿Les explica usted la diferencia entre el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo hace? (pregunta para Carlos)	Obtener información del conocimiento del profesor sobre los procedimientos.
El tema de matrices es parte del currículo establecido para alumnos de este nivel, ¿considera usted en ocasiones la improvisación con los temas, de acuerdo a las necesidades de los alumnos o sigue el temario sin alteraciones?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

3.5.2.4. Preguntas de la entrevista semiestructurada 4

La entrevista 4 estuvo orientada fundamentalmente a aportar información para complementar el análisis de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la Tabla 8 constan las preguntas realizadas en la entrevista semiestructurada 4 y su respectiva justificación.

Tabla 8. Guion de la entrevista semiestructurada 4 con su respectiva justificación.

Preguntas entrevista semiestructurada 4	Justificación
¿Cómo enfoca la enseñanza del contenido de matrices?	Determinar las concepciones del profesor sobre la metodología de enseñanza.
En base a la reflexión sobre su práctica docente, y en este caso referente a la enseñanza del contenido de matrices, ¿qué considera usted que se podría mejorar?	
¿Aplica variadas estrategias de enseñanza y actividades congruentes con la complejidad del contenido y en este caso, de las matrices? Explique con un ejemplo concreto	
¿Cómo definiría usted una oportunidad de aprendizaje?	Determinar las concepciones del profesor sobre el aprendizaje y el papel del alumno.
¿Cuáles son las dificultades más recurrentes en el aprendizaje del contenido de matrices?	Obtener información del conocimiento del profesor sobre errores y dificultades de los estudiantes con el contenido matemático.
Al momento de explicar una clase, ¿considera usted a los estudiantes como un todo a quienes les explica el procedimiento para resolver un ejercicio? ¿Cree que es necesario conocer de antemano las características de cada estudiante y utilizar estrategias que permitan que su explicación sea clara para todos? ¿Por qué?	Determinar las concepciones del profesor sobre la importancia de la argumentación.
Usted da clases en una carrera X y los programas de estudio (sílabos) ya suelen estar establecidos, ¿cree usted que en ocasiones es necesario modificar los temas para que haya una secuencia entre temas anteriores y posteriores? ¿Lo considera usted para sus clases? ¿Eso afecta poder cubrir el programa ya establecido?	Determinar las concepciones del profesor sobre el programa de estudios y su conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas.
¿Relaciona usted los contenidos de su asignatura con los contenidos de las demás asignaturas del módulo de manera que pueda incluir explicaciones, ejercicios, problemas o un tema (s) que sean de utilidad para alguna de las asignaturas del módulo? Si lo ha hecho, explicar ¿cómo?	Determinar las concepciones del profesor sobre la finalidad de la asignatura.
¿Le parece importante el tomar apuntes en las clases? (pregunta para Carlos)	Determinar las concepciones del profesor sobre el papel del alumno.

3.6. Proceso e instrumentos de análisis de la información

La recolección y análisis de los datos en investigaciones de tipo cualitativo ocurren prácticamente en paralelo; el análisis no es estándar, ya que cada estudio requiere de un esquema propio de análisis (Hernández et al., 2006). El investigador, a lo largo del proceso de investigación va seleccionando lo significativo del contexto, de acuerdo con la elaboración conceptual y teórica que realiza al mismo tiempo. A medida que va obteniendo los datos genera hipótesis, realiza múltiples análisis, reinterpreta y formula nuevas hipótesis sobre determinadas relaciones entre los conceptos generales y los fenómenos observados (Sabariego, Massot & Dorio, 2004).

El primer paso del análisis en este trabajo fue la transcripción de la información. El análisis de los datos se realizó atendiendo a un análisis de contenido (Bardin, 1996) buscando evidencias en las acciones y declaraciones (extrayendo unidades de información[29]) de los profesores, que aludieran al conocimiento que sustenta su práctica, así como a sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje.

Con las observaciones de aula realizadas en los dos años (períodos 2011-2012 y 2012-2013), así como con las dos primeras entrevistas realizadas a Jordy y Carlos, se procedió a efectuar un análisis preliminar del conocimiento matemático de los dos profesores bajo el modelo MKT (Ball et al., 2008); no obstante, coincidiendo con Flores, Escudero & Carrillo (2013), encontramos dificultades en la delimitación de los subdominios que se evidenciaban en este primer análisis, especialmente entre el conocimiento común del contenido (CCK) y conocimiento especializado del contenido (SCK).

A la vez, en el Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva nos encontrábamos desarrollando el modelo MTSK (plasmado por primera vez en Carrillo et al., 2013), por lo que optamos por analizar la información bajo el mismo. Este cambio de modelo de análisis creemos que nos ha permitido alcanzar los objetivos de la investigación.

Procedimos, por tanto, a realizar nuevamente un análisis preliminar de la información (todas las observaciones de aula, así como, la primera y segunda entrevista) ahora bajo el modelo MTSK. Es así que construimos tablas con las unidades de información extraídas que aludieran a los diferentes subdominios tanto del conocimiento matemático como del conocimiento didáctico del contenido que conforman el MTSK. A partir de dichas tablas elaboramos un primer informe del conocimiento especializado de Jordy y Carlos sobre

[29] La denominación de unidad de información la adaptamos de la investigación de Carrillo (1998) y, en esta investigación es una parte de la transcripción de las sesiones de clases y/o respuestas de los profesores obtenidas en las entrevistas que tiene significado en sí mismo y, que puede estar asociada a uno o varios indicadores de las categorías del instrumento de análisis, ya sea el de conocimiento o el de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

matrices, determinantes, y sistemas de ecuaciones lineales. Con la finalidad de refinar el análisis sobre el conocimiento especializado (aclarar dudas que surgieron en el análisis preliminar) y elaborar un informe definitivo para la consecución de nuestros objetivos de investigación, se realizaron posteriormente la tercera y cuarta entrevista a los profesores. Esta última entrevista fue realizada fundamentalmente para obtener información complementaria que aportara al análisis de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una vez que analizamos las entrevistas tres y cuatro procedimos a elaborar un informe definitivo de la caracterización del conocimiento de los profesores que dividimos en dos núcleos: 1) Matrices; y 2) Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Esta asociación en núcleos de conocimiento hace referencia a cómo el investigador interpreta la forma en que los profesores trabajan este contenido en sus clases. Al parecer, por un lado están las matrices, que tienen entidad en sí mismas por toda la parte operatoria, y por otro lado, están los determinantes que se abordan para su uso en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para el análisis de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los dos profesores que participan en esta investigación fueron extraídas unidades de información principalmente de su práctica, las cuales nos permitieron realizar un informe preliminar. Para elaborar el informe definitivo de análisis de las concepciones empleamos algunas de las respuestas de los profesores obtenidas en las entrevistas uno, dos, tres y cuatro.

3.6.1. Instrumento de análisis de conocimiento

Para analizar el conocimiento especializado de Jordy y Carlos empleamos los subdominios y categorías del modelo analítico MTSK (Carrillo et al., 2013) desarrollado en el Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. Las categorías y subcategorías que componen los subdominios del modelo MTSK se encuentran en evolución y son discutidas en nuestro grupo de investigación (SIDM), a la luz del análisis de los datos de varias investigaciones (algunas ya culminadas y otras en curso).

En el Capítulo 2 de esta investigación hemos expuesto las categorías y subcategorías comprendidas en cada uno de los subdominios del MTSK, las cuales mostramos también a continuación en la Tabla 9, ya que han sido las que hemos empleado en nuestro análisis.

Tabla 9. Categorías y subcategorías correspondientes a cada uno de los subdominios del MTSK consideradas en el análisis del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal.

Dominio	**Subdominio**	**Categoría y subcategoría**	
MK	KoT	Definiciones	
		Fenomenología y aplicaciones	
		Registros de representación	
		Propiedades y sus fundamentos	
		Procedimientos	¿Cómo se hace?
			¿Cuándo se puede hacer?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
	KSM	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones de contenidos transversales	
		Conexiones auxiliares	
	KPM	Formas de proceder	
PCK	KMT	Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza	
		Recursos materiales y virtuales	
		Ejemplos para la enseñanza	
	KFLM	Formas de aprendizaje	
		Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	
		Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	
		Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas	
	KMLS	Contenidos matemáticos que se requieren enseñar	
		Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado	
		Secuenciación de diversos temas	

3.6.2. Instrumento de análisis de concepciones

Carrillo (1998) definió categorías y subcategorías (Tabla 10) con sus correspondientes indicadores para el análisis de las tendencias didácticas de los docentes (lo que podríamos entender como modelos didácticos de los mismos). Se incluyen indicadores incorporados al instrumento por Climent (2005), y para los fines de esta investigación, no se han considerado los indicadores del instrumento de análisis referentes a la evaluación, debido principalmente a que hemos analizado las concepciones en la acción, es decir, aquellas derivadas de la observación de la práctica de los dos profesores.

A continuación se detalla la descripción de cada uno de los indicadores[30] que conforman el instrumento de segundo orden (Carrillo, 1998). Posee indicadores relacionados con la metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno, papel del profesor y en cada uno de ellos, descripciones para las tendencias tradicional (TR), tecnológica (TE), espontaneísta (E) e investigativa (I).

Cabe indicar que somos conscientes de que las tendencias didácticas son un artificio de la investigación; no existen realmente profesores encasillados en una tendencia, tienen rasgos de distintas tendencias. No interesa, además, poner etiquetas (por las tendencias) a las concepciones de los profesores. No obstante, creemos que el instrumento de análisis es útil para comprender mejor el pensamiento de los profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática (y en este caso de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales).

3.6.2.1. Metodología

Praxis (1)

TR1

La actividad del aula se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo.

[30] Se destaca en cursivas aquellos aspectos provenientes de la descripción original del instrumento de Carrillo (1998), y en negritas y cursivas los incluidos en el mismo instrumento por Climent (2005). Las palabras o frases en negritas, cursivas y subrayadas han sido pequeñas adaptaciones incorporadas por la autora de esta investigación de acuerdo al contexto de este estudio. Dichas modificaciones en el instrumento de segundo orden original las hemos considerado importantes para el estudio de las concepciones de profesores universitarios.

TE1

Aquí los ejercicios pretenden reproducir los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos.

E1

Los ejercicios son sustituidos por una actividad experimental no reflexiva. Hay cierta tendencia a poner en práctica métodos, recursos, etc., que parecen funcionar en otras aulas.

I1

Los alumnos se enfrentan habitualmente a situaciones para las que no poseen ***procesos de resolución establecidos.***

Praxis (2)

TR2

El profesor expone los contenidos en su fase final, apoyado en estrategias expositivas.

TE2

El profesor no expone los contenidos en su fase final, simula su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas.

E2

El profesor propone actividades de manipulación de modelos, a través de los cuales se producirá, eventualmente, un conocimiento no organizado.

I2

El profesor tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación

Objetivos (3)

TR3

Los contenidos se identifican con los conceptos, enunciados como objetivos de carácter terminal.

TE3

Al carácter terminal de los objetivos se añade su funcionalidad.

E3

Los objetivos solo definen un marco genérico de actuación (carácter orientativo) y están sujetos a eventuales modificaciones en cuanto al grado de consecución (flexibles).

I3

Los objetivos marcan claramente las intenciones educativas, pero están sujetos a reformulaciones debidamente fundamentadas.

Programación (4)

TR4

El profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades ***(temas).***

TE4

Para el profesor, la programación es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina.

E4

La programación es un documento vivo, que por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial.

I4

El profesor dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el docente se mueve dependiendo de los intereses, nivel, de los alumnos.

3.6.2.2. Sentido de la asignatura

Orientación (5)

TR5

La asignatura está orientada, exclusivamente hacia la adquisición de conceptos y reglas.

TE5

Interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad.

E5

No interesan tanto los conceptos, sino los procedimientos y el fomento de las actitudes positivas hacia el trabajo escolar.

I5

Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general, siendo éstos los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.

Contenido (6)

TR6

El contenido matemático ***(Álgebra Lineal)*** *a movilizar en el aula no se diferencia en estructura, aunque sí en nivel de abstracción, del conocimiento matemático formal.*

TE6

*El **Álgebra Lineal** trata de dar una explicación, con los cánones de la matemática formal, a las situaciones provenientes de la problemática real.*

E6

*El **Álgebra Lineal** inmersa en la problemática real es el único referente de los conocimientos a movilizar en el aula.*

I6

*El **Álgebra Lineal** tiene su punto de partida en la etnomatemática de los alumnos y recoge las necesidades socio-políticas, culturales. "Hacer matemáticas" con un carácter más formal proviene del análisis de lo concreto.*

Finalidad (7)

TR7

La asignatura tiene una finalidad exclusivamente informativa, es decir, poner en conocimiento de los alumnos un cierto "panorama matemático" que se espera que aprendan ***y dotarles de las destrezas básicas para la vida profesional.***

TE7

La asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación ***en la propia matemática, para el estudio de otras disciplinas o en la vida cotidiana.***

E7

La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y la vida), así como para la adquisición de los valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.

I7

La finalidad última de la asignatura es dotar al alumno de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.

3.6.2.3. Concepción del aprendizaje

Aprendizaje (8)

TR8

Se presupone que el aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como principal recurso, por superposición de unidades de información.

TE8

El aprendizaje se sigue concibiendo como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina.

E8

Se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno.

I8

Los objetos de aprendizaje no solo tienen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual.

Tipo y forma (procesos) (9)

TR9

El único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo.

TE9

Aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.

E9

El aprendizaje se produce a partir de la participación activa del estudiante en procesos inductivos.

I9

El aprendizaje comienza, normalmente, por la observación de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a esta ha de seguir una comprobación razonable y, en la medida de lo posible, una generalización adecuada.

Tipo y forma (procesos) (10)

TR10

El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el docente se los presente.

TE10

Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior.

E10

El aprendizaje se produce de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.

I10

El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor.

Importancia de la argumentación (10')[31]

TR10'

El profesor desea que el alumno explicite lo aprendido con la expresión usada por él. No le interesa la idea sino la mecánica. De ahí que no conceda especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones.

TE10'

Es importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje.

E10'

Es importante que el alumno comunique (más que argumente de un modo más o menos justificado) sus conclusiones.

I10'

La expresión de lo que aprende por parte del alumno es una parte importante del propio proceso de aprendizaje. Es importante, además, que el alumno argumente sus conclusiones.

Interacción maestro-estudiante-materia (10'')

TR/TE10''

El alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que la inversa.

---

[31] Los indicadores 10', 10'' fueron incorporados por Climent (2005) al instrumento de análisis de Carrillo (1998).

E10''

El alumno interactúa con la asignatura, el profesor y sus compañeros, pero el énfasis se coloca en la interacción con los compañeros y el profesor.

I10''

Los principales elementos del entorno de aprendizaje interactúan entre sí (el alumno interactúa con la asignatura, el profesor y sus compañeros) de manera equilibrada.

Tipo de agrupamiento (11)

TR11/TE11

La única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual.

E11

La forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates.

I11

La forma de agrupamiento aconsejable para la producción de aprendizaje depende de la actividad a desarrollar.

Dinamizador (12)

TR12

La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.

TE12

El dinamizador ideal del aprendizaje es la lógica de construcción de la propia matemática.

E12

El motor del aprendizaje son los intereses de los alumnos.

I12

*El dinamizador ideal del aprendizaje es el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los del **Álgebra Lineal.***

Aptitud (13)

TR13/TE13

La capacitación del alumno es inalterable y justifica en gran medida los resultados del aprendizaje.

E13/I13

La capacitación del alumno puede ser modificada.

Actitud (14)

TR14

La actitud del alumno hacia el aprendizaje es raramente transformable.

TE14

En la actitud del alumno hacia el aprendizaje hay aspectos que pueden sufrir cambios.

E14/I14

La actitud del alumno puede ser modificada.

3.6.2.4. Papel del alumno

Participación en diseño didáctico (15)

TR15/TE15

El alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.

E15

El alumno participa indirectamente en el diseño didáctico ***(a través de sus intervenciones en el quehacer del aula).***

I15

El alumno participa directa o indirectamente el diseño didáctico.

Clave de transferencia E-A (16)

TR16

En los casos en que exista una "buena enseñanza", la responsabilidad de los resultados del aprendizaje (que dependen del grado de sumisión) es exclusiva del alumno.

TE16

Cuando los procesos de enseñanza se realizan en un contexto adecuado, la responsabilidad del aprendizaje recae en el alumno.

E16

La motivación proveniente de la propia acción es la clave de los buenos resultados del aprendizaje.

I16

Para que se de aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje.

¿Qué hace? (17)

TR17

Hay una sobrevaloración implícita de los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que proviene del profesor.

TE17

El alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo.

E17

El alumno pasa de actividad en actividad, participando intensamente en cada una de ellas.

I17

La actividad del alumno está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes.

¿Qué hace? (18)

TR18/TE18

Al ser el profesor el que proporciona la clave para la repetición/reproducción posterior, es fundamental la atención a éste (fuente de información fundamental).

E18

La actividad del alumno no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción.

I18

El estudiante toma conciencia de qué hace y para qué lo hace.

¿Qué hace? (19)

TR19

El alumno no se plantea procesar la información que proviene del docente, ni en forma ni en fondo.

TE19

La confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido.

E19

El ambiente dinámico que se propicia en la clase, permite que el alumno comunique sus experiencias y sentimientos con el profesor y los demás compañeros.

I19

El alumno mantiene una actitud crítica ante las informaciones que se movilizan en el aula.

3.6.2.5. Papel del profesor

¿Qué hace?, ¿Cómo hace?, Justificación (20-23)

TR20-23

El profesor transmite verbalmente los contenidos de aprendizaje, mediante el dictado de sus apuntes o alusión a un libro de texto, realizando, por su caracterización como especialista en contenidos, una reproducción literal de los citados documentos.

TE20-23

El profesor actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas.

E20-23

Por su marcado carácter humanista y especialista en dinámica de grupos, induce al alumno a participar en las actividades que promueve, analizando las reacciones y respuestas a sus propuestas.

I20-23

El profesor provoca la curiosidad del alumno conduciendo su investigación hacia la consecución de aprendizajes. Su carácter de experimentador interactivo del contenido y de los métodos le obliga a analizar los procesos en el contexto de aula (investigación-acción).

Coordinador (24)

TR24

El profesor cifra la utilidad de coordinación con otros profesores, a lo sumo, a nivel de negociación sobre los contenidos mínimos de su área.

TE24

La coordinación con otros profesores se refiere a la selección de contenidos (con un criterio de utilidad) o a su organización.

E24

El foco de la coordinación es la metodología, buscando uniformidad en la caracterización de las actividades.

I24

El profesor considera necesaria una coordinación sobre todos los aspectos que caracterizan el diseño didáctico.

Validación de la información (24') [32]

TR24'

El profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta.

TE24'

El profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a los alumnos cuyas respuestas llevan a la "autocorrección".

E24'

La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo (grupo clase o pequeños grupos de trabajo). En ocasiones se sustituye el papel de la corrección que en TR/TE juega el profesor por los compañeros, pero no se potencia que los alumnos

[32] El indicador 24' fue incorporado por Climent (2005) al instrumento de análisis de Carrillo (1998).

reflexionen sobre sus ideas ni que desarrollen estrategias de autovalidación de las mismas.

I24’

La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, por el profesor o por el propio alumno. En cualquier caso, se potencia la reflexión de los alumnos y el desarrollo de estrategias para su autocorrección, propiciándose que los estudiantes asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas.

Tabla 10. Resumen de indicadores para análisis de tendencias didácticas[33]

CATEGORÍAS/ TENDENCIAS		TRADICIONAL (TR)	TECNOLÓGICA (TE)	ESPONTANEÍSTA (E)	INVESTIGATIVA (I)
Metodología					
Praxis	1	*Ejercitación repetitiva*	*Ejercitación reproductiva*	*Experimentación (énfasis en el método)*	*Resolución de problemas*
	2	*Exposición magistral*	*Simulación puntual de investigación* ***(estrategias expositivas y/o equipo informático)***	*Descubrimiento aleatorio, manipulación de modelos*	*Investigación planificada*
Objetivos	3	*Conceptuales de carácter terminal*	***Procedimentales***	*Flexibles y orientativos*	*Flexibles y revisables*
Programación	4	*Oficial, prescriptiva, rígida (unidades aisladas)*	*Secuencial, estructurada y cerrada*	*Aleatoria, contenidos negociados*	*Redes conceptuales organizadas*
Sentido de la asignatura					
Orientación	5	*Énfasis conceptual*	*Aplicabilidad (proceso-producto)*	*Énfasis procedimental y actitudinal*	*Procedimientos, conceptos y actitudes*
Contenido	6	***Álgebra Lineal****(formal)*	Adaptación del ***Álgebra Lineal*** formal a la problemática real	Matemática que emana de la problemática ***del entorno***	*Síntesis del* ***Álgebra Lineal*** *formal cotidiana* ***(importancia de la resolución de problemas como contenido)***
Finalidad	7	*Informativa,* ***utilitaria e instrumental(conceptual)***	*Informativa, utilitaria* ***e instrumental (razonamiento)***	*Formativa (actitudes y valores racionales)*	*Formativa (aprender a aprender)*

[33] Se destacan en negritas y cursivas aquellos indicadores incluidos por Climent (2005) en el instrumento original de análisis de concepciones de Carrillo (1998). Las palabras o frases en negritas, cursivas y subrayadas han sido pequeñas adaptaciones incorporadas por la autora de la presente investigación de acuerdo al contexto del estudio. Dichas modificaciones en el instrumento de segundo orden original las hemos considerado importantes para el estudio de las concepciones en la acción de profesores universitarios.

Continuación…

CATEGORÍAS/ TENDENCIAS		TRADICIONAL (TR)	TECNOLÓGICA (TE)	ESPONTANEÍSTA (E)	INVESTIGATIVA (I)
Concepción del aprendizaje					
Aprendizaje	8	*Memorístico acumulativo*	*Memorístico secuencial*	*Significativo aleatorio*	*Significativo relevante (redes semánticas)*
Tipo y forma (procesos)	9	*Deductivos*	*Inductivos simulados y deductivos*	*Deductivos e/o inductivos*	*Inducción-Deducción*
	10	*Por apropiación*	*Por asimilación*	*Por construcción espontánea*	*Por construcción dirigida*
Importancia argumentación	***10'***	***No se enfatiza***	***Importancia explicitación de comprensión del contenido***	***Importancia comunicación ideas***	***Importancia argumentación conclusiones (medio y fin)***
Interacción profesor-estudiantes-matemáticas	***10''***	***Maestro*** ***Mat ⇨ Alumno***	***Maestro*** ***Mat ⇨ Alumno***	***(mat.)*** ***Maestro ⇔ Alumnos***	***Matemática ⇔ Alumnos*** ***Maestro***
Tipo de agrupamiento	11	*Trabajo individual*	*Trabajo individual*	*Trabajo en grupo y debates*	*Diversidad de agrupamientos y puestas en común*
Dinamizador	12	*Lógica de la asignatura*	*Lógica de la disciplina*	*Intereses del grupo de estudiantes*	*Intereses de los estudiantes y la disciplina*
Aptitud	13	*Predeterminada*	*Predeterminada*	*Transformable*	*Transformable*
Actitud	14	*Predeterminada*	*Parcialmente transformable*	*Transformable*	*Transformable*
Papel del alumno					
Participación en diseño didáctico	15	*No participa*	*No participa*	*Indirectamente a través de sus reacciones*	*Participa directa o indirectamente*
Clave de transferencia E-A	16	*Único responsable (sumisión)*	*Responsable principal (motivación por el contexto)*	*Motivación por la acción*	*El proceso (motivación por los significados)*
¿Qué hace?	17	*Escucha y copia*	*Reproduce e imita*	*Actúa*	*Investiga*
	18	*Atiende*	*Atiende*	***Practica***	*Reflexiona*
	19	*Acepta*	*Cree*	*Dialoga*	*Cuestiona*

Continuación…

CATEGORÍAS/ TENDENCIAS		TRADICIONAL (TR)	TECNOLÓGICA (TE)	ESPONTANEÍSTA (E)	INVESTIGATIVA (I)
Papel del profesor					
¿Qué hace?	20	*Transmite verbalmente*	*Transmite por procesos tecnológicos*	*Induce*	*Provoca*
¿Cómo hace? (20)	21	*Dicta (explica)*	*Expone*	*Promueve*	*Conduce*
¿Qué hace?	22	*Reproduce*	*Organiza*	*Analiza reacciones y respuestas a sus propuestas*	*Investiga en y sobre la acción*
Justificación (22)	23	*Especialista en contenido*	*Técnico del contenido y del diseño didáctico*	*Humanista, especialista en dinámica de grupo*	*Experimentador interactivo del contenido y los métodos*
Coordinador	24	*En su caso, sobre contenidos mínimos*	*En su caso, sobre selección (utilidad) y/u organización de contenidos*	*Caracterización de las actividades*	*A nivel de caracterización del diseño didáctico*
Validación de la información	***24’***	***Valida el profesor aportando información explícitamente***	***Valida el profesor aportando información implícitamente***	***Valida el grupo-clase, el alumno, sin que se potente toma de conciencia***	***Se potencia el desarrollo de elementos de autoevaluación***

Fuente: Carrillo (1998), Climent (2005)

Resumen

En la Figura 12 presentamos de forma gráfica el proceso metodológico seguido en esta investigación. La misma se inició reflexionando acerca de posibles opciones para realizar el estudio. Luego concretamos la pregunta de investigación y delimitamos los objetivos. Enseguida focalizamos nuestro interés en la elección del diseño de investigación y la selección de los informantes.

Ya en el campo de investigación procedimos a realizar una primera entrevista para luego pasar a las observaciones de clases no participantes del primer año, las cuales cerramos con la realización de una segunda entrevista. En nuestro afán por encontrar más evidencias de conocimiento realizamos observaciones de clases no participantes durante un segundo año, seguido de una tercera entrevista. Efectuamos una cuarta entrevista para indagar acerca de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se realizó la transcripción de la información recogida y el análisis de los datos para caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal cuando enfocan el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, acompañado del establecimiento de posibles relaciones del conocimiento evidenciado con sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para escribir finalmente la memoria de investigación.

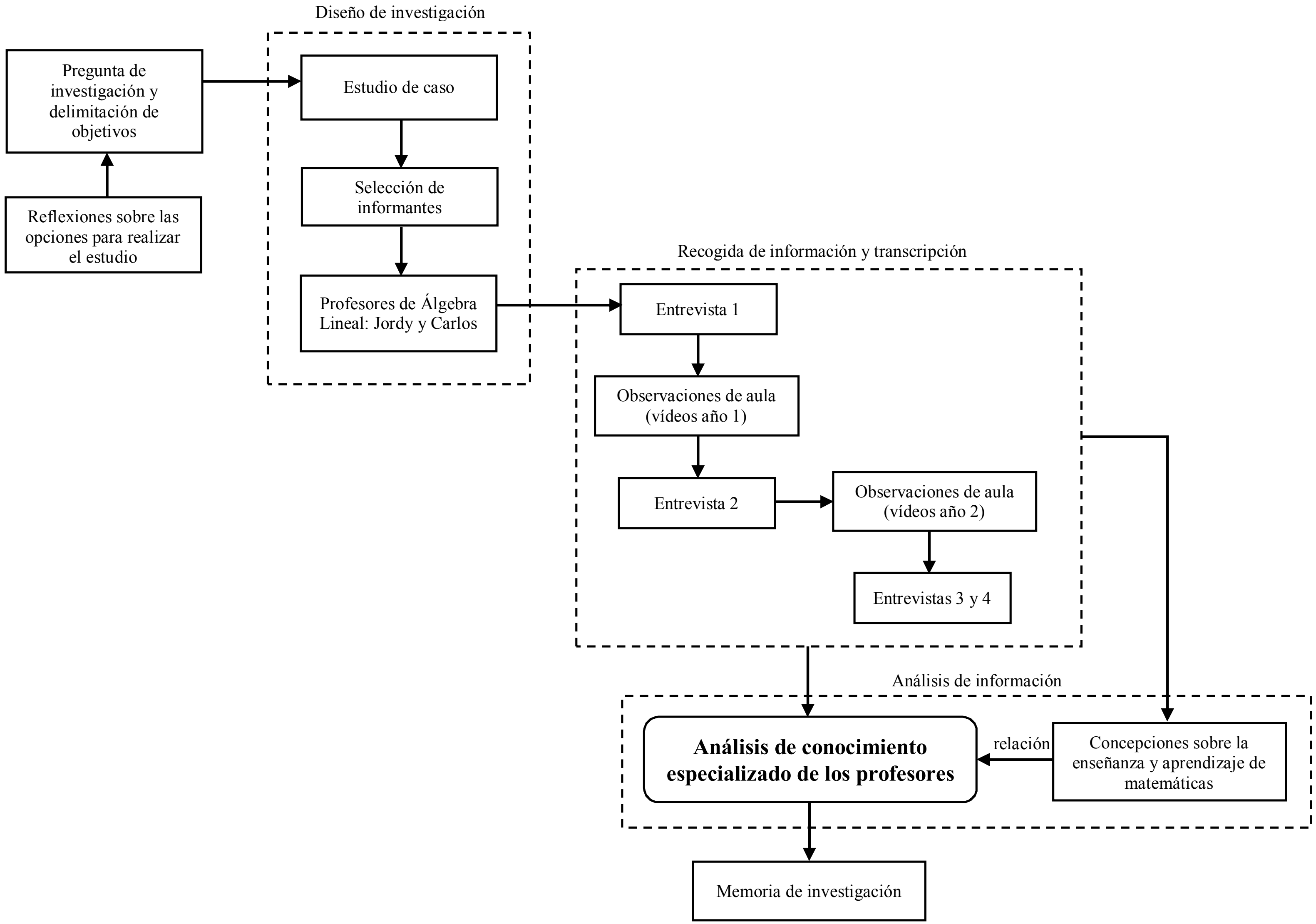


Figura 12. Proceso metodológico seguido en la investigación

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

4.2. Análisis de conocimiento de Jordy

4.2.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Jordy

4.2.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)

4.2.1.2. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

4.2.1.3. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

4.2.1.4. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

4.2.2. Conocimiento especializado de Jordy

4.2.2.1. Conocimiento sobre matrices

4.2.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

4.2.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Jordy sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

4.3. Análisis de conocimiento de Carlos

4.3.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Carlos

4.3.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)

4.3.1.2. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

4.3.1.3. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

4.3.2. Conocimiento especializado de Carlos

4.3.2.1. Conocimiento sobre matrices

4.3.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

4.3.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Carlos sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

4.4. Análisis de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

4.4.1. Metodología

4.4.2. Sentido de la asignatura
4.4.3. Concepción del aprendizaje
4.4.4. Papel del alumno
4.4.5. Papel del profesor
4.4.6. Resumen de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

4.5. Análisis de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
4.5.1. Metodología
4.5.2. Sentido de la asignatura
4.5.3. Concepción del aprendizaje
4.5.4. Papel del alumno
4.5.5. Papel del profesor
4.5.6. Resumen de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje las matemáticas

4.6. Conocimiento especializado y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
4.6.1. Relaciones entre el conocimiento especializado de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
4.6.2. Relaciones entre el conocimiento especializado de Carlos y sus con concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Resumen

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

Una vez que transcribimos las sesiones de clase de cada profesor participante de nuestra investigación, se extrajeron las unidades de información que nos sirvieron para realizar por una parte, el análisis de conocimiento de los profesores sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales con el modelo analítico MTSK, y por otra, el análisis de sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tanto en el caso del conocimiento del profesor como de sus concepciones, el análisis de las sesiones de clase ha sido complementado con unidades de información de entrevistas semiestructuradas realizadas a los profesores.

El conocimiento de los dos profesores se extrae fundamentalmente de su práctica, observada durante dos períodos lectivos consecutivos, como una forma de enriquecer las evidencias de dicho conocimiento. Las concepciones se han derivado de su acción, (inferido de su práctica) y de sus expresiones en entrevistas. Nos interesa analizar las concepciones de los dos profesores desde el punto de vista de las relaciones que podamos establecer con su conocimiento especializado. El objetivo prioritario de nuestra investigación ha sido estudiar el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal de carreras universitarias, y hemos incorporado las concepciones pensando que conocer dichas concepciones nos permitiría comprender mejor su conocimiento, y que podrían establecerse relaciones entre ambos.

En este apartado presentamos esquemas que muestran los subdominios y categorías del modelo MTSK que hemos encontrado en el análisis de conocimiento de cada profesor (Figuras 13 y 16). Así mismo, mostramos otros dos esquemas (Figuras 14 y 17) que reflejan de forma general el MTSK de cada profesor, tanto para matrices como determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, siendo a partir de estos esquemas que explicamos el conocimiento que ponen en juego los profesores al abordar este contenido. Además, el análisis nos condujo a la construcción de macro esquemas que reflejan de forma detallada el conocimiento de cada profesor al impartir el contenido mencionado (Figuras 15 y 18). En todas estas figuras los subdominios y categorías del MTSK se representan con una forma y un color indicando el conocimiento del profesor; y algunas de estas formas poseen líneas entrecortadas, lo que significa indicios de conocimiento (Moriel-Junior & Carrillo, 2014).

De manera general nos vamos a referir al conocimiento de cada uno de los profesores, de acuerdo a los subdominios del MTSK, para luego ser más específicos incluyendo unidades de información y explicando las evidencias del conocimiento especializado de cada profesor. Para esto elaboramos las Figuras 14 y 17, donde como investigadores diferenciamos dos partes que hemos denominado "núcleos", de acuerdo a lo que los profesores explicitan en el desarrollo de las sesiones de clase. El Núcleo 1 referente a las matrices que tienen entidad en sí mismas, y pueden ser tratadas como objetos matemáticos en sí por toda la parte operatoria (operaciones con matrices), y el Núcleo 2, donde se reflejan los determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

La asociación que el investigador hace de estos núcleos es externa, es decir, aunque en las Figuras 14 y 17 sí se refleja el conocimiento de los profesores producto del análisis con el MTSK, a la vez la forma que se le ha dado a la figura (con los núcleos) es cómo el investigador interpreta lo que el profesor trabaja en sus clases, basándose en las observaciones de las mismas. Pensamos que los profesores al abordar el contenido a través del cual hemos determinado su conocimiento especializado hablan por un lado de las matrices, y por otro, de los determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Al parecer, los determinantes se abordan con la finalidad de emplearlos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, por esta razón, los hemos incluido en el núcleo dos. Las figuras nos han servido como una guía para ir describiendo el conocimiento especializado de los profesores.

Para el análisis de las concepciones empleamos las categorías del instrumento de Carrillo (1998) (para el análisis de concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática de profesores de Secundaria): metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno y papel del profesor. No hemos considerado la categoría evaluación, por cuanto no atañe directamente a las sesiones observadas, debido a que los profesores realizan evaluaciones exclusivamente al finalizar cada tema contemplado en el programa de estudios, y lo que nos interesa en la investigación es el conocimiento que pone en juego en las sesiones de clases y que podamos relacionar con las concepciones extraídas de las mismas.

Analizamos concepciones inferidas fundamentalmente de la acción a partir de la práctica de dos profesores observada durante dos años consecutivos y, en caso de que las hubiere, mencionamos las diferencias en las concepciones de un mismo profesor entre un año y otro de observación, en las diferentes categorías e indicadores, de acuerdo al instrumento de análisis empleado. No nos interesa encasillar a los profesores en una determinada tendencia didáctica del instrumento de análisis (ya sea tradicional TR, tecnológica TE, espontaneísta E, e investigativa I), sino que más bien, dichas tendencias nos ayudan a comprender las concepciones de los profesores, ya que éstos presentan características de varias de las tendencias.

Finalmente, presentamos un apartado donde se establecen posibles relaciones entre el conocimiento especializado de los profesores y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como, las Figuras 19 y 20 que aluden a dichas relaciones.

La estructura de este capítulo se compone de tres partes: 1) Análisis del conocimiento de cada uno de los profesores (primero Jordy y después Carlos), compuesto por la descripción general de subdominios evidenciados en la práctica del profesor; conocimiento especializado del profesor detallado con unidades de información, primero con relación a matrices (Núcleo 1), y después con relación a determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (Núcleo 2); una síntesis o resumen del conocimiento del profesor; 2) Análisis de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (primero Jordy y después Carlos), detallado de acuerdo a las categorías del instrumento de análisis; y una síntesis o resumen de dichas concepciones; y 3) Relaciones entre conocimiento especializado y concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

4.2.Análisis del conocimiento de Jordy

4.2.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Jordy

Una vez analizadas en su conjunto trece sesiones de clase de Jordy (de dos años consecutivos, 7 en el primer año y 6 en el segundo año), pasamos a describir los subdominios y categorías del MTSK de los que se obtuvieron evidencias y mostramos en la Figura 13 tales subdominios y categorías.

El subdominio de conocimiento del que hemos encontrado más evidencias es el KoT, en sus distintas categorías. También hallamos indicios de KPM, referente a *formas de proceder* en el desarrollo del contenido y donde incluimos además el papel que da el profesor a la notación matemática en sus clases; evidencias de KMT, concerniente a *ejemplos para la enseñanza*; y evidencias de KFLM, referido siempre a la categoría *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, en relación con el tema en cuestión. Pasamos a describir el conocimiento del profesor en cada uno de los subdominios.

4.2.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)

El conocimiento de los temas (KoT) de Jordy tiene cierta profundidad y se evidencia en todas sus categorías: *definiciones, fenomenología y aplicaciones, registros de representación, propiedades y sus fundamentos*, y *procedimientos*.

En cuanto a su conocimiento sobre *definiciones*, algunas son expresadas de manera formal, como en el caso de matriz y su clasificación (tipos), determinante de una matriz, sistema de ecuaciones lineales equivalente; y en otros casos, las definiciones son dadas a conocer a través de lenguaje coloquial o informal, como cuando se refiere al menor y cofactor de una matriz, combinación lineal y pivote.

Su conocimiento sobre la *fenomenología y aplicaciones* del contenido, se enmarca principalmente en la propia matemática. Así, el profesor conoce aplicaciones del determinante de una matriz, ya sea para encontrar la matriz inversa o resolver sistemas de ecuaciones lineales, empleando la regla de Cramer; operaciones elementales entre filas aplicadas en el cálculo del determinante (método del menor y cofactores complementado con propiedades), obtención de matrices escalonadas, matriz inversa por el método de Gauss-Jordan y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de Gauss y Gauss-Jordan).

En alguna ocasión hace alusión a aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales en situaciones cotidianas para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones de la vida real. En estos problemas, también sale a relucir su conocimiento sobre la aplicación de operaciones elementales entre filas, reglas de Sarrus y Cramer. Además, este conocimiento del profesor sobre *fenomenología y aplicaciones* dentro del contexto matemático, evidenciado a lo largo del desarrollo de las clases, le permite ir estableciendo conexiones dentro del mismo contenido (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales) que reflejan la utilidad de unos temas para el trabajo con otros. Pensamos en estas conexiones como relaciones intraconceptuales (que forman parte del KoT y se establecen en la proximidad de un único concepto) por cuanto a nuestro parecer las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales son temas muy cercanos que se complementan unos con otros. Así por ejemplo, como ya hemos mencionado, el profesor conoce que las matrices sirven para resolver sistemas de ecuaciones lineales (una matriz canónica puede representar la solución de uno de estos sistemas), o que los determinantes son aplicados en el cálculo de la matriz inversa y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En cuanto a los *registros de representación*, es claro el conocimiento del profesor sobre la notación matemática relacionada con el contenido en mención. Dicho conocimiento no sólo es observado en el desarrollo de las clases, sino también se hace explícito a los estudiantes. Así, encontramos evidencias del conocimiento de Jordy sobre diferentes registros: algebraico (Duval, 1995; Castro & Castro, 1997; D'Amore, 2004; Ramírez et al., 2013) (notación de las operaciones elementales entre filas), algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) (notación de matrices y sus elementos, determinante de una matriz, menor de una matriz, operaciones con matrices), aritmético (D'Amore, 2004) (operaciones con matrices), verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) (notación de los elementos de una matriz, matriz inversa, matriz identidad, operaciones elementales entre filas, operaciones con matrices y problemas de aplicación), y esquemático-pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004) (elementos aclaratorios en la matriz escalonada para resaltar su forma y los elementos distinguidos de fila).

Como es lógico, el profesor emplea registros de representación en todas las sesiones de clases, no obstante creemos que no tendría interés referirnos por ejemplo al registro algebraico-matricial cada vez que el profesor escribe una matriz, un determinante o un sistema de ecuaciones lineales en forma de matriz; de ahí que en el análisis nombramos el conocimiento de los registros cuando hay evidencias de por qué se usa uno u otro (por ejemplo, para diferenciar una matriz de un determinante); cuando el profesor da detalles de los mismos (por ejemplo, se refiere a que si se coloca la respuesta de un determinante entre barras verticales, después de haberlo calculado por cualquier método, significa que se trata del valor absoluto de un número y no de un escalar); o cuando emplea un tipo de registro para resaltar las partes importantes del contenido (por ejemplo, la notación de una matriz y sus elementos, la notación de las operaciones elementales entre filas, la notación de la matriz inversa, o los cálculos aritméticos que conllevan las operaciones con matrices).

El conocimiento sobre *propiedades y sus fundamentos*, se evidencia en sus clases al referirse a las propiedades de la suma de matrices (conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento inverso); a la no conmutatividad del producto de matrices; a la conmutatividad de una matriz por su inversa; y a las propiedades de los determinantes. Además, muestra conocimiento sobre fundamentos de algunas de estas propiedades. Esto se observa, por ejemplo, cuando aborda la no conmutatividad del producto de matrices, ya que hace referencia a los casos que pueden darse en la misma (exhaustividad), mencionando que, aunque se trate de matrices cuadradas, éstas no son conmutativas, y una excepción de ello es la multiplicación de una matriz por su inversa ($AxA^{-1} = A^{-1}xA$).

Por otra parte, pensamos en su conocimiento fundamentado de las propiedades de los determinantes, como en el caso de aquella que indica que "si a los elementos de una fila o columna le sumamos los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía". Dicha propiedad no es sólo expresada de manera textual, sino que el profesor resalta sus características importantes al conocer que cuando el escalar se multiplica por la fila o columna que se va a modificar, es necesario dividir la respuesta final para dicho escalar y así se encuentra el verdadero valor del determinante.

El profesor está al tanto de los *procedimientos*, y el análisis conjunto de las sesiones de clases muestra que se trata de un conocimiento razonado y sólido. Jordy conoce cómo llevarlos a cabo, cuándo es conveniente utilizarlos, qué restricciones tienen, distintas maneras de resolver un ejercicio, y establece con detalle los posibles resultados o lo que se espera obtener con cada procedimiento.

En cuanto a *procedimientos: ¿cómo se hace?*, el profesor evidencia conocimiento de los algoritmos para sumar y multiplicar matrices, así como del álgebra de matrices donde define la función f en el conjunto de matrices (registrando conocimiento sobre la potencia de una matriz); cálculo de la matriz inversa por varios métodos [Gauss-Jordan, $AxA^{-1}=I$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$]; procedimiento para reducir una matriz a su forma escalonada y canónica; cálculo del determinante por varios métodos (regla de Sarrus, menor y cofactores, combinando propiedades, operaciones elementales entre filas y el método del menor y cofactores); cálculo de la matriz de cofactores; determinación del menor de una matriz y de los signos de los cofactores; cálculo de matriz adjunta; resolución de sistemas de ecuaciones lineales por varios métodos (regla de Cramer, Gauss y Gauss-Jordan); planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales interpretando los datos de un problema. Este conocimiento sobre cómo llevar a cabo un procedimiento refleja las destrezas del profesor en el manejo de los mismos, al procurar mediante sus exposiciones que el estudiante se quede con una imagen clara de estos.

Relacionado a *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?*, el conocimiento del profesor se refleja al expresar las condiciones necesarias para sumar y multiplicar matrices, así como en el álgebra de matrices al trabajar con funciones y mencionar que uno de los coeficientes de la función debe ser multiplicado por la matriz identidad para poder obtener la imagen de la función en el conjunto de matrices; o cuando hace explícito que para que una matriz tenga inversa es preciso que el determinante no sea igual a cero.

En el caso de *procedimientos: características del resultado*, Jordy muestra conocimiento relacionado con las matrices. Por ejemplo, conoce las dimensiones resultantes del producto, el que una matriz puede tener varias formas escalonadas (siendo todas equivalentes) y una sola forma canónica, y que el producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad. En el caso de los determinantes, conoce que al calcularlos se obtiene un escalar y no una matriz. Cuando se trata de los sistemas de ecuaciones lineales conoce que aquellos que son compatibles determinados tienen una única solución y aquellos que son compatibles indeterminados tienen infinitas soluciones; que al resolverlos mediante operaciones elementales entre filas se van obteniendo sistemas equivalentes y que uno de ellos representa una matriz triangular superior, otro una matriz diagonal y la solución se puede representar por una matriz identidad (cuando se trata de un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado).

4.2.1.2. Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Encontramos indicios del conocimiento de la práctica matemática del profesor sobre *formas de proceder* en matemáticas, que relacionamos con un conocimiento de cómo se desarrollan las matemáticas, en este caso se trata de prácticas que asociamos a la simplificación de operaciones o de los procedimientos, a abarcar la exhaustividad de los casos y evitar errores. Además, incluimos aquí el conocimiento del profesor sobre el papel de la notación matemática.

Así, nuestro profesor muestra indicios de conocimiento sobre prácticas asociadas al cálculo del determinante (por ejemplo, cuando se trata del método del menor y cofactores hace hincapié en que para hacer más corto el procedimiento es conveniente trabajar con aquella fila o columna donde haya más ceros o unos, o se pueden transformar los elementos que más convenga en ceros o unos por medio de operaciones elementales entre filas para facilitar las operaciones).

Encontramos también indicios de conocimiento sobre prácticas asociadas a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, cuando procura simplificar dichas operaciones demostrando a los estudiantes que es posible cambiar el orden de las ecuaciones del sistema para utilizar el uno (si hubiere) como pivote; indicando que si el coeficiente que van a eliminar es cero deberán cambiar el orden de las ecuaciones del sistema porque el pivote siempre debe ser un número diferente de cero.

Hay indicios del conocimiento del profesor sobre prácticas asociadas al cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, cuando hace explícito a los estudiantes que una forma de acortar el procedimiento es cambiar las filas de la matriz para dejar el uno como pivote y transformar en cero los elementos que correspondan.

Además, encontramos indicios del KPM en la justificación que hace para los alumnos sobre el papel de la notación matemática, al advertir que los signos matemáticos tienen significado, de ahí la importancia de escribirlos correctamente y donde se debe. El profesor busca la precisión y promueve el rigor de la notación matemática en sus clases.

4.2.1.3. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Observamos una variabilidad de *ejemplos para la enseñanza* en la práctica de Jordy, destacando que en el momento de la exposición, los ejercicios que emplea como ejemplos son creados por él. El conocimiento de este profesor le permite trabajar con diferentes ejercicios relacionados con un mismo tema, destacando sus características particulares. El profesor enseña a través de ejemplos y normalmente no sólo emplea uno, sino que cuando aborda cada tema que compone el contenido a través del cual hemos analizado su conocimiento, utiliza tres o cuatro ejemplos con diferentes características.

En las sesiones observadas, el profesor evidencia conocimiento sobre variabilidad de *ejemplos para la enseñanza* de la suma y producto de matrices; reducción de una matriz a su forma escalonada; cálculo del determinante aplicando el método del menor y cofactores, operaciones elementales entre filas y/o propiedades; y resolución de sistemas ecuaciones lineales por medio de operaciones elementales entre filas. Así por ejemplo, para la enseñanza del producto de matrices, el profesor escribe en la pizarra cuatro ejemplos de matrices rectangulares, pero no al azar, sino pensando en que dichos ejemplos le permitan primero, destacar la importancia de las dimensiones de las matrices para realizar el producto; segundo, las dimensiones de la matriz resultante y tercero, el algoritmo propio de la multiplicación de matrices a través del cual obtiene los productos resultantes.

Para el caso de las matrices escalonadas también las aborda mostrando tres ejemplos que escribe sobre la marcha, de los cuales destaca sus características, de manera que el estudiante pueda ver lo distinto que hay en cada uno. El profesor conoce que en las matrices escalonadas los ceros van aumentando en cada fila y que interesa que estén antes de los llamados elementos distinguidos de fila (número diferente de cero), lo cual hace explícito a los estudiantes haciéndoles notar a su vez que puede darse el caso de que en una fila todos los elementos sean ceros y sigue siendo una matriz escalonada, sin que sea necesario tener en cuenta aquellos ceros que están después de los elementos distinguidos de fila.

4.2.1.4. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

En casi todas las sesiones de clase el profesor muestra conocimiento sobre los principales errores y dificultades de los estudiantes con relación al contenido, lo cual se enmarca en la categoría *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*. El profesor procura advertir a los estudiantes qué errores no deben cometer.

Jordy a lo largo de su experiencia en la enseñanza ha observado cómo aprenden los estudiantes, tiene un conocimiento rico sobre sus dificultades que le permite ir advirtiendo posibles errores relacionados con el contenido en mención. Al parecer, este conocimiento está relacionado con su conocimiento de procedimientos y otros aspectos del KoT que muestra cierta profundidad; como cuando hace énfasis en la importancia de tener en cuenta las dimensiones de dos matrices para multiplicarlas, debido a que sabe que los estudiantes podrían intentar realizar dicho producto sin fijarse en las dimensiones de las matrices y cometer errores; o al ser meticuloso en la realización de las operaciones elementales entre filas (para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y determinantes) porque conoce por su experiencia que estas constituyen una dificultad para los alumnos.

Así, como parte de su conocimiento sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, relacionadas con las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, además, podemos mencionar que el profesor sabe que los estudiantes pueden cometer errores al multiplicar un escalar por una matriz sin tener en cuenta los signos algebraicos; en la notación de una matriz y un determinante; al calcular un determinante por la regla de Sarrus y no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan; por no tener claro las diferencias entre una matriz y un determinante, y aplicar propiedades en igualdad de condiciones.

4.2.2. Conocimiento especializado de Jordy

En la Figura 14 presentamos el MTSK de Jordy con relación al contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, a través de los núcleos 1 y 2. El núcleo 1 comprende las matrices y el núcleo 2 comprende determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Además, por otra parte, en la Tabla 11 se muestran por cada sesión de clases observada, las unidades de información (indicadas por los números de las líneas correspondientes a la transcripción de la sesión de clases o por el número de entrevista semiestructurada y pregunta) asociadas a los subdominios y categorías del MTSK. Las unidades de información más relevantes las hemos incluido en el apartado que nos ocupa (las demás se pueden encontrar en las transcripciones de las sesiones de clases que constan en los ANEXOS 2 y 4.

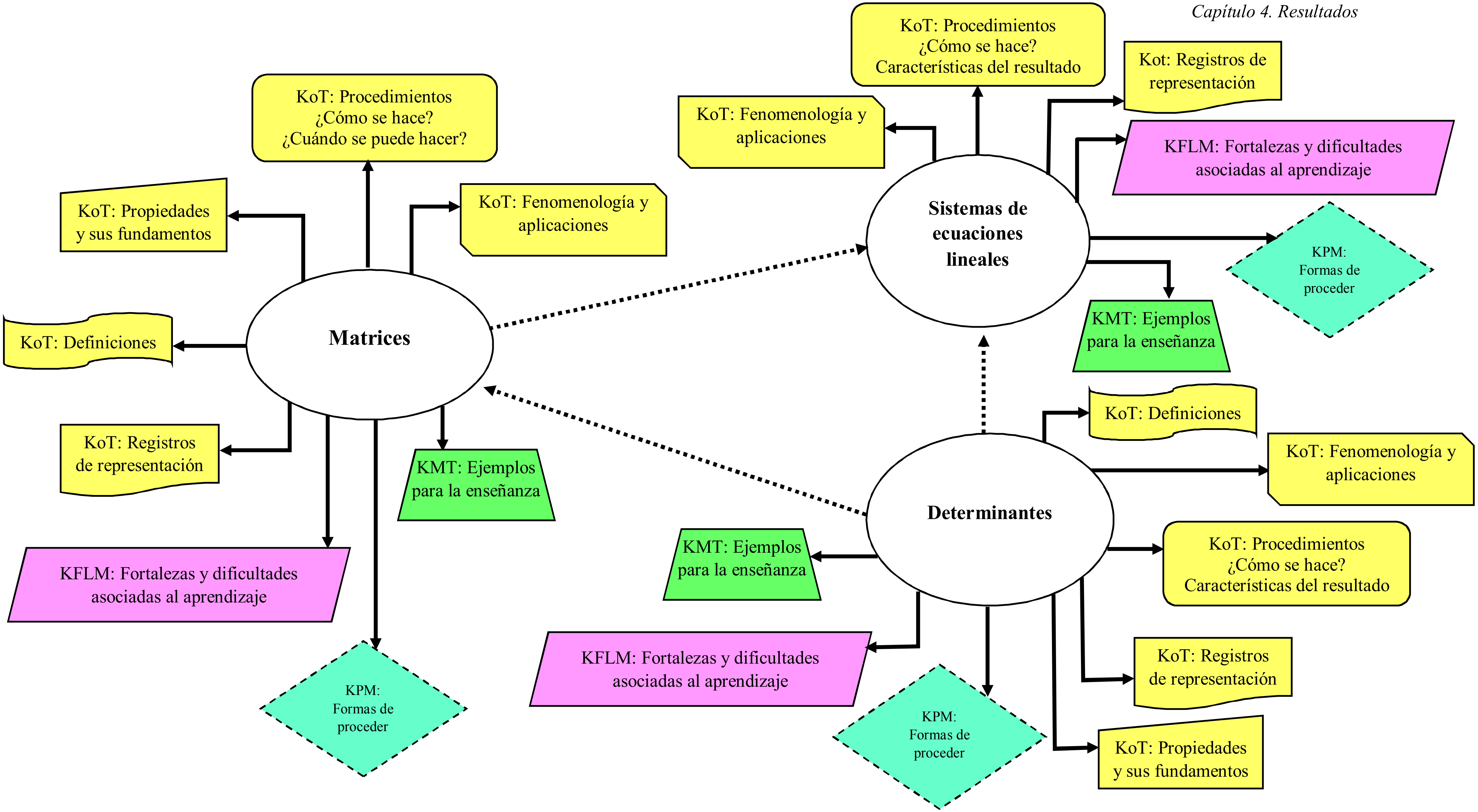


Figura 13. Subdominios y categorías del MTSK evidenciados en la práctica de Jordy

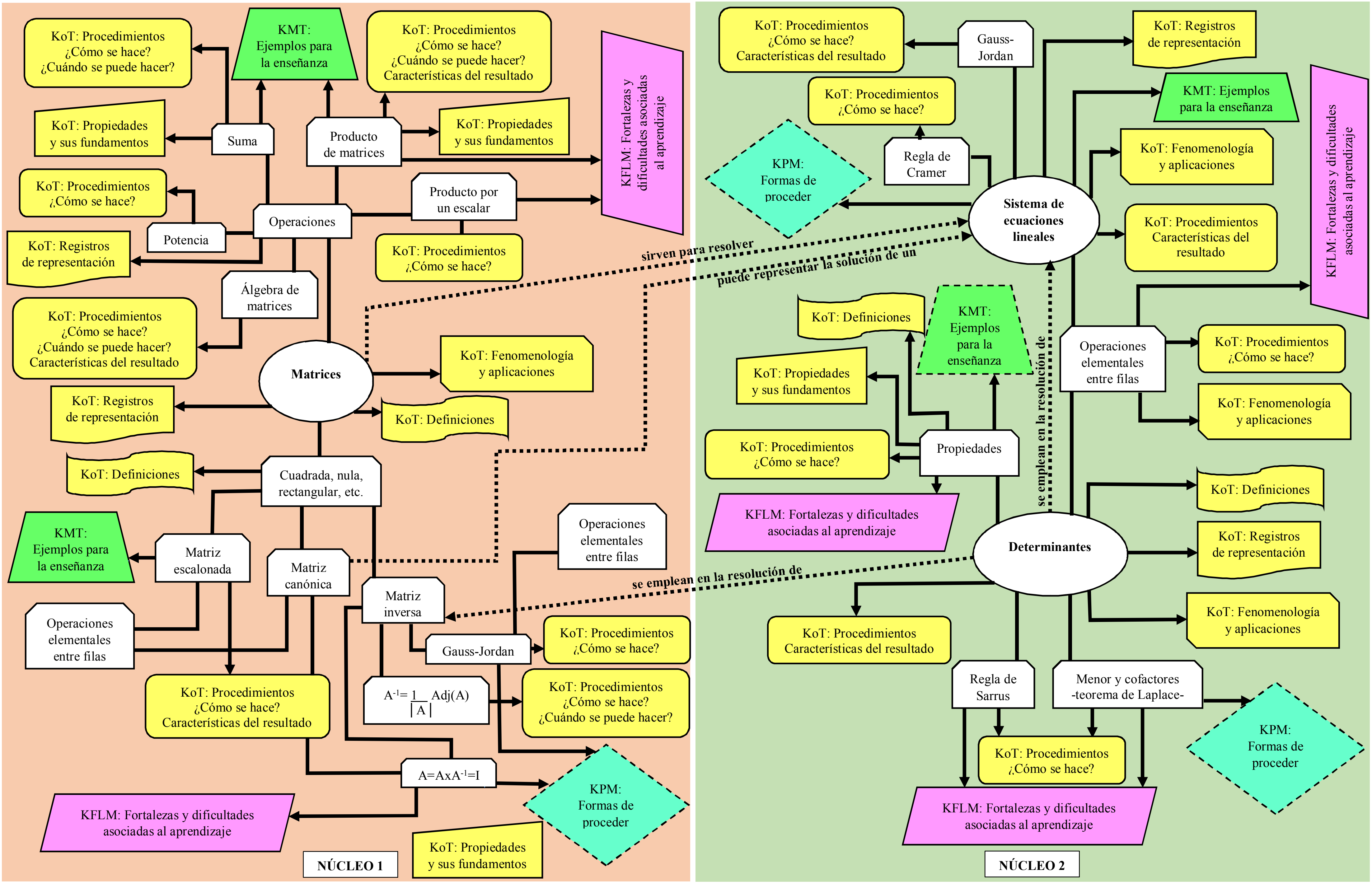


Figura 14. Conocimiento de Jordy sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK

Tabla 11. Unidades de información correspondientes al MTSK evidenciado en la práctica de aula de Jordy[34].

Subdom.	Categoría		Año 1							Año 2					
			Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**	**Sesión 6**	**Sesión 7**	**Sesión 1**	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**	**Sesión 6**
KoT	***Definiciones***		1-10 18-95		88-113 114-122 123-126	29-35	48-53	1-10 31-33		14-35 104-106		21-23	22-28 138-141	306-321	
	Fenomenología y aplicaciones					25-28 121-156	48-53			51-61 113-114	117-146		183-185	228-282	
	Registros de representación		1-10		53-58 88-126	131-135	71-78	39-41			117-146				46-49
	Propiedades y sus fundamentos		146-199	54-63 E3.P7[35]					14-24 81-83 156-165				3-114		99-104
	Procedimientos	***¿Cómo se hace?***	146-161 200-202	64-89 119-129 130-142	8-50 137-172 177-210	1-77	11-39 85-101 105-123 127-139	15-25 34-61 62-64 72-84 124-140	1-39		5-59	5-9 10-15 28-45 46-65	128-134	204-210	80-91
		¿Cuándo se puede hacer?	143-145	2-4 4-17 130-142				79-80	172-176						
		¿Por qué se hace así?													
		Características del resultado		30-33 130-142	8-50 127-136	107-109 121-156 175-208	72-77					16			99-104
KPM	***Formas de proceder***						11-21	124-140	1-39 40-51 103-111	115-131	60-67 160-172	74-85	224-239		38-49
KMT	***Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza***														
	Recursos materiales y virtuales														

[34] Inspirada en Tabla con subdominios e indicadores del MTSK presentada por Rojas (2014).
[35] Hace referencia a unidad de información obtenida en entrevista, E corresponde a la entrevista con su respectivo número, y P a la pregunta con su respectivo número.

Continuación…

Subdom.	**Categoría**	**Año 1**							**Año 2**					
		Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**	**Sesión 6**	**Sesión 7**	**Sesión 1**	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**	**Sesión 6**
KMT	***Ejemplos para la enseñanza***	60-84 146-162 200-211	1-29	88-126 E3.P10	121-156 175-208			40-51						
KFLM	***Formas de aprendizaje***													
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	221-225	96-106 E3.P4	53-58 108-109		119-122	128-132	73-90 162-165		E4.P4	55-56 97-99	56-59 99-101 115-117 118-119		
	Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático													
	Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas													

4.2.2.1. Conocimiento sobre matrices

Como ya se ha mencionado, al analizar el conocimiento del profesor encontramos evidencias de KoT en todas sus categorías. Jordy conoce las *definiciones* (KoT) relacionadas con el tema de matrices y su respectivo *registro de representación* (KoT). Así por ejemplo, citamos una unidad de información donde se observa su conocimiento sobre la definición de matriz y el énfasis que da a la notación matemática (S1.1-10[36]).

S1.1-10

P: *En este día se va a revisar qué es una matriz, cómo se ubican los elementos de una matriz y las clases de matrices. ¿Qué es una matriz? Una matriz es un arreglo rectangular de elementos y que se ubican en filas y en columnas.*

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \text{filas} \\ \text{Columnas} & \end{array}$$

Los elementos están ubicados entre paréntesis. En este sentido van las filas y en este las columnas, se las denota con letras mayúsculas, pueden ser este tipo de paréntesis ( ) o pueden ser también corchetes [ ] En cada elemento hay dos subíndices, el primero se refiere a las filas, cada elemento se representa a_{ij}, el primer subíndice es el número de filas y el segundo subíndice es el número de columnas.

El profesor define el objeto matemático matriz y se refiere a la forma genérica de representarlo (ya sea con paréntesis o corchetes) con sus elementos (a), y la disposición de estos últimos mencionando que los subíndices ij hacen referencia a las filas (i) y columnas (j). En este caso, se evidencia el conocimiento del profesor referente al registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al representar una matriz general, y registro verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) al expresar oralmente la representación simbólica del elemento de una matriz.

Evidencia además, su conocimiento sobre las *definiciones* (KoT) de los tipos de matrices (cuadrada, rectangular, nula, triangular superior, triangular inferior, identidad, escalar, traspuesta, simétrica, antisimétrica, iguales, invertible o inversa, conjugada, singular, ortogonal) (S1.18-95, S1*.14-35[37]), acompañadas de sus respectivos ejemplos. Jordy conoce muy bien estas definiciones y sus elementos clave, ya que no solamente escribe

[36] Siglas y números utilizados para identificar la sesión de clases (S1) y líneas de transcripción (1-10).

[37] El asterisco indica que la unidad de información corresponde al segundo año de observaciones de la práctica del profesor.

un ejemplo de cada tipo de matriz de forma aislada, sino que va hilando su discurso intentando que los estudiantes se queden con una visión clara de las características de cada matriz, procurando añadir, quitar o transformar ciertos elementos de un tipo de matriz para que se convierta en otro. Así citamos una unidad de información donde el profesor aborda las definiciones de matriz traspuesta, simétrica y antisimétrica (S1.67-92).

S1.67-92

67 P: *¿Cuándo una matriz es traspuesta a otra?*
68 E: *Las filas se convierten en columnas*
69 P: *¿Qué es lo que se hace para trasponer una matriz?*
70 *Las filas se convierten en columnas y con eso es suficiente. Por*
71 *ejemplo, aquí esta matriz*

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

72 *¿Cómo sería la traspuesta?*
73 *Esta fila la transformamos en columna, segunda fila segunda columna,*
74 *tercera fila, ahí está la traspuesta de la matriz B*

$$B^t=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

75 *¿Qué otra clase de matriz hay?*
76 E: *Matriz simétrica, que es igual a su traspuesta*
77 P: *Es igual a su traspuesta, pero ¿qué características tiene?*
78 *Son los mismos los elementos que están a diferentes lados de la*
79 *diagonal superior, ojo con esto, vamos a hacer que esta matriz*
80 *sea simétrica*

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

81 *Si aquí tiene -1* (primera fila segunda columna) *¿aquí qué elemento*
82 *debería estar?* (segunda fila primera columna), *-1*
83 *O sea, todos los números que están ubicados simétricamente al*
84 *otro lado de la diagonal principal deben tener el mismo valor*

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

85 *¿Aquí qué numero debería haber?*(tercera fila primera columna)
86 E: *El 2*
87 P *Y aquí qué número debería haber?* (tercera fila segunda columna)
88 E: *-2*
89 P: *¿Y una matriz antisimétrica?*
90 *Esos elementos que están ubicados en el mismo sitio pero a diferentes*
91 *lados de la diagonal tienen diferente signo*

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

92 *Que a partir de la diagonal principal, los elementos tienen valor inverso*

En la unidad de información se observa que su conocimiento del contenido le da la destreza suficiente para poder convertir rápidamente el ejemplo de un tipo de matriz en otro. Así transforma la matriz B primero en B^T, luego en simétrica y esta última en antisimétrica.

En el caso de las operaciones con matrices, hallamos evidencias de su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT), referente a los algoritmos para realizar operaciones como la suma (S1.146-161), producto por un escalar (S1.200-202), producto de matrices (S2.64-89) y potencia (S2.119-129). Adicionalmente, conocimiento sobre álgebra de matrices, cuando resuelve una función con matrices cuadradas (S2.130-142), y en donde los estudiantes pueden practicar las operaciones con matrices. Citamos como ejemplo la unidad de información referida al producto de matrices (S2.64-89).

S2.64-89

64 P: *Vamos a realizar los productos que están indicados allí para que*
65 *usted tome en cuenta la mecánica. Con todas ellas se puede hacer*
66 *el producto, cambiemos de nombre a las dos últimas matrices, le*
67 *ponemos ahora C y D. Comenzamos con AxB*
68 *AB va a ser una matriz que tiene dimensiones*
69 E: *2x1*
70 P: *2x1, va a tener dos filas y una columna*
71 *Lo que se hace es tomar la primera fila de la matriz A y la multiplicas*
72 *por los elementos de la primera columna de la matriz B, se multiplican*
73 *los elementos correspondientes y la suma de todos esos productos va a*
74 *ser el elemento* a_{11} *de la matriz producto*
75 *La primera fila por la columna te da elementos de la primera fila y la*
76 *primera columna de la respuesta. Vamos a escribir todos los*
77 *productos para que usted se dé cuenta qué es lo que se hace*
78 *Entonces dices aquí 2 por 1 más 3 por -3 y más 1 por 5*
79 *Dos menos nueve más cinco nos da menos 2*
80 *Entonces, el elemento* a_{11} *es -2*
81 *Como ya no hay más columnas en la matriz B, ya dejamos de*
82 *trabajar con esa fila, pasamos a la segunda fila. La segunda fila*
83 *es 4, -5 y 0 y lo multiplicamos por la misma columna 1, -3, 5*
84 *Y hacemos lo mismo, seguimos con el mismo procedimiento*
85 *Acá nos va a dar el elemento que está en la segunda fila primera*
86 *columna. Hacemos el producto y la suma*
87 *segunda fila primera columna nos da 19, terminado el producto*

$$AxB=\begin{bmatrix}-2\\19\end{bmatrix}$$

88 *Una matriz 2x1, las filas de la primera matriz y las columnas de la*
89 *segunda*

Como vemos, el profesor con base en dos matrices A y B que ha escrito previamente en la pizarra, hace explícito su conocimiento del procedimiento para multiplicarlas (*Lo que se hace es tomar la primera fila de la matriz A y la multiplicas por los elementos de la primera columna de la matriz B, se multiplican los elementos correspondientes y la suma de todos esos productos va a ser el elemento* a_{11} *de la matriz producto*).

Además, cuando el profesor trabaja las operaciones con matrices se observa su conocimiento sobre *registros de representación* (KoT), siendo éstos el registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al representar cada matriz; el registro aritmético (D'Amore, 2004) para describir las operaciones entre matrices; y el registro verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006), para la lectura de los elementos de las matrices.

Jordy hace llamadas de atención para especificar cuándo es factible llevar a cabo las operaciones con matrices, evidenciando conocimiento sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* (KoT). De este modo, conoce que para sumar matrices es necesario que estas tengan las mismas dimensiones (S1.143-145) (S2.2-4), para multiplicarlas se requiere que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda (S2.4-17), y cuando trabaja el álgebra de matrices con funciones cuadráticas o cúbicas, sabe que para poder llevar a cabo las operaciones, el término independiente de la función tiene que ser multiplicado por una matriz identidad (S2.130-142). A continuación la unidad de información con respecto a cuándo se pueden multiplicar dos matrices (S2.4-17).

S2.4-17

4 P: *Para hacer el producto de matrices*
5 *también se necesita una condición. Si tenemos la matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

6 *¿Cuáles son las dimensiones de esa matriz?*
7 E: *Dos filas, tres columnas*
8 P: *La dimensión de esta matriz es 2x3. Para poder multiplicar dos matrices*
9 *se necesita que el número de columnas de la primera matriz sea igual al*
10 *número de filas de la segunda matriz. Si A es así, B debe tener*
11 *obligatoriamente tres filas, no importa el número de columnas*
12 *Supongamos que la matriz B es una matriz columna*

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

13 *Con esa se puede multiplicar, la condición es que tenga tres filas*
14 *Esta matriz tiene dimensiones*

E: *Tres por uno*
P: *Tres por uno. Si no cumple con esa condición, usted dice que la*
multiplicación no es posible

Se observa en la unidad de información que el profesor crea un contexto (con ejemplos y preguntas a los estudiantes) mostrando así su conocimiento sobre la condición necesaria para realizar el producto de matrices.

Otro ejemplo que citamos relacionado con el conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* (KoT) es el relacionado al álgebra de matrices (S2.130-142)

S2.130-142

P: *Si tenemos una función f(x) que diga por ejemplo* $2x^2$*-5x-3,*
defina f(A)
entonces f(x) = $2x^2$*-5x-3*
f(A)= $2A^2$*-5A-3*
En este -3 aquí colocamos la matriz identidad de orden 2x2 para poder
sumar, sino ese -3 no tiene forma de ser sumado acá, como estamos
trabajando con matrices
Reemplazamos los valores y en vez de A^2 *escribimos la matriz* A^2*,*
luego donde está A se deberá reemplazar con los elementos de la matriz
A y por último al lado del 3 escribir la matriz identidad 2x2

$$=2\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} -5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} -3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahí tienen lo que ya vieron en la clase anterior: suma de matrices y el
producto de un escalar por una matriz
Ahí tenemos f(A), la matriz solución es -15, -1, 5, -16

$$f(A)=\begin{bmatrix} -15 & -1 \\ 5 & -16 \end{bmatrix}$$

En esta unidad de información, observamos que el profesor, cuando trabaja el álgebra de matrices con funciones cuadráticas o cúbicas sabe que para poder llevar a cabo las operaciones, el término independiente de la función tiene que ser multiplicado por una matriz identidad. Esto muestra, por un lado, conocimiento del profesor respecto de cuándo se puede realizar la suma de matrices y que no está definida la suma de una matriz con un escalar, y, por otra parte, parece mostrar un conocimiento de que la función f definida en el conjunto matrices, al incluir operaciones internas dentro del conjunto de las matrices, debe conservar su imagen dentro del mismo conjunto. Asociamos esto último a conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT), dado que el profesor conoce que f(A) debe ser una matriz, lo que apoya la necesidad de interpretar el escalar -3 multiplicado por la matriz identidad de orden 2x2.

Este mismo conocimiento (*procedimientos: características del resultado*, KoT) es mostrado por el profesor al establecer las dimensiones de la matriz que se obtendrá como resultado del producto de dos matrices (S2.30-33).

Se registra conocimiento sobre *propiedades y sus fundamentos* (KoT) cuando expone las propiedades de las operaciones con matrices, específicamente las de la suma y el producto de matrices. Para el caso de las propiedades de la suma, Jordy crea un contexto en base a tres ejemplos de matrices rectangulares para recalcar que es fundamental que las dimensiones sean iguales para sumar matrices, e ir deduciendo cada una de las propiedades de esta operación (S1.146-199). Lo mismo ocurre cuando se trata de definir el producto de matrices, los ejemplos son fundamentales en la explicación de las dimensiones de las matrices para realizar el producto, llegando así a deducir la no conmutatividad de esta operación.

Citamos como ejemplos tres unidades de información, la primera, donde en base al comentario de un estudiante, el profesor refiere la no conmutatividad del producto (S2.54-63), la segunda que corresponde a la respuesta del profesor cuando se le solicitó en una entrevista mencionar excepciones de dicha propiedad (E3.P7[38]), y la tercera donde una excepción de la no conmutatividad del producto de matrices es expresada por él en una de sus clases (S6*.99-104).

S2.54-63

E: *O sea que en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que estén ubicadas*

P: *¿Cómo sería eso? ¿Cómo lo podrías decir? Allí hicieron A(2x3)xB(3x1), pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede multiplicar, en este caso ¿qué pasa?*

E: *No es conmutativa*

P: *Correcto, en el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa (AxB ≠ BxA); no siempre es conmutativa, primero por las dimensiones y luego aunque se pudiese siendo matrices cuadradas, estas no siempre son conmutativas*

[38] Siglas utilizadas para identificar una entrevista (E3) y la pregunta (P7).

E3.P7: *Cuando es la matriz inversa, ahí es conmutativo, o sea, la matriz inversa por su matriz que siempre da la identidad. Y hay otros casos que a veces me han salido al azar.*

S6*.99-104

99 P: *Ahí sí se comprueba que sale la matriz identidad*
100 *Esa comprobación debe salir igualita si aplica la propiedad*
101 *conmutativa, multiplicando así A^{-1}·A, invirtiendo los factores debe dar*
102 *lo mismo. Ese producto sí es conmutativo, verá que una de las*
103 *propiedades de la multiplicación de matrices es que no son*
104 *conmutativas, pero en este caso de la matriz inversa sí es conmutativa.*

El profesor además de conocer la no conmutatividad del producto de matrices, muestra cierta profundidad en el conocimiento de la misma, ya que no sólo la enuncia, sino que además, es cuidadoso en fundamentar dicho conocimiento, por la exhaustividad en la consideración de los casos, manifiesta que aunque se trate de matrices cuadradas, la multiplicación de estas no siempre es conmutativa, y por otra parte, conoce una excepción de la misma, como es el caso de una matriz por su inversa, lo cual hace explícito a los estudiantes.

Encontramos evidencias del conocimiento de Jordy sobre *ejemplos para la enseñanza* (categoría inmersa en el KMT), al realizar operaciones con matrices. Es importante recalcar que el profesor crea los ejemplos sobre la marcha de su exposición. Por tanto, cuando se trata de la suma escribe las matrices A, B y C, siendo A y B de dimensión 2x3 y C de dimensión 2x4, tal como se muestra en la unidad de información siguiente (S1.146-162).

S1.146-162

146 P: *Vamos a suponer que tenemos la matriz A y tenemos las matriz B y*
147 *tenemos la matriz C*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & -10 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

148 *¿Cuáles de esas matrices pueden sumarse?*
149 E: *A+B*
150 P: *O podemos hacer también B+A*
151 *¿Por qué no se puede sumar A + C?*
152 E: *Son diferentes*
153 P: *No tienen las mismas dimensiones, aquí ¿qué es lo que ocurre con*

respecto a B o a la matriz A?
E: *La C tiene una columna de más*
P: *Tiene una columna de más, entonces no podemos sumar A con C,*
no está definida esa suma, ni podemos sumar B con C porque
no está definida esa suma, porque son de diferentes dimensiones las
matrices, lo que sí podemos hacer es A + B, ¿qué hay que hacer para
sumar? Usted toma los elementos que están en la misma ubicación y
los suma, por ejemplo 2+(-1)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Y en la segunda fila lo mismo

El conocimiento del profesor le permite escribir la matriz C de dimensiones distintas a las matrices Ay B como contraejemplo (Rissland-Michener, 1978; Bills et al., 2006), con la intención de que los estudiantes vean claramente que matrices con dimensiones diferentes no se pueden sumar.

Así mismo, evidenciamos su conocimiento de *ejemplos para la enseñanza* (KMT) del producto de matrices, siendo de importancia en esta operación tomar en cuenta las dimensiones de las matrices (el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda) para que sea posible realizar la multiplicación. Jordy, para explicar la multiplicación de matrices emplea matrices que no son cuadradas A(2x3), B(3x1), B(3x2) y B(3x4), como vemos en la siguiente unidad de información (S2.1-29).

S2.1-29

P: *Lo que vamos a hacer ahora es el tema de producto de matrices*
Para hacer la suma de matrices necesitamos una condición ¿cuál era?
E: *Que tengan la misma dimensión*
P: *Que tengan la misma dimensión. Para hacer el producto de matrices*
también se necesita una condición. Si tenemos la matriz

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son las dimensiones de esa matriz?
E: *Dos filas tres columnas*
P: *La dimensión de esta matriz es 2x3. Para poder multiplicar dos matrices*
se necesita que el número de columnas de la primera matriz sea igual al
número de filas de la segunda matriz. Si A es así, B debe tener
obligatoriamente tres filas, no importa el número de columnas
Supongamos que la matriz B es una matriz columna

$$B= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Con esa se puede multiplicar, la condición es que tenga tres filas
Esta matriz tiene dimensiones…
E: *Tres por uno*

16 P: *Tres por uno. Si no cumple con esa condición, usted dice que la*
17 *multiplicación no es possible*
18 *La matriz B puede ser también por ejemplo así*

$$B= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

19 *¿Qué dimensiones tiene?*
20 E: *Tres por dos*
21 P: *Sí, así que si van a multiplicar AxB, sí se puede porque el número*
22 *de columnas de la matriz A coincide con el número de filas de la*
23 *matriz B*
24 *Y puede ser otra matriz con cualquier número de columnas, por*
25 *Ejemplo*

$$B= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

26 *¿Qué dimensiones tiene esta matriz?*
27 E: *3x4*
28 P: *Como coincide el número de columnas de la matriz A con el número de*
29 *filas de esta matriz B sí se puede realizar el producto.*

Asociamos estos ejemplos al KMT del profesor, pensando que los elige por la posible repercusión en la visión del contenido de los alumnos, es decir, evita abordar el tema de la multiplicación con dos matrices cuadradas del mismo orden para dejar claro a los estudiantes la importancia que tiene definir las dimensiones de las matrices al multiplicar y que les llevará a determinar si se puede o no realizar el producto.

En la misma línea, Jordy al referirse al producto de un escalar por una matriz utiliza un escalar positivo y luego en otro ejemplo, uno negativo, como se observa en la siguiente unidad de información (S1.200-211).

S1.200-211

200 P: *¿Qué ocurre si ahora yo quisiera tener la matriz 2A?*

$$2A= 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

201 *Este escalar se multiplica por dos todos sus elementos. Entonces sería*
202 *Aquí*

$$2A= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

203 *¿Y si yo quisiera obtener la matriz -7B? Lo mismo, colocamos el*
204 *escalar -7 con su signo, colocamos la matriz B*

$$-7B= -7 \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

205 *¿Y sería igual a cuánto?*

206 *Multiplicamos los signos*

$$-7B=\begin{bmatrix} 7 & -49 & -42 \\ -14 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

207 *¿Qué pasó con todos los elementos de dentro?*
208 E: *Han cambiado su signo*
209 P: *Han cambiado su signo y han sido multiplicados por siete, ¿qué pasó*
210 *aquí afuera?*
211 *Teníamos -7 pero aquí fuera de la matriz quedó positivo, ojo con eso*

El profesor conoce que los estudiantes cuando realizan este tipo de multiplicación olvidan tener en cuenta los signos algebraicos, tanto del escalar como de los elementos de la matriz, de ahí que enseña la multiplicación de un escalar por una matriz con estos ejemplos, uno de ellos con un escalar positivo, y el otro, con un escalar negativo.

Utilizando este tipo de ejemplos el profesor formula preguntas a los estudiantes (o puede dar sugerencias durante la resolución de un ejercicio), para orientar a los alumnos y dar sentido a los contenidos matemáticos.

Por tanto, creemos que el conocimiento del profesor sobre *ejemplos para la enseñanza* (KMT) muestra que los elige atendiendo al criterio de variabilidad. El objetivo de la utilización de los ejemplos en sus clases generalmente es la introducción de un nuevo tema. La conciencia del profesor sobre la variación de los ejemplos maximiza su efectividad en la enseñanza, en este caso de procedimientos matemáticos sobre el producto de un escalar por una matriz, suma y producto de matrices; lo cual relacionamos con la transparencia y variación de ejemplos (Figueiredo et al., 2009; Figueiredo & Contreras, 2013). Como vemos Jordy a través de estos ejemplos procura ilustrar los respectivos procedimientos de estos temas (*transparencia*) y a su vez, intenta llamar la atención del estudiante cambiando aspectos o detalles de dichos ejemplos, sin que estos dejen de ser ejemplos de los temas que se están tratando (*dimensiones de variación posibles*, Watson & Mason, 2005).

En el contexto del trabajo de operaciones con matrices se presentan situaciones relacionadas con errores y dificultades de los estudiantes que pueden llevar a obtener respuestas incorrectas. De allí, surgen evidencias del conocimiento del profesor sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM). El profesor advierte de estos posibles errores en el transcurso de su exposición de la multiplicación por un escalar (S1.221-225), donde hace alusión a que deberán tener en cuenta los signos del escalar y de los elementos de la matriz para no cometer errores; así como en el caso del producto de matrices (S2.96-106), cuya unidad de información citamos a continuación.

S2.96-106

96 P: *Antes de que haga la multiplicación revise por si acaso*
97 *Los primeros factores deben ser de las filas de la primera matriz y los*
98 *segundos factores son las columnas*
99 *8, 21, 13 y -13*
100 *Pase Angélica a resolver AxD*
101 *La ubicación de los factores es para que usted se equivoque menos*
102 *Si de pronto usted dice: no yo puedo hacer directamente, pues hágalo*
103 *Ahí tiene usted el ejercicio 5, si en caso no es posible realizar el*
104 *producto, escriba que no se puede hacer.*
105 *Siempre es bueno definir las dimensiones de las matrices para evitar*
106 *algún tipo de error en el producto*

Se observa que Jordy exhorta a los estudiantes a fijarse en las dimensiones de las matrices para evitar errores en esta operación. Relacionado al conocimiento del profesor sobre los errores en el producto de matrices, citamos la respuesta de Jordy obtenida en una entrevista (E3.P4) donde le pedimos su criterio sobre los posibles errores que pueden cometer los estudiantes al realizar la multiplicación de matrices.

E3.P4: *Siempre el error que primero pueden cometer es que el chico piense que hay que multiplicar número por número según la posición que está, o sea, puede ocurrir eso. Entonces al menos en ese sentido en la multiplicación de matrices, yo suelo insistir en las dimensiones, por eso al principio se les dice cómo determinar las dimensiones de una matriz y que sepan hacerlo bien para que no haya después confusión. Si yo tengo dos matrices cuadradas, los chicos pueden sacar resultado matriz 2x2 que es lo lógico pero en cambio pueden hacer lo mismo de la suma, multiplican los elementos que corresponden en cada matriz según su posición y sacan una matriz 2x2, pero obviamente tiene error porque no es así, suelen equivocarse en eso cuando no tienen claro el concepto o la definición de una operación.*

De acuerdo a esta unidad de información, es muy clara la conciencia del profesor sobre los errores. Se observa que no sólo los conoce, sino que es capaz de darle peso a cuáles son los más habituales, identificando como posibles errores, por una parte, el no considerar las dimensiones de las matrices para realizar el producto, y por otra, que los estudiantes hagan una falsa generalización del procedimiento de suma de matrices al del producto. Estos errores han sido identificados por Barros et al. (2013), a través de la categoría que ellos denominaron *dificultades en las operaciones con matrices*, y en la cual indican que los estudiantes universitarios presentan dificultades en la multiplicación de matrices y en reconocer las condiciones en que es posible realizar el producto (ver análisis cognitivo).

Este conocimiento sobre errores y dificultades podría estar relacionado con su KoT en el sentido de que algunas reflexiones sobre el contenido que hemos mostrado hasta el momento, respecto de su KoT, tienen un paralelismo en su conocimiento de dificultades. Así, por una parte, creemos que el mencionar en sus clases la importancia de las dimensiones en la operación del producto de matrices (*procedimientos: ¿cuándo se puede hacer*?-KoT) estaría relacionado con su KFLM sobre los errores de los estudiantes al realizar directamente la operación sin definir las dimensiones de las matrices, mientras que, por otra parte, el profesor es cuidadoso al exponer paso a paso el proceso para multiplicarlas (*procedimientos: ¿cómo se hace?*), lo cual relacionamos con su KFLM sobre el error que puede producirse si el estudiante realiza la multiplicación de matrices como si fuera una suma.

Encontramos evidencias de su conocimiento sobre *definiciones* (KoT) en el caso de la matriz escalonada (S3.88-113), elementos distinguidos de fila (S3.114-122) y matriz canónica (S3.123-126), citamos a continuación las unidades de información.

S3.88-126

88 P: *Ahora quiero que miren acá a la pizarra*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bigcirc \rightarrow \boxed{\text{Elementos distinguidos de fila}}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

89 *¿Qué pasa en la primera matriz, qué le ven de especial?*
90 *Primero no son cuadradas, ¿qué tienen de especial?*
91 E: *Un poco de ceros*
92 P: *¿Qué pasa con los ceros?*
93 E: *Van aumentando*
94 P: *Van aumentando a medida ¿que qué, se van incrementando en dónde?*
95 *Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las*
96 *filas. Lo importante es que haya ceros antes de un elemento que*

sea diferente de cero en esa fila
En la primera fila no hay ceros, en la segunda fila hay un cero
antes de llegar a una fila que no es cero, en la tercera hay tres ceros
antes de llegar a un elemento que es diferente de cero
¿Qué pasa aquí en la segunda matriz?
En la segunda fila hay dos ceros y en la otra fila todos son ceros
Van aumentando los ceros a medida que vamos descendiendo
en las filas
¿Aquí qué ocurre en la tercera matriz?
En la primera fila hay un cero, en la segunda hay tres y en la última
hay 4
Fíjese que no interesa si por acá hay un cero, la cosa es que haya
ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila
Este tipo de matrices se llaman matrices escalonadas, va como una
escalera y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta
encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener
todas las filas ceros
A estos elementos que son los primeros elementos en cada fila diferentes
de cero, se les conoce como elementos distinguidos de fila
¿Cuáles son los de la matriz B?
E: *1 y -3*
P: *En C, ¿cuáles son los elementos distinguidos?*
El 1 y el 2
Solamente habrá un elemento distinguido por fila, no importa si después
hay ceros, ese sigue siendo el elemento distinguido, es el primer
elemento diferente de cero.
P: *Hay otro tipo de matriz que se llama de la forma canónica. La matriz*
reducida a la forma canónica es cuando los elementos distinguidos son
unos y en su columna es el único número diferente de cero, son las
dos condiciones

Es observable que Jordy conoce las tres definiciones (matriz escalonada, elementos distinguidos de fila y matriz canónica), las aborda apoyado en tres ejemplos, y haciendo preguntas a los estudiantes. Además, hace notar a los alumnos características relevantes de dichas definiciones, como por ejemplo, cuando les advierte que para que sean matrices escalonadas interesa que hayan ceros en las filas antes de cada elemento distinguido de fila, sin importar los ceros que existan después de dichos elementos. Esto a su vez, nos hace pensar en indicios de su conocimiento (Moriel-Junior & Carrillo, 2014) sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM), específicamente en su conocimiento sobre los errores (S3.108-109), ya que al parecer hace esta advertencia a los estudiantes porque ellos podrían no fijarse en los elementos distinguidos de fila y pensar que los ceros pueden estar indistintamente antes o después de estos para que sea una matriz escalonada.

Relacionado a las matrices escalonadas, se destaca además, el conocimiento del profesor relativo a los *ejemplos para la enseñanza* (KMT). Al igual que en las operaciones con matrices, citadas anteriormente (producto de un escalar por una matriz, suma y multiplicación de matrices), el profesor emplea más de un ejemplo en sus exposiciones; así para el caso de la matriz escalonada presenta tres ejemplos (S3.88-126), con la finalidad de barrer diversas posibilidades de la situación, procurando que los estudiantes se fijen en la disposición de los ceros en este tipo de matrices, cómo van aumentando en cada fila de las mismas y cuáles serían los elementos distinguidos de fila.

Además, con la finalidad de complementar la información que nos permitiera profundizar en el conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza* de este profesor, en una entrevista (E3.P10) le preguntamos específicamente su intención al escribir estos tres ejemplos de matrices escalonadas (A, B, y C citadas arriba en la unidad de información S3.88-126), y cuya respuesta se cita a continuación.

E3.P10: *La intención era escribirles tres matrices diferentes y cada una escalonada a su manera. Si te das cuenta la última no tiene elementos diferentes de 0 en la primera columna, y la segunda no tiene elementos diferentes de 0 en la tercera fila, pero ambas son escalonadas, incluso no es cuestión de que vayan seguiditos los numeritos sino que puede haber una diferencia de varios números en el escalonamiento de una matriz. Las puse con la intención de que los estudiantes se den cuenta de que hay diferentes clases de matrices escalonadas y qué es lo fundamental de una matriz escalonada, cuándo es y cuándo no porque pueden cometer errores y pensar que es una matriz escalonada cuando no lo es.*

Jordy justifica la intencionalidad de mostrar tres ejemplos de matrices escalonadas (E3.P10), y procura que los estudiantes se fijen en las características de las mismas, lo que le permite construir una definición de matriz escalonada. Por tanto, en la unidad anterior (S3.88-126) se evidencia cómo su elección de ejemplos va unido a su conocimiento de la definición de matriz escalonada (KoT, *definiciones*), cuáles son sus propiedades definitorias (*va como una escalera, y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener todas las filas ceros*) y cuáles son accesorias (*solamente habrá un elemento distinguido por fila, no importa si después hay ceros, ese sigue siendo el elemento distinguido, es el primer elementos diferente de cero*).

De este modo, su KoT le permite elegir ejemplos donde se muestre la variabilidad, lo cual relacionamos nuevamente con criterios definidos para los ejemplos que se emplean en la enseñanza, como son el de variación (modificación de ejemplos sin que se altere su sentido general) y transparencia (ejemplos generales con los que se pretende ilustrar el procedimiento para escalonar una matriz) (Figueiredo et al., 2009; Figueiredo & Contreras, 2013). Con base en lo indicado por Zaslavsky (2010), pensamos que con estos *ejemplos para la enseñanza* (KMT) se promueve la generalización, es decir, se realzan los aspectos del procedimiento que desea ilustrar, indicando a su vez aquellos aspectos arbitrarios y modificables.

Así mismo, en la unidad de información, el KMT sobre *ejemplos para la enseñanza* de este profesor se ve complementado con KoT referido a *registros de representación* (S3.88-126), no sólo en cuanto al registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) evidente en la representación de cada matriz escalonada, sino además, el registro esquemático pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004), por los elementos aclaratorios que añade a dichas matrices, como los segmentos con los cuales les hace ver que este tipo de matrices tiene forma de escalera, y los números circulados con los que destaca los elementos distinguidos de fila.

Cuando Jordy aborda la matriz escalonada sale a relucir su conocimiento sobre operaciones elementales entre filas en lo referente a *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT), (S3.137-172, S3.177-210). Como ejemplo, citamos la unidad de información en la cual el profesor expone de forma general cómo llevar a cabo cada uno de los cuatro tipos de operaciones elementales entre filas que se pueden utilizar para escalonar una matriz (S3.137-172).

S3.137-172

P: *Por ejemplo, tomemos una matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

¿Qué puedes hacer para escalonar esa matriz?
Hay algunas operaciones que se llaman operaciones elementales entre filas. Puedes hacer 4 cosas:
Primero, puedes cambiar una fila con otra: $E_1 = f_i \rightarrow f_j$
Puedes cambiar esta fila con la primera o la segunda con la tercera y la matriz sigue siendo equivalente
Otra cosa que se puede hacer, Tú puedes reemplazar cualquier f_i *por esa fila multiplicada por un escalar k diferente de 0:* $E_2 = f_i \rightarrow f_i.k$
La tercera cosa que pueden hacer, puedes tomar una f_i *cualquiera y a*

147 *ella le puedes sumar otra f_j multiplicada por un escalar k:*
148 $E_3 = f_i \rightarrow f_i + k{\cdot}f_j$
149 *El intercambio está fácil, por ejemplo, yo puedo colocar esta matriz así*

$$E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

150 *Esto de aquí es E_1 para que vea un ejemplo, si quiere de aquí puede*
151 *intercambiar otra fila y forma otra matriz equivalente*
152 *Si quiere aplicar E_2 entonces a esta segunda matriz que está aquí*
153 *vamos a reemplazarle $f_2 \rightarrow -3f_2$*

$$E_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_2 \rightarrow -3f_2$$

154 *Esa matriz es equivalente a esa y a la anterior*
155 *Vamos a aplicar E_3*
156 *Yo voy a pasar acá esta matriz, la fila 3 la voy a reemplazar por*
157 $f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$$

158 *El escalar puede ser positivo o negativo*
159 *La fila 1 queda igualita*
160 *La fila 2 queda igualita, van a cambiar la fila 3*

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

161 *Y también pueden hacer la cuarta operación,*
162 *vamos a reemplazar una f_i por ella multiplicada por un escalar*
163 *cualquiera sumado a otra fila multiplicada por otro escalar cualquiera:*
164 $E_4 = f_i \rightarrow k{\cdot}f_i + k{\cdot}f_j$
165 *O sea, ahora multiplicas las dos, la que vas a reemplazar y la otra*
166 *que vas a sumar*
167 *Conste que el escalar de aquí puede ser 1 o -1, tú las puedes sumar*
168 *simplemente o las puedes restar o la puedes multiplicar por un*
169 *número fraccionario*
170 *Entonces, vamos a reemplazar ahora f_1 por $2f_1\text{-}3f_3$*
171 *Como va a reemplazar sólo f_1, f_2 y f_3 sigue siendo la misma, no cambia*

$$E_4 \quad \begin{bmatrix} -17 & 27 & 17 & -14 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

172 *Bueno, ahí tienen un ejemplo de cada cosa*

En la unidad de información se observa que a partir de una matriz que el profesor escribe sobre la marcha va desencadenando su conocimiento de cómo llevar a cabo cada una de las cuatro operaciones elementales entre filas que se pueden aplicar a la hora de escalonar una matriz. El mismo conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) es evidenciado cuando se trata de reducir una matriz a su forma canónica (S4.1-77), y durante la exposición del mismo, el profesor nuestra además, conocimiento de su caracterización (*definiciones*, KoT), al expresar cuáles son las dos condiciones necesarias para que una matriz sea canónica (S4.29-35).

Además, cuando trabaja con matrices escalonadas y canónicas, es observable su conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT) (S3.127-136, S4.107-109). A continuación citamos unas de las unidades de información donde hace explícito su conocimiento sobre las características del resultado de estas matrices (S3.127-136).

S3.127-136

P: *La forma escalonada solamente los ceros van aumentando en cada fila, esa es la forma escalonada. En la forma canónica ese elemento debe ser 1 y debe ser en su columna el único número diferente de cero Para llegar a eso, tú puedes escoger cualquier matriz y transformarla a la forma escalonada y pueden haber muchas matrices escalonadas diferentes a la matriz que tú encontraste, o sea, entre ellas serían equivalentes, son equivalentes la una con la otra. Si de una matriz te sale otra porque le haces algunas operaciones son equivalentes pero reducirla a la forma canónica solamente hay una, para cada matriz hay una*

En la unidad de información el conocimiento del profesor relacionado con las *características del resultado* se evidencia cuando expresa que una misma matriz puede tener muchas formas escalonadas, siendo todas equivalentes; mientras que una matriz tiene una sola forma canónica.

Para Jordy es importante el contenido en sí mismo, así como sus aplicaciones, y en el análisis encontramos evidencias de su conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT), reflejado cuando el profesor hace explícito que las matrices reducidas por medio de operaciones elementales entre filas a su forma canónica están relacionadas con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss-Jordan), cuya unidad de información citamos a continuación (S4.121-156).

S4.121-156

P: *Vamos a tomar en cuenta esto como si fuese una matriz aumentada y veamos cada fila como si fuesen los coeficientes de una ecuación*

$$A=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -11/4 \end{array}\right]$$

Cada fila corresponde a los coeficientes de una ecuación y en cada columna van los coeficientes de la misma variable, de la misma

incógnita. Por ejemplo: ¿cómo escribiría yo esta ecuación de aquí?
$x + 2y - z = 4$
Ya, ¿cómo escribiría la segunda?
$-2x + 3y + z = 0$
Y la última
$2x + y - z = 3$
Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, si yo parto de aquí y ubico los coeficientes acá tengo una matriz. Hasta ahí sería la matriz de los coeficientes del sistema, al colocarle los elementos independientes le estoy colocando la matriz aumentada incluidos los términos independientes.
Si he llegado con operaciones elementales entre filas a esta matriz canónica, entonces ¿cómo escribiría el sistema aquí?, *¿qué es esto?*
E: *X*
P: *Y ¿qué es esto?*
E: *Igual a -1/4*
P: *O sea, ¿cuánto vale x?*
Ya resolvió el sistema
$y = 3/4$
$z = -11/4$
Ahí tenemos la solución del sistema de ecuaciones, en este caso ha habido una solución. Si eso lo escribe usted como un vector. Utilizando operaciones elementales entre filas reduciendo a la forma canónica tenemos la solución del sistema de ecuaciones, en este caso, insisto, hay una única solución.
Podemos escribir la solución en forma de vector
$(x, y, z) = (-1/4, 3/4, -11/4)$ es la solución de ese sistema, utilizando operaciones elementales entre filas reduciendo a la forma canónica tenemos la solución de un sistema de ecuaciones lineales
En este caso insisto hay una única solución
Cuando hay tres variables y nos quedan tres filas hay una solución, como en este caso.

En la unidad de información se observa que el profesor hace ver a los estudiantes una matriz que representa los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, incluyendo los términos independientes (matriz aumentada), y además la forma canónica de dicha matriz, mediante la cual se representa el valor de cada una de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales; siendo la finalidad de exponer estos ejemplos, que los alumnos noten la utilidad de las operaciones elementales entre filas. Este conocimiento fenomenológico de las matrices se enmarca dentro del propio contenido matemático.

Hay que indicar que el conocimiento de Jordy sobre el manejo y aplicaciones de las operaciones elementales entre filas es importante para el desarrollo de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, ya que se trata de un tema transversal en el caso de estos temas. Podríamos decir, según lo observado en sus clases que a través de las operaciones elementales entre filas se desencadenan evidencias de su conocimiento sobre relaciones entre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, más que considerar este conocimiento como parte del conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) del profesor en lo referente a conexiones interconceptuales (los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento, Martínez et al., 2011), creemos que el KoT del profesor tiene cierta profundidad y le permite a través de sus explicaciones en las clases establecer las relaciones entre los contenidos matemáticos, tratándose de un conocimiento de relaciones intraconceptuales (que tienen lugar en la proximidad de un único concepto), el mismo que forma parte del KoT.

Este conocimiento de relaciones intraconceptuales lo asignamos por cuanto pensamos que las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, son contenidos muy cercanos, destacando por ejemplo, en el Álgebra Lineal, la utilidad de las matrices en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales o en el estudio de aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales mediante la matriz asociada (que permite calcular el núcleo y la imagen); y en el caso de los determinantes su aplicabilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Por tanto, el profesor es consciente de que el manejo de las operaciones elementales entre filas es fundamental para el desarrollo de este contenido, de allí que las aborda al inicio de sus clases en los dos años de observaciones de su práctica, observándose que las aplica en el transcurso de los temas subsiguientes de este contenido como son matriz inversa, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y cálculo de determinantes. En ciertas ocasiones se refiere de manera general a la importancia del manejo de éstas, haciéndolo explícito a sus estudiantes en las sesiones de clases. Citamos dos unidades de información donde el profesor comenta que dichas operaciones serán empleadas en temas posteriores (S4.25-28, S1*.113-114).

S4.25-28

P: *Ahí tenemos ya la matriz escalonada, eso fue lo que trabajamos la clase*
anterior, estas operaciones elementales entre filas son importantes
y las vamos a seguir utilizando a lo largo de todo el semestre en
diferentes aplicaciones, en diferentes procedimientos.

S1*.113-114

P: *Le interesa a usted aprender a manejar estas operaciones entre filas,* 114 *para programar y para ver todos los temas que vienen después*

En estas unidades de información vemos conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las operaciones elementales entre filas, ya que el profesor intenta dar a conocer al estudiante que deben adquirir destreza en la realización de estas operaciones, por cuanto serán empleadas no sólo en los temas dentro de la asignatura, sino en otras relacionadas (Programación) con la carrera que están cursando.

Por otra parte, para el caso de la matriz inversa, está presente el conocimiento de Jordy sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* (KoT) (S6.79-80, S7.172-176): Mostramos como ejemplo la siguiente unidad de información (S7.172-176).

S7.172-176

172 P: *Una matriz es invertible si su*
173 *determinante no es igual a 0, es decir, si su determinante es diferente de*
174 *0, entonces usted lo único que hace es comprobar si el determinante no*
175 *vale 0 entonces en ese caso la matriz es invertible, en caso de que el*
176 *determinante salga 0 la matriz no es invertible.*

Se observa que el profesor conoce que una matriz tiene inversa siempre y cuando su determinante no sea cero y lo hace explícito en sus clases.

El conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) se ve reflejado en el manejo de distintos métodos por parte del profesor para calcular la matriz inversa de una dada. Así, podemos citar tres métodos: (1) aquel que relaciona con la igualdad de matrices al emplear $AxA^{-1}=I$, (2) el método de Gauss-Jordan, y (3) por medio de la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$.

En el primer caso ($AxA^{-1}=I$), Jordy representa con incógnitas a A^{-1} y expone que por la definición de igualdad de matrices se puede formar un sistema de ecuaciones lineales con la matriz de las incógnitas y la matriz identidad, encontrando de esta forma los elementos de la matriz inversa, tal como indica la unidad de información siguiente (S3.8-50).

S3.8-50

8 P: *La matriz inversa es otra matriz que al multiplicarse por la matriz dada,*
9 *el resultado es la matriz identidad:* $AxA^{-1} = I$*. Si tú multiplicas un*
10 *número por otro es inverso siempre que te dé 1, entonces siendo*
11 *matrices al multiplicar la matriz por la inversa te tiene que dar la matriz*
12 *identidad, estamos hablando de matrices cuadradas.*
13 *También se da que el producto de una matriz por su inversa* (AxA^{-1}) *es*

14 *conmutativo*
15 *Entonces, vamos a comenzar con una matriz pequeña*

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

16 *Entonces ¿cómo encontramos la inversa?, vamos a partir de la*
17 *propiedad. Si tenemos otra matriz x, y, z, w*

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

18 *Si multiplico esta matriz por esta otra matriz ¿qué me tiene que dar*
19 *como resultado?*
20 E: *La matriz identidad*
21 P: *La matriz identidad*

$$\begin{array}{ccccc} A & & A^{-1} & & I \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

22 *Entonces hagamos este producto ¿cómo queda?*
23 E: 2x – 3y…
24 P: *2x – 3y   2z – 3w   4x+y   4z+w*

$$\begin{bmatrix} 2x-3y & 2z-3w \\ 4x+y & 4z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25 *Por el concepto de igualdad de matrices, ¿qué se verifica ahí?, si esta*
26 *matriz es igual a la otra ¿qué debe ocurrir?*
27 E: *Se iguala 2x-3y=1*
28 P: *Eso, este elemento debe ser igual a 1 y el otro debe ser igual 0 y aquí*
29 *tenemos un sistema de dos ecuaciones, lo mismo ocurre con los otros*
30 *elementos de la matriz.*

$$\begin{array}{lcl} 2x-3y=1 & \qquad & 2z-3w=0 \\ 4x+y=0 & & 4z+w=1 \end{array}$$

31 *Qué es lo que deben hacer ahora?, resolver el sistema.*
32 *Aplique el método de eliminación, vamos a eliminar la y*
33 *multiplicando por 3 la segunda ecuación*
34 *Entonces x es igual a 1/14*
35 *¿Cómo encontramos y?*
36 E: *Reemplazando*
37 P: *Reemplazamos en la uno o en la dos*
38 *y vale -2/7*
39 *Nos falta encontrar z y w, aplicamos lo mismo*
40 *Eliminamos la w, multiplicamos por 3*
41 *Entonces z es igual a 3/14*
42 *Y luego reemplazamos*
43 *w es igual a 1/7*
44 *Ya tenemos*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/14 & 3/14 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

45 *Haga la prueba, multipliquen ahora la matriz A por la inversa que han*
46 *encontrado a ver si es cierto que se obtiene la matriz identidad.*
47 *Entonces multiplica usted*

$$\begin{array}{ccc} A & A^{-1} & \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/14 & 3/14 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix} & = \end{array}$$

48 *Pase Daniela a hacer ese producto, eso no es nada nuevo, ya lo*
49 *hemos trabajado en clases anteriores*
50 *Ese es uno de los procedimientos para encontrar la matriz inversa*

Se observa que el profesor explica todo el procedimiento a los estudiantes, y este conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) se apoya en su conocimiento sobre *propiedades y sus fundamentos* (KoT), relacionado con las propiedades de las matrices, específicamente la conmutatividad de una matriz por su inversa. A continuación citamos una unidad de información donde el profesor hace explícito a sus estudiantes su conocimiento sobre la no conmutatividad del producto de matrices y la conmutatividad de una matriz por su inversa (S6*.99-104, E3.P7[39]).

S6*.99-104

99 *Ahí sí se comprueba que sale la matriz identidad*
100 *Esa comprobación debe salir igualita si aplica la propiedad*
101 *conmutativa, multiplicando así $A^{-1}xA$, invirtiendo los factores debe dar*
102 *lo mismo. Ese producto sí es conmutativo, verá que una de las*
103 *propiedades de la multiplicación de matrices es que no son*
104 *conmutativas, pero en este caso de la matriz inversa sí es conmutativa.*

En la unidad de información se refleja el conocimiento del profesor al expresar que el producto de dos matrices no verifica la propiedad conmutativa, y una excepción es el caso de una matriz cuadrada A de orden n que se dice es regular (invertible) o que tiene inversa si existe otra matriz del mismo orden, llamada A^{-1}, verificando que $AxA^{-1} = A^{-1}xA = I$. A la vez, tanto en esta unidad de información (S6*.99-104) como en la citada anteriormente (S3.8-50) se evidencia el conocimiento del profesor sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT), al referir que de la multiplicación de una matriz por su inversa debe dar como resultado la matriz identidad.

Relacionado a la matriz inversa obtenida por este procedimiento ($AxA^{-1} = I$), encontramos evidencias del conocimiento del profesor sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM), concerniente a errores cometidos por los estudiantes al denotar incorrectamente una matriz (A), su inversa (A^{-1}) y la matriz identidad (I), tal como se observa en la unidad de información que se cita a continuación (S3.53-58).

S3.53-58

53 P: *Errores que no deben cometer*

[39] Unidad de información obtenida en entrevista, ya citada en párrafos anteriores, donde el profesor hace referencia a la conmutatividad del producto de una matriz por su inversa.

54 *Están escribiendo la matriz A ponen igual y escriben todo esto*

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

55 *Esto no es cierto, no es cierto que A es igual a todo eso*
56 *No se trata de escribir signos en cualquier parte*
57 *Lo correcto es que A esta multiplicado por su inversa y que eso es*
58 *igual a la matriz identidad*

$$\begin{array}{cccc} A & A^{-1} & & I \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

59 *Eso sí es cierto*

La unidad de información hace referencia a un momento en la sesión de clases donde el profesor nota que los estudiantes al calcular la matriz inversa con $AxA^{-1} = I$, tienden a llamar "A" a las tres matrices, es decir, a la matriz original, la matriz de las incógnitas que representa la inversa, y a la matriz identidad. Sin embargo, estas son de naturaleza diferente, y advierte a los estudiantes que deben denotar correctamente las tres matrices para evitar el error. Asociamos aquí, el KFLM de Jordy con su conocimiento sobre *registros de representación* (KoT) algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006), por cuanto se refiere a cómo denotar la matriz original, su inversa y la matriz identidad, y a la vez, expresa oralmente dicha notación.

El conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) referido al método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa, también se refleja en sus sesiones de clases. A continuación mostramos la respectiva unidad de información (S5.11-39).

S5.11-39

11 P: *Supongamos que la matriz A es*

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

12 *Esa matriz la escribiránde esta manera (A, I)*

$$(A, I)= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

13 *Si aplicamos operaciones elementales entre filas y en esta parte*
14 *obtenemos la matriz identidad, automáticamente en esta otra parte nos*
15 *va a quedar la matriz inversa de A, entonces hacemos ese proceso, ¿qué*
16 *es lo primero que podemos hacer ahí?, ¿cuál es la primera cosa que*
17 *podíamos hacer?*
18 E: *Debemos hacer 1 el 2*

19 P: *Yo por ejemplo haría esta fila 3 la colocaría en la fila 1, para tener este*
20 *1 como primer elemento, eso es una de las cosas que se puede hacer,*
21 *pero vamos a dejarla ahí*
22 *Entonces, a raíz de este elemento vamos a comenzar a hacer*
23 *ceros el 3 y el 1¿Cómo haría 0 aquí?*
24 E: *Fila 2 por 2 menos 3 fila 1*
25 P: *Ya, procedemos a hacer eso*
26 *Luego* $f_3 \rightarrow 2f_3 - f_1$

$$\begin{array}{l} \\ f_2 \rightarrow 2f_2 - 3f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 - f_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

27 *Ahora, ¿cuál hacemos 0?*
28 E: *El 5*
29 P: *Entonces* f_3 *vamos a reemplazarla por* f_3+5f_2
30 *Como la única fila que va a cambiar es* f_3 *el resto nos queda igualito*

$$\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \rightarrow f_3 + 5f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

31 *¿Siguiente paso?*
32 *Hay que hacer 0 ese -1, entonces* f_1 *lo reemplazamos por* f_1-f_2
33 *Lo de abajo queda igualito*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 - f_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 10 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

34 *Y ahora hay que hacer 0 el 10 y el -7*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 22f_1 + 5f_3 \\ f_2 \rightarrow 44f_2 - 7f_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 44 & 0 & 0 & 8 & 6 & 10 \\ 0 & -44 & 0 & -20 & 18 & -14 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

35 *Ahí, ¿qué es lo que falta hacer?*
36 E: *Hacer 1 cada uno de los elementos de la diagonal*
37 P: *Entonces reemplazamos* f_1 *por* $1/44f_1$*;* f_2 *por* $-1/44f_2$
38 *y* f_3 *la reemplaza por* $-1/44f_3$

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 1/44f_1 \\ f_2 \rightarrow -1/44f_2 \\ f_3 \rightarrow -1/44f_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/11 & 3/22 & 5/22 \\ 0 & 1 & 0 & 5/11 & -9/22 & 7/22 \\ 0 & 0 & 1 & 4/11 & -5/22 & -1/22 \end{array}\right]$$

39 *Entonces, ¿cuál es la matriz inversa de A?*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 3/22 & 5/22 \\ 5/11 & -9/22 & 7/22 \\ 4/11 & -5/22 & -1/22 \end{bmatrix}$$

Sabemos que las operaciones elementales entre filas de una matriz nos permiten generar diversos tipos de cálculos para llegar a obtener una matriz identidad, y en esta unidad de información además, hay que destacar que el conocimiento del profesor no se limita solo al mero procedimiento sino también a que sabe elegir la forma más efectiva del mismo, conoce formas de optimización del proceso, de hacerlo más práctico y más corto, el profesor reflexiona sobre las operaciones posibles y lo hace explícito a los alumnos, por tanto, lo consideramos como un indicio de su conocimiento sobre las *formas de proceder* (KPM) en matemáticas (S5.11-21), ya que al parecer le interesan los procedimientos lo más eficaces posibles, en cuanto a disminuir la dificultad y la posibilidad de error.

Otro procedimiento que maneja Jordy para obtener la matriz inversa y que nuevamente refleja su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) es a través de la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$, (S6.72-84), asociado al cálculo del determinante y a su conocimiento para obtener la matriz de cofactores (S6.34-61) y matriz adjunta (S6.62-64, S6*.80-91).

4.2.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Hemos encontrado conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) al poner en práctica diferentes métodos de cálculo de determinantes, como la regla de Sarrus (S5.105-123, S3*.5-9, S3*.10-15); el método del menor y cofactores (S6.124-140, S7.1-39, S3*.46-65), con la determinación de los signos de estos últimos (S6.15-25, S3*.28-45); y la obtención del determinante con operaciones elementales entre filas y propiedades (S4*.128-134).

Cuando emplea la regla de Sarrus se despliega un conocimiento más algorítmico del procedimiento, tal como se observa en la siguiente unidad de información (S5.105-123).

S5.105-123

105 *Se va a calcular por ejemplo el determinante de esta matriz A*

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

106 *Cuando es 3x3 se pueden hacer 3 cosas, para poder combinar*
107 *elementos de diferentes fila y columna, lo que se suele hacer es*
108 *aumentar las dos primeras filas en el mismo orden y se toman los*
109 *elementos así*

$$|A|= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

110 *Tú te das cuenta que tomas los elementos de una fila y*
111 *columna diferente cada vez. Todos esos productos son sumados, o sea,*
112 *se colocan ahí con el mismo signo*
113 *Cuando multiplicamos en sentido paralelo a la diagonal secundaria ahí*

114 *se resta, se cambia el signo*
115 *Entonces tenemos -12+18-1+6-4-9 = 22*
116 *También se puede hacer, otra cosa que puede hacer usted es que estas*
117 *dos columnas las repite allá y así usted logra fácilmente combinar o*
118 *permutar, siempre un elemento de fila y columna diferente*

$$|A| = \begin{vmatrix} & & - & - & - \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ & & + & + & + \end{vmatrix}$$

119 *Tener en cuenta eso, los productos así se suman y los productos así se*
120 *restan. Los que van paralelos a la diagonal principal se suman, los*
121 *productos de las permutaciones de los elementos que van paralelos a la*
122 *diagonal secundaria se restan*
123 *Y también lo puede hacer directamente*

Se observa su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* referente a la regla de Sarrus para calcular el determinante de una matriz 3x3, teniendo en cuenta que es posible hacerlo, ya sea aumentando dos filas o dos columnas. Dicho conocimiento sobre procedimientos también se pone de manifiesto cuando utiliza el método del menor y cofactores para calcular el determinante de una matriz 3x3 (S6.135-140, S7.1-39). Como ejemplo citamos la unidad de información S7.1-39.

S7.1-39

1 P: *Ahora interesa que se maneje bien las operaciones elementales entre*
2 *filas. Estamos ahora calculando el determinante utilizando cofactores,*
3 *entonces para los que llegaron recién, para que se igualen en lo que*
4 *estamos trabajando, tenemos aquí un determinante, vamos a calcularlo*
5 *utilizando el método de cofactores.*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

6 *Tomamos una fila o una columna cualquiera, entonces cada cofactor*
7 *tiene su signo, aquí sabemos que es signo positivo,*
8 *multiplicamos + por + da + 3 y esto*
9 *multiplicado por el determinante del menor. Igual con el 5 sabemos que*
10 *aquí en la matriz de los signos tenemos signo negativo, entonces – por –*
11 *da +, luego colocamos aquí el determinante del menor. Aquí tiene signo*
12 *positivo entonces + por + da +, como es 1 no hace falta colocarlo,*
13 *luego resolvemos cada uno de los determinantes*

$$= 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

14 *¿Qué ocurriría si fuesen 0 el -5 y el 3? Esto se reduciría a 0, entonces*
15 *una forma de trabajar o de aprovechar las operaciones elementales*
16 *entre filas aplicando las propiedades de los determinantes, eso usted lo*
17 *debe de haber consultado, cuando tú aplicas en un determinante las*
18 *operaciones entre filas, la tercera y la cuarta,*

19 *que le sumas el producto de un escalar por una fila a otra fila*
20 *cualquiera, el determinante no cambia su valor. Entonces vamos a*
21 *aplicar eso para hacer 0 a este -5 y al 3, ya vamos a ver qué ocurre*
22 *Aplico operaciones elementales entre filas para hacer 0, utilicemos este*
23 *número como pivote y con esa fila hagamos 0 al -5 y al 3, a ver cómo*
24 *Queda*
25 *Entonces, ¿con qué remplazamos la fila 1? Para hacer 0 al 3*
26 *¿Y la fila 2?*

$$\begin{array}{r} f_1 \rightarrow f_1 - 3f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + 5f_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -8 & 22 \\ 0 & 7 & -33 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

27 *Entonces aplicando el mismo concepto utilizamos la primera columna,*
28 *como este elemento es 0 al multiplicarlo*
29 *por cualquier determinante va a dar 0, o sea sería así*

$$= 0 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} -1 & 22 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -33 \end{vmatrix}$$

30 *Nos damos cuenta fácilmente, que esto ¿cuánto va a dar?,*
31 *esto va a dar 0 porque tenemos un factor 0 y el único valor que hay aquí*
32 *diferente de 0 sería ese entonces vea usted que sale lo mismo*
33 *Aquí estamos utilizando los cofactores.*
34 *Aquí estamos utilizando operaciones elementales entre filas y*
35 *cofactores, esto de aquí es necesario, podemos utilizarlo si tenemos*
36 *determinantes de orden 4, 5. Logramos hacer 0 una fila o una columna*
37 *y vamos reduciendo el tamaño, de hecho cuando trabaja con*
38 *determinantes de 5x5 o 7x7 lo que se hace es reducir hasta 3x3 y de ahí*
39 *ya se resuelve de las otras maneras*

Como vemos, el profesor conoce el procedimiento para llevar a cabo el determinante de un matriz por el método del menor y cofactores, especificando a los estudiantes que se puede efectuar el procedimiento ya sea a partir de una fila o una columna. En la unidad de información vemos además, un indicio del conocimiento del profesor sobre *formas de proceder* (KPM), ya que especifica que a través de operaciones elementales entre filas se puedan transformar los elementos de una fila o columna en ceros, dejando como pivote el uno, esto como un modo de hacer más práctico y efectivo el procedimiento. Otra unidad de información que también presenta indicios del conocimiento del profesor sobre *formas de proceder* características del trabajo matemático y relacionada con optimizar el trabajo de los estudiantes cuando se aplica este mismo método para calcular el determinante es la que citamos a continuación (S4*.224-239), donde Jordy sugiere a los alumnos que a través de operaciones elementales entre filas se transformen en cero los elementos de una fila, quedando solamente un número diferente de cero o pivote.

S4*.224-239

224 P: *Vamos a suponer que tenemos este determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Hay muchos 0 ahí entonces va usted a ir combinando el método de aplicar las operaciones elementales entre filas y el método del cofactor. Entonces aquí lo importante va a ser que usted en cada fila tenga solamente un número y el resto sean ceros. Lo importante aquí es que usted en cada fila tenga solamente un número y el resto sean ceros Se sugiere que siempre tome un 1 como pivote, este es el método del pivote, en donde esté ubicado el 1, porque con el 1 tú lo multiplicas por cualquier número, se lo sumas a otra fila y el determinante no cambia. Si escoge otro número que no sea un 1 te va a cambiar al final. Entonces en este método se sugiere que siempre tomes como pivote un 1 y si no tienes un 1 lo hagas multiplicando por un número fraccionario

E: *O sea que estoy obligado a hacer un 1*

P: *No obligado, pero es preferible para trabajar con números más pequeños. Si tienes un 1 con ese trabajas.*

Aquí también se percibe un indicio del conocimiento del profesor que le permite sugerir a los estudiantes *formas de proceder* con este determinante para hacer más efectivo su proceso de cálculo. Citamos finalmente una unidad de información donde el profesor invita al estudiante a observar los elementos de una matriz 4x4 de la que pretende calcular el determinante por el método del menor y cofactores (S3*.74-85).

S3*.74-85

P: *Si nuestra matriz fuera 4x4, una matriz B*

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces así mismo se toma la fila o la columna que cada uno considere pero aquí hay un caso interesante. Ahí está un 0, ese 0 nos ayuda a disminuir el grado de dificultad porque siempre vas a multiplicar el determinante de la submatriz que te va quedando por el valor del elemento que tomes en consideración, entonces conviene siempre tomar una fila o una columna donde haya 0 o donde haya muchos 1. ¿Cuál fila o cuál columna nos convendría tomar?

E: *Fila 1ó columna 2*

P: *Fila 1ó columna 2 porque hay un elemento que nos facilita las operaciones, vamos a utilizar la segunda columna para calcular el determinante de B, no se olvide de los signos de los cofactores.*

Creemos que existe un indicio del conocimiento de las *formas de proceder* (KPM) del profesor en esta unidad de información al justificar porqué escoger una fila o columna que tenga ceros o unos, lo cual está relacionado con disminuir el grado de dificultad del procedimiento para calcular el determinante.

Dicho indicio de conocimiento del profesor sobre las *formas de proceder* (KPM) evidenciado en estas últimas tres unidades de información (S7.1-39, S4*224-239 y S3*74-85), así como en otras (S6.124-140, S7.40-51 y S7.103-111), le permite al profesor exhortar a los estudiantes a aplicar el método del menor y cofactores para calcular el determinante de una matriz, procurando optimizar los procedimientos, buscando la forma más eficiente y práctica para disminuir la dificultad de las operaciones que estos conllevan y evitar la posibilidad de errores en las mismas.

Además, en las clases de Jordy relacionadas con el cálculo del determinante, se observa que introduce intencionadamente ejercicios con distintas características, por tanto, relacionamos los indicios de KPM con su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT) relativo a la variabilidad de *ejemplos para la enseñanza,* que en este caso le sirven para destacar diferentes posibilidades de solución de los determinantes. Así presenta determinantes de orden, tres, cuatro y cinco a sus estudiantes. Citamos a continuación un ejemplo relacionado con un determinante de orden cinco (S7.40-51).

S7.40-51

40 P: *Vamos a poner un determinante un poco mayor, o sea, siempre es*
41 *recomendable en este caso tomar la fila o la columna donde hayan*
42 *ceros, porque ya sabes que el cero multiplicado por cualquier*
43 *determinante va a dar cero. Consideremos por ejemplo este*
44 *determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

45 *Tenemos 5 filas, 5 columnas, entonces vamos a aplicar ahí las*
46 *operaciones entre filas para ir reduciendo. Si al determinante le aplica*
47 *operaciones elementales entre filas, no cambia su valor. ¿Qué fila o*
48 *columna nos conviene revisar? Puede ser la fila 4, puede ser la columna*
49 *3 o puede ser la columna 5 que tiene un 1, también el 1 siempre nos*
50 *ayuda porque eso no altera mayor cosa el valor. Entonces vamos a*
51 *utilizar la quinta columna y vamos a trabajar como pivote el número 1.*

El conocimiento del profesor sobre la variabilidad de *ejemplos para la enseñanza* (KMT) se percibe por tanto, cuando trabaja con el método del menor y cofactores o aplicando operaciones elementales entre filas y propiedades para calcular el determinante, lo cual relacionamos con las *dimensiones de variación posibles* (Watson & Mason, 2005) para destacar aquellos aspectos que pueden variar o modificarse en un ejemplo, sin que deje de ser un ejemplo del tema en cuestión.

Cuando el profesor expone en sus clases cómo calcular el determinante de una matriz a través del empleo de sus propiedades y operaciones elementales entre filas se evidencia su conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT), citamos a continuación la respectiva unidad de información (S4*.183-185).

S4*.183-185

183 P: *Esto es utilizando las propiedades combinadas con operaciones*
184 *elementales entre filas. Puede calcular determinantes de cualquier*
185 *orden por ese método.*

El conocimiento del profesor sobre diferentes procedimientos para calcular el determinante de una matriz se ve complementado con su conocimiento sobre cuándo es conveniente aplicar uno u otro método, como en el caso que se muestra en la unidad de información, es decir, el utilizar propiedades de los determinantes y operaciones elementales entre filas para calcular determinantes de orden superior. El conocimiento del profesor sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) se manifiesta dentro de un contexto matemático fundamentalmente, así expresa la aplicación de los determinantes en otros contenidos matemáticos, tal como se observa en la unidad de información que citamos a continuación (S5.48-53).

S5.48-53

48 P: *A partir de una matriz se puede hacer permutaciones con los números,*
49 *puede ir tomando un elemento de diferente fila, diferente columna, y*
50 *multiplicarlos entre sí y en base a eso podemos calcular lo que se llama*
51 *el determinante de una matriz. Eso también nos va a servir para*
52 *resolver sistemas de ecuaciones y para otras aplicaciones, para*
53 *encontrar la inversa inclusive.*

El profesor conoce la aplicación del determinante en otros temas matemáticos, como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer) y cálculo de la matriz inversa.

En la unidad de información percibimos también, el conocimiento de Jordy sobre *definiciones* (KoT), en este caso, al expresar la definición de determinante de una matriz. Dicho conocimiento de Jordy sobre las definiciones viene acompañado de un lenguaje formal, como el caso del determinante, y otras, mediante un lenguaje coloquial, sobre todo cuando considera conveniente dar definiciones sobre la marcha de sus explicaciones.

Entre las *definiciones* (KoT) cuyo conocimiento surge sobre la marcha de las explicaciones del profesor están las de menor y cofactor de una matriz (S6.1-10, S3*.21-23, S6.31-33, S5*.306-321). Citamos a continuación una unidad de información, donde el profesor interrumpe la exposición que hace un estudiante sobre el cálculo del determinante por el método del menor y cofactores para aclarar al resto de la clase las definiciones de menor y cofactor de una matriz (S5*.306-321).

S5*.306-321

306 P: *A ver, aclaremos bien lo que es un cofactor y lo que es el menor porque*
307 *ahí estás diciendo cosas que no son ciertas, lea bien lo que es el cofactor*
308 *y lo que es el menor.*
309 E: *Este es el cofactor.*
310 P: *Los cofactores son cada uno de los que están en el recuadro y con su*
311 *signo.*
312 E: *Aquí tenemos en la parte de arriba los signos*
313 P: *¿De dónde salen esos signos? ¿Si se acuerda? Con la suma de los*
314 *subíndices. Si la suma es par es positivo el cofactor, si la suma es impar*
315 *es negativo. ¿Qué es el menor entonces?*
316 E: *Es el determinante de lo que vamos a sacar ahora*
317 P: *¿Cómo sacas el menor del 4?*
318 E: *Se elimina la fila y la columna de donde está ubicado el 4*
319 P: *Exacto ese es el menor, esa es la explicación que tenemos que dar,*
320 *cuando tomas el 4 eliminas la columna del 4 y la fila del 4 y los números*
321 *que te quedan fuera de eso, ahí está el menor*

Como se observa, en la unidad de información, se pone en evidencia el conocimiento del profesor sobre las *definiciones* (KoT) de menor y cofactor, sin embargo, estas no son muy elaboradas y se dan a conocer a través de un lenguaje más informal. De esta misma manera se evidencia su conocimiento sobre las *definiciones* (KoT) de combinación lineal (S4*.22-28) y la de pivote (S4*.138-141), al abordar las propiedades de los determinantes.

Con respecto al conocimiento de Jordy sobre *propiedades y sus fundamentos* (KoT), ya hemos mencionado aquel relacionado con las propiedades de los determinantes. Observamos en sus clases que se trata de un conocimiento fundamentado, ya que no sólo cita de manera textual una propiedad, sino que más bien, dicho conocimiento le permite resaltar las características de cada propiedad apoyándose en diversos ejemplos (S7.14-24, S7.81-83, S7.156-165, S4*.3-114), así como las variaciones que podrían darse en una u otra propiedad. Por ejemplo, citamos a continuación una unidad de información donde el profesor muestra conocer la propiedad que indica que "si en un determinante se cambian entre sí dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo" (S7.156-165).

S7.156-165

156 P: *¿qué pasa por ejemplo con este determinante?*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

157 *Si yo pongo la fila primera como*
158 *segunda y la segunda como primera, ¿qué pasó?, cambió el signo, o*
159 *sea, aquí sí afecta el cambiar una fila por otra, si yo cambio una fila por*
160 *otra la consecuencia es que cambia el signo del determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

161 *¿Qué pasa si tengo?*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

162 *Si cambias el orden, un par de columnas, cambia también el signo del*
163 *determinante. Insisto yo que no es lo mismo que en las matrices, en los*
164 *determinantes sí tiene importancia el cambio ese, cambia el signo*
165 *simplemente.*

Se observa que Jordy conoce las características de la propiedad, lo que le permite mostrar al estudiante que el determinante cambia de signo si se intercambian ya sean dos filas o dos columnas del mismo, y a su vez, indirectamente, aunque no lo dice textualmente, se evidencia su conocimiento de que son propiedades diferentes a las de las matrices, ya que en el caso de estas, si se intercambien dos filas o dos columnas siguen siendo equivalentes.

Otro ejemplo que citamos del conocimiento del profesor sobre *propiedades y sus fundamento*s (KoT) es aquel relacionado con la propiedad que indica que "si a los elementos de una fila o columna le sumamos los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía". A continuación presentamos la unidad de información donde el profesor hace referencia a dicha propiedad (S4*.84-101).

S4*.84-101

84 P: *A ver con este mismo determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

85 *¿Qué ocurre si la fila dos la reemplazamos por 3 fila 2 menos fila 1?*
86 E: *Sale 33*
87 P: *¿Seguro?*
88 *Te va a salir lo mismo si utilizas esta*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

89 *o esta*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

90 E: *El resultado es tres veces el determinante anterior*
91 P: *El resultado es el triple ¿Por qué será?*
92 E: *Porque multiplicó por tres la fila 2*
93 E: *Porque hemos multiplicado por tres la fila que vamos a cambiar.*
94 P: *Eso, aquí no cambió para nada el determinante porque la fila que*
95 *íbamos a modificar la hemos multiplicado por 1*
96 *En cambio acá la fila que vamos a modificar la multiplicamos por 3, en*
97 *ese momento ¿qué le pasa al determinante?, queda multiplicado por 3*

$$f_2 \rightarrow 3f_2 - f_1 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} \quad = 33/3 = 11$$

98 *Entonces cuando haga usted este tipo de operaciones acuérdese al final*
99 *que debe dividir por 3. Cuando usted multiplica la línea que va a*
100 *modificar, el determinante queda multiplicado por ese número; entonces*
101 *al final hay que dividir el determinante para ese número.*

Se observa que su conocimiento le permite no solo enunciar la propiedad con su ejemplo, sino también indicar a sus estudiantes detalles importantes de la misma, como en este caso donde si el número real se multiplica por la fila o columna que se va a modificar, el valor del determinante es aquel dividido para el mismo número real, lo cual es necesario tomar en cuenta para evitar un resultado falso del valor del determinante.

El profesor evidencia además, conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT) (S5.72-77, S3*.16), cuando explica de qué tipo es el resultado que se obtiene al calcular un determinante, tal como se muestra en la siguiente unidad de información (S5.72-77).

S5.72-77

72 *En el momento que calculamos el determinante ya no se lo coloca de*
73 *esa forma, yo voy a calcular el determinante de la matriz A,*
74 *entonces aquí en vez de paréntesis hay que colocar barras*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

75 *Eso significa que es de la misma matriz pero yo voy a calcular*
76 *el determinante de esa matriz y el determinante de esa matriz es*
77 *siempre un escalar, no es otra matriz*

Como vemos, el conocimiento de Jordy sobre *características del resultado* sale a relucir cuando hace explícito a sus estudiantes que a diferencia de las matrices, como determinante se obtiene siempre un escalar.

Con relación a los *registros de representación* (KoT), se evidencia un conocimiento de la notación de objetos matemáticos, con el registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) para el caso de las operaciones elementales entre filas y el determinante y menor de una matriz (S5.71-78, S6.39-41, S6*.46-49); y el registro verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006), al expresar oralmente las mencionadas operaciones elementales. El profesor recalca la importancia del uso correcto de los *registros de representación*, que nos lleva a pensar en indicios de conocimiento de la práctica matemática (KPM) relativo al papel de la notación matemática. Citamos como ejemplo una unidad de información donde el profesor se refiere a los signos matemáticos, en este caso, a aquellos que distinguen el valor absoluto, una matriz y un determinante (S6*.38-49).

S6*.38-49

38 P: *Hay que tener cuidado cuando escribimos en la pizarra y no*
39 *poner signos y rayas en cualquier parte porque hay algunos signos*
40 *en matemáticas que tienen significado, entonces tú pones ahí un par de*
41 *barras en el resultado, lo que hizo usted y eso significa valor*
42 *absoluto, entonces ese número que decía ahí -2 entre esas barras*
43 *si es valor absoluto vale 2, porque el valor absoluto siempre es*
44 *positivo, entonces coloque los símbolos donde deben colocarse.*
45 *Si va a calcular el determinante no le ponga paréntesis, hay que*
46 *poner barras. Ahí como está eso es una matriz, pero si va a calcular*
47 *el determinante hay que poner barras en lugar del corchete, tengamos*
48 *eso con cuidado para tener claro los conceptos, sino usted se confunde*
49 *y confunde al resto.*

Pensamos en indicios de su conocimiento sobre el papel de la notación matemática por cuanto el profesor al darse cuenta de que un estudiante escribe el valor del determinante entre dos barras verticales, advierte a toda la clase que los signos matemáticos tienen un significado y que dejarlo así es incorrecto por cuanto esa notación equivale al valor absoluto de un número. Existe un indicio de conocimiento sobre el papel de la notación de objetos matemáticos, cuando el profesor promueve el uso correcto de la misma, es decir, busca el rigor, la precisión, y que el estudiante note la importancia de diferenciar la notación matemática, exhortándolo a que sea cuidadoso a la hora de escribir los signos matemáticos, recordándoles que el determinante debe denotarse con barras y una matriz con paréntesis o corchetes.

El conocimiento sobre las *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM) también se hace recurrente cuando el profesor aborda los determinantes, por un lado referido a la advertencia que hace Jordy a sus estudiantes sobre los posibles errores que considera que pueden cometer relacionados con la notación, por ejemplo: diferenciar una matriz de un determinante (S4*.118-119).

Por otro lado, aquellas advertencias sobre los errores en la aplicación de procedimientos y propiedades para obtener determinantes(S3*.97-99).Por ejemplo, el profesor conoce que: cuando se calcula el determinante por la regla de Sarrus o por el método del menor y cofactores, para los estudiantes es común confundir el signo de los productos porque pueden olvidar que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan (S5.119-122, S3*.55-56); los estudiantes pueden equivocarse al resolver la multiplicación de un escalar por un determinante, aplicando el mismo procedimiento que cuando se multiplica un escalar por una matriz, por eso les advierte de que es diferente (S6.128-132, S7.73-90); pueden cometer errores al intercambiar filas en el cálculo de un determinante, pensando en su equivalencia como en el caso de una matriz, sin embargo, en un determinante es distinto porque el intercambio hará que su valor cambie de signo (S7.162-165, S4*.56-59, S4*.115-117) [el profesor es cuidadoso en hacer ver a los estudiantes que si han multiplicado por un escalar la fila que van a cambiar no deberán olvidar dividir el determinante obtenido para el mismo escalar y así, encontrarán el determinante real (S4*.99-101)].

Como ejemplo de su conocimiento sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM) citamos a continuación la unidad de información donde el profesor hace ver a los estudiantes que no es lo mismo multiplicar un escalar por un determinante, que un escalar por una matriz (S7.73-90); asociamos aquí el conocimiento de Jordy sobre un posible error en el cual los estudiantes pueden incurrir cuando aplican esta propiedad.

S7.73-90

73 P: *Si hay un escalar aquí, como el que estamos colocando allí, entonces*
74 *este dos iría en esta parte*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8 + 3) = 2(11) = 22$$

75 *Entonces ¿qué significa este 2 que está allí?*
76 *Ese 2 afecta no como en las matrices que afectaba a todos los elementos,*

afecta solamente a una fila o a una columna. Por ejemplo: si yo quisiera multiplicar este escalar por el determinante, multiplicamos por la primera fila y colocamos 4 y -2, la otra fila queda igualita, entonces resolviendo esto 16 +6 = 22

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6 = 22$$

Anote bien eso, un escalar al multiplicarse por un determinante, ese escalar solo multiplica a una fila o a una columna, o sea, no a todos los elementos, esa es una de las propiedades también. Entonces ¿qué puede hacer aquí en este caso? Puedo sacar el factor común, si yo saco factor común de una fila, lo pongo aquí como factor del determinante y regreso a lo que tenía al principio

$$2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

O sea, yo puedo sacar un factor común de una sola fila y lo coloco como cofactor del determinante

Esa es una cosa importante que hay que saber, no es lo mismo trabajar con determinantes que trabajar con matrices

Por sus explicaciones evidenciamos que el profesor tiene conocimiento de los errores que suelen cometer los estudiantes con relación a los determinantes, siendo algunos de ellos considerados como errores habituales de los estudiantes (por ejemplo, no tomar en cuenta que al aplicar la regla de Sarrus, los productos de la diagonal secundaria se restan); y otros errores, son el resultado de generalizar procedimientos sobre otros objetos matemáticos relacionados como las matrices (por ejemplo, multiplicar un escalar por un determinante tal como se multiplica un escalar por una matriz).

Este tipo de errores ha sido constatado en investigaciones como la de Ferro (2011), quien detectó que cuando se trata de matrices y determinantes los estudiantes tienen dificultad a la hora de utilizar notación adecuada y aplican incorrectamente las propiedades de los determinantes. Por su parte, Barros et al. (2013) incluyen este tipo de errores en la categoría *recurrir a propiedades no válidas*, indicando que los alumnos recurren a propiedades que parecen ser una adaptación de varias propiedades válidas en otros contextos, y al parecer es esto lo que ocurre, ya que los estudiantes intentan aplicar propiedades válidas para las matrices en los determinantes, llegando a cometer errores en los procedimientos. Hurman (2007), también encontró que los alumnos universitarios cometen errores como el no tener en cuenta la característica de los entes con que están operando y siguen trabajando con los determinantes como si fueran matrices (ver análisis cognitivo).

Cuando el profesor aborda el tema de sistemas de ecuaciones lineales evidencia conocimiento sobre *definiciones* (KoT) de sistemas equivalentes, tal como se muestra en la siguiente unidad de información (S1*.104-106).

S1*.104-106

P: *La segunda fila queda igualita y tengo otro sistema equivalente a los anteriores, entre ellos son equivalentes porque han sido producto de combinaciones entre sus filas, sus ecuaciones en este caso.*

La unidad de información corresponde a un pequeño extracto de una sesión de clases donde Jordy resuelve sistemas de ecuaciones lineales con operaciones elementales entre filas, y sale a relucir su conocimiento sobre la equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales a medida que éstos se reducen.

Así mismo, observamos conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT) cuando el profesor muestra a los estudiantes dos sistemas de ecuaciones lineales en forma de matriz con sus soluciones, uno compatible determinado (matriz A y su canónica, S4.121-156, ya citada en párrafos previos) y otro compatible indeterminado (matriz B y su canónica, S4.175-208). Esto lo hace para que los alumnos se fijen en las soluciones de dichos sistemas (además de la utilidad de las operaciones elementales entre filas para resolverlos, que ya se mencionó anteriormente). Ejemplificamos dicho conocimiento del profesor con la siguiente unidad de información (S4.175-208).

S4.175-208

P: *Ahora tiene como ejemplo la matriz B y su canónica en la pizarra*

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Quiero que nos centremos en la matriz B, ¿qué ocurre ahí? Al llevarlo a la forma canónica obtenemos esto ¿cuál sería el sistema original?

$y + 3z = -2;\ 2x + y - 4z = 3;\ 2x + 3y + 2z = -1$

Eso ¿a qué se ha reducido? Hemos tenido al final lo siguiente:

$x - 7/2z = 5/2;\ y + 3z = -2$

¿Qué pasa aquí? Aquí tengo más variables que ecuaciones en la matriz ya reducida a la forma canónica, tengo 3 incógnitas y tengo dos ecuaciones. Cuando ocurre eso, en ese momento el sistema tiene un número ilimitado de soluciones.

En ese caso aquí hay la x y la y que son la primera variable de cada una de las ecuaciones pero hay este 3 que es el coeficiente de z que no es primer elemento de ninguna fila, a ese se le llama variable libre, entonces la z en este caso es una variable libre, porque no es primer elemento de ninguna ecuación. La x y la y no son variables libres porque son los primeros elementos, el uno en la primera ecuación, el otro en la

segunda, pero la z no es primer elemento de ninguna fila, entonces a esa
se le llama variable libre. Entonces ¿cuál es el asunto? ¿qué es lo que
puede pasar aquí? Que para resolver este sistema uno puede darle a z el
valor que quiera. Por ejemplo, si usted a z le otorga el valor de 0, ¿qué
pasa para y', y valdrá cuánto?
E: *-2*
P: *y valdrá -2*
¿y cuánto valdrá x?
E: *5/2*
P: *Si le doy un valor arbitrario a z como lo hice ahora, una solución del*
sistema será (5/2, -2, 0), esa es una solución, quiero encontrar otra,
¿qué debo hacer?
E: *Otro valor a z*
P: *Otro ejemplo cuando z=1. Otra solución es (6, -5, 1)*
¿Cuántas soluciones tendrá ese sistema?
E: *Infinito*
P: *Infinito*
Eso pasa cuando hay más variables que ecuaciones

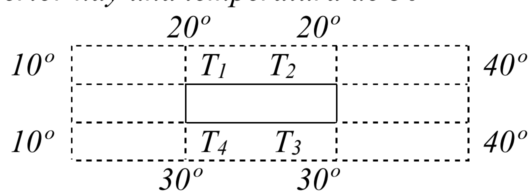
En esta unidad de información, Jordy presenta una matriz y su canónica, explicando que, en este caso, la solución del sistema de ecuaciones lineales representada por la matriz canónica indica que tiene un número ilimitado de soluciones, evidenciando su conocimiento sobre las *características del resultado* cuando le da diferentes valores a la variable libre, demostrando que se trata de un sistema compatible indeterminado. Pensamos que el mostrar a los estudiantes las características de los resultados de dos sistemas de ecuaciones lineales, siendo uno compatible determinando (S4.121-156), y otro compatible indeterminado (S4.175-208), evidencia el conocimiento del profesor sobre *ejemplos para la enseñanza* (KMT), por cuanto es cuidadoso en detallar cada ejemplo y las diferencias en las soluciones de ambos. Además, se refleja el conocimiento del profesor sobre *registros de representación* (KoT) algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al representar la matriz de coeficientes y la matriz aumentada, cuando trabaja con estos sistemas de ecuaciones compatibles, ya sea determinados o indeterminados (S4.131-135).

En relación con las operaciones elementales entre filas se aprecia el conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿Cómo se hace?* (KoT) al tratar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales como el de Gauss-Jordan (canónica de Jordan) (S2*.5-59), y la regla de Cramer (S5.85-101, S5.127-139, S5*.204-210).

Como ya hemos dicho anteriormente, Jordy evidencia conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las operaciones elementales entre filas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (S1*.51-61) y determinantes. A su vez, y aunque de forma escasa, además, se refleja este mismo conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* de los sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de ejercicios relacionados con situaciones cotidianas de la vida real (S2*.117-146, S5*228-282). En este caso, citamos como ejemplo la situación referida a un problema donde se debe determinar la temperatura de los cuatro nodos de una placa metálica, para lo cual el profesor expone con detalles los datos del problema, y solicita a los estudiantes plantear el sistema de ecuaciones lineales correspondiente y resolverlo con operaciones elementales entre filas (Gauss-Jordan), tal como se muestra a continuación (S2*.117-146).

S2*.117-146

117 P: *Ahora dibujemos la placa, esta es metálica delgada y no recibe mayor*
118 *temperatura perpendicular, o sea es una placa en el piso que no recibe*
119 *mayor temperatura perpendicular y está sostenida en una malla*
120 *metálica. Los 4 nodos a los que hace alusión son estos 4 puntos de*
121 *intersección del medio. Tenemos T1, T2, T3 y T4, entonces dice que la*
122 *temperatura en estos sitios es el promedio de los 4 nodos más cercanos y*
123 *nos da la temperatura en los bordes. Por este lado tenemos una*
124 *temperatura de 10º, por este borde de aquí arriba tenemos una*
125 *temperatura de 20º; por el lado derecho hay una temperatura de 40º y*
126 *en el lado inferior hay una temperatura de 30º*



127 *Entonces hay que plantear 4 ecuaciones, una para T1, una para T2,*
128 *para T3 y T4. Te salen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, es un sistema, esa*
129 *es la primera cosa que hay que hacer; resolverlo es encontrar la*
130 *temperatura en cada nodo.*
131 *Lo vamos a hacer aplicando operaciones elementales entre filas*
132 *Si T1 es esto, la temperatura en cada nodo es el promedio de los 4 nodos*
133 *más cercanos, ¿cómo saco el promedio?*
134 E: *Los sumo y lo divido para 4*
135 P: *Eso, entonces para el T1 ¿cuáles son los 4 nodos más cercanos?*
136 *izquierda-arriba-derecha-abajo*
137 *T1= 10+20+T2+T4 / 4*
138 *Lo sumo y lo divido para 4*
139 *¿Qué hago con este 4?*
140 E: *Pasa a multiplicar*
141 P: *Pasa a multiplicar a T1*
142 *4T1 = 30+T2+T4*
143 *4T1-T2 -T4=30*

144 *Eso es una ecuación. Escriban el sistema. Cuando lo tengan me dicen*
145 *Para T2 es lo mismo izquierda-arriba-derecha-abajo, suma las cuatro y*
146 *divide para 4*

Como vemos, la unidad de información muestra que el profesor conoce que aplicando sistemas de ecuaciones lineales es posible encontrar la solución del problema, usando para ello las operaciones elementales entre filas. Además, cuando el profesor expresa el enunciado del ejercicio de aplicación (a manera de problema) y sus ecuaciones (coeficientes y variables) pone de manifiesto su conocimiento sobre el *registro de representación* (KoT) verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006), entendido como la expresión oral de un sistema de representación simbólico (ver análisis de contenido).

La pulcritud del trabajo del profesor con las operaciones elementales entre filas y su afán de que los estudiantes estén concentrados y atentos cuando las realizan nos conducen a determinar un conocimiento sobre las *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM), lo cual fue expresado en una entrevista (E4.P4) cuando se le preguntó cuáles eran las dificultades recurrentes en el aprendizaje del contenido de matrices. Citamos la respuesta a continuación.

E4.P4: *Lo que se les hace más complicado es que hay que usar procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones, la cuestión de la aplicación de las operaciones entre filas suele representar una dificultad pero a más de eso, es que allí un pequeño error les lleva a no poder resolver un ejercicio. Yo creo que eso es lo que más se les complica.*

Esta respuesta corrobora que el profesor, de acuerdo a su experiencia, conoce que el manejo de las operaciones elementales entre filas suele representar una dificultad para los estudiantes.

Por otro lado, pensamos en indicios del conocimiento de Jordy sobre las *formas de proceder* (KPM) en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales cuando con la finalidad de simplificar las operaciones elementales entre filas cambia el orden de las ecuaciones para utilizar el 1 (si hubiere) como pivote, tal como se muestra en la siguiente unidad de información (S1*.115-131).

S1*.115-131

115 P: *Una sugerencia, en caso de que hubiera en una de las dos ecuaciones*
116 *Un uno, si estuviera en la segunda fila se la puede cambiar también.*

117 *Tiene ahora este otro sistema 5x-3y=-1; x+4y=3*
118 *¿Qué es lo primero que se puede hacer ahí?*
119 E: *Cambiar las filas*
120 P: *¿Por qué conviene cambiar las filas, la primera por la segunda?*
121 E: *Porque en la segunda ecuación la x tiene coeficiente 1*
122 P: *Entonces nos conviene que el 1 esté al inicio. La fila 1 la vamos a*
123 *intercambiar con la fila 2*

$$\begin{array}{ll} & 5x-3y=-1 \\ & x+4y=3 \\ \hline f_1 \to f_2 & x+4y=3 \\ & 5x-3y=-1 \end{array}$$

124 *y nos queda el sistema que también es equivalente al primero*
125 E: *En esos casos entonces cuando hay coeficiente 1 se cambia, ¿si tuviera*
126 *por ejemplo un 3 queda igual?*
127 P: *Ahí no conviene, tiene que buscar la conveniencia suya para poder*
128 *Operar*
129 E: *Pero cuando el 1 está solamente en la segunda ecuación, ¿si estuviera*
130 *en la primera ya no?*
131 P: *Si está en la primera fila ya lo dejas ahí.*

En la unidad de información se aprecia que aunque el profesor pudiera aplicar directamente las operaciones elementales entre filas para resolver el sistema de ecuaciones lineales, recurre a su conocimiento sobre *formas de proceder* indicando que es conveniente cambiar el orden de las ecuaciones para trabajar con el 1 como pivote, con la finalidad de que estos vean que así es más fácil operar y llegar a la solución.

Este mismo indicio de conocimiento (*formas de proceder*-KPM) se presenta cuando indica a los estudiantes que deberán tomar en cuenta que el pivote sea un número diferente de cero, caso contrario hay que cambiar el orden de las ecuaciones (filas) (S2*.60-67).

S2*.60-67

60 P: *Suponga que por ejemplo aquí tuviese un 0* (refiriéndose al 3x), *una de*
61 *las operaciones sería cambiar esta ecuación porque aquí arriba debe*
62 *haber un número que no sea 0 para poder hacer 0 al resto. Eso también*
63 *se puede hacer. Usted toma como pivote un número de la x, después que*
64 *tiene 0 toma como pivote un coeficiente de y, así mismo uno de z*
65 E: *¿El procedimiento es independiente cuando hay incógnitas con 0?*
66 *¿O sea siempre va a ser el mismo no importa que haya 0?*
67 P: *Claro, si son dos, tres, cuatro o cinco incógnitas es el mismo.*

En esta unidad de información se observa cómo Jordy intenta que los estudiantes noten una situación que puede darse en la resolución de estos sistemas (que el cero sea el primer coeficiente de la primera ecuación del sistema), con lo cual deberán intercambiar las ecuaciones porque el pivote debe ser siempre un número diferente de cero. Estas prácticas nos llevan a pensar en indicios de conocimiento de la práctica matemática, por cuanto en el conocimiento del profesor sobre cómo se desarrollan las matemáticas interesan los procedimientos más efectivos, los más cortos, aquellos que lleven a menor dificultad, intentando siempre abarcar la exhaustividad de los casos.

4.2.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Jordy sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

A continuación presentamos la Figura 15, donde se integra de forma minuciosa el conocimiento de Jordy en cada uno de los subdominios evidenciados en el análisis de las sesiones de clases. En dicha figura, cada una de las categorías de los subdominios evidenciados en el análisis se representan con una forma (figura) y un color; así mismo, el conocimiento en sí lo hemos escrito en un rectángulo, identificando si se trata de evidencias obtenidas durante el primer o segundo año de observaciones de la práctica del profesor, o durante ambos años.

De las matrices conoce los registros de representación, sus tipos y definiciones, de las cuales pone especial énfasis en las matrices escalonada, canónica e inversa. De la matriz escalonada registramos conocimiento de definiciones, procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado), fenomenología y aplicaciones, ejemplos para la enseñanza y errores de los estudiantes. De la matriz canónica conoce su definición y procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado).De la matriz inversa se observa que conoce los procedimientos (¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer? y características del resultado). Además, este conocimiento sobre varios procedimientos para encontrar la inversa de una matriz pone en evidencia a su vez, conocimiento sobre definiciones (de igualdad de matrices), propiedades y sus fundamentos (conmutatividad de una matriz por su inversa), errores de los estudiantes e indicios de formas de proceder en matemáticas.

Cuando aborda las operaciones con matrices se refleja su conocimiento sobre registros de representación. De la suma conoce los procedimientos (¿cómo se hace? y ¿cuándo se puede hacer?), propiedades y sus fundamentos (conmutativa, asociativa, matriz nula e inverso aditivo), y ejemplos para la enseñanza. Del producto de un escalar por una matriz se observó conocimiento sobre el procedimiento (¿cómo se hace?), errores de los estudiantes, y ejemplos para la enseñanza. Del producto de dos matrices se registra conocimiento sobre los procedimientos (¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer? y características del resultado), propiedades y sus fundamentos (no conmutatividad y una excepción), y errores de los estudiantes. De la potencia de matrices conoce el procedimiento (¿cómo se hace?). Del álgebra de matrices evidencia conocimiento sobre los procedimientos (¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer? y características del resultado).

En el caso de los determinantes conoce definiciones, procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado), registros de representación, fenomenología y aplicaciones, propiedades y sus fundamentos, indicios de formas de proceder, errores de los estudiantes y ejemplos para la enseñanza. A su vez, el conocimiento sobre propiedades y sus fundamentos refleja conocimiento sobre definiciones y errores de los estudiantes.

De los sistemas de ecuaciones lineales conoce definiciones, procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado), registros de representación, fenomenología y aplicaciones, indicios de formas de proceder y ejemplos para la enseñanza.

La Figura 15 a su vez, nos permitió elaborar la Tabla 12 que resume el conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Jordy, considerando subdominios, categorías y subcategorías bajo el enfoque del MTSK, la misma que presentamos posterior a la mencionada figura.

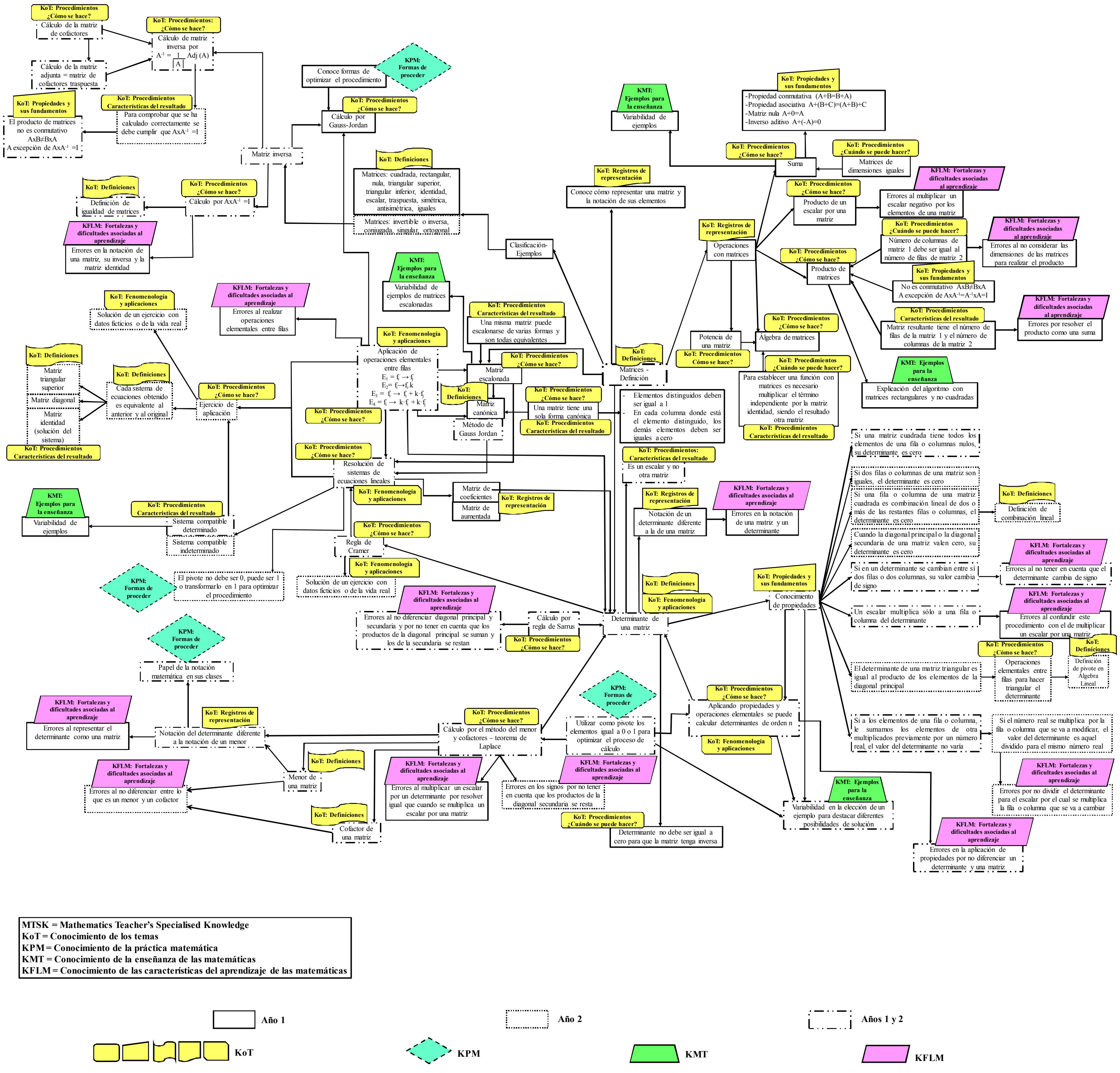


Figura 15. Esquema que detalla el conocimiento especializado de Jordy sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK

Tabla 12. Conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Jordy bajo el enfoque del MTSK.

Subdominio	Categoría	Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KoT	***Definiciones***	-Definición de matriz. -Definición de matriz cuadrada. -Definición de matriz rectangular. -Definición de matriz nula. -Definición de matriz triangular superior. -Definición de matriz triangular inferior. -Definición de matriz identidad o unitaria. -Definición de matriz escalar. -Definición de matriz traspuesta. -Definición de matriz simétrica. -Definición de matriz antisimétrica. -Definición de igualdad de matrices. -Definición de matriz conjugada. -Definición de matriz singular. -Definición de matriz ortogonal. -Definición de matriz diagonal. -Definición de matriz inversa ($AxA^{-1} = I$). -Definición de matriz escalonada. -Definición de matriz canónica. -Definición de determinante de una matriz. -Definición de menor de una matriz. -Definición de cofactor de una matriz. -Definición de combinación lineal. -Definición de pivote en Álgebra Lineal. -Definición de sistema de ecuaciones lineales equivalente. -Definición de elemento distinguido de fila en una matriz escalonada.

Continuación…

Subdominio	Categoría	Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KoT	***Fenomenología y aplicaciones***	-Aplicación de las matrices canónicas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. -Aplicación del determinante de una matriz en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer). -Aplicación del determinante de una matriz en la obtención de la matriz inversa. -Aplicación de operaciones elementales entre filas para reducir una matriz a su forma escalonada. -Aplicación de operaciones elementales entre filas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (métodos de Gauss y Gauss-Jordan). -Aplicación de propiedades y operaciones elementales entre filas en la resolución del determinante de una matriz. -Aplicación de las operaciones elementales entre filas en la resolución de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan. -Aplicación de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (con operaciones elementales entre filas, reglas de Sarrus y Cramer) para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones cotidianas ficticias o de la vida real.
	Registros de representación	-Notación de las matrices (registro algebraico-matricial). -Notación de los elementos de una matriz (registro algebraico-matricial y verbal). -Notación de la matriz inversa (registro algebraico-matricial y verbal). -Notación de la matriz identidad (registro algebraico-matricial y verbal). -Notación de la matriz de los coeficientes y la matriz aumentada (registro algebraico-matricial). -Notación de la matriz escalonada (registro algebraico-matricial y esquemático pictográfico). -Notación del determinante de una matriz (registro algebraico-matricial). -Notación para el menor de una matriz (registro algebraico-matricial). -Notación de las operaciones elementales entre filas (registro algebraico y verbal). -Operaciones con matrices (registro algebraico-matricial, aritmético y verbal) -Problemas de aplicación (registro verbal).
	Propiedades y sus fundamentos	-Propiedad conmutativa con respecto a la suma de matrices: $A+B = B+A$. -Propiedad asociativa con respecto a la suma de matrices: $(A+B)+C = A+(B+C)$. -Elemento neutro con respecto a la suma de matrices: $A+0=A$. -Elemento inverso (elemento simétrico) con respecto a la suma de matrices: $A+(-A)=0$. -No conmutatividad del producto de matrices: $AxB \neq BxA$. -Conmutatividad del producto de una matriz por su inversa: $AxA^{-1} = A^{-1}xA$. -Propiedad de los determinantes que indica que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía. Tomando en cuenta que cuando se desea cambiar una fila o columna en un determinante y se multiplica por un escalar la fila o columna que se quiere cambiar, el determinante resultante habrá que dividirlo para el escalar y así obtener su valor real. -Propiedad de los determinantes que indica que un escalar multiplica solo a una fila o columna del determinante.

Continuación…

Subdominio	Categoría		Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KoT	***Propiedades y sus fundamentos***		-Propiedad de los determinantes que indica que si dos filas o columnas de la matriz son iguales, el determinante es cero. -Propiedad de los determinantes que indica que si en un determinante se cambian entre sí dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo. -Propiedad de los determinantes que indica que si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero. -Propiedad de los determinantes que indica que si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más de las restantes filas o columnas, su determinante es cero. -Propiedad de los determinantes que indica que cuando la diagonal principal o la diagonal secundaria de una matriz valen cero, su determinante es cero. -Propiedad de los determinantes que indica que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
	Procedimientos	***¿Cómo se hace?***	-Algoritmo para sumar matrices. -Algoritmo para multiplicar un escalar por una matriz. -Algoritmo para multiplicar matrices. -Potencia de una matriz. -Álgebra de matrices. -Cálculo de la matriz inversa aplicando $AxA^{-1} = I$. -Cálculo de la matriz inversa aplicando $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert} Adj(A)$ -Cálculo de la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan. -Procedimiento para escalonar una matriz. -Procedimiento para reducir una matriz a su forma canónica. -Cálculo del determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus. -Cálculo del determinante de una matriz por el método del menor y cofactores. -Cálculo del determinante de una matriz aplicando propiedades. -Cálculo del determinante de una matriz aplicando propiedades y operaciones elementales entre filas. -Cálculo de la matriz de cofactores. -Determinación del menor de una matriz. -Determinación del signo del cofactor de una matriz. -Cálculo de la matriz adjunta 2x2 y 3x3.

Continuación…

Subdominio	Categoría		Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KoT	*Procedimientos*	*¿Cómo se hace?*	-Resolución de un sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer. -Resolución de un sistema de ecuaciones lineales mediante aplicando el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales entre filas). -Procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss (operaciones elementales entre filas para escalonar una matriz, transformando en unos la diagonal principal). -Planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales a partir de la interpretación de los datos de un problema de aplicación. -Procedimiento para reducir un determinante a su forma triangular aplicando operaciones elementales entre filas.
		¿Cuándo se puede hacer?	-Para sumar matrices es necesario que sus dimensiones sean iguales. -Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz 1 sea igual al número de filas de la matriz 2. -Para trabajar el álgebra de matrices con funciones cuadráticas o cúbicas, es necesario multiplicar el término independiente de la función por una matriz identidad. -Para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero.
		Características del resultado	-Las dimensiones del producto resultante de dos matrices corresponden al número de filas de la matriz 1 y el número de columnas de la matriz 2. -Una matriz puede tener muchas formas escalonadas, siendo todas equivalentes. -Cada matriz tiene sólo una forma canónica. -Un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado tiene una única solución. -Un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado tiene una variable libre y por tanto infinitas soluciones. -El determinante de una matriz es un escalar y no otra matriz. -Al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, uno de los sistemas equivalentes obtenidos representa una matriz triangular superior. -Al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, uno de los sistemas equivalentes obtenidos representa una matriz diagonal. -El último sistema obtenido o solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, representa una matriz identidad. -El producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad.
KPM	***Formas de proceder* (indicios)**		-Prácticas asociadas a optimizar los procedimientos buscando el rigor, la precisión y hacerlos más efectivos, más cortos, que lleven a disminuir la dificultad y el error. -Papel de la notación matemática.

Continuación…

Subdominio	Categoría	Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KMT	***Ejemplos para la enseñanza***	-Variabilidad de ejemplos en la enseñanza de la suma de matrices. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza del producto de un escalar por una matriz. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza del producto de matrices. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza de la reducción de una matriz a su forma escalonada. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza del cálculo del determinante de una matriz aplicando el método del menor y cofactores. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza del cálculo del determinante de una matriz aplicando propiedades y operaciones elementales entre filas. -Variabilidad de ejemplos en la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas.
KFLM	***Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje***	-Los estudiantes se pueden confundir en la multiplicación de los signos entre un escalar negativo y los elementos de una matriz. -Los estudiantes se pueden equivocar al realizar el producto de matrices sin tomar en cuenta previamente las dimensiones de las mismas. -Los estudiantes se pueden equivocar en la notación de diferentes clases de matrices. -Los estudiantes se pueden equivocar en la notación de una matriz y un determinante. -Los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus, por no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan. -Los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus, por no diferenciar claramente las diagonales principal y secundaria. -Los estudiantes pueden no tomar en cuenta las propiedades de los determinantes y equivocarse al multiplicar un escalar por un determinante, resolviendo igual que cuando se multiplica un escalar por una matriz. -Los estudiantes pueden confundirse y no tomar en cuenta que si intercambian dos filas o dos columnas en un determinante, su valor cambiará de signo. -Los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando el método del menor y cofactores por no tener en cuenta que el producto de la diagonal secundaria se resta. -Los estudiantes pueden no tener claro las diferencias entre una matriz (conjunto de elementos distribuidos en filas y en columnas) y un determinante (es un escalar), al pensar que se aplican propiedades en igualdad de condiciones en ambos casos. -Los estudiantes pueden equivocarse cuando calculan el determinante de una matriz, aplicando la propiedad que dice que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía; ya que pueden no darse cuenta de que la respuesta es correcta solo si se divide el valor obtenido para el número por el cual se multiplicó la fila que sufre los cambios.

Continuación…

Subdominio	Categoría	Conocimiento observado en la práctica de Jordy
KFLM	***Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje***	-Para los estudiantes puede constituir una dificultad el no diferenciar claramente entre lo que es un menor y un cofactor. -Los estudiantes se pueden equivocar al obtener la adjunta de una matriz 2x2 por no tener en cuenta que en el caso de la diagonal principal se intercambian los elementos con su mismo signo y para la diagonal secundaria sólo se cambian los signos de los elementos. -Para los estudiantes constituye una dificultad la realización de operaciones elementales entre filas para resolver sistemas de ecuaciones lineales. -Los estudiantes se pueden equivocar por no resolver de forma ordenada un ejercicio o por el uso incorrecto de la notación matemática en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan.

4.3. Análisis de conocimiento de Carlos

4.3.1. Subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Carlos

Una vez analizadas en su conjunto siete sesiones de clase de Carlos (de dos años consecutivos, 4 en el primer año y 3 en el segundo año), pasamos a describir los subdominios y categorías del MTSK de los que se obtuvieron evidencias y mostramos en la Figura 16 tales subdominios y categorías.

La mayoría de evidencias encontradas en las sesiones de clases observadas corresponden al KoT en sus diferentes categorías (a excepción de *propiedades y sus fundamentos*), acompañadas de KMT en la categoría *ejemplos para la enseñanza* y KFLM respecto a *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*. Hallamos apenas un indicio de KPM en las declaraciones del profesor. Pasamos a describir el conocimiento del profesor en cada uno de los subdominios.

4.3.1.1. Conocimiento de los temas (KoT)

Se evidenció en el análisis el conocimiento de los temas (KoT) de Carlos en las categorías: *definiciones, fenomenología y aplicaciones, registros de representación,* y *procedimientos.*

En lo relacionado al conocimiento sobre *definiciones*, el profesor enuncia fundamentalmente las de matriz y tipos de matrices haciendo uso de un lenguaje formal; y para referirse a la matriz escalonada lo hace a través de un lenguaje coloquial o informal, siendo una definición incorrecta la que emplea al indicar que escalonar una matriz es darle una forma triangular y no necesariamente es así.

El conocimiento del profesor sobre *fenomenología y aplicaciones* del contenido se enmarca en situaciones que podrían darse en la vida real. De este modo, aporta ejemplos reales cuando trabaja las operaciones con matrices (suma, producto por un escalar y producto de dos matrices) y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (a través de la matriz inversa), temas que expone no sólo con ejercicios numéricos sino con problemas de aplicación.

En la misma línea de la *fenomenología y aplicaciones*, encontramos también conocimiento del profesor sobre las aplicaciones del contenido en un contexto matemático, como por ejemplo, la aplicación del determinante en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, a través de la regla de Cramer; las operaciones elementales entre filas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss) y la matriz inversa (método de Gauss-Jordan); aplicación de la matriz inversa y determinantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Carlos, a través de las aplicaciones relaciona los temas que conforman el contenido en cuestión (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales), y como ya hemos mencionado anteriormente (en los resultados del análisis de la práctica de Jordy), pensamos que se trata de relaciones intraconceptuales, por la proximidad que hay entre estos temas complementándose unos con otros. Cabe mencionar también que el profesor conoce que las matrices son aplicadas en la elaboración de software dentro de la carrera en la cual imparte sus clases (Ingeniería en Sistemas). Se realiza una descripción de métodos habituales (regla de Sarrus y método del menor y cofactores) para la obtención del determinante, sin enfocar sus propiedades ni aplicaciones en otros contextos.

Carlos conoce diferentes *registros de representación* del contenido. Así por ejemplo, constatamos su conocimiento del registro algebraico (Duval, 1995; Castro & Castro, 1997; D'Amore, 2004; Ramírez et al., 2013) (notación de operaciones elementales entre filas), registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) (notación de matrices, sus elementos, determinante de una matriz, subíndices para determinar los signos de los cofactores y sistemas de ecuaciones lineales), registro verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) (elementos de una matriz, operaciones elementales entre filas, operaciones con matrices y problemas de aplicación), registro aritmético (D'Amore, 2004) (operaciones elementales entre filas), y registro esquemático-pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004) (notación de las matrices triangular superior y triangular inferior).

Este conocimiento (*registros de representación*) se hace presente en todas las sesiones de clases observadas, no obstante, hemos citado en el análisis el conocimiento del profesor cuando emplea un tipo de registro para resaltar las partes importantes del contenido (por ejemplo, la notación de una matriz y sus elementos, la notación de las operaciones elementales entre filas, los cálculos aritméticos que conllevan las operaciones con matrices, o la notación de los sistemas de ecuaciones lineales).

Las intervenciones de Carlos en las sesiones de clase son descriptivas, su conocimiento sobre *procedimientos* refleja un manejo basado en algoritmos, de allí que el conocimiento que principalmente muestra es aquel relacionado a cómo se aplican los mismos; en pocas ocasiones menciona las condiciones referentes a cuándo se puede hacer un procedimiento, o las características que tendrán los resultados.

En cuanto a *procedimientos: ¿cómo se hace?*, Carlos registra conocimiento de los algoritmos para sumar y multiplicar matrices; cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan y por la fórmula $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$; procedimiento para escalonar una matriz; cálculo del determinante de una matriz por la regla de Sarrus y método del menor y cofactores; cálculo de la matriz de cofactores y matriz adjunta 2x2 y 3x3; resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss y aplicando la matriz inversa; y planteamiento de matrices (para efectuar operaciones con ellas) y sistemas de ecuaciones lineales a partir de la interpretación de los datos de un problema de aplicación.

Sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* se refleja el conocimiento del profesor al expresar las condiciones necesarias para sumar y multiplicar matrices, en esta última operación se evidencia además su conocimiento acerca de que la multiplicación de matrices particionadas o en bloques se realiza generalmente cuando las matrices son de dimensiones mayores. Asimismo, el profesor evidencia este tipo de conocimiento al indicar que para que una matriz tenga inversa es necesario que el determinante no sea igual a cero.

En relación a *procedimientos: características del resultado*, Carlos conoce que el producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad; al aplicar el método de Gauss para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales se obtiene una matriz triangular con unos en la diagonal principal; los resultados obtenidos al resolver un sistema de ecuaciones lineales deben satisfacer cada ecuación del mismo; y que se deberá obtener una matriz identidad para encontrar la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan.

4.3.1.2. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Al analizar las primeras sesiones de clase de Carlos, encontramos indicios de su conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza*, los cual atribuimos a su interés por abordar el contenido de matrices con ejemplos prácticos y no con ejemplos numéricos Pensamos que estos indicios se constituyen en conocimiento propiamente dicho cuando el profesor trabaja las operaciones con matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando la matriz inversa, ya que para este profesor la enseñanza de un contenido a través de ejemplos prácticos es lo que atrae el interés de los estudiantes hacia el mismo y hace que se queden con una idea más clara que si solo se trabaja con matrices y sistemas de ecuaciones lineales sin darle un sentido de aplicación en la vida real.

4.3.1.3. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Carlos evidencia cierto conocimiento sobre este subdominio en la categoría *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, específicamente sobre errores y dificultades relacionados con el propio contenido, que considera pueden ser comunes en los estudiantes, no obstante, dichas evidencias son escasas en las sesiones de clases. Consideramos por tanto, que puede constituir una oportunidad para investigar (Flores, Escudero & Aguilar, 2013) sobre el conocimiento de Carlos acerca de errores y dificultades de los estudiantes referentes al tema.

El profesor evidencia conocimiento de que los estudiantes se pueden equivocar al encontrar la matriz adjunta de orden dos por no tener en cuenta que en el caso de la diagonal principal se intercambia los elementos con su mismo signo y para la diagonal secundaria sólo se cambian los signos de los elementos. Carlos sabe que existe la posibilidad de cometer algún error al ubicar los elementos de una matriz por no diferenciar claramente que el primer subíndice (i) se refiere a la ubicación de la fila, y el segundo (j) se refiere a la ubicación de la columna. También conoce que la falta de orden y/o organización en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (método de Gauss) o para hallar la matriz inversa (método de Gauss-Jordan), así como el uso incorrecto de la notación matemática de las operaciones elementales entre filas puede constituir una dificultad en los estudiantes que desencadena errores de cálculo.

4.3.2. Conocimiento especializado de Carlos

En la Figura 17 presentamos el MTSK de Carlos con relación al contenido de matrices determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, a través de los núcleos 1 y 2. El núcleo 1 comprende las matrices y el núcleo 2 comprende determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Además, por otra parte, en la Tabla 13 se muestran por cada sesión de clases observada, las unidades de información (indicadas por los números de las líneas correspondientes a la transcripción de la sesión de clases o por el número de entrevista semiestructurada y pregunta) asociadas a los subdominios y categorías del MTSK. Las unidades de información más relevantes las hemos incluido en el apartado que nos ocupa (las demás se pueden encontrar en las transcripciones de las sesiones de clases que constan en los ANEXOS 13 y 15).

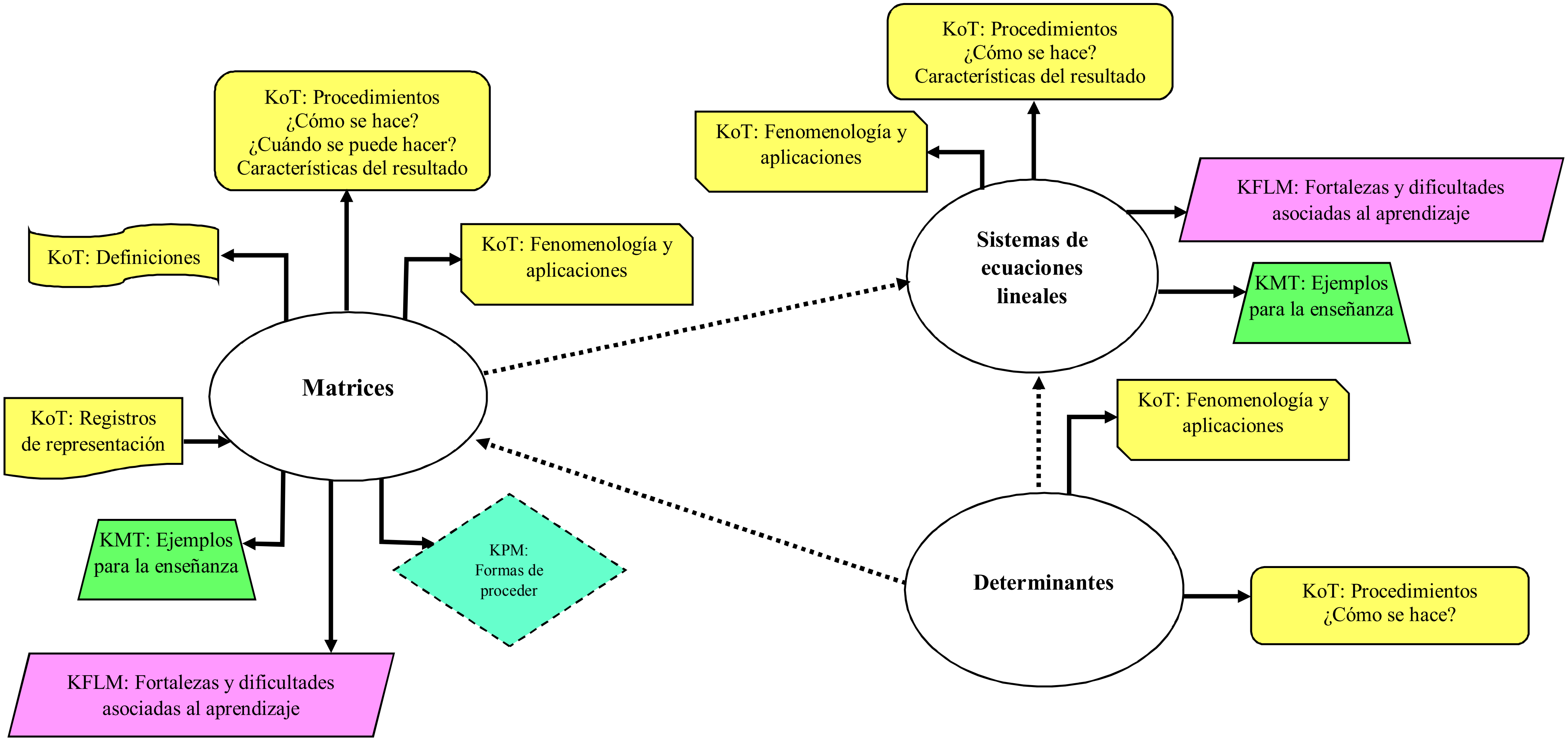


Figura 16. Subdominios y categorías del MTSK evidenciados en la práctica de Carlos

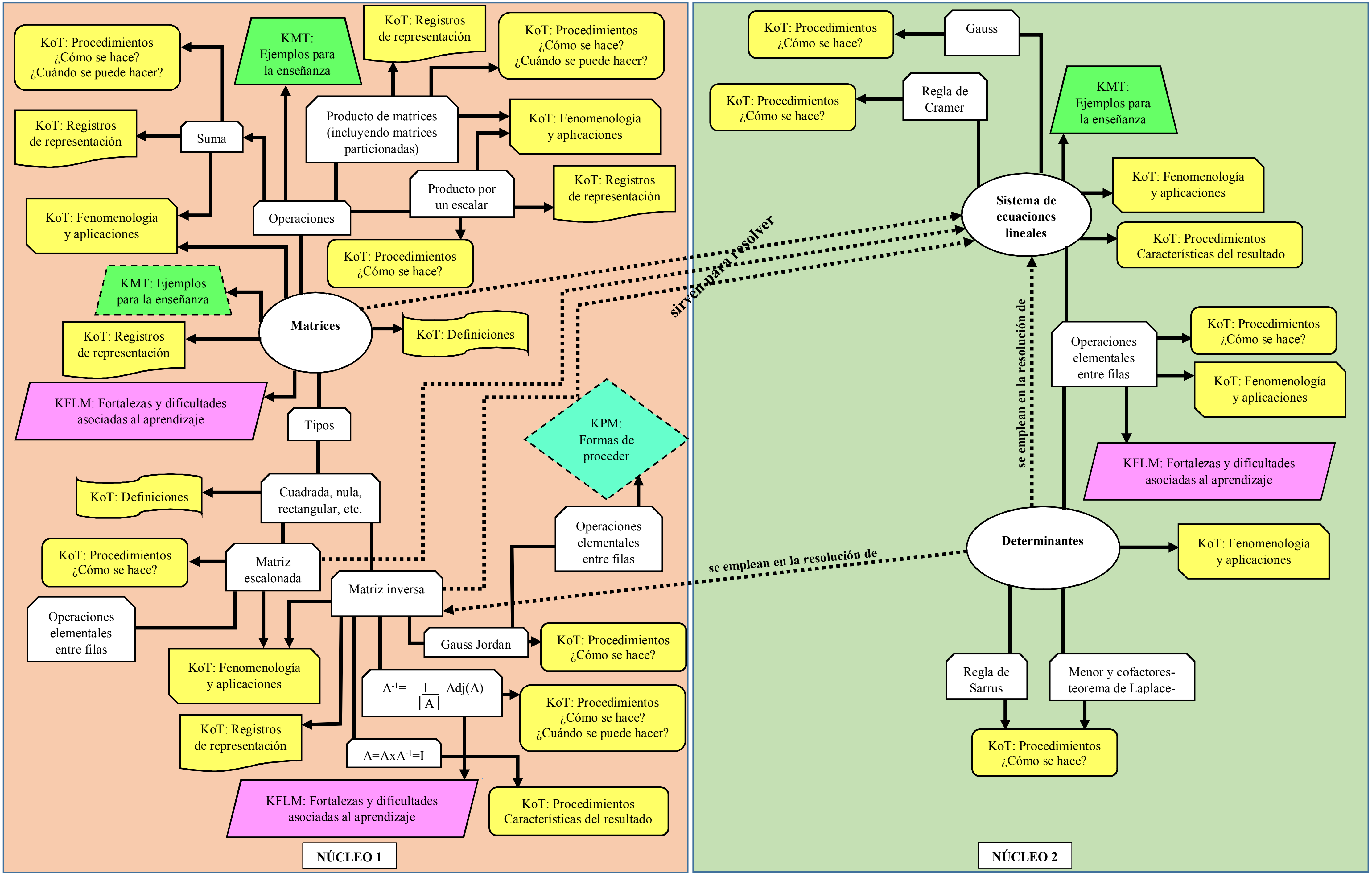


Figura 17. Conocimiento de Carlos sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK

Tabla 13. Unidades de información correspondientes al MTSK evidenciado en la práctica de aula de Carlos[40].

Subdominio	**Categoría[41]**		**Año 1**				**Año 2**		
			Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 1**	**Sesión 2**	**Sesión 3**
KoT	***Definiciones***		14-30 54-86 145-151				20-22 49-74 75-95	30-33	
	Fenomenología y aplicaciones		107-134 E1.P25[42]	7-22 44-82	38-44 65-66		1-48	1-26 59-62 90-92	1-99 100-182
	Registros de representación		49-74 74-86 107-134	7-22 44-82		29-61	1-48 49-74	1-26	1-99 100-182
	Procedimientos	***¿Cómo se hace?***	107-134	7-22 44-82 83-130	1-7 13-37 38-66	1-14 29-61 72-124		1-26 27-88 97-186	1-99 100-182
		¿Cuándo se puede hacer?	99-104 115-126	52-64 86-90		37-38			79-85 150-152
		¿Por qué se hace así?							
		Características del resultado				18-20		30-38	182-183
KMT	***Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza***								
	Recursos materiales y virtuales								
	Ejemplos para la enseñanza		107-134	7-22 44-82 E3.P5			1-48		1-99 100-182
KFLM	***Formas de aprendizaje***								
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje					15-17 126-127	96-98	E3.P13	
	Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático								
	Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas								

[40] Inspirada en Tabla con subdominios e indicadores del MTSK presentada por Rojas (2014).
[41] El KPM no lo incluimos debido a que no se observó en la práctica del profesor, habiendo un escaso indicio de este conocimiento en una entrevista, lo cual referimos en el texto.
[42] Hace referencia a unidad de información obtenida en entrevista; E corresponde a la entrevista con su respectivo número, y P a la pregunta con su respectivo número.

4.3.2.1. Conocimiento sobre matrices

En todas las sesiones analizadas se evidencia el KoT de Carlos. El profesor registra conocimiento sobre *definiciones* (KoT) cuando plantea qué es una matriz, tal como se muestra en la siguiente unidad de información (S1*.20-22).

S1*.20-22

20 P: *La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos*
21 *en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y*
22 *las columnas de forma vertical*

Citamos como ejemplo la unidad de información, donde Carlos se refiere a las matrices triangular superior y triangular inferior (S1.74-86).

S1.74-86

74 P: *Vamos a escribir dos matrices como ejemplos*

$$H=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

75 *¿Cuál es el orden de la primera matriz?*
76 E: *4x4*
77 P: *Según el tamaño es cuadrada.*
78 *La segunda ¿qué orden tiene?*
79 E: *3x3*
80 P: *Entonces las dos son cuadradas*
81 *¿Qué particularidad ve en cada una?*
82 E: *Tiene forma de triángulo*
83 P: *Exactamente.*
84 *A esta matriz que tiene ceros en la parte inferior y sus elementos de la*
85 *parte superior forman un triángulo, se le conoce como matriz*
86 *triangular superior y la otra sería matriz triangular inferior*

Carlos a través de las matrices H y K describe las características de una matriz triangular superior y una triangular inferior. Además, asociamos aquí su conocimiento sobre *registros de representación* (KoT), que en este caso serían algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al representar la matriz, y esquemático-pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004) por los elementos aclaratorios (triángulos rectángulos) con los que indica a los estudiantes por qué se llaman matrices triangulares.

El conocimiento sobre *registros de representación* (KoT) de las matrices se evidencia además, cuando Carlos hace alusión a la notación de las matrices, tal como se indica en la siguiente unidad de información (S1*.49-74)

S1.49-74

P: *Ahora vamos a hablar sobre la notación de las matrices, la escritura de las matrices. Las matrices se escriben con letras mayúsculas ¿Cuántas filas y columnas tiene esta matriz?*

$$M=\begin{bmatrix} -2 & 8 & 0 & 1/2 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 3 & -2/3 & -3/2 \\ 173 & 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E: *Tres y cinco*

P: *Entonces tenemos nosotros una matriz de orden 3x5. Ahora a esta matriz M donde están ubicados los números en forma explícita la conocemos como una matriz particular. Pero esta matriz particular corresponde en realidad a una matriz general. Las matrices generales se escriben con la misma letra pero con minúscula, el orden es el mismo y en cada uno de los casilleros correspondientes al elemento se va escribiendo la letra minúscula con su respectivo número que se refiere a la fila con la Columna*

$$(m_{ij})3x5=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \end{bmatrix}$$

Llamemos m_{ij}, léase: "eme sub i, jota, al elemento que se encuentra en el cruce de la i-ésima fila con la j-ésima columna.
En la matriz M el valor de m_{14} ¿cuál sería?

E: *½*

P: *Que corresponde a ¿qué fila?*

E: *Primera*

P: *Y cuarta columna. Todos los elementos se los ubica de esa manera. No se olvide de que las matrices se denotan con letras mayúsculas y para referirnos a los números que se disponen en el rectángulo utilizamos letras minúsculas acompañadas de los números que indican su fila y su respectiva columna.*
Se podrán dar cuenta que los elementos de esa matriz son números reales y estos pueden estar integrados por números fraccionarios, radicales, cantidades negativas y positivas e incluso 0.

En la unidad de información se presenta el conocimiento del profesor sobre cómo denotar una matriz (letras mayúsculas), y los elementos de esta (que se pueden representar con una letra minúscula) con sus respectivos subíndices (ij) que hacen alusión a la fila y a la columna, respectivamente, a la cual pertenece dicho elemento; siendo por tanto los registros que emplea el algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) y también el verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) cuando manifiesta cómo llamar los elementos de una matriz y sus subíndices. Este conocimiento se acompaña de aquel referido a *definiciones* (KoT) de matriz general y matriz particular.

Carlos aborda el tema de matrices con ejercicios que pueden representar situaciones de la vida real, lo cual muestra su conocimiento sobre la *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las matrices en la vida cotidiana, el mismo que se hace evidente al presentar a sus estudiantes las matrices a través de un ejemplo sobre la composición nutricional de ciertos productos lácteos, tal como se muestra en la siguiente unidad de información (S1*.1-48).

S1*.1-48

P: *Con respecto a las matrices podrán darse cuenta que aquí existe un cuadro relacionado con temas de nutrición*

	LACTOSA %	PROTEÍNA %	GRASA %
Leche	38	27	25
Queso	35	25	30
Mantequilla	36	22	32
Kumis	37	24	29

Lo que significa que las matrices pueden ser aplicadas en cualquier área de estudio, ya sea en geografía, cívica, historia, ciencias naturales, biología, química, porque no son otra cosa que datos o valores que tienen relación con lo que se esté trabajando. Por ejemplo: un cuadro de calificaciones tiene un orden establecido de valores de acuerdo a cada uno de los estudiantes, que pueden estar ordenados por curso, por paralelo, por facultades, etc.

En este caso tenemos un ejemplo nutricional, incluye leche, queso, mantequilla y kumis y tenemos los componentes como la lactosa, la proteína y la grasa que están en porcentaje.

Los valores que tenemos para leche 38, 27 y 25 se refieren a los porcentajes de lactosa, proteína y grasa, respectivamente y así con los demás componentes.

Podrán darse cuenta que son valores reales, este ejemplo es para demostrarles que las matrices no son situaciones adaptadas, no son números ordenados al azar sino que tienen un sentido propio de la realidad, las matrices son totalmente prácticas.

La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y las columnas de forma vertical

Lo que vemos en el cuadro lo podemos expresar en forma de matriz, donde cada número indica el porcentaje de un componente en un producto lácteo

$$\begin{array}{l} \text{fila } 1\rightarrow \\ \text{fila } 2\rightarrow \\ \text{fila } 3\rightarrow \\ \text{fila } 4\rightarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 38 & 27 & 25 \\ 35 & 25 & 30 \\ 36 & 22 & 32 \\ 37 & 24 & 29 \end{bmatrix} \\ \text{Columna 1} \quad \text{Columna 2} \quad \text{Columna 3} \end{array}$$

Aquí está expresado cómo se puede escribir una matriz utilizado corchetes ¿cuántas filas tenemos?

E: *Cuatro*

P: *Exacto, que son todos los valores que están ubicados en forma horizontal. Ya cuando nosotros vamos a utilizar matrices, ya no ponemos los elementos como en la tabla sino que simplemente ubicamos* *los números o elementos. ¿Cuántas columnas tenemos?*

E: *Tres*

P: *Se podrán dar cuenta que las columnas están en forma vertical, entonces de acuerdo al arreglo de las filas y las columnas es el orden de la matriz.*

La anterior disposición de los números en el rectángulo de 4 filas y 3 columnas se llama una matriz de orden "cuatro por tres".

Siempre los elementos son nxm, n van a ser los valores de las filas y m de las columnas

La importancia también que tienen las matrices es que nosotros podemos realizar algunos cálculos matemáticos como hacer sumas, restas, multiplicaciones, inclusive a través de la matriz inversa hallar la matriz inicial con la que nosotros hemos desarrollado cualquier operación.

También a partir de las matrices nosotros podemos hallar x, y, z, dependiendo de la cantidad de incógnitas, resolver un sistema de ecuaciones aplicando matrices.

Como vemos, el profesor conoce que las matrices se pueden aplicar en situaciones cotidianas, en otras ciencias y dentro de un contexto matemático (operaciones con matrices, matriz inversa y resolución de sistemas de ecuaciones lineales). Este conocimiento, es corroborado además, en una entrevista (E1.P25), donde se le preguntó qué utilidad tenía para él el tema de matrices y si lo hace explícito a sus estudiantes.

E1.P25: *Para los estudiantes que están estudiando Ingeniería en Sistemas es útil el tema de matrices para elaborar software. Sí hago explícito a los estudiantes la utilidad que tiene el tema de matrices, ellos en la actualidad elaboran software y utilizan las matemáticas que reciben. Por ejemplo, en el semestre anterior algunos estudiantes desarrollaron un software para sumar fracciones, otros elaboraron un software para determinar las variables aplicando determinantes. Yo les doy a los estudiantes ejemplos prácticos, de la vida real, y así demostramos que las matemáticas no solo se aplican en una ciencia específica, sino para cualquier área, como nutrición, deportes o en una fábrica, es decir, las matrices tienen múltiples usos o aplicaciones.*

De acuerdo a la unidad de información, Calos conoce además, la *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de *matrices*, *determinantes* y *sistemas de ecuaciones lineales* en la carrera en la cual se desempeñan sus estudiantes.

En la unidad de información citada anteriormente (S1*.1-48) observamos nuevamente el conocimiento del profesor sobre *registros de representación* (KoT), cuando se refiere a cómo se representan las matrices (en un *rectángulo* y entre *corchetes*), a la notación de sus elementos (*nxm*), y a la disposición de las filas (*en forma horizontal*) y las columnas (*en forma vertical*) de estas; lo cual corresponde a su conocimiento de los registros algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006). Además, la presentación de una tabla con valores numéricos (número reales, para la posterior representación de una matriz), constituye una evidencia del conocimiento del profesor del registro aritmético (D'Amore, 2004).

El conocimiento de Carlos sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las matrices en situaciones cotidianas que pueden ser de la vida real, lo relacionamos con indicios de su conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza* (KMT), debido a que Carlos, al parecer, no sólo está interesado en presentar el ejemplo de una matriz general o particular a sus estudiantes, sino que busca que puedan encontrarle un sentido al contenido matemático a través de sus aplicaciones. El conocimiento de situaciones de la vida real que se pueden modelizar con el contenido lo hemos considerado en KoT (*fenomenología y aplicaciones*) y en KMT (*ejemplos para la enseñanza*), debido a que por una parte tenemos en cuenta el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático aplicado a un fenómeno determinado y, por otra parte, consideramos el conocimiento del profesor sobre una forma más accesible para ilustrar o enseñar un procedimiento.

Cuando el profesor se refiere a la notación de los elementos de una matriz, además, emerge su conocimiento sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM), relativo a dificultades para interpretar los subíndices de dichos elementos, tal como se demuestra en la siguiente unidad de información (S1*.96-98).

S1*.96-98

96 P: *No es lo mismo que yo diga a_{11} que a_{21}, cuidado, a veces manejan las*
97 *matrices y se confunden con los subíndices de los elementos, nos estamos*
98 *refiriendo a distintas filas.*

Se observa que el profesor conoce que esta dificultad respecto de los subíndices de los elementos de una matriz puede conllevar a que el estudiante cometa errores en la ubicación de los mismos (filas y columnas).

En las sesiones de clases de este profesor, evidenciamos su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) referente a los algoritmos inmersos en las operaciones con matrices. Así, Carlos conoce los algoritmos de la suma (S1.107-134), multiplicación por un escalar (S2.7-22) y producto de matrices (S2.44-82). Además, se registró el conocimiento del profesor del algoritmo del producto de matrices cuando se trata de multiplicar matrices particionadas o multiplicación en bloques (S2.86-130). A continuación citamos como ejemplo, la unidad de información que corresponde al procedimiento para la multiplicación de dos matrices (S2.44-82).

S2.44-82

44 P: *Bien, la multiplicación de matrices se puede realizar bajo ciertas*
45 *condiciones y vamos a hacer un ejemplo práctico*
46 *Siempre yo les pongo un ejemplo práctico, de tal manera, que*
47 *ustedes se den cuenta cuál es su aplicación.*
48 *En una ciudad la cantidad de vehículos por modelo en cada ruta de*
49 *transporte urbano está indicado por la tabla T*

T	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Ruta 1	3	8	5	2
Ruta 2	0	7	6	6
Ruta 3	1	3	5	4

50 *En cada día de lasemana, el consumo de galones de gasolina por*
51 *modelo está indicado enla tabla G*

G	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Modelo A	10	21/2	9	28/3	17/2
Modelo B	15/2	6	32/5	20/3	7
Modelo C	6	20/3	23/4	28/5	25/4
Modelo D	13/2	19/4	5	21/4	27/5

52 *Si se podrán dar cuenta que tenemos aquí dos tablas que indican*
53 *diferentes situaciones, la primera son diferentes rutas que recorren*
54 *cuatro modelos de autos (3x4), mientras que la segunda tabla está*
55 *demostrando el consumo de gasolina por cada uno de los modelos*
56 *durante los cinco días de la semana (4x5)*
57 *Si forman matrices, ¿estas van a ser iguales o no?*
58 E: *No*
59 P: *No, sin embargo, eso no es lo que importa en este caso, a diferencia*
60 *de la suma o resta, que es necesario que sean iguales las matrices con*
61 *respecto al orden. En cambio, aquí la disposición que tienen es la*
62 *correcta para poder hacer la multiplicación porque la multiplicación se*
63 *hace las filas por las columnas, entonces van a coincidir el número de*
64 *columnas de una matriz con el número de filas de la otra. Vamos a*
65 *hallar el consumo de gasolina por cada ruta para cada día de la semana*
66 *Multiplicamos TxG*
67 *Vamos a hacer otra tabla con los resultados*
68 *Para el día lunes tenemos que multiplicar el elemento que está en*
69 *la primera fila primera columna de la tabla T por el elemento que*
70 *está en la primera fila primera columna de la tabla G*
71 *Luego, el segundo elemento de la misma fila se multiplica por el*
72 *elemento de la segunda fila primera columna y se suma al anterior,*
73 *y así sucesivamente*
74 *Fíjese en el detalle, todos los elementos de esta primera fila* (tabla T)
75 *los multiplicamos por los elementos de esta primera columna* (tabla G)
76 *y los sumamos entre sí de esta manera*

Van a llenar ustedes toda la tabla
Ahora esta misma fila por la segunda columna y los resultados van en el día martes. Ahí está planteado como deben ustedes ir multiplicando cada uno de los valores y sumándolos también, respectivamente, para poder tener el resultado final del consumo de gasolina en cada ruta por cada día de la semana

En la unidad de información vemos que el profesor conoce el procedimiento para realizar el producto de dos matrices. Este conocimiento viene acompañado de aquel relacionado con la *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las matrices, lo que se refleja no sólo en esta operación del producto de matrices (*Bien, la multiplicación de matrices se puede realizar bajo ciertas condiciones y vamos a hacer un ejemplo práctico. Siempre yo les pongo un ejemplo práctico, de tal manera, que ustedes se den cuenta cuál es su aplicación*), sino también en la suma de matrices y producto de un escalar por una matriz; al ser presentados los respectivos algoritmos con ejercicios que representan situaciones cotidianas que pueden darse en la vida real.

Asimismo, en las operaciones con matrices (suma, producto de un escalar por una matriz y producto de dos matrices) se reconoce el conocimiento del profesor sobre *registros de representación* (KoT), tanto aritmético (D'Amore, 2004), por la presentación de los datos de los ejercicios en tablas (número reales) y la descripción de las operaciones con las matrices; como algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al representar en forma de matriz los datos que se encontraban previamente en tablas; y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) al emitir los enunciados de cada uno de los ejercicios de aplicación.

Además, cuando Carlos aborda las operaciones con matrices asociamos su conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza* (KoT), ya que nuevamente a través de los ejercicios que emplea intenta dar un sentido al contenido matemático evitando la enseñanza directa con ejercicios numéricos. Mencionamos sus declaraciones en una entrevista (E3.P5) al emitir su criterio sobre la utilidad de los ejemplos prácticos y su potencialidad.

E3.P5: *Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés.*

Para el profesor, su conocimiento sobre este tipo de ejemplos (relacionados con una aplicación) es lo que ayuda a mantener el interés del estudiante durante la enseñanza del contenido matemático. Asociamos aquí lo manifestado por Figueiredo et al. (2009) acerca de la importancia de que el profesor pueda maximizar la efectividad de los ejemplos que se usan en la enseñanza, refiriéndose a lo que llaman *transparencia* de un ejemplo, entendida como la capacidad que tiene este para llamar la atención del alumno hacia aspectos importantes y cuya finalidad es ilustrar un determinado concepto o procedimiento.

Si bien los ejercicios empleados están dispuestos de modo que se pueda llevar a cabo la suma o la multiplicación de dos matrices, existe evidencia del conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* (KoT) referido a las condiciones necesarias para realizar estas dos operaciones, incluyendo su conocimiento de la multiplicación de matrices particionadas o por bloques se puede realizar cuando se trata de matrices de dimensiones mayores (S2.86-90). Así por ejemplo, en la unidad de información citada con anterioridad encontramos unas líneas donde el profesor manifiesta cuándo se puede llevar a cabo el producto de matrices (S2.52-64), y a continuación citamos una de las unidades de información (S1.99-104, S1.115-126) que evidencia el conocimiento de Carlos sobre cuándo es posible realizar la suma de matrices.

S1.99-10

P: *Sólo se puede realizar la suma o resta de matrices siempre y cuando*
sean del mismo orden, pueden ser cuadradas, pueden ser rectangulares,
lo importante es que las dos matrices sean del mismo orden.
Usted puede tener dos matrices rectangulares, por ejemplo, de orden
2x3 y la otra 3x2, entonces habrá que hallar la traspuesta de una de las
matrices para que se puedan sumar

Se observa que el profesor conoce que para sumar matrices, estas deben tener las mismas dimensiones, lo cual se complementa con su conocimiento sobre trasponer una de las matrices para que la operación sea posible en el caso de tratarse de dos matrices rectangulares cuyas dimensiones sean contrarias (2x3 y 3x2).

Carlos conoce también el *procedimiento: ¿cómo se hace?* (KoT) relacionado a las operaciones elementales entre filas para escalonar o reducir una matriz (S2*.1-26, S2*.27-88). A continuación presentamos como ejemplo dos unidades de información donde el profesor muestra su conocimiento sobre cómo llevar a cabo las operaciones elementales entre filas, la primera referida a los tipos de operaciones que se pueden hacer (S2*.1-26), y la segunda, donde Carlos realiza dichas operaciones con un ejemplo (S2*.27-88).

S2*.1-26

P: *Las operaciones elementales entre filas no van a ayudar a dos cosas,*
la primera es encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de
ecuaciones lineales, y la segunda, es que también pueden obtener
la matriz inversa.
En el caso de la matriz inversa, las operaciones elementales entre filas
nos van a servir para llegar a la matriz identidad de la matriz original.
En el caso de una matriz 3x3 ¿cómo sería la matriz identidad?
E: *Serían tres unos en la diagonal principal y lo demás ceros*
P: *Exacto, entonces nosotros tenemos una matriz cualquiera y queremos*
encontrar la matriz identidad, para eso hacemos operaciones
elementales entre filas.
Entonces se llama operación elemental realizada en una matriz a
cualquiera de las transformaciones siguientes:
Primero cambiar entre sí dos filas de una matriz, se puede representar
por $F_i \leftrightarrow F_j$*, siendo* F_i *y* F_j *dos filas de la matriz.*
También multiplicar una fila por un escalar distinto de cero, se
representa por $F_i \rightarrow \alpha F_j$
Otra cosa que se puede hacer es sumar a una fila otra fila
multiplicada por un número real.
Se representa por $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$
ahí hemos representado como alfa el coeficiente cualquiera que
vamos a multiplicar por los elementos de la fila.
Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en
el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz,
reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir
por filas a una matriz

En esta unidad de información se aprecia el conocimiento de Carlos sobre los tipos de operaciones entre filas que se pueden llevar a cabo en una matriz, acompañado de conocimiento sobre *registros de representación* (KoT), siendo en este caso, algebraico (Duval, 1995; Castro & Castro, 1997; D'Amore, 2004; Ramírez et al., 2013) y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) al indicar la notación (representación) de dichas operaciones y cómo deben leerse las mismas.

Además, se constata conocimiento del profesor sobre la *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de las operaciones elementales entre filas, ya sea para encontrar las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales (método de Gauss) o la matriz inversa (método de

Gauss-Jordan), lo cual se refleja en la unidad de información anteriormente citada (S2*.1-26), y en otras (S2*.59-62, S2*.90-92).

En la siguiente unidad de información, el profesor evidencia a través de un ejemplo su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT), relacionado a las operaciones elementales entre filas, ya sea para escalonar una matriz o para llegar hasta la matriz identidad (S2*.27-88).

S2*.27-88

P: *Tenemos esta matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que vamos a hacer es demostrar que con las operaciones
elementales entre filas, esta matriz es equivalente a la matriz identidad
Escalonamos una parte de la matriz. Escalonar una matriz es
darle una forma triangular, donde los elementos de la parte inferior
son ceros y la diagonal principal puede estar formada por unos
Eso es escalonar una matriz
Pero si nosotros transformamos en cero todos los elementos que
están por encima de la diagonal principal estamos completando toda
la matriz identidad
O sea, que en la misma matriz podemos hacer dos cosas, una matriz
escalonada y también la matriz identidad
Considerando que primero vamos a escalonar la matriz hasta
que tome forma de matriz triangular, se dan cuenta que el
primer elemento tenemos que transformarlo en uno, y en este caso
tenemos en la última fila el uno, ¿qué se procede a hacer?

E: *Cambiar las filas*

P: *Exacto f_1 se cambia con f_3*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad f_1 \rightarrow f_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos el uno
Procedemos ahora a cambiar las filas dos y tres, transformando en
cero el -2 y el 3
¿Qué vamos a hacer?
Multiplicar la fila uno por dos y lo sumamos a la fila dos

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_2 \rightarrow f_2+2f_1 \\ f_3 \rightarrow f_3-3f_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos nosotros en la primera columna los valores que necesitamos
de 1, 0 y 0
En la tercera fila también hemos transformado el tres en cero
Se ha modificado ese cero que estaba al lado del tres, se ha convertido
en 15
Ven que allí hemos multiplicado la fila uno por -3, ¿por qué?

E: *Porque al sumar con la fila 1 se hace cero*

57 P: *Exactamente, si tienen alguna pregunta por favor dígame*
58 *Recuerde que estamos escalonando la matriz primero*
59 E: *¿Cuáles son las aplicaciones?*
60 P: *Ya he dicho que con la matriz escalonada podemos encontrar las*
61 *incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones y con la matriz*
62 *identidad hallamos la matriz inversa por Gauss-Jordan*
63 *Este procedimiento que estamos haciendo no es fijo, no es algo*
64 *que usted tenga que hacerlo así exactamente*
65 *Ustedes pueden aplicar otras operaciones elementales para escalonar*
66 *la matriz, lo importante es que lleguen a obtener una matriz identidad*
67 *y el procedimiento tenga razonamiento lógico*
68 *No tiene que aprenderse nada de memoria*
69 *Ahora, por ejemplo , podemos cambiar el signo de la fila 2 para ir*
70 *con la secuencia de la matriz escalonada, lo que nos interesa es hacer*
71 *positivo el uno de la segunda fila segunda columna*

$$f_2 = -f_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

72 *Podemos ahora modificar el valor de -5 de la fila uno y después*
73 *convertir en cero el 15*
74 *Entonces podemos multiplicar la fila 2 por el valor de 5 y para*
75 *modificar la fila 3 multiplicaremos la fila dos por -15*
76 *y sumamos la fila tres*

$$\begin{array}{r} f_1 \rightarrow f_1 + 5f_2 \\ f_3 \rightarrow f_3 - 15f_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

77 *El procedimiento que sigue es hacer que el 16 se convierta en 1*
78 *Lo único que debemos hacer es multiplicar por 1/16 la fila 3,*
79 *para que al simplificar nos de la unidad*

$$f_3 \rightarrow f_3/16 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

80 *Hasta ahí tenemos ya una matriz escalonada y podemos continuar*
81 *convirtiendo en cero los elementos de la parte superior a la*
82 *diagonal principal*
83 *Vamos a modificar entonces la fila uno, necesitamos que el -5 se haga 0*
84 *Multiplicamos la fila tres por 5, le sumamos la fila uno y se modifica*
85 *la fila uno*

$$\begin{array}{r} f_1 \rightarrow f_1 + 5f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + f_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

86 *Recuerda que puedes aplicar las operaciones elementales entre filas*
87 *como tú creas conveniente*
88 *Lo importante es que lleguen a la matriz identidad*

Es claro el conocimiento del profesor sobre el procedimiento para escalonar una matriz a través de operaciones elementales entre filas, no obstante éstas se abordan de forma muy puntual en las sesiones de clases, ya que, por ejemplo, no hemos encontrado evidencias del conocimiento de Carlos sobre estas operaciones para calcular determinantes, y en escasas ocasiones los ejercicios de aplicación sobre sistemas de ecuaciones lineales son resueltos a través de estas operaciones. De procedimientos relacionados con el rango de una matriz, factorización LU, ligados ambos a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y donde se emplean también las operaciones elementales entre filas (ver análisis de contenido) no hemos hallado evidencias del conocimiento del profesor.

En esta unidad de información, además, existe conocimiento del profesor sobre la *definición* (KoT) de una matriz escalonada, aunque esta es imprecisa (S2*.30-33) al indicar que *escalonar una matriz es darle una forma triangular* (no necesariamente es así), lo que podría conllevar a que el estudiante se quede con una imagen errónea del concepto. Sin embargo, en esta definición se deduce su conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT) asociado al método de Gauss aplicado a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que Carlos expresa a los estudiantes que deberán obtener una matriz triangular con unos en la diagonal principal; y el método de Gauss-Jordan asociado a la matriz inversa, porque indica que si completan con ceros los elementos que están por encima de la diagonal principal les quedará la matriz identidad (S2*.30-38).

De acuerdo a sus expresiones, Carlos está al tanto de que las operaciones elementales entre filas constituyen una dificultad para los estudiantes, reflejando su conocimiento sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM). Esto es indicado en una entrevista (E3.P13) en la cual se le preguntó si consideraba que los estudiantes tienen dificultades al realizar estas operaciones y las principales causas.

E3.P13: *Sí, hay dificultades y eso se debe a que no son organizados. Las matemáticas necesitan llevar un orden, a veces piensan que con las matemáticas no se requiere ser disciplinado y organizado para resolución, entonces ponen los valores en diferentes lugares y después no saben qué cantidad le corresponde a una cosa u otra, es el orden, se confunden más que nada cuando son de tercer orden las matrices y las vamos a resolver con Gauss o Gauss-Jordan, no porque sea difícil sino que ellos se confunden porque no están siendo ordenados en la resolución. Por eso cuando yo les decía que pongan una flecha o la notación les servía como guía para hacerlo bien. Si van a utilizar las flechas en las operaciones elementales entre filas pues deberán utilizar flechas para todo porque si utilizan el signo igual ya están diciendo otra cosa. Cuando dicen que van* *a cambiar una fila por otra entonces tienen que poner es una flecha porque si le ponen el signo igual ya significa que están igualando esas cantidades y las van es a resolver. Por eso es importante la notación, el orden para poder llegar a los resultados sino nunca van a llegar a los resultados.*

En la unidad de información se constata que el profesor conoce que los estudiantes presentan dificultades cuando realizan operaciones elementales entre filas, las cuales atribuye a una falta de orden y organización y a un uso inadecuado de la notación matemática. Además, creemos que en sus declaraciones existe un indicio del conocimiento del profesor sobre el papel de la notación matemática (KPM), lo cual atribuimos a su interés por el rigor y la precisión relacionada con la notación matemática.

En cuanto a la matriz inversa, observamos su conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) por el método de Gauss-Jordan (S4.72-124) para el caso de una matriz de orden 2, y la fórmula $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$ (S4.1-14, S4.29-61) para matrices de orden 2 y 3. Presentamos como ejemplo de este conocimiento una unidad de información, donde el profesor encuentra la matriz inversa de orden 3 (S4.29-61).

S4.29-61

29 P: *Ahora trabajemos con la matriz inversa de orden tres*
30 *Tenemos*

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

31 *Bueno para saber si podemos llegar a la inversa hallamos primero el*
32 *determinante. Tomamos la primera fila y la primera columna y*
33 *escribimos los elementos, primera fila segunda columna, primera fila*
34 *tercera columna*

$$\mathrm{Det(Y)} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

35 *Hagan esos cálculos y me dicen el valor del determinante*
36 E: *Es igual a 25*
37 P: *El determinante de Y nos da 25, un número diferente de 0 por lo tanto sí*
38 *hay matriz inversa*
39 *Ahora vamos a hallar los cofactores, pero para hallarlos no vamos a*
40 *poner número como en el caso del determinante, sino que vamos a*
41 *poner solamente el signo*
42 *Si la suma de i + j es igual a número par esto es positivo*
43 *Si la suma de i + j es igual a número impar esto es negativo*
44 *Entonces 1 +1 = 2, es un número par, entonces el signo es positivo, sigo*
45 *fila 1 columna 1, ¿cuáles son los elementos que quedan?*
46 E: *1, 4, -2, 1*
47 P: *Sí está bien. Ahora, 1+2, entonces el signo es negativo, fila 1 columna 2*

48 *y así. Luego vamos a hallar los cofactores de la fila 2 columna 1*
49 *¿qué signo?*
50 E: *Negativo*
51 P: *Fila 2 columna 1 y así con cada cofactor*

$$\mathrm{Cof}(1,1)=\overset{+}{\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(1,2)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(1,3)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{Cof}(2,1)=\overset{-}{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(2,2)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(2,3)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{Cof}(3,1)=\overset{+}{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(3,2)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(3,3)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}}$$

52 *Hay que diferenciar el determinante con los cofactores, para el*
53 *determinante no solamente tomamos el signo de referencia sino también el*
54 *número o elemento. En los cofactores solamente vamos a tomar el signo*
55 *Entonces, la matriz de los cofactores, al multiplicar cruzado sería*
56 *Ordenamos en una matriz todos los cofactores*

$$\mathrm{Cof}\,(Y)=\begin{bmatrix}9 & 10 & -7\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & -10 & 2\end{bmatrix}$$

57 *Ahora hallamos la adjunta de Y, es la traspuesta de la matriz de los*
58 *cofactores*

$$\mathrm{Adj}(Y)=\begin{bmatrix}9 & 2 & 1\\ 10 & 5 & -10\\ -7 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

59 *Para hallar la inversa, es igual a la adjunta de Y sobre el determinante*
60 *de Y, puede simplificar también*

$$Y^{-1}=\begin{bmatrix}9/25 & 2/25 & 1/25\\ 2/5 & 1/5 & -2/5\\ -7/25 & 4/25 & 2/25\end{bmatrix}$$

61 *Con eso nosotros hemos hallado la matriz inversa de Y*

Se evidencia el conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) de todo el proceso para encontrar la matriz inversa a través de la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,Adj(A)$, lo que incluye también el conocimiento sobre cómo obtener la matriz de cofactores, los signos de estos de acuerdo a los subíndices de cada elemento (S4.39-56) y la matriz adjunta (S4.57-58,). En la unidad de información, se evidencia además, el conocimiento de Carlos sobre *registros de representación* (KoT) algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) para la representación de una matriz o un determinante, y la notación de los subíndices para determinar los signos de los cofactores.

Pensamos en el conocimiento del profesor sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM) cuando recuerda a los estudiantes en varias ocasiones en la misma sesión de clases cómo obtener la matriz adjunta 2x2. Al respecto, citamos dos unidades de información (S4.15-17, S4.126-127).

S4.15-17

15 P: *Para hallar la adjunta les recuerdo, solamente se cambia el orden de*
16 *la diagonal principal pero se mantiene el mismo signo. En la segunda*
17 *diagonal sólo se cambia el signo*

S4.126-127

126 P: *Recuerde que la adjunta de una matriz 2x2 se halla intercambiando la*
127 *primera diagonal y el signo de la segunda diagonal*

De acuerdo a estas dos unidades de información, el profesor conoce que los estudiantes pueden cometer errores por no tener claro qué elementos cambian de posición y qué elementos cambian de signo cuando se trata de una matriz adjunta de orden 2.

El profesor conoce que una matriz multiplicada por su inversa da como resultado la matriz identidad ($AxA^{-1}=I$), lo cual asociamos a conocimiento sobre *procedimientos: características del resultado* (KoT). A continuación mostramos la respectiva unidad de información (S4.18-20).

S4.18-20

18 P: *Ahora, para comprobar si está bien esa matriz inversa multiplicamos*
19 *la matriz original por la inversa y nos tiene que dar la matriz identidad*
20 $JxJ^{-1} = I$

El conocimiento de Carlos sobre características del resultado se refleja en su exposición de que $JxJ^{-1} = I$ como la forma de comprobar que la matriz inversa calculada es la correcta. Relacionado a la matriz inversa, por otra parte, se observó conocimiento del profesor sobre *procedimientos: ¿cuándo se puede hacer?* (KoT) al indicar en varias ocasiones que una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea igual a cero (S4.37-38, S3*.79-85, S3*.150-152).

4.3.2.2. Conocimiento sobre determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

En relación con el determinante, se evidencia el conocimiento de Carlos sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) en cuanto a métodos como la regla de Sarrus (S3.1-7) y del menor y cofactores (S3.38-66). Citamos la unidad de información referente al cálculo del determinante por el método del menor y cofactores (S3.38-66).

S3.38-66

P: *Bien vamos a hallar las incógnitas de un sistema de ecuaciones aplicando otro método para hallar el determinante. Desde el primer semestre hemos venido viendo distintos métodos de eliminación para hallar las incógnitas y continuamos pero aplicando las matrices, por medio de los Determinantes*
Vamos primero a aprender el método para después resolver el sistema de ecuaciones, tenemos esta matriz

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

El método consiste en hallar el valor del determinante, ¿cómo se resuelve?, de la siguiente manera, este valor inicial que está aquí (refiriéndose al -1 de la primera fila primera columna) *lo ponemos como cofactor, tapamos todo lo que está en la primera fila y en la primera columna, solo ubicamos los valores que están descubiertos. Después ubicamos el segundo número de la fila* (primera fila)*pero con el signo cambiado y así mismo tapamos la primera fila y la segunda columna y ubicamos sólo los números que están descubiertos, ¿cuáles son?*

E: *4, 2, -2 y 5*

P: *Y después ubicamos como cofactor el último término de la fila sin cambiar el signo, los signos van alternados*

$$\overset{+}{-1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \;\overset{-}{-3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \;\overset{+}{+1/2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Este signo de aquí se multiplica por este de acá, menos por más, menos, este de aquí que es positivo (refiriéndose al 3)*se multiplica por el signo negativo queda negativo y este de aquí queda positivo, o sea que solamente se cambia el signo al segundo término*
Ahora procedemos a hallar los determinantes. Para hallar los determinantes multiplicamos cruzado y el segundo término de derecha a izquierda se cambia de signo
¿Cuál es el valor del determinante entonces?

E: -76

P: *Este es el método que ustedes van a utilizar para hallar las incógnitas, se llama el menor de la fila para buscar el determinante*

Además de conocer el procedimiento de cálculo del determinante (método del menor y cofactores), podemos observar en las primeras (S3.38-44) y en las últimas líneas (S3.65-66) de la unidad de información que Carlos introduce el determinante enfocando su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, evidenciando así conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) dentro de un contexto puramente matemático.

El profesor evidencia nuevamente conocimiento sobre *procedimientos: ¿cómo se hace?* (KoT) ahora referido a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya sea por la regla de Cramer (S3.13-37), método de Gauss (S2*.97-186) o aplicando la matriz inversa (S3*.1-99, S3*.100-182). No aborda el método de Gauss-Jordan para resolver estos sistemas. Citamos como ejemplo, la unidad de información donde el profesor muestra su conocimiento sobre la resolución de un sistema de ecuaciones lineales 3x3 empleando la matriz inversa (S3*.100-182).

S3*.100-182

P: *Ahora, así mismo como hay ejercicios de aplicación de matrices de orden dos, también hay de orden 3*
Tienen aquí otro problema
En la primera semana de trabajo en una pequeña empresa, 4 empleados hicieron 70 literas, las cuales se transportaron en 5 viajes. En la siguiente semana, 6 empleados hicieron 80 que se llevaron en 5 viajes. Y en la tercera semana 8 empleados hicieron 90 que se trasladaron en 6 viajes
¿Cuál debe ser el precio de venta de cada litera y cuál el salario semanal de cada empleado y cuánto debe pagarse por cada viaje de transporte para que la ganancia sea $2700 en la primera semana, $2600 en la segunda y de $2480 en la tercera semana?
Aquí nos piden determinar el precio de venta de cada litera, entonces la primera incógnita sería la p de precio de venta de cada litera y la segunda es el salario semanal, entonces la incógnita sería s del salario de cada empleado y después vamos a ver cuánto debe pagarse por cada viaje, ustedes pueden poner ahí la v de viaje o de viáticos
¿Quién planteó ya el ejercicio? Quiero que lo hagan ustedes
Bien, les debo decir que la producción o fabricación de literas es lo positivo y lo negativo sería pagar a los empleados y también el costo de los viajes. ¿Ya está planteado?
Lean bien, la producción de las literas va primero como lo positivo y lo demás es negativo
E: *¿Es así?*
P: *Usted ya lo tiene bien avanzado, excelente, usted ha utilizado otras incógnitas. Pero pienso que el orden si es importante, debe poner primero la inversa multiplicada por el valor de la ganancia. Muy bien Luis. Vamos a continuar, yo usaré estas incógnitas p=precio, s=salario y v=viaje*
Pero ustedes pueden utilizar las que crean convenientes
Se forma un sistema de ecuaciones con tres incógnitas donde la primera

semana la producción es de 70 literas pero hay un gasto de salario en 4 empleados y como son 5 viajes obviamente también es un gasto y la pregunta es ¿cuál debe ser el precio de venta de cada litera? ¿cuánto el salario de cada empleado? y ¿cuánto debe pagarse por viaje de transporte para que la ganancia sea en la primera semana $2700, en la segunda semana $2600 y en la tercera semana $2480?. Entonces para la segunda y tercera semana también planteamos las ecuaciones.

1. Primera máquina $70p - 4s - 5v = \$2700$
2. Segunda máquina $80p - 6s - 5v = \$2600$
3. Tercera semana $90p - 8s - 6v = \$2480$

Formamos las matrices respectivas y tomamos los coeficientes, independientemente de las incógnitas. Sigo yo manteniendo la C de costos, la S de solución y la G de ganancia, pero esta p, s y v correspondiente a las tres incógnitas de precio, salario y viáticos los coloco en forma de matriz. También ponemos como matriz los valores 2700, 2600 y 2480

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 70 & -4 & -5 \\ 80 & -6 & -5 \\ 90 & -8 & -6 \end{bmatrix}}_{C} \; X \; \underbrace{\begin{bmatrix} p \\ S \\ V \end{bmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2700 \\ 2600 \\ 2480 \end{bmatrix}}_{G}$$

Entonces tenemos que CxS es igual a G, pero yo necesito hallar S, al despejar me va a quedar S=G/C, la C la pasamos al numerador y nos queda $C^{-1}xG$

Para hallar la S de la solución tenemos que hallar la inversa de C y pueden utilizar ustedes el método que más fácil se les haga. En este caso, usaremos el menor de la fila. Hallemos el valor del determinante, yo he tomado la primera fila y la primera columna, entonces el cofactor se me hace 70 y queda lo que está expuesto allí. Después tomo el 4 pero ustedes saben que esto está en forma alternada, positivo, negativo, positivo

$$|\,C\,| = 70 \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} +4 \begin{vmatrix} 80 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 80 & -6 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}$$

Al resolver nos va a dar un valor positivo de 100.

Sea positivo o negativo no importa, lo que importa es que sea un valor diferente de 0 para que la matriz tenga inversa

Así mismo con los cofactores vamos a hallar los valores de la adjunta

$$\text{Cof}(1,1)= \overset{+}{\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(1,2)= \overset{-}{\begin{vmatrix} 80 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(1,3)= \overset{+}{\begin{vmatrix} 80 & -6 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$\text{Cof}(2,1)= \overset{-}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(2,2)= \overset{+}{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(2,3)= \overset{-}{\begin{vmatrix} 70 & -4 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$\text{Cof}(3,1)= \overset{+}{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(3,2)= \overset{-}{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 80 & -5 \end{vmatrix}} \quad \text{Cof}(3,3)= \overset{+}{\begin{vmatrix} 70 & -4 \\ 80 & -6 \end{vmatrix}}$$

La matriz de cofactores sería

$$\text{Cof}\,(C) \begin{bmatrix} -4 & 30 & 100 \\ 16 & 30 & 200 \\ -10 & -50 & -100 \end{bmatrix}$$

Aquí ya no ubicamos el valor de la intersección con las columnas, solamente aplicamos el signo, que si 1+1 da un número par entonces el *resultado en este caso no cambia de signo queda -4. Pero si yo tengo 1+2 nos da una cantidad impar, entonces allí sí se cambia el signo Y así sucesivamente*

E: *Cuando es cofactor impar ¿se modifica el signo del resultado?*

P: *Sí se modifica el signo del resultado, por ejemplo, yo tengo aquí 24-40* (segunda fila primera columna) *me debe dar una cantidad negativa -16, pero esto de aquí corresponde a la fila 2 columna 1, 2+1 =3, es número impar, se modifica el signo del resultado*

E: *Cuando es par ¿se mantiene?*

P: *Cuando es par se mantiene el resultado. Mire aquí por ejemplo nos da -10, no se modifica el signo porque al sumar el cofactor de la fila con la respectiva columna* (tercera fila primera columna*) nos da un número par, se conserva el signo en -10*

Entonces, para hallar la adjunta de C, ¿qué es lo que se hace?

E: *La traspuesta*

P: *Sí la traspuesta de la matriz de cofactores*

$$\text{Adj (C)} = \begin{bmatrix} -4 & 16 & -10 \\ 30 & 30 & -50 \\ -100 & 200 & -100 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a hallar la matriz inversa C^{-1}, es igual a todos los valores de la adjunta dividida para el determinante

Entonces tenemos que la inversa está constituida por los valores

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1/25 & 4/25 & -1/10 \\ 3/10 & 3/10 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora para hallar nosotros el valor de S, ¿qué tenemos que hacer?

E: *Multiplicar el valor de la inversa de C por G*

P: *Exacto*

$$C^{-1}xG = \begin{bmatrix} 60 \\ 350 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ok, entonces con eso ya tenemos la respuesta de las incógnitas verdad, donde 60 es el precio, 350 es el salario y 20 es lo que se debe ocupar en viaje, en viático

Reemplace en cualquiera de las ecuaciones y tiene que satisfacer a la Ecuación

Además del conocimiento del profesor sobre el *procedimiento: ¿cómo se hace?* (KoT) en sí mismo relacionado a resolver un sistema de ecuaciones lineales, y en este caso, los demás procedimientos que esto conlleva (determinante de una matriz por el método del menor y cofactores, S3*144-150; matriz de cofactores con sus respectivos signos, S3*153-159; matriz adjunta, S3*170-172; y matriz inversa por la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj(A)$, S3*173-175), observamos el conocimiento de Carlos sobre *procedimientos: características del resultado*, al indicar que una vez que han encontrado el valor de las incógnitas del sistema, deberán reemplazar en cualquiera de las ecuaciones del mismo y el resultado si es correcto debe satisfacer la ecuación (S3*.182-183).

Se evidencia también el conocimiento de Carlos de los *registros de representación* (KoT) algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al referirse al planteamiento del sistema de ecuaciones lineales a partir de los datos, y representarlo luego éste como una matriz; y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006) al emitir el enunciado del problema y hablar de la notación matemática relacionada con la denominación de las incógnitas y las matrices en el problema planteado.

Asimismo, registramos el conocimiento del profesor sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales a través de la matriz inversa, para encontrar la solución de problemas de aplicación que pueden representar una situación cotidiana de la vida real (S3*.1-99, S3*.100-182), sosteniendo en sus declaraciones que los estudiantes deben ver la utilidad del contenido que se les enseña, tal como se indica en la siguiente respuesta que obtuvimos en una entrevista (E3.P5), cuando se le preguntó su criterio sobre utilizar ejemplos prácticos y qué potencialidad les encuentra.

E3.P5: *Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés.*

El profesor además de su conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) del contenido dentro de un contexto matemático, demuestra con este tipo de problemas de aplicación el conocimiento del contenido en situaciones de la vida real. Además, registra conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza* (KMT), ya que para Carlos, el abordar un contenido con este tipo de ejemplos hace que el estudiante demuestre mayor interés en el tema; lo cual asociamos con la noción de *transparencia* de un ejemplo (Figueiredo et al., 2009), pensando en que el profesor sabe que puede llamar la atención del estudiante a través de la demostración de la aplicación del contenido, que le sirve a su vez, para la enseñanza de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales a través del cálculo de la matriz inversa. Aquí este tipo de ejemplos, tiene la finalidad de introducir un nuevo tema con la característica de proporcionar una perspectiva diferente sobre el mismo (Zazkis y Chernoff, 2008), es decir, en este caso sería ilustrar un procedimiento, desde la perspectiva de su aplicación en una situación cotidiana. No encontramos evidencias de otras aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales (ver análisis de contenido).

4.3.3. Resumen del conocimiento evidenciado por Carlos sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

A continuación presentamos la Figura 18, donde se integra de forma minuciosa el conocimiento de Carlos en cada uno de los subdominios evidenciados en el análisis de las sesiones de clases. En dicha figura, cada una de las categorías de los subdominios evidenciados en el análisis se representan con una forma (figura) y un color; así mismo, el conocimiento en sí lo hemos escrito en un rectángulo, identificando si se trata de evidencias obtenidas durante el primer o segundo año de observaciones de la práctica del profesor, o durante ambos años.

De las matrices conoce registros de representación, tipos y definiciones, de las cuales trabaja las matrices escalonada e inversa. De la matriz escalonada registramos conocimiento de definiciones (erróneo en este caso), procedimientos (¿cómo se hace?), fenomenología y aplicaciones y errores de los estudiantes. De la matriz inversa se observa que conoce los procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado) y fenomenología y aplicaciones. Además, este conocimiento sobre varios procedimientos para encontrar la inversa de una matriz pone en evidencia a su vez, conocimiento errores y dificultades de los estudiantes.

Cuando aborda las operaciones con matrices se refleja su conocimiento sobre registros de representación, fenomenología y aplicaciones y ejemplos para la enseñanza. De la suma conoce los procedimientos (¿cómo se hace? y ¿cuándo se puede hacer?). Del producto de un escalar por una matriz se observó conocimiento sobre el procedimiento (¿cómo se hace?). Del producto de dos matrices se registra conocimiento sobre los procedimientos (¿cómo se hace? y ¿cuándo se puede hacer?), incluyendo conocimiento de la multiplicación de matrices particionadas (multiplicación por bloques).

En el caso de los determinantes conoce procedimientos (¿cómo se hace?) y fenomenología y aplicaciones. De los sistemas de ecuaciones lineales conoce procedimientos (¿cómo se hace? y características del resultado), registros de representación, fenomenología y aplicaciones y ejemplos para la enseñanza.

La Figura 18 a su vez, nos permitió elaborar la Tabla 14 que resume el conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Carlos, considerando subdominios, categorías y subcategorías bajo el enfoque del MTSK, la misma que presentamos posterior a la mencionada figura.

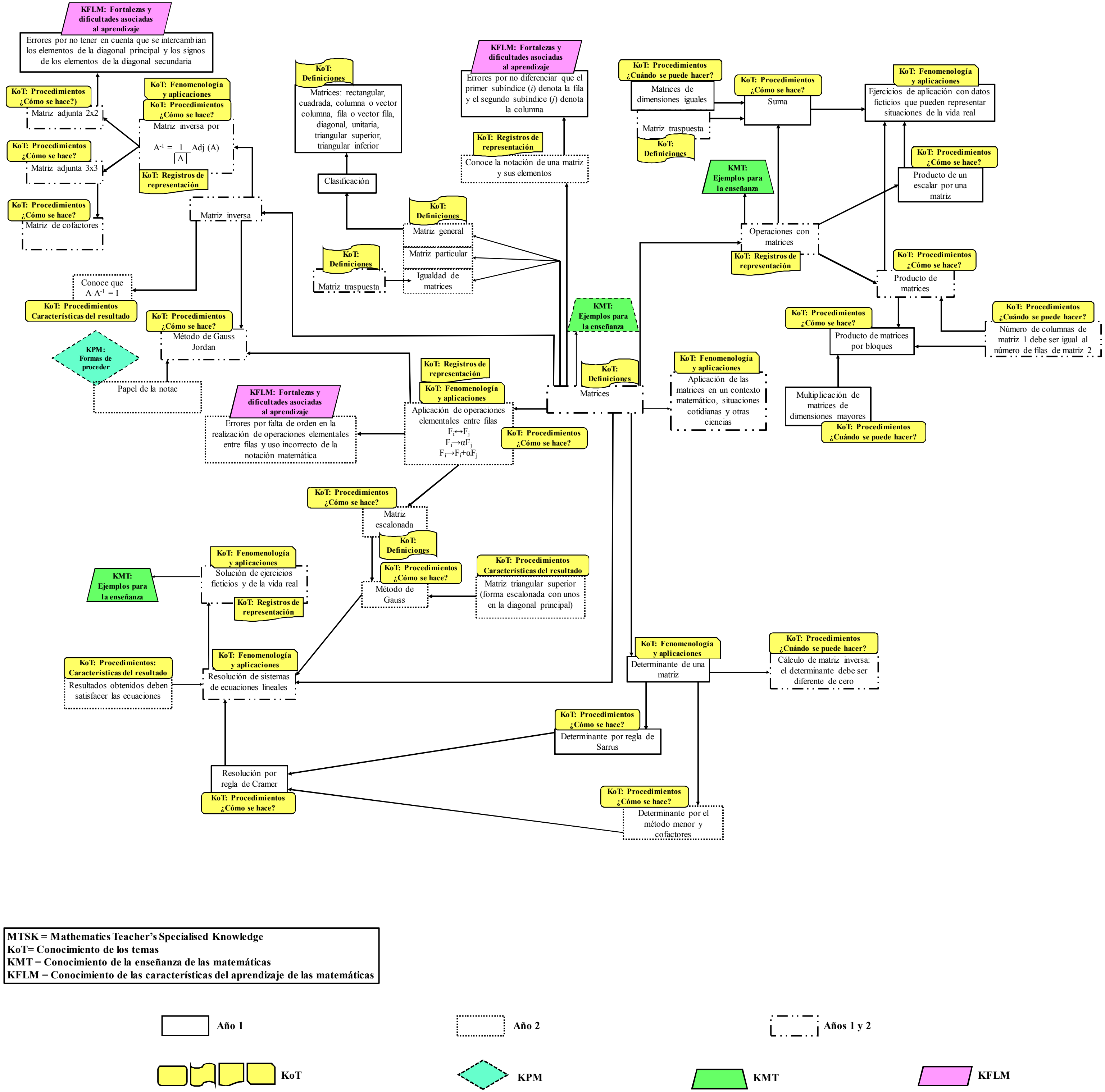


Figura 6. Esquema que detalla el conocimiento especializado de Carlos sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales bajo el enfoque del MTSK

Tabla 14. Conocimiento sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales observado en la práctica de Carlos bajo el enfoque del MTSK.

Subdominio	Categoría	Conocimiento observado en la práctica de Carlos
KoT	***Definiciones***	-Definición de matriz. -Definición de matriz cuadrada. -Definición de matriz rectangular. -Definición de matriz triangular superior. -Definición de matriz triangular inferior. -Definición de matriz identidad o unitaria. -Definición de matriz traspuesta. -Definición de igualdad de matrices. -Definición de matriz escalonada. -Definición de matriz diagonal. -Definición de matriz columna o vector columna. -Definición de matriz fila o vector fila. -Definición de matriz general. -Definición de matriz particular.
	Fenomenología y aplicaciones	-Aplicación de las matrices en situaciones cotidianas. -Aplicación del determinante de una matriz en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer). -Aplicación de las operaciones elementales entre filas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss. -Aplicación de la suma de matrices para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones cotidianas ficticias o de la vida real. -Aplicación del producto de un escalar por una matriz para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones cotidianas ficticias o de la vida real. -Aplicación del producto de dos matrices para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones cotidianas ficticias o de la vida real. -Aplicación de las operaciones elementales entre filas en la resolución de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan. -Aplicación de la matriz inversa es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. -Aplicación de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (por medio de la matriz inversa) para encontrar la solución de problemas matemáticos que pueden representar situaciones cotidianas ficticias o de la vida real.

Continuación…

Subdominio	Categoría		Conocimiento observado en la práctica de Carlos
KoT	***Registros de representación***		-Notación de las matrices (registro algebraico-matricial). -Notación de los elementos de una matriz (registro algebraico-matricial y verbal). -Notación de las matrices triangular superior y triangular inferior (registro esquemático-pictográfico). -Notación de las operaciones elementales entre filas (registro algebraico y verbal). -Notación del determinante de una matriz (registro algebraico-matricial). -Notación de los subíndices para determinar los signos de los cofactores de una matriz (registro algebraico-matricial). -Operaciones con matrices (registro algebraico-matricial, aritmético y verbal) -Sistemas de ecuaciones lineales a partir de los datos extraídos de un problema de aplicación para su posterior representación en una matriz (registro algebraico-matricial). -Problemas de aplicación y notación matemática relacionada con la denominación de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales y matrices en un problema de aplicación (registro verbal).
	Procedimientos	***¿Cómo se hace?***	-Algoritmo para sumar matrices. -Algoritmo para multiplicar un escalar por una matriz. -Algoritmo para multiplicar matrices. -Cálculo de la matriz inversa aplicando $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert} Adj(A)$ -Cálculo de la matriz inversa aplicando el método de Gauss-Jordan. -Procedimiento para escalonar una matriz. -Cálculo del determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus. -Cálculo del determinante por el método del menor y cofactores. -Cálculo de la matriz de cofactores. -Cálculo de la matriz adjunta 2x2 y 3x3. -Determinación del signo del cofactor de una matriz. -Cálculo de la matriz adjunta 2x2 y 3x3. -Resolución de un sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer. -Resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss (operaciones elementales entre filas para escalonar una matriz, transformando en unos la diagonal principal). -Planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales a partir de la interpretación de los datos de un problema de aplicación.
		¿Cuándo se puede hacer?	-Para sumar matrices es necesario que sus dimensiones sean iguales. -Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz 1 sea igual al número de filas de la matriz 2. -Para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero. -La multiplicación de matrices por bloques constituye un artificio matemático que se puede utilizar para multiplicar matrices de dimensiones mayores.

Continuación…

Subdominio	Categoría		Conocimiento observado en la práctica de Carlos
KoT	***Procedimientos***	***Características del resultado***	-Al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas (método de Gauss), se obtiene una matriz triangular con unos en la diagonal principal. -Al encontrar la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan se obtiene una matriz identidad. -El producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad. -En la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, los resultados obtenidos deben satisfacer a las ecuaciones que conforman el sistema.
KMT	***Ejemplos para la enseñanza***		-Ejemplo práctico (relacionado con situaciones de la vida real) para abordar el tema de matrices. -Ejemplos prácticos (relacionados con situaciones de la vida real) para la enseñanza de operaciones con matrices (suma, producto de una matriz por un escalar y producto de dos matrices. -Ejemplos prácticos (relacionados con situaciones de la vida real) para la enseñanza de resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de la matriz inversa.
KFLM	***Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje***		-Los estudiantes se pueden equivocar al obtener la adjunta de una matriz 2x2 por no tener en cuenta que en el caso de la diagonal principal se intercambian los elementos con su mismo signo y para la diagonal secundaria sólo se cambian los signos de los elementos. -Los estudiantes se pueden equivocar al ubicar los elementos de una matriz por no diferenciar claramente que el primer subíndice (i) se refiere a la ubicación de la fila, y el segundo (j) se refiere a la ubicación de la columna. -Los estudiantes se pueden equivocar en la realización de operaciones elementales entre filas cuando resuelven un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss o la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, por no resolver de forma ordenada el ejercicio o por el uso incorrecto de la notación matemática.

4.4. Análisis de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

4.4.1. Metodología

Praxis

En el aula de Jordy, *los ejercicios pretenden reproducir los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos* (TE1)[43]. El profesor expone el contenido matemático, buscando la atención y participación del estudiante a través de preguntas sobre los procedimientos, seguido de actividades de reproducción (ejercicios), que él mismo proporciona al estudiante para que practique lo enseñado. En sus aulas, se enfatiza en ejemplos variados, los cuales plantea sobre la marcha en el momento de la exposición.

La dinámica de sus clases se compone generalmente de dos momentos: el primero, en el cual Jordy expone el contenido matemático a través de diferentes ejemplos, dando a conocer las características de cada uno, los cuales le son de utilidad para aclarar al estudiante los procedimientos; y el segundo, en el cual, proporciona a los alumnos una hoja de ejercicios, a través de las cuales interesa que el estudiante practique los procedimientos enseñados. Así, notamos que para el profesor es importante la práctica de ejercicios en matemáticas, lo cual asociamos con la reproducción de los procesos lógicos que enseña en sus clases.

El indicador describe perfectamente la actividad del aula del profesor y adicionalmente, su énfasis en los errores de los estudiantes. Ya hemos visto en los apartados anteriores, relacionado con evidencias del conocimiento de este profesor sobre los errores de los estudiantes, cómo de manera constante advierte a sus alumnos de posibles errores, con la finalidad de que no los reproduzcan. Por ejemplo, consciente de que los alumnos pueden equivocarse en el cálculo de un determinante pensando que al intercambiar las filas o columnas no se afecta el valor del mismo, por no tener en cuenta aquella propiedad que indica que si en un determinante se cambian entre sí, dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo (S4*.50-59), procura advertir de este hecho a los estudiantes.

[43] En el texto se incluyen en cursiva aquellos indicadores provenientes de la descripción original del instrumento de análisis de concepciones de Carrillo (1998), con las siglas de la tendencia a la cual corresponden y el número del indicador.

S4*.50-59

50 P: *Si tenemos esta matriz A*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

51 *y calculamos su determinante, ¿Cuánto da?*

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

52 E: *11*

53 P: *Le cambiamos la fila a ver qué pasa*

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

54 *Debe dar ¿cuánto?*

55 E: *-11*

56 P: *Ahí hay que tener cuidado entonces, cuando trabajamos con matrices*
57 *decimos que las matrices son equivalentes si cambia una fila por otra.*
58 *Pero si trabaja con determinantes y cambian una fila por otra, el valor*
59 *del determinante cambia de signo.*

Al igual que este caso, hemos constatado en las observaciones de las clases de Jordy, su especial atención a otros errores habituales, ya que en muchas ocasiones interrumpe sus exposiciones porque considera importante hacer advertencias sobre errores a los estudiantes. Relacionado con lo anterior, el profesor indica en una entrevista cómo determina los errores que cometen los estudiantes (E1.P14).

E1.P14: *Los errores cometidos por los estudiantes en el tema de matrices se suelen determinar con las evaluaciones, talleres y en las mismas clases cuando ellos desarrollan los ejercicios, ahí voy mirando en qué se equivocan y luego se refuerza eso para que no sigan cometiendo los mismos errores.*

Ya hemos mencionado que la práctica de Jordy se caracteriza fundamentalmente por la exposición de ejercicios que escribe en la pizarra, y la exposición de procedimientos paso a paso; no existen evidencias de exposiciones únicamente teóricas, ya que cuando se trata de definir un objeto matemático lo hace en el transcurso de la propia exposición del procedimiento o mediante la presentación de ejemplos. En ese sentido *el profesor no expone los contenidos en su fase final, simula su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas* (TE2). Jordy en sus exposiciones procura no presentar directamente la resolución y respuesta de los ejercicios, sino más bien, busca que el estudiante se fije en por qué se llega a una determinada resolución y en las características de ésta, empleando ejemplos variados de un mismo contenido, y cuando se trata del uso de un algoritmo va construyendo las soluciones a través de preguntas dirigidas a todo el grupo de estudiantes. Esto es sustentado por el profesor en una entrevista (E1.P15), donde se le preguntó qué hace para que el grupo de estudiantes participe en el desarrollo de las clases.

E1.P15: *Como técnica generalmente se plantean ejercicios y se piden opiniones a todos, para ver cómo se puede resolver tal o cual problema. Cuando se hacen talleres, en un momento determinado, suelo ir resolviendo cada problema en la pizarra para todos, más que nada con aquellos ejercicios que tienen alguna complicación para aclarar las dudas, entonces ahí van participando los estudiantes, existe la oportunidad en ese momento de que todos puedan aportar.*

De su respuesta, asociamos al indicador ya enunciado la descripción de cómo procede durante sus exposiciones, al indicar como técnica de enseñanza general el planteamiento de ejercicios, donde la simulación del proceso de construcción de las soluciones estaría basado en la participación de los estudiantes, a través de las preguntas que va haciendo el profesor.

Ya de su práctica de aula, relacionada con este indicador, por ejemplo, citamos la explicación del algoritmo de la suma de matrices (S1.146-163).

S1.146-163

146 P: *Vamos a suponer que tenemos la matriz A y tenemos las matriz B y*
147 *tenemos la matriz C*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & -10 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

148 *¿Cuáles de esas matrices pueden sumarse?*
149 E: *A+B*
150 P: *O podemos hacer también B+A*
151 *¿Por qué no se puede sumar A+C?*
152 E: *Son diferentes*
153 P: *No tienen las mismas dimensiones, aquí ¿qué es lo que ocurre con*
154 *respecto a B o a la matriz A?*
155 E: *La C tiene una columna de más*
156 P: *Tiene una columna de más, entonces no podemos sumar A con C,*
157 *no está definida esa suma, ni podemos sumar B con C porque*
158 *no está definida esa suma, porque son de diferentes dimensiones las*
159 *matrices, lo que sí podemos hacer es A+B, ¿qué hay que hacer para*

160 *sumar? Usted toma los elementos que están en la misma ubicación y*
161 *los suma, por ejemplo 2+(-1)*

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

162 *Y en la segunda fila lo mismo*
163 *¿Qué pasaría si hacemos B + A?*

Para explicar la suma de matrices, el profesor se apoya en estrategias expositivas, con el predominio de ejemplos variados y preguntas que intentan captar la atención de los alumnos e inducir al razonamiento.

En las observaciones de clases no participantes de este profesor, no encontramos evidencia de la utilización de equipo informático y/o software, lo cual es reconocido por Jordy en una entrevista (E1.P18), donde se le preguntó si empleaba algún tipo de software en sus clases.

E1.P18: *No estoy empleando software, en eso me tienen que llamar la atención porque no estoy empleando ningún software por ahora. Tengo un programa en la computadora pero debo estudiarlo primero porque no podría presentarme ante los estudiantes sin prepararme.*

Es decir, los recursos en los cuales se apoya este profesor son los tradicionales, y como hemos constatado en el transcurso de las sesiones de clases observadas, básicamente sólo utiliza la pizarra.

En el segundo año de observaciones de la práctica del profesor, existe un cambio en la metodología del aula, ya que algunos contenidos fueron consultados y expuestos por los estudiantes[44], y el profesor interviene en ciertos casos para complementar el contenido o corregir errores cometidos por los alumnos en su exposición al resto de sus compañeros. La clase sigue siendo expositiva, pero se observa que Jordy cede cierto protagonismo al estudiante, aunque sin cambiar demasiado la dinámica del aula, ya que aunque sea ahora un alumno quien expone la clase que ha preparado, realmente se sigue refiriendo un determinado procedimiento y luego se trabajan ejercicios de aplicación. Por tanto, habría acercamiento hacia una tendencia espontaneísta (*el profesor propone actividades de*

[44] Este cambio en la metodología de las clases de los dos profesores que participan en esta investigación, se produce debido a que ambos imparten la asignatura de Álgebra Lineal en la misma carrera, y por tanto, han mantenido diálogos en los cuales decidieron establecer grupos de trabajo entre sus alumnos para que expliquen ciertos contenidos matemáticos durante las aulas, como una forma de fomentar la participación activa de los alumnos en sus clases.

manipulación de modelos, a través de los cuales se producirá, eventualmente, un conocimiento no organizado, E2), aunque no podríamos decir que su Praxis llega a ser espontaneísta propiamente, ya que no hay actividades donde el estudiante explore o manipule; ni tampoco investigativa (*el profesor tiene organizado el proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación* I2), porque no llega a proponer investigaciones orientadas hacia la resolución de problemas. Esto refleja, además, cambios en la concepción del aprendizaje del profesor y papel del alumno, que mencionamos más adelante.

Objetivos

Los objetivos que persigue Jordy están al parecer relacionados con el contenido antes que con las actitudes de los estudiantes hacia el mismo, lo cual fue deducido en un primer momento a partir de su respuesta en una entrevista (E1.P1), al preguntarle las expectativas que tenía con respecto al desarrollo del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

E1.P1: *Primero que entiendan lo que es una matriz, luego que sepan utilizarla para resolver un problema. Que puedan hacer las operaciones indicadas, plantear problemas de matrices y que sepan resolverlos. Porque las matrices sirven para la resolución de ecuaciones y tienen también otro tipo de aplicaciones en lo que es propiamente la carrera de Ingeniería en Sistemas.*

Para el profesor él énfasis de sus clases está en el manejo de los procedimientos, y la aplicabilidad del contenido dentro de la propia matemática (aplicación de las matrices en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales). Por tanto, en su modo de enseñanza *al carácter terminal de los objetivos se añade su funcionalidad* (TE3). Los objetivos que persigue en sus aulas son a corto plazo, sin plantearse modificaciones en los mismos y la funcionalidad a la que nos referimos, al parecer está restringida al mismo contenido matemático en cuestión, es decir, entre las matrices determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Lo enunciado por el profesor en la entrevista va acorde con lo observado en sus clases, ya que vemos un énfasis en lo conceptual cuando aborda propiedades; por ejemplo, las de los determinantes, procurando que el estudiante comprenda el enunciado de las mismas, y las posibles variantes en una misma propiedad. En la explicación del profesor se nota su esfuerzo por dejar claro cada enunciado con su respectivo ejemplo, como el caso de la multiplicación de un escalar por un determinante (S4*.103-117).

S4*.103-117

103	P:	*Tenemos la matriz A*
		$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
104		*¿Se acuerda usted como se hacía esto 5A?*
105	E:	*Sí*
106	P:	*Venga hágalo*
107	E:	*Era así*
		$5A=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$
108	P:	*Ahora ¿cómo haría si tuviera esto?*
		$\lvert A\rvert=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
109		*5|A|*
110	E:	*Se multiplica solo por una fila o por una columna*
		$5\lvert A\rvert=\left\lvert \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} =55 \right\rvert$
111		*Cuando usted multiplica un determinante por un escalar no se hace*
112		*como cuando se trata de una matriz que se multiplica uno a uno cada*
113		*elemento de la matriz, sino que se multiplica sólo una fila o una*
114		*columna.*
115		*Las matrices y los determinantes son parecidas, pero tienen sus*
116		*propiedades diferentes porque son dos cosas diferentes,*
117		*son otra cosa*

Decimos que esta unidad de información está ligada a una comprensión conceptual, por cuanto Jordy procura la justificación lógica de las reglas, es decir, como una forma de que sus alumnos comprendan la propiedad de los determinantes, menciona las diferencias con la propiedad relacionada con la multiplicación de un escalar por una matriz, destacando que, aunque haya relaciones entre ambos temas, su naturaleza es diferente.

Por otra parte, en su práctica hace énfasis en lo procedimental, es muy cuidadoso en exponer paso a paso los algoritmos, el cómo se hace, apoyándose en ejemplos, como en el caso del manejo de operaciones elementales entre filas (S3.138-172), donde además del dominio procedimental interesa la aplicabilidad de dichas operaciones en la obtención de matrices escalonadas, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

S3.138-172

138 P: *¿Qué puedes hacer para escalonar esa matriz?*
139 *Hay algunas operaciones que se llaman operaciones elementales entre*
140 *filas. Puedes hacer 4 cosas:*
141 *Primero, puedes cambiar una fila con otra:* $E_1 = f_i \rightarrow f_j$
142 *Puedes cambiar esta fila con la primera o la segunda con la tercera y la*
143 *matriz sigue siendo equivalente*
144 *Otra cosa que se puede hacer, Tú puedes reemplazar cualquier* f_i *por esa*
145 *fila multiplicada por un escalar k diferente de 0:* $E_2 = f_i \rightarrow f_i.k$
146 *La tercera cosa que pueden hacer, puedes tomar una* f_i *cualquiera y a*
147 *ella le puedes sumar otra* f_j *multiplicada por un escalar k:*
148 $E_3 = f_i \rightarrow f_i + k{\cdot}f_j$
149 *El intercambio está fácil, por ejemplo, yo puedo colocar esta matriz así*

$$E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

150 *Esto de aquí es* E_1 *para que vea un ejemplo, si quiere de aquí puede*
151 *intercambiar otra fila y forma otra matriz equivalente*
152 *Si quiere aplicar* E_2 *entonces a esta segunda matriz que está aquí*
153 *vamos a reemplazarle* $f_2 \rightarrow -3f_2$

$$E_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_2 \rightarrow -3f_2$$

154 *Esa matriz es equivalente a esa y a la anterior*
155 *Vamos a aplicar* E_3
156 *Yo voy a pasar acá esta matriz, la fila 3 la voy a reemplazar por*
157 $f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$$

158 *El escalar puede ser positivo o negativo*
159 *La fila 1 queda igualita*
160 *La fila 2 queda igualita, van a cambiar la fila 3*

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

161 *Y también pueden hacer la cuarta operación,*
162 *vamos a reemplazar una* f_i *por ella multiplicada por un escalar*
163 *cualquiera sumado a otra fila multiplicada por otro escalar cualquiera:*
164 $E_4 = f_i \rightarrow k{\cdot}f_i + k{\cdot}f_j$
165 *O sea, ahora multiplicas las dos, la que vas a reemplazar y la otra*
166 *que vas a sumar*
167 *Conste que el escalar de aquí puede ser 1 o -1, tú las puedes sumar*
168 *simplemente o las puedes restar o la puedes multiplicar por un*
169 *número fraccionario*
170 *Entonces, vamos a reemplazar ahora* f_1 *por* $2f_1\text{-}3f_3$
171 *Como va a reemplazar sólo* f_1, f_2 *y* f_3 *sigue siendo la misma, no cambia*

$$E_4 \quad \begin{bmatrix} -17 & 27 & 17 & -14 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ & & & \end{bmatrix}$$

-1 -7 -3 4

172 *Bueno, ahí tienen un ejemplo de cada cosa*

El profesor va hilando la exposición referente a los tipos de operaciones elementales entre filas que se pueden aplicar a matrices y determinantes, y a través del mismo ejemplo va mostrando cada una de las operaciones, que en este caso serían procedimientos detallados que se pueden efectuar.

Incluso en el segundo año de observación de su práctica, cuando contenidos como la inversa de una matriz son expuestos por los estudiantes, al profesor le interesa que estos dominen los procedimientos (S6*.1-7).

S6*.1-7

1 E: *Nosotros lo que vamos a hacer es calcular la matriz inversa*
2 *por medio de la matriz adjunta*
3 *Vamos a proceder a hacer dos ejercicios*
4 E: *Para empezar a trabajar con la matriz adjunta primero se tiene que*
5 *sacar el determinante*

$$A= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6 P: *No se complique con los elementos de la matriz, interesa el*
7 *Procedimiento*

A través de esta unidad de información se destaca también su interés por lo procedimental. Sus clases están relacionadas con actividades de comprensión dentro de la propia matemática, ya sean éstas conceptuales, procedimentales y su aplicabilidad. La descripción de los objetivos de este profesor asociados a la tendencia tecnológica guardan relación con dos de las cuatro visiones de la enseñanza, descritas por Kuhs y Ball (1986): centrada en el contenido con énfasis en la actuación (procedimental) y centrada en el contenido con énfasis en la comprensión (conceptual). De acuerdo a lo observado en la práctica de Jordy, por una parte, el saber la asignatura se relaciona con la demostración del dominio de técnicas que persiguen una finalidad utilitaria de la materia, predominando el uso de la memoria, que conlleva a una aplicación mecánica de los procedimientos o algoritmos (procedimental), y, por otra parte, existen ciertos matices, de una justificación lógica de los conceptos y procedimientos que emplea el profesor (conceptual), lo cual va en sintonía con la comprensión de la lógica de la materia orientada a la reproducción de procesos.

Programación

La programación ha sido elaborada por el mismo profesor, se ha basado en sus conocimientos, experiencias previas, y a lo que corresponde según el curriculum abordar en este nivel. Se trata de *un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina* (TE4). Esta afirmación está basada en las respuestas obtenidas en entrevistas donde, por una parte, se le preguntó a Jordy si consideraba necesario modificar los contenidos de la programación para que haya una secuencia entre temas anteriores y posteriores (E4.P7) y, por otra parte, si en ocasiones se planteaba la improvisación de los temas de estudio de acuerdo a las necesidades de los alumnos o seguía el itinerario sin alteraciones (E3.P17).

E4.P7: *De hecho yo nunca he considerado el esquema de la asignatura como una camisa de fuerza, ahora hay una lógica en cuanto a qué temas ver antes o después, en el caso que se pueda sí se cambia el orden de los contenidos y lo otro en los sílabos hay un poco de libertad porque no nos dan ninguna cosa obligatoria. De hecho, los sílabos los tenemos que elaborar nosotros mismos, lo que está establecido es el marco teórico, los temas y subtemas, pero incluso en eso nos han dicho que tenemos libertad para modificar las temáticas, por ese lado hay la oportunidad de mejorar.*

E3.P17: *De acuerdo a la situación propia del aula a veces toca regresar para recordar algo que ya se vio, incluso alguna vez me ha tocado dándome cuenta que hay algo fundamental que no se domina, me ha tocado dejar el tema que estamos viendo y regresar a revisar totalmente alguna temática específica, incluso a veces se puede dar como un flash informativo de lo que en futuro toca ver con eso, sin que vayas a ahondar, pero hacerle ver que lo que estamos resolviendo nos va a servir para dentro de unos meses o dentro de algún tiempo.*

De acuerdo a las respuestas obtenidas, el profesor admite que tiene la libertad de alterar el orden de los contenidos e incluso modificarlos si así lo cree conveniente. Indica además, que en ocasiones le ha tocado revisar algún tema anterior o hacerles ver a los estudiantes la utilidad del contenido en temas futuros. Sin embargo, durante los dos años de observaciones de su práctica, la programación se ha tratado más bien como un documento cerrado, ya que al parecer lo que él prima es la lógica de la propia asignatura.

4.4.2. Sentido de la asignatura

Orientación

Para Jordy resultan importantes *tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad* (TE5).

Al profesor le interesa que el estudiante pueda distinguir las características de un objeto matemático, pero a su vez diferenciarlo de otro de características similares, por ejemplo, cuando se trata de matrices escalonadas y canónicas (S3.127-136).

S3.127-136

P: *La forma escalonada solamente los ceros van aumentando en cada fila, esa es la forma escalonada. En la forma canónica ese elemento debe ser 1 y debe ser en su columna el único número diferente de cero Para llegar a eso, tú puedes escoger cualquier matriz y transformarla a la forma escalonada y pueden haber muchas matrices escalonadas diferentes a la matriz que tú encontraste, o sea, entre ellas serían equivalentes, son equivalentes la una con la otra. Si de una matriz te sale otra porque le haces algunas operaciones son equivalentes pero reducirla a la forma canónica solamente hay una, para cada matriz hay una*

Como vemos, al profesor le interesa dejar claras las particularidades de estos dos tipos de matrices, lo cual considera importante como paso previo a la enseñanza de procedimientos (operaciones elementales entre filas) encaminado a escalonar matrices (S3.138-172, unidad de información que ya hemos citado en metodología).

Identificamos las *reglas* como algoritmos, vistos éstos como procedimientos estándar que hay que seguir paso a paso. Para el profesor es importante que el estudiante se apropie de los procedimientos y, además, sea consciente del uso flexible de los mismos. Interesa la lógica de dichos procedimientos, es muy claro en su práctica que cuando se trabajan los procedimientos busca enfatizar formas de simplificarlos o de hacerlos más fáciles, para que el estudiante los reproduzca. Esto se observa, por ejemplo, en el procedimiento de cálculo de un determinante 3x3 (S7.1-36).

S7.1-36

P: *Ahora interesa que se maneje bien las operaciones elementales entre filas. Estamos ahora calculando el determinante utilizando cofactores, entonces para los que llegaron recién, para que se igualen en lo que estamos trabajando, tenemos aquí un determinante, vamos a calcularlo utilizando el método de cofactores.*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Tomamos una fila o una columna cualquiera, entonces cada cofactor tiene su signo, aquí sabemos que es signo positivo, multiplicamos + por + da + 3 y esto multiplicado por el determinante del menor. Igual con el 5 sabemos que aquí en la matriz de los signos tenemos signo negativo, entonces – por – da +, luego colocamos aquí el determinante del menor. Aquí tiene signo positivo entonces + por + da +, como es 1 no hace falta colocarlo, luego resolvemos cada uno de los determinantes

$$= 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

¿Qué ocurriría si fuesen 0 el -5 y el 3? Esto se reduciría a 0, entonces una forma de trabajar o de aprovechar las operaciones elementales entre filas aplicando las propiedades de los determinantes, eso usted lo debe de haber consultado, cuando tú aplicas en un determinante las operaciones entre filas, la tercera y la cuarta, que le sumas el producto de un escalar por una fila a otra fila cualquiera, el determinante no cambia su valor. Entonces vamos a aplicar eso para hacer 0 a este -5 y al 3, ya vamos a ver qué ocurre. Aplico operaciones elementales entre filas para hacer 0, utilicemos este número como pivote y con esa fila hagamos 0 al -5 y al 3, a ver cómo queda.

Entonces, ¿con qué remplazamos la fila 1? Para hacer 0 al 3

¿Y la fila 2?

$$\begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 -3f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 +5f_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -8 & 22 \\ 0 & 7 & -33 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Entonces aplicando el mismo concepto utilizamos la primera columna, como este elemento es 0 al multiplicarlo por cualquier determinante va a dar 0, o sea sería así

$$= 0\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} -0\begin{vmatrix} -1 & 22 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -33 \end{vmatrix}$$

Nos damos cuenta fácilmente, que esto ¿cuánto va a dar?, esto va a dar 0 porque tenemos un factor 0 y el único valor que hay aquí diferente de 0 sería ese entonces vea usted que sale lo mismo

Aquí estamos utilizando los cofactores.

Aquí estamos utilizando operaciones elementales entre filas y cofactores, esto de aquí es necesario, podemos utilizarlo si tenemos determinantes de orden 4, 5.

De la unidad de información interesa destacar la lógica del método utilizado para calcular el determinante (menor y cofactores), y a su vez, el interés del profesor en que el estudiante note que es posible simplificar dicho procedimiento con el empleo de operaciones elementales entre filas, como una forma de que el alumno escoja la resolución que le parezca más sencilla orientada a su posterior reproducción.

Otro ejemplo claro del interés del profesor en el manejo de los procedimientos para su reproductibilidad se da en el segundo año de observaciones de la práctica de Jordy, cuando son los estudiantes los encargados de la exposición del contenido matemático, y uno de ellos plantea un problema al resto de la clase (S5*.136-142).

S5*.136-142

E: *Yo les traje un pequeño problema para resolver*
En una caja registradora hay 50 billetes de distintas denominaciones:
$20, $50, $100. Al contar el dinero se obtiene un total de $2250 dólares.
¿Cuántos billetes hay de cada denominación si la cantidad de billetes de
$20 es igual a la suma de las cantidades de billetes de 50 y 100?
P: *Deben plantear tres ecuaciones con tres incógnitas*
¿Ya plantearon alguna ecuación?

La intervención del profesor ocurre poco tiempo después (tres minutos) de que el estudiante plantea el problema a sus compañeros, es decir, no da el tiempo suficiente para que el grupo clase lo resuelva según su razonamiento por el método que mejor crea conveniente. Por tanto, no es visto como una situación problemática, sino más bien, es un ejemplo de que lo que le interesa al profesor es la reproductibilidad de procesos lógicos y, en este caso, una vez que los estudiantes han planteado el sistema de ecuaciones lineales, busca que sean capaces de resolverlo reproduciendo procedimientos como las reglas de Sarrus y Cramer, que fueron expuestos previamente por el grupo de estudiantes encargado de la exposición.

Finalidad

En la práctica de este profesor son importantes fundamentalmente las aplicaciones del contenido dentro de la propia matemática. Por ello, le asociamos el indicador que refiere que *la asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación* ***en la propia matemática, para el estudio de otras***

disciplinas o en la vida cotidiana (TE7)[45]. Este indicador se refleja en lo expresado por el profesor en una entrevista (E2.P7), en la cual se obtuvo la respuesta que sigue a continuación cuando se le preguntó si creía necesario que los estudiantes conozcan las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.

E2.P7: *Siempre es necesario que se entienda de dónde viene cada cosa, incluso para poder entender algo es necesario que lo sepan, ahora nos toca trabajar con vectores y luego con otros contenidos que tienen como base las matrices y ahí se necesita o se requiere que se pueda ver qué es lo que ocurre, porque este contenido es importante para lo que viene después en cuestiones de cálculo y ecuaciones diferenciales y ellos necesitan tener bases, que puedan ir viendo lo que ocurre en la parte de la resolución de ejercicios y luego que puedan verlo en la gráfica o representación. Cuando vemos el determinante por ejemplo, en el caso de las matrices, yo generalmente lo digo, o sea si vamos a resolver un sistema de ecuaciones lineales digo que antes vimos el determinante y que precisamente esos conocimientos los podemos emplear aquí para encontrar las incógnitas, de alguna manera hago una conexión.*

Relacionando su respuesta con la finalidad de la asignatura, asociamos el interés del profesor en resaltar aplicaciones dentro de la propia matemática, al indicar que el tema de matrices es la base para abordar el estudio de espacios vectoriales, temas de cálculo y ecuaciones diferenciales. Sus expresiones concuerdan con lo visto en su práctica de aula al explicar, por ejemplo, las propiedades de los determinantes (S4*.22-28).

S4*.22-28

P: *Si tú sumas las dos primeras filas te da la tercera, entonces el determinante allí vale 0*
¿Cómo le llaman a esto?
E: *Una combinación lineal*
P: *Tenga en cuenta esto porque será de utilidad cuando trabajemos con vectores. Una combinación lineal significa que esta fila* (la tercera) *nace de la combinación lineal de estas dos* (primera y segunda).

El profesor indica de qué se trata una combinación lineal y su interés en que quede claro, ya que será de utilidad en el tema de vectores. Además, en la respuesta obtenida en la

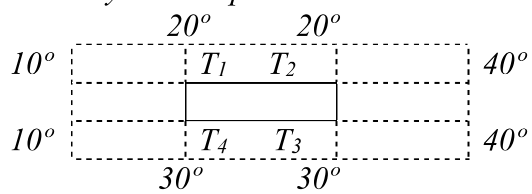
[45] En el texto se incluye en negritas y cursivas aquellos indicadores incluidos por Climent (2005) en el instrumento original de análisis de concepciones de Carrillo (1998). Dichas modificaciones en el instrumento de segundo orden original las hemos considerado importantes para el estudio de las concepciones que emergen de la actuación en el aula de dos profesores universitarios.

entrevista sostiene que hace notar a sus estudiantes la aplicación de temas como el de determinantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual se puede notar también en su práctica de aula cuando trabaja la regla de Sarrus y el método del menor y cofactores para encontrar el determinante de una matriz, con la finalidad de que sean aplicados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, a través de la regla de Cramer.

Como vemos, el tipo de aplicaciones a los que se refiere Jordy en la actividad del aula se enmarcan dentro de la propia matemática. Durante los dos años de observaciones de su práctica, apenas en una ocasión hay evidencia del carácter práctico que el profesor le da a la asignatura al considerar la resolución de posibles situaciones reales. Éste es el caso de un problema donde interesa encontrar la temperatura de cuatro nodos en una placa metálica (S2*.117-130).

S2*.117-130

117 P: *Ahora dibujemos la placa, esta es metálica delgada y no recibe mayor*
118 *temperatura perpendicular, o sea es una placa en el piso que no recibe*
119 *mayor temperatura perpendicular y está sostenida en una malla*
120 *metálica. Los 4 nodos a los que hace alusión son estos 4 puntos de*
121 *intersección del medio. Tenemos T1, T2, T3 y T4, entonces dice que la*
122 *temperatura en estos sitios es el promedio de los 4 nodos más cercanos*
123 *y nos da la temperatura en los bordes. Por este lado tenemos una*
124 *temperatura de 10º, por este borde de aquí arriba tenemos una*
125 *temperatura de 20º; por el lado derecho hay una temperatura de 40º y*
126 *en el lado inferior hay una temperatura de 30º*



127 *Entonces hay que plantear 4 ecuaciones, una para T1, una para T2,*
128 *para T3 y T4. Te salen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, es un sistema, esa*
129 *es la primera cosa que hay que hacer; resolverlo es encontrar la*
130 *temperatura en cada nodo.*

Con el planteamiento de este problema, Jordy busca resolver un sistema de ecuaciones lineales con operaciones elementales entre filas, con la finalidad última de que dichas operaciones sean aplicadas en la resolución de un problema que puede representar una situación real. Aunque este tipo de aplicación se observa de forma muy puntual, existe cierta concordancia con un fragmento de la respuesta obtenida en una entrevista, cuya respuesta se cita en el siguiente párrafo (E3.P1), donde indica que considera importante aplicar lo que se aprende para que no se olvide, aunque dicha aplicación no sea de forma inmediata.

4.4.3. Concepción del aprendizaje

Aprendizaje

Las expresiones de Jordy recabadas en una entrevista (E3.P1), donde se le solicitó que emitiera su criterio acerca de cómo cree él que se aprende la asignatura de Álgebra Lineal, guardan coherencia con lo observado en sus clases, en las cuales interesa la práctica de ejercicios, y donde *el aprendizaje se sigue concibiendo como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina* (TE8).

E3.P1: *Primero yo considero que se aprende practicando, especialmente lo que es matemáticas, y luego para fijar bien el conocimiento el asunto es buscarle la aplicación, para qué sirve eso. Yo creo que eso es lo fundamental, primero practicar y luego aplicar lo que se aprende. Es probable que la aplicación en algunos casos no sea tan inmediata pero es bueno a todo lo que uno va aprendiendo encontrarle siempre la aplicación porque si no se olvida. Uno mismo dice esto no me está sirviendo para nada inmediato, simplemente el cerebro lo olvida.*

Relacionamos esta unidad de información con la concepción del aprendizaje del profesor, ya que en ella indica que el aprendizaje de la asignatura se da con la práctica, es decir, reproduciendo ejercicios que ayudan al estudiante a memorizar los procedimientos enseñados y, además, dicho aprendizaje se afianza con el conocimiento de la aplicación del contenido matemático.

Tipo y forma-procesos

En cuanto al proceso de aprendizaje en sí, tal parece que el profesor piensa que, *aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo* (TE9) (regla general-aplicación a casos particulares), y donde *para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior* (TE10).

Para asignar estos indicadores nos hemos basado en las observaciones de aula, donde se constata que el aprendizaje se propicia efectivamente a través de un proceso deductivo. Si bien es cierto, en la mayoría de sus clases Jordy no aborda el contenido matemático con un ejemplo genérico, sino que más bien presenta ejemplos variados dando pautas a los estudiantes para que noten las diferentes características de los mismos. Finalmente está exponiendo el procedimiento o regla general, para pasar a la resolución de ejercicios donde el estudiante reproduce los algoritmos enseñados, es decir, asimila los conocimientos que le presenta el profesor y los pone en práctica de forma repetitiva.

Esto sucede por ejemplo, cuando expone el método para calcular el determinante por menores y cofactores y además, empleando operaciones elementales entre filas (S7.1-36, unidad de información ya citada en el indicador que corresponde a la orientación), como antecedente para abordar el cálculo de un determinante de orden cinco (S7.40-51).

S7.40-51

40 P: *Vamos a poner un determinante un poco mayor, o sea, siempre es*
41 *recomendable en este caso tomar la fila o la columna donde hayan*
42 *ceros, porque ya sabes que el cero multiplicado por cualquier*
43 *determinante va a dar cero. Consideremos por ejemplo este*
44 *determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

45 *Tenemos 5 filas, 5 columnas, entonces vamos a aplicar ahí las*
46 *operaciones entre filas para ir reduciendo. Si al determinante le aplica*
47 *operaciones elementales entre filas, no cambia su valor. ¿Qué fila o*
48 *columna nos conviene revisar? Puede ser la fila 4, puede ser la columna*
49 *3 o puede ser la columna 5 que tiene un 1, también el 1 siempre nos*
50 *ayuda porque eso no altera mayor cosa el valor. Entonces vamos a*
51 *utilizar la quinta columna y vamos a trabajar como pivote el número 1.*

Se nota que se trata de un proceso de aprendizaje deductivo, ya que primero expone los procedimientos, y posteriormente aborda un caso particular donde aplica el método ya expuesto, operaciones elementales entre filas, y propiedades de los determinantes.

En otro caso, para que el estudiante llegue a captar las diferentes características del contenido matemático que expone, el profesor presenta tres tipos de matrices escalonadas resaltando sus diferentes particularidades (S3.88-113).

S3.88-113

88 P: *Ahora quiero que miren acá a la pizarra*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

○ → Elementos distinguidos de fila

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

89 *¿Qué pasa en la primera matriz, qué le ven de especial?*
90 *Primero no son cuadradas, ¿qué tienen de especial?*
91 E: *Un poco de ceros*
92 P: *¿Qué pasa con los ceros?*
93 E: *Van aumentando*
94 P: *Van aumentando a medida ¿que qué, se van incrementando en dónde?*
95 *Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las*
96 *filas. Lo importante es que haya ceros antes de un elemento que*
97 *sea diferente de cero en esa fila*
98 *En la primera fila no hay ceros, en la segunda fila hay un cero*
99 *antes de llegar a una fila que no es cero, en la tercera hay tres ceros*
100 *antes de llegar a un elemento que es diferente de cero*
101 *¿Qué pasa aquí en la segunda matriz?*
102 *En la segunda fila hay dos ceros y en la otra fila todos son ceros*
103 *Van aumentando los ceros a medida que vamos descendiendo*
104 *en las filas*
105 *¿Aquí qué ocurre en la tercera matriz?*
106 *En la primera fila hay un cero, en la segunda hay tres y en la última*
107 *hay 4*
108 *Fíjese que no interesa si por acá hay un cero, la cosa es que haya*
109 *ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila*
110 *Este tipo de matrices se llaman matrices escalonadas, va como una*
111 *escalera y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta*
112 *encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener*
113 *todas las filas ceros*

A partir de allí, expone las operaciones elementales entre filas que se pueden realizar para escalonar una matriz (S3.138-172, unidad de información ya citada en el indicador correspondiente a los objetivos), y finalmente escribe un ejemplo para referirse al procedimiento en sí (S3.177-211).

S3.177-211

177 P: *Para hacer escalonada esta matriz ¿qué debe ocurrir?*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

178 *Esto debe ser 0 y esto debe ser 0.*
179 *La primera fila no cambia, con ese 2 tenemos que hacer 0 este 3*
180 *y este -2, ¿qué hago con la fila 2 para que ese 3 sea 0?*
181 *Voy a reemplazar f_2 por $2f_2 - 3f_1$*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ & & & \end{bmatrix}$$

182 *No se equivoque al sumar, no se equivoque al multiplicar, mucho*
183 *cuidado con eso, hay que estar concentrado*
184 *Ya tenemos resuelto la segunda fila, ¿cómo hago 0 ese -2?*
185 *Utilice siempre como pivote la fila uno, el numerito que está acá*
186 *arriba, este le decimos pivote*
187 E: *Hay que sumar*
188 P: *Claro $f_3 \rightarrow f_3 + f_1$*
189 *Yo les dije que podía ser un 1, puede ser un número fraccionario o*
190 *puede ser un -1 si lo vas a restar.*
191 *Entonces está fácil*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

192 *¿Ahora cuál es el pivote?*
193 E: *El 6*
194 P: *El 6 hay que hacerlo 0, ¿cuál es el pivote?*
195 *El -11, siempre tomamos como pivote en la fila que sigue el primer*
196 *elemento diferente de 0, ese es el pivote y ese nos ayuda a hacer 0 el de*
197 *abajo. No tomamos la de arriba ¿por qué?, ¿qué pasa si utilizo la*
198 *primera fila?*
199 *Nos cambia este 0.*
200 *Entonces vamos a hacer 0 ese 6, primera fila igualita, ¿cómo hago*
201 *0 el 6? O sea, f_3 voy a reemplazar por, el 11 es un número primo.*
202 *No hay ningún número que antes de 66 sea divisible para 11*
203 *y para 6, ¿cómo hago 66 el 11?*
204 *Tenemos $f_3 \rightarrow 11f_3 + 6f_2$*
205 *¿Por qué los dos positivos?*
206 *Porque tengo aquí negativo el 11 y positivo el 6*
207 *Entonces tenemos*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 87 & 119 \end{bmatrix}$$

208 *¿Pueden hacer 0 el 87?, ya no se puede, ahí queda*

Como vemos, se trata nuevamente de un proceso deductivo, donde se repite el patrón de aprendizaje que interesa al profesor, al exponer reglas generales para escalonar una matriz y su aplicación con un ejemplo o caso particular.

En el segundo año de observación de la práctica del profesor, el aprendizaje ocurre además con la intervención del alumno, ya que ha sido éste el encargado de la búsqueda de información (en libros de texto, páginas web, etc.), la organización de ésta y presentación al resto de compañeros de la clase. Podríamos decir que el aprendizaje se va construyendo a lo largo de la sesión entre el profesor y el estudiante; y sigue siendo a través de un proceso deductivo (TE9).

Las actividades de exposición de los estudiantes, en primera instancia, nos hicieron pensar que las concepciones del profesor se orientan a una tendencia investigativa, donde *el aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor* (I10). No obstante, y luego del desarrollo de las exposiciones de los estudiantes, constatamos que el aprendizaje se da por asimilación de la información que proviene del exterior (TE10) y en este caso de libros de texto consultados por los estudiantes de dónde extraen los ejemplos y ejercicios que presentan al resto del grupo clase.

Importancia de la argumentación (10') e Interacción profesor-estudiantes-matemáticas (10'')

El profesor ***no concede especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones*** (TR10') durante el primer año de observación de su práctica; sin embargo, Jordy busca la participación activa de los estudiantes (aunque no de un estudiante específico) a través de la formulación de preguntas durante sus exposiciones, relacionadas éstas con conocimientos previos, operaciones algebraicas, procedimientos, dimensiones de las matrices (ya sea para realizar la suma, el producto o como respuesta de éste), propiedades, operaciones elementales entre filas, o para plantear las ecuaciones lineales que conforman el sistema correspondiente a un problema de aplicación. Por tanto, ***el alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que la inversa*** (TR10''/TE10''). Es evidente que Jordy interviene mayoritariamente en las sesiones de clases.

Relacionamos con estos indicadores, lo expresado por el profesor en entrevistas (E2.P1, E2.P10), donde se le preguntó acerca de los métodos que emplea para saber que sus estudiantes han aprendido, y cuyas respuestas presentamos a continuación.

E2.P1: *Una de las cosas que siempre les digo a los jóvenes es que al momento de resolver una evaluación es donde demuestran que han captado, que dominan el contenido, el conocimiento. La evidencia de que se ha captado el conocimiento es en los talleres y las lecciones y también cuando hablan, al momento de expresarse, de explicar alguna cosa, si lo que están hablando y explicando es claro y va con el proceso que debe ser, ahí está demostrando el conocimiento.*

E2.P10: *Primero, en clase se explica y hay unos espacios de talleres. Si yo veo que un chico está trabajando allí y está haciéndolo correctamente pues está claro que sí entendió y mucho más todavía si alguien le pregunta y él le explica al compañero lo que está haciendo o le explica cómo hacerlo. Si él es capaz de explicar lo que está haciendo o cómo se debe hacer un proceso pues es una evidencia que sí ha aprendido.*

Interpretando sus respuestas, para el profesor es importante que el estudiante explicite con sus palabras la comprensión del contenido tratado, especialmente lo relacionado a los procedimientos (TE10'), lo cual constituye para él un resultado o evidencia de aprendizaje. No obstante, lo mencionado por Jordy en las entrevistas no se refleja en el primer año de observaciones de clases. Va más bien, de acuerdo con el segundo año de observaciones de su práctica, donde como ya hemos dicho anteriormente el estudiante interviene para exponer parte del contenido matemático de la clase, siendo ***importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje*** (TE10').

Como ejemplo, citamos una unidad de información donde un estudiante expone el procedimiento para encontrar las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer (S5*.55-93).

S5*.55-93

55 E: *La regla de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.*
56 *Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:*
57 *El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas,*
58 *el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.*
59 *Sea Δ el determinante de la matriz de coeficientes*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

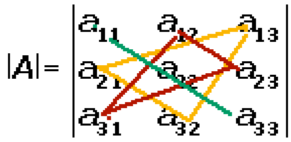
O sea, con la matriz lo que queremos sacar es el determinante
Y sean $\Delta 1$, $\Delta 2$*.....*Δn *los determinantes que se obtienen al sustituir los coeficientes del numerador, los términos independientes en la primera columna, en la segunda columna, en la tercera columna y en la enésima columna, respectivamente.*
Un sistema de Cramer tiene una sola solución que viene dada por las siguientes expresiones:
$x1 = \Delta 1/\Delta$
$x2 = \Delta 2/\Delta$
$x3 = \Delta 3/\Delta$
$xn = \Delta n/\Delta$
El Ing. nos dijo x1 es igual al determinante del primer valor cuando nosotros separamos los valores de x, los valores de y, y utilizamos estas expresiones para sacar el resultado. Ya lo vamos a ver, mi compañero va a explicar
P: *Ya primero una cosa, pongan la diapositiva anterior ¿esa* Δ *de dónde la sacan?*
E: *Esa es la determinante que vamos a sacar de la ecuación lineal*
P: *¿Con qué hallas ese determinante?*
E: *Con los valores de x, los valores de y con los coeficientes que están al costado de la ecuación lineal*
E: *Tenemos una ecuación de tres incógnitas, se sacan los coeficientes y se va reemplazando y una vez que se saca el determinante principal*
P: *A ver, hasta ahí, ese primer determinante es el que tú le llamas determinante principal, es el que está allá arriba, esa es la matriz de los coeficientes. Del sistema de ecuaciones toma todos los coeficientes, la x, la y, la z, la w, los que sean y los pones en una fila. Y así con la segunda ecuación, la segunda fila, etc., arman las filas con los coeficientes de cada ecuación y ese es el primer determinante, el que llaman* Δ *¿De dónde de salen* $\Delta 1$, $\Delta 2$¸$\Delta 3$, Δn*?*
E: *Son los que se han encontrado, las variables, nosotros sabemos llamarlas x, y, z. Entonces* $\Delta 1$ *sería* Δx, $\Delta 2$ *sería* Δy
P: *O como ahí le ponen x1, x2, x3 a las incógnitas, por eso le llama* $\Delta 1$, $\Delta 2$¸$\Delta 3$

Relacionado con el indicador antes mencionado, de esta unidad de información destacamos que al profesor no sólo le interesa que el estudiante realice una mera repetición o lectura de lo que ha consultado, sino que más bien interviene realizando preguntas al estudiante expositor, provocando que éste se refiera al contenido con sus propias palabras, siendo su forma de verificar si han comprendido o no lo consultado.

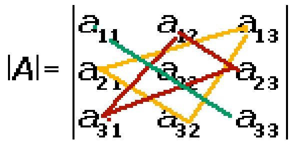
En la práctica del profesor observada en el segundo año, aún sigue siendo más fuerte la interacción ***en dirección profesor alumno antes que la inversa*** (TR10''/TE10''). Sin embargo, y a diferencia de las sesiones del primer año, sí se observa una interacción más equilibrada entre el estudiante y el profesor, al considerar la intervención de los estudiantes en la exposición de los contenidos matemáticos. Esto, por ejemplo, se produce cuando los estudiantes exponen la regla de Sarrus para calcular el determinante (S5*.7-39).

S5*.7-39

E: *En el método de Sarrus, los términos con signo positivo son los que están por debajo de la diagonal principal y los que tienen signo negativo son los que están en el vértice opuesto*



Los términos con signo negativo están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los elementos de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto



Que es como se realiza la operación debajo de la diagonal principal

P: *A ver ¿cuál es la diagonal principal?*

E: *La verde. En la primera figura, los elementos con signo positivo están debajo*

P: *Despacio, explique bien las cosas, yo le hago una pregunta ¿Cuál es la diagonal principal?*

E: *La línea verde*

P: *Sí pero usted me señala las dos figuras, arriba y abajo, hay dos líneas verdes ahí*

E: *Por eso, pero acá especifica los términos con signo positivo están formados por los elementos de la diagonal principal*

P: *¿Cuál es la diagonal principal?*

E: *En este caso de aquí*(señala la figura 1)*es la línea verde*

P: *Y en la otra?*

E: *La diagonal secundaria*

E: *La diagonal secundaria*

P: *Entonces, la diagonal principal es sólo la línea verde pero de la de Arribay las diagonales paralelas con el vértice opuesto. ¿Qué significa eso? La línea verde de ahí, esa es la diagonal principal ¿Cuáles son las diagonales paralelas? La que tiene aquí, está en amarillo con su vértice opuesto (a_{21}, a_{32}, a_{13}). No estabas viendo eso. La diagonal paralela a la principal con su vértice opuesto y la que está arriba a_{12}, a_{23} es la otra*

35 *diagonal paralela con su vértice opuesto a_{31}; esos productos se suman*
36 *¿Qué es lo que se resta?*
37 E: *Esta es la diagonal secundaria, aquí están las paralelas y el vértice*
38 *Opuesto*
39 P: *Esos productos se restan*

Aunque se trata de que el estudiante exponga el contenido matemático al grupo clase, sin embargo, el profesor está atento durante las intervenciones del alumno, y la interacción se da al notar un error en las expresiones del estudiante. Jordy interviene con cuestiones que permiten que el mismo estudiante tenga en cuenta el error y lo aclare al resto de la clase, siendo finalmente el profesor quien cierra la exposición para que le quede claro a todo el grupo.

Tipo de agrupamiento

En cuanto a las concepciones relacionadas con el tipo de agrupamiento que tiene lugar en las clases de Jordy, durante el primer año de observación de su práctica, al parecer presentan características tradicionales-tecnológicas, donde *la única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual* (TR11/TE11), es decir, no se construye de forma conjunta sino que en su mayoría el trabajo en clase se da de forma individual.

No obstante, sí hemos encontrado evidencia en sus aulas de que permite el intercambio de ideas entre compañeros, por ejemplo cuando transforman una matriz escalonada en canónica (S4.78-86) o cuando trabajan la multiplicación de un escalar por una matriz (S1.227-232).

S4.78-86

78 P: *Usted tiene ahí en la hojita todas esas matrices que ya las*
79 *transformó en escalonadas, eso fue lo que hizo ya usted, ahora*
80 *hay que continuar hasta encontrar la forma canónica de cada una*
81 *Ese es el trabajo, entonces comience, haga por lo menos la matriz A.*
82 *Vayan siempre comparando lo que les va resultando con el compañero,*
83 *así se van apoyando uno con otro.*
84 *Ahora sí aproveche, compare, discuta, pregunte, este es el momento, al*
85 *momento de la lección* [se refiere a la evaluación final] *ya no se permite*
86 *ningún tipo de consulta.*

S1.227-232

227 P: *Una vez que ya se ha hecho ese trabajo, este es el taller Nº 2,*
228 *corrijan el literal d), en lugar de 4A deberán escribir 4D.*
229 *La sugerencia es que haga las operaciones aparte, debe trabajar hoy*
230 *el numeral 1, el numeral 2 y el numeral 3.*
231 *Vaya verificando con el compañero de al lado si tiene alguna duda*
232 *y si entre los dos no se ponen de acuerdo me avisan*

Como vemos, en las unidades de información, Jordy solicita que cada alumno practique el contenido ya expuesto, haciendo referencia a que pueden ir consultando dudas y respuestas con el compañero y directamente con el profesor.

El interés del profesor para que los estudiantes conformen grupos de trabajo para la consulta, preparación y exposición de contenidos matemáticos como una forma de aprendizaje, se refleja en el segundo año de observaciones de su práctica, es decir, se producen cambios en sus concepciones, acercándose a una tendencia espontaneísta, donde *la forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates* (E11).

La asignación de este indicador la atribuimos a la conformación de grupos de trabajo y a la respuesta obtenida en una entrevista (E3.P9), al preguntarle si crea contextos específicos de aprendizaje considerando las dificultades de sus estudiantes.

E3.P9: *Una de las cosas que me parece a mí fundamental como medio para ir superando cualquier dificultad es el trabajo en equipo, a mí me parece una cuestión supremamente importante, incluso en el sentido de proyectarlo hacia lo que pasa en las empresa o en las instituciones en la parte laboral, porque tú nunca vas a trabajar sólo, siempre estarás trabajando con personas o dirigiéndoles, o como pares, o siendo tú subalterno. El hecho de estar trabajando en equipo y sabernos entender para resolver un ejercicio o para estudiar un tema determinado va capacitándonos para poder trabajar en el futuro en sociedad, yo pienso que eso es una de las cosas que hay que enseñar, porque eso hay que enseñarlo, hacerle notar a los jóvenes la importancia del trabajo en equipo, la necesidad de aprender a trabajar en equipo y la sinceridad de los aportes que se pueden hacer en un trabajo en equipo, o sea, ir con la actitud de que quizá yo no sé nada pero voy ahí a aprender. Hay que insertarle en las ideas del joven que el trabajo en equipo es fundamental para su aprendizaje porque ahí es donde se puede aprender cosas que a lo* *mejor en las explicaciones que da el profesor o en lo que él ha leído no lo ha logrado entender.*

Como vemos, el profesor considera además el trabajo en grupo como una estrategia de aprendizaje orientada a superar dificultades propias de las clases e inclusive para la vida profesional, haciendo hincapié en la necesidad de fomentar este tipo de agrupamiento. Sin embargo, en lo observado en sus aulas, no se llegan a producir debates entre los estudiantes encargados de las exposiciones del contenido matemático y el resto de la clase (que sería propio de la tendencia espontaneísta), ya que el trabajo realizado propiamente en grupo se da para la consulta, preparación y exposición del contenido matemático, pero ya la práctica de ejercicios, presentados por el mismo grupo de exposición a sus compañeros, tiende a darse de forma individual, debido quizá a que los estudiantes imitan el modo de enseñanza del profesor.

Asociamos aquí la información obtenida a través de una entrevista (E4.P6), en la cual se le preguntó al profesor si aplica estrategias variadas de enseñanza y actividades congruentes con la complejidad del contenido, y en este caso de matrices.

E4.P6: *Lo primero que suelo hacer al presentar un tema es revisar lo anterior, lo previo que debe saberse para un tema determinado y después de eso la explicación si se quiere general de lo que se va a estudiar, tratando de hacerlo participativo en lo posible. Como estrategia, la forma en que yo trabajo es dejar que el estudiante haga lo suyo y en caso que haya dudas me lo diga y también existe la posibilidad de que puedan preguntar a los compañeros. Por ejemplo, lo que aquí definen como coaching es lo que suelo hacer, cuando hay algún error se corrige y cuando hay un mal entendido se corrige, cuando veo que alguien está equivocándose generalizo para que todo el mundo vea qué está mal y lo que no se debe hacer. La otra parte, es que los chicos trabajen entre ellos, no sé qué estrategia sería esa. ¿Por qué razón me parece enriquecedor que trabajen en grupo? Y esto es algo que se los explico a ellos: cuando trabajan en grupo, ellos suelen decir al principio "es que yo no sé explicar", entonces, ahí les digo yo: esa es una capacidad que tienes que desarrollar, aprender a explicar algo que tú sabes, en el momento que tú lo puedes explicar lo sabes mucho mejor que yo. Por eso, el hecho de que puedan ellos intercambiar ideas, resultados, respuestas y hacer aclaraciones entre ellos antes que conmigo lo considero una riqueza de que ellos aprenden a explicar un conocimiento.*

En la primera parte de la unidad de información, Jordy manifiesta que en sus clases permite que los estudiantes trabajen en forma individual, no obstante, en la segunda parte, el profesor reconoce la riqueza de que el alumno pueda compartir e intercambiar ideas con el compañero, manifestando además por qué le parece importante el trabajo en grupo.

4.4.4. Papel del alumno

Participación en el diseño didáctico

Teniendo en cuenta las unidades de información obtenidas mediante entrevista, E4.P7 (citada en el indicador correspondiente a la programación) y E3.P2 (en la cual se le preguntó al profesor de dónde extrae las actividades que emplea en sus clases), y lo recabado durante el primer año de observación de la práctica del profesor, podemos decir que *el alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.* (TR15/TE15).

E3.P2: *Hay algunas que se sacan de los libros, como base, y hay otras que uno se las inventa. Más que nada lo que es problema, los ejercicios a veces los tomo de los libros y a veces salen al momento de la clase, los pongo al azar, lo que vaya saliendo ahí se resuelve. Cuando es problema, eso hay que pensarlo un poquito antes de escribirlo, siempre es bueno, a veces también salen problemas así al momento de improvisación, pero por lo general siempre es bueno ya llevarlos preparados, más que nada los problemas, lo que son ejercicios numéricos yo los planteo allí directamente.*

El profesor claramente expresa que las actividades planteadas en sus clases son preparadas por él mismo, mediante la improvisación de ejercicios numéricos que surgen al momento de la exposición y, por otra parte, son extraídas de libros.

No obstante, en el segundo año de observaciones, *el alumno participa indirectamente en el diseño didáctico* ***(a través de sus intervenciones en el quehacer del aula)*** (E15), aunque no lo condiciona. El estudiante participa indirectamente, por cuanto consulta el tema encargado por el profesor y prepara actividades que le servirán para exponer al resto de sus compañeros el contenido, habiendo por tanto, un cierto cambio en las concepciones del profesor. Por ejemplo, Jordy encarga a un grupo de estudiantes que expongan la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer, y éstos, tienen libertad para escoger los ejemplos que emplearán en la exposición, así como ejercicios y problemas de aplicación para que el grupo de toda la clase practique (S5*.136-142, unidad de información citada en el indicador correspondiente a orientación).

¿Qué hace?

Durante el primer año de observaciones de las sesiones de clases, el papel del alumno se orienta a tomar apuntes de lo expresado y escrito en la pizarra por Jordy, y a prestar atención a sus exposiciones. Podemos decir que *el alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17), y ***al ser el profesor el que proporciona la clave para la repetición/reproducción posterior, es fundamental la atención a éste (fuente de información fundamental)*** (TR18/TE18). Asociamos a estos indicadores lo expresado por el profesor en una entrevista (E3.P18), donde le preguntamos si creía importante que los estudiantes participen activamente mientras él explica la clase y por qué.

E3.P18: *Yo tengo una concepción, la participación activa tiene diferentes formas de percibirse o de definirse, porque yo participo activamente cuando estoy atendiendo con toda la concentración del caso, a mí me gusta mucho que la gente esté siguiendo la explicación, me gusta bastante que la gente vaya junto conmigo resolviendo lo que estoy explicando, me gusta mucho que la gente incluso en el mismo momento en que estamos resolviendo se pregunte sin miedo a cortar el proceso, yo en esos casos suelo decir esa duda te la aclaro enseguida pero déjame terminar esta parte u opto por detenerme y explicar la duda que tiene. A mí me gusta mucho eso, que la gente esté diciendo, calculando, proponiendo, mientras se va resolviendo cualquier cosa y la otra cosa que siempre insisto es que el chico no puede estar en clase al menos solo mirando, a mí me parece que eso es como no estar queriendo aprender y en estos temas de aquí siempre es importante que tú vayas diciendo cosas y vayas resolviendo, y de hecho hay muchachos que como lo que se va explicando se lo hace lentamente para que todo el mundo vaya asimilando, hay algunos que cogen ya el hilo del asunto y siempre se adelantan, terminan antes de que uno concluya la explicación. Más que nada, en ese tipo de procedimiento si ya tú explicas cómo tiene que hacer y el resto es repetir el proceso, hay mucha gente que se adelanta y termina antes y a mí me parece eso mucho más válido, que haya gente que haga eso, que se adelante a lo que tú vas a hacer. Yo al menos les motivo a que hagan* *eso, si no son capaces de resolverlo al menos que vayan siguiendo, que vayan participando y que vayan anotando.*

Su respuesta nos indica que para el profesor es importante que el alumno preste la debida atención, que vaya resolviendo junto a él los ejercicios que enseña, que se sienta con la libertad de hacer preguntas; acotando que el contenido referente a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales es más bien algorítmico y, una vez que se ha expuesto un procedimiento, la continuidad consiste en repetir el proceso, imitando lo que hace el profesor. De allí que las sesiones de clases de Jordy sean más bien enfocadas a lo procedimental, sin que haya un espacio donde se promueva una reflexión a profundidad en el alumno sobre el contenido matemático.

La clase del profesor basada en la exposición de ejemplos con sus características y la resolución de ejercicios paso a paso es un indicio de que *la confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido* (TE19). La intervención del estudiante es escasa, va más bien orientada a responder preguntas relacionadas con los procedimientos, siendo importante para el profesor la comprensión del contenido; su metodología de enseñanza hace que el alumno escuche y entienda su explicación, para después reproducir el proceso. Al alumno se le da una participación muy medida en las clases, donde puede realizar algunas preguntas. Por ejemplo, una cuestión por parte de un estudiante, al darse cuenta de que en el producto de matrices es importante la ubicación de éstas, que lo lleva a indicar que dicho producto no es conmutativo (S2.54-59).

S2.54-59

54	E:	*O sea que en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que*
55		*estén ubicadas*
56	P:	*¿Cómo sería eso? ¿Cómo lo podrías decir? Allí hicieron A(2x3)xB(3x1),*
57		*pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede*
58		*multiplicar, en este caso ¿qué pasa?*
59	E:	*No es conmutativa*

El profesor brinda confianza para que el alumno intervenga con cuestiones, es decir, puede interrumpir su explicación, pero las preguntas son de este tipo, muy limitadas a los procedimientos.

En el segundo año de observaciones, en ciertas sesiones de clases se mantiene la toma de apuntes por parte de los alumnos. Jordy ha variado la metodología, ya que permite que los estudiantes consulten, preparen y expliquen el contenido matemático, es decir, ahora el profesor cede protagonismo a sus estudiantes. Esta técnica permite que el estudiante participe en el desarrollo de la clase, sin embargo, el alumno *reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17).

Así mismo, y al igual que en el primer año de observaciones, *la confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido* (TE19), como por ejemplo cuando se trata de resolver sistema de ecuaciones lineales con operaciones elementales entre filas (S1*.118-131).

S1*.118-131

118 P: *¿Qué es lo primero que se puede hacer ahí?*
119 E: *Cambiar las filas*
120 P: *¿Por qué conviene cambiar las filas, la primera por la segunda?*
121 E: *Porque en la segunda ecuación la x tiene coeficiente 1*
122 P: *Entonces nos conviene que el 1 esté al inicio. La fila 1 la vamos a*
123 *intercambiar con la fila 2*

$$\begin{array}{ll} & 5x-3y=-1 \\ & x+4y=3 \\ \hline f_1 \to f_2 & x+4y=3 \\ & 5x-3y=-1 \end{array}$$

124 *y nos queda el sistema que también es equivalente al primero*
125 E: *En esos casos entonces cuando hay coeficiente 1 se cambia, ¿si tuviera*
126 *por ejemplo un 3 queda igual?*
127 P: *Ahí no conviene, tiene que buscar la conveniencia suya para poder*
128 *operar*
129 E: *Pero cuando el 1 está solamente en la segunda ecuación, ¿si estuviera*
130 *en la primera ya no?*
131 P: *Si está en la primera fila ya lo dejas ahí.*

Se observó que el profesor brinda un ambiente de confianza, y el alumno interviene con preguntas basadas en el procedimiento mismo.

4.4.5. Papel del profesor

¿Qué hace?, ¿Cómo hace?, Justificación

En sus clases Jordy *actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando* *estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas* (TE 20-23). Estas estrategias consisten en la exposición de ejemplos variados, procurando que los estudiantes noten diferentes características de los mismos, tanto en los procedimientos como en la notación.

Su papel consiste en exponer paso a paso la resolución de ejercicios, intentando hacer participativa su exposición mediante preguntas a los estudiantes, a través de las cuales, procura que se fijen en los detalles de la resolución, como en las formas de simplificar procedimientos y evitar errores. Cuando los estudiantes resuelven los ejercicios de la hoja de actividades proporcionada por el profesor con base en su exposición, éste se acerca a los alumnos verificando lo que hace cada uno, y en el caso de que haya errores o dificultades por parte de los estudiantes procura generalizar y/o hacer advertencias a todo el grupo clase. Esto se observa por ejemplo, cuando los estudiantes practican el cálculo de la matriz inversa por medio de $AxA^{-1}=I$ (S3.53-60).

S3.53-60

53 P: *Errores que no deben cometer*
54 *Están escribiendo la matriz A ponen igual y escriben todo esto*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & Z \\ y & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

55 *Esto no es cierto, no es cierto que A es igual a todo eso*
56 *No se trata de escribir signos en cualquier parte*
57 *Lo correcto es que A está multiplicado por su inversa y que eso es*
58 *igual a la matriz identidad*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

59 *Eso sí es cierto*
60 *Los signos son importantes, los símbolos son importantes.*

El profesor al fijarse en lo que hace cada estudiante en su hoja de actividades nota que uno de ellos comete errores en la notación de una matriz, su inversa y la matriz identidad, y se encarga de advertir a todo la clase de que no deben confundir la notación de dichas matrices.

Esta práctica de corregir y generalizar o socializar errores con toda la clase para evitar que se repitan en el futuro también fue expresada por el profesor en una entrevista (E4.P6, unidad de información citada en el indicador correspondiente al tipo de agrupamiento, donde se le preguntó sobre la aplicación de estrategias de enseñanza en sus clases).

Validación de la información

La validación de la información en las clases de este profesor se hace fundamentalmente mediante preguntas realizadas a los estudiantes, cuyas respuestas ayudan a aclarar dudas o a corregir errores. Por tanto, es ***el profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a los alumnos cuyas respuestas llevan a la "autocorrección"*** (TE24'). Esto ocurre, por ejemplo, cuando uno de los estudiantes da una respuesta incorrecta para una de las incógnitas en el caso de un problema de aplicación (S2*.160-172).

S2*.160-172

160	P:	*¿Terminaron? ¿Ya encontraron alguna de las incógnitas?*
161	E:	*La respuesta de T4 es 5/2*
162	P:	*T4 es el promedio de estos 4, solo entre 10 y 30 tenemos 40 y 40 para 4*
163		*es 10, entonces no puede ser menos de 10* (refiriéndose a la respuesta de
164		T4) *porque acá hay temperaturas también. La fórmula que tienes al*
165		*principio al plantear la ecuación te da la pauta de por dónde va el valor.*
166		*Por ejemplo, ¿cuál es la temperatura mayor ahí?*
167		*De los 4 nodos, ¿cuál tendrá mayor temperatura?*
168	E:	*T3*
169	P:	*T3 porque tiene las dos mayores temperaturas cercanas*
170		*¿Cuál sería la menor temperatura?*
171	E:	*T1*
172	P:	*Claro, fíjate que ninguna respuesta puede ser menor de 10*

Jordy, a través de preguntas, procura que el estudiante se dé cuenta de por qué esa respuesta no es correcta y sobre qué valores deberá estar la correcta, siendo el profesor el que finalmente valida la información.

Ya hemos mencionado que entre un año y otro de observaciones de la práctica de Jordy se han dado cambios en su metodología de enseñanza, los cuales consisten en la organización previa de las sesiones de clases por parte del profesor y la conformación de grupos de trabajo de estudiantes, quienes preparan y exponen un contenido matemático. Existe cierta confianza del profesor en que el estudiante pueda realizar algún tipo de validación en el aula, de allí que ciertas cuestiones que realiza el profesor hacen que los grupos corrijan ciertos puntos de su exposición.

Durante la exposición que hacen los estudiantes, el profesor interviene en situaciones puntuales cuando el alumno se equivoca o no está claro lo que expresa al resto de sus compañeros. Por ejemplo, cuando se trata de indicar lo que es un menor y un cofactor (S5*.302-321).

S5*.302-321

302 E: *Aquí tenemos un ejemplo resuelto, tenemos una matriz*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & {}^{+}4 \\ 5 & 3 & {}^{-}0 \\ 6 & 1 & {}^{+}2 \end{bmatrix}$$

303 *Entonces como decíamos procedemos a escoger el cofactor, que viene a*
304 *ser esta columna y todo lo que no esté seleccionado por el cofactor viene*
305 *a ser el menor*
306 P: *A ver, aclaremos bien lo que es un cofactor y lo que es el menor porque*
307 *ahí estás diciendo cosas que no son ciertas, lea bien lo que es el cofactor*
308 *y lo que es el menor*
309 E: *Este es el cofactor*
310 P: *Los cofactores son cada uno de los que están en el recuadro y con su*
311 *Signo*
312 E: *Aquí tenemos en la parte de arriba los signos*
313 P: *¿De dónde salen esos signos? ¿Si se acuerda? Con la suma de los*
314 *subíndices. Si la suma es par es positivo el cofactor, si la suma es impar*
315 *es negativo. ¿Qué es el menor entonces?*
316 E: *Es el determinante de lo que vamos a sacar ahora*
317 P: *¿Cómo sacas el menor del 4?*
318 E: *Se elimina la fila y la columna de donde está ubicado el 4*
319 P: *Exacto ese es el menor, esa es la explicación que tenemos que dar,*
320 *cuando tomas el 4 eliminas la columna del 4 y la fila del 4 y los números*
321 *que te quedan fuera de eso, ahí está el menor*

En la unidad de información se observa que el profesor realiza preguntas al estudiante expositor con la finalidad de que corrija lo que está expresando a sus compañeros, siendo Jordy quien valida realmente la información, cerrando la exposición.

4.4.6. Resumen de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La actividad de aula de Jordy, durante el primer año de observaciones de su práctica, se caracteriza por la reproducción de procedimientos o algoritmos con un énfasis en los errores de los estudiantes (TE1), los cuales son advertidos habitualmente por él con la finalidad de que no los reproduzcan. En sus clases los contenidos matemáticos son presentados a través de estrategias expositivas, como el uso de ejemplos con diferentes características, cuyas soluciones se construyen a través de preguntas dirigidas a todo el colectivo de estudiantes (TE2). Le interesa el desarrollo de la compresión conceptual y los objetivos procedimentales, con miras a una aplicación utilitaria del contenido matemático (TE3). La programación que sigue es un documento que elabora él mismo, basándose en la lógica de la asignatura (TE4), en sus experiencias previas y conocimientos.

Para su posterior reproductibilidad, el profesor orienta sus clases hacia el desarrollo de procedimientos o algoritmos (TE5), por ello, procura que el estudiante sea consciente del uso flexible de los mismos. La finalidad de sus clases es sobre todo práctica, buscando destacar las aplicaciones del contenido dentro de la propia matemática fundamentalmente y de forma muy escasa en situaciones de la vida cotidiana (TE7).

La práctica reproductiva de ejercicios promovida por el profesor ayuda al estudiante a memorizar los procedimientos enseñados (TE8). Aunque en ocasiones, pareciera que el proceso de aprendizaje en sus clases ocurre a través de un proceso inductivo, en realidad se trata de un proceso deductivo (TE9), sus exposiciones parten de lo más general con el uso de ejemplos que pueden tener características particulares, para en lo posterior profundizar en el contenido matemático. El aprendizaje del alumno se produce por la asimilación de la información proporcionada por el profesor (TE10). Busca la participación del estudiante, a través de la formulación de preguntas puntuales sobre el contenido matemático durante las clases, pero no concede especial importancia a que el alumno emita sus propias conclusiones sobre el mismo (TR10’). Jordy es quien interviene mayoritariamente en las sesiones de clases, siendo el intermediario entre la disciplina y el alumno, habiendo por tanto una interacción más fuerte en dirección profesor alumno (TR10’’/TE10’’) que a la inversa o alumno-alumno. El tipo de agrupamiento está principalmente relacionado con el trabajo individual (TR11/TE11), aunque permite que los estudiantes intercambien ideas con sus compañeros.

Las actividades son proporcionadas en su totalidad por el profesor, y el alumno no participa en el diseño didáctico ni en la programación (TR15/TE15). El estudiante, al resolver los ejercicios propuestos por el profesor, imita su estilo cognitivo (TE17), siendo importante que mantenga la debida atención (TR18/TE18). La técnica del profesor basada en la exposición detallada de los ejercicios hace que el estudiante confíe plenamente en sus enseñanzas, sin plantearse preguntas relacionadas con el fondo del contenido matemático, sino más bien limitadas a los procedimientos (TE19).

La organización de los contenidos de aprendizaje está a cargo del profesor, y estos son transmitidos mediante el uso de ejemplos que le sirvan para destacar diferentes características de los procedimientos (TE20-23), y la validación de la información en el aula la hace esencialmente el profesor mediante el planteamiento de interrogantes a sus alumnos (TE24').

En el segundo año de observaciones de la práctica de este profesor, ocurre cierto cambio en la dinámica del aula, sus clases siguen siendo expositivas, pero cede cierto protagonismo a los estudiantes cuando Jordy les permite consultar, preparar y exponer algunos contenidos matemáticos, interviniendo para complementar lo expresado por los estudiantes o para corregir errores cometidos por ellos en su exposición.

Sigue habiendo un interés en el desarrollo procedimental y en el fomento de la aplicabilidad del contenido dentro de la propia matemática. El aprendizaje se construye ahora entre el profesor y el estudiante, aunque sigue siendo a través de un proceso deductivo.

En relación con el primer año de observaciones de su práctica, ahora, en el segundo año, se produce un cambio en sus concepciones relacionado con la importancia de la argumentación, ya que con la exposición del contenido matemático, ahora por parte de los alumnos, el profesor concede importancia a que el alumno explicite con sus palabras la comprensión de los procedimientos matemáticos (TE10') como un resultado de su aprendizaje, y aunque se produce una interacción más equilibrada entre el profesor, el alumno expositor y el grupo clase, aún sigue siendo más fuerte en dirección profesor alumno. Con la conformación de grupos de trabajo para la exposición del contenido matemático, sus concepciones en relación con el tipo de agrupamiento se acercan a características espontaneístas, donde la forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo (E11), aunque sin que se den debates entre los estudiantes.

Se da una participación indirecta del alumno en el diseño didáctico de las actividades del aula sin afectar la programación, a través de sus intervenciones en la exposición del contenido matemático (E15). Por tanto, el estudiante interviene en el desarrollo de las clases. Sin embargo, al exponer imita y reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor, repitiéndose el patrón visto en el primer año, en cuanto a no cuestionarse sobre el fondo del contenido matemático.

Se mantiene la organización de los contenidos de aprendizaje por parte del profesor. Los alumnos realizan cierta validación de la información en el aula en comparación con el año anterior de las observaciones, en lo relacionado a correcciones durante la exposición del contenido matemático, siendo el profesor quien valida finalmente la información que se moviliza en las clases, a través de preguntas a los grupos expositores y al grupo clase.

4.5.Análisis de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

4.5.1. Metodología

Praxis

En general, la actividad del aula de Carlos *se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo* (TR1). Una vez que el profesor expone el contenido matemático a los estudiantes, en sus clases se produce la práctica de ejercicios con características parecidas a los ejemplos empleados en su exposición, pudiendo ser aritméticos y de aplicación. Esto se observa, por ejemplo, cuando trabaja la matriz inversa de orden tres (S4.29-70) por medio de la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$.

S4.29-70

29 P: *Ahora trabajemos con la matriz inversa de orden tres*
30 *Tenemos*

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

31 *Bueno, para saber si podemos llegar a la inversa hallamos primero el*
32 *determinante. Tomamos la primera fila y la primera columna y*
33 *escribimos los elementos, primera fila segunda columna, primera fila*
34 *tercera columna*

$$\mathrm{Det}(Y)= 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} -0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

35 *Hagan esos cálculos y me dicen el valor del determinante*
36 E: *Es igual a 25.*
37 P: *El determinante de Y nos da 25, un número diferente de 0 por lo tanto sí*
38 *hay matriz inversa.*
39 *Ahora vamos a hallar los cofactores, pero para hallarlos no vamos a*
40 *poner número como en el caso del determinante, sino que vamos a*
41 *poner solamente el signo.*
42 *Si la suma de i + j es igual a número par esto es positivo.*
43 *Si la suma de i + j es igual a número impar esto es negativo.*
44 *Entonces 1 +1 = 2, es un número par, entonces el signo es positivo, sigo*

fila 1 columna 1, ¿cuáles son los elementos que quedan?

E: *1, 4, -2, 1*

P: *Sí está bien. Ahora, 1+2, entonces el signo es negativo, fila 1 columna 2 y así. Luego vamos a hallar los cofactores de la fila 2 columna 1 ¿qué signo?*

E: *Negativo*

P: *Fila 2 columna 1 y así con cada cofactor*

$$\mathrm{Cof}(1,1)=\overset{+}{\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(1,2)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(1,3)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{Cof}(2,1)=\overset{-}{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(2,2)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(2,3)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{Cof}(3,1)=\overset{+}{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(3,2)=\overset{-}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}}\quad \mathrm{Cof}(3,3)=\overset{+}{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}}$$

Hay que diferenciar el determinante con los cofactores, para el determinante no solamente tomamos el signo de referencia sino también el número o elemento. En los cofactores solamente vamos a tomar el signo. Entonces, la matriz de los cofactores, al multiplicar cruzado sería…

Ordenamos en una matriz todos los cofactores

$$\mathrm{Cof}\,(Y)=\begin{bmatrix}9 & 10 & -7\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & -10 & 2\end{bmatrix}$$

Ahora hallamos la adjunta de Y, es la traspuesta de la matriz de los cofactores

$$\mathrm{Adj}(Y)=\begin{bmatrix}9 & 2 & 1\\ 10 & 5 & -10\\ -7 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

Para hallar la inversa, es igual a la adjunta de Y sobre el determinante de Y, puede simplificar también

$$Y^{-1}=\begin{bmatrix}9/25 & 2/25 & 1/25\\ 2/5 & 1/5 & -2/5\\ -7/25 & 4/25 & 2/25\end{bmatrix}$$

Con eso nosotros hemos hallado la matriz inversa de Y

E: *¿Podría explicar por favor cómo obtener la adjunta?*

P: *Claro, las filas se convierten en columnas, ahí se da cuenta. Ahora hay que verificar, tenemos que multiplicar Y por Y^{-1} y nos tiene que dar la matriz identidad, de orden tres*

$Y \times Y^{-1} = I$

$$Y \times Y^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}9/25 & 2/25 & 1/25\\ 2/5 & 1/5 & -2/5\\ -7/25 & 4/25 & 2/25\end{bmatrix}$$

Ustedes hacen la multiplicación y comprueban

Ahora vamos a resolver ejercicios en clase, escribiré unas matrices y ustedes encuentran la inversa

$$D=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

70 *Estas matrices también*

$$F=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La unidad de información representa una situación característica de sus clases, donde el profesor expone el método, y a partir de allí, viene la repetición de ejercicios del mismo tipo, como una forma de que el estudiante practique y domine el procedimiento enseñado.

La asignación de este indicador se sustenta además, en las expresiones del profesor obtenidas a través de entrevistas (E2.P9, E2.P10), donde, por una parte, se le preguntó sobre los criterios que considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para reforzar o generalizar cierta idea sobre el contenido matemático y, por otra parte, sobre qué criterios elige los ejercicios que emplea como tareas para que los alumnos practiquen.

E2.P9: *Para reforzar los conocimientos adquiridos se practica con ejemplos parecidos a los ya explicados, luego se aumenta la complejidad en la resolución de los mismos y también se realizan ejercicios de aplicación a cualquier área de las ciencias.*

E2.P10: *Para que los alumnos puedan practicar y realizar ejercicios después de las clases, escojo ejercicios que tengan similitud con los ya practicados en las mismas.*

En su intervención, el profesor reconoce que los ejercicios que emplea para que los estudiantes practiquen son similares a los que utiliza en sus explicaciones previas.

Carlos, al referirse a procedimientos o algoritmos sobre el contenido matemático, durante el primer año de observación de su práctica, los expone en su totalidad sin mencionar características de los ejercicios utilizados, distintas formas de llegar a una resolución o las ventajas y desventajas de usar uno u otro procedimiento, es decir, ***el profesor expone los contenidos en su fase final, apoyado en estrategias expositivas*** (TR2)[46]. Hay que destacar que varios de los ejemplos que emplea en sus exposiciones son de aplicación del contenido matemático que pueden representar situaciones cotidianas.

[46] Las palabras o frases en negritas, cursivas y subrayadas han sido pequeñas adaptaciones incorporadas por la autora de la presente investigación de acuerdo al contexto del estudio en el instrumento original de análisis de concepciones de Carrillo (1998). Dichas modificaciones en el instrumento de segundo orden original las hemos considerado importantes para el estudio concepciones que emergen de la actuación en el aula de dos profesores universitarios.

Un ejemplo de este indicador lo constituye la exposición que hace el profesor de cómo sumar matrices (S1.99-134).

S1.99-134

P: *Sólo se puede realizar la suma o resta de matrices siempre y cuando sean del mismo orden, pueden ser cuadradas, pueden ser rectangulares, lo importante es que las dos matrices sean del mismo orden. Usted puede tener dos matrices rectangulares, por ejemplo, de orden 2x3 y la otra 3x2, entonces habrá que hallar la traspuesta de una de las matrices para que se puedan sumar. Entonces con dos matrices de un mismo orden se puede formar una nueva matriz. Yo les he dicho que las matrices son aplicadas en cualquier ciencia, en cualquier área, vamos a ver un ejemplo relacionado con la agricultura. Voy a escribir el ejemplo. Un agricultor posee tres fincas, cuyas pérdidas o ganancias medidas en toneladas en los dos últimos años, están relacionadas con las siguientes tablas. Vamos a elaborar las tablas, ustedes saben que las matrices no son otra cosa que la consecuencia de datos numéricos reales*

Año A	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	-1/2	10	3	7	2
Finca 2	-3	2/3	0	12	-1
Finca 3	4	-2	-1	15	13

Entonces, como decíamos, solamente se puede hacer la sumatoria con matrices que tienen el mismo orden, obviamente si en las tres fincas tenemos ¿cuántos tipos de producción?

E: *Cinco.*

P: *Cinco producciones, entonces ¿qué orden tendría una matriz formada por los elementos de esta tabla?*

E: *3x5*

P: *3x5, serían tres filas y cinco columnas Así mismo, para saber si hay ganancia o pérdida en el Año A con respecto al Año B, la otra matriz debe tener el mismo orden Y se cumple porque la producción en las fincas continúa para cinco Productos*

Año B	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	5/2	12	-1	10	7
Finca 2	-7/5	5/3	-2	12	3
Finca 3	12	-5	3	22	23

Entonces el total de pérdida o ganancia en la producción de diferentes productos en estas fincas va a estar dado por los valores positivos y negativos que nos da con la sumatoria. ¿Qué elementos yo sumaría entonces? Serían los elementos que corresponden a fila 1 columna 1 del Año A con los elementos del Año B de la fila 1 columna 1 Escriba la nueva matriz

Años A+ B	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	2	22	2	17	9

Finca 2	-22/5	7/3	-2	24	2
Finca 3	16	-7	2	37	36

134 *Hemos terminado el ejemplo.*

Como se ve, el profesor es quien expone en su totalidad el ejemplo, con una participación muy escasa del estudiante, y lo que podría considerarse como su estrategia sería que enseña la operación de suma de matrices con un ejercicio de aplicación, pensando que de esta forma es más atractivo o interesante para el estudiante.

Por otra parte, en una entrevista (E1.P24), le preguntamos sobre los recursos que emplea generalmente en sus clases para el desarrollo del contenido y respondió lo siguiente:

E1.P24: *Solamente la pizarra, marcadores, borrador. En la actualidad no utilizo ningún otro recurso. No empleo ningún software porque los estudiantes ven una asignatura de programación donde aplican los conocimientos que adquieren en mis clases.*

Tal como se observa en sus declaraciones, en las clases de Carlos, su principal recurso para enseñar es la pizarra, reconociendo que no emplea ningún tipo de software matemático.

Ya en el segundo año de observaciones de la práctica del profesor, existen ciertos cambios en la metodología de enseñanza, por cuanto permite la participación de grupos de estudiantes en la exposición de varios contenidos matemáticos[47], cediendo todo el protagonismo a los alumnos, con una muy reducida intervención del profesor, excepto en una u dos ocasiones para resolver correctamente un ejercicio. Y, en las sesiones aún se mantiene *la repetición iterada de ejercicios tipo* (TR1), tanto cuando expone el estudiante (ya que imita el modo de enseñanza del profesor), como cuando lo hace el mismo profesor. Esto ocurre, por ejemplo, cuando Carlos se refiere a la igualdad de dos matrices (S1*.75-95).

S1*.75-95

75 P: *Continuamos con la igualdad de matrices. En este ejemplo 2 tenemos 2*
76 *matrices, la A y la B*

$$A=\begin{bmatrix} -3/2 & 3^0 & 2 & 8\text{-}8 \\ -\sqrt{4} & 5 & 2.5 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 8/4 & 0 \\ -2 & \sqrt{25} & 5/2 & 3/3 \end{bmatrix}$$

[47] Este cambio en la metodología de las clases de los dos profesores que participan en esta investigación, se produce debido a que ambos imparten la asignatura de Álgebra Lineal en la misma carrera, y por tanto, han mantenido diálogos en los cuales decidieron establecer grupos de trabajo entre sus alumnos para que expliquen ciertos contenidos matemáticos durante las aulas, como una forma de fomentar la participación activa de los alumnos en sus clases.

La matriz A es particular de la matriz (a_{ij}) 2 x 4.
La matriz B lo es de (b_{ij}) 2 x 4.
Es decir, que los elementos de la matriz A son iguales a los respectivos
elementos de la matriz B y la igualdad se refiere a los elementos dispuestos
en iguales sitios en las dos matrices del mismo orden; entonces diremos
que la matriz A es igual a la matriz B y se escribe A=B.
Entonces para realizar la igualdad de matrices debemos ir comparando
cada una de sus respectivas filas con sus respectivas columnas.
La única forma que debemos darnos cuenta que solamente podemos
realizar la igualdad de matrices cuando estas tienen el mismo orden, en
este caso ¿de qué orden son las matrices?
E: *2 x 4*
P: *En a_{11} el valor es -3/2, que corresponde en b_{11} a -1.5, son iguales los*
elementos de las matrices. Debemos ir comparando los elementos de las
matrices y nos daremos cuenta si son iguales.
Significa que cuando analicemos dos matrices para ver si son iguales
deben tener primero el mismo orden y de ahí ir comparando cada uno de
los elementos, puede haber resultados equivalentes a esa expresión
matemática, que viene a ser lo mismo.

Se repite nuevamente lo que sucede en el primer año de observaciones de la práctica del profesor, siendo él quien trabaja el contenido matemático en su totalidad y de forma expositiva.

Objetivos

El profesor procura que el estudiante maneje los procedimientos o algoritmos relacionados con el contenido matemático y, en este caso, de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, y algunas aplicaciones. De allí que pensamos que las concepciones relacionadas con los objetivos que persigue en sus aulas se orientan hacia una tendencia tecnológica, donde *al carácter terminal de los objetivos se añade su funcionalidad* (TE3). Es el caso por ejemplo, de la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales (S3.9-20).

S3.9-20

P: *Vamos a resolver un sistema de ecuaciones*
$x + y + z = 4$
$2x - 3y + 5z = -5$
$3x - 4y + 7z = 10$
Para resolver el sistema de ecuaciones aplicamos la regla de Cramer que
consiste en tener valores en el numerador y valores en el denominador,
entonces los ubicamos de tal manera que si yo quiero hallar x, en
la ubicación de los valores de x van a ir los valores conocidos o términos

independientes, 4, -5, 10 porque lo que voy a hallar es x, ubico los de
y, luego los de z. Abajo, en el denominador, ubicamos todos los
coeficientes de las ecuaciones. Aplicando el método de Sarrus aumentamos
las dos primeras filas al final de las matrices

El énfasis procedimental constatado a través de esta unidad de información y fundamentalmente a lo largo de todas las sesiones de clases del profesor, así como su interés en la funcionalidad del contenido se hace evidente en sus clases a través de ejemplos de aplicación del contenido matemático a situaciones cotidianas, a otros contenidos matemáticos (como es el caso de la unidad de información anteriormente citada donde se aprecia que aplica las reglas de Sarrus y Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales), e inclusive a otras ciencias. La aplicación del contenido de matrices en otros contenidos matemáticos es sostenida por Carlos también en entrevistas, cuando le preguntamos, por una parte, si al introducir un contenido nuevo considera indispensable hacer una relación con conceptos matemáticos vistos con anterioridad (E1.P16), y por otra parte, cuál cree que es el mejor método para aprender un contenido como el de matrices (E3.P2).

E1.P16: *Claro es indispensable. Los estudiantes para poder seguir la asignatura de Álgebra Lineal tienen que haber visto resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin aplicación de matrices, sino utilizando otros métodos de eliminación para hallar las variables. En realidad lo que se trata es de mostrar al estudiante los diferentes métodos que existen para hallar las variables desconocidas. Para eso se aplican las matrices, para hallar esos valores y de una forma mucho más rápida.*

E3.P2: *Es el mismo caso, debemos de tener muy en claro qué es lo que queremos hallar, cuando hablamos de matrices específicamente hablamos de variables y son procedimientos diferentes para hallar las variables cuando aplicamos las matrices y eso es muy importante y darnos cuenta de sus diferentes aplicaciones, podemos calcular áreas, saber para qué las podemos aplicar.*

Sus expresiones corroboran que le interesa la aplicabilidad del contenido de matrices a otros contenidos matemáticos como sistemas de ecuaciones lineales y cálculo de áreas. Así en sus clases muestra a los estudiantes diferentes métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales (regla de Cramer, a través de la matriz inversa, método de Gauss), sosteniendo que el estudio de las matrices va orientado a encontrar el valor de incógnitas.

Programación

Las concepciones de Carlos sobre la programación de la asignatura presentan características que relacionamos con tendencias tradicionales y tecnológicas. Así, por una parte, *el profesor sigue una programación prescrita de antemano y externa a él* (TR4), según lo que expresa en una entrevista (E1.P9), donde se le preguntó cómo decide qué temas incluir en el curso de Álgebra Lineal y cuánto tiempo dedicar a cada tema.

E1.P9: *La decisión no viene de mi persona, los temas ya vienen establecidos en los programas que nos entregan a nosotros las autoridades de la Facultad. El tiempo que dura el semestre no lo dispongo yo, lo que hago es distribuir el programa de acuerdo a las semanas que tengo para dar clases (16 semanas).*

De acuerdo a su respuesta, el plan de estudios con el que guía sus sesiones de clases ha sido elaborado previamente por otras personas. Por otra parte, *para el profesor, la programación es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina* (TE4). La asignación de las características de este indicador las realizamos pensando en sus expresiones obtenidas cuando le preguntamos si considera que en ocasiones es necesario modificar el plan de estudios para que haya una secuencia entre contenidos anteriores y posteriores y si lo hacía en sus clases (E4.P7).

E4.P7: *Es muy difícil ajustarse porque si ya se hace una prueba de diagnóstico nos podemos dar cuenta muchas veces de que existen vacíos, entonces es importantísimo antes de entrar al tema que ya está programado en el sílabo darle una introducción a los conocimientos básicos que deben tener para poder trabajar con lo que se ha programado para la clase. Eso sucede mucho, por ejemplo, cuando vemos ecuaciones diferenciales que es una combinación de lo que son las derivadas y las integrales y el estudiante olvida, más aún si lo ha visto en distintos semestres, entonces hay que hacerles un repaso casi de dos meses de lo que son las derivadas, inclusive las derivadas de orden superior, las integrales. Lo básico aquí en el estudio de las matrices es tener conocimientos claros de Álgebra, por eso se les complica un poco cuando trabajamos con fracciones porque se les ha olvidado cómo se suman los quebrados, entonces hay que hacerles ese repaso.*

Si bien para el profesor la programación es un documento cerrado, sus expresiones nos indican que reconoce relaciones entre contenidos matemáticos, considerando en ciertas ocasiones el repaso de contenidos anteriores necesarios para abordar los contenidos subsiguientes del programa de estudios, lo cual nos lleva a pensar en que Carlos no considera que la programación deba ser rígida. Ya en la práctica de aula observada de este profesor durante dos años consecutivos, no encontramos evidencias de que realizara explicaciones sobre conocimientos previos, quizá porque su metodología al tratar el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales está orientada a que el profesor exponga los procedimientos hasta su fase final, predominando la lógica de la asignatura.

4.5.2. Sentido de la asignatura

Orientación

Al parecer, en las sesiones de clases de Carlos durante los dos años de observaciones de su práctica prima la importancia de lo procedimental, y en menor escala lo conceptual, de allí que relacionado con la orientación de la asignatura asociamos sus concepciones con la tendencia tecnológica, donde *interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad* (TE5). Al profesor le interesa fundamentalmente que los estudiantes sepan reproducir los procedimientos que él enseña, con poco énfasis en la lógica y el porqué de los mismos.

El profesor enfatiza definiciones introductorias como matriz, filas, columnas y tipos de matrices, relacionadas con aplicaciones del contenido. Así, para introducir las matrices, Carlos centra su atención en la aplicación de las mismas, presentando a los alumnos una tabla con el valor nutricional de ciertos productos alimenticios, y a través de la cual define lo que es una matriz. Los valores de la tabla son trasladados posteriormente a una matriz propiamente dicha para indicar su notación, las filas y las columnas, tal como se observa en la siguiente unidad de información (S1*.10-36).

S1*.10-36

10 P: *En este caso tenemos un ejemplo nutricional, incluye leche, queso,*
11 *mantequilla y kumis y tenemos los componentes como la lactosa, la*
12 *proteína y la grasa que están en porcentaje.*
13 *Los valores que tenemos para leche 38, 27 y 25 se refieren a los*
14 *porcentajes de lactosa, proteína y grasa, respectivamente y así con los*

demás componentes.
Podrán darse cuenta que son valores reales, este ejemplo es para demostrarles que las matrices no son situaciones adaptadas, no son números ordenados al azar sino que tienen un sentido propio de la realidad, las matrices son totalmente prácticas.

P: *La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y las columnas de forma vertical.*
Lo que vemos en el cuadro lo podemos expresar en forma de matriz, donde cada número indica el porcentaje de un componente en un producto lácteo

$$\begin{array}{r c}
\begin{array}{r} \text{fila } 1\rightarrow \\ \text{fila } 2\rightarrow \\ \text{fila } 3\rightarrow \\ \text{fila } 4\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 38 & 27 & 25 \\ 35 & 25 & 30 \\ 36 & 22 & 32 \\ 37 & 24 & 29 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \end{array}
\end{array}$$

Aquí está expresado cómo se puede escribir una matriz, aquí hemos utilizado corchetes ¿cuántas filas tenemos?

E: *Cuatro*

P: *Exacto, que son todos los valores que están ubicados en forma horizontal. Ya cuando nosotros vamos a utilizar matrices, ya no ponemos los elementos como en la tabla sino que simplemente ubicamos los números o elementos. ¿Cuántas columnas tenemos?*

E: *Tres*

P: *Se podrán dar cuenta que las columnas están en forma vertical, entonces de acuerdo al arreglo de las filas y las columnas es el orden de la matriz.*

Como vemos, al profesor le interesa presentar la definición de matriz teniendo en cuenta su aplicabilidad en una situación cotidiana.

En cuanto a las reglas, como ya hemos dicho, las entendemos como procedimientos o algoritmos, existiendo un énfasis en el desarrollo de los mismos en las clases de Carlos, orientadas hacia la reproducción repetitiva de ejercicios. Por ejemplo, una vez que el profesor ha indicado en qué consiste la regla de Cramer (S3.9-20, unidad de información que ya hemos citado en el indicador que corresponde a objetivos), y la obtención del determinante por el método del menor y cofactores, procura que el estudiante pase al pizarrón como una forma de que practique lo enseñado (S3.42-85).

S3.42-85

P: *Vamos primero a aprender el método para después resolver el sistema de ecuaciones, tenemos esta matriz*

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & 2 \\ & & \end{bmatrix}$$

-2 -1 5

44 *El método consiste en hallar el valor del determinante, ¿cómo se*
45 *resuelve?, de la siguiente manera, este valor inicial que está aquí*
46 (refiriéndose al -1 de la primera fila primera columna) *lo ponemos como*
47 *cofactor, tapamos todo lo que está en la primera fila y en la primera*
48 *columna, solo ubicamos los valores que están descubiertos. Después*
49 *ubicamos el segundo número de la fila* (primera fila)*pero con el signo*
50 *cambiado y así mismo tapamos la primera fila y la segunda columna y*
51 *ubicamos sólo los números que están descubiertos, ¿cuáles son?*
52 E: *4, 2, -2 y 5*
53 P: *Y después ubicamos como cofactor el último término de la fila sin cambiar*
54 *el signo, los signos van alternados*

$$\overset{+}{-1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}\quad \overset{-}{-3}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}\quad \overset{+}{+1/2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}$$

55 *Este signo de aquí se multiplica por este de acá, menos por más, menos,*
56 *este de aquí que es positivo* (refiriéndose al 3) *se multiplica por el signo*
57 *negativo queda negativo y este de aquí queda positivo, o sea que*
58 *solamente se cambia el signo al segundo término*
59 *Ahora procedemos a hallar los determinantes. Para hallar los*
60 *determinantes multiplicamos cruzado y el segundo término de derecha a*
61 *izquierda se cambia de signo*
62 *¿Cuál es el valor del determinante entonces?*
63 E: -76
64 P: *Este es el método que ustedes van a utilizar para hallar las incógnitas, se*
65 *llama el menor de la fila para buscar el determinante*
66 *Van a hacer este ejercicio*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 8 & 2\\ 4 & 9 & -1\end{bmatrix}$$

67 E: *Yo paso*

$$1\begin{vmatrix}8 & 2\\ 9 & -1\end{vmatrix}\quad -2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}\quad -1\begin{vmatrix}3 & 8\\ 4 & 9\end{vmatrix}$$

68 *La respuesta es 1*
69 P: *Aquí tienen un sistema de ecuaciones*

$$A=\begin{cases}7x + 10y + 4z = -2\\ 5x - 2y + 6z = 38\\ 3x + y - z = 21\end{cases}$$

70 *Pase Sr. a resolver el sistema por la regla de Cramer y calculando el*
71 *determinante por el método menor de la fila.*
72 *En este caso no debe aumentar las dos primeras filas para calcular el*
73 *determinante como con la regla de Sarrus, calcule el determinante por el*
74 *método menor de la fila.*
75 E: *¿Escribo primero cómo va a quedar o resuelvo directamente?*
76 P: *Escríbalo y después calcula el determinante tanto del numerador*
77 *como del denominador.*
78 E: *Escribiré aquí*

$$\begin{vmatrix}-2 & 10 & 4\\ 38 & -2 & 6\end{vmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}21 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & 10 & 4\\ 5 & -2 & 6\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}$$

79 *Y aquí calculo los determinantes*

$$x=\frac{-2\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}-10\begin{vmatrix}38 & 6\\ 21 & -1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}38 & -2\\ 21 & 1\end{vmatrix}}{7\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}-10\begin{vmatrix}5 & 6\\ 3 & -1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}}$$

80 *El valor de x es 8*
81 P: *Cuando ya ustedes calculen ”y”, la parte de abajo o el determinante del*
82 *sistema, ese resultado les sirve para todas las incógnitas, solamente tienen*
83 *que resolver la parte de arriba*
84 *Veo que ya han calculado y, se obtuvo -5*
85 *Y z es igual a -2*

A través de esta unidad de información vemos cómo a Carlos le interesa que los estudiantes aprendan la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales, que incluye la enseñanza previa del procedimiento para calcular un determinante por el método del menor y cofactores. El profesor indica inclusive por qué procedimiento los alumnos deben resolver lo que les propone (el determinante por el método del menor y cofactores en lugar de por la regla de Sarrus, y el sistema de ecuaciones lineales por la regla de Cramer), buscando que repitan exactamente los pasos que él ha indicado previamente. Este patrón de reproducción se repite en todas sus clases al emplear ejercicios similares a sus ejemplos. Como comentábamos el énfasis está puesto en el procedimiento, sin cuestionamiento sobre el mismo.

Asociamos su práctica con lo mencionado en una entrevista (E3.P1), al preguntarle su criterio acerca de cómo se aprende la asignatura de Álgebra Lineal.

E3.P1: *Realmente Álgebra Lineal es una de las ramas de las matemáticas y la matemática es una ciencia exacta, hay que razonar muchísimo porque no podemos aprendernos de memoria los procedimientos para hallar un resultado, sino que debemos razonar porque un mismo ejercicio lo podemos desarrollar con diferentes procedimientos y eso es lo que nos debe quedar a nosotros claro. Entonces nosotros debemos aprender el Álgebra Lineal practicándola, con la práctica adquirimos el aprendizaje porque si lo hacemos solamente una vez un ejercicio y creemos que ya lo sabemos todo nunca vamos a sentir que hemos aprendido, en el momento que nos vuelvan a poner otro ejercicio ya creemos que sabemos y nos damos cuenta de que no sabemos nada, eso es todo, es práctica.*

De acuerdo a sus expresiones, para el profesor, la asignatura de Álgebra Lineal se orienta hacia la práctica repetitiva de los ejercicios, a través de diferentes procedimientos.

Finalidad

Para el profesor, son importantes las aplicaciones del contenido matemático en situaciones cotidianas y dentro de la propia matemática. Por tanto, *la asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación* ***en la propia matemática, para el estudio de otras disciplinas o en la vida cotidiana*** (TE7). Carlos procura que en sus clases los estudiantes puedan visualizar aplicaciones del contenido matemático, en este caso de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Dentro de la vida cotidiana, se ha podido constatar en su práctica de aula, la enseñanza a través de ejemplos de aplicación, como el caso de la suma de matrices (S1.99-134, unidad de información que ya se ha citado en el indicador correspondiente a la praxis), multiplicación de un escalar por una matriz, multiplicación de dos matrices, matriz inversa y sistemas de ecuaciones lineales. A continuación citamos un ejemplo de aplicación del contenido con el que el profesor enseña el producto de un escalar por una matriz (S2.3-14).

S2.3-14

P: *Tenemos un ejemplo práctico*
En una fábrica la producción de repuestos por hora en tres talleres
está relacionado por la matriz P; y se desea conocer la producción
durante 8 horas en cada taller
Bien, vamos a tener como ejemplo práctico la producción de repuestos
en distintos talleres y en el lapso de ocho horas, entonces simplemente
se multiplica cada una de las producciones por las ocho horas. Eso
significa la multiplicación de un producto escalar por una matriz.
Vamos a elaborar la tabla

Repuestos/ Talleres	Tuercas	Tornillos	Cerrojos	Bisagras
Taller 1	28	22	18	10
Taller 2	32	40	12	15
Taller 3	47	45	15	9

P: *Con este ejemplo ven una vez más las aplicaciones de las matrices*
Esta es una matriz P en la que queremos conocer la producción en ocho
horas de cada uno de estos repuestos

La unidad de información citada representa una muestra de los ejemplos que utiliza este profesor para la enseñanza; se trata de ejercicios de aplicación contextualizados en situaciones que pretenden ser reales.

Por otra parte, el profesor menciona constantemente en sus clases aplicaciones del contenido dentro de la propia matemática. Por ejemplo, de forma general indica la aplicación de las matrices (S1*.41-48).

S1*.41-48

41 P: *La importancia también que tienen las matrices es que nosotros*
42 *podemos realizar algunos cálculos matemáticos como hacer sumas,*
43 *restas, multiplicaciones, inclusive a través de la matriz inversa hallar la*
44 *matriz inicial con la que nosotros hemos desarrollado cualquier*
45 *operación.*
46 *También a partir de las matrices nosotros podemos hallar x, y, z,*
47 *dependiendo de la cantidad de incógnitas, resolver un sistema de*
48 *ecuaciones aplicando matrices.*

Carlos menciona en sus clases los usos de las matrices en diversas operaciones algebraicas (como suma, resta y multiplicación), y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. También destaca el carácter práctico de las operaciones elementales entre filas, lo cual se muestra en las siguientes unidades de información (S2*.23-26, S2*.60-62).

S2*.23-26

23 P: *Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en*
24 *el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz,*
25 *reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir*
26 *por filas a una matriz.*

S2*.60-62

60 P: *Ya he dicho que con la matriz escalonada podemos encontrar las*
61 *incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones y con la matriz*
62 *identidad hallamos la matriz inversa por Gauss-Jordan.*

Como se observa, el profesor menciona a sus estudiantes las aplicaciones de las operaciones elementales entre filas en la obtención de las matrices escalonada, inversa, y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, razón por la cual hemos asignado una tendencia tecnológica al indicador correspondiente a la finalidad de la asignatura.

Relacionado a lo anterior, asociamos también las expresiones del profesor en entrevistas como la ya citada en el indicador correspondiente a objetivos (E3.P2), en la cual Carlos considera que al tratar el contenido de matrices es importante trabajar aplicaciones, así como, la respuesta obtenida al preguntarle si aplica estrategias variadas de enseñanza y actividades congruentes con la complejidad del contenido (en este caso sobre matrices) (E4.P6).

E4.P6: *Por ejemplo, antes de entrar al estudio de las matrices hay que enseñarles cómo encontrar el determinante, más que nada de orden 2 que es lo básico, se trabaja con el determinante de orden 2 y después se les demuestra que el determinante servirá para hallar las incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones, entonces si es de orden 2 es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: x e y, ya como se calculó el determinante entonces podemos aplicar la regla de Cramer para hallar las incógnitas. Entonces se les hace más fácil, que entrar directamente a encontrar el valor de las incógnitas sin antes haber estudiado el determinante.*

En su intervención hace alusión a la importancia de demostrar al estudiante la aplicación de un contenido matemático en la enseñanza de otro. Así, por ejemplo, menciona que ésta es la lógica de abordar el determinante de una matriz para su empleo posterior en la enseñanza de la regla de Cramer.

Por otra parte, el profesor se refiere en sus clases a la aplicación de las matrices dentro de otras disciplinas y en situaciones cotidianas, tal como se observa en la unidad de información (S1*.3-9) y, además, lo hace explícito en una entrevista (E1.P25), en la que le preguntamos qué utilidad tenía para él el tema de matrices.

S1*.3-9

P: *Lo que significa que las matrices pueden ser aplicadas en cualquier área de estudio, ya sea en geografía, cívica, historia, ciencias naturales, biología, química, porque no son otra cosa que datos o valores que tienen relación con lo que se esté trabajando. Por ejemplo: un cuadro de calificaciones tiene un orden establecido de valores de acuerdo a cada uno de los estudiantes, que pueden estar ordenados por curso, por paralelo, por facultades, etc.*

E1.P25: *Para los estudiantes que están estudiando Ingeniería en Sistemas es útil el tema de matrices para elaborar software. Sí hago explícito a los estudiantes la utilidad que tiene el tema de matrices, ellos en la actualidad elaboran software y utilizan las matemáticas que reciben. Por ejemplo, en el semestre anterior algunos estudiantes desarrollaron un software para sumar fracciones, otros elaboraron un software para* *determinar las variables aplicando determinantes. Yo les doy a los estudiantes ejemplos prácticos, de la vida real, y así demostramos que las matemáticas no solo se aplican en una ciencia específica, sino para cualquier área, como nutrición, deportes o en una fábrica, es decir, las matrices tienen múltiples usos o aplicaciones.*

Vemos que el profesor hace explícitas las aplicaciones en diferentes áreas, y según sus opiniones los estudiantes sí que aplican las matemáticas que reciben en el desarrollo de software matemático. Asociamos aquí también, su criterio sobre utilizar ejemplos prácticos y qué potencialidad les encuentra (E3.P5).

E3.P5: *Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés.*

Carlos recalca que una forma de mantener interesado al alumno en el estudio de un contenido matemático es la demostración de aplicaciones en situaciones cotidianas.

4.5.3. Concepción del aprendizaje

Aprendizaje

De acuerdo con las sesiones de clases observadas, al parecer *el aprendizaje se concibe como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina* (TE8). La asignación de este indicador al aprendizaje se sustenta por la respuesta obtenida por el profesor en entrevistas, por ejemplo, E3.P1, que ya hemos citado en el indicador correspondiente a la orientación, donde la pregunta guarda relación con el aprendizaje de Álgebra Lineal y, de acuerdo al criterio del profesor, los diferentes procedimientos que caracterizan un contenido matemático deben quedar muy claros y afianzarse por medio de la práctica.

En otra entrevista (E2.P11), se le preguntó al profesor cómo sabía si un estudiante aprendió con su exposición o captó la clase, siendo su respuesta la siguiente:

E2.P11: *Mido la capacidad de captación de la clase de los estudiantes a través de la resolución de ejercicios individuales que los alumnos realizan en la pizarra, su grado de rapidez o precisión con que resuelven.*

En la intervención del profesor, éste indica que mide el aprendizaje de los estudiantes cuando pasan a la pizarra a resolver ejercicios de forma individual, de acuerdo al "grado de rapidez o precisión", lo que podría estar relacionado con la búsqueda de eficiencia en la resolución de los ejercicios. Sin embargo, ya observando las clases de Carlos, creemos que más bien promueve un aprendizaje memorístico, pues no analiza distintos métodos de resolución ni compara varios de ellos.

Tipo y forma-procesos

El profesor se enfoca en exponer en sus clases procedimientos o algoritmos hasta su fase final, y para Carlos *el único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo* (regla general-aplicación a casos particulares) (TR9). La aplicación del método deductivo de aprendizaje que se constata en sus clases, también fue corroborada por el profesor en entrevistas, donde le preguntamos, por una parte, si considera que se han trabajado como esperaba diferentes aspectos relacionados con el contenido matemático (E2.P6) y, por otra parte, cómo planifica su clase (E3.P3).

E2.P6: *Sí, considero que se han desarrollado bien aspectos del contenido de la clase con respecto a lo que se refiere a las matrices utilizando el método deductivo – inductivo para que los alumnos aprendan progresivamente el contenido y puedan adquirir el conocimiento sin dificultad. Especialmente los aspectos relacionados a la aplicación en la vida diaria que tienen las matrices porque de esta manera no sienten que el aprendizaje es innecesario.*

E3.P3: *En primer lugar sigo el método que va desde lo deductivo a lo inductivo, ejercicios sencillos, que el alumno se vaya familiarizando con la forma de resolver los ejercicios y les voy poniendo más complicado y cambiando los sistemas de resolución para que ellos vayan demostrando sus habilidades.*

Según las expresiones del profesor, el aprendizaje se da a través de un proceso deductivo, buscando que los alumnos se familiaricen con el contenido sin dificultad y de forma progresiva. Parece que asocia "deducción" con ir de casos más simples a más complejos. Consideramos que en su práctica se observa que concibe el aprendizaje como un proceso deductivo porque parte de exponer reglas generales para después pasar a casos particulares. Además, Carlos sostiene que el trabajar el contenido matemático (matrices) con aplicaciones que pueden darse en la vida real motiva el aprendizaje de los alumnos.

Ya hemos mencionado que para Carlos es importante la reproducción de ejercicios de similares características a los expuestos por él, lo cual se repite a lo largo de las sesiones de clases, donde la concepción del profesor parece ser que *para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior* (TE10). Por ejemplo, el profesor expone la regla de Sarrus y el método del menor y cofactores para el cálculo del determinante, y el estudiante, basándose en esta exposición y en lo que ha entendido sobre los procedimientos enseñados previamente por el profesor, resuelve los sistemas de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer.

En párrafos anteriores, ya hemos mencionado que en el segundo año de observaciones de la práctica de este profesor, permite que algunos contenidos matemáticos sean consultados y preparados previamente por grupos de alumnos para después ser expuestos por estos al resto de los compañeros en las clases. Aquí hay que destacar que se da un aprendizaje autónomo por parte de los grupos de estudiantes encargados de consultar en libros especializados o páginas web el contenido matemático, prepararlo y exponerlo. No obstante, el proceso de aprendizaje para el resto de alumnos de la clase sigue siendo deductivo (TR9), ya que el alumno expositor imita el proceso de enseñanza del profesor (exposición de reglas generales y ejemplos para pasar posteriormente a ejemplos particulares). Se menciona con más detalle cómo cambia el rol del estudiante en el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos en el apartado correspondiente al papel del alumno.

En una entrevista (E3.P12), donde le preguntamos al profesor si considera que se da un aprendizaje significativo cuando son los estudiantes quienes exponen el contenido matemático, obtuvimos la siguiente respuesta:

E3.P12: *Sí, pero existe un riesgo de que se hagan memoristas y que solamente se aprendan para el momento de la exposición, pero realmente no lo han hecho razonando. Son expertos para memorizar, hacen exposiciones increíbles, pero en el momento que yo les pongo un ejercicio diferente pero relacionado al mismo tema que ellos han expuesto, ya no lo pueden resolver porque solamente han aprendido de memoria, no razonaron cómo se resolvía el ejercicio. Por eso es, que sí es importante de todas formas la guía. Es bueno para que manejen las herramientas de investigación, pero es importantísimo* *que igual uno sirva de guía, pero le cuento que cuando yo les daba clases estos grupos eran excelentes cuando preparaban las clases, yo les ponía otros ejercicios cambiados y ellos los resolvían, los casos que te estoy comentando son de ahora que me he encontrado con chicos que solamente se aprenden lo que van a explicar, yo les pongo otros ejercicios relacionados a lo mismo y ya no pueden resolver. No todos los casos son lo mismo, sí es buena la metodología para cambiarles la mentalidad de memorista a que se conviertan en personas que reflexionen, que razonen, ya depende de nuestra guía.*

Según sus expresiones, Carlos considera que el estudiante debe reflexionar y razonar para resolver un ejercicio, siendo siempre necesaria la guía del profesor, de manera que el aprendizaje no sea memorístico. Sin embargo, las declaraciones del profesor plasmadas en esta unidad de información no concuerdan con lo observado en su práctica de aula. Así, por ejemplo, cuando un grupo de alumnos expone la clase, el profesor apenas interviene, excepto en una ocasión para dejar claro el procedimiento, manteniendo una tendencia tecnológica (*para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior*, TE10). Y, no se llega a incentivar el descubrimiento, propio de una tendencia espontaneísta (*el aprendizaje se produce de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento,* E10), ni el razonamiento del alumno característico de un tendencia investigativa (*el aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor,* I10), sino, más bien, se fomenta el manejo de procedimientos estándar o algoritmos.

Importancia de la argumentación (10') e *Interacción maestro-estudiantes-matemáticas (10'')*

Durante el primer año de observaciones de la práctica de aula de Carlos, el estudiante interviene de forma muy escasa en las clases y cuando pasa a resolver un ejercicio al pizarrón, su desempeño es más bien a nivel procedimental, sin argumentar o hacer preguntas. Por tanto, el profesor ***no concede especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones*** (TR10').

Ya en el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos, al parecer, ***es importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje*** (TE10').

Creemos que el profesor concede cierta importancia a la argumentación por parte del alumno y, en este caso, no se trata de una verbalización con las propias palabras del alumno de lo que previamente ha expresado el profesor, sino de una verbalización con palabras del estudiante sobre el contenido matemático consultado y preparado con la finalidad de ser expuesto a sus compañeros. Este cambio en las concepciones del profesor es considerado como una consecuencia de haber empezado a promover que los alumnos expongan la clase, de manera que tengan un espacio para tratar el contenido matemático con el resto de sus compañeros.

En general, en las sesiones de clases observadas ***el alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo éste último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que la inversa*** (TR10''/TE10''). El alumno interviene en pocas ocasiones, por ejemplo, para indicar ciertas características de las matrices (S1.53-63); mencionando las dimensiones de algunas matrices durante la enseñanza del algoritmo de la suma (S1.115-122); y en ocasiones, el estudiante pasa al pizarrón para reproducir el procedimiento enseñado por el profesor, como es el caso de la multiplicación de matrices (S2.86-111), o la aplicación de la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales (S3.21-37), lo que se muestra en las unidades de información citadas a continuación.

S1.53-63

53 P: *Ahora vamos a clasificar las matrices según su forma*
54 *Primero escribamos el ejemplo*

$$H=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

55 *¿Qué particularidad ven ustedes aquí en esta matriz?*
56 E: *Es cuadrada*
57 P: *Según su tamaño la podemos clasificar como cuadrada porque tiene*
58 *cuatro filas y cuatro columnas*
59 E: *Es una matriz triangular*
60 E: *Es diagonal*
61 P: *Exacto, porque la mayoría de sus elementos son ceros, pero sin*
62 *embargo, en la diagonal encontramos otros elementos diferentes de*
63 *cero, entonces esta es una matriz diagonal.*

S1.115-122

115 P: *Entonces, como decíamos, solamente se puede hacer la sumatoria con*
116 *matrices que tienen el mismo orden, obviamente si en las tres fincas*

tenemos ¿cuántos tipos de producción?
E: *Cinco*
P: *Cinco producciones, entonces ¿qué orden tendría una matriz formada por los elementos de esta tabla?*
E: *3x5*
P: *3x5, serían tres filas y cinco columnas*

S2.86-111

P: *La multiplicación por bloques significa o sirve también para poder multiplicar matrices muy grandes, es decir, en este caso por ejemplo procedemos a dividir en bloques de esta manera, y le ponemos en cada bloque una letra, ya no pondré las letras A y B sino C, D, E, F, G, H, I, J, bueno una vez que yo tengo les ubico de esta manera:*

$$A = \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} G & H \\ I & J \end{bmatrix}$$

Y realizamos la multiplicación respectiva, solamente con este artificio que hicimos aquí, entonces, ¿cómo procedo?
E: *CxG + DxI*
P: $AxB = \begin{bmatrix} CxG + DxI & CxH + DxJ \\ ExG + FxI & ExH + FxJ \end{bmatrix}$
Y luego, cada uno de estos valores los vamos a multiplicar por separado Entonces remplazamos, ¿qué tenemos que hacer aquí? Multiplicar la C por la G, entonces ¿cuáles son los valores de C?
E: *1, -1, 2 y 0*
P: *Exacto 1, -1, 2 y 0 por ¿cuáles son los valores de G? 1, 4, 2 y -1, y esto debemos sumarlo a la multiplicación de D, ¿cuánto vale D? 2, 4, 4, 5 por ¿cuánto vale I? -3, 2, 0 y 1 Ok venga a resolver, venga Antonio, venga a resolver la multiplicación de C con G. Ahí va saliendo cada uno a resolver a la pizarra Si va a hacer directo cuidado con equivocarse*
E: *Si multiplico CxG tendría otra matriz*

$$CxG = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

E: *En el caso de DxI*

$$DxI = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$$

P *Ahora sume CxG + DxI*
E: *Nos quedaría*

$$CxG+DxI = \begin{bmatrix} -7 & 13 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}$$

P: *Sí exactamente, excelente; entonces ¿qué resulta?, ya tenemos el primer resultado es esto de aquí, y ahí continuamos hasta lograr encontrar todos los valores de la matriz*

S3.21-37

P: *Pase usted Sr. a realizar los cálculos*
E: *Voy a resolver directamente*

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

	-5	-3	5	
	10	-4	7	
	4	1	1	
x=	-5	-3	5	=-84+20+50+30+80+35 =131
	1	1	1	-21-8+15+9+20-14=1
	2	-3	5	
	3	-4	7	
	1	1	1	
	2	-3	5	

P: *Ahora el mismo procedimiento es para y, también para z. Pase usted Srta.*
y encuentre el valor de y.
Entonces lo que vamos a hallar es el valor de y, mantengamos los
coeficientes de x, como lo que vamos a hallar es y no ponemos los
coeficientes de y sino los valores conocidos, después ubicamos los
coeficientes de z. Acá abajo ubicamos todos los coeficientes de las
ecuaciones.
El determinante del sistema ya lo calcularon cuando hallaron el valor de
x,¿a qué es igual?
E: *A 1*
P: *En todo caso aplicamos la regla de Sarrus aumentando las dos primeras*
Filas
E:

	1	4	1	
	2	-5	5	
	3	10	7	
	1	4	1	
y=	2	-5	5	=-35+20+60+15-50-56=-46
	1	1	1	-21-8+15+9+20-14=1
	2	-3	5	
	3	-4	7	
	1	1	1	
	2	-3	5	

P: *Calculamos el valor de z*
E:

	1	1	4	
	2	-3	-5	
	3	-4	10	
	1	1	4	
z=	2	-3	-5	=-30-32-15-20-20+36=-81
	1	1	1	-21-8+15+9+20-14=1
	2	-3	5	
	3	-4	7	
	1	1	1	
	2	-3	5	

A través de estas cuatro unidades de información, sustentamos que es evidente que las intervenciones del profesor son las que predominan en las sesiones de clases.

En el segundo año de observaciones, el alumno interactúa con la asignatura y sus compañeros, siendo muy escasa la intervención del profesor cuando son los estudiantes los encargados de exponer el contenido matemático, excepto en una ocasión que ante ciertas dificultades que observa el profesor de acuerdo a lo que expresa el estudiante, decide intervenir e ir exponiendo él mismo el procedimiento, siendo el estudiante que está en la pizarra quien escribe los cálculos para que quede claro a todo el grupo clase.

Sin embargo, cuando es el profesor quien expone la clase en el año dos de observaciones, se sigue manteniendo una mayor interacción del profesor hacia los estudiantes antes que la inversa (TR10''/TE10'').

Tipo de agrupamiento

Con relación al tipo de agrupamiento, y de acuerdo a lo observado en las sesiones de clases de Carlos, *la única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual* (TR11/TE11). Atribuimos este indicador, por cuanto en el primer año de observaciones de la práctica del profesor, los estudiantes practican los ejercicios planteados por él, ya sea pasando al pizarrón o en sus hojas de apuntes.

En el segundo año de observaciones, el profesor conforma grupos de trabajo para exponer el contenido matemático y, según lo que señala en la unidad de información E3.P12 (citada en párrafos anteriores, en el indicador correspondiente a tipo y forma-procesos), considera que el trabajo en grupo es una buena estrategia que fomenta la reflexión en sus estudiantes. No obstante, creemos que sus concepciones en relación con este indicador siguen siendo tradicionales-tecnológicas, no llegando a alcanzar una tendencia espontaneísta (*la forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates,* E11), por cuanto no se llegan a dar debates entre los estudiantes.

4.5.4. Papel del alumno

Participación en el diseño didáctico

Durante el primer año de observaciones de las aulas, es el profesor quien prepara las actividades para impartir las clases. De allí, que *el alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.* (TR15/TE15). Esta afirmación se sustenta en las expresiones del profesor en una entrevista (E3.P4), donde se le preguntó de qué fuente extrae las actividades para sus clases.

E3.P4: *De diferentes libros que sean de fácil acceso a ellos o yo les proporciono el material que yo creo que es más fácil para que ellos puedan familiarizarse con los ejercicios.*

Carlos se apoya en varios libros de texto, de dónde extrae los ejercicios que emplea para la enseñanza de los contenidos matemáticos.

En el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos, *el alumno participa indirectamente en el diseño didáctico* ***(a través de sus intervenciones en el quehacer del aula)*** (E15), ya que el profesor ha conformado grupos de trabajo de estudiantes, quienes son los encargados de exponer una parte del contenido matemático que se tiene previsto abordar en las sesiones de clases.

¿Qué hace?

Para Carlos es importante que los alumnos tomen los apuntes correspondientes en sus clases. Así lo corroboramos en las observaciones y además, en una entrevista (E4.P9), el profesor manifiesta por qué le parece importante la toma de apuntes.

E4.P9: *Yo les hago copiar la clase como una manera de tenerlos ocupados, además, la memoria es muy frágil y si copian ellos pueden después revisar sus apuntes y recordar cosas que suelen olvidar.*

Por tanto, creemos que las concepciones del profesor con respecto al papel del alumno presentan características tradicionales y tecnológicas, ya que, por una parte, *hay una sobrevaloración implícita de los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que proviene del profesor* (TR17) y, por otra parte, *el alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17). Lo que indica este último indicador, se da especialmente cuando el profesor solicita al estudiante que resuelva algún ejercicio habiendo expuesto previamente su procedimiento en el pizarrón, como por ejemplo, uno relacionado con el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de un problema de aplicación (S3*.111-127).

S3*.111-127

111 P: *Aquí nos piden determinar el precio de venta de cada litera, entonces la*
112 *primera incógnita sería la p de precio de venta de cada litera y la segunda*

es el salario semanal, entonces la incógnita sería s del salario de cada empleado y después vamos a ver cuánto debe pagarse por cada viaje, ustedes pueden poner ahí la v de viaje o de viáticos
¿Quién planteó ya el ejercicio? Quiero que lo hagan ustedes.
Bien, les debo decir que la producción o fabricación de literas es lo positivo y lo negativo sería pagar a los empleados y también el costo de los viajes. ¿Ya está planteado?
Lean bien, la producción de las literas va primero como lo positivo y lo demás es negativo.
E: *¿Es así?*
P: *Usted ya lo tiene bien avanzado, excelente, usted ha utilizado otras incógnitas. Pero pienso que el orden sí es importante, debe poner primero la inversa multiplicada por el valor de la ganancia. Muy bien Luis. Vamos a continuar, yo usaré estas incógnitas p=precio, s=salario y v=viaje. Pero ustedes pueden utilizar las que crean convenientes.*

A través de esta unidad de información, intentamos mostrar que el estudiante, basándose en la exposición previa de Carlos sobre cómo plantear un sistema de ecuaciones lineales, intenta reproducir el procedimiento aprendido.

Además, ***al ser el profesor el que proporciona la clave para la repetición/reproducción posterior, es fundamental la atención a éste (fuente de información fundamental)*** (TR18/TE18). La asignación de este indicador se sustenta en las observaciones de sus aulas y, además, nos basamos en entrevistas, donde se le preguntó al profesor cuales son las principales dificultades en el desarrollo del tema, qué hace para paliar las mismas (E1.P20), y si creía que es importante que un estudiante participe activamente mientras el profesor explica un contenido matemático y por qué (E3.P17), siendo sus respuestas las siguientes:

E1.P20: *Realmente yo me he podido dar cuenta de que constituye una dificultad que los estudiantes se distraigan. No permitir que los estudiantes se distraigan, mantenerlos permanentemente en actividad, que ellos participen activamente resolviendo los ejercicios porque si los dejamos que los resuelvan solos en su hoja de trabajo, se desvinculan de la clase. Yo los hago pasar a resolver ejercicios a la pizarra como una técnica, mas no porque no sepan, sino para mantenerlos activos y atentos en la clase.*

E3.P17: *Para que no se distraigan y así yo puedo saber que están conectados con mi clase, porque puedo tenerlos yo en presencia pero realmente su mente está ausente. Entonces es importantísimo tenerlos activos, tanto haciendo ejercicios en la hoja como pasando a la pizarra a resolver, combinando las dos actividades porque pueden estar* *solo copiando en la hoja pero eso no significa que están ellos razonando ni pensando, solo copiando. Entonces si ellos salen a la pizarra ahí se dan cuenta de que estaban escribiendo por gusto.*

Ya se ha mencionado que la práctica de aula de Carlos se caracteriza porque el alumno reproduzca procedimientos a través de la realización de ejercicios similares a los resueltos por el profesor, de allí la asignación de concepciones tradicionales y tecnológicas del profesor relacionadas con el que hacer del alumno (TR18/TE18). Dichas concepciones se sustentan y complementan con las unidades de información citadas, de donde extraemos que para el profesor es importante mantener la atención del alumno, empleando como estrategia que pasen al pizarrón a resolver ejercicios propuestos. Esto por ejemplo, sucede cuando se trata de multiplicar un escalar por una matriz (S2.28-36).

S2.28-36

28 P: *Pase usted a resolver primero 1/2A y después –B.*

29 E: *Primero 1/2ª*

$$1/2A=\begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & -2 & 0 \\ ½ & 5/2 & 3/5 \end{bmatrix}$$

30 *-B sería*

$$-B=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3/2 & -5/2 & -3/5 \end{bmatrix}$$

31 P: *Pase otro estudiante a escribir la respuesta de 1/2A-B. Fíjese que como*
32 *hemos hecho por partes ½ A y luego –B, ya no tiene que cambiar signos,*
33 *sólo realizar las operaciones indicadas. Una vez realizada la*
34 *multiplicación del escalar por la matriz, solo falta sumar o restar los*
35 *valores y escribir la respuesta*

36 E:

$$1/2A-B=\begin{bmatrix} -13/2 & 1 & ¼ \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el profesor es importante que los estudiantes pasen al pizarrón y sean capaces de poner en práctica el algoritmo o procedimiento enseñado; siendo la forma de mantener su atención el elegir estudiantes al azar para que resuelvan ejercicios en el pizarrón.

La técnica de Carlos consiste en ir exponiendo el contenido con ejemplos sencillos, y posteriormente utilizar ejercicios similares para que los estudiantes practiquen siguiendo mecánicamente lo aprendido. Si relacionamos la técnica con el papel que da al alumno, pensamos que *la confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido* (TE19). Un ejemplo de esto es la exposición de cómo escalonar una matriz hecha por el profesor paso a paso, indicando qué operaciones elementales entre filas hay que efectuar (el ejercicio ya lo llevó al aula resuelto y lo expuso a sus estudiantes por medio de una diapositiva) (S2*.39-58, S2*.188-195).

S2*.39-58

39 P: *Considerando que primero vamos a escalonar la matriz hasta*
40 *que tome forma de matriz triangular, se dan cuenta que el*
41 *primer elemento tenemos que transformarlo en uno, y en este caso*
42 *tenemos en la última fila el uno, ¿qué se procede a hacer?*
43 E: *Cambiar las filas.*
44 P: *Exacto f_1 se cambia con f_3*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad f_1 \rightarrow f_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

45 *Ya tenemos el uno*
46 *Procedemos ahora a cambiar las filas dos y tres, transformando en*
47 *cero el -2 y el 3.*
48 *¿Qué vamos a hacer?*
49 *Multiplicar la fila uno por dos y lo sumamos a la fila dos.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_2 \rightarrow f_2 + 2f_1 \\ f_3 \rightarrow f_3 - 3f_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

50 *Ya tenemos nosotros en la primera columna los valores que necesitamos*
51 *de 1, 0 y 0.*
52 *En la tercera fila también hemos transformado el tres en cero.*
53 *Se ha modificado ese cero que estaba al lado del tres, se ha convertido*
54 *en 15.*
55 *Ven que allí hemos multiplicado la fila uno por -3, ¿por qué?*
56 E: *Porque al sumar con la fila 1 se hace cero.*
57 P: *Exactamente, si tienen alguna pregunta por favor dígame.*
58 *Recuerde que estamos escalonando la matriz primero.*

S2*.188-195

188 P: *Entonces ya se dieron cuenta, vamos a anotar cada uno de los pasos*
189 *encerrados en un círculo para que vean cuál es la secuencia. Ya con*
190 *esta matriz escalonada encontramos los valores de las incógnitas x,y, z.*
191 *Ahora va a pasar usted a hacer otro ejercicio, yo le voy a ir dando las*
192 *directrices. Obviamente no podía esperar que ustedes lo sepan todo*
193 *porque es un tema nuevo, entonces con esta explicación les quedó más*
194 *claro, con lo que hicimos suficiente, para qué seguir calculando, si allí*
195 *ya podían hallar la respuesta.*

Los alumnos confían en lo expuesto por el profesor, sin cuestionarse más allá de lo que este les enseña y procuran resolver los ejercicios de forma mecánica y secuencial. Este indicador (TE19) se relaciona con el de la praxis (TR2), ya citado anteriormente en metodología, el cual indica que el profesor expone los contenidos en su fase final, reforzando así la idea de exposición magistral en la práctica de Carlos.

4.5.5. Papel del profesor

¿Qué hace?, ¿Cómo hace?, Justificación

Carlos es quien organiza el contenido de las sesiones de clases, el cual es expuesto a los estudiantes a través de ejemplos, destacando de su práctica que procura que dichos ejemplos sean de aplicación del contenido matemático, no sólo dentro de la propia matemática, sino además en otros ámbitos (situaciones cotidianas). Por tanto, *el profesor actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas* (TE 20-23).

Se observa en sus aulas que para Carlos es importante la participación de los estudiantes, sobre todo, pasando a resolver ejercicios en el pizarrón. Asociamos aquí sus expresiones en una entrevista (E2.P4), donde le preguntamos si todos los estudiantes tienen oportunidad de participar con cuestiones o comentarios sobre el tema de la clase.

E2.P4: *Se distribuye la clase entre la explicación y la participación de cada uno de los alumnos, para que cada uno de ellos tenga la oportunidad de poner en práctica sus conocimientos adquiridos.*

En general, en las sesiones de clases observadas (durante el primer año especialmente), sucede lo que indica en la entrevista, es decir, el profesor intenta distribuir la clase entre su exposición (a través de un ejemplo) y luego la participación de los estudiantes resolviendo ejercicios similares en el pizarrón.

Carlos utiliza ejemplos de aplicación para abordar la suma de matrices (relacionado con las pérdidas o ganancias de un agricultor en su finca), producto por un escalar (producción de repuestos), multiplicación de matrices (consumo de combustible de varios modelos de autos), matriz inversa, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (cálculo de producciones, ingresos y egresos en una fábrica), ya que considera prioritario que los estudiantes observen las aplicaciones del contenido que enseña (lo cual ha sido plasmado ya en párrafos anteriores).

En el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos, éste imparte la clase empleando herramientas informáticas, como diapositivas con definiciones y ejemplos para que los estudiantes capten los procedimientos y luego los reproduzcan resolviendo ejercicios similares.

El profesor escucha ciertas sugerencias de los estudiantes en relación con los procedimientos que enseña; sin embargo, cuando el alumno está resolviendo un ejercicio en el pizarrón interviene de manera que se aplique la forma que el profesor considera más adecuada para llegar a una respuesta. Por ejemplo, cuando se trata de resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss (S2*.147-158).

S2*.147-158

P: *Vamos a ver, ¿cuál va a hacer ahora?*

E: *El -3*(fila 2 columna 2) *lo voy a convertir en 1*

P: *Excelente, escriba arriba el procedimiento que va a hacer*

E: *Lo escribo aquí*

$$\begin{array}{c} \\ -1/3f_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *No, yo le voy a recomendar mejor otro paso primero, le voy a recomendar convertir el -3*(fila 3 columna 2)*en 0 porque yo estuve revisando el ejercicio que usted iba a exponer. Entonces va a hacer usted $f_3 - f_2$, vamos a hacer así*

E: *Lo voy a escribir*

$$\begin{array}{c} \\ \\ f_3 \rightarrow f_3\text{-}f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Yo les estoy recomendando estos pasos porque después se les hace muy largo el procedimiento. Escriba los valores que no se van a modificar, fila 1 y fila 2*

Carlos interviene en la resolución que lleva a cabo el estudiante, sugiriendo operaciones que acorten los procedimientos para alcanzar la respuesta.

Validación de la información

Los estudiantes de Carlos intervienen escasamente en las clases durante el primer año de observaciones de su práctica, siendo en el segundo año de observaciones donde encontramos evidencia de que ***el profesor es el que valida las ideas que se movilizan en***

el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta (TR24'). Por ejemplo, el profesor interviene cuando nota que un estudiante está confundiendo a sus compañeros con la exposición del método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (S2*.97-128, S2*.188-195).

S2*.97-128

97 P: *Veo como que se les está complicando, la matemática es para*
98 *simplificar y no para complicar, entonces yo veo como que están dando*
99 *vueltas y es importante que lleguen a un procedimiento que les*
100 *simplifique la solución, no que se les complique.*
101 *Tomando de los mismos ejercicios que me han traído ustedes, de*
102 *aquellos que iban a exponer.*
103 *A ver Ángel, usted me ha entregado aquí un ejercicio.*
104 *Copien este sistema x+2y+z=1, 2x+y+2z=2, 2x+y+z=3*
105 *Presten atención todos para que ya les quede claro cómo se*
106 *resuelven estos ejercicios.*
107 *Para resolver por el método de Gauss, lo que deben hacer es tomar*
108 *cada uno de los coeficientes y escribirlos como una matriz*
109 *Ahora, les recuerdo que acabamos de ver que tienen que*
110 *hallar la matriz escalonada para encontrar los valores de x, y, z*
111 *Significa que vamos a hacer que todos estos valores de aquí se hagan*
112 *cero y estos de aquí se hagan uno.*

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

113 *Al ustedes intentar que estos elementos se conviertan en cero se*
114 *les van a modificar estos uno, pero ustedes intentarán transformarlos*
115 *nuevamente en cero con las operaciones elementales entre filas*
116 *Entonces, yo les dije que para hallar las incógnitas x,y,z solo tenían que*
117 *escalonar la parte de abajo* (diagonal principal), *o sea convertir en 0.*
118 *Si ustedes ya lo resuelven todo ya es la matriz identidad que van a hallar*
119 *y la matriz identidad les sirve es para hallar la matriz inversa por Gauss*
120 *-Jordan. Yo quisiera que hagan los procedimientos de manera que*
121 *les quede claro, tanto a usted que lo hace en la pizarra como a sus*
122 *compañeros*
123 *¿Qué va a modificar?*
124 E: *La fila 2*
125 P: *Perfecto, entonces escriba* f_2*, así es que deben hacer ustedes para que no*
126 *se pierdan, vamos a modificar f2, entonces ¿qué va a hacer?, multiplicar*
127 *por -2 la fila 1 y la suma a la fila 2, entonces ahí como*
128 *que les queda más claro*

S2*.188-195

188 P: *Entonces ya se dieron cuenta, vamos a anotar cada uno de los pasos*
189 *encerrados en un círculo para que vean cuál es la secuencia. Ya con*
190 *esta matriz escalonada encontramos los valores de las incógnitas x, y, z.*
191 *Ahora va a pasar usted a hacer otro ejercicio, yo le voy a ir dando las*
192 *directrices. Obviamente no podía esperar que ustedes lo sepan todo*

193 *porque es un tema nuevo, entonces con esta explicación les quedó más*
194 *claro, con lo que hicimos suficiente, para qué seguir calculando, si allí*
195 *ya podían hallar la respuesta.*

Como vemos, la intervención del profesor se produce para indicar qué operaciones hay que realizar para que el procedimiento sea correcto, siendo el mismo estudiante que expone el que escribe en la pizarra lo que le va indicando el profesor, y este último es quien valida la información y cierra la exposición.

4.5.6. Resumen de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En el primer año de observaciones de las aulas de Carlos, la actividad se caracteriza por la práctica repetitiva de ejercicios similares a los que emplea en la exposición del contenido matemático (TR1). Expone procedimientos o algoritmos en su fase final, empleando ejemplos de aplicación que pueden representar situaciones cotidianas (TR2). Le interesa que el estudiante maneje procedimientos y destacar la aplicabilidad del contenido matemático (TE3). La programación que desarrolla en sus clases es un documento externo, es decir, elaborada por otras personas (TR4). Además, es considerada como un documento cerrado, predominando la lógica de la disciplina (TE4).

El profesor orienta la asignatura a la adquisición de definiciones introductorias sobre el contenido matemático, así como de procedimientos o algoritmos, fomentando la reproductibilidad de los mismos (TE5) a través de la práctica repetitiva de ejercicios. La asignatura tiene una finalidad práctica y, en ella, se destacan principalmente las aplicaciones del contenido en situaciones de la vida cotidiana, y en menor escala dentro de la propia matemática y en otras disciplinas (TE7).

De acuerdo a la lógica estructural de la asignatura, promueve un aprendizaje memorístico (TE8), a través de un proceso deductivo (TR9), y donde el aprendizaje del alumno se produce por asimilación del conocimiento que le presenta el profesor (TE10). El estudiante casi no interviene con preguntas en el desarrollo de las clases, y el profesor no promueve que el alumno argumente sus conclusiones sobre el contenido abordado (TR10’). La interacción que predomina es la que va del profesor hacia el alumno, siendo el primero el intermediario entre la asignatura y el estudiante (TR10’’/TE10’’). Para el profesor el verdadero aprendizaje tiene lugar cuando el alumno trabaja de forma individual (TR11/TE11), sobre todo pasando al pizarrón a reproducir los procedimientos enseñados por él.

El alumno no participa en el diseño didáctico, y las actividades del aula son proporcionadas en su totalidad por el profesor (TR15/TE15). Concede especial importancia a la recolección de apuntes por parte de sus alumnos (TR17) y, además, éstos, al pasar al pizarrón a resolver ejercicios reproducen el proceso lógico mostrado por el profesor, imitando su estilo cognitivo (TE17). Carlos es la fuente de información principal en las clases, considerando fundamental que el alumno preste la debida atención, ya que es el profesor quien proporciona la clave para la reproducción de los ejercicios (TR18/TE18). El alumno confía plenamente en lo que expone el profesor sin cuestionarse sobre el fondo del contenido tratado (TE19).

El profesor organiza la exposición de contenidos matemáticos mediante el uso de ejemplos, que procura sean de aplicación en situaciones cotidianas, como una forma de que el contenido expuesto sea atractivo para el estudiante (TE20-23), siendo él mismo quien valida la información que se moviliza en el aula (TR24').

En el segundo año de observaciones de su práctica implementa una variante en su metodología de enseñanza, permitiendo que los estudiantes expongan algunos contenidos matemáticos, habiendo muy poca intervención del profesor durante dichas exposiciones. Se mantiene la práctica repetitiva de ejercicios, ya sea cuando expone el profesor o el estudiante y el contenido se trabaja de forma expositiva en su fase final.

La orientación de la asignatura sigue siendo hacia la adquisición de definiciones y procedimientos o algoritmos e interesa el desarrollo de ejercicios de aplicación en situaciones de la vida cotidiana.

En el proceso de aprendizaje intervienen tanto el estudiante como el profesor, dicho proceso sigue siendo deductivo, y los alumnos encargados de la exposición del contenido matemático imitan el modo de enseñanza del profesor. Existe un cambio en las concepciones entre un año y otro de observaciones de su práctica en lo concerniente a la importancia que el profesor concede a la argumentación, ya que en el segundo año el alumno expone un contenido matemático con sus propias palabras como una forma de mostrar su aprendizaje (TE10''). La intervención del profesor cuando el estudiante expone es mínima, habiendo una interacción entre el alumno expositor y sus compañeros, y cuando es el profesor el que expone los contenidos se mantiene una interacción no equilibrada, siendo más fuerte en dirección profesor alumno. Aunque el trabajo en grupo es visto como una buena estrategia para fomentar la reflexión en sus alumnos, y conforma grupos de trabajo para la exposición de contenidos matemáticos, en el segundo año de observaciones de su práctica de aula, Carlos mantiene concepciones tradicionales/tecnológicas con relación al tipo de agrupamiento (TR11/TE11), donde el verdadero aprendizaje se orienta hacia el trabajo individual, ya que aunque los estudiantes trabajen en grupo, no encontramos evidencias de debates entre ellos.

La participación del alumno tiene lugar en forma indirecta en el diseño didáctico con su intervención en la exposición de contenidos matemáticos (E15). La actividad del alumno se sigue caracterizando por la reproducción del proceso lógico mostrado por el profesor, sin una reflexión profunda sobre las actividades que desarrolla, ya sea cuando expone un contenido matemático o cuando atiende una clase, sin cuestionarse el fondo del contenido.

El profesor mantiene su papel de organizador del contenido matemático, el cual lo transmite mediante la exposición de ejemplos, siendo algunos de ellos de aplicación en situaciones cotidianas, y donde la validación de la información sigue a cargo del profesor, inclusive cuando el estudiante expone el contenido matemático.

4.6. Conocimiento especializado y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Somos conscientes de que existen diversos posicionamientos sobre lo que se considera conocimiento, creencias y concepciones de los profesores, así como cuestiones controvertidas sobre la propia definición de estos constructos (Thompson, 1992; Cooney & Wilson, 1994; Pajares, 1992; Ponte, 1994; Fenstermacher, 1994, Schoenfeld, 2010). No obstante, esa discusión no es el foco de este estudio.

Ya hemos mencionado que en nuestro grupo de investigación (SIDM) de la Universidad de Huelva entendemos el conocimiento en los términos expresados por Pajares (1992) y Schoenfeld (2010). Para el caso de creencias y concepciones, las consideramos en la línea propuesta por Ponte (1994); y en este estudio los términos creencias y concepciones los empleamos indistintamente siguiendo a Carrillo (1998) y Climent (2005).

Autores como Skott, Van-Zoest, & Gellert (2013) hacen referencia a la importancia del desarrollo de investigaciones en las que se establezcan conexiones entre el conocimiento de los profesores de matemáticas, concepciones e identidad. En este apartado procuramos establecer posibles relaciones entre el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta que en el modelo MTSK se considera que las concepciones inciden en el conocimiento del profesor. De allí que, en la misma línea, coincidimos con el estudio previo de Flores & Carrillo (2014) en que las dimensiones (conocimiento y concepciones) se pueden emplear como complementarias a la hora de analizar el conocimiento del profesor.

Nuestro interés no es ubicar a los profesores en una de las tendencias didácticas definidas por Carrillo (1998) sino describir las posibles relaciones entre el conocimiento especializado y las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación describimos las posibles relaciones que hemos encontrado entre el conocimiento especializado evidenciado por Jordy y Carlos en sus clases de Álgebra Lineal y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

4.6.1. Relaciones entre el conocimiento especializado de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Jordy muestra un amplio conocimiento sobre errores y dificultades de los estudiantes (KFLM-*fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*) referente al contenido, lo cual guarda relación con sus concepciones sobre la metodología de enseñanza, considerando que su praxis se orienta hacia la ejercitación reproductiva con advertencias sobre los posibles errores que pueden cometer los estudiantes. Parece que el conocimiento sobre los errores en el contenido que enseña lo ha adquirido a lo largo de los años de experiencia, y con esta base ha incorporado en sus explicaciones constantes advertencias en su afán de evitar que los estudiantes reproduzcan dichos errores.

Además, como característica de su praxis, el profesor expone el contenido a través de ejemplos simulando el proceso de construcción de ese contenido, interviniendo allí su conocimiento sobre ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*), ya que en sus explicaciones procura que el estudiante se enfoque en diferentes características del contenido a través de ejemplos variados. Creemos también que sus concepciones sobre la forma de exponer el contenido matemático tienen relación con el conocimiento de diferentes prácticas asociadas a la simplificación de procedimientos y operaciones en los ejemplos (KPM-*formas de proceder*), en el sentido de que su exposición de las características de cada ejemplo va asociada generalmente a que el estudiante aprenda diferentes formas de proceder en un mismo ejercicio (generalmente para que su resolución sea más fácil), lo que se evidencia cuando trabaja la matriz inversa, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Las evidencias encontradas en las clases de Jordy nos muestran un rico conocimiento de los temas, que incluye no sólo el cómo se hace, sino también las condiciones bajo las cuales puede aplicarse un determinado procedimiento matemático, y las características que tendrá el objeto matemático resultante (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*), lo cual relacionamos con sus concepciones relativas a objetivos procedimentales en sus aulas. Hemos podido constatar su interés en que los estudiantes dominen las operaciones y algoritmos inmersos en el contenido matemático.

Relacionado a lo anterior, creemos que el conocimiento mostrado por Jordy en cuanto a los usos del contenido matemático (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) se ve influenciado por sus concepciones del aprendizaje y sobre el sentido que para él debe tener la asignatura, la cual considera debe estar orientada al manejo de algoritmos, ya que interesa su reproductibilidad, considerando que la finalidad que se persigue tiene un carácter práctico y utilitario con un aprendizaje de la aplicación de los procedimientos dentro de la propia matemática. También debemos mencionar que de acuerdo a sus concepciones sobre la orientación que debe tener la asignatura, el profesor considera importantes las definiciones y la notación de los objetos matemáticos, habiendo de este modo una relación con el conocimiento sobre las definiciones (KoT-*definiciones*) y representaciones (KoT: *registros de representación*) reflejado en sus clases.

Siendo importante para el profesor el carácter práctico de la asignatura en el sentido de su interés en el manejo de reglas y procedimientos para su posterior reproductibilidad y aplicabilidad (finalidad utilitaria e instrumental) dentro de la propia matemática, pensamos también en la relación de estas concepciones con las prácticas observadas en sus clases asociadas a la simplificación de las operaciones matemáticas dentro de esos procedimientos donde se nota además el papel que da a la notación matemática en sus clases (KPM-*formas de proceder*).

Las concepciones de Jordy sobre el proceso de aprendizaje enfocadas en la exposición del contenido fundamentalmente a través de un método deductivo (reglas generales-aplicación a casos particulares) están en sintonía con el conocimiento sobre procedimientos (KoT: *Procedimientos-¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*) evidenciado en sus clases, por cuanto lo que interesa al profesor es que el estudiante aprenda por asimilación de la información los diferentes procedimientos o reglas enseñados de forma general y los ponga en práctica con casos particulares.

Ya hemos mencionado en apartados anteriores que, en cuanto al conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), encontramos evidencias enmarcadas en una de las categorías (*fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*) en lo referente a los errores y dificultades de los estudiantes hacia el contenido, donde Jordy muestra un amplio conocimiento. Pensamos que esto podría relacionarse con el hecho de que las concepciones de Jordy respecto a la interacción profesor-estudiante-matemáticas se inclinan en la dirección profesor-alumno, con una limitada intervención de los estudiantes, e influye en que no se obtengan evidencias mediante la observación de la práctica del profesor de otras categorías que conforman el subdominio.

Esta interacción profesor-alumno se muestra más equilibrada en el segundo año de observaciones de las aulas de Jordy, existiendo una mayor intervención de los estudiantes al ser estos quienes exponen parte del contenido matemático, y donde el profesor interviene cuando el estudiante expositor comete errores, con la finalidad de generalizar y advertir al resto de la clase sobre errores que no se deben cometer. Es decir, aunque el estudiante intervenga más al ser él mismo el que expone el contenido matemático, imita el estilo del profesor y el conocimiento que este último evidencia sigue siendo sobre errores y dificultades (KFLM-*fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*), al ser Jordy quien valida realmente la información (generalmente haciendo alusión a los errores) y cierra las exposiciones de los estudiantes.

El conocimiento que el profesor refleja sobre procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*), propiedades (KoT-*propiedades y fundamentos*), representaciones (KoT: *registros de representación*) y definiciones (KoT-*definiciones*) guarda coherencia con sus concepciones sobre el papel del alumno en sus clases. Jordy es quien interviene mayoritariamente en las mismas exponiendo paso a paso los algoritmos, propiedades y definiciones inmersos en el contenido matemático, siendo importante para el profesor que el alumno atienda dicha exposición, y crea o confíe en lo expuesto por él, para posteriormente reproducir procesos lógicos donde el alumno tendrá que aplicar lo enseñado por el profesor.

Las evidencias del conocimiento de Jordy sobre los ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*) junto a los indicios de su conocimiento sobre las prácticas asociadas a la simplificación de procedimientos y operaciones, el papel de la notación matemática (KPM-*formas de proceder*), y el conocimiento sobre errores y dificultades (KFLM: *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*) se relaciona con sus concepciones sobre el papel que desempeña el profesor, considerando que es Jordy quien organiza los contenidos matemáticos y su estrategia para exponerlos es a través de ejemplos variados en los que destaca detalles para su resolución, procurando socializar con el grupo clase los posibles errores asociados al contenido.

Las relaciones establecidas nos llevan a pensar en que el conocimiento y concepciones evidenciados por el profesor interactúan, el conocimiento nos permite comprender mejor las concepciones y viceversa. En lo que nos ocupa, el visionado conjunto de conocimiento y concepciones nos permite comprender mejor el conocimiento del profesor (que es el principal objetivo de este trabajo). Jordy muestra un rico conocimiento del contenido, ese conocimiento parece ser la base de su análisis de dificultades (pudiendo darse también la influencia inversa) y parece coherente con su preocupación en la enseñanza sobre la advertencia de errores. Al parecer, conocimiento y concepciones se retroalimentan, ya que sus concepciones le hacen explorar o fijarse en algo que le proporciona conocimiento y el tener ese conocimiento agudiza su sensibilidad y sus creencias hacia el papel del error.

Las concepciones de Jordy sobre la metodología de enseñanza se orientan hacia una transmisión de los contenidos simulando el proceso de construcción del aprendizaje, para lo cual requiere un amplio KoT que junto a los indicios de KPM encontrados y, al KFLM y KMT evidenciados en el análisis de su práctica, le permite no sólo exponer cómo llevar a cabo un procedimiento, sino indicar a los estudiantes cuál es la forma de simplificar dicho procedimiento para alcanzar los resultados, resaltando sus aspectos clave, así como los principales errores y dificultades que puede generar a través de la variedad de ejemplos del contenido matemático que presenta.

En la Figura 19 presentamos un resumen de las posibles relaciones establecidas entre los subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

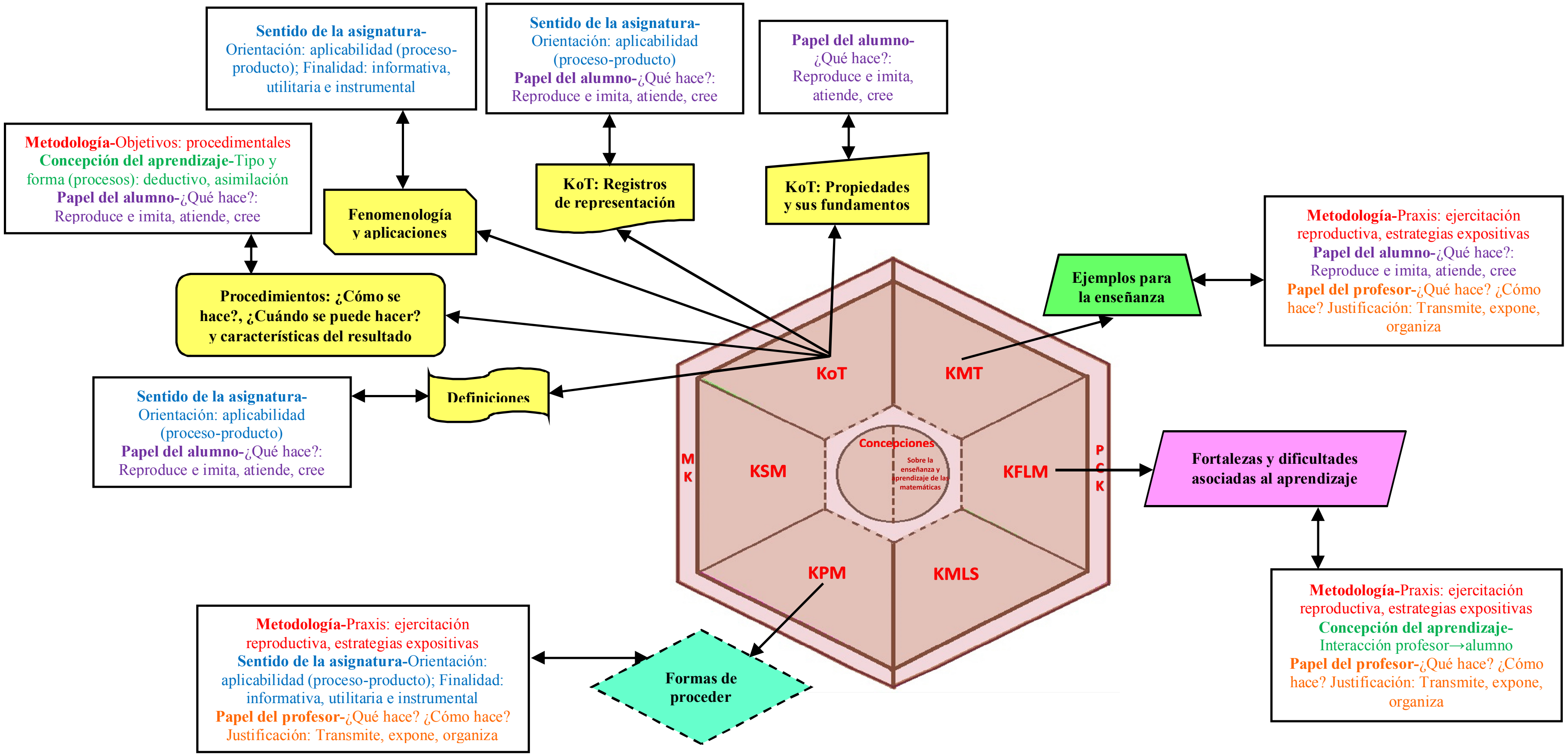


Figura 19. Relaciones entre el conocimiento especializado de Jordy y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

4.6.2. Relaciones entre el conocimiento especializado de Carlos y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Las concepciones sobre la metodología de enseñanza de Carlos guardan relación con el conocimiento que evidencia sobre cómo llevar a cabo los procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?*), el conocimiento de ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*), y conocimiento sobre aplicaciones del contenido enseñado (KoT-*fenomenología y aplicaciones*), considerando que su praxis se caracteriza por una ejercitación repetitiva y la exposición magistral de algoritmos en su fase final con ejemplos del contenido que pueden representar situaciones cotidianas (aplicaciones en la vida real); lo cual observamos cuando enseña operaciones con matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Lo anterior se asocia a concepciones relativas a lo procedimental con respecto a los objetivos que persigue en sus aulas, acompañados de la funcionalidad del contenido matemático, lo cual relacionamos con que en su práctica haya mayor evidencia de su conocimiento sobre los temas, especialmente sobre cómo llevar a cabo los procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*). Para Carlos es importante que el estudiante note la funcionalidad del contenido, lo cual se refleja en su conocimiento sobre aplicaciones en situaciones que pueden darse en la vida real, así como dentro del mismo contenido matemático (KoT-*fenomenología y aplicaciones*).

El conocimiento que despliega Carlos acerca de definiciones (KoT: *definiciones*), reglas, procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*) y representaciones (KoT: *registros de representación*) se relaciona con sus concepciones referentes a la orientación y finalidad de la asignatura. Al profesor le interesa que los estudiantes se apropien del procedimiento, destacando la lógica de los mismos para la reproducción repetitiva de ejercicios. Así, Carlos introduce las operaciones con matrices enfocando su aplicación en una situación cotidiana, destacando a su vez la notación matemática. El contenido matemático tiene para él una finalidad informativa y utilitaria, especialmente en situaciones que pueden darse en la vida real, de allí que sus concepciones sobre la orientación y finalidad de la asignatura las relacionamos también con su conocimiento sobre aplicaciones (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) y ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*).

Pensamos que la concepción del aprendizaje del profesor, enfocada en un proceso deductivo con la exposición de los procedimientos hasta su fase final y donde el estudiante aprende por asimilación, guarda relación con el conocimiento de Carlos sobre cómo llevar a cabo los procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?*), ya que observamos en sus clases el fomento del manejo de procedimientos estándar o algoritmos.

En la observación de la práctica de Carlos encontramos pocas evidencias del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas, las mismas que hacen referencia a errores que pueden cometer los estudiantes (KFLM-*fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*), que relacionamos con sus concepciones sobre la metodología de enseñanza orientada hacia la presentación del contenido en su fase final, y su concepción del aprendizaje donde predomina la interacción en el sentido profesor-alumno, ya que pensamos que al ser escasa la participación del estudiante no fue posible observar en la práctica de aula del profesor su conocimiento sobre otras categorías del KFLM. Este hecho se dio inclusive en el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos (cuando encargó la exposición de parte del contenido matemático a sus estudiantes), debido a que cuando los estudiantes expusieron, el profesor sólo intervino en una ocasión para resolver un ejercicio que presentó uno de los grupos de exposición.

Pensamos que las concepciones de Carlos sobre el papel del alumno en sus clases guardan relación con la observación de un mayor número de evidencias de su conocimiento sobre cómo llevar a cabo los procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?*) acompañado de definiciones (KoT-*definiciones*) y representaciones (KoT-*registros de representación*). Es importante para el profesor que el estudiante esté atento en sus clases y reproduzca lo enseñado por él (algoritmos), por ello expone paso a paso los procedimientos, y posteriormente trabaja con ejercicios similares para que el estudiante reproduzca lo aprendido sin cuestionarse más allá de lo expuesto por el profesor.

El conocimiento evidenciado por Carlos sobre las aplicaciones del contenido (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) y sobre ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*) estaría relacionado con las concepciones del profesor sobre su papel en las clases, considerando que estas se orientan hacia transmitir los contenidos mediante la exposición de ejemplos de aplicación de las matrices y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones cotidianas, de manera que sean atractivos para los estudiantes.

Las concepciones de Carlos se orientan hacia una enseñanza con características tradicionales-tecnológicas. Se refleja su necesidad de darle un carácter práctico a lo que se aprende, por tanto hace cierto esfuerzo por mostrar ejemplos de aplicación, siendo la finalidad de la asignatura utilitaria e instrumental, en el sentido que la matemática sirve para resolver problemas de la vida cotidiana o de otras ciencias. Da la impresión de que lo que interesa son los procedimientos y saber cómo hacerlo, sin especificar cuándo o por qué, o las características del resultado; hay muy poca evidencia de reflexión de este tipo en sus clases. Le interesa poner de manifiesto la utilidad del contenido, de ahí esa derivación que tiene hacia el uso práctico de la asignatura.

En la Figura 20 presentamos un resumen de las posibles relaciones establecidas entre los subdominios de conocimiento evidenciados en la práctica de Carlos y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

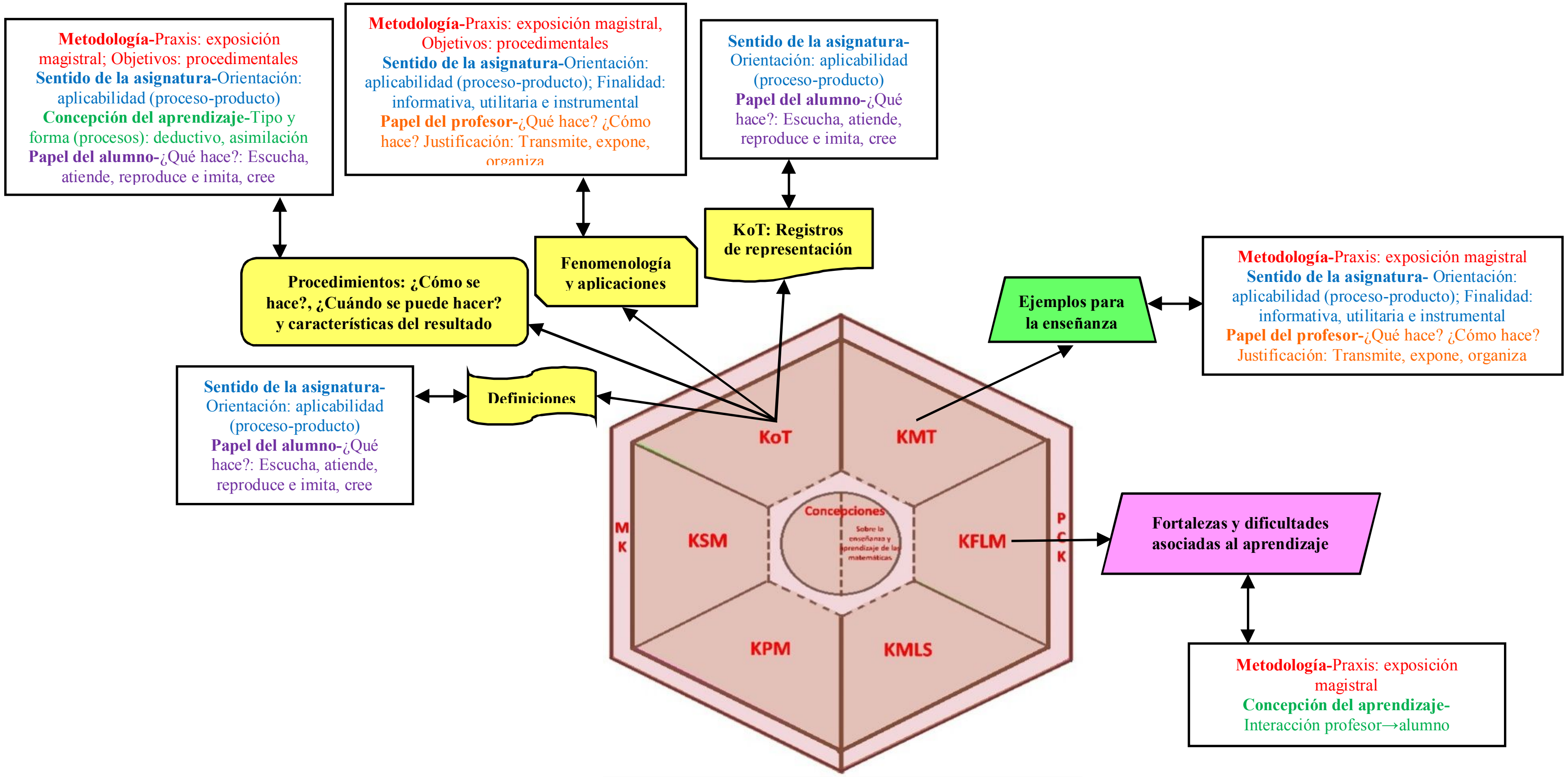


Figura 20. Relaciones entre el conocimiento especializado de Carlos y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Resumen

En este capítulo hemos presentando el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal (Jordy y Carlos) sobre el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, e identificamos sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para establecer posibles relaciones que nos permitan comprender el conocimiento de los profesores.

La caracterización del conocimiento de los profesores a partir de su práctica de aula y entrevistas semiestructuradas la realizamos a través de dos núcleos (el primero correspondiente a matrices, y el segundo a determinantes y sistemas de ecuaciones lineales), lo que nos permitió tener una visión general de los subdominios de conocimiento de cada profesor. Así en el caso de Jordy encontramos evidencias de KoT, KMT, KFLM e indicios de KPM; y en el caso de Carlos evidenciamos KoT, KMT y KFLM. Exponemos los detalles de este conocimiento a través de un análisis detallado con unidades de información para cada uno de los profesores.

Jordy muestra KoT en todas sus categorías: definiciones, fenomenología, propiedades y fundamentos, registros de representación y procedimientos; indicios de KPM relacionado a formas de proceder (que incluye el papel de la notación matemática); KMT sobre ejemplos para la enseñanza; y KFLM donde evidencia un amplio conocimiento concerniente a errores y dificultades de los estudiantes en relación al contenido matemático.

Carlos presenta fundamentalmente KoT en la categorías definiciones, fenomenología, registros de representación y procedimientos; KMT relacionado a ejemplos para la enseñanza, y algunas evidencias de KFLM sobre errores y dificultades de los estudiantes.

Las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fueron extraídas principalmente de la práctica de ambos profesores, y mostramos un análisis con unidades de información que detalla las concepciones de Jordy y Carlos, y que hemos relacionado con el conocimiento especializado. Las relaciones establecidas nos hacen pensar que el conocimiento y las concepciones evidenciadas por los profesores interactúan.

Las concepciones de Jordy se orientan hacia una metodología donde los contenidos son transmitidos mediante la simulación del proceso de construcción de aprendizaje, y al parecer el KoT, KFLM y KMT evidenciados en los análisis, así como los indicios de

KPM encontrados, hacen posible ir más allá de exponer procedimientos, ya que el profesor resalta los aspectos clave de los mismos buscando las formas más eficaces al proceder, y advirtiendo de posibles errores y dificultades a sus estudiantes mediante una variedad de ejemplos del contenido matemático en cuestión.

Las concepciones de Carlos se orientan hacia una enseñanza de los contenidos en su fase final dando un carácter práctico a lo que se aprende, lo que relacionamos con el KoT que refleja el énfasis que da al manejo de procedimientos donde interesa principalmente el cómo se hace sin especificar las condiciones necesarias o las características de los resultados, y con el KMT que evidencia al mostrar ejemplos del contenido con sentido práctico resolviendo problemas de la vida cotidiana.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1. Respecto de los objetivos planteados

5.2. Aportaciones de la investigación

5.3. Limitaciones y perspectiva de la investigación

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Nuestro interés por comprender el conocimiento del profesor de matemáticas que imparte sus clases en el nivel universitario nos llevó a realizar esta investigación. Por ello, nos propusimos caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores cuando abordan el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Además, la identificación de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, nos permitió establecer posibles relaciones con el conocimiento matemático, como una forma de aproximarnos al conocimiento especializado sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de dos profesores de Álgebra Lineal en el nivel universitario.

A continuación presentamos las conclusiones del estudio. El primer apartado corresponde a las conclusiones respecto de los objetivos que nos planteamos; en el segundo apartado consideramos las aportaciones de la investigación; y en el tercer apartado exponemos las limitaciones y perspectiva de la investigación.

5.1. Respecto de los objetivos planteados

- ❖ Caracterizar el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal enfocando el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

Para ambos profesores el KoT es un elemento importante en su práctica, siendo el subdominio del cual encontramos una mayor cantidad de evidencias. Jordy muestra un conocimiento que tiene cierta profundidad en relación a los *procedimientos*, reflejando no sólo conocimiento de cómo llevar a cabo el procedimiento en sí, sino también de cuándo se puede hacer y las características del resultado; acompañado de un conocimiento de *definiciones* y *propiedades* que fundamentan el contenido matemático. Carlos, por su parte, presenta fundamentalmente conocimiento sobre *procedimientos* en lo referente al cómo se hace, con pocas evidencias de conocimiento sobre el cuándo se puede hacer o las características de los resultados, acompañado de conocimiento sobre *definiciones*.

Lo anterior lo relacionamos con el conocimiento que muestran los profesores sobre *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* (KFLM). Jordy presenta un amplio conocimiento sobre esta categoría en lo referente a errores de los estudiantes con el contenido matemático; en la práctica de Carlos encontramos menos evidencias relativas a este conocimiento. Al parecer el KoT con cierta profundidad que presenta Jordy le permite hacer un análisis sobre las dificultades de los estudiantes respecto del contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, lo cual estaría asociado además a los indicios de su conocimiento sobre *formas de proceder* (KPM), al destacar prácticas asociadas a optimizar los procedimientos, haciéndolos más cortos, más efectivos y que lleven a disminuir la dificultad y el error.

Los dos profesores conocen la notación del contenido matemático; encontramos evidencias de su conocimiento de los *registros de representación* algebraicos (Duval, 1995; Castro & Castro, 1997; D'Amore, 2004; Ramírez et al., 2013), algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013), aritmético (D'Amore, 2004), esquemático-pictográfico (Duval, 1995; D'Amore, 2004) y verbal (Castro & Castro, 1997; Prieto & Vicente, 2006). Hallamos además ciertos indicios del conocimiento de Jordy y Carlos sobre el papel de la notación matemática (KPM).

El conocimiento de los profesores con relación a la *fenomenología y aplicaciones* (KoT) se enmarca en los usos del contenido matemático. Encontramos evidencias del conocimiento de Jordy sobre las aplicaciones del contenido fundamentalmente dentro de la propia matemática, y en escasas ocasiones en situaciones de la vida real. Carlos conoce aplicaciones del contenido dentro de la matemática, y con mayor énfasis en situaciones de la vida real y otras ciencias.

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) de ambos profesores se evidenció a través de la categoría *ejemplos para la enseñanza*. En el caso de Jordy, su KMT se caracteriza por la variabilidad de ejemplos para la enseñanza que le permite mostrar diversas características importantes del contenido. En el caso de Carlos, relacionamos su conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* (KoT) con su conocimiento sobre *ejemplos para la enseñanza* (KMT) en el sentido de que interesa abordar el contenido aplicado a un fenómeno determinado con ejemplos prácticos como una forma más accesible para ilustrar o enseñar un procedimiento.

El conocimiento de *ejemplos para la enseñanza* (KMT) en el caso de ambos profesores presenta criterios como el de transparencia por ser ejemplos generales con los que se pretende ilustrar un procedimiento; y en el caso de Jordy, dicho conocimiento se relaciona con criterios como el de variabilidad, que corresponde a la modificación de ejemplos sin que se altere su sentido general (Figueiredo et al., 2009; Figueiredo & Contreras, 2013) y que promueven la generalización, es decir, que se realcen los aspectos del procedimiento que desea ilustrar, indicando a su vez aquellos aspectos arbitrarios y modificables (Zalavsky ,2010).

- ❖ Identificar las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de dos profesores de Álgebra Lineal como un marco para comprender su conocimiento especializado.

Las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orientan hacia características tradicionales y tecnológicas.

En cuanto a las concepciones sobre la metodología, en el caso de Jordy se caracterizan por la exposición del contenido simulando su proceso de construcción mediante estrategias expositivas como el uso de ejemplos de diferentes características. Interesan los objetivos procedimentales, y en el aula se reproducen procedimientos o algoritmos con un énfasis en los errores de los estudiantes. En el caso de Carlos, interesa la exposición magistral de procedimientos o algoritmos en su fase final. Los objetivos son procedimentales, y la actividad del aula se caracteriza por una práctica repetitiva de ejercicios.

Sobre el sentido de la asignatura las concepciones de ambos profesores se orientan hacia el desarrollo de procedimientos para su reproductibilidad. La asignatura tiene una finalidad práctica, buscando en el caso de Jordy destacar aplicaciones dentro de la propia matemática, y en el caso de Carlos, destacar las aplicaciones del contenido matemático en situaciones de la vida cotidiana y otras disciplinas.

En lo referente a la concepción del aprendizaje, éste se produce por la asimilación de la información proporcionada por los profesores y está ligada a procedimientos o algoritmos, donde la interacción que predomina es aquella que va en la dirección profesor-alumno. En el caso de Jordy, en algunas ocasiones el proceso de aprendizaje se inicia con un proceso inductivo, sin embargo éste termina siendo deductivo, procura la participación del estudiante a través de preguntas puntuales sobre el contenido matemático sin conceder especial importancia a que alumno argumente sus conclusiones; considera que el aprendizaje tiene lugar con el trabajo individual, aunque permite que los estudiantes intercambien ideas con sus compañeros. Para Carlos, el proceso de aprendizaje es deductivo, el estudiante casi no interviene en sus clases, y considera que el verdadero aprendizaje se da cuando el alumno trabaja en forma individual, especialmente pasando al pizarrón a reproducir procedimientos.

El alumno no participa en el diseño didáctico; los estudiantes imitan el estilo cognitivo del profesor, siendo fundamental la atención a éste, y en el caso de Carlos se concede especial importancia a la recolección de apuntes por parte de los estudiantes.

Las clases de Jordy y Carlos las observamos durante dos años consecutivos, y en el segundo año se produjo un ligero cambio en sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que el ceder cierto protagonismo a los estudiantes permitiéndoles consultar, preparar y exponer ciertos contenidos matemáticos conllevó a que el estudiante participe de forma indirecta en el diseño didáctico, a que los profesores otorguen importancia a la argumentación del contenido al promover que el estudiante explicite el contenido matemático con sus palabras como una forma de mostrar su aprendizaje, y a que la interacción profesor-alumno sea más equilibrada.

Ambos profesores organizan el contenido de aprendizaje y lo transmiten mediante el uso de estrategias expositivas como ejemplos; que en el caso de Jordy son para destacar diversas características de los procedimientos, y en el caso de Carlos son de aplicación, como una forma de que el contenido expuesto sea atractivo para el estudiante

❖ Establecer posibles relaciones entre el conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del contenido que presentan los dos profesores se relacionan con sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El conocimiento y concepciones evidenciados por los profesores interactúan, y unas nos permiten comprender mejor el otro y a la inversa.

El conocimiento sobre procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*) de Jordy y Carlos se relaciona con sus concepciones relativas a objetivos procedimentales en sus aulas con un interés en que los estudiantes manejen los algoritmos, lo que a su vez establece una relación con el conocimiento de los profesores sobre las aplicaciones del contenido matemático (KoT-*fenomenología y aplicaciones*), ya sea dentro de la propia matemática, en el caso de Jordy; o en situaciones que podrían darse en la vida real y en otras ciencias, en el caso de Carlos.

Si bien ambos profesores persiguen objetivos procedimentales, en el caso de Jordy interesa la ejercitación reproductiva con énfasis en la advertencia sobre los posibles errores que pueden cometer los estudiantes para evitar que los reproduzcan, lo que relacionamos con su amplio conocimiento sobre errores y dificultades en el aprendizaje (KFLM-*fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*). La asignatura tiene un sentido práctico, que a su vez establece una relación con el conocimiento sobre las aplicaciones del contenido matemático (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) dentro de la propia matemática. En el caso de Carlos, hay un énfasis en la ejercitación repetitiva; al parecer la finalidad de la asignatura es utilitaria, en el sentido de que la matemática sirve para resolver problemas de otras ciencias o situaciones cotidianas, estableciendo una relación con su conocimiento sobre aplicaciones (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) en situaciones que puede darse en la vida real.

El conocimiento sobre ejemplos (KMT-*ejemplos para la enseñanza*) de Jordy se relaciona con sus praxis, ya que expone el contenido simulando su proceso de construcción a través de una variabilidad de ejemplos que le permiten destacar diferentes características del contenido matemático, donde podría intervenir además lo relativo a los indicios de su conocimiento sobre la optimización de procedimientos (KPM-*formas de proceder*), ya que interesan aquellos más eficaces y más cortos que lleven a disminuir la dificultad y el error de los estudiantes con el contenido matemático.

En el caso de Carlos, su conocimiento sobre ejemplos para ilustrar o enseñar un procedimiento se refleja en la necesidad de darle un carácter práctico, que explica el esfuerzo del profesor porque esos ejemplos muestren la aplicación del contenido matemático (KoT-*fenomenología y aplicaciones*) en contextos de la vida real. A través de los ejemplos, el profesor crea la necesidad de definir las operaciones con matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con el empleo del determinante y la matriz inversa.

Así mismo, el KoT de estos profesores relativo a procedimientos (KoT-*procedimientos: ¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado*), propiedades (KoT-*propiedades y fundamentos*) (sólo en el caso de Jordy), representaciones (KoT: *registros de representación*) y definiciones (KoT-*definiciones*) es coherente con el papel que le dan al alumno en sus clases. Los profesores exponen paso a paso los algoritmos inmersos en el contenido matemático e interesa que el alumno esté muy atento, tomando apuntes (sólo en el caso de Carlos) para reproducir posteriormente los procesos lógicos.

El conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) no se ha hecho evidente al analizar la práctica de los dos profesores de nuestro estudio. Pensamos que en parte el desarrollo de subdominios como el KSM puede estar ligado a la tendencia didáctica de los profesores. Jordy presenta un conocimiento del contenido matemático con cierta profundidad que incluye el desarrollo conceptual y procedimental del mismo, y Carlos tiene un conocimiento procedimental. Los profesores, si bien es cierto que, por ejemplo, conocen que las matrices sirven para resolver sistemas de ecuaciones lineales, no encontramos en su práctica conocimiento de ninguna relación con contenidos que podrían dar sentido a las matrices desde un punto de vista más amplio, no en sí mismas, sino también a través de las transformaciones lineales. No sabemos si el profesor conoce o no esas relaciones pero no se observan en su práctica. Por otro lado, el conocimiento sobre este subdominio puede ser más difícil de evidenciar sólo con la observación de aula, que ha sido nuestra principal fuente de recogida de información.

5.2. Aportaciones de la investigación

El estudio permitió la validación del modelo MTSK en la caracterización del conocimiento especializado en el nivel universitario, constituyendo una herramienta valiosa para el análisis del conocimiento del profesor de Álgebra Lineal. El carácter especializado del modelo en el conjunto de subdominios que lo conforman permite que nos centremos en comprender el conocimiento que hay detrás de las acciones del profesor en el aula.

El modelo presenta además categorías en cada uno de los subdominios que lo conforman, las cuales nos permitieron establecer unidades de información que podrían constituirse en episodios que reflejan el MTSK sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en subdominios como KoT, KPM, KMT y KFLM, junto a la descripción del conocimiento matemático del contenido y conocimiento didáctico del contenido detallado para cada una de las categorías evidenciadas en el conocimiento especializado del profesor. Por otra parte, el propio desarrollo de esta investigación, junto con otras, ha contribuido al desarrollo de categorías y a la mejora en la concreción del MTSK como modelo analítico del conocimiento del profesor.

Los guiones de entrevistas elaborados para la obtención de información del conocimiento especializado y concepciones de los profesores de Álgebra Lineal podrían constituirse en una herramienta para indagar sobre estos constructos en otros escenarios, considerando diferentes niveles de escolaridad, otras ramas de las matemáticas y otro contenido matemático como referente. Finalmente, el estudio del MTSK y de las concepciones de los profesores y sus posibles relaciones, consideramos que contribuye a comprender el papel de la interacción entre concepciones y conocimiento, tanto en general en el estudio del profesor como en el modelo MTSK.

5.3. Limitaciones y perspectiva de la investigación

Vistas en perspectiva y una vez finalizada la investigación, algunas de las decisiones tomadas, sobre todo en lo referente a la recogida de información, y algunos condicionantes que nos vinieron dados respecto de la misma, han podido limitar los resultados obtenidos. En esa línea reflexionamos a continuación.

Las observaciones de clases que realizamos fueron del tipo no participante, y si bien hicimos algunas entrevistas en el sentido de ampliar las evidencias de conocimiento del profesor o validar la interpretación que hacíamos como investigadores, el análisis de conocimiento especializado podría haberse enriquecido al plantear al profesor diversas actividades y problemas que tendría que llevar al aula y que permitiesen una mayor interacción con los estudiantes, como una manera de obtener información sobre otros subdominios como el KSM, KPM y KFLM. Además, en los guiones de entrevistas establecidos echamos en falta la realización de preguntas orientadas a obtener información sobre estos tres subdominios. Consideramos que la distancia del lugar donde se recogió la información para el estudio y la dificultad de comunicarse con los profesores que participaron en el mismo hicieron imposible la realización de entrevistas adicionales posteriores al análisis completo de la información. Esto nos habría permitido profundizar en algunos indicios de conocimiento y transformarlos en evidencias del conocimiento del profesor.

La identificación de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye un objetivo secundario en nuestra investigación, por tanto, en las entrevistas no dirigimos muchas peguntas encaminadas a obtener información sobre concepciones de los profesores, y éstas fueron inferidas fundamentalmente de su práctica y de algunas de las respuestas obtenidas en las entrevistas que realizamos para comprender el conocimiento del profesor. Podría haber sido más útil realizar cuestionarios y entrevistas específicos, como una forma de comprender las concepciones extraídas de la práctica de los profesores.

Respecto de los resultados de esta investigación, considerando que no hemos encontrado evidencias en relación con el KSM y escasas evidencias relativas al KPM; creemos conveniente realizar una reflexión profunda sobre estos dos subdominios de conocimiento. Surgen varias preguntas a la hora de iniciar esta reflexión.

- ¿Cómo podría ser el KSM de un profesor de Álgebra Lineal?
- ¿Cuáles son las conexiones interconceptuales que podrían darse entre los contenidos contemplados en esta asignatura?
- ¿Abordar el contenido de matrices desde el punto de vista de las transformaciones lineales requiere una profundización en el KSM y KPM, así como un amplio conocimiento de KMT y KFLM?
- ¿Puede la misma estructura de la asignatura llevar al profesor a plantearse inconscientemente objetivos, en su mayoría procedimentales que a su vez repercuten en que el profesor muestre escasas o ninguna evidencia de KPM y KSM en su práctica?
- ¿Repercuten las concepciones de los profesores con características tradicionales y tecnológicas en que no se haya podido extraer KSM de su práctica?

- Un profesor cuyas concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orientan hacia características investigativas, ¿muestra riqueza en cuanto al KSM y al KPM?

Al mismo tiempo, y abriendo otra línea de investigación que no está centrada en el profesor como en este caso, sería interesante analizar el aprendizaje de los alumnos con uno y otro profesor.

Este tipo de preguntas a su vez nos hacen plantear interrogantes respecto a ¿cómo implementar el modelo MTSK en cursos de desarrollo profesional para profesores universitarios? Los estudios realizados para comprender y profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas constituyen de alguna manera un diagnóstico realizado por el investigador del conocimiento que los profesores ponen en juego en la práctica. El reto, por un lado, está en comprender ese conocimiento especializado que le da sentido a sus acciones y, por otro, en implementar actividades (cursos, seminarios, talleres, etc) de desarrollo profesional que promuevan una reflexión profunda en el profesor sobre el conocimiento que evidencia su práctica de aula y aquel que necesita desplegar y/o desarrollar en el salón de clases.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agudelo-Valderrama, C., Clarke, B., & Bishop, A. J. (2007). Explanations of Attitudes to Change: Colombian Mathematics Teachers' Conceptions of the Crucial Determinants of Their Teaching Practices of Beginning Algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10,* 69-93.

Alves Días, M., & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra. In L. Meira (Ed.), *Proc. of the 19th Conf. Of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 34-41). Recife, Brazil: PME.

Arbeláez, R. (2005). Concepciones sobre una docencia universitaria de calidad. Estudio diferencial entre universidades y profesores. Valencia: Servei de Publicacions.

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., & Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the teaching and learning of algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (pp. 21-32). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1-32). Washington DC.: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Ball, D.L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *Learning of Mathematics, 8*(1), 40-48.

Ball, D.L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp.83-104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D.L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Methematik.* Oldenburg, Alemania.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ballester, L. (2001). *Bases metodológicas de la investigación cualitativa.*Palma: Servei de Publicacions.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido.* Madrid: Ediciones Akal.

Barkatsas, A., & Malone, J. (2005). A typology of mathematics teachers' beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices. *Mathematics Education Research Journal, 17 (2),* 69-90.

Barros, P., Mendes, C., & Fernandes, J.A. (2013). Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In J. A. Fernandes, M.H. Martinho, J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 295-308). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Becerril, J., Benítez, L., Rivera, I., & Zubieta, C. (2002). *Problemario. Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan.* Recuperado de http://galois.azc.uam.mx/mate/propaganda/GAUSSJORDAN.pdf

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics education. In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Bromme, R. (1994). Beyond subject-matter: A psychological topology of teacher's professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer,& B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Cientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bruner, J.S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Carlson, D. (2004). The teaching and learning of Tertiary Algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: the 12th ICMI Study* (pp. 293-309). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., & Flores, P. (2013). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections base on specific descriptors of knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2976-2984). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ice-Horsori.

Castro, E., Rico, L., & Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15 (3)*, 361-371.

Clark, C.M., & Peterson, P.L. (1986). Teachers' thought processes. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 255-296). New York: Mcmillan.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* (Doctoral dissertation). Michigan: Proquest Michigan University.

Climent, N. (2011). *Proyecto Docente e Investigador para optar a concurso de acceso para el Cuerpo Docente Universitario de Profesor Titular de Universidad en el Área* *de Didáctica de la Matemática*. Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía. Universidad de Huelva. 364 p.

Cohen, D.K. (2004). *Teaching and its predicaments*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cohen, L., & Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla. [Traducción de Francisco Agudo López de la obra original de Cohen, L. & Manion, L. (1989). *Research Methods in Education.* Routledge).

Colás, M.P., & Buendía, L. (1998). *Investigación Educativa*. Sevilla: Ediciones Alfar S.A.

Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior del Ecuador (CEAACES). (2011). *Modelo General para la Evaluación de Carreras con fines de Acreditación*. Ecuador. 170 p.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cooney, T., & Wilson, P. (Teachers' Thinking about Functions: Historical and Research Perspectives. In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cross, D. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12,* 325-346.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 35,* 90-106.

De Miguel, M. (1988). Paradigmas de la investigación educativa Española. En I. Dendaluce (Ed.), *Aspectos metodológicos de la investigación educativa.* Madrid: Narcea.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2003). Introduction: The Discipline and Practice of Qualitative Research. In. N. Denzin, & Y. Lincoln, *Strategies of Qualitative Inquiry.*Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Dorier, J.L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 875-884). Beijing: Higher Educations Press.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The Meta Lever. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 151-176). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss,& A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.

Eisenhart, M.A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist. In R.G. Underhill (Ed.),*Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 202-219). Blacksburg, VA.

Eisner, E.W. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona, Paidós.

Ernest, P. (1989a). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15,* 13-34.

Ernest, P. (1989b). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249-254). London: Falmer.

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). Reston, Virginia: NCTM.

Fenstermacher, G. (1994). The Knower and the Know: The Nature of Knowledge in Research on Teaching. In L. Darling-Hammond (Ed.), Review of Research in education. AERA: Washington.

Ferro, P. (2011). Significado referencial y evaluado de los conceptos de matriz y determinante en estudiantes preuniversitarios. Un estudio a partir de la práctica instruccional (Disertación doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, España). Recuperado de http://dspace.usc.es/bitstream/10347/4035/1/rep_168.pdf

Figueiredo, C., Contreras. L.C., & Blanco, L. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista ZETETIKÉ FE/UNICAMP, 17*(32), 29-60.

Figueiredo, C., & Contreras, L.C. (2013). A função quadrática: variação, transparencia e duas tipologías de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3,* 45-68.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epilson: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 70,* 27-40.

Flores, E., Escudero, D., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (2013).A theoretical review of Specialized Content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practices. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 81-88). Vancouver, Canada: PME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Forgasz, H., & Leder, G. (2008). Beliefs about mathematics and mathematics teaching. In. P. Sullivan, & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 173-192). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures.* Dordrecht: Reidel.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Disertación doctoral, Universidad de Granada, España). Recuperado de file:///C:/Users/Media%20markt/Downloads/16582056%20(2).pdf

González, M., Hernández de Rincón, A., & Hernández, A. (2007). El constructivismo en la evaluación de los aprendizajes de Álgebra Lineal. *La Revista Venezolana de Educación EDUCERE, 11(*36), 123-135.

Gow, L., & Kember, D. (1993). Conceptions of teaching and their relationship to student learning. *British Journal of Educational Psychology, 63,* 20-33.

Gueudet-Chartier, G. (2004) Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications, 379,* 491-501.

Habermas, J. (1973). Wahrheitstheorien. In H. Fahrenbach (Hrsg), *Wirklichkeit und Reflexion. Walter Schulz Zum 60.* Gebustag, Pfullingern (pp. 211-265).

Harel, G., & Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick,& C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 675-700). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 111-155). Charlotte, NC: NCTM.

Hill, H.C., Ball, D., & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in Linear Algebra. In J.L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hurman, A.L. (2007). El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal. In A. Ruiz (Productor académico), *Enseñanza del álgebra* Nº 3. Colección digital Eudoxus. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/eudoxus/Algebra%20Teaching/pdf/Hurman,%20A.%20El%20papel%20de%20las%20Aplicaciones%20en%20el%20Proceso%20de%20Ensenanza-Aprendizaje%20del%20Algebra%20Lineal.pdf

Jarauta-Borrasca, B., & Medina-Moya, J. L. (2009). La formación pedagógica inicial del profesorado universitario: repercusión en las concepciones y prácticas docentes. *Revista Internacional de Investigación en Educación, 1(2),* 357-370.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan Publishing.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3-38). New York, NY: Macmillan Publishing.

Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Algebra Lineal.* México: Pearson Educación de México, S.A de C.V.

Kuhs, T., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and disposition* (Research Memo). Lansing, MI: Michigan State University, Centre of Teacher Education.

Larson, R., Edwards, B., & Falvo, D. (2009). *Elementary Linear Algebra.* Boston, MA: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Latorre, A., Del Rincón, D., & Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación cualitativa.* Barcelona: Ediciones Experiencia, S.L.

Lay, D.C. (2001). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson Educación de México, S.A de C.V.

Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for research in Mathematics Education. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Li, X. (2007). *An Investigation of Secondary School Algebra Teacher's Mathematical Knowledge for Teaching Algebraic Equation Solving*. Austin, Texas: University of Texas.

Lincoln, Y.S., & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: Sage Publications.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Disertación doctoral, Universidad de Granada, España). Recuperado de http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf

Luzardo, D., & Peña, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

Ma, L. (1999).*Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, & M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2005). What is exemplified in Mathematics classrooms? Manuscrito no publicado. Recuperado de http://mcs.open.ac.uk/jhm3/OtherPapers/Mason%202005%20What%20is%20Eg'd.pdf

Mason, J. (2011). Phenomenology of Example Construction. *ZDM, 43*(2), 195-204).

Mason, J., & Watson, A. (2005). *Mathematical Exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these?* Invited Presentation to SIG on Variation an Attention. EARLI, Nicosia.

Massot, I., Dorio, I., & Sabariego, M. (2004). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla, S. A.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M.D., & Senk, S.L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, C. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. In B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Montes, M., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado J.L., & Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones.

En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias, 21(2)*, 265-280.

Moriel-Junior, J., & Carrillo, J. (2014). Explorando indicios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativocentrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* (Disertación doctoral, Universidad de Huelva, España). Recuperado de file:///C:/Users/dianav350/Downloads/b15613677-1.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Autor.

O'Connor, J.J., & Robertson, E.F. (1996). *Matrices y determinantes.* Recuperado de http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico* (Disertación doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España). Recuperado de http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t25694.pdf

Ozdag, H., & Aygor, N. (2012). Undergraduate students' performances in linear algebra: factorization of a determinant of n*n dimensional matrices. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 46,* 125-129.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62,* 307-332.

Ponte, J. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (Ed.), *Proceeding of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education* (pp. 169-177). Pavia: University of Pavia.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and Development. In L. English (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdan: Sense Publishers.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal, una introducción moderna*. México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de V.

Porlán, R. (1995). Las creencias pedagógicas y científicas de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, 22,* 7-13.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., & Lozano, M.D. (2010). Use of models in teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 432,* 2125-2140.

Prieto, L. (2007). *Autoeficacia del profesor universitario. Eficacia percibida y práctica docente*. Madrid. Narcea: Narcea, S.A. Ediciones.

Prieto, F.R., & Vicente, S.L. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la Facultad de Ingeniería. En M.A. Ascheri, & R.A. Pizarro (Eds.), *Primera Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 203-212). La Pampa: REPEM.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

Ramírez, O., Romero, C.F., & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC.

Raymond, A. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 28 (5),* 550-576.

Regolini, M. (2011). Estudio de errores en el aprendizaje del Álgebra Lineal en estudiantes universitarios (Tesis de Master, Universidad Internacional de Andalucía, Huelva, España).

Retamosa, A. M. (2011). Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (Tesis de Master, Universidad de Granada, España). Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Ana_Retamosa.pdf

Ribeiro, C.M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice-Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma, 58,* 7-23.

Rissland-Michener, E. (1978). Understanding Mathematics. *Cognitive Science, 2,* 361-383.

Ritchie, J., & Lewis, J. (2005). *Qualitative Research Practice: a guide of Social Science Students and Researchers.* Thousand Oaks: Sage Publications. Vol. I.

Rodríguez, C., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Disertación doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Rosales, A. (2008). Evolución Histórica del Concepto de Matriz. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 9(1)*, 1-20.

Rowland, T., Huckstep, P., &Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003). Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

Rubio, J. (1984). *Positivismo, hermenéutica y teoría crítica en las ciencias sociales.* Barcelona: Humanitas.

Sabariego, M., Massot, I., & Dorio, I. (2004). Métodos de Investigación Cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla, S. A.

Sandín, M.P. (2003). *Investigación cualitativa en Educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think.* New York: Routlege.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. In I. Westbury, & N. Wilkof (Eds.). *Science, curriculum, and liberaleducation* (pp. 167-183). Chicago: University of Chicago.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME, 7*(1), 49-78.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (1), 7-40.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *The teaching of Linear Algebra in question* (pp. 209-246). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Skemp, R. (1978). *The psychology of learning mathematics.* Penguin books. Middlesex: England.

Skemp, R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics Teaching, 88*, 44-99.

Skemp, R. (1980). *Understanding in mathematics.* London: Palmer Press.

Skemp, R. (1982). Symbolic understanding. *Mathematics Teaching, 99*, 59-61.

Skott, J., Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM Mathematics Education, 45,* 501-505.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento Matemático para la Enseñanza en Bachillerato. Un estudio de dos casos* (disertación doctoral, Universidad de Huelva, España). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/4509/b16167016-1.pdf?sequence=2

Sosa, L., Aguayo, L.M., & Huitrado, J.L. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, D.F.: Díaz de Santos.

Souto, B., (2013). *La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: el caso de los Espacios Vectoriales Cociente* (Disertación doctoral no publicada). Universidad Complutense de Madrid, España.

Stake, R.E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Stake, R.E. (2003). Case Studies. In. N. Denzin, & Y. Lincoln, *Strategies of Qualitative Inquiry.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stewart, S., & Thomas, M. (2003). Difficulties in the acquisition of Linear Algebra concepts. *New Zealand Journal of Mathematics, 32,* 207-215.

Strang, G. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México, D.F.: International Thomson Editores, S.A. de V.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). NewYork: Macmillan.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the CERME 5* (pp. 2359-2368). Larnaca, Cyprus: ERME.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Yin, R. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. London: Sage Publications.

Zazkis, R., & Chernoff, E.J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195-208.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 131-148.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challengs for teaching. In M.K. Stein, & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines*. New York, USA: Springer.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the CERME 5* (pp. 2024-2033). Larnaca, Cyprus: ERME.

ÍNDICE DE ANEXOS DIGITALES

ANEXO 1. Entrevista 1 realizada a Jordy

ANEXO 2. Transcripción de sesiones de clases de Jordy (Año 1 de observaciones)

ANEXO 3. Entrevista 2 realizada a Jordy

ANEXO 4. Transcripción de sesiones de clases de Jordy (Año 2 de observaciones)

ANEXO 5. Entrevista 3 realizada a Jordy

ANEXO 6. Entrevista 4 realizada a Jordy

ANEXO 7. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Jordy (Año 1 de observaciones)

ANEXO 8. Esquemas del conocimiento de Jordy (Año 1 de observaciones)

ANEXO 9. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Jordy (Año 2 de observaciones)

ANEXO 10. Esquemas del conocimiento de Jordy (Año 2 de observaciones)

ANEXO 11. Análisis preliminar de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

ANEXO 12. Entrevista 1 realizada a Carlos

ANEXO 13. Transcripción de sesiones de clases de Carlos (Año 1 de observaciones)

ANEXO 14. Entrevista 2 realizada a Carlos

ANEXO 15. Transcripción de sesiones de clases de Carlos (Año 2 de observaciones)

ANEXO 16. Entrevista 3 realizada a Carlos

ANEXO 17. Entrevista 4 realizada a Carlos

ANEXO 18. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Carlos (Año 1 de observaciones)

ANEXO 19. Esquemas del conocimiento de Carlos (Año 1 de observaciones)

ANEXO 20. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Carlos (Año 2 de observaciones)

ANEXO 21. Esquemas del conocimiento de Carlos (Año 2 de observaciones)

ANEXO 22. Análisis preliminar de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

ANEXO 1. Entrevista 1 realizada a Jordy

1. **¿Hace cuántos años imparte asignaturas relacionadas con Matemáticas?**

En el nivel secundario llevo ya 19 años y en el nivel superior unos seis años dando clases en las carreras de Ingeniería en Sistemas y Diseño Gráfico.

2. **¿Hace cuántos años imparte Álgebra Lineal en el nivel universitario?**

Hace dos años imparto Álgebra Lineal en el nivel universitario.

3. **¿Cuánto tiempo tiene trabajando como docente en la universidad?**

Seis años.

4. **¿Cuál es su titulación de pregrado?**

Licenciado en Matemáticas.

5. **¿Ha recibido cursos para impartir la asignatura Álgebra Lineal? ¿Cuántos y qué duración han tenido?**

No he recibido ningún curso.

6. **¿Ha participado en cursos relacionados con Didáctica y Pedagogía?**

De Didáctica y Pedagogía sí. Incluso luego de participar en seminarios de preparación en Didáctica y Pedagogía he impartido lo aprendido a otros docentes.

7. **¿Qué expectativas tiene usted en lo referente al desempeño de sus estudiantes?**

Primero que entiendan lo que es una matriz, luego que sepan utilizarla para resolver un problema. Que puedan hacer las operaciones indicadas, plantear problemas de matrices y que sepan resolverlos. Porque las matrices sirven para la resolución de ecuaciones y tienen también otro tipo de aplicaciones en lo que es propiamente la carrera de Ingeniería en Sistemas.

8. **¿Especifica objetivos de aprendizaje de los temas incluidos en el programa de estudios que espera que alcancen sus estudiantes? A su respuesta, si es afirmativa: ¿Cómo?, ¿Cuándo?, ¿Los hace explícitos para usted? ¿Para los**

estudiantes? ¿Fija objetivos por temas más concretos que los que fije el programa de la materia?

En el Programa de Estudios que nos entregan están planteados los objetivos y la idea es seguir trabajando para alcanzarlos, es decir, todo lo que se haga en clases va apuntando al logro de esos objetivos.

Al principio del semestre yo suelo hacer lo que se llama el encuadre, es decir, dar a conocer al estudiante los temas que están incluidos en el programa de estudios, cuántas semanas se dedicarán a cada tema, los objetivos, la forma de evaluación, las evidencias que necesito recopilar.

Cada que se hace una actividad en la clase siempre hay una intencionalidad específica. Tanto que por escrito y por tema no tengo objetivos más concretos; pero cuando se lleva a cabo una actividad se tiene un objetivo específico.

9. **¿Cómo decide qué temas incluir en el curso de Álgebra Lineal y cuánto tiempo dedicar a cada tema?**

A nosotros ya nos dan el programa de estudios establecido, nos amoldamos a él y luego el tiempo que se trabaja en cada tema trato de dividirlo de acuerdo a las semanas que dura el semestre (16) para poder abarcar todo en la medida de lo posible.

El programa de Álgebra Lineal ya está establecido, pero el docente tiene libertad para incluir u omitir algún tema.

10. **¿Qué conocimiento previo deben poseer los estudiantes para abordar con éxito el tema de matrices?**

Los estudiantes deben saber lo que son ecuaciones, operaciones con números reales.

11. **¿Cuál es la importancia del tema (de matrices) en el currículo?**

Las matrices ayudan a que el estudiante adquiera destreza en el cálculo de operaciones.

12. **¿Qué espera que aprendan sus estudiantes con relación al contenido (matrices)?**

Que aprendan a realizar operaciones con matrices, álgebra matricial, que aprendan a resolver ecuaciones con matrices. También a resolver problemas, ya que hay algunos que se plantean con matrices.

13. **Escogiendo por ejemplo el tópico "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices" elaborar un mapa conceptual de los contenidos del mismo destacando aquellos que para usted son claves en el aprendizaje.**
14. **¿Cómo aborda usted la enseñanza de esos contenidos clave?**
15. **¿Cómo cree usted que dichos contenidos clave se relacionan con otros contenidos y cómo se trabajan esas relaciones en sus clases?**
16. **Cuando introduce usted un tema nuevo como por ejemplo "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices", ¿Considera indispensable hacer una relación con conceptos matemáticos vistos anteriormente? ¿Por qué?**

Sí, ya que es necesario o más bien dicho imprescindible. Primero uno determina o hace un breve diagnóstico de lo que ellos saben o no, en lo que recuerdan o no recuerdan. Los estudiantes tienen un pre-requisito para ver Álgebra Lineal que es Teoría de Ecuaciones; entonces los estudiantes ya han visto algunos temas que son necesarios para iniciar una nueva temática. Por lo tanto, es aconsejable abordar el nuevo tema desde los conocimientos previos que tengan los estudiantes.

17. **¿Cómo evalúa a los alumnos en el tema?**

Nos dan tres parámetros en la universidad, yo le doy mucho énfasis a los talleres personales y posteriormente grupales, también lecciones escritas. Todos los trabajos que ellos presentan suman a su calificación.

Para los talleres, después que se ha trabajado en clases la parte teórica y hemos realizado ejemplos, yo les proporciono una hoja con ejercicios para resolver en clases y algunos les envío de tarea para que lo realicen en sus casas como trabajo extra (independiente).

Posteriormente, para evidenciar si realizaron el trabajo o si se lo copiaron a otro compañero, suelo tomarles algún ejercicio en clases, solo como evidencia y verificar si es cierto que lo realizaron de forma individual. Al final de cada unidad o cada mes se suele tomar una lección de todo lo que se ha estudiado hasta ese momento.

18. **¿Cuáles son las tareas de esta unidad?**

La primera tarea es sobre las clases de matrices, que las puedan reconocer, ejercicios de aplicación de clases de matrices, donde ellos van resolviendo ecuaciones sencillas y manejo de números.

Otra tarea son las operaciones con matrices, luego la resolución de ecuaciones, matriz inversa y ecuaciones matriciales.

19. **¿Qué partes del contenido a priori va a evaluar y por qué elige dichos contenidos?**

Sobre todo las operaciones, lo que es resolución de ecuaciones, buscar la matriz inversa, principalmente eso. Luego giran en torno a ello, algunos otros contenidos, me centro en el método de Gauss Jordan, ya que allí manejan números, operaciones y les permite dar una resolución.

20. **¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del tema? Elegir una dificultad y ante esa dificultad ¿qué cosas concretas le funcionan para paliar la misma? ¿Analiza usted los errores cometidos por los estudiantes en el desarrollo del tema de matrices? ¿Cómo? ¿Qué acciones ha tomado para tratar de disminuir la incidencia de estos errores?**

A veces han aprobado el semestre anterior con alguna deficiencia en la asignatura que ven previo a Álgebra Lineal y eso hace que cuando abordamos un contenido nuevo les cueste un poco más comprenderlo.

Cuando un estudiante aprobó con sobre merecimientos el semestre anterior no tiene problemas porque maneja bien los conocimientos previos. Pero cuando el estudiante ha tenido dificultades, aprobó en la última oportunidad, aprobó con lo mínimo entonces eso hace que se vaya acumulando la deficiencia en el semestre siguiente. A la larga o se iguala o termina perdiendo el semestre y truncando su carrera.

Dificultad específica: el manejo de los números, más que nada los números irracionales que siempre se les hace complicado.

Para paliar las dificultades ayuda las tutorías que se les imparte. Aunque como inconveniente, como es una carrera que se da en la noche, suele haber estudiantes que no se dedican exclusivamente al estudio y tienen otras actividades, entonces suelen faltar a las tutorías, pero eso ya no depende de la universidad ni del profesor, sino que constituye una dificultad del estudiante. Es decir, oportunidad para superar las falencias sí tienen.

Los errores cometidos por los estudiantes en el tema de matrices se suelen determinar con las evaluaciones, talleres y en las mismas clases cuando ellos desarrollan los ejercicios, ahí voy mirando en qué se equivocan y luego se refuerza eso para que no sigan cometiendo los mismos errores.

Para disminuir la incidencia de los errores: comenzar con la revisión de los conocimientos previos, luego realizar talleres personales y grupales. La idea siempre es hacer la explicación general, luego trabajar grupalmente y después de manera individual. Y sí la deficiencia continúa pues están las tutorías.

21. **¿Qué hace para que todos participen en el desarrollo (explicaciones y resolución de problemas) de un tópico determinado del tema de matrices?**

Como técnica generalmente se plantean ejercicios y se piden opiniones a todos, para ver cómo se puede resolver tal o cual problema. Cuando se hacen talleres, en un momento determinado, suelo ir resolviendo cada problema en la pizarra (para todos), más que nada con aquellos ejercicios que tienen alguna complicación para aclarar las dudas, entonces ahí van participando los estudiantes, existe la oportunidad en ese momento de que todos puedan aportar.

22. **¿Qué libro de texto utiliza en particular para enseñar este contenido (matrices)? ¿Por qué?**

Hay una página en internet que plantea ejercicios sobre matrices que se llama VITUTOR. Yo les pido a los estudiantes que consulten la página porque tiene ejercicios resueltos. Me toca revisar más porque en el internet hay mucha más información al respecto (sobre matrices).

23. **¿Cómo motivaría a los estudiantes para que aprendan el contenido de matrices? Explique con un ejemplo concreto**

Se puede plantear un problema, por ejemplo, de ordenamiento de cajas con precios. Dependiendo de lo que se busque, es decir, si se quiere hacer una suma de matrices, pues plantear un problema en que haya que organizar varias matrices con diferentes precios. Y si se quiere plantear un problema en el que se utilice la multiplicación se puede buscar la mejor opción de compra entre varios artículos y varios precios. O sea, problemas en ese sentido que hay bastantes en los libros de Álgebra Lineal.

24. **¿Qué recursos utiliza generalmente en las clases para el desarrollo del tema de matrices? ¿Emplea algún software específico?**

No estoy empleando software, en eso me tienen que llamar la atención porque no estoy empleando ningún software por ahora. Tengo un programa en la computadora pero debo estudiarlo primero porque no podría presentarme ante los estudiantes sin prepararme.

25. **¿Qué utilidad/aplicación tiene para usted el tema de matrices? ¿Lo hace explícito a los estudiantes? ¿Cómo?**

El tema de matrices tiene la utilidad primero para la resolución de ecuaciones, que sería una de las aplicaciones. Luego tiene la utilidad de organizar datos y gracias a esa organización se pueden resolver problemas.

En las carreras de Ingeniería hay otro tipo de aplicaciones, más que nada Ingeniería Mecánica e ingeniería en Sistemas para las cuestiones de programación.

Sí hago explícito a los estudiantes las aplicaciones de matrices. Yo se los cuento, o sea, les hablo del tema, les llevo lecturas, lo que me falta es manejar algún software y mostrarles algún video donde se vea la aplicación práctica de las matrices.

Hay algo que leí en un libro, donde se refería a las matrices aplicadas a la construcción de aviones, sobre todo en las curvaturas del avión. Entonces cómo por medio de matrices podían buscar la menor curvatura y por cada espacio se utilizaban matrices de dimensiones muy pequeñas. Es decir, yo leí aquello, pero me gustaría tener algún video para mostrarles a los estudiantes, que eso me parece interesante porque una de las cosas que les recalco mucho es que ellos están siguiendo Ingeniería en Sistemas, donde desarrollan la destreza de crear programas para cualquier actividad, entonces si conocen la aplicación de lo que se les enseña, ellos llegarán a crear programas de computación para diseñar la maquinaria que se requiera, manejar robots, etc. Son programas que ellos pueden ir implementando no solamente para manejo empresarial sino también para diseños ingenieriles más sofisticados.

ANEXO 2. Transcripción de sesiones de clases de Jordy (Año 1 de observaciones)

Sesión 1 (30-11-2011): Definición de matriz, clasificación de matrices, suma de matrices y producto por un escalar

Línea		Transcripción
1	P:	*En este día se va a revisar qué es una matriz, cómo se ubican los*
2		*elementos de una matriz y las clases de matrices. ¿Qué es una matriz?*
3		*Una matriz es un arreglo rectangular de elementos y que se ubican en*
4		*filas y en columnas.*

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \text{filas} \\ \text{Columnas} & \end{array}$$

Línea		Transcripción
5		*Los elementos están ubicados entre paréntesis. En este sentido van las*
6		*filas y en este las columnas, se las denota con letras mayúsculas, pueden*
7		*ser este tipo de paréntesis ( ) o pueden ser también corchetes [ ]*
8		*En cada elemento hay dos subíndices, el primero se refiere a las filas,*
9		*cada elemento se representa a_{ij}, el primer subíndice es el número de*
10		*filas y el segundo subíndice es el número de columnas. El elemento*
11		*a_{31} ¿dónde está ubicado?*
12	E:	*Fila 3 columna 1*
13	P:	*¿El elemento a_{25}?*
14	E:	*Fila 2 columna 5*
15	P	*Ya luego haremos un ejercicio práctico para ir reconociendo las*
16		*ubicaciones de cada uno de los elementos. Eso es importante para saber*
17		*organizarse, saber cómo están ubicados los elementos de una matriz.*
18		*¿Qué clases de matrices hay? ¿Qué clases de matrices han*
19		*consultado que existen?*
20	E:	*Matriz cuadrada*
21	P:	*¿Qué es una matriz cuadrada?*
22	E:	*Tiene el mismo número de filas que de columnas*
23	P:	*Tiene el mismo número de filas que de columnas, ¿qué otra matriz hay?*
24	E:	*Triangular superior, rectangular*
25	P	*Matriz rectangular dice usted, ¿cuándo una matriz será rectangular y*
26		*no cuadrada?*
27	E:	*Cuando el número de filas es diferente al número de columnas*
28	P:	*Cuando el número de filas es diferente al número de columnas. Por*
29		*ejemplo así, si tiene dos filas y en ese caso* (del ejemplo) *tres columnas,*
30		*pues ahí tenemos una matriz rectangular. Si el número de filas es el*
31		*mismo que el de las columnas la matriz es cuadrada, nosotros vamos a*
32		*trabajar con los dos tipos de matrices.*
33		*¿Qué otra cosa tienen en las clases de matrices?*
34	E:	*Matriz nula*
35	P:	*Matriz nula ¿cuál es?*
36	E:	*Todos sus elementos son 0*
37	P	*Todos sus elementos son 0. ¿Qué más?*
38	E:	*Triangular superior*

P: *¿Cuándo una matriz es triangular superior?*

E: *Cuando sus elementos de la parte diagonal hacia arriba son distintos de cero*

P: *Eso, se habla de diagonales de una matriz cuando la matriz es cuadrada Por ejemplo, si tenemos la matriz B cuyos elementos son, vamos a escribir una matriz 3x3*

$$B= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la diagonal?

E: *1, 1 y 1*

P *esa es la diagonal principal formada por los elementos 1, 1, 1 ¿Sería matriz triangular superior si qué cosa? si los elementos que están sobre la diagonal son*

E: *Diferentes de cero*

P: *diferentes de cero, o sea, los de acá tendrían que ser ceros*

$$B= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que sea una matriz triangular superior, hay triangular superior triangular inferior y también hay cuando se toma en cuenta la diagonal secundaria. ¿Qué otras matrices hay?

E: *Matriz identidad*

P: *La matriz identidad, ¿cuál es la matriz identidad?*

E: *Tiene unos y ceros*

P: *Tiene unos y ceros pero ¿cuáles son los unos?, los de la diagonal principal son todos unos y los demás elementos son ceros.*

$$B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si en esa misma matriz, en vez de ser unos los números que están ahí son por ejemplo 2, 3 y -5, ¿cómo se llama esa matriz?

E: *Matriz escalar*

P: *Si en vez tener 1, 1, 1 tiene números diferentes de 1, que no sea 0 tampoco, si es 0 es matriz nula, sería una matriz escalar ¿Otra clase de matrices que hayan consultado?*

E: *Matriz traspuesta*

P: *¿Cuándo una matriz es traspuesta a otra?*

E: *Las filas se convierten en columnas*

P: *¿Qué es lo que se hace para trasponer una matriz? Las filas se convierten en columnas y con eso es suficiente. Por ejemplo, aquí esta matriz*

$$B= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

¿Cómo sería la traspuesta? Esta fila la transformamos en columna, segunda fila segunda columna, tercera fila, ahí está la traspuesta de la matriz B

$$\begin{bmatrix} B^t= & 4 & 5 & 3 \\ & -1 & 0 & 7 \\ & & & \end{bmatrix}$$

2 -2 8

¿Qué otra clase de matriz hay?

E: *Matriz simétrica, que es igual a su traspuesta*

P: *Es igual a su traspuesta, pero ¿qué características tiene?*
Son los mismos los elementos que están a diferentes lados de la
diagonal superior, ojo con esto, vamos a hacer que esta matriz
sea simétrica

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Si aquí tiene -1 (primera fila segunda columna) *¿aquí qué elemento*
debería estar? (segunda fila primera columna), *-1*
O sea, todos los números que están ubicados simétricamente al
otro lado de la diagonal principal deben tener el mismo valor

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

¿Aquí qué numero debería haber? (tercera fila primera columna)

E: *El 2*

P *Y aquí qué número debería haber?* (tercera fila segunda columna)

E: *-2*

P: *¿Y una matriz antisimétrica?*
Esos elementos que están ubicados en el mismo sitio pero a diferentes
lados de la diagonal tienen diferente signo

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Que a partir de la diagonal principal, los elementos tienen valor inverso
¿Cuándo dos matrices son iguales?

E: *Cuando sus elementos son los mismos*

P: *Cuando los elementos son exactamente mismos. Hasta ahí*
lo que tiene que ver con cuestiones de concepto y para aplicarlos vamos
a trabajar en esta hojita, tienen ahí unos ejercicios planteados
Aplicando los conceptos que han revisado, tienen ahí en el 1 una matriz
y varios ejercicios para que repasen los subíndices y hay algunas
operaciones que ya vieron en el semestre anterior, operaciones con
números reales. En la número dos hay matrices que son iguales,
entonces a partir del concepto de igualdad de matrices, en donde cada
uno de los elementos de las matrices son iguales, usted resuelva,
empiece por el número 1.
Hay que hacer la operación, o sea, lo que está ahí en la hoja, ustedes
resuelven lo que les plantea el ejercicio y encuentre un número racional,
irracional. Si les queda una fracción irracional deberán racionalizar
porque ya saben hacerlo.
Todas las operaciones deben hacerlas en la parte de atrás de la
hoja, que quede la evidencia de que las han hecho.
Haga usted el procedimiento del ejercicio.
Eso debe saber, lo han trabajado en el semestre anterior,
operaciones con radicales, ¿Cómo se multiplican radicales?

E: *Conserva la raíz y se multiplica lo de adentro*

P: *Conservan la raíz y se multiplican las cantidades subradicales y si se*
puede hay que simplificar
Todo es fácil pero hay que practicar, vea que de un semestre a otro ya se
olvidan de una cosa elemental.
Está clara la ubicación de los términos de una matriz, primer número,
filas, segundo número, columnas, eso es importante que tenga presente.
En la otra parte hay que establecer las igualdades, hay que escribir las
igualdades de cada elemento correspondiente en las matrices que se les
da

$$\begin{bmatrix} 2a - 5 & b/2 \\ 3c + 1/2 & (d-5)(d+7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3 & b - 1 \\ c + 3 & d - 5 \end{bmatrix}$$

La primera matriz es igual que la segunda y para que eso sea cierto,
¿qué debe ocurrir?
Los elementos de las dos matrices que deben ser iguales.
Establezcan las igualdades y encuentren el valor de las incógnitas, en
cada una quedaría una ecuación con una incógnita
¿Cuál es la matriz? Si a vale 8, b vale 1, ¿cuánto vale c?

E: *17/4*

P: *¿Y d?*

E: *-11 y 0*

P: *O sea habrían dos matrices ahí, una con -11 y otra con 0*

$$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 17/4 & -11 \text{ y } 0 \end{bmatrix}$$

Así como se ha utilizado en el concepto de igualdad, se puede
colocar luego cualquier otro tipo de concepto con diferentes valores,
con variables en una matriz. Si en caso se coloca por ejemplo, una
matriz que sea identidad, ya sabe usted que los valores de la diagonal
principal son unos y los demás elementos son ceros, entonces usted
iguala a uno o cero dependiendo del elemento. Si la matriz fuese nula
todo sería igual a cero, entonces van sacando los valores de cada una de
las incógnitas.
Lo que vamos a ver ahora es la suma de matrices y producto por un
escalar. Como una matriz es un arreglo, para sumar las matrices
necesitamos obligatoriamente que todas tengan la misma dimensión, no
se puede sumar una matriz que tenga dimensión diferente a otra
Vamos a suponer que tenemos la matriz A y tenemos las matriz B y
tenemos la matriz C

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B= \begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & -10 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de esas matrices pueden sumarse?

E: *A+B*

P: *O podemos hacer también B+A*
¿Por qué no se puede sumar A + C?

E: *Son diferentes*

P: *No tienen las mismas dimensiones, aquí ¿qué es lo que ocurre con respecto a B o a la matriz A?*

E: *La C tiene una columna de más*

P: *Tiene una columna de más, entonces no podemos sumar A con C, no está definida esa suma, ni podemos sumar B con C porque no está definida esa suma, porque son de diferentes dimensiones las matrices, lo que sí podemos hacer es A + B, ¿qué hay que hacer para sumar? Usted toma los elementos que están en la misma ubicación y los suma, por ejemplo 2+(-1)*

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Y en la segunda fila lo mismo

¿Qué pasaría si hacemos B + A?

E: *Sale lo mismo*

P: *¿Qué propiedad es esa? Si yo digo que A+B es igual que B+A*

E: *Conmutativa*

P: *Propiedad conmutativa, vaya teniendo en cuenta una de las propiedades de la suma, no importa el orden en que se ubiquen las matrices para la suma el resultado es el mismo, eso es sencillo. voy a plantear un problema, ¿qué debo sumarle a "A" para que me de la matriz nula?*

E: *Hay que sumarle el opuesto de todos los valores*

P: *O sea aquí habría que poner -2, 1, -5- -4, 6 y -3, ¿Cómo podríamos definir esa matriz en donde cada elemento es el inverso sumativo?*

E: *Multiplicada por -1*

P: *Multiplicada por -1, o sería sería la matriz –A, ¿está claro? Si yo sumo una matriz con su inverso sumativo obtenemos la matriz nula, esa es otra propiedad, ese es elemento inverso, toda matriz tiene su inverso sumativo. Y si hago al revés ¿Qué matriz debo sumarle a la A? para obtener la matriz A*

E: *Sumarle 0*

P: *Sumarle 0, o sea A+0 es A, o sea que cualquier matriz tiene también el elemento neutro, existe el inverso sumativo y existe el elemento neutro, de tal manera que al sumar una matriz con ese elemento neutro vamos a obtener la misma matriz. Ahora le vamos a borrar una columna a C para que se pueda sumar A+B+C, ¿cuánto era A+B?*

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

¿A qué sería igual A+B+C? A esta misma matriz le sumamos C y ¿cuánto nos da?

$$A+B+C = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 17 \\ 14 & -17 & 12 \end{bmatrix}$$

Fíjense esto es A+B+C, pero en realidad ¿qué es lo que hemos hecho? A la matriz A+B le hemos sumado C, o sea hemos hecho primero esto (A+B) y luego le hemos sumado C, ¿podemos hacer de otra forma esa misma suma?

E: *A+(B+C)*

P: *Por ejemplo A+(B+C), ¿cómo se llama esa propiedad?*

E: *Asociativa*

P: *Asociativa, entonces también se puede aplicar la propiedad asociativa*
en la suma de matrices donde (A+B)+C es igual que A+(B+C)
Entonces ahí tenemos cuatro propiedades de la suma de matrices
¿Qué ocurre si ahora yo quisiera tener la matriz 2A?

$$2A= 2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Este escalar se multiplica por dos todos sus elementos. Entonces sería
Aquí

$$2A= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Y si yo quisiera obtener la matriz -7B? Lo mismo, colocamos el
escalar -7 con su signo, colocamos la matriz B

$$-7B= -7\begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Y sería igual a cuánto?
Multiplicamos los signos

$$-7B= \begin{bmatrix} 7 & -49 & -42 \\ -14 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué pasó con todos los elementos de dentro?

E: *Han cambiado su signo*

P: *Han cambiado su signo y han sido multiplicados por siete, ¿qué pasó*
aquí afuera?
Teníamos -7 pero aquí fuera de la matriz quedó positivo, ojo con eso
Cuando tú multiplicas una matriz por un escalar negativo y multiplicas
cada uno de sus elementos con el signo negativo, ya aquí fuera queda
tranquilamente el signo positivo, ¿por qué yo hago esta referencia?
Por lo siguiente, vamos a hacer ahora junto la operación, por ejemplo,
vamos a colocar un ejercicio donde hacemos todo junto y vamos a
tener una sola matriz, aplicamos las dos cosas, producto por escalar y
suma de matrices, por ejemplo, yo quiero que usted calcule 5A-4B-3C
Colocamos el 5 y la matriz A menos 4 y la matriz B, luego -3 y la
matriz C

$$5A-4B-3C= 5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} -4\begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} -3\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 8 & -10 & 9 \end{bmatrix}$$

Primero hacemos el producto por escalar. Entonces luego entra el
escalar a multiplicar con su signo y queda afuera el signo +

$$5A-4B-3C= \begin{bmatrix} 10 & -5 & 25 \\ 20 & -30 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -28 & -24 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 3 & -18 \\ -24 & 30 & -27 \end{bmatrix}$$

Ese detalle suele ser motivo de errores muchas veces, cuando le
colocan así un polinomio, usted multiplica el escalar con su signo y
aquí queda ya sumado.
Finalmente

$$5A-4B-3C= \begin{bmatrix} 3 & -30 & -17 \\ -12 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Una vez que ya se ha hecho ese trabajo, este es el taller Nº 2,
corrijan el literal d), en lugar de 4A deberán escribir 4D.
La sugerencia es que haga las operaciones aparte, debe trabajar hoy
el numeral 1, el numeral 2 y el numeral 3.
Vaya verificando con el compañero de al lado si tiene alguna duda

232 *y si entre los dos no se ponen de acuerdo me avisan*
233 *Una de las cosas es que hay que ser ordenado, no escriba número por*
234 *aquí y por allá, si usted es ordenado usted mismo no se confunde.*
235 *El ejercicio 2 y el 3 les queda como tarea, 4 y 5 vamos a trabajar*
236 *el viernes.*

Sesión 2 (03-12-2011): Producto de matrices y álgebra de matrices

Línea		**Transcripción**
1	P:	*Lo que vamos a hacer ahora es el tema de producto de matrices*
2		*Para hacer la suma de matrices necesitamos una condición ¿cuál era?*
3	E:	*Que tengan la misma dimensión*
4	P:	*Que tengan la misma dimensión. Para hacer el producto de matrices*
5		*también se necesita una condición. Si tenemos la matriz*
		$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
6		*¿Cuáles son las dimensiones de esa matriz?*
7	E:	*Dos filas tres columnas*
8	P:	*La dimensión de esta matriz es 2x3. Para poder multiplicar dos matrices*
9		*se necesita que el número de columnas de la primera matriz sea igual al*
10		*número de filas de la segunda matriz. Si A es así, B debe tener*
11		*obligatoriamente tres filas, no importa el número de columnas*
12		*Supongamos que la matriz B es una matriz columna*
		$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$
13		*Con esa se puede multiplicar, la condición es que tenga tres filas*
14		*Esta matriz tiene dimensiones*
15	E:	*Tres por uno*
16	P:	*Tres por uno. Si no cumple con esa condición, usted dice que la*
17		*multiplicación no es posible*
18		*La matriz B puede ser también por ejemplo así*
		$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$
19		*¿Qué dimensiones tiene?*
20	E:	*Tres por dos*
21	P:	*Sí, así que si van a multiplicar AxB, sí se puede porque el número*
22		*de columnas de la matriz A coincide con el número de filas de la*
23		*matriz B*
24		*Y puede ser otra matriz con cualquier número de columnas, por*
25		*Ejemplo*
		$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$
26		*¿Qué dimensiones tiene esta matriz?*
27	E:	*3x4*

P: *Como coincide el número de columnas de la matriz A con el número de filas de esta matriz B sí se puede realizar el producto. Ahora, la respuesta del producto de dos matrices tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. La respuesta de AxB en este caso tendrá dimensiones 2x1, en este caso tendrá dimensiones 2x2, y en este caso tendrá dimensiones 2x4 En base a esa condición ustedes resuelvan los ejercicios de la hojita. El ejercicio número 4.*

E: *Explique*

P: *¿Qué dice ahí? ¿Cuál es la orden?*

E: *Supongamos que RxS corresponde a una matriz de dimensiones RxS. Determine la forma de los productos siguientes si están definidos*

P: *A usted le plantean ahí por ejemplo (3x5)(4x3) ¿está definido ese producto?*

E: *No*

P: *¿Por qué?*

E: *No coinciden las columnas y las filas*

P: *No coincide el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda, usted le escribe ahí no está definido el producto, no se puede realizar esa operación Si le colocan este ejemplo de aquí (2x5)(5x1) ¿qué dice usted?*

E: *Sí*

P: *Que sí se puede multiplicar, sí está definido y ¿cuáles son las dimensiones de la matriz resultante?*

E: *2x1*

P: *2x1, ¿está claro?, resuelvan eso*

E: *O sea que en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que estén ubicadas*

P: *¿Cómo sería eso? ¿Cómo lo podrías decir? Allí hicieron A(2x3)xB(3x1), pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede multiplicar, en este caso ¿qué pasa?*

E: *No es conmutativa*

P: *Correcto, en el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa* ($AxB \neq BxA$); *no siempre es conmutativa, primero por las dimensiones y luego aunque se pudiese siendo matrices cuadradas, estas no siempre son conmutativas Vamos a realizar los productos que están indicados allí para que usted tome en cuenta la mecánica. Con todas ellas se puede hacer el producto, cambiemos de nombre a las dos últimas matrices, le ponemos ahora C y D. Comenzamos con AxB AB va a ser una matriz que tiene dimensiones*

E: *2x1*

P: *2x1, va a tener dos filas y una columna Lo que se hace es tomar la primera fila de la matriz A y la multiplicas por los elementos de la primera columna de la matriz B, se multiplican los elementos correspondientes y la suma de todos esos productos va a ser el elemento* a_{11} *de la matriz producto La primera fila por la columna te da elementos de la primera fila y la*

primera columna de la respuesta. Vamos a escribir todos los
productos para que usted se dé cuenta qué es lo que se hace
Entonces dices aquí 2 por 1 más 3 por -3 y más 1 por 5
Dos menos nueve más cinco nos da menos 2
Entonces, el elemento a_{11} *es -2*
Como ya no hay más columnas en la matriz B, ya dejamos de
trabajar con esa fila, pasamos a la segunda fila. La segunda fila
es 4, -5 y 0 y lo multiplicamos por la misma columna 1, -3, 5
Y hacemos lo mismo, seguimos con el mismo procedimiento
Acá nos va a dar el elemento que está en la segunda fila primera
columna. Hacemos el producto y la suma
segunda fila primera columna nos da 19, terminado el producto

$$AxB= \begin{bmatrix} -2 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Una matriz 2x1, las filas de la primera matriz y las columnas de la
segunda
Hagan ustedes AxC
AxC ¿qué dimensiones va a tener?
E: *2x2*
P: *2x2*
Ya, pase a hacerlo
Los que han terminado AxC continúen resolviendo AxD
Antes de que haga la multiplicación revise por si acaso
Los primeros factores deben ser de las filas de la primera matriz y los
segundos factores son las columnas
8, 21, 13 y -13
Pase Angélica a resolver AxD
La ubicación de los factores es para que usted se equivoque menos
Si de pronto usted dice: no yo puedo hacer directamente, pues hágalo
Ahí tiene usted el ejercicio 5, si en caso no es posible realizar el
producto, escriba que no se puede hacer.
Siempre es bueno definir las dimensiones de las matrices para evitar
algún tipo de error en el producto
Ahí, con las matrices anteriores también podíamos haber hecho CxA
Dejen ahí esa parte de la multiplicación, lo concluye ya después en
su casa, si tienen alguna duda me lo dicen
Ya se han dado cuenta de que no se puede multiplicar matrices de
cualquier dimensión porque hay unas condiciones; tampoco pueden
sumar matrices de diferentes dimensiones; pero si se trabaja con
matrices cuadradas sí se puede sumar y se obtendrá como respuesta
una
matriz con las mismas dimensiones. Si multiplican matrices cuadradas
de dimensiones nxn la respuesta va a ser otra matriz de las mismas
dimensiones. Entonces para poder resolver funciones con matrices
vamos a trabajar con matrices cuadradas.
Vamos a tratar un tema que se llama Álgebra de matrices.
Si tienes tú la matriz A, de dimensiones 2x2, por ejemplo, esta matriz

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

De ella se puede escribir tranquilamente la matriz A^2

121 *Vamos a elevar al cuadrado esa matriz, ¿qué es lo que tenemos que hacer?*
122 *hacer?*
123 *Calcular AxA*
124 *Entonces AxA es igual a 2, -1, 5, 1 multiplicado por 2, -1, 5, 1*
125 *Vamos a hacerlo paso a paso*

$$AxA=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 15 & -4\end{bmatrix}$$

126 *Entonces AxA es igual a -1, -3, 15 y -4*
127 *Y podemos también escribir A^3 y es igual a A^2 por A*
128 *Entonces hacemos ese producto y nos va a salir otra matriz 2x2*

$$A^2xA=\begin{bmatrix}-17 & -2\\ 10 & -19\end{bmatrix}$$

129 *Eso es A^3*
130 *Si tenemos una función f(x) que diga por ejemplo $2x^2$-5x-3,*
131 *defina f(A)*
132 *entonces f(x) = $2x^2$-5x-3*
133 *f(A)= $2A^2$-5A-3*
134 *En este -3 aquí colocamos la matriz identidad de orden 2x2 para poder*
135 *sumar, sino ese -3 no tiene forma de ser sumado acá, como estamos*
136 *trabajando con matrices*
137 *Reemplazamos los valores y en vez de A^2 escribimos la matriz A^2,*
138 *luego donde está A se deberá reemplazar con los elementos de la matriz*
139 *A y por último al lado del 3 escribir la matriz identidad 2x2*

$$=2\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 15 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

140 *Ahí tienen lo que ya vieron en la clase anterior: suma de matrices y el*
141 *producto de un escalar por una matriz*
142 *Ahí tenemos f(A), la matriz solución es -15, -1, 5, -16*

$$f(A)=\begin{bmatrix}-15 & -1\\ 5 & -16\end{bmatrix}$$

143 *Resuelva esto ahora g(x) = $-x^3$-2x+5*
144 *Toma g(x), reemplaza x por A, reemplaza la potencia de la matriz A*
145 *por la que le corresponde acá, en el término que no tiene variable le*
146 *coloca la matriz identidad y resuelve*
147 *Ustedes van a hacer con la matriz A que tienen allí y con esta matriz G*

$$G=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$$

148 *Usted va a resolver 1) A^2, G^2; 2) A^3, G^3 y luego*
149 *3) f(x) = $3x^2$-5x+2 (para A y para G)*
150 *Y luego va a hacer 4) g(x) = $2x^3$-$4x^2$-x+5 (para A y para G)*
151 *Con eso nos encontramos el día miércoles a las 17H00*

Sesión 3: (07-12-2011): Matriz inversa 2x2, matriz escalonada y matriz canónica

Línea		Transcripción
1	P:	*Vamos a trabajar con lo que es la inversa utilizando operaciones*
2		*elementales y utilizando sistemas de ecuaciones. Van a calcular la*
3		*inversa de una matriz 2x2, primero ¿qué concepto, qué idea tiene usted*

de inversa, el inverso de un número?

E: *Lo contrario, si tengo 2/3 es 3/2 y multiplicado da la unidad.*

P: *Lo inverso de un número, por ejemplo el inverso de 3/5 es 5/3, ¿por qué?, porque al multiplicarlo da 1.*

La matriz inversa es otra matriz que al multiplicarse por la matriz dada, el resultado es la matriz identidad: $AxA^{-1} = I$. Si tú multiplicas un número por otro es inverso siempre que te dé 1, entonces siendo matrices al multiplicar la matriz por la inversa te tiene que dar la matriz identidad, estamos hablando de matrices cuadradas.

También se da que el producto de una matriz por su inversa (AxA^{-1}) es conmutativo

Entonces, vamos a comenzar con una matriz pequeña

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces ¿cómo encontramos la inversa?, vamos a partir de la propiedad. Si tenemos otra matriz x, y, z, w

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$$

Si multiplico esta matriz por esta otra matriz ¿qué me tiene que dar como resultado?

E: *La matriz identidad*

P: *La matriz identidad*

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Entonces hagamos este producto ¿cómo queda?

E: 2x – 3y…

P: *2x – 3y 2z – 3w 4x+y 4z+w*

$$\begin{bmatrix} 2x-3y & 2z-3w \\ 4x+y & 4z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por el concepto de igualdad de matrices, ¿qué se verifica ahí?, si esta matriz es igual a la otra ¿qué debe ocurrir?

E: *Se iguala 2x-3y=1*

P: *Eso, este elemento debe ser igual a 1 y el otro debe ser igual 0 y aquí tenemos un sistema de dos ecuaciones, lo mismo ocurre con los otros elementos de la matriz.*

$$\begin{array}{ll} 2x-3y=1 & \quad 2z-3w=0 \\ 4x+y=0 & \quad 4z+w=1 \end{array}$$

Qué es lo que deben hacer ahora?, resolver el sistema.

Aplique el método de eliminación, vamos a eliminar la y multiplicando por 3 la segunda ecuación

Entonces x es igual a 1/14

¿Cómo encontramos y?

E: *Reemplazando*

P: *Reemplazamos en la uno o en la dos*

y vale -2/7

Nos falta encontrar z y w, aplicamos lo mismo

Eliminamos la w, multiplicamos por 3

Entonces z es igual a 3/14

Y luego reemplazamos

43 *w es igual a 1/7*
44 *Ya tenemos*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/14 & 3/14 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

45 *Haga la prueba, multipliquen ahora la matriz A por la inversa que han*
46 *encontrado a ver si es cierto que se obtiene la matriz identidad.*
47 *Entonces multiplica usted*

$$\begin{array}{cc} A & A^{-1} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/14 & 3/14 \\ -2/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \end{array}$$

48 *Pase Daniela a hacer ese producto, eso no es nada nuevo, ya lo*
49 *hemos trabajado en clases anteriores*
50 *Ese es uno de los procedimientos para encontrar la matriz inversa*
51 *Ahí tienen ustedes en el número 1 de la hoja, aplicando ese*
52 *procedimiento calcule usted la inversa de las matrices A, B, C, D*
53 *Errores que no deben cometer*
54 *Están escribiendo la matriz A ponen igual y escriben todo esto*

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

55 *Esto no es cierto, no es cierto que A es igual a todo eso*
56 *No se trata se escribir signos en cualquier parte*
57 *Lo correcto es que A esta multiplicado por su inversa y que eso es*
58 *igual a la matriz identidad*

$$\begin{array}{cccc} A & A^{-1} & & I \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

59 *Eso sí es cierto*
60 *Los signos son importantes, los símbolos son importantes.*
61 *Otra cosa, esto es una ecuación matricial*
62 *Aquí tenemos dos matrices pero es una ecuación, esto es igual que esto,*
63 *siga manteniendo la igualdad*
64 *Porque esta matriz es igual a esta es que sacamos este sistema de*
65 *ecuaciones*
66 *Al final usted termina escribiendo la matriz inversa,* A^{-1} *es igual a*
67 *tal cosa*
68 *¿Cuánto sale x?*
69 E: *-21/33*
70 E: *-7/31*
71 P: *Cuando pueda simplificar hágalo, ¿cuánto sale x?*

$$\begin{array}{cccc} A & A^{-1} & & I \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} & = & \end{array}$$

72 E: *-7/31*
73 P: *-7/31*
74 *¿Cuánto sale y entonces?*
75 E: *-5/31*
76 P: *¿Cuánto sale w?*
77 E: *-3/31 y z es igual a 2/31*
78 P: *Listo*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/31 & 2/31 \\ -5/31 & -3/31 \end{bmatrix}$$

Ahora busque la matriz inversa de B
E: *¿Se pueden poner otras letras?*
P: *Son incógnitas, pueden poner las letras que quieran, por lo general siempre se utilizan las últimas del abecedario o en lugar de escribir x, y, z, w, pueden escribir x_1, x_2, x_3, x_4, eso ya es decisión suya,*
El asunto es que son cuatro incógnitas
Vayan terminando ya lo que están haciendo
Hasta la matriz D hacen con ese proceso, a partir de la matriz E
Vamos a hacer otra cosa, dejen ahí pendiente
Ahora quiero que miren acá a la pizarra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

○ → Elementos distinguidos de fila

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué pasa en la primera matriz, qué le ven de especial?
Primero no son cuadradas, ¿qué tienen de especial?
E: *Un poco de ceros*
P: *¿Qué pasa con los ceros?*
E: *Van aumentando*
P: *Van aumentando a medida ¿que qué, se van incrementando en dónde?*
Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las filas. Lo importante es que haya ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila
En la primera fila no hay ceros, en la segunda fila hay un cero antes de llegar a una fila que no es cero, en la tercera hay tres ceros antes de llegar a un elemento que es diferente de cero
¿Qué pasa aquí en la segunda matriz?
En la segunda fila hay dos ceros y en la otra fila todos son ceros
Van aumentando los ceros a medida que vamos descendiendo en las filas
¿Aquí qué ocurre en la tercera matriz?
En la primera fila hay un cero, en la segunda hay tres y en la última hay 4
Fíjese que no interesa si por acá hay un cero, la cosa es que haya ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila
Este tipo de matrices se llaman matrices escalonadas, va como una escalera y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener todas las filas ceros
A estos elementos que son los primeros elementos en cada fila diferentes

de cero, se les conoce como elementos distinguidos de fila ¿Cuáles son los de la matriz B?

E: *1 y -3*

P: *En C, ¿cuáles son los elementos distinguidos?*

El 1 y el 2

Solamente habrá un elemento distinguido por fila, no importa si después hay ceros, ese sigue siendo el elemento distinguido, es el primer elemento diferente de cero.

Hay otro tipo de matriz que se llama de la forma canónica. La matriz reducida a la forma canónica es cuando los elementos distinguidos son unos y en su columna es el único número diferente de cero, son las dos condiciones

La forma escalonada solamente los ceros van aumentando en cada fila, esa es la forma escalonada. En la forma canónica ese elemento debe ser 1 y debe ser en su columna el único número diferente de cero

Para llegar a eso, tú puedes escoger cualquier matriz y transformarla a la forma escalonada y pueden haber muchas matrices escalonadas diferentes a la matriz que tú encontraste, o sea, entre ellas serían equivalentes, son equivalentes la una con la otra. Si de una matriz te sale otra porque le haces algunas operaciones son equivalentes pero reducirla a la forma canónica solamente hay una, para cada matriz hay una

Por ejemplo, tomemos una matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

¿Qué puedes hacer para escalonar esa matriz?

Hay algunas operaciones que se llaman operaciones elementales entre filas. Puedes hacer 4 cosas:

Primero, puedes cambiar una fila con otra: $E_1 = f_i \rightarrow f_j$

Puedes cambiar esta fila con la primera o la segunda con la tercera y la matriz sigue siendo equivalente

Otra cosa que se puede hacer, Tú puedes reemplazar cualquier f_i *por esa fila multiplicada por un escalar k diferente de 0:* $E_2 = f_i \rightarrow f_i.k$

La tercera cosa que pueden hacer, puedes tomar una f_i *cualquiera y a ella le puedes sumar otra* f_j *multiplicada por un escalar k:*

$E_3 = f_i \rightarrow f_i + k{\cdot}f_j$

El intercambio está fácil, por ejemplo, yo puedo colocar esta matriz así

$$E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Esto de aquí es E_1 *para que vea un ejemplo, si quiere de aquí puede intercambiar otra fila y forma otra matriz equivalente*

Si quiere aplicar E_2 *entonces a esta segunda matriz que está aquí vamos a reemplazarle* $f_2 \rightarrow -3f_2$

$$E_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_2 \rightarrow -3f_2$$

Esa matriz es equivalente a esa y a la anterior

Vamos a aplicar E_3

Yo voy a pasar acá esta matriz, la fila 3 la voy a reemplazar por
$f_3 \rightarrow f_3 - 2f_1$

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_3 \rightarrow f_3 - 2f_1$$

El escalar puede ser positivo o negativo
La fila 1 queda igualita
La fila 2 queda igualita, van a cambiar la fila 3

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Y también pueden hacer la cuarta operación,
vamos a reemplazar una f_i *por ella multiplicada por un escalar*
cualquiera sumado a otra fila multiplicada por otro escalar cualquiera:
$E_4 = f_i \rightarrow k \cdot f_i + k \cdot f_j$
O sea, ahora multiplicas las dos, la que vas a reemplazar y la otra
que vas a sumar
Conste que el escalar de aquí puede ser 1 o -1, tú las puedes sumar
simplemente o las puedes restar o la puedes multiplicar por un
número fraccionario
Entonces, vamos a reemplazar ahora f_1 *por* $2f_1 - 3f_3$
Como va a reemplazar sólo f_1, f_2 *y* f_3 *sigue siendo la misma, no cambia*

$$E_4 \quad \begin{bmatrix} -17 & 27 & 17 & -14 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bueno, ahí tienen un ejemplo de cada cosa
Ahora vamos a hacer esta matriz escalonada
Entonces, ya ahorita les he explicado a ustedes las 4 operaciones que
pueden hacer entre filas, pero ahora eso lo vamos a aplicar para
encontrar la matriz escalonada y la matriz canónica
Para hacer escalonada esta matriz ¿qué debe ocurrir?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Esto debe ser 0 y esto debe ser 0.
La primera fila no cambia, con ese 2 tenemos que hacer 0 este 3
y este -2, ¿qué hago con la fila 2 para que ese 3 sea 0?
Voy a reemplazar f_2 *por* $2f_2 + 3f_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ & & & \end{bmatrix}$$

No se equivoque al sumar, no se equivoque al multiplicar, mucho
cuidado con eso, hay que estar concentrado
Ya tenemos resuelto la segunda fila, ¿cómo hago 0 ese -2?
Utilice siempre como pivote la fila uno, el numerito que está acá
arriba, este le decimos pivote
E: *Hay que sumar*
P: *Claro* $f_3 \rightarrow f_3 + f_1$
Yo les dije que podía ser un 1, puede ser un número fraccionario o
puede ser un -1 si lo vas a restar.

191 *Entonces está fácil*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

192 *¿Ahora cuál es el pivote?*
193 E: *El 6*
194 P: *El 6 hay que hacerlo 0, ¿cuál es el pivote?*
195 *El -11, siempre tomamos como pivote en la fila que sigue el primer*
196 *elemento diferente de 0, ese es el pivote y ese nos ayuda a hacer 0 el de*
197 *abajo. No tomamos la de arriba ¿por qué?, ¿qué pasa si utilizo la*
198 *primera fila?*
199 *Nos cambia este 0.*
200 *Entonces vamos a hacer 0 ese 6, primera fila igualita, ¿cómo hago*
201 *0 el 6? O sea, f_3 voy a reemplazar por, el 11 es un número primo.*
202 *No hay ningún número que antes de 66 sea divisible para 11*
203 *y para 6, ¿cómo hago 66 el 11?*
204 *Tenemos $f_3 \rightarrow 11f_3 + 6f_2$*
205 *¿Por qué los dos positivos?*
206 *Porque tengo aquí negativo el 11 y positivo el 6*
207 *Entonces tenemos*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 87 & 119 \end{bmatrix}$$

208 *¿Pueden hacer 0 el 87?, ya no se puede, ahí queda*
209 *Ya no puedes seguir escalonando porque se te acabaron las filas, ya*
210 *llegaste a la última. Ahí está escalonada, sólo escalonada, no es la*
211 *forma canónica, ese sería ya otro proceso.*
212 *¿Para que sea canónica qué debe ocurrir?*
213 *2, -11 y 87 deberían ser 1 y 3, 4 y -2 deberían ser 0*
214 *En la hoja de ejercicios Nº 3, el numeral 4 reducir a la forma*
215 *escalonada A, B, C, D, E, a la forma canónica lo hace después*

Sesión 4: (14-12-2011): Matriz canónica y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a la forma canónica

Línea **Transcripción**

1 P: *Ahora nos corresponde transformar a la matriz canónica*
2 *¿Cómo era la matriz canónica?*
3 *eran todos los números ceros, a excepción de los*
4 E: *que están en la, los elementos distinguidos*
5 P: *de los elementos distinguidos que eran todos unos*
6 *Entonces, tomamos una matriz cualquiera, por ejemplo:*

$$A= \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

7 *Ahí tenemos esa matriz, vamos a reducirla para recordarlo todos,*
8 *primero vamos a escalonarla con las operaciones elementales entre*
9 *filas. Tomaremos como pivote el 1 de la primera fila primera columna y*

con él haremos 0 el -2 y el 2, vamos a reemplazar la $f_2 \rightarrow f_2+2f_1$.
¿Qué pasa con la siguiente, qué operación le hacemos?
Tocaría hacer f_3*… ¿qué le hago? Dígame la operación*

E: $f_3 \rightarrow f_3-2f_1$

P: *Entonces tenemos:*

$$\begin{array}{c c} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ f_2 \rightarrow f_2+2f_1 \\ f_3 \rightarrow f_3-2f_1 \end{array}$$

Ahí tenemos ya la primera columna con ceros a excepción del pivote.
Ahora, vamos a hacer 0 ¿a quién? ¿Quién nos corresponde hacer 0
ahora?

E: *El -3*

P: *El -3. Trabajamos con el 7.*
Vamos a colocar la primera fila y la segunda
¿Con qué reemplazamos f_3*?*
¿Cómo hacemos 0 este -3 que es el que nos interesa?

E: $f_3 \rightarrow 7f_3+3f_2$

P: *Ya entonces*

$$\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \rightarrow 7f_3+3f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \end{array}\right]$$

Ahí tenemos ya la matriz escalonada, eso fue lo que trabajamos la clase
anterior, estas operaciones elementales entre filas son importantes
y las vamos a seguir utilizando a lo largo de todo el semestre en
diferentes aplicaciones, en diferentes procedimientos.
Ahora, para que la matriz sea canónica vamos a reducirla, ¿qué debe
ocurrir en la forma canónica? ¿Alguien tiene anotado lo que vimos en la
clase anterior?
Son dos condiciones:
Primera condición, todos los elementos distinguidos deben ser igual a 1
y, en cada columna donde esté el elemento distinguido, todos deben ser
cero menos él.
Entonces aquí en la primera columna ya está resuelto
Aquí, ¿qué tenemos que hacer?
Que el 7 valga 1 y el 2 valga 0.
Y aquí que el 4 valga 1 y los -1 valgan 0
Lo primero que vamos a resolver es hacer cero este 2. Para hacer 0 ese
2 obviamente vamos a necesitar trabajar con el 7. Entonces las dos
últimas filas en el siguiente paso van a quedar intactas, la que va a
variar ahora es la primera, queremos que este 2 se haga 0
por medio del 7,¿qué operaciones por filas aplicamos,
¿Con quién reemplazo f_1*?*
Díganme la operación

E: $f_1 \rightarrow 7f_1-2f_2$

P: *Eso es todo, tenemos:*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 7f_1-2f_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \end{array}\right]$$

Hemos logrado ya tener dos columnas con elementos distinguidos
diferentes de 0 y todo lo demás 0, ahora es el turno del 4, tiene que

quedar el 4 solito ahí diferente de 0, el -1 y el -5 hay que hacerlo 0.
¿De quién nos valemos para hacer 0 el -1 y el -5?
E: *Del 4*
P: *Del 4, la que no va a cambiar ahora es la última fila*
Nos vamos a valer de la última fila para hacer ceros el -1 y el -5
¿Qué hacemos con la fila 1?
¿Con qué la reemplazamos, con qué operación?
E: $f_1 \rightarrow 4f_1+5f_3$
P: $f_1 \rightarrow 4f_1+5f3$
Ahora vamos a hacer 0 el -1
¿Con que reemplazamos f_2, qué operación aplicamos?
E: $f_2 \rightarrow 4f_2+f_3$
P: *Eso* $f_2 \rightarrow 4f_2+f_3$
Tenemos

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 4f_1+5f_3 \\ f_2 \rightarrow 4f_2+f_3 \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 28 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 28 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -11 \end{array}\right]$$

Falta una última cosa, hay que hacer unos todos los elementos
distinguidos. Tengo que hacer unos ¿qué cosa?
E: *El 28, el 28 y el 4*
P: *Entonces ¿con qué reemplazamos f_1 en la última matriz?, ¿qué hay que*
hacer ahí?, ¿qué operación hay que hacer ahí, de las cuatro cuál
aplica?¿Cómo haces 1 el 28?
E: *Hay que multiplicarlo por un escalar*
P: *¿Por qué escalar multiplicamos al 28 para que se haga 1?*
E: *Por 1/28*
P: *Por 1/28*
¿Cómo hacemos para que el 28 de la segunda fila se haga uno?
E: *Lo mismo*
P: *Y en f_3 ¿Qué hago? f_3 reemplazo por 1/4 f_3*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 1/28f_1 \\ f_2 \rightarrow 1/28f_2 \\ f_3 \rightarrow 1/4f_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -11/4 \end{array}\right]$$

Usted tiene ahí en la hojita todas esas matrices que ya las
transformó en escalonadas, eso fue lo que hizo ya usted, ahora
hay que continuar hasta encontrar la forma canónica de cada una
Ese es el trabajo, entonces comience, haga por lo menos la matriz A
Vayan siempre comparando lo que les va resultando con el compañero,
así se van apoyando uno con otro
Ahora sí aproveche, compare, discuta, pregunte, este es el momento, al
momento de la lección ya no se permite ningún tipo de consulta.
Cuando tenga la matriz escalonada me dice
Todos están trabajando con esta matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si ya tiene la matriz escalonada me dice, dígame los elementos
E: *1, -2, 3, 1; 0, 3, -4, 4; 0, 0, 7, -10*
P: *Lo escribo*

1 -2 3 1

$$A=\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

¿Estamos de acuerdo?

E: *Yo tengo otros elementos en la última fila*

P: *Revisen para ver qué pasó*

Vamos a ver qué es lo que han hecho, volvamos a la matriz original

Vamos a reemplazar $f_2 \rightarrow f_2 - f_1$

Nos da lo mismo que dice su compañera en la fila 2

Ahora hay que hacer 0 el 3

E: $f_3 \rightarrow f_3 - 3f_1$

P: *Eso, nos queda*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Y ahora hay que hacer 0 el 7

$f_3 \rightarrow 3f_3 - 7f_2$

Entonces

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

Está bien, ya está escalonada

¿Cómo sale la matriz canónica? Ya la deben tener

E: *1, 0, 0, 29/7; 0, 1, 0, -4/7; 0, 0, 1, -10/7*

P: *Así*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 \end{bmatrix}$$

Si usted utiliza otro orden puede que la matriz escalonada no les salga igualita, puede variar las operaciones entre filas y les va a salir otra matriz escalonada, pero la canónica sí debe ser la misma.

A ver, una de sus compañeras encontró esta matriz, ojo con esto porque es importante, en la matriz B obtuvo estas filas

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso puede ocurrir tranquilamente, ahí está ya escalonada, eso dijimos, van aumentando los ceros y si hay alguna que está con todo cero pues no pasa nada, está escalonada. Quiere hacerla canónica, ¿qué es lo que tiene que hacer? ¿Cuáles son los elementos distinguidos?,

E: *2 y 1*

P: *Esos háganlos 1 y este háganlo 0 y el resto no importa*

¿Cómo quedó la canónica de esta última?

E: *1, 0, -7/2, 5/2; 0, 1, 3, -2; 0, 0, 0, 0*

P: *Ya tenemos*

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a tomar en cuenta esto como si fuese una matriz aumentada y veamos cada fila como si fuesen los coeficientes de una ecuación

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -11/4 \end{array}\right]$$

Cada fila corresponde a los coeficientes de una ecuación y en cada columna van los coeficientes de la misma variable, de la misma incógnita. Por ejemplo: ¿cómo escribiría yo esta ecuación de aquí?
$x + 2y - z = 4$
Ya, ¿como escribiría la segunda?
$-2x + 3y + z = 0$
Y la última
$2x + y - z = 3$
Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, si yo parto de aquí y ubico los coeficientes acá tengo una matriz. Hasta ahí sería la matriz de los coeficientes del sistema, al colocarle los elementos independientes le estoy colocando la matriz aumentada incluidos los términos independientes.
Si he llegado con operaciones elementales entre filas a esta matriz canónica, entonces ¿cómo escribiría el sistema aquí?, ¿qué es esto?
E: *X*
P: *Y ¿qué es esto?*
E: *Igual a -1/4*
P: *O sea, ¿cuánto vale x?*
Ya resolvió el sistema
$y = 3/4$
$z = -11/4$
Ahí tenemos la solución del sistema de ecuaciones, en este caso ha habido una solución. Si eso lo escribe usted como un vector. Utilizando operaciones elementales entre filas reduciendo a la forma canónica tenemos la solución del sistema de ecuaciones, en este caso insisto hay una única solución.
Podemos escribir la solución en forma de vector
$(x, y, z) = (-1/4, 3/4, -11/4)$ *es la solución de ese sistema, utilizando operaciones elementales entre filas reduciendo a la forma canónica tenemos la solución de un sistema de ecuaciones lineales*
En este caso insisto hay una única solución
Cuando hay tres variables y nos quedan tres filas hay una solución, como en este caso.
Es una de las aplicaciones de las operaciones elementales entre filas y matrices
No hace falta repetir el proceso porque es el mismo, lo único que yo te doy es este sistema, tú lo escribes como matriz aumentada, le aplicas las operaciones elementales entre filas hasta llegar a la matriz canónica y resuelves eso
Fíjate que puedes colocar allí las ecuaciones que quieras con las variables que quieras, claro a medida que aumentan las filas y las columnas se hace más tedioso el proceso, pero es lo mismo, de esa manera puede resolver la ecuación que quiera, del sistema que desee.
Ah un cosa que podemos hacer, yo puedo darle un sistema de ecuaciones a usted y le doy por ejemplo varias alternativas de solución, ¿cómo comprueba usted si esas alternativas de solución realmente

satisfacen al sistema?

E: *Reemplazando*

P: *Si esto se verifica significa que satisface a esta ecuación, para que sea la solución del sistema ¿qué debe ocurrir?, debe satisfacer a la segunda y debe satisfacer a la tercera.*

Ahora tiene como ejemplo la matriz B y su canónica en la pizarra

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Quiero que nos centremos en la matriz B, ¿qué ocurre ahí? Al llevarlo a la forma canónica obtenemos esto ¿cuál sería el sistema original?

y + 3z = -2; 2x + y – 4z = 3; 2x + 3y + 2z = -1

Eso ¿a qué se ha reducido? Hemos tenido al final lo siguiente:

x – 7/2z = 5/2; y + 3z = -2

¿Qué pasa aquí? Aquí tengo más variables que ecuaciones en la matriz ya reducida a la forma canónica, tengo 3 incógnitas y tengo dos ecuaciones. Cuando ocurre eso, en ese momento el sistema tiene un número ilimitado de soluciones.

En ese caso aquí hay la x y la y que son la primera variable de cada una de las ecuaciones pero hay este 3 que es el coeficiente de z que no es primer elemento de ninguna fila, a ese se le llama variable libre, entonces la z en este caso es una variable libre, porque no es primer elemento de ninguna ecuación. La x y la y no son variables libres porque son los primeros elementos, el uno en la primera ecuación, el otro en la segunda, pero la z no es primer elemento de ninguna fila, entonces a esa se le llama variable libre. Entonces ¿cuál es el asunto? ¿qué es lo que puede pasar aquí? Que para resolver este sistema uno puede darle a z el valor que quiera. Por ejemplo, si usted a z le otorga el valor de 0, ¿qué pasa para y', y valdrá cuánto?

E: *-2*

P: *y valdrá -2*

¿y cuánto valdrá x?

E: *5/2*

P: *Si le doy un valor arbitrario a z como lo hice ahora, una solución del sistema será (5/2, -2, 0), esa es una solución, quiero encontrar otra, ¿qué debo hacer?*

E: *Otro valor a z*

P: *Otro ejemplo cuando z=1. Otra solución es (6, -5, 1)*

¿Cuántas soluciones tendrá ese sistema?

E: *Infinito*

P: *Infinito*

Eso pasa cuando hay más variables que ecuaciones

Entonces les voy a entregar otra hoja de ejercicios

para que resuelvan los sistemas de ecuaciones

Sesión 5 (21-12-2011): Matriz inversa 3x3, cálculo del determinante 2x2, 3x3 y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

Línea **Transcripción**

1 P: *Hubo un tema que se quedó inconcluso sobre las matrices inversas*
2 *porque trabajamos con matrices inversas 2x2 y falta matriz inversa de*
3 *3x3 y demás. Entonces hoy vamos a ver una forma de encontrar también*
4 *la inversa de una matriz 3x3*
5 *Vamos a escribir una matriz, si tengo una matriz A, vamos a escribir*
6 *ahora una matriz en donde esté la matriz A y además esté la matriz*
7 *identidad y a partir de ahí aplicando operaciones elementales entre filas*
8 *vamos a obtener al lado izquierdo la matriz identidad y al lado derecho*
9 *la matriz inversa de A*
10 *Así (A, I) → (I, A^{-1})*
11 *Supongamos que la matriz A es*

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

12 *Esa matriz la escribirán de esta manera (A, I)*

$$(A, I)= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

13 *Si aplicamos operaciones elementales entre filas y en esta parte*
14 *obtenemos la matriz identidad, automáticamente en esta otra parte nos*
15 *va a quedar la matriz inversa de A, entonces hacemos ese proceso, ¿qué*
16 *es lo primero que podemos hacer ahí?, ¿cuál es la primera cosa que*
17 *podíamos hacer?*
18 E: *Debemos hacer 1 el 2*
19 P: *Yo por ejemplo haría esta fila 3 la colocaría en la fila 1, para tener este*
20 *1 como primer elemento, eso es una de las cosas que se puede hacer,*
21 *pero vamos a dejarla ahí*
22 *Entonces, a raíz de este elemento vamos a comenzar a hacer*
23 *ceros el 3 y el 1 ¿Cómo haría 0 aquí?*
24 E: *Fila 2 por 2 menos 3 fila 1*
25 P: *Ya, procedemos a hacer eso*
26 *Luego $f_3 \to 2f_3 - f_1$*

$$\begin{array}{l} \\ f_2 \to 2f_2-3f_1 \\ f_3 \to 2f_3-f_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

27 *Ahora, ¿cuál hacemos 0?*
28 E: *El 5*
29 P: *Entonces f_3 vamos a reemplazarla por f_3+5f_2*
30 *Como la única fila que va a cambiar es f_3 el resto nos queda igualito*

$$\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \to f_3+5f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

31 *¿Siguiente paso?*
32 *Hay que hacer 0 ese -1, entonces f_1 lo reemplazamos por f_1-f_2*
33 *Lo de abajo queda igualito*

$$\begin{array}{l} f_1 \to f_1-f_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 10 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

34 *Y ahora hay que hacer 0 el 10 y el -7*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 22f_1+5f_3 \\ f_2 \rightarrow 44f_2-7f_3 \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 44 & 0 & 0 & 8 & 6 & 10 \\ 0 & -44 & 0 & -20 & 18 & -14 \\ 0 & 0 & -44 & -16 & 10 & 2 \end{array}\right]$$

Ahí, ¿qué es lo que falta hacer?

E: *Hacer 1 cada uno de los elementos de la diagonal*

P: *Entonces reemplazamos f_1 por $1/44f_1$; f_2 por $-1/44f_2$ y f_3 la reemplaza por $-1/44f_3$*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow 1/44f_1 \\ f_2 \rightarrow -1/44f_2 \\ f_3 \rightarrow -1/44f_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/11 & 3/22 & 5/22 \\ 0 & 1 & 0 & 5/11 & -9/22 & 7/22 \\ 0 & 0 & 1 & 4/11 & -5/22 & -1/22 \end{array}\right]$$

Entonces, ¿cuál es la matriz inversa de A?

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 3/22 & 5/22 \\ 5/11 & -9/22 & 7/22 \\ 4/11 & -5/22 & -1/22 \end{bmatrix}$$

Fíjese que aplicando las operaciones elementales nos sirven para eso
En la hoja de ejercicios número 3 hay unas matrices 3x3 que dejamos pendiente de buscar la inversa.
Ahí hay cuatro matrices 3x3, en el ejercicio 1 y en clases anteriores hicieron solamente las 2x2, ahora toca hacer las 3x3
Tengan mucho cuidado, si necesitan para cada operación ir escribiendo los datos, reemplazando, pues háganlo, si se equivocan en un signo ya todo se altera
A partir de una matriz se puede hacer permutaciones con los números, puede ir tomando un elemento de diferente fila diferente columna y multiplicarlos entre sí y en base a eso podemos calcular lo que se llama el determinante de una matriz. Eso también nos va a servir para resolver sistemas de ecuaciones y para otras aplicaciones, para encontrar la inversa inclusive
Entonces ¿cómo se calcula el determinante de una matriz?
Vamos a calcular el determinante de una matriz por ejemplo 2x2
Si tengo la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Yo puedo combinar los elementos de esa matriz tomando siempre un elemento de una fila y columna diferente. La única forma de hacerlo aquí es tomando este elemento y ¿por cuál otro lo puedo multiplicar que no sea ni de la misma fila ni de la misma columna?

E: *Por 3*

P: *Por este 3 de acá, entonces tú armas ese producto tomado en este sentido de manera diagonal y luego cuando haces la otra permutación le restas a ese producto entonces aquí le restas a ese producto, esa permutación, el producto de la otra permutación.*
Cada vez que tomes elementos de la diagonal principal se va a sumar y al momento de multiplicar los elementos en forma de permutación por la diagonal secundaria ese producto se resta

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (3)(3) - (-5)(2) \\ = 9 + 10 = 19 \end{array}$$

El determinante es 19
Tenemos que escribir así $|A| = 19$
Una observación, la matriz 2x2 es esta

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

En el momento que calculamos el determinante ya no se lo coloca de esa forma, yo voy a calcular el determinante de la matriz A, entonces aquí en vez de paréntesis hay que colocar barras

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -5 & 3\end{vmatrix}$$

Eso significa que es de la misma matriz pero yo voy a calcular el determinante de esa matriz y el determinante de esa matriz es siempre un escalar, no es otra matriz

El determinante se denota así det (A) o así $|A|$

Si por ejemplo llegase a tener aquí determinante 0 significa que esa matriz no tiene inversa

Ahora ¿cómo calculas el determinante de orden 3? De una matriz 3x3

Eso también sirve para resolver sistemas de ecuaciones

Por ejemplo, tomemos el sistema que está en la última hoja de ejercicios que dice $x_1 + 5x_2 = 7$; $-2x_1 - 7x_2 = -5$

Entonces, en este caso hay que calcular el determinante del sistema que está dado por los coeficientes de las incógnitas. Hay que calcular el determinante de x_1 *y el determinante de* x_2.

El determinante del sistema lo conformas con los coeficientes de las incógnitas

$$D=\begin{vmatrix}1 & 5\\ -2 & -7\end{vmatrix}=3$$

El determinante para x_1 (Dx_1) *se forma colocando en lugar de los coeficientes de x en cada ecuación los términos independientes*

$$Dx_1=\begin{vmatrix}7 & 5\\ -5 & -7\end{vmatrix}=-24$$

El Dx_2 *se forma igual que en* x_1

Entonces en x_1 *colocamos los coeficientes de* x_1 *y en lugar de los coeficientes de* x_2 *colocamos los términos independientes*

$$Dx_2=\begin{vmatrix}1 & 7\\ -2 & -5\end{vmatrix}=9$$

Ahora, para calcular x_1 *lo que se hace es dividir el* Dx_1 *para el determinante del sistema y para calcular el* x_2 *divides el* Dx_2 *sobre el determinante del sistema*

Y así se trabaja con sistemas de ecuaciones de 2, 3, 4 incógnitas, las que sean.

Para x_1 *sería* $-24/3 = -8$

Para x_2 *sería* $9/3 = 3$

Si el sistema es de tres ecuaciones habría una Dx_3 *o x, y, z; habría que calcular una Dz o* Dx_3. *Ahora ¿cómo calculas el determinante de orden 3? De una matriz 3x3*

Se va a calcular por ejemplo el determinante de esta matriz A

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Cuando es 3x3 se pueden hacer 3 cosas, para poder combinar elementos de diferentes fila y columna, lo que se suele hacer es aumentar las dos primeras filas en el mismo orden y se toman los *elementos así*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ \color{red}{2} & \color{red}{-1} & \color{red}{3} \\ \color{red}{3} & \color{red}{-2} & \color{red}{1} \end{vmatrix}$$

Tú te das cuenta que tomas los elementos de una fila y columna diferente cada vez. Todos esos productos son sumados, o sea, se colocan ahí con el mismo signo

Cuando multiplicamos en sentido paralelo a la diagonal secundaria ahí se resta, se cambia el signo

Entonces tenemos -12+18-1+6-4-9 = 22

También se puede hacer, otra cosa que puede hacer usted es que estas dos columnas las repite allá y así usted logra fácilmente combinar o permutar, siempre un elemento de fila y columna diferente

$$|A| = \left|\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ & & + & + & + \end{array}\right|$$

Tener en cuenta eso, los productos así se suman y los productos así se restan. Los que van paralelos a la diagonal principal se suman, los productos de las permutaciones de los elementos que van paralelos a la diagonal secundaria se restan

Y también lo puede hacer directamente

Tú haces el cálculo del determinante de cualquier manera.

Usted para calcular el determinante utilice la forma que le parezca más sencilla

Vamos a resolver un sistema de ecuaciones 3x3

Un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas

Escriba ahí el sistema siguiente $3x - 2y + 5z = 5$; $2x - 3y + z = -2$; $x + 2y - 3z = -1$

Hay que calcular el determinante del sistema (D), Dx, Dy, Dz y luego el valor de las incógnitas

Primero el determinante del sistema

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 27+20-2+15-12-6=42$$

El determinante para x

$$Dx = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 45+2-20-15+12-10=14$$

Ahí ya puede sacar x, será igual a 1/3

El determinante de y

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 18+5-10+10+30+3=56$$

El valor de y es entonces 4/3

El determinante de z

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$Dz=\begin{vmatrix}2 & -3 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=9+20+4+15-4+12=56$$

139 *z sería 4/3 también*
140 *De la hoja de ejercicios número 4, del sistema de ecuaciones, resuelva*
141 *por este método a partir del b) hasta f)*

Sesión 6 (28-12-2011): Matriz de cofactores, matriz adjunta y matriz inversa

Línea Transcripción

1 P: *Tenemos esta matriz*

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 5\\ 7 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

2 *El menor de cualquier elemento a_{ij} es una matriz, a partir de esa,*
3 *donde no hay ningún elemento de la fila ni de la columna del elemento*
4 *que tomas como referencia. Entonces ese es el menor, es una submatriz,*
5 *entonces tú quitas, para colocar el menor de una matriz quitas toda la*
6 *fila y toda la columna que corresponde al elemento que tomas.*
7 *Por ejemplo, si queremos escribir el menor del elemento a_{11} sería la*
8 *matriz, entonces como a_{11} está aquí no tomamos en consideración*
9 *ningún elemento ni de la fila ni de la columna a la que corresponde*
10 *dicho elemento. Ese sería el menor*

$$a_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

11 *¿Cuál sería el menor del elemento a_{22} por ejemplo? ¿Cuál sería?*
12 E: *1, 7, 4, 5*
13 P: *¿Y el menor de a_{31}?*
14 E: *3, -1, 4, 5*
15 P: *Hay una forma de determinar signos, o sea cada elemento de la matriz*
16 *se le determinan los signos elevando el -1*
17 *a la suma de los subíndices $(-1)^{i+j}$*
18 *Entonces por ejemplo, ¿qué signo debería llevar la posición del*
19 *elemento a_{11}? Sería -1 elevado a la 1+1, sería +1, sería positivo,*
20 *entonces en ese sitio iría positivo, $a_{11} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$*
21 *Entonces tendríamos*

$$\begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

22 *Así sucesivamente, tanto hacia la continuación de las filas como hacia la*
23 *continuación de las columnas. Entonces este signo de aquí lo toma el*
24 *determinante del menor y en ese momento ese valor o ese número que*
25 *obtenemos sería el cofactor. O sea ¿qué es el cofactor? El cofactor se*
26 *podría decir que es el determinante del menor sin nada*
27 *Primero, ¿qué es el menor?, el menor de un elemento cualquiera, es*
28 *una submatriz en donde no se toma en consideración ningún elemento*
29 *de la fila y de la columna del elemento que se ha tomado, ese es un*
30 *Menor*
31 *¿Pero qué es el cofactor en cambio? El cofactor es el determinante de*
32 *ese menor pero colocado el signo. ¿Cuál signo se ubica? El que está*

determinado allí, en base a esta fórmula se podría decir Entonces vamos a obtener la matriz de los cofactores de A. Colocamos la matriz A, vamos a obtener la matriz de todos los cofactores de ella

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a_{11}, la forma de escribirlo para colocar el signo -1 elevado a la 1+1 y el determinante del menor ¿cuál sería? Si este es a_{11}, el determinante del menor sería, eliminando la fila primera y la columna primera, o sea se eliminan la fila 1 y la columna 1. Fíjese que al colocar esta presentación con barras estamos hablando de determinantes, no del menor, menor sería cuando colocamos paréntesis. Sí vamos a determinar el cofactor que es el determinante del menor con el signo respectivo. Entonces ¿cuál es el valor aquí?

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4) = 3$$

¿Cuál sería el determinante para el elemento a_{21}?

E: -9

P: a_{31} será igual, determinamos el signo ¿cuál es el determinante del menor?

E: -3

P: Determinamos en la segunda columna la matriz de cofactores.
Sería $a_{12} = (-1)^{1+2}$
¿Cuál sería el determinante ahí?

E: -8

P: ¿a_{22} será?

E: a_{22} es 24

P: ¿a_{32}?

E: 8

P: Falta la última columna

E: a_{13} es -7, a_{23} es -21

P: ¿Y el elemento a_{33}?

E: 7

P: Esa es la matriz de los cofactores.

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 & -7 \\ -9 & 24 & 21 \\ -3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Entonces con esa matriz de los cofactores determinamos la matriz adjunta. También se le llama adjunto clase. Y la matriz Adj (A) es la que acabamos de determinar pero traspuesta

$$\text{Adj (A)}=\begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 \\ -8 & 24 & 8 \\ -7 & 21 & 7 \end{bmatrix}$$

Fíjese bien, hemos hecho lo que es el menor de un elemento. Es una submatriz donde eliminas la fila y la columna del elemento que tomas como referencia. Luego hemos visto los signos que llevarían los cofactores de una matriz. Y ¿qué es el cofactor?, hemos dicho que es el determinante del menor colocado el signo respectivo. Entonces hemos escrito acá la matriz cofactor y luego a partir de esa hemos escrito la matriz adjunta que es simplemente trasponer, la traspuesta de eso.

Ahora, eso de ahí nos ayuda a encontrar la matriz inversa de A. Para encontrar la matriz inversa de A necesito calcular el determinante de A.
Calculamos el determinante de A

$|A| = 0$

Se nos hizo 0. Cuando sale 0 el determinante no podemos determinar la matriz inversa. Pero en caso de que hubiera salido un determinante distinto de 0, ¿Cómo obtienes la matriz inversa? La matriz inversa de A se obtiene multiplicando uno sobre el determinante de A por la Adj de A.
Como se nos hizo 0 el determinante no podremos encontrar la inversa de esa matriz, pero para aprender el procedimiento, vamos a suponer que nos salió como determinante 7
¿Cómo obtienes la matriz inversa?
La matriz inversa de A se obtiene multiplicando uno sobre el determinante de A por la adjunta de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)$$

Esta es otra forma de encontrar la matriz inversa
Ya vimos el proceso de obtener la matriz inversa con operaciones elementales entre filas
Ahora hemos visto lo del determinante, entonces introducimos el cálculo de la inversa con este proceso utilizando el determinante y los cofactores que son los determinantes de los menores de cada Elemento
Ese es el proceso para determinar la matriz inversa
Calcule usted la matriz inversa de la siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Haga el proceso, calcule la matriz de los cofactores, busca la traspuesta de esa matriz para encontrar la matriz adjunta, calcule el determinante de la matriz y luego multiplica uno sobre el determinante de A por la adjunta de A y obtenemos la matriz Inversa
Me dice qué sale
Lo de -1 elevado a la suma de los subíndices, ese es el proceso para encontrar el signo, pero si usted tiene presente la matriz de los signos de los cofactores ya no hace falta que coloque esas operaciones. Al inicio, yo expliqué todo el proceso para que usted tenga en cuenta las operaciones
¿Quién encontró ya el cofactor de a_{11}?
E: *-13*
P: *¿El a_{12}?*
E: *17*
P: *¿Y el otro?*
E: *12*
P: *Vayan verificando si esos valores los tienen todos*
¿Ya está?
¿Cómo queda la segunda columna?
E: *10, -7, 9*
P: *¿La tercera columna?*

116 E: *24, -1, -10*

117 P: *A esto le buscan la adjunta*

$$\begin{bmatrix} -13 & 10 & 24 \\ 17 & -7 & -1 \\ 12 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

118 *Sería*

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -13 & 17 & 12 \\ 10 & -7 & 9 \\ 24 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

119 *¿Cuánto sale el determinante?*

120 E: *79*

121 P: *79*

122 *Entonces obtenga la matriz inversa de A*

123 *¿Cómo queda entonces?*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -13/79 & 17/79 & 12/79 \\ 10/79 & -7/79 & 9/79 \\ 24/79 & -1/79 & -10/79 \end{bmatrix}$$

124 *Combinando alguna fila con el concepto de cofactor, también hay una*

125 *forma de encontrar el determinante. Tomemos una fila cualquiera,*

126 *vamos a calcular el determinante de otra manera utilizando los*

127 *cofactores*

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

128 *Un detalle por si acaso, esto de aquí ¿qué es? ¿es una matriz o un*

129 *determinante? Esto no es una suma de escalares, no es una suma de*

130 *matrices y producto por escalar. Esto es la combinación entre una fila y*

131 *sus cofactores. Usted multiplica los elementos de una fila cualquiera por*

132 *sus cofactores y eso lo suma y a ver qué sale. Esto es un determinante.*

133 *¿Cómo se resuelve el determinante?*

134 E: *Sale 79*

135 *Esa es otra forma de calcular el determinante de una matriz, tomas una*

136 *fila cualquiera, es más fácil cuando tomas los elementos más pequeños,*

137 *donde hayan más ceros porque cualquier número multiplicado por 0 es*

138 *0, entonces se hace más sencillo.*

139 *Tomas una fila cualquiera, la multiplicas por el cofactor y*

140 *sacas el determinante de esa matriz.*

Sesión 7 (04-01-2012): Cálculo del determinante empleando cofactores, operaciones elementales entre filas y propiedades

Línea		Transcripción
1	P:	*Ahora interesa que se maneje bien las operaciones elementales entre*
2		*filas. Estamos ahora calculando el determinante utilizando cofactores,*
3		*entonces para los que llegaron recién, para que se igualen en lo que*
4		*estamos trabajando, tenemos aquí un determinante, vamos a calcularlo*
5		*utilizando el método de cofactores.*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Tomamos una fila o una columna cualquiera, entonces cada cofactor tiene su signo, aquí sabemos que es signo positivo, multiplicamos + por + da + 3 y esto multiplicado por el determinante del menor. Igual con el 5 sabemos que aquí en la matriz de los signos tenemos signo negativo, entonces – por – da +, luego colocamos aquí el determinante del menor. Aquí tiene signo positivo entonces + por + da +, como es 1 no hace falta colocarlo, luego resolvemos cada uno de los determinantes

$$= 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

¿Qué ocurriría si fuesen 0 el -5 y el 3? Esto se reduciría a 0, entonces una forma de trabajar o de aprovechar las operaciones elementales entre filas aplicando las propiedades de los determinantes, eso usted lo debe de haber consultado, cuando tú aplicas en un determinante las operaciones entre filas, la tercera y la cuarta, que le sumas el producto de un escalar por una fila a otra fila cualquiera, el determinante no cambia su valor. Entonces vamos a aplicar eso para hacer 0 a este -5 y al 3, ya vamos a ver qué ocurre

Aplico operaciones elementales entre filas para hacer 0, utilicemos este número como pivote y con esa fila hagamos 0 al -5 y al 3, a ver cómo Queda

Entonces, ¿con qué remplazamos la fila 1? Para hacer 0 al 3

¿Y la fila 2?

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 - 3f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + 5f_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -8 & 22 \\ 0 & 7 & -33 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Entonces aplicando el mismo concepto utilizamos la primera columna, como este elemento es 0 al multiplicarlo por cualquier determinante va a dar 0, o sea sería así

$$= 0 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} -1 & 22 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -33 \end{vmatrix}$$

Nos damos cuenta fácilmente, que esto ¿cuánto va a dar?, esto va a dar 0 porque tenemos un factor 0 y el único valor que hay aquí diferente de 0 sería ese entonces vea usted que sale lo mismo

Aquí estamos utilizando los cofactores.

Aquí estamos utilizando operaciones elementales entre filas y cofactores, esto de aquí es necesario, podemos utilizarlo si tenemos determinantes de orden 4, 5. Logramos hacer 0 una fila o una columna y vamos reduciendo el tamaño, de hecho cuando trabaja con determinantes de 5x5 o 7x7 lo que se hace es reducir hasta 3x3 y de ahí ya se resuelve de las otras maneras

Vamos a poner un determinante un poco mayor, o sea, siempre es recomendable en este caso tomar la fila o la columna donde hayan ceros, porque ya sabes que el cero multiplicado por cualquier determinante va a dar cero. Consideremos por ejemplo este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Tenemos 5 filas, 5 columnas, entonces vamos a aplicar ahí las operaciones entre filas para ir reduciendo. Si al determinante le aplica operaciones elementales entre filas, no cambia su valor. ¿Qué fila o columna nos conviene revisar? Puede ser la fila 4, puede ser la columna 3 o puede ser la columna 5 que tiene un 1, también el 1 siempre nos ayuda porque eso no altera mayor cosa el valor. Entonces vamos a utilizar la quinta columna y vamos a trabajar como pivote el número 1. Con ese 1 ¿a quiénes vamos a hacer 0? Con el 1 hagamos 0 al -2 y al 5, las otras filas quedan iguales, entonces ¿con qué remplazo la fila 2? Sería.... $f_2 \rightarrow f_2 + 2f_3$ *para hacer 0 el -2 y aquí sería* $f_5 \rightarrow f_5 - 5f_3$
Entonces las otras filas no cambian

$$\begin{array}{l} \\ f_2 \rightarrow f_2 + 2f_3 \\ \\ \\ f_5 \rightarrow f_5 - 5f_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -20 & 2 & 2 & -14 & 0 \end{vmatrix}$$

Como sabemos ya que cualquiera de los otros elementos multiplicado por el determinante del menor respectivo va a dar 0, ya todo se reduce a este 1. Ese 1 queda como factor, como es un 1 lo vamos a poner para que nos demos cuenta que vamos a ir llevando ese factor siempre, está claro que el +1 no va a variar ninguna cosa. Si fuese otro número hay que mantenerlo hasta el final y al final multiplicamos por lo que Corresponda
Bueno queda el 1 y eliminamos así mismo todos los elementos de la misma fila y la misma columna, entonces ¿qué nos queda?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -20 & 2 & 2 & -14 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -20 & 2 & 2 & -14 \end{vmatrix}$$

Quiero que observen aquí un momento, esto de aquí que es una propiedad de los determinantes, ¿qué hacías tú cuando tenías una matriz como esta?, ¿Qué hacías con este escalar?

$$2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

E: *Hay que multiplicarlo*

P: *Hay que multiplicarlo por cada uno de los elementos de la matriz, eso era cuando trabajábamos con matrices.*
Cuando trabajamos con determinantes, suponiendo que este es un determinante, ¿cuánto vale?

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$$

Si hay un escalar aquí, como el que estamos colocando allí, entonces este dos iría en esta parte

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(8 + 3) = 2(11) = 22$$

Entonces ¿qué significa este 2 que está allí?

Ese 2 afecta no como en las matrices que afectaba a todos los elementos, afecta solamente a una fila o a una columna. Por ejemplo: si yo quisiera multiplicar este escalar por el determinante, multiplicamos por la primera fila y colocamos 4 y -2, la otra fila queda igualita, entonces resolviendo esto 16 +6 = 22

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6 = 22$$

Anote bien eso, un escalar al multiplicarse por un determinante, ese escalar solo multiplica a una fila o a una columna, o sea, no a todos los elementos, esa es una de las propiedades también. Entonces ¿qué puede hacer aquí en este caso? Puedo sacar el factor común, si yo saco factor común de una fila, lo pongo aquí como factor del determinante y regreso a lo que tenía al principio

$$2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

O sea, yo puedo sacar un factor común de una sola fila y lo coloco como cofactor del determinante

Esa es una cosa importante que hay que saber, no es lo mismo trabajar con determinantes que trabajar con matrices

Ahí en esa matriz que tenemos, ¿qué podemos hacer por ejemplo? Si ven ustedes la última fila, ¿qué pasa ahí? ¿qué pasa en la última fila, hay un -20, 2, 2 y -14, ¿qué tienen ahí?, hay un factor común, ¿cuál es el factor común?

E: *2*

Si yo saco el factor común de esto lo debo colocar acá como escalar que multiplica a toda la matriz. Vamos a sacar ese factor común, eso nos permite trabajar con números pequeños dentro del determinante y se nos hacen un poquito más fáciles las operaciones, usted se da cuenta que quedan números mucho más accesibles, nos facilita el manejo

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -10 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

Ahora sí, ¿que elemento tomamos como pivote para hacer cero a una fila o a una columna a excepción del pivote?

Tenemos varias opciones, por ejemplo,

puedo tomar este 1 como pivote o puedo tomar yo este 1 como pivote o puedo tomar este 1 como pivote porque tengo ceros en esas columnas. ¿Con cuál trabajamos? Una cosa que también podemos hacer para no complicarnos es trabajar con los signos positivos del determinante, trabajemos con el cofactor que sea positivo siempre. Usted es el que hace el manejo de la operación, entonces usted resuelve y toma lo que mejor le conviene, la cosa está en que se haga el trabajo más fácil y se lo haga bien. Entonces trabajemos con este

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -10 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

Entonces como es signo positivo ahí, el 2 que queda fuera se mantiene con el mismo signo, nos tocaría sacar el factor que está ahí, saque 1, recuerde que antes teníamos un 1, este 1 debería estar acá aparte, este 2 es el factor común que sacamos aquí, no se lo elimina, se lo mantiene hasta el final (1)(2)(1)

Primero hagamos la operación. La segunda fila se mantiene igual. La primera fila ¿con qué la remplazamos? Fila 1 la remplazo por $f_1 -2f_2$, entonces hagamos eso.

Vamos con la fila 3, la fila 3 no hay problema, ya tiene el 0 y la otra está fácil, fíjate bien, se nos hace mucho más fácil así $f_4 \rightarrow f_4 -f_2$, *solamente la Restamos*

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 -2f_2 \\ \\ \\ f_4 \rightarrow f_4 -f_2 \end{array} \qquad (1)(2)\begin{vmatrix} -11 & 0 & -3 & -13 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -16 & 0 & 1 & -14 \end{vmatrix}$$

Y ahora sí, el 1 que estaba al principio, el 2 que sacamos de factor común y ahora sí este 1 y colocamos ahí el determinante ya reducido eliminando la fila y la columna. Y ya tenemos un determinante 3x3

$$= \qquad (1)(2)(1)\begin{vmatrix} -11 & -3 & -13 \\ -1 & 2 & -1 \\ -16 & 1 & -14 \end{vmatrix}$$

Uno si quiere puede trabajar el determinante o simplemente resolverlo, pero si todavía tú quieres utilizar otra vez las operaciones elementales podemos hacer 0 el 2 y -3 y trabajar con el 1. Vamos a hacer eso, vamos a utilizar ese 1 para hacer 0 el 2 y el -3, vamos a remplazar la $f_2 \rightarrow f_2 -2f_3$ y la $f_1 \rightarrow f_1 +3f_3$, la fila 3 queda igualita:

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 +3f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 -2f_3 \end{array} \qquad =(1)(2)(1)\begin{vmatrix} -59 & 0 & -55 \\ 31 & 0 & 27 \\ -16 & 1 & -14 \end{vmatrix}$$

Ahora sí ya finalmente pues no, el 1, el 2 que fue factor común, el 1 y aquí ¿qué signo lleva?

E: *Menos*

El determinante es -59, -55, 31, 27. Entonces aquí resolvemos, como hay un negativo, factor negativo. Ese es el determinante de, este es el valor de este determinante

$$=(1)(2)(1)(-1)\begin{vmatrix} -59 & -55 \\ 31 & 27 \end{vmatrix} =-224$$

En computadoras se resuelven determinantes de 25x25, mete los datos y ya

Les he traído un pequeño trabajo, la hoja de ejercicios Nº5

Una aclaración, en el primer ejercicio dice calcule el determinante utilizando un desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila, eso es lo que estuvimos haciendo. Luego dice que del 1 al 4, calcule el determinante aplicando un desarrollo por cofactores y bajando por la segunda columna.

En la parte derecha, del 9 al 14, mediante el desarrollo de cofactores- En cada paso, elija la fila o columna que implique la menor cantidad de cálculos.

O sea, siempre esa es la recomendación, usted siempre elija el camino *más sencillo, no busque complicaciones innecesarias, los mismos problemas te plantean determinantes que tienen muchos ceros, entonces tú buscas el camino más corto.*

En otro ejercicio deberán enunciar la propiedad de los determinantes que corresponde.

Hay una, esa propiedad en la que tú sumas, la que sacamos factor común o la que multiplicas por un escalar no pasa nada, ¿qué pasa por ejemplo con este determinante?

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 – 4 = 2$$

Si yo pongo la fila primera como segunda y la segunda como primera, ¿qué pasó?, cambió el signo, o sea, aquí sí afecta el cambiar una fila por otra, si yo cambio una fila por otra la consecuencia es que cambia el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 – 6 = -2$$

¿Qué pasa si tengo?

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 – 6 = -2$$

Si cambias el orden, un par de columnas, cambia también el signo del determinante. Insisto yo que no es lo mismo que en las matrices, en los determinantes sí tiene importancia el cambio ese, cambia el signo simplemente. Otra propiedad de los determinantes es que si hay una fila o una columna que sean todos ceros, el determinante es 0, si todos son ceros el determinante es cero

De los ejercicios 5 al 10 dice reduzca hasta la forma escalonada cada uno de los determinantes, eso usted ya lo sabe hacer. Del 11 al 14 hacer todos estos pasos que hemos desarrollado hoy. A partir del 15 al 20 eso déjelo todavía pendiente y a partir del 21 al 23 utilice determinantes para averiguar si una matriz es invertible. Una matriz es invertible si su determinante no es igual a 0, es decir, si su determinante es diferente de 0, entonces usted lo único que hace es comprobar si el determinante no vale 0 entonces en ese caso la matriz es invertible, en caso de que el determinante salga 0 la matriz no es invertible.

Trabaje, si hay alguna duda me la hace llegar

¿Alguien tiene dudas en cuanto a los signos en cada sitio para los cofactores? Hay una formulita, es $(-1)^{i+j}$, el número de filas más el número de columnas, está ahí para que lo recuerden, al final queda una cosa como esta

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & + & - & + \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Recuerda que solo el primero es positivo y luego los signos van alternados, entonces no hay cómo equivocarse

Un signo les puede cambiar todo el resultado. Otra cosa importante es saber leer la orden (enunciado) y ejecutarla tal como dice.

Lo único que no hay que resolver es el 24, 25 y 26

ANEXO 3. Entrevista 2 realizada a Jordy

1. **¿Qué métodos emplea usted para saber que han aprendido (matrices)?**

Una de las cosas que siempre les digo a los jóvenes es que al momento de resolver una evaluación es donde demuestran que han captado, que dominan el contenido, el conocimiento. La evidencia de que se ha captado el conocimiento es en los talleres y las lecciones y también cuando hablan, al momento de expresarse, de explicar alguna cosa, si lo que están hablando y explicando es claro y va con el proceso que debe ser, ahí está demostrando el conocimiento.

2. **¿Qué dificultades experimentó durante el desarrollo de la clase?**

Una de las cosas que me parece a mí que les afecta o les dificulta, siempre cuando tienen algún vacío de lo que ya debe saber el chico. Por ejemplo, hay unos temas que requieren el conocimiento de encontrar unas ecuaciones sencillas: de primer grado, de segundo grado; que si no saben ese contenido anterior continuar con lo que requieren ahora se les hará un poquito complicado.

3. **¿Cómo evalúa o verifica que se hayan alcanzado los objetivos de aprendizaje planteados?**
4. **¿Han tenido todos los estudiantes oportunidad de participar con preguntas y respuestas sobre el tema de la clase?**

Todos pueden preguntar, el tema es si lo hacen, uno siempre les da oportunidad de preguntar, pero hay unos que preguntan pero lo que ocurre siempre es que en los talleres que estamos haciendo en clase, si alguien no entiende algo y no me quiere preguntar a mí por cualquier cosa tiene al compañero con que se consulta y van ahí comparando las respuestas o los procesos. Yo creo que hay la oportunidad porque no todos preguntan al profesor, algunos sí que llaman y aclaran cualquier duda pero hay otros que no lo hacen por cuestiones personales ya.

5. **¿Considera que se alcanzaron los objetivos propuestos para la clase?**

Según lo que arroja el resultado de la evaluación, en su mayoría sí.

6. **¿Cree que se han trabajado bien los aspectos principales del contenido? ¿Qué aspectos y por qué? ¿Cree que en general los alumnos lo han comprendido?**

Yo al menos con los resultados que he tenido, me quedo no así muy alegre y feliz pero sí satisfecho por la mayoría. Nos falta la parte esta de problemas, cómo planteamos un problema en una matriz o cómo resolvemos una situación aplicando los contenidos de matrices. Hasta ahora hemos trabajado todo lo que es operaciones, la parte de inversa, resolución de sistemas y bueno ya mezclando un poco las operaciones para cálculo de determinante. La lección arroja que sí han comprendido los temas

7. **¿Cree indispensable que los estudiantes conozcan la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos? ¿Por qué?**

Siempre es necesario que se entienda de dónde viene cada cosa, incluso para poder entender algo es necesario que lo sepan, ahora nos toca trabajar con vectores y luego con otros contenidos que tienen como base las matrices y ahí se necesita o se requiere que se pueda ver qué es lo que ocurre, porque este contenido es importante para lo que viene después en cuestiones de cálculo y ecuaciones diferenciales y ellos necesitan tener bases, que puedan ir viendo lo que ocurre en la parte de la resolución de ejercicios y luego que puedan verlo en la gráfica o representación. Eso para mí es importante porque de lo contrario no se entiende, o sea se sabe resolver pero no se sabe para qué sirve o cómo se evidencia ese tipo de conocimiento.

Cuando vemos el determinante por ejemplo, en el caso de las matrices, yo generalmente lo digo, o sea si vamos a resolver un sistema de ecuaciones lineales digo que antes vimos el determinante y que precisamente esos conocimientos los podemos emplear aquí para encontrar las incógnitas, de alguna manera hago una conexión.

8. **¿Qué criterios considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para abordar un tema de matrices? Por ejemplo, en el caso del producto de matrices**

Al menos como criterio general siempre comienzo por cuestiones más sencillas. Otros colegas comienzan con ejercicios más complicados porque tienen un criterio, si alguien ya entendió lo más difícil pues lo más fácil ya está superado. Pues yo al menos toda la vida he pensado al revés, comenzamos por lo más sencillo y luego eso permite ir generalizando si quieres o ampliando el tema para ir profundizando y complicando más el asunto.

9. **¿En base a qué criterios escoge usted los ejercicios sobre matrices que les dejará de tarea para que practiquen?**

Para que practiquen principalmente que tengan todas las variantes de lo que se ha trabajado para justamente verificar si se captó o no lo que se plantea en clases.

10. **¿Cómo sabe que un estudiante aprendió o captó la clase?**

Primero, en clase se explica y hay unos espacios de talleres. Si yo veo que un chico está trabajando allí y está haciéndolo correctamente pues está claro que sí entendió y mucho más todavía si alguien le pregunta y él le explica al compañero lo que está haciendo o le explica cómo hacerlo. Si él es capaz de explicar lo que está haciendo o cómo se debe hacer un proceso pues es una evidencia que sí ha aprendido y luego en las lecciones, yo creo que eso también es un indicador importante porque la lección tiene sus pro y sus contra, pero yo más creo que tiene pro porque la lección puede hacer que el estudiante se ponga tenso pero yo creo que justamente en esos momentos de tensión y de presión es cuando se demuestra que alguien sabe realmente. Me parece a mí que es un momento y un espacio importante para que la gente demuestre que aprendió. Justamente ahí bajo presión, con un tiempo determinado, con unas exigencias, con unas limitaciones también de no tener acceso a apuntes, pues yo creo que ahí son como las claves.

11. **¿Qué mejoraría en el desarrollo de sus clases para contribuir al aprendizaje de los estudiantes?**

Lo que intentaría hacer es seguir recordando de alguna forma la parte que no se ha captado bien. Lo interesante es que todo eso que se ha ido viendo se va profundizando a medida que se van abordando los temas de la unidad de aprendizaje (asignatura).

12. **¿Ha mejorado el desempeño de sus estudiantes con la aplicación de talleres (ejercicios previamente elaborados por el profesor y desarrollados por los estudiantes después que el profesor ha explicado la clase) en sus clases como estrategia didáctica? ¿Por qué?**

Siempre el hecho de hacer un taller, le permite al joven revisar un contenido y si algo no recuerda porque la memoria es frágil tiene la oportunidad de volverlo a estudiar y de ya captarlo de manera definitiva para que no se le olvide. La otra oportunidad que dan los talleres es que se puede consultar con el mismo profesor o con los compañeros, o sea, hay muchas opciones en los talleres que permiten a un estudiante mejorar en sus estudios. De ley habrá alguna que no aproveche esa oportunidad porque para mí el taller es una oportunidad de que uno perfeccione lo que ya sabe o lo que sabe un poco para que mejore su conocimiento o el dominio del tema

ANEXO 4. Transcripción de sesiones de clases de Jordy (Año 2 de observaciones)

Sesión 1 (09-11-2012): Clasificación de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

Línea		Transcripción
1	P:	*La idea ahora es exponer las clases de matrices, para que cada uno sepa*
2		*el concepto, la forma que tiene y si acaso algún grupo trajo algo*
3		*preparado haremos algún ejercicio porque para la siguiente clase*
4		*haremos un taller*
5		*Ahora nos vamos a centrar en la parte conceptual, si hay alguna*
6		*Pregunta para el compañero o el grupo que está exponiendo deben*
7		*hacerla porque les debe quedar claro cada concepto, ese es parte de su*
8		*trabajo personal, saber explicar con claridad el tema que exponen, yo*
9		*no repetiré el tema*
10		*Pueden comenzar la exposición*
11	E:	*Tenemos aquí la matriz fila. Decimos que la matriz fila es…..*
		(La clasificación de matrices es expuesta por los grupos 1 y 2 sin intervención del profesor)
12	P:	*Vamos ahora sigue el grupo 3*
13	E:	*La matriz triangular superior es…*
		(Continuación de la clasificación de matrices por el grupo 3)
14	P:	*La matriz simétrica es aquella donde los elementos opuestos a la*
15		*diagonal principal tienen el mismo valor, con el mismo signo.*
16		*Ahora la antisimétrica, ¿qué pasa con los elementos que están ubicados*
17		*en el mismo sitio?*
18		*Tienen el mismo valor a ambos lados de la diagonal principal pero*
19		*con diferente signo*
20		*¿Cuándo una matriz es invertible? Cuando tiene matriz inversa*
21		*¿Cuál es la conjugada de 2+i?*
22	E:	*2-i*
23	P:	*¿Qué es lo que le cambia?*
24		*El signo a la parte imaginaria. La parte real se queda igual, lo que*
25		*cambia es el signo de la parte imaginaria*
26		*La singular no tiene matriz inversa*
27		*¿Por qué no tiene matriz inversa?*
28	E:	*Porque el determinante es igual a 0*
29	P:	*Porque el determinante es igual a 0*
30		*Esa es la matriz singular o degenerada*
31		*La matriz unitaria es la matriz identidad*
32		*Las matrices iguales son las que tienen la misma dimensión y los*
33		*elementos colocados en el mismo sitio y con el mismo valor*
34		*Cuando la inversa coincide con la traspuesta, esa es la*
35		*matriz ortogonal*
36		*Tenemos ahora el sistema, por ejemplo 2x-3y=5; 3x+9y=-7*
37		*Resuélvalo por el método de suma y resta, eliminen la x, es una*
38		*sugerencia, pero usted lo puede resolver como crea conveniente*
39		*Pase usted y lo resuelve*
40	E:	*y sale -29/27*

P: *Ya, ¿cuánto te da x?*
Ha multiplicado la ecuación 1 por 3 y la ecuación 2 por (-2).
Para obtener el valor de x, ¿qué tocaría hacer ahí?
E: *Reemplazar*
P: *Aquí tocaría reemplazar, voy a poner aquí el número 3*
$(3)y=-29/27$
entonces reemplazar 3 en (1) $2x-3y=5$ *o en (2)* $3x+9y=-7$
y ahí obtendríamos el valor de x, que ¿cuánto sale?
E: *8/9*
P: $x= 8/9$
Vamos a aprender a resolver este sistema de otra forma.
Lo que se va a explicar ahora es necesario que se lo maneje bien
porque lo vamos a utilizar en el tema que sigue
El asunto está en hacer exactamente lo mismo, tienen a ecuación (1) y
de la (2) vamos a eliminar este término (3x) ayudados de la ecuación (1)
Voy a escribir el sistema nuevamente y a realizar las operaciones
Entonces como lo que quiero anular es 3x, entonces, la primera fila, que
podemos llamar también renglón o primera ecuación del sistema la
vamos a reemplazar. Multiplicaremos por tres la primera fila y por -2 la
fila dos. Como hizo su compañero, lo que vamos a hacer es la fila 2 la
voy a reemplazar por $-2f_2 +3f_1$
Y reemplazamos

$$\begin{array}{ll} & 2x-3y=5 \\ & \underline{3x+9y=-7} \\ & 2x-3y=5 \\ f_2 \rightarrow -2f_2+3f_1 & 0-27y= \end{array}$$

Si ve que va coincidiendo con lo que hizo su compañero, lo que él
hizo lo estamos haciendo ahora acá, pero la única cosa es que
Ahora estamos haciendo todo esto para obtener una fila que estamos
colocando como la segunda ecuación del mismo sistema
Seguimos aplicando lo mismo para y
Ahora trabajamos con el término independiente
Entonces aquí tenemos otra cosa importante, aquí tenemos otro sistema
de ecuaciones, este es otro sistema, pero este sistema es equivalente al
primero, o sea, los dos tienen la misma respuesta, vamos a ir generando
sistemas equivalentes
El 0 lo puse ahí para que visualice pero se puede borrar
Ahora yo quiero que donde está el -27 quede 1, ¿qué hago?
E: *Divide para -27*
P: *O divide para -27 o multiplica por*
E: *Por -1/27*
P: *Eso por -1/27, entonces la fila 1 va a quedar igualita. A la fila 2, como*
yo quiero que aquí donde está el -27 sea 1 positivo porque así ya
encuentro el valor de y, entonces yo multiplico la fila 2 por -1/27. Yo
puedo multiplicar toda la fila por la cantidad que yo desee y la ecuación
sigue siendo la misma

$$\begin{array}{ll} & 2x-3y=5 \\ & \underline{3x+9y=-7} \\ & 2x-3y=5 \\ f_2 \rightarrow -2f_2+3f_1 & \underline{0-27y=29} \end{array}$$

$2x-3y=5$

$f_2 \rightarrow -1/27 \qquad y= -29/27$

83 *Entonces nos da 1 y 29 y tenemos otro sistema*
84 *de ecuaciones pero es equivalente a este y al de acá también*
85 *Vamos aplicando operaciones combinando las filas o simplemente*
86 *multiplicando la ecuación que yo considere por un escalar cualquiera*
87 *Ahora yo quiero aquí dejar solamente la x en la primera fila*
88 *¿a quién tengo que anular?*
89 E: *Al 2*
90 P: *No, antes que al 2*
91 E: *A y*
92 P: *Tengo que anular al término que tiene y entonces ¿qué debo hacer a la*
93 *fila 1 ayudándome de la fila 2 para que ahí quede 0?*
94 E: *Lo multiplicamos por 1/3*
95 P: *No*
96 E: *A la fila 2 la multiplico por 3*
97 P: *Eso*
98 E: *Fila1 + 3 fila 2*
99 P: *Por eso me pareció conveniente comenzar resolviendo el sistema por el*
100 *método de adición y sustracción para que usted recuerde y pueda*
101 *resolverlo también con operaciones elementales entre filas que son*
102 *útiles cuando trabajamos con matrices*
103 *Ahora sí*

$2x-3y=5$
$3x+9y=-7$

$f_2 \rightarrow -2f_2 +3f_1 \qquad 2x-3y=5$
$0-27y=29$

$f_2 \rightarrow -1/27 \qquad 2x-3y=5$
$y= -29/27$

$f_1 \rightarrow f_1 +3f_2 \qquad 2x+0=16/9$
$y= -29/27$

104 *La segunda fila queda igualita y tengo otro sistema equivalente a los*
105 *anteriores, entre ellos son equivalente porque han sido producto de*
106 *combinaciones entre sus filas, sus ecuaciones en este caso*
107 *¿Qué falta para encontrar el valor de x?*
108 E: *La multiplica por 1/2*
109 P: *Entonces la fila 1 la reemplazo por*
110 E: *1/2fila1*
111 P: *Entonces*

$2x-3y=5$
$3x+9y=-7$

$f_2 \rightarrow -2f_2 +3f_1 \qquad 2x-3y=5$
$0-27y=29$

$f_2 \rightarrow -1/27 \qquad 2x-3y=5$
$y= -29/27$

$f_1 \rightarrow f_1 +3f_2 \qquad 2x+0=16/9$
$y= -29/27$

$f_1 \rightarrow 1/2f_1 \qquad x \quad =8/9$
$y=-29/27$

112 *Y tenemos la solución*

Le interesa a usted aprender a manejar estas operaciones entre filas, para programar y para ver todos los temas que vienen después Una sugerencia, en caso de que hubiera en una de las dos ecuaciones un uno, si estuviera en la segunda fila se la puede cambiar también. Tiene ahora este otro sistema 5x-3y=-1; x+4y=3 ¿Qué es lo primero que se puede hacer ahí?

E: *Cambiar las filas*

P: *¿Por qué conviene cambiar las filas, la primera por la segunda?*

E: *Porque en la segunda ecuación la x tiene coeficiente 1*

P: *Entonces nos conviene que el 1 esté al inicio. La fila 1 la vamos a intercambiar con la fila 2*

$$\begin{array}{ll} & 5x-3y=-1 \\ & x+4y=3 \\ \hline f_1 \to f_2 & x+4y=3 \\ & 5x-3y=-1 \end{array}$$

y nos queda el sistema que también es equivalente al primero

E: *En esos casos entonces cuando hay coeficiente 1 se cambia, ¿si tuviera por ejemplo un 3 queda igual?*

P: *Ahí no conviene, tiene que buscar la conveniencia suya para poder Operar*

E: *Pero cuando el 1 está solamente en la segunda ecuación, ¿si estuviera en la primera ya no?*

P: *Si está en la primera fila ya lo dejas ahí. ¿Cómo hago para eliminar 5x? porque ese es el plan ahora, entonces la primera fila queda igual pase usted a eliminar 5x*

E: $f_2 \to -1/5f_2 + f_1$

P: *De esa forma está bien pero trabaje mejor con números positivos para no complicarse con las operaciones, el asunto es que fila 2 tiene 5, entonces ¿qué le vas a hacer a esa para eliminarla utilizando la primera? Escriba primero fila 2 después de la flecha escriba la fórmula, fila 2 menos 5 fila 1*

E: *Nos quedaría*

$$\begin{array}{ll} & 5x-3y=-1 \\ & x+4y=3 \\ \hline f_1 \to f_2 & x+4y=3 \\ & 5x-3y=-1 \\ \hline & x+4y=3 \\ f_2 \to f_2 -5f_1 & 0-23y=-16 \end{array}$$

P: *Muy bien ¿Cuál es el siguiente paso?*

E: *Que la y quede con 1 positivo, o sea fila 2 es igual a -1/23 fila2*

P: *Ya, pase y hágalo*

P: *Lo que iba a hacer su compañero de* $f_2 \to -1/5f_2 + f_1$ *no es que estaba mal, pero nos complicamos un poco el asunto porque tenemos que ir trabajando con un número fraccionario cada vez Yo le dije cambie la fórmula no porque estaba mal sino por conveniencia*

E: *Decimos que* $f_2 \to -1/23f_2$

$$\begin{array}{l} 5x-3y=-1 \\ \hline \end{array}$$

	$x+4y=3$
$f_1 \rightarrow f_2$	$x+4y=3$ $5x-3y=-1$
$f_2 \rightarrow f_2 - 5f_1$	$x+4y=3$ $0-23y=-16$
$f_2 \rightarrow -1/23f_2$	$x+4y=3$ $y=16/23$

152 P: *Nos falta ahora encontrar el valor de x*
153 *¿Con cuántos pasos más encontramos el valor de x?*
154 *¿Qué tenemos que hacer para encontrar el valor de x?*
155 E: *Que el valor de 4y quede 0*
156 P: *Muy bien, ¿qué operación aplicamos?*
157 *Vamos a reemplazar* f_1, f_1 *la reemplazo por* f_1-4f_2
158 *Pase a terminar de resolver*
159 E: *Tendríamos*

	$5x-3y=-1$ $x+4y=3$
$f_1 \rightarrow f_2$	$x+4y=3$ $5x-3y=-1$
$f_2 \rightarrow f_2 - 5f_1$	$x+4y=3$ $0-23y=-16$
$f_2 \rightarrow -1/23f_2$	$x+4y=3$ $y=16/23$
$f_1 \rightarrow f_1 - 4f_2$	$x+0=5/23$ $y=16/23$

160 P: *La tarea para el fin de semana , resolver los siguientes sistemas*
161 *3x-2y=7; 8x+5y=14*
162 *4x+6y=4; 3x+3y=2*
163 *5x-4y=7; -4x+7y=12*

Sesión 2 (23-11-2012): Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 y 4 incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

Línea		Transcripción
1	P:	*Hoy vamos a resolver sistemas de ecuaciones con matrices 3 x 3 y 4x4 y*
2		*al final resolvemos un problema*
3		*Vamos a resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas*
4		*aplicando operaciones elementales entre filas.*
5		*Escriban este sistema 3x-2y+5z=-3; 2x+3y-3z=5; -4x+3y-z=-6*
6		*Tomamos una fila y con el primer elemento de la ecuación nos*
7		*ayudamos para hacer 0 los mismos elementos de*
8		*las otras dos ecuaciones.*
9		*Entonces el 3 sería el pivote y con él vamos a hacer 0 este 2x y -4x*
10		*utilizando operaciones elementales entre filas*
11		*La fila del pivote se mantiene intacta pero la filas 2 y 3 van a ser*
12		*alteradas porque queremos tener 0 en los coeficientes de x. ¿Qué*
13		*operación haré con la fila 1 y la fila 2 para que el 2x se convierta en 0?*
14		*Si tengo 3 y 2 ¿cuál es el número común?*

E: *El 6*

P: *Entonces, esto lo hago 6 multiplicando por 2 y esto lo hago 6 multiplicando por 3. La fila 1 la multiplico por dos y a eso le voy a restar 3 fila 2, mejor lo ponemos al revés 3 fila 2 – 2 fila 1*

$$\begin{array}{l|l} & 3x-2y+5z=-3 \\ & 2x+3y-3z=5 \\ & -4x+3y-z=-6 \\ \hline f_2 \rightarrow 3f_2 - 2f_1 & 3x-2y+5z=-3 \\ & 0+19y-19z=21 \end{array}$$

Ahora ¿cómo reemplazamos la fila 3? Los coeficientes son -4 y 3 entonces ¿el mínimo común es?

E: *12*

P: *Entonces nos queda* $f_3 \rightarrow 3f_3 + 4f_1$

$$\begin{array}{l|l} & 3x-2y+5z=-3 \\ & 2x+3y-3z=5 \\ & -4x+3y-z=-6 \\ \hline f_2 \rightarrow 3f_2 - 2f_1 & 3x-2y+5z=-3 \\ & 0+19y-19z=21 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 + 4f_1 & 0+y+17z=-30 \end{array}$$

Ya este pivote cumplió su labor de hacer 0 todos los elementos que estaban debajo de él, entonces ya él deja de ser pivote.
¿Ahora cuál es el pivote?

E: *El 19*

P: *Ahora es el pivote el primer elemento de la segunda fila. Hay que hacer 0 la y que está solita. Una cosa que hay que recordar, este nuevo sistema de ecuaciones es equivalente al de arriba*
¿Qué significa que son equivalentes?
Que las soluciones para este sistema son las mismas que para el de arriba
Entonces la primera ecuación queda igual, la segunda que es donde está el pivote la puede escribir sin el 0, hay 0x, hay que hacer 0 la y de la fila 3.
Entonces tenemos $f_3 \rightarrow 19f_3 - f_2$

$$\begin{array}{l|l} & 3x-2y+5z=-3 \\ & 2x+3y-3z=5 \\ & -4x+3y-z=-6 \\ \hline f_2 \rightarrow 3f_2 - 2f_1 & 3x-2y+5z=-3 \\ & 0+19y-19z=21 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 + 4f_1 & 0+y+17z=-30 \\ \hline & 3x-2y+5z=-3 \\ & \quad 19y-19z=21 \\ f_3 \rightarrow 19f_3 - f_2 & \qquad 0+342z=-591 \\ \hline \end{array}$$

A*hí ya está resuelto. ¿Cómo encontramos el valor de z?*

E: *Despejando*

P: *Después ese valor lo reemplaza en la segunda y saca el valor de y, luego esos dos valores los reemplaza en la primera y saca el valor de x.*
Pero bueno, nosotros los resolveremos con las operaciones elementales entre filas. Ahora iremos de abajo hacia arriba, este va a hacer de pivote y con la fila 3 hacemos 0 las z de las filas 1 y 2
¿La que no cambia cuál es?

45 E: *La tercera fila*
46 P: *Eso, la fila dos va a ser reemplazada por $18f_2 + f_3$*
47 *Ahí está el valor de y. Ahora fila 1, 342 fila1 menos 5 fila 3*

	$3x-2y+5z=-3$
	$2x+3y-3z=5$
	$-4x+3y-z=-6$
$f_2 \rightarrow 3f_2 - 2f_1$	$3x-2y+5z=-3$
	$0+19y-19z=21$
$f_3 \rightarrow 3f_3 + 4f_1$	$0+y+17z=-30$
	$3x-2y+5z=-3$
	$19y-19z=21$
$f_3 \rightarrow 19f_3 - f_2$	$0+342z=-591$
$f_1 \rightarrow 342f_1 - 5f_3$	$1026x-684y+0=1929$
$f_2 \rightarrow 18f_2 + f_3$	$342y+0=-213$
	$0+342z=-591$

48 *¿Ahora a quién hay que hacer 0?*
49 E: *A la y*
50 P: *Y el pivote es 342 ¿Por cuánto hay que multiplicar?*
51 E: *Sería fila 1 más 2 fila 2*
52 P: *Eso*

	$3x-2y+5z=-3$
	$2x+3y-3z=5$
	$-4x+3y-z=-6$
$f_2 \rightarrow 3f_2 - 2f_1$	$3x-2y+5z=-3$
	$0+19y-19z=21$
$f_3 \rightarrow 3f_3 + 4f_1$	$0+y+17z=-30$
	$3x-2y+5z=-3$
	$19y-19z=21$
$f_3 \rightarrow 19f_3 - f_2$	$0+342z=-591$
$f_1 \rightarrow 342f_1 - 5f_3$	$1026x-684y+0=1929$
$f_2 \rightarrow 18f_2 + f_3$	$342y+0=-213$
	$0+342z=-591$
$f_1 \rightarrow f_1 + 2f_2$	$1026x-0+0=1503$
	$342y+0=-213$
	$0+342z=-591$

53 *Entonces ¿qué operaciones toca hacer?*
54 E: *Despejar*
55 P: *Despejar sería si las trabajamos como ecuaciones, aquí para utilizar las*
56 *operaciones lo que se hace es multiplicar 1/1026 por fila 1,*
57 *la fila 2 la reemplazo por 1/342 por fila 2, y 1/342 fila 3.*
58 *Nos queda*

$f_1 \rightarrow 1/1026f_1$	$x = 167/114$
$f_1 \rightarrow 1/342f_1$	$y = -71/114$
$f_3 \rightarrow 1/342f_3$	$z=-197/114$

59 *Ahí tenemos la solución del sistema.*
60 *Suponga que por ejemplo aquí tuviese un 0* (refiriéndose al 3x)*, una de*
61 *las operaciones sería cambiar esta ecuación porque aquí arriba debe*
62 *haber un número que no sea 0 para poder hacer 0 al resto. Eso también*
63 *se puede hacer. Usted toma como pivote un número de la x, después que*
64 *tiene 0 toma como pivote un coeficiente de y, así mismo uno de z*

65 E: *¿El procedimiento es independiente cuando hay incógnitas con 0?*
66 *¿O sea siempre va a ser el mismo no importa que haya 0?*
67 P: *Claro, si son dos, tres, cuatro o cinco incógnitas es el mismo*
68 *Si tú ves esto como una matriz ¿qué clase de matriz sería?*

$$\begin{aligned} &3x-2y+5z=-3\\ &19y-19z=21\\ &0+342z=-591 \end{aligned}$$

69 E: *Triangular superior*
70 P: *Sí y ¿luego viene?*

$$\begin{aligned} &x \qquad\qquad = 167/114\\ &\qquad y \qquad = -71/114\\ &\qquad\qquad z=-197/114 \end{aligned}$$

71 E: *Matriz diagonal*
72 P: *No, esta es una matriz diagonal*

$$\begin{aligned} &1026x-0+0=1503\\ &342y+0=-213\\ &0+342z=-591 \end{aligned}$$

73 *Esta ¿cuál sería?*

$$\begin{aligned} &X \qquad\qquad = 167/114\\ &\qquad y \qquad = -71/114\\ &\qquad\qquad z=-197/114 \end{aligned}$$

74 E: *Matriz identidad*
75 P: *Ese es el proceso y es importante que lo sepan porque vamos*
76 *a trabajar con esto todo el semestre*
77 *Aquí hay otro para que resuelvan* $x-2y+3z=3$; $-3x+y-2z=-1$; $4x + z=2$
78 *Pase usted a resolver. Ahí en la x yo le he colocado un 1, entonces eso*
79 *ayuda bastante. Si hay un sistema donde tienes un 1 en una x pero no*
80 *está en la primera fila, tú la puedes cambiar, teniendo un 1 ahí se*
81 *facilitan las operaciones*
82 E:

$$\begin{array}{ll} & x-2y+3z=3\\ & -3x+y-2z=-1\\ & 4x \quad +z=2\\ \hline & x-2y+3z=3\\ f_2 \rightarrow f_2 + 3f_1 & 0-5y+7z=8\\ f_3 \rightarrow f_3 - 4f_1 & 0+8y-11z=-10\\ \hline & x-2y+3z=3\\ & 0-5y+7z=8\\ \hline f_1 \rightarrow f_1 - 3f_3 & x-2y+0=-39\\ f_2 \rightarrow f_2 - 7f_3 & 0-5y+0=-90\\ & 0+0+z=14\\ \hline & x-2y \quad =39\\ & 0-5y+0=-90\\ & 0+0+z=14 \end{array}$$

83 P: *Esos 0 que coloca su compañero, los ponemos para que no se olvide,*
84 *pero si desean ya los podemos omitir*
85 *¿Ahora cuál es el pivote?*
86 E: *Este*
87 P: *¿Cuál? El pivote es un elemento ¿Cuál?*
88 E: *-5*
89 P: *-5y ese es el pivote, con ese -5y hay que hacer 0 a -2y*

90 *Aquí podemos hacer,, se da cuenta, 5 y 90 son divisibles para 5,*
91 *entonces aquí usted puede dividir para 5 y ya te queda una y.*

$0-5y+0=-90$

$0+0+z=14$

92 E:

	$x-2y \quad =39$
$f_2 \rightarrow -1/5\, f_2$	$0+y+0=18$
	$0+0+z=14$
$f_1 \rightarrow f_1 + 2f_2$	$x \quad =-3$
	$y \quad =18$
	$z=14$

93 E: *¿Antes de empezar hay que ordenar las ecuaciones si es que hay un 1*
94 *que se puede utilizar como pivote?*
95 P: *Así es, las operaciones son más sencillas si tienes ahí uno*
96 *Otro ejercicio 2y+5z=-3; 3x+z=4¸x-2y+3z=-6*
97 *Pase a resolverlo*
98 E:

	$2y+5z=-3$
	$3x+z=4$
	$x-2y+3z=-6$
$f_1 \rightarrow f_3$	$x-2y+3z=-6$
$f_2 \rightarrow f_1$	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_2$	$3x \quad +z=4$
	$x-2y+3z=-6$
	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_3-3f_1$	$0+6y-6z=22$
	$x-2y+3z=-6$
	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_3-3f_2$	$-23z=31$

99 P: *Una cosa que también se puede hacer es volver 1 al pivote, aunque ahí*
100 *le tocará trabajar con fracciones. Pueden hacer eso y ya tienen un 1 en*
101 *la z, aunque acá en el término independiente tendrás una fracción 31/23*
102 *Y te va a tocar operar con eso, pero algunos dicen que así es más fácil,*
103 *Usted haga lo que desee, yo digo lo que se puede hacer*

	$x-2y+3z=-6$
	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_3-3f_2$	$-23z=31$

104 E:

	$2y+5z=-3$
	$3x+z=4$
	$x-2y+3z=-6$
$f_1 \rightarrow f_3$	$x-2y+3z=-6$
$f_2 \rightarrow f_1$	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_2$	$3x \quad +z=4$
	$x-2y+3z=-6$
	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_3-3f_1$	$0+6y-6z=22$
	$x-2y+3z=-6$
	$2y+5z=-3$
$f_3 \rightarrow f_3-3f_2$	$-23z=31$
$f_1 \rightarrow 23f_1+3f_3$	$23x-46y+0=-45$
$f_2 \rightarrow 23f_2+5f_3$	$46y+0=86$
	$-23z=31$

$f_1 \to f_1 + f_2$

$$\begin{array}{rl} 23x+0+0=41 & f_1 \to 1/23 f_1 \\ 46y+0=86 & f_2 \to 1/46 f_2 \\ -23z=31 & f_3 \to -1/23 f_3 \end{array}$$

$x=41/23$

$y=86/46 = 43/23$

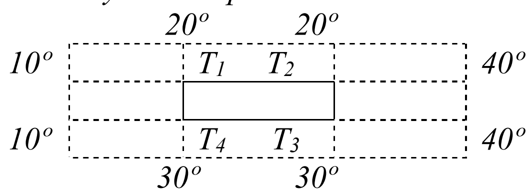
$z=41/23$

P: *Escriba este problema*

Un aspecto importante en el estudio de la transferencia de calor es determinar la distribución de la temperatura en estado estable sobre una placa delgada cuando se conoce la temperatura presente alrededor de los bordes. Suponga que la placa mostrada en la figura representa la sección transversal de una viga de metal con un flujo de calor insignificante en la dirección perpendicular a la placa. Sean T1, T2, T3, T4 las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla. En un nodo la temperatura es aproximadamente igual al promedio de los cuatro nodos más cercanos (izquierda-arriba – derecha-abajo).

a)Escriba un sistema de cuatro ecuaciones cuya solución proporcione un estimado para las temperaturas en cada nodo, b) Resuelva el sistema

Ahora dibujemos la placa, esta es metálica delgada y no recibe mayor temperatura perpendicular, o sea es una placa en el piso que no recibe mayor temperatura perpendicular y está sostenida en una malla metálica. Los 4 nodos a los que hace alusión son estos 4 puntos de intersección del medio. Tenemos T1, T2, T3 y T4, entonces dice que la temperatura en estos sitios es el promedio de los 4 nodos más cercanos y nos da la temperatura en los bordes. Por este lado tenemos una temperatura de 10º, por este borde de aquí arriba tenemos una temperatura de 20º; por el lado derecho hay una temperatura de 40º y en el lado inferior hay una temperatura de 30º



Entonces hay que plantear 4 ecuaciones, una para T1, una para T2, para T3 y T4. Te salen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, es un sistema, esa es la primera cosa que hay que hacer; resolverlo es encontrar la temperatura en cada nodo.

Lo vamos a hacer aplicando operaciones elementales entre filas

Si T1 es esto, la temperatura en cada nodo es el promedio de los 4 nodos más cercanos, ¿cómo saco el promedio?

E: *Los sumo y lo divido para 4*

P: *Eso, entonces para el T1 ¿cuáles son los 4 nodos más cercanos?*

izquierda-arriba-derecha-abajo

T1= 10+20+T2+T4 / 4

Lo sumo y lo divido para 4

¿Qué hago con este 4?

E: *Pasa a multiplicar*

P: *Pasa a multiplicar a T1*

4T1 = 30+T2+T4

4T1-T2   -T4=30

144		*Eso es una ecuación. Escriban el sistema. Cuando lo tengan me dicen*
145		*Para T2 es lo mismo izquierda-arriba-derecha-abajo, suma las cuatro y*
146		*divide para 4*
147		*La primera ecuación está ahí, ¿cuál es la segunda?*
148	E:	*-T1+4T2-T3=60*
149	P:	*La siguiente*
150	E:	*-T2+T3-T4=70*
151	P:	*¿Y la última?*
152	E:	*-T1-T3+4T4=40*
153	P:	*Vamos a resolver el sistema*
154		*¿Cuál es la primera operación que hay que hacer?*
155	E:	*Hay que colocar como primera ecuación a aquella que tenga un uno.*
156	P:	*Eso, entonces la segunda o la cuarta la colocan como primera,*
157		*resuelvan el sistema*
158		*Ahí está el sistema* *4T1-T2 -T4=30* *-T1+4T2-T3 =60* *-T2+4T3-T4=70* *-T1 -T3+4T4=40*
159		*Usted utilice las letras que desee, son incógnitas*
160		*¿Terminaron? ¿Ya encontraron alguna de las incógnitas?*
161	E:	*La respuesta de T4 es 5/2*
162	P:	*T4 es el promedio de estos 4, solo entre 10 y 30 tenemos 40 y 40 para 4*
163		*es 10, entonces no puede ser menos de 10* (refiriéndose a la respuesta de
164		T4) *porque acá hay temperaturas también. La fórmula que tienes al*
165		*principio al plantear la ecuación te da la pauta de por dónde va el valor.*
166		*Por ejemplo, ¿cuál es la temperatura mayor ahí?*
167		*De los 4 nodos, ¿cuál tendrá mayor temperatura?*
168	E:	*T3*
169	P:	*T3 porque tiene las dos mayores temperaturas cercanas*
170		*¿Cuál sería la menor temperatura?*
171	E:	*T1*
172	P:	*Claro, fíjate que ninguna respuesta puede ser menor de 10*
173		*Si usted tiene 0 donde debe tener un pivote, obligatoriamente deberá*
174		*cambiar la fila porque el pivote no puede ser 0.*
175		*Terminan de resolver el sistema en casa*

Sesión 3 (03-12-2012): Cálculo del determinante 3x3 y 4x4 por el método del menor y cofactores

Línea		Transcripción
1	P:	*Vamos a tratar ahora algo que tiene que ver o que tiene mucha*
2		*relación con las matrices, pero que se llama determinante*
3		*Ya en el semestre pasado calculamos determinantes de orden 2 y de*
4		*orden 3*
5		*Cuando teníamos una matriz de orden 2 y la resolvíamos por*
6		*determinantes calculando un valor numérico multiplicando la*
7		*diagonal principal y restándole los elementos que forman la diagonal*

secundaria, entonces ahí tendríamos el determinante de una matriz
de orden 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (2)(5) - (-4)(-1) \\ &= 10-4 = 6 \end{aligned}$$

El de orden tres ¿lo recuerdan?

E: *Sí*

P: *¿Qué métodos existen para hacerlo?*
Aumentábamos las dos primeras filas, multiplicábamos la diagonal
principal y a eso le restábamos los productos de la diagonal
Secundaria
Y siempre el determinante es un número
Vamos a ver otro método, vamos a calcular el determinante
utilizando el método de los cofactores
A esta matriz podemos reducirla si eliminamos una fila y una columna
respecto a un elemento

$$A= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, yo puedo aquí tener el menor, el menor es una submatriz,
el menor de a_{11} *se lo obtiene eliminando la fila de este elemento y la*
columna del elemento y nos queda una submatriz como esta

$$a_{11}= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál sería la submatriz del elemento a_{21}*?*
¿Cuáles son los elementos ahí?

E: *-2, -1, -1, 3*

P: *Sería*

$$a_{21}= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Y otra cosa que hay que tener en cuenta es que para cada elemento, en
la matriz hay un signo y ese signo para cada elemento de la matriz
está dado por -1 elevado a la suma de los subíndices de cualquier
elemento $a_{ij} = (-1)^{i+j}$
El signo de cada elemento está dado por esta fórmula
Por ejemplo, el primer elemento a_{11}*, ¿qué signo llevará aquí su menor?*
Para a_{11} *será* $(-1)^{1+1}= 1$
Para el elemento a_{12} *¿cuál sería el signo?*

E: *Negativo*

P: *Sería negativo* $a_{12} = (-1)^{1+2}= - 1$
¿Qué va a pasar con el siguiente número?

E: *Es positivo*

P: *¿La suma de los subíndices será?*
Par, entonces tendremos aquí un signo positivo, el siguiente número
será negativo

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Hacía abajo va a ocurrir exactamente lo mismo, van a ir
alternándose la suma de los subíndices en positivo y negativo
Entonces aquí va a quedar

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Entonces, en base a las dos ideas, a los dos conceptos, se puede
también calcular el determinante de esa matriz, combinando los dos
conceptos, vamos a tomar una fila o columna cualquiera, vamos a
calcular el determinante utilizando los menores
Si yo utilizo la primera fila debo tomar el elemento multiplicado por su
signo respectivo
El determinante de A por este método sería:
si tomo la primera fila, cada elemento con su signo y luego multiplicado
por el determinante de su menor

$$|A| = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -(-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +(-1)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Y resolvemos, no se olvide que multiplicamos cruzado y se resta el
producto de la diagonal secundaria
-6-22-5 = -33
E: *Eso es tomando la primera fila*
P: *Sí, pero tú puedes tomar la que quieras*
Ahora tomemos la tercera columna, deberá salir el mismo
determinante

$$|A| = -1\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} -(1)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +3\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Entonces nos queda -5-1-27=-33
Sale lo mismo, debe salir lo mismo, tomando cualquier fila o cualquier
columna, ese es el método para calcular un determinantes de
cualquier orden
Pasen dos estudiantes
Usted calcule el determinante utilizando la tercera fila y usted
utilizando la segunda columna
E: *Pero en caso de tener un determinante mayor, ¿se podría hacer de*
esta misma manera y dentro utilizar otras formas más?
P: *Claro, ahí se utiliza una combinación de procesos*
Bueno, comprobado que sale lo mismo, utilizando cualquier
fila o columna
Si nuestra matriz fuera 4x4, una matriz B

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces así mismo se toma la fila o la columna que cada uno considere
pero aquí hay un caso interesante. Ahí está un 0, ese 0 nos ayuda a
disminuir el grado de dificultad porque siempre vas a multiplicar el
determinante de la submatriz que te va quedando por el valor del
elemento que tomes en consideración, entonces conviene siempre tomar
una fila o una columna donde haya 0 o donde haya muchos 1 ¿Cuál fila
o cuál columna nos convendría tomar?
E: *Fila 1ó columna 2*
P: *Fila 1ó columna 2 porque hay un elemento que nos facilita las*

operaciones, vamos a utilizar la segunda columna para calcular el
determinante de B, no se olvide de los signos de los cofactores.
A este elemento (-1, segunda fila segunda columna) *lo vamos a*
multiplicar por el determinante de la submatriz que queda al eliminar su
fila y su columna y seguimos haciendo lo mismo, vaya trabajando

$$|B|=0+(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

De ahí para allá hay que desarrollar el determinante de orden 3
¿Cuántos productos salen?
E: *Seis*
P: *Salen seis, entonces sigamos*
= 0-(-1-12-8-3-4+8) – 2(-3+12-4-9+4+4) + (12-8-6-18-2-16)
= 20 -2(4) + (-38)
= -26
Como están viendo, no importa qué fila o columna se tome, el asunto es
que sale el mismo determinante
Para la próxima clase, venga consultando las propiedades
de los determinantes
Algunas propiedades coinciden con las de las matrices, pero sólo en
algunas, en otras hay diferencias
No es lo mismo una matriz que un determinante, no son la misma cosa
Calculen este determinante

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Pase usted a resolverlo
¿Con qué fila o columna va a trabajar Harry?
E: *La segunda columna*
P: *Todos los demás tomen otra fila u otra columna, no la segunda columna*
Siempre usted elija la más fácil
¿Cuánto te sale a ti?
E: *-10*
P: *Cada uno tiene su respuesta*
Por acá tiene -13
Acá otro compañero coincide con el proceso de la pizarra, también
le sale -22, es posible que esté bien
Creo que lo más fácil es trabajar con la segunda fila porque tienen
que calcular sólo dos determinantes.
E: *Está bien hecho, sale -22 el determinante*
P: *Bueno para que practique en su casa anote la matriz D*

$$D=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la matriz E

$$E=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

		-2 0 -1 -2
117		*Como es obvio debe darles lo mismo a todos.*

Sesión 4 (04-01-2013): Propiedades de los determinantes y cálculo del determinante por el método del menor y cofactores

Línea		Transcripción
1	P:	*¿Qué propiedades de los determinantes consultaron?*
2		*Vamos a calcular los determinantes aplicando las propiedades.*
3		*Empecemos, dígame las propiedades que hacen que un*
4		*determinante valga 0*
5	E:	*Cuando hay dos filas iguales*
6	P:	*Sí, eso hace que un determinante valga 0. O sea vamos a poner un*
7		*determinante de dos por dos, si las dos filas son igualitas ese*
8		*determinante vale 0*
		$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
9		*Puede ser también un determinante de orden 3*
		$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$
10	E:	*También cuando todos los elementos de una línea son nulos*
11	P:	*Cuando todos los elementos de una línea son nulos, o sea,*
12		*puede ser una fila o una columna*
		$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
13		*¿Cuándo más un determinante vale 0?*
14	E:	*Cuando la fila 3 es igual a la fila 1 más la fila 2*
15	P:	*La fila 3 es igual a la fila 1 más la fila 2*
16		*O sea tú sumas las dos filas anteriores y si te da la fila 3, entonces ese*
17		*determinante vale 0*
18		*Supongamos que la fila 3 vale 1, 2, 3 y la fila 2 vale 2, -3, 4*
		$\begin{vmatrix} & & \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
19		*¿Cuánto debe valer la fila 1 para que sumado a la fila 2 me de la fila 3?*
20	E:	*-1, 5 y -1*
21	P:	*Ya*
		$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
22		*Si tú sumas las dos primeras filas te da la tercera, entonces el*
23		*determinante allí vale 0*
24		*¿Cómo le llaman a esto?*
25	E:	*Una combinación lineal*
26	P:	*Tenga en cuenta esto porque será de utilidad cuando trabajemos con*
27		*vectores. Una combinación lineal significa que esta fila* (la tercera) *nace*

de la combinación lineal de estas dos (primera y segunda).
También es 0 el determinante cuando la diagonal principal o la diagonal secundaria valen 0
¿Qué otra propiedad consultaron?

E: *El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual al producto de su diagonal*

P: *Por ejemplo esta matriz*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Esa es una matriz triangular, ¿Cómo calcula ese determinante?

E: *Multiplicando los elementos de la diagonal principal*

P: *Sí entonces ¿cuál es el determinante de esta matriz A?*

E: *Dos*

P: *Entonces si yo le digo a usted que vamos a calcular el determinante utilizando las propiedades; si tenemos un determinante con todos sus elementos podemos hacer que se vuelva triangular con las operaciones elementales entre filas y ya podemos calcular el determinante multiplicando la diagonal principal.*
Puede ser triangular superior o inferior y también puede ser una matriz diagonal
Todo esto deben ya saberlo. ¿Qué más?

E: *Si a una matriz le intercambiamos dos filas, entonces el determinante de la primera matriz es igual al determinante negativo de la segunda*

P: *O sea cambia el signo. Esa es otra propiedad*
Si tenemos esta matriz A

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

y calculamos su determinante, ¿Cuánto da?

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

E: *11*

P: *Le cambiamos la fila a ver qué pasa*

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}$$

Debe dar ¿cuánto?

E: *-11*

P: *Ahí hay que tener cuidado entonces, cuando trabajamos con matrices decimos que las matrices son equivalentes si cambia una fila por otra. Pero si trabaja con determinantes y cambian una fila por otra, el valor del determinante cambia de signo.*

E: *Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un número real el valor del determinante no varía*

P: *O sea aplicando operaciones elementales entre filas. Usted a una fila le suma el producto de otra fila multiplicada por el número que quiera y el determinante sigue siendo el mismo*
Eso lo debemos aprender porque cuando queremos hacer una matriz triangular para calcular el determinante, esas son operaciones que vamos a hacer

Por ejemplo, vamos a cambiar la fila dos por fila dos más 2 fila 1 a ver qué pasa
Aplique esa operación y compruebe que el determinante no cambió
¿Cuánto queda la segunda fila?
E: *7 y 2*
P: *Ya*

$$f_2 \rightarrow f_2+2f_1 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

¿Cuánto queda el determinante?
E: *11*
P: *Queda igual*
Fíjate en la operación, tú tomas cualquier fila y a esa fila le sumas otra fila multiplicada por el escalar que quieras y se mantiene el determinante
E: *¿Aunque lo reste?*
P: *Sí, usted puede colocar f_2-$2f_1$ en lugar de f_2+$2f_1$ y le dará el mismo determinante*
A ver con este mismo determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

¿Qué ocurre si la fila dos la reemplazamos por 3 fila 2 menos fila 1?
E: *Sale 33*
P: *¿Seguro?*
Te va a salir lo mismo si utilizas esta

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

o esta

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

E: *El resultado es tres veces el determinante anterior*
P: *El resultado es el triple ¿Por qué será?*
E: *Porque multiplicó por tres la fila 2*
E: *Porque hemos multiplicado por tres la fila que vamos a cambiar.*
P: *Eso, aquí no cambió para nada el determinante porque la fila que íbamos a modificar la hemos multiplicado por 1*
En cambio acá la fila que vamos a modificar la multiplicamos por 3, en ese momento ¿qué le pasa al determinante?, queda multiplicado por 3

$$f_2 \rightarrow 3f_2-f_1 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} =33/3=11$$

Entonces cuando haga usted este tipo de operaciones acuérdese al final que debe dividir para 3. Cuando usted multiplica la línea que va a modificar, el determinante queda multiplicado por ese número entonces al final hay que dividir el determinante para ese número.
Ahora sigamos
Tenemos la matriz A

$$A= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

¿Se acuerda usted como se hacía esto 5A?
E: *Sí*
P: *Venga hágalo*

E: *Era así*

$$5A=\begin{bmatrix}10 & -5\\ 15 & 20\end{bmatrix}$$

P: *Ahora ¿cómo haría si tuviera esto?*

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$5|A|$

E: *Se multiplica solo por una fila o por una columna*

$$5|A|=\begin{vmatrix}10 & -1\\ 15 & 4\end{vmatrix} =55$$

Cuando usted multiplica un determinante por un escalar no se hace como cuando se trata de una matriz que se multiplica uno a uno cada elemento de la matriz, sino que se multiplica sólo una fila o una columna.

Las matrices y los determinantes son parecidas, pero tienen sus propiedades diferentes porque son dos cosas diferentes, son otra cosa

Por eso debe tener cuidado con las notaciones, que no es lo mismo un paréntesis que una barra.

Si tú quieres sumar determinantes, ¿crees que podemos sumar los elementos como en las matrices?

E: *No*

P: *Claro, no funciona igual*

E: *El 10 y el 5 son múltiplos de 5*

P: *Tú puedes decir el 10 y el 15 son múltiplos de 5, entonces voy a dividir para 5 la primera columna o puede multiplicar por 1/5*

Creo que hasta ahí tenemos las propiedades de los determinantes

Ahora vamos a calcular determinantes utilizando las propiedades.

Calcule usted el determinante

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

A ese determinante lo vamos a hacer triangular. Haga 0 todos los elementos que están aquí debajo, los tres elementos utilizando operaciones elementales entre filas

Una vez que tiene triangular calcula el determinante multiplicando la diagonal principal

A ver les facilito el trabajo

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

Haga todo lo que considere conveniente pero tenga en cuenta las propiedades

¿Cómo se llama el número que tomamos como referencia cuando empezamos las operaciones?

E: *Pivote*

P: *Pivote, vamos a tomar como pivote al 3*

Como tengo tres aquí arriba ¿cómo hago para que al sumarlo con este se haga 0, multiplico por 3 este y le resto el de acá o le multiplico este por -3 y le sumo el de acá

145 *Usted decide lo que hace, hágalo*

146 E: *Sería*

$$f_2 \rightarrow 3f_2\text{-}f_1 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

147 P: *Ahora hay que hacer 0 el 1, la que cambiará es la fila 3*

148 *Cambiamos de pivote, ¿cuál es el pivote ahora?*

149 E: *Siete*

150 P: *El siete, no va a cambiar para nada la fila 1 ni la fila 2, la única que*

151 *va a cambiar es la fila 3*

152 *Escriba f_3 va a cambiarse por*

153 E:

$$\begin{array}{r} \\ \\ f_3 \rightarrow 7f_3\text{-}f_2 \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

154 P: *¿Cuánto da el determinante?*

155 E: *-525*

156 P: *Calcule el determinante original antes de las transformaciones aquí*

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

157 *¿Les da el mismo valor?*

158 E: *Sale -25*

159 P: *¿Qué sucedió?*

160 E: *Es por el 3 y el 7*

161 P: *Eso, entonces qué tenemos que hacer?*

162 E: *Dividir para 3 y para 7*

163 P: *Eso*

$$\frac{(3)(7)(-25)}{(3)(7)}$$

164 *Simplificando nos queda el mismo -25*

165 *¿Qué otra cosa podíamos haber hecho antes de multiplicar con la matriz*

166 *triangular que tenemos allí?*

167 E: *Ignorar el 3 o ignorar el 7*

168 P: *Ignorar el 3 o ignorar el 7 ¿o?*

169 *Multiplicar esta fila por 1/3 y ésta fila por 1/7 y nos daba -25*

170 *¿Qué otra cosa podíamos haber hecho?*

171 E: *Mover la fila 2 a la fila 1*

172 P: *Sí, cambiar la fila 1 por la fila 2*

173 E: *Pero hay que cambiar el signo*

174 P: *Claro si vamos a hacer eso, tenemos que colocar delante un menos*

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \; f_2 \rightarrow f_2 - 3f_1$$

175 *¿Sí te das cuenta? Ahí no multiplicas la fila que vas a cambiar, sólo*

176 *multiplicas la otra y ahí no pasa nada*

177 *Nos quedaba*

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

178 *¿Ahora cuál es el pivote?*

Podemos volver a cambiar las filas y ya con otro menos se hace positivo

Cambiamos la fila 2 a la fila 3 y cambió el signo

¿Cómo hacemos 0 el -7?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -4 \end{vmatrix} \; f_3 \to f_3+7f_2$$

Entonces tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

Esto es utilizando las propiedades combinadas con operaciones elementales entre filas. Puede calcular determinantes de cualquier orden por ese método

También podemos utilizar el método del menor y vamos a ir reduciendo la fila. Otra cosa importante a tener en cuenta: si en el proceso usted encuentra en una fila o en una columna que todos son múltiplos de un número ¿qué puede hacer?

E: *Se puede sacar factor común*

P: *Sí, se puede sacar factor común o multiplicarlo por el número fraccionario. Si hace eso al final tiene que hacer lo inverso, si ha dividido al final tiene que multiplicar*

Hagan esta práctica

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Siempre busque el pivote ¿Qué primer paso harían?

E: *Cambiar filas*

P: *Eso siempre ayuda, es bueno tener el pivote en la primera fila. No es estrictamente necesario pero ayuda*

Recuerde que a todos nos debe salir el mismo determinante

Hágalo triangular; se suele llamar método de triangulación

Una cosa si usted tiene, es decir, ha cambiado la fila 3 a la 1, entonces el pivote es el 1

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Entonces si continua la primera fila no cambia pero con ese pivote usted tiene que hacer 0 al -1 y 2 en el mismo paso

Recuerde que las operaciones son para toda la fila

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \; \begin{matrix} f_2 \to f_2+f_1 \\ f_3 \to f_3-2f_1 \end{matrix}$$

Ahora yo recomendaría que la fila 4 la coloque en la fila 2 por el pivote, para facilitar el asunto

Como cambiamos ahora las filas también cambia el signo, hemos cambiado la fila 2 y la fila 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} f_2 \rightarrow f_4 \\ \\ f_4 \rightarrow f_2 \end{array}$$

Luego nos toca hacer 0 al -5 y al 3

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ f_3 \rightarrow f_3-5f_2 \\ f_4 \rightarrow f_4-3f_2 \end{array}$$

Y solamente falta hacer 0 al -5
¿Cuál va a ser el pivote ahora?

E: *El 9*

P: *Entonces tenemos que la fila 4 va a ser cambiada por $9f_4+5f_3$*

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ f_4 \rightarrow 9f_4+5f_3 \end{array}$$

Entonces ¿qué es lo que van a multiplicar? (1)(1)(9)(32)
Y van a dividir para este 9 que está multiplicando a la fila 4 que es la que va a cambiar. Sale 32
Se puede poner el determinante que usted quiera, de cualquier dimensión, por ese método lo resuelve
Está claro que necesita practicar
Lo que vimos fue el método de triangulación, otra cosa que podemos hacer es utilizar otros métodos para calcular el determinante, como el método del pivote.
Vamos a suponer que tenemos este determinante

$$\left|\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Hay muchos 0 ahí entonces va usted a ir combinando el método de aplicar las operaciones elementales entre filas y el método del cofactor
Entonces aquí lo importante va a ser que usted en cada fila tenga solamente un número y el resto sean ceros.
Lo importante aquí es que usted en cada fila tenga solamente un número y el resto sean ceros
Se sugiere que siempre tome un 1 como pivote, este es el método del pivote, en donde esté ubicado el 1, porque con el 1 tú lo multiplicas por cualquier número, se lo sumas a otra fila y el determinante no cambia. Si escoge otro número que no sea un 1 te va a cambiar al final. Entonces en este método se sugiere que siempre tomes como pivote un 1 y si no tienes un 1 lo hagas multiplicando por un número fraccionario

E: *O sea que estoy obligado a hacer un 1*

P: *No obligado, pero es preferible para trabajar con números más pequeños. Si tienes un 1 con ese trabajas*
Entonces utilicemos la cuarta columna. ¿Qué signo lleva 1 ahí?

E: *Positivo*

P: *Entonces escribimos el signo del elemento; según la matriz de los signos; el número tal como está ahí y luego lo que queda eliminando la fila y la columna del número que usted tomó*

$$-(1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

245 *Como yo a propósito le he puesto muchos 1 y algunos 0*
246 *se hace más fácil*
247 E: *Podemos hacer 0 el 1 de la primera fila tercera columna y*
248 *ya queda triangular*
249 P: *Claro, podemos hacer eso también, hacer 0 el 1 de arriba y ya le queda*
250 *Triangular*
251 *Pero vamos a hacerlo*

$$-(1)\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad f_1 \rightarrow f_1 - f_3$$

252 *No pudimos hacerla triangular, no tienes el 0 que querías*
253 *Entonces, ¿qué nos queda aquí? No pudimos hacerla triangular*
254 *Entonces trabajemos con el uno, eliminas esta fila y esta columna*

$$-(1)(1)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

255 *Ya está hecho* -(3+3)=-6
256 E: *Pero ahí usted le quiso hallar la triangular superior pero no se pudo*
257 P: *Ese método ya lo hemos visto antes. Este es el método del pivote, no es*
258 *la triangulación que habíamos hecho antes, y la misión es coger un*
259 *pivote, un número y con ese pivote hacer 0 a todos los demás elementos*
260 *o de una fila o de una columna. En el momento que ya tienes todos 0*
261 *menos ese número; tomas ese número y lo multiplicas por el cofactor*
262 *correspondiente, que es lo que hicimos aquí*
263 *Su compañero me pregunta ¿por qué aquí pusimos menos?*

$$-(1)\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad f_1 \rightarrow f_1 - f_3$$

264 E: *Por la matriz de los signos*
265 P: *Eso por la matriz de los signos. Lo que dice esa norma o ley, que cuando*
266 *suman los subíndices impar, el signo es negativo. Entonces en una*
267 *matriz 4x4, los subíndices de la primera fila suman 2, 3, 4 y 5*
268 *Resuelva este por este método*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

269 *Hágalo*
270 E: *Me salió 2*
271 P: *Les tengo trabajo para la próxima clase*

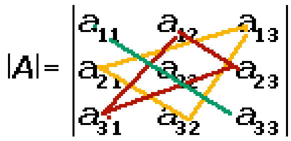
Sesión 5 (07-01-2013): Cálculo del determinante por la regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

Línea **Transcripción**

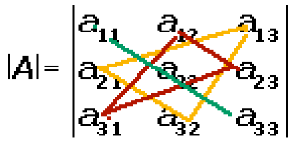
1 P: *Buenas tardes, vamos a comenzar con los trabajos, ellos van a explicar*

el tema, si hay que reforzar alguna cosa, se refuerza de mi parte, pero lo más importante es que usted entienda de la explicación que dan los compañeros y que ellos aprendan a explicar, que lo den tan claramente que usted lo comprenda, ese es el objetivo, que usted aprenda a explicar un tema al resto de compañeros

E: *En el método de Sarrus, los términos con signo positivo son los que están por debajo de la diagonal principal y los que tienen signo negativo son los que están en el vértice opuesto*



Los términos con signo negativo están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los elementos de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto



Que es como se realiza la operación debajo de la diagonal principal

P: *A ver ¿cuál es la diagonal principal?*

E: *La verde. En la primera figura, los elementos con signo positivo están debajo*

P: *Despacio, explique bien las cosas, yo le hago una pregunta ¿Cuál es la diagonal principal?*

E: *La línea verde*

P: *Sí pero usted me señala las dos figuras, arriba y abajo, hay dos líneas verdes ahí*

E: *Por eso, pero acá especifica los términos con signo positivo están formados por los elementos de la diagonal principal*

P: *¿Cuál es la diagonal principal?*

E: *En este caso de aquí* (señala la figura 1) *es la línea verde*

P: *Y en la otra?*

E: *La diagonal secundaria*

E: *La diagonal secundaria*

P: *Entonces, la diagonal principal es sólo la línea verde pero de la de arriba y las diagonales paralelas con el vértice opuesto. ¿Qué significa eso? La línea verde de ahí, esa es la diagonal principal ¿Cuáles son las diagonales paralelas? La que tiene aquí, está en amarillo con su vértice opuesto (a_{21}, a_{32}, a_{13}). No estabas viendo eso. La diagonal paralela a la principal con su vértice opuesto y la que está arriba a_{12}, a_{23} es la otra diagonal paralela con su vértice opuesto a_{31}; esos productos se suman ¿Qué es lo que se resta?*

E: *Esta es la diagonal secundaria, aquí están las paralelas y el vértice opuesto*

P: *Esos productos se restan*

E: *Vamos a ver un ejemplo*

E: *Aquí tenemos una matriz*

| 1 2 3 |

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Vamos a calcular el determinante. Lo que es positivo, (1)(1)(5), luego la diagonal paralela (2)(-1)(2), de ahí (1)(0)(3)

P: *Hasta ahí son los productos de la diagonal principal y sus paralelas, eso es lo que se suma*

E: *Ahora la diagonal secundaria para sacar los productos negativos, multiplicamos menos (3)(1)(2), seguimos con el menos, tenemos (2)(1)(5) y por último (0)(1) y por (-1)*
De ahí realizamos lo que son las multiplicaciones, sumamos y restamos y sale el valor de -15

E: *Ese vendría a ser el determinante de la matriz. Ahora, aquí de qué manera lo hicieron. Lo hicieron paso a paso, nosotros para no equivocarnos podríamos encerrar entre paréntesis, para saber cuáles son los valores que se van a multiplicar*
La regla de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:
El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas,
el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

E: *Sea Δ el determinante de la matriz de coeficientes*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

O sea, con la matriz lo que queremos sacar es el determinante
Y sean Δ1, Δ2.....Δn los determinantes que se obtienen al sustituir los coeficientes del numerador, los términos independientes en la primera columna, en la segunda columna, en la tercera columna y en la enésima columna, respectivamente.
Un sistema de Cramer tiene una sola solución que viene dada por las siguientes expresiones:
$x1 = \Delta 1/\Delta$
$x2 = \Delta 2/\Delta$
$x3 = \Delta 3/\Delta$
$xn = \Delta n/\Delta$
El Ing. nos dijo x1 es igual al determinante del primer valor cuando nosotros separamos los valores de x, los valores de y, y utilizamos estas expresiones para sacar el resultado. Ya lo vamos a ver, mi compañero va a explicar

P: *Ya primero una cosa, pongan la diapositiva anterior*
¿esa Δ de dónde la sacan?

E: *Esa es la determinante que vamos a sacar de la ecuación lineal*

P: *¿Con qué hallas ese determinante?*

E: *Con los valores de x, los valores de y con los coeficientes que están al costado de la ecuación lineal*

E: *Tenemos una ecuación de tres incógnitas, se sacan los coeficientes y se va reemplazando y una vez que se saca el determinante principal*

P: *A ver, hasta ahí, ese primer determinante es el que tú le llamas determinante principal, es el que está allá arriba, esa es la matriz de los coeficientes. Del sistema de ecuaciones toma todos los coeficientes, la x,* *la y, la z, la w, los que sean y los pones en una fila. Y así con la segunda ecuación, la segunda fila, etc., arman las filas con los coeficientes de cada ecuación y ese es el primer determinante, el que llaman Δ ¿De dónde de salen Δ1, Δ2¸Δ3, Δn?*

E: *Son los que se han encontrado, las variables, nosotros sabemos llamarlas x, y, z. Entonces Δ1 sería Δx, Δ2 sería Δy*

P: *O como ahí le ponen x1, x2, x3 a las incógnitas, por eso le llama Δ1, Δ2¸Δ3*

E: *Ya les explico con un ejercicio*

Tenemos aquí un sistema de ecuaciones de tres incógnitas x+y+z=1; x-2y+3z=2; x +z=5

Aquí primero tenemos que darnos cuenta si cumple la Regla de Cramer, que sería tener tres ecuaciones y tres incógnitas, que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones. Lo primero que se pasa a resolver en este método es encontrar el Δ principal, o sea, el determinante, para darnos cuenta si cumple la segunda regla que sería que sea diferente de 0

Para encontrar el Δ principal que sería el determinante tomamos todos los valores de nuestras variables, excepto los resultados

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Para resolver este determinante se aplica el método de Sarrus donde se multiplican las diagonales principales y sus paralelas

Aquí nos damos cuenta que se cumple una de las condiciones para que se pueda aplicar la regla de Cramer, que es que su determinante sea mayor que 0, diferente de 0 perdón

De ahí pasamos a encontrar Δ1 que es nuestra x

P: *¿Qué diferencia hay entre Δ1 y Δ?*

E: *La diferencia es que*

P: *Yo lo único que te pregunto es ¿qué diferencia hay entre Δ1 y Δ?*

E: *Ah ya, la diferencia es que si nosotros trabajamos con Δ1 que le hemos denominado a la fila x, tenemos que reemplazar las x con estos valores de acá*

P: *Eso, la columna donde están los coeficientes de la x son reemplazados por los términos independientes*

E: *Entonces Δ1 sería nuestra x, Δx*

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

Siguiendo los mismos pasos, se haría lo mismo para encontrar nuestro determinante y, nuestro determinante z

P: *Ya, ¿qué haces para Δ2?*

E: *Para Δ2 se sustituyen los términos independiente donde está la y*

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Y luego para la z

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

|1 0 5 |

P: Eso, ya vimos cómo se hace, ya está claro
Al final, ¿cómo encuentro los valores de las incógnitas?
E: Después de haber encontrado todos nuestros Δ tenemos que encontrar
estos valores x, y, z
x es igual a Δ1 sobre el determinante principal que viene a ser Δ. Y así
para y, para z
x = 21/2
y = -8/2 = -4
z = -11/2
Ese es el método de Cramer que está basado en la regla de Sarrus para
hallar los determinantes y sus incógnitas
E: Yo les traje un pequeño problema para resolver
En una caja registradora hay 50 billetes de distintas denominaciones:
$20, $50, $100. Al contar el dinero se obtiene un total de $2250 dólares.
¿Cuántos billetes hay de cada denominación si la cantidad de billetes de
$20 es igual a la suma de las cantidades de billetes de 50 y 100?
P: Deben plantear tres ecuaciones con tres incógnitas
¿Ya plantearon alguna ecuación?
E: x+y+z=50
P: Ya ahí tienen una ecuación x+y+z=50, son 50 billetes, muy bien
La segunda ecuación ¿cómo la plantearían?
E: 20x+50y+100z=2250
P: El número de billetes por el valor del billete y eso da sumado el total de
dinero que son 2250 y luego hace una referencia sobre la cantidad de
billetes de 20, 50 y 100, ¿cómo planteas esa ecuación?
E: x = 50 –(y+z) entre paréntesis
P: Suprima el paréntesis y ¿cómo queda?
E: 50-y-z
P: ¿Por qué 50?
E: 50 es la cantidad de billetes, el total
P: La cantidad de billetes de 20 es igual a la suma de las cantidades de
billetes de 50 y 100. O sea, la cantidad de billetes de 20, x; la cantidad
de billetes de 50 es y, la cantidad de billetes de 100 es z.
Entonces ¿x es igual a qué?
E: y+z
P: Ponga todas en un mismo miembro, ¿cómo queda? Tú dijiste x= y+z
Ahora digo, ponga todas las incógnitas en un solo miembro
E: x-y-z
P: x-y-z=0, esa es la otra ecuación, muy bien. ¿Está correcto eso?
E: Sí
x+y+z=50; 20x+50y+100z=2250; x-y-z=0
P: Resuelva el sistema, tiene que encontrar 4 determinantes
E: El determinante del sistema es 100
P: Ese es Δ o el determinante principal. Otro del grupo que encuentre Δ1 o
el determinante para x, o sea cada miembro del grupo calcule un
determinante
E: |Dx|=2500
P: Corrija las multiplicaciones que no están correctas, esas operaciones
las puedes hacer mentalmente, 50 x 100 es 5000 y ahí dice 50 000,

borra un 0

E: *|Dy|= -500*

P: *Son cuatro los del grupo, ahí hay un error en la supresión de paréntesis hay un error terrible ahí, cómo le va a salir negativo. Borre eso que está mal*

E: *|Dy|= 500*

E: *|Dz|= 100*

P: *¿De dónde sale el 100?*

E: *De aquí me salió el 100*

P: *¿20x50 es 100?*

E: *No, 1000*

E: *Vamos a sacar los valores de x, y, z*
x= Dx/D=2500/100 = 25
y= Dy/D=500/100=5
z= Dz/D=1000/100=10

P: *¿Qué es x, qué es y, qué es z?*

E: *Serían las respuestas de las ecuaciones lineales, 25 billetes de 20, 5 billetes de 50 y 10 billetes de 100*

P: *Para comprobar resuelvan la segunda ecuación con los valores que tiene ahí, 20x25 ¿cuánto da? 500; 50x5=250 y 100x10=1000 sume todo eso*

E: *Da 1750*

P: *¿y cuánto es que tiene que darle?*

E: *2250*

P: *Corrijan, está mal. Al multiplicar debe darte 2250, sino está mal resuelto el sistema, pero las ecuaciones están bien planteadas, se han equivocado al momento de resolver el sistema de ecuaciones, en el proceso. ¿Alguien las resolvió bien?*

Se le agradece al grupo, ahí está el proceso, no salió al final la respuesta

¿Alguna duda sobre la cuestión del proceso? ¿Alguna duda sobre el procedimiento? ¿Quedó todo claro? Está claro que primero hay que calcular el determinante del sistema, que después hay que calcular el determinante para x, reemplazando la columna de x por los términos independientes y que así mismo para y, así mismo para z. Esos son los determinantes que hay que calcular, todo el tiempo hay que hacer lo mismo y luego x se saca dividiendo el determinante de x para el determinante del sistema, lo mismo se hace para y, para z

Ellos hicieron incluso un problema, plantearon un problema. Pregunto nuevamente, ¿está claro eso?, cómo se halla el determinante, cómo se resuelve el determinante y luego cómo se encuentra el valor de las ecuaciones, de las incógnitas. Entonces he traído unos ejercicios para resolver a manera de taller, para que con sus apuntes los hagan en 20 minutos, si tiene dudas pregunte. Solamente hay que hacer el número 1 y el número 2. Mejor hagamos una cosa, hagan del 1 el literal a y del 2 también la a aquí en clases. La b la hacen en casa.

¿Cuánto sale el determinante del sistema?

E: *D = -61*

P: *¿Cuánto sale el determinante de x?*

E: *El determinante de x es 0, el de y es 183 y el de z es -105*

P: *Al reemplazar aquí x vale 0, si se acuerdan cuando sale 0 el* *determinante, ¿cuándo es que hay que preocuparse?*

E: *Cuando el determinante principal, del sistema da 0*

P: *Si ese sale 0 ahí hay problema, pero si sale 0, x, y, z no hay ningún lío porque significa que la incógnita da 0, entonces y vale -3 y z vale 5*
¿El problema? ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que sale en el problema? Tú tienes ya la primera ecuación ¿Cuál es la primera ecuación?

E: *x+y+z=73*

P: *Muy bien, las edades combinadas de un padre y sus dos hijos suman 73, entonces x ¿a quién le llamo?*

E: *Al padre*

P: *¿"y" a quién le van a poner? A la edad del hijo 1 y z a la edad del hijo 2*
P x
H1 y
H2 z
Entonces dice que la suma de los tres, ahí está la primera ecuación que ya la tenían ustedes
x+y+z=73
Planteen la otra, ¿cómo sería la segunda ecuación?
Dentro de 10 años….¿tú cuántos años tienes ahora?

E: *22*

P: *¿Tu papá?*

E: *58*

P: *Ya dentro de 10 años ¿Tú cuántos años vas a tener?*

E: *32*

P: *¿Y tu papá?*

E: *58*

P: *O sea, también tiene 10 años más. Entonces esto es la edad actual, esto es 10 años después, ¿qué edad va a tener el padre?*

	Actual	+10
P	x	
H1	y	
H2	z	

E: *x+10*

P: *Pero los hijos también tienen 10 años más*
Pero ¿qué edad solamente compara?

	Actual	+10
P	x	x+10
H1	y	y+10
H2	z	z+10

E: *La del padre con el hijo menor*

P: *¿Qué dice del padre con el hijo menor?*

E: *Dentro de 10 años la edad del padre será el duplo de la edad del hijo Menor*

P: *Entonces, esto de aquí (x+10) va a ser dos veces esto (z+10)*
¿Cómo lo escribes?

E: *x+10 = 2 (z+10)*

P: *¿Si está claro? La edad del padre, eso va a pasar dentro de 10 años, la edad del padre va a ser el duplo de la edad del hijo. Suprime paréntesis y escribe la ecuación 2*

x+10=2z+20
Pasamos la incógnita al primer miembro y los términos independientes
al segundo
E: *x-2z=20-10*
x-2z=10
P: *x-2z=10 esa es la segunda ecuación*
¿Cuál es la tercera ecuación? ¿Ya la hiciste? ¿Quieres pasar a
escribirla?
Hace 12 años ¿qué ocurre? Todos tienen ¿qué cosa?
E: *12 años menos*

	Actual	+10	-12
P	x	x+10	x-12
H1	y	y+10	y-12
H2	z	z+10	z-12

P: *Hace 12 años compara qué edades, ah solamente la de los hijos: Hace*
12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano
E: *y-12=2(z-12)*
y-12=2z-24
y-2z=12-24
y-2z=-12
P: *Esa es la ecuación 3. Ahí está organizado todo, ahora hay que calcular*
los determinantes necesarios y con eso está resuelto el problema. Lo
hacen en casa. Vamos a escuchar la exposición del grupo 2, que les
ayudará a resolver los ejercicios 3 y 4 del taller
Lo que van a explicar ellos es otro método para resolver los sistemas, lo
que cambia aquí es la forma de calcular la determinante, es la única
cosa que va a variar, entonces la parte esta de Cramer la van a obviar
porque ya quedó claro por la buena explicación que dio el Grupo 1
E: *Desarrollo por menores y cofactores. Para este método debemos*
escoger una fila o una columna, preferentemente la fila
o columna que mayor cantidad de ceros tenga. Como nos ha dicho el
profesor, mientras más ceros haya será más fácil al momento de realizar
el ejercicio.
El cofactor son los elementos que pertenecen a la fila o la columna que
escogimos, el signo de este se define por su posición (ij) si i+j es par
será positivo y si i+j es impar será negativo.
Vamos a llamar menor al determinante que se forma de los elementos
que no se encuentran ni en la fila o columna del cofactor.
Entonces se prosigue a la multiplicación de los cofactores por su
respectivo menor y se suman los resultados para llegar al valor del
determinante
Aquí tenemos un ejemplo resuelto, tenemos una matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & \overset{+}{4}\\ 5 & 3 & \overset{-}{0}\\ 6 & 1 & \overset{+}{2}\end{bmatrix}$$

Entonces como decíamos procedemos a escoger el cofactor, que viene a
ser esta columna y todo lo que no esté seleccionado por el cofactor viene

a ser el menor

P: *A ver, aclaremos bien lo que es un cofactor y lo que es el menor porque ahí estás diciendo cosas que no son ciertas, lea bien lo que es el cofactor y lo que es el menor*

E: *Este es el cofactor*

P: *Los cofactores son cada uno de los que están en el recuadro y con su signo*

E: *Aquí tenemos en la parte de arriba los signos*

P: *¿De dónde salen esos signos? ¿Si se acuerda? Con la suma de los subíndices. Si la suma es par es positivo el cofactor, si la suma es impar es negativo. ¿Qué es el menor entonces?*

E: *Es el determinante de lo que vamos a sacar ahora*

P: *¿Cómo sacas el menor del 4?*

E: *Se elimina la fila y la columna de donde está ubicado el 4*

P: *Exacto ese es el menor, esa es la explicación que tenemos que dar, cuando tomas el 4 eliminas la columna del 4 y la fila del 4 y los números que te quedan fuera de eso, ahí está el menor*

E: *Comenzamos con el signo positivo del 4, en el 0 así mismo eliminamos la fila y la columna del 0 y queda el menor y siguiendo con el 2 tenemos el otro menor*

$$4\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix} -0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 1\end{vmatrix} +2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}$$

E: *Realizamos ahora las operaciones, multiplicamos aquí 5x1 y luego 3x6, le cambiamos el signo a la diagonal secundaria, en el segundo da 0 y por último 3x1 y al resultado de 2x5 le cambiamos el signo*

E: *Luego hacemos las restas y multiplicaciones -52-14= -66*

E: *Ese es el valor del determinante de esa matriz*

P: *Vamos con el sistema de ecuaciones*

E: *La suma de tres números es 160. ¼ de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20 y si a ½ de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número del medio, el resultado es 57. Encontrar los números.*
x+y+z=160
x va a ser el mayor, y va a ser el mediano y z es el menor
Entonces
$$\frac{x+y}{4} = z-20$$

P: *Resuelva esa ecuación, elimine ese cuatro, multiplique por 4*

E: *x+y=4z-80*
x+y-4z=-80
Tenemos
$$\frac{x-z}{2} = y$$

E: *El ½ de la diferencia ente el mayor y el menor, se suma el número de en medio y el resultado es igual a 57*

P: *Escriba todo el sistema*

E: *x+y+z=160*
x+y-4z=-80
x+2y-z=114

E: *Voy a proceder a encontrar el determinante del sistema*

$$A=\begin{vmatrix} +1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ +1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

351 *Sería*

$$1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

352 *$\Delta=5$ o $D=5$*

353 P: *Otro compañero que calcule el determinante de x. Lo único que hemos*

354 *cambiado es la forma de obtener el determinante y practicamos*

355 *resolviendo el sistema*

356 E: *Yo*

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 160 & -1 & 1 \\ -80 & +1 & -4 \\ 114 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

357 P: *¿Qué columna va a tomar?*

358 E: *La de en medio*

$$-1\begin{vmatrix} -80 & -4 \\ 114 & -1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 160 & 1 \\ 114 & -1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 160 & 1 \\ -80 & -4 \end{vmatrix}$$

359 *$\Delta x=Dx=310$*

360 E: *El determinante de y*

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & -160 & 1 \\ 1 & +-80 & -4 \\ 1 & -114 & -1 \end{vmatrix}$$

361 $-160\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -80 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -114 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

362 *=250*

363 P: *Vamos a dejarlo ahí, ¿qué era x?*

364 E: *"x" es el número mayor," y" el mediano y"z" era el menor*

365 P: *Entonces ¿cuánto vale el número mayor?*

366 E: *x = Dx/D*

367 *x=310/5=62*

368 P: *¿El de en medio?*

369 E: *y = Dy/D*

370 *y=250/5=50*

371 P: *¿Cuánto vale el menor, si la suma de los tres es igual a 160?*

372 E: *z=48*

373 P: *Ahí están los tres números entonces*

Sesión 6 (14-01-2013): Calculo de la matriz inversa 2x2 y 3x3

Línea		Transcripción
1	E:	*Nosotros lo que vamos a hacer es calcular la matriz inversa*
2		*por medio de la matriz adjunta*
3		*Vamos a proceder a hacer dos ejercicios*
4	E:	*Para empezar a trabajar con la matriz adjunta primero se tiene que*
5		*sacar el determinante*
		$A=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
6	P:	*No se complique con los elementos de la matriz, interesa el*
7		*Procedimiento*
8	E:	*Utilizaremos esta matriz*
		$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
9		*El determinante sería 1*
10		*Ya que tenemos el determinante para encontrar la adjunta*
11		*trabajaremos por medio de los cofactores con los subíndices*
12		*Para empezar a sacar los cofactores hacemos*
		$a_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$
13		$a_{12}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$
14		$a_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$
15		$a_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$
16		$a_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$
17		$a_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$
18		$a_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$
19		$a_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$
20		$a_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1$
21	E:	*Ahí tenemos una matriz*
		$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
22	E:	*Una pequeña observación con los signos de los cofactores*
		$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$
23		*Entonces la matriz sería*
		$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix}$

-3 -2 1

Ahora pasamos a obtener la matriz adjunta, aquí lo que hemos conseguido es la matriz de los cofactores y para llegar a la matriz adjunta hay que hacer la traspuesta de esta matriz de los cofactores
Entonces

$$\text{Adj A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces hemos completado la dos partes para obtener la inversa que es el determinante y la adjunta
Utilizamos la fórmula

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{ Adj (A)}$$

P: *Es una multiplicación de un escalar por una matriz*

E: *Sí*

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P *¿Cómo comprobamos que sí es la matriz inversa?*

E: *Su determinante no es igual a 0*

P: *Pero ¿cómo comprueba que sí es la inversa?*
Si multiplica la matriz que escribió al principio, la matriz A por la matriz inversa que está ahí debe salir la matriz identidad
Hay que tener cuidado cuando escribimos en la pizarra y no poner signos y rayas en cualquier parte porque hay algunos signos en matemáticas que tienen significado, entonces tú pones ahí un par de barras en el resultado, lo que hizo usted y eso significa valor absoluto, entonces ese número que decía ahí -2 entre esas barras si es valor absoluto vale 2, porque el valor absoluto siempre es positivo, entonces coloque los símbolos donde deben colocarse
Si va a calcular el determinante no le ponga paréntesis, hay que poner barras. Ahí como está eso es una matriz, pero si va a calcular el determinante hay que poner barras en lugar del corchete, tengamos eso con cuidado para tener claro los conceptos, sino usted se confunde y confunde al resto

E: *Aquí haremos otro ejemplo*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz inversa primero tenemos que sacar el determinante
¿Por qué tenemos que sacar el determinante?
Porque el determinante tiene que ser diferente de 0. Si fuera 0, no habría matriz inversa y se denomina una matriz singular
El determinante sería -6
Ahora sacamos los cofactores de la matriz

$$a_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2$$

$$a_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=4$$

$a_{13}= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =-2$

$a_{21}=- \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =13$

$a_{22}= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =11$

$a_{23}=- \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =-4$

$a_{31}= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =-3$

$a_{32}=- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =-3$

$a_{33}= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =0$

P: *Ahí arme la matriz de los cofactores, esa es una matriz*

E: *La matriz de los cofactores*

$$A_C= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

E: *Ahora vamos a sacar la adjunta*
Podrías denotar de esta manera $A_{(adj)}$
Nos quedaría

$$\text{Adj } A= \begin{bmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la inversa

$$A^{-1}= \begin{bmatrix} -1/3 & -13/6 & 1/2 \\ -2/3 & -11/6 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

P: *Para comprobar ¿qué hay que hacer?*
Multiplicar la matriz A por la inversa y le tiene que salir la matriz identidad, si no sale eso, no está bien
La anterior estaba correcta
Ahora resuelva los ejercicios de la hoja, si tiene alguna duda me lo dice
La matriz que se arma en el primer ejercicio ¿cuál es?

$$A= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Y la adjunta ¿cuál es?

$$\text{Adj}(A)= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Cuando es de 2x2 la matriz se puede hacer directamente la adjunta 2x2
¿Qué es lo que pasa en la adjunta con relación a la primera matriz?
¿Qué cambios hay?

E: *Han cambiado los signos de la diagonal secundaria*

P: *Esta diagonal cambia los signos, esta diagonal secundaria cambia de signos*
¿Y qué pasa con la diagonal principal?

E: *Se intercambian los elementos*

P: *Se intercambian los elementos*

Se puede llegar tranquilamente de esta matriz a la adjunta
Entonces puede encontrar usted directamente la adjunta y lo que sí hay que hacer es encontrar el determinante
¿Cuánto sale?

E: *-9*

P: $|A| = -9$
Y una vez que tienes eso procedes a la multiplicación

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj (A)}$$

Y procedes a encontrar la inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Esa ya es la inversa
Haga usted la prueba

$$A \cdot A^{-1} \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahí sí se comprueba que sale la matriz identidad
Esa comprobación debe salir igualita si aplica la propiedad conmutativa, multiplicando así $A^{-1}xA$, invirtiendo los factores debe dar lo mismo. Ese producto sí es conmutativo, verá que una de las propiedades de la multiplicación de matrices es que no son conmutativas, pero en este caso de la matriz inversa sí es conmutativa.
Lo mismo con las matrices 3x3

E: *Nos ha tocado el tema de encontrar la matriz inversa por medio de sistemas de ecuaciones*
La regla dice que para encontrar la matriz inversa tenemos lo siguiente $A \cdot A^{-1} = I$
Vamos a hacer un ejemplo
La matriz A, como no sabemos los elementos de la matriz inversa la dejamos en forma de incógnita y esto es igual a la matriz identidad

$$A= \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P: *Hay una cosa que corregir ahí antes que siga. Hay algo que está demás*
Esa A= no es cierto porque lo que tiene ahí es una ecuación

E: *Sí*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para desarrollar esto hacemos una multiplicación de matrices
Quedaría

$$\begin{bmatrix} x+3y & u+3y \\ 4x+5y & 4u+5v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $x + 3y = 1$ y así

P: *¿Por qué resuelve eso, que $x+3y = 1$?*

E: *Porque es una igualdad*

P: *Eso es una igualdad de matrices*
¿Qué dice en la igualdad de matrices?
Si dos matrices son iguales, los elementos que ocupan la misma

posición son iguales

E: *Resolvemos las ecuaciones, tenemos dos sistemas x+3y=1; 4x+5y=0;*
u+3y=0; 4u+5v=1. Si resolvemos el primer sistema y= 4/7; x=-5/7
v=-1/7; u=3/7
Aquí tenemos los valores de x, y, u, v
La matriz inversa sería

$$A^{-1}= \begin{bmatrix} -5/7 & 3/7 \\ 4/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

P: *Ahí está la matriz inversa de A*
Aquí usted escribe una matriz cualquiera, acá una matriz con
incógnitas y el producto tiene que darle la matriz identidad
Ahora una matriz 3x3

E: *Vamos a ver otro ejemplo*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+y+3z & 2u+v+3w & 2a+b+3 \\ x+2y+4 & u+2v+4w & a+2b+4c \\ 3x+5y+z & 3u+5v+w & 3a+5b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P: *Para encontrar cada columna de la matriz inversa hay que*
resolver cada sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

E: *Voy a resolver el sistema uno, podemos utilizar cualquier método*
Yo lo voy a hacer con la regla de Sarrus y Cramer
El determinante del sistema es -28
Ahora el Dx=-18
Dy=11
Dz=-1
Ahora vamos a encontrar los valores de x, y, z
x=Dx/D = 9/14
y=Dy/D = -11/28
z=Dz/D = 1/28

P: *¿Con eso tiene qué cosa?*
La primera columna

E: *La primera columna de la matriz inversa*

P: *La primera columna de la matriz inversa, muy bien. Lo mismo tenemos*
que hacer para encontrar u, v, w, a, b, c

ANEXO 5. Entrevista 3 realizada a Jordy

1. **Según su criterio, ¿Cómo se aprende en esta asignatura (Álgebra Lineal)?**

Primero yo considero que se aprende practicando, especialmente lo que es matemáticas, y luego para fijar bien el conocimiento el asunto es buscarle la aplicación, para qué sirve eso. Yo creo que eso es lo fundamental, primero practicar y luego aplicar lo que se aprende. Es probable que la aplicación en algunos casos no sea tan inmediata pero es bueno a todo lo que uno va aprendiendo encontrarle siempre la aplicación porque si no se olvida. Uno mismo dice esto no me está sirviendo para nada inmediato, simplemente el cerebro lo olvida.

2. **¿Cómo cree que se aprende Matrices?**

Lo de matrices tiene una aplicación inmediata en cuanto a ordenamiento de cosas, las matrices se pueden utilizar para ordenar datos y luego dentro del proceso se va aprendiendo que si tengo los elementos ordenados, al momento de sumar las matrices puedo obtener una respuesta que yo requiero. Ahí está clave, o sea, no olvido lo que voy aprendiendo. Otra cosa importante en el aprendizaje de matrices o para cualquier tipo de conocimiento es que uno sepa dónde está la fuente, en caso de que se me olvide o esté confundido saber dónde puedo encontrar bibliografía para poder aclarar alguna cosa que esté olvidándose. Pero básicamente es la práctica, o sea, el aprender haciendo.

3. **¿Cómo planifica usted su clase?**

Cuando es teoría hacemos el trabajo individual primero, o sea, que ellos conozcan el tema, que lean, que lo expongan, tratar de que los chicos de la universidad por su cuenta vayan aprendiendo lo elemental, leyendo y entendiendo y luego saberlo expresar porque eso también es importante, o sea que uno sepa explicar lo que ha aprendido. Hay personas que saben hacer cosas pero no saben cómo explicarlas o cómo enseñarlas, a mí me parece que es una cosa importante que el estudiante conozca la teoría, la domine y dominar la teoría no es sólo saberla de memoria sino principalmente saber explicar eso que se supone que conoce. Entonces una vez que sabes leer, es que eso es lo importante el saber leer y entender lo que estoy leyendo para poderlo después explicar y eso me ayuda, como te decía, si alguien se olvida o tiene duda de algún conocimiento pues fácilmente regresa a la fuente y como va obteniendo la capacidad de lectura comprensiva pues ya lee y recuerda lo que se le ha olvidado. Entonces, una de las partes importantes de la planificación me parece a mí que es el estudio de la parte teórica por parte de los mismos estudiantes y luego los ejercicios.

4. **¿De dónde extrae usted las actividades (ejemplos, ejercicios, tareas) que usted emplea en sus clases?**

Hay algunas que se sacan de los libros, como base y hay otras que uno se las inventa. Más que nada lo que es problema, los ejercicios a veces los tomo de los libros y a veces salen al momento de la clase, los pongo al azar, lo que vaya saliendo ahí se resuelve. Cuando es problema, eso hay que pensarlo un poquito antes de escribirlo, siempre es bueno, a veces también salen problemas así al momento de improvisación, pero por lo general siempre es bueno ya llevarlos preparados, más que nada los problemas, lo que son ejercicios numéricos yo los planteo allí directamente.

5. **¿Qué potencialidad ve en los ejercicios con matrices que incluye en los talleres para los estudiantes? ¿En base a qué los elige?**

Los ejercicios que se plantean siempre tienen variedad en las aplicaciones que se van aprendiendo. Suponga usted que se plantean varios ejercicios y todos apuntan a un mismo conocimiento, o a una misma dificultad o a un mismo resultado pues no tiene chiste (gracia-interés). Por ejemplo, cuando planteas un problema de ecuaciones, pues dentro del problema tiene que haber la variedad: que haya infinitas soluciones, que haya una o que no haya soluciones. Para que el joven vaya viendo en los ejercicios que resuelve todas las posibilidades que hay en el tratamiento de ese tema.

6. **¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer los estudiantes al realizar el producto de matrices?, ¿Por qué cree que es importante definir las dimensiones de las matrices?**

Siempre el error que primero pueden cometer es que el chico piense que hay que multiplicar número por número según la posición que está, o sea, puede ocurrir eso. Entonces al menos en ese sentido en la multiplicación de matrices, yo suelo insistir en las dimensiones, por eso al principio se les dice cómo determinar las dimensiones de una matriz y que sepan hacerlo bien para que no haya después confusión, poner entre paréntesis las dimensiones. Por ejemplo, en ese caso, es una matriz 2x3, si él pone 3x2 ahí ya está mal porque ya confundió una cosa elemental y eso le impide hacer bien el resto, entonces si el coloca el 2x3 y luego el 3x1, la indicación que se dio es que deberían coincidir los números del centro porque necesitas tener el mismo número de columnas en la primera que de filas la segunda; entonces ese es el primer error que se puede cometer en cuanto a las dimensiones. Si yo tengo dos matrices cuadradas, los chicos pueden sacar resultado matriz 2x2 que es lo lógico pero en cambio pueden hacer lo mismo de la suma, multiplican los elementos que corresponden en cada matriz según su posición y sacan una matriz 2x2 pero obviamente tiene error porque no es así, suelen equivocarse en eso cuando no tienen claro el concepto o la definición de una operación.

7. **¿De qué serviría al alumno que existan ejercicios en los que no sea posible realizar alguno de los productos de matrices por ejemplo?**

En la cuestión de ejercicios prácticos, para que un chico se dé cuenta, o sea, aquí no se puede. Y el asunto importante del no se puede es ¿por qué no se puede?, que explique la razón, cuando uno explica la razón de por qué no algo está argumentando su decisión y eso implica el conocimiento, o sea, yo puedo explicar algo que sí o que no siempre y cuando conozca, si no conozco ¿qué explico?. La argumentación siempre es importante, esto no se puede, ¿por qué no se puede?, entonces viene todo el proceso de recordar una definición, que es importante.

8. **¿Cómo fundamentaría usted el algoritmo del producto de dos matrices, es decir, se ha planteado usted el por qué se hace y/o utiliza así dicho algoritmo? ¿Y en el caso de la multiplicación por bloques?**

El producto de matrices es una combinación de dos cosas, por ejemplo, en una matriz tengo cantidades de y en la otra matriz tengo los precios, entonces lo que voy sacando al final son cantidades de las combinaciones por los precios que están en cada columna. Esa sería como la aplicación, yo tengo acá en una matriz todas las cantidades de ciertos productos, por ejemplo, y tengo en la otra matriz precios diferentes de los mismos productos, obviamente ordenados, por eso es que es el orden y al final obtengo para cada combinación un resultado, ese es el proceso de por qué se hace así y ahí viene la aplicación justamente, yo puedo sacar resultados, por ejemplo eso que te decía, lista de cantidades de cosas con la combinación de sus precios diferentes.

Lo que hace la multiplicación por bloques es facilitar el proceso, pero en realidad, resulta lo mismo, lo que facilita es que se utilizan matrices más pequeñas para evitar una montón de productos que tienes que hacer obviamente si tienes muchas filas y columnas, recordando que eso es en la parte manual si se quiere decir porque ya se meten datos en MATLAB y lo sacas fácilmente.

9. **Generalmente el producto de matrices no es conmutativo. ¿Conoce usted casos donde el producto de matrices sí es conmutativo? Cite ejemplos.**

Cuando es la matriz inversa, ahí es conmutativo, o sea, la matriz inversa por su matriz que siempre da la identidad. Y hay otros casos que a veces me han salido al azar, no me he puesto honestamente a ver qué característica debe tener, de verdad no me he puesto a hacer eso, qué características deben tener las matrices para que sea igualita la respuesta, pero sí me han salido casos en que es conmutativa la multiplicación.

10. **Tomando como base este episodio (matrices escalonadas), usted en sus clases ¿Puede detectar las dificultades de un estudiante en particular? ¿Cómo?**

Por lo general el planteamiento siempre es que cada persona manifieste la dificultad, o sea, eso es lo que se quiere siempre, que tengan la capacidad de manifestarlo abiertamente, es esa la intención siempre, al menos dentro del aula intento darles la confianza para que los jóvenes se expresen con naturalidad y principalmente que no sientan vergüenza de decir ignoro esto porque ese es un pequeño problema que a veces se detecta entre los grupos de chicos que no preguntan porque les da vergüenza, porque los demás los van etiquetando. La otra forma es ir por el puesto de cada uno, cada que se plantea un ejercicio, al menos me doy un tiempo de pasar a ver si individualmente están trabajando, porque esa es otra cosa, cuando alguien está mucho tiempo mirando al vecino significa que tiene dudas, esa es una muestra que el chico está inseguro, que desconoce algo o que se confunde. Y la otra es ya las evaluaciones o cuando pasa a la pizarra, por ejemplo, en eso de la matriz escalonada son operaciones sencillas, pero desgraciadamente hay gente que se equivoca en cuestiones elementales como el producto y la suma de fracciones.

11. **De acuerdo a las dificultades de aprendizaje detectadas en los estudiantes, ¿Crea usted contextos específicos de aprendizaje? Cite un ejemplo.**

Una de las cosas que me parece a mí fundamental como medio para ir superando cualquier dificultad es el trabajo en equipo, a mí me parece una cuestión supremamente importante, incluso en el sentido de proyectarlo hacia lo que pasa en las empresa o en las instituciones en la parte laboral, porque tú nunca vas a trabajar sólo, siempre estarás trabajando con personas o dirigiéndoles, o como pares, o siendo tú subalterno. El hecho de estar trabajando en equipo y sabernos entender para resolver un ejercicio o para estudiar un tema determinado va capacitándonos para poder trabajar en el futro en sociedad, yo pienso que eso es una de las cosas que hay que enseñar, porque eso hay que enseñarlo, hacerle notar a los jóvenes la importancia del trabajo en equipo, la necesidad de aprender a trabajar en equipo y la sinceridad de los aportes que se pueden hacer en un trabajo en equipo, o sea, ir con la actitud de que quizá yo no sé nada pero voy ahí a aprender. Hay que insertarle en las ideas del joven que el trabajo en equipo es fundamental para su aprendizaje porque ahí es donde se puede aprender cosas que a lo mejor en las explicaciones que da el profesor o en lo que él ha leído no lo ha logrado entender.

12. **¿Cómo elige los ejemplos que usted emplea en el desarrollo de su clase? Por ejemplo, en este episodio, ¿En base a qué eligió (o se inventó) estos tres ejemplos de matrices escalonadas?**

La intención era escribirles tres matrices diferentes y cada una escalonada a su manera, si te das cuenta la última no tiene elementos diferentes de 0 en la primera columna y la segunda no tiene elementos diferentes de 0 en la tercera fila, pero ambas son escalonadas, incluso no es cuestión de que vayan seguiditos los numeritos sino que puede haber una diferencia de varios números en el escalonamiento de una matriz. Las puse con la intención de que los estudiantes se den cuenta de que hay diferentes clases de matrices escalonadas y qué es lo fundamental de una matriz escalonada, cuándo es y cuándo no porque pueden cometer errores y pensar que es una matriz escalonada cuando no lo es.

13. **En sus explicaciones, ¿Qué énfasis le da usted al lenguaje matemático? ¿Por qué cree que es importante? ¿Cómo se lo hace saber al estudiante? Cite un ejemplo**

El chico necesita ir a buscar explicaciones o a encontrar respuestas en los libros y en los libros se utiliza lenguaje matemático, entonces si ellos no entienden algún término o algún concepto cómo van a entender después todo el conjunto de alguna frase o párrafo si hay alguna palabra que no dominan, algún concepto que no dominan, entonces es importante dentro del proceso normal de clases y dentro del diálogo yo suelo decirles “cosas”, utilizar esta palabra en alguna parte de la explicación, pero luego les digo lo que debe ser. Esta cosa, esta fila, para que vayan entendiendo, porque cosas tiene muchos significados. Es fundamental el lenguaje matemático y hay que introducirlo hasta volverlo algo natural en la clase para que todo mundo vaya aprendiendo. Una cosa sencilla en la que se suelen equivocar, solamente en el uso de la palabra “por” o “para”, hay gente que inclusive ya aquí en la universidad no entiende la diferencia de significado cuando multiplicas o cuando divides. Incluso, pueden tener dos números con diferente signo que estén sumando y no son capaces de hacerlo porque utilizan la palabra por. Entonces, al utilizar la palabra por pues ya la respuesta es posible que no esté bien porque ellos ponen un signo como si estuvieran multiplicando y están sumando, una cosa elemental que pasa.

14. **¿Por qué cree que es importante la notación en matemáticas? ¿Qué papel le da usted a la notación en sus clases?**

La notación es importante para que ellos sepan entender cuando están expresando una cuestión como una expresión algebraica que sepan diferenciar en ella qué representa cada letra, cada símbolo. Cuando yo escribo en símbolo un determinado concepto, si el chico no sabe qué significa eso, te ahorra espacio, te ayuda a entender por medio de símbolos para sintetizar las cosas en las anotaciones. Yo le doy una connotación interesante a la notación, porque así podemos resumir el contenido de una unidad, yo siempre en la parte derecha de la pizarra suelo ir anotando lo fundamental y en notación para que el estudiante entienda su uso como resumen de un montón de información.

15. **Cuando los estudiantes van a calcular el determinante empleando la regla de Sarrus, ¿Cree que es una dificultad para ellos identificar la diagonal principal y secundaria? ¿Se presenta esta dificultad en sus clases? ¿A qué cree que se deba?**

Suelen tener alguna dificultad, se presenta a veces, yo creo que ese tema lo entiende bastante rápido, es lo que he visto a lo largo de estas clases, resuelven fácil. Aprenden fácil el procedimiento pero cuando hay que multiplicar suelen cometer errores infantiles, cosas que se supone que ya sabían.

16. **¿Cree usted que los estudiantes tienen un aprendizaje significativo si son ellos mismos quienes preparan un contenido matemático (producto de matrices, cálculo de determinante, resolución de sistemas de ecuaciones)? Explique por qué**

Claro, el hecho de que ellos preparen la explicación, siempre les va a servir para que aprendan mucho mejor un tema, tampoco eso elimina o contradice el hecho de que aprendan bien si yo se lo explico. Pero el hecho de tener ese esfuerzo para aprender ayuda porque ellos tienen la capacidad de aprender por su propia cuenta, el autoaprendizaje es muy importante porque después que tú sales de la universidad te toca aprender por tu cuenta. Yo sí creo que es muy válido el hecho de mantener ese tipo de exposición, de investigación, incluso si ellos necesitan en algún momento que tú se lo expliques, en la individualidad si ellos vienen y aclaran conmigo alguna duda que tienen, yo les explico particularmente para que ellos luego vayan y repliquen en clase. Aunque hayan tenido que recurrir a mí o a otro docente para que les explique algún detalle, es interesante, esa es otra cosa importante, que tengan la capacidad de buscar la información ya sea vía internet o la bibliografía y también información de las personas, que acudan a otro docente que domine el tema en referencia y aprendan de eso también. Son actitudes válidas para la vida, uno en el campo profesional tiene dudas y qué toca o buscas información o buscas a las personas indicadas.

17. **¿Cree usted que los estudiantes tienen dificultades para realizar operaciones elementales entre filas al resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss Jordan por ejemplo? ¿A qué se debe? ¿Qué hace usted frente a esas dificultades?**

Una de las dificultades son las operaciones elementales, lo que aprendieron básica y luego el cálculo mental, no sé si recuerdas, en las clases solíamos hacer mentalmente el asunto o en su defecto escribir la fórmula porque todo eso se basa a una fórmula y que yo mismo la escribo por mi conveniencia, pero la fórmula puedo tenerla ahí y solamente mirarla y calcular mentalmente o puedo reemplazar y calcular cada cosa o cada operación de manera individual escribiéndola. Pero es eso, lo que es el cálculo mental y las operaciones elementales suelen los estudiantes tener dificultad y claro tú puedes hacer el 99% del proceso bien pero te equivocaste en un cálculo pues ya el resto ya no sale; una de las cosas que insisto mucho es que en las operaciones elementales entre filas no puedes equivocarte, porque si te equivocas en una cosa ya el resto no sirve, entonces tienes que hacerlo perfecto.

18. **El tema de matrices es parte del currículo establecido para alumnos de este nivel, ¿Considera usted en ocasiones la improvisación con los temas, de acuerdo a las necesidades de los alumnos o sigue el temario sin alteraciones?**

De acuerdo a la situación propia del aula a veces toca regresar para recordar algo que ya se vio, incluso alguna vez me ha tocado dándome cuenta que hay algo fundamental que no se domina, me ha tocado dejar el tema que estamos viendo y regresar a revisar totalmente alguna temática específica, incluso a veces se puede dar como un flash informativo de lo que en futuro toca ver con eso, sin que vayas ahondar, pero hacerle ver que lo que estamos resolviendo nos va a servir para dentro de unos meses o dentro de algún tiempo. En una asignatura por ejemplo, del siguiente semestre, entonces, al menos siempre es bueno ese tipo de conexiones porque también nos permite ver la proyección que se tiene con lo que estamos viendo y también verle la conexión que tiene con lo que hemos visto en el pasado.

19. **¿Cree usted que es importante que un estudiante participe activamente mientras usted explica un contenido? ¿Por qué? ¿Realiza usted preguntas constantemente para que el estudiante se involucre en su explicación? Cite un ejemplo**

Yo tengo una concepción, la participación activa tiene diferentes formas de percibirse o de definirse, porque yo participo activamente cuando estoy atendiendo con toda la concentración del caso, a mí me gusta mucho que la gente esté siguiendo la explicación, me gusta bastante que la gente vaya junto conmigo resolviendo lo que estoy explicando, me gusta mucho que la gente incluso en el mismo momento en que estamos resolviendo se pregunte sin miedo a cortar el proceso, yo en esos casos suelo decir esa duda te la aclaro enseguida pero déjame terminar esta parte u opto por detenerme y explicar la duda que tiene. A mí me gusta mucho eso, que la gente esté diciendo, calculando, proponiendo, mientras e va resolviendo cualquier cosa y la otra cosa que siempre insisto es que el chico no puede estar en clase al menos solo mirando, a mí me parece que eso es como no estar queriendo aprender y en estos temas de aquí siempre es importante que tú vayas diciendo cosas y vayas resolviendo, y de hecho hay muchachos que como lo que se va explicando se lo hace lentamente para que todo el mundo vaya asimilando, hay algunos que cogen ya el hilo del asunto y siempre se adelantan, terminan antes de que uno concluya la explicación. Más que nada, en ese tipo de procedimiento si ya tú explicas cómo tiene que hacer y el resto es repetir el proceso, hay mucha gente que se adelanta y termina antes y a mí me parece eso mucho más válido, que haya gente que haga eso, que se adelante a lo que tú vas a hacer. Yo al menos les motivo a que hagan eso, si no son capaces de resolverlo al menos que vayan siguiendo, que vayan participando y que vayan anotando. El participar, la palabrita activamente, no sólo considero activamente que esté diciendo o que esté anotando, con que vaya siguiendo aunque sea en silencio todo y el haga mentalmente lo suyo, pues también es activamente porque está elaborando.

¿Y las preguntas?: Eso, el llamarme la atención, el hacerme preguntas porque como están escribiendo haciendo el doble esfuerzo de mirar y escribir siempre hay cosas que se pueden pasar por alto, entonces el detener la explicación, hacer una consulta inmediata a mí me parece válido. Ese tipo de cosas en el aula da más vida, se pone más interesante el trabajo porque eso denota el interés que tienen los chicos en aprender lo que se está proponiendo que se haga.

20. **Para usted son muy importantes los ejemplos cuando explica una clase. Por tanto, ¿Cómo definiría usted una demostración matemática? Cite un ejemplo**

Una demostración es utilizar conceptos, definiciones para dar a entender que lo que se plantea al principio que suelen ser algunas premisas y se las relacionas unas con otras, o sea, eso es cierto, pero con puro procedimiento algebraico. Honestamente es una de las cosas complicadas porque hay que saber muchos conceptos y tener mucho orden, incluso hay que utilizar las propiedades del tema que se está ampliando. Yo considero que las demostraciones son un tanto complejas, porque tienes que utilizar conceptos diferentes y aplicarlos a una temática, entonces es a veces bueno utilizar demostraciones no muy grandes. En clases, al menos yo nunca lo hice.

ANEXO 6. Entrevista 4 realizada a Jordy

1. **¿Cómo enfoca la enseñanza del contenido de matrices?**

Básicamente se suele decir que matemáticas siempre es complicado, yo que intento siempre hacer a todo nivel y con todos los temas es que nunca digo que es fácil pero yo trato de que la gente asuma todo estudio como una cuestión normal, o sea, todo estudio tiene su grado de dificultad y todo es posible siempre y cuando cada persona se dedique, entonces no podemos plantearlo como una cosa difícil. Tampoco le digo es que esto es fácil, sino que simplemente hay que dedicarse y siempre es posible aprender, luego tiene sus utilidades.

2. **En base a la reflexión sobre su práctica docente, y en este caso referente a la enseñanza del contenido de matrices, ¿Qué considera usted que se podría mejorar?**

Yo siempre creo que lo que mejor se puede hacer en la práctica docente es hacer que los chicos vayan utilizando el contenido para resolver problemas, o sea, en la medida que se vea la utilidad de lo que se aprende creo que eso les despierta mayor interés en lo que se está estudiando y ese tipo de cosas es lo que se puede mejorar, igual que las actividades que se puedan plantear que es lo que se puede realmente cambiar porque hay algunas cosas que se van a mantener.

3. **¿Cómo definiría usted una oportunidad de aprendizaje?**

Es la actividad que se presenta a los jóvenes para que vayan aprendiendo el contenido.

4. **¿Cuáles son las dificultades más recurrentes en el aprendizaje del contenido de matrices?**

Lo que se les hace más complicado es que hay que usar procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones, la cuestión de la aplicación de las operaciones entre filas suele representar una dificultad pero a más de eso, es que allí un pequeño error les lleva a no poder resolver un ejercicio. Yo creo que eso es lo que más se les complica.

5. **Al momento de explicar una clase, ¿Considera usted a los estudiantes como un todo a quienes les explica el procedimiento para resolver un ejercicio? ¿Cree que es necesario conocer de antemano las características de cada**

estudiante y utilizar estrategias que permitan que su explicación sea clara para todos? ¿Por qué?

Lo que hago es hacer la clase general para todos, no hago subgrupos ni los estudio minuciosamente a ver qué capacidad tienen, incluso la parte diagnóstica se la omite, uno va directamente al trabajo y lo presenta de manera general, al menos yo así lo he hecho hasta ahora. Ahora lo óptimo es lo contrario, tener algún tipo de especificaciones con los estudiantes y trabajar diferenciadamente, pero eso al menos no lo he visto yo hasta ahora como posible.

6. **¿Aplica variadas estrategias de enseñanza y actividades congruentes con la complejidad del contenido y en este caso, de las matrices? Explique con un ejemplo concreto**

Lo primero que suelo hacer al presentar un tema es revisar lo anterior, lo previo que debe saberse para un tema determinado y después de eso la explicación si se quiere general de lo que se va a estudiar, tratando de hacerlo participativo en lo posible y las aplicaciones, los ejercicios que se hagan y la resolución de problemas, es lo que se intenta hacer.

Como estrategia, la forma en que yo trabajo es dejar que el estudiante haga lo suyo y en caso que haya dudas me lo diga y también existe la posibilidad de que puedan preguntar a los compañeros. Por ejemplo, lo que aquí definen como coaching es lo que suelo hacer, cuando hay algún error se corrige y cuando hay un mal entendido se corrige, cuando veo que alguien está equivocándose generalizo para que todo el mundo vea qué está mal y lo que no se debe hacer. La otra parte, es que los chicos trabajen entre ellos, no sé qué estrategia sería esa. ¿Por qué razón me parece enriquecedor que trabajen en grupo? Y esto es algo que se los explico a ellos: cuando trabajan en grupo, ellos suelen decir al principio es que yo no sé explicar, entonces, ahí les digo yo: esa es una capacidad que tienes que desarrollar, aprender a explicar algo que tú sabes, en el momento que tú lo puedes explicar lo sabes mucho mejor que yo. Por eso, el hecho de que puedan ellos intercambiar ideas, resultados, respuestas y hacer aclaraciones entre ellos antes que conmigo lo considero una riqueza de que ellos aprenden a explicar un conocimiento.

7. **Usted da clases en una carrera X y los programas de estudio (sílabos) ya suelen estar establecidos, ¿Cree usted que en ocasiones es necesario modificar**

los temas para que haya una secuencia entre temas anteriores y posteriores? ¿Lo considera usted para sus clases?

De hecho yo nunca he considerado el esquema de la asignatura como una camisa de fuerza, ahora hay una lógica en cuanto a qué temas ver antes o después, en el caso que se pueda sí se cambia el orden de los contenidos y lo otro en los sílabos hay un poco de libertad porque no nos dan ninguna cosa obligatoria. De hecho, los sílabos los tenemos que elaborar nosotros mismos, lo que está establecido es el marco teórico, los temas y subtemas, pero incluso en eso nos han dicho que tenemos libertad para modificar las temáticas, por ese lado hay la oportunidad de mejorar.

8. **¿Relaciona usted los contenidos de su asignatura con los contenidos de las demás asignaturas del módulo de manera que pueda incluir explicaciones, ejercicios, problemas o un tema (s) que sean de utilidad para alguna de las demás asignaturas del módulo? Si lo ha hecho, explicar ¿Cómo?**

Se intenta hacer, cada docente sabe qué asignaturas componen el módulo, lo que pasa es que eso no es fácil, hay que sentarse a planear. Primero es conocer las asignaturas del módulo, qué temas se dan en las diferentes unidades de aprendizaje (asignaturas) para lograr hacer una conexión entre ellas, intentando que ningún aprendizaje sea disperso, si no que forme eso el módulo.

ANEXO 7. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Jordy (Año 1 de observaciones)

Sesión 1 (30-11-2011): Definición de matriz, clasificación de matrices, suma de matrices y producto por un escalar

Descripción:

Episodio 1: Definición y clasificación de matrices

En el primer episodio de esta sesión, el profesor da un concepto de matriz [S1.E1.A1.L3-4[1]: *"Una matriz es un arreglo rectangular de elementos y que se ubican en filas y en columnas"*], acompañado de su notación matemática [S1.E1.A1.L5-10: "*Los elementos están ubicados entre paréntesis. En este sentido van las filas y en este las columnas, se las denota con letras mayúsculas, pueden ser este tipo de paréntesis ( ) o pueden ser también corchetes [ ]. En cada elemento hay dos subíndices, el primero se refiere a las filas, cada elemento se representa a_{ij}, el primer subíndice es el número de filas y el segundo subíndice es el número de columnas"*].

Enseguida, pregunta las clases de matrices que han consultado y con la intervención de los estudiantes aborda la clasificación de matrices, dando detalles de su definición, características y ejemplos de cada una: cuadrada, rectangular, nula, triangular superior, triangular inferior, identidad, escalar, traspuesta, simétrica, antisimétrica, iguales [S1.E1.A1.L18-95: *"¿Qué clases de matrices han consultado que existen? (...) ¿Qué es una matriz cuadrada? (...) Tiene el mismo número de filas que de columnas (...) Matriz rectangular (...)Cuando el número de filas es diferente al número de columnas (...) Matriz nula ¿cuál es? (...)Todos sus elementos son 0 (...) ¿Cuándo una matriz es triangular superior? (...)si los elementos que están sobre la diagonal son diferentes de cero (...) La matriz identidad, ¿cuál es la matriz identidad? (...) Tiene unos y ceros pero ¿cuáles son los unos?, los de la diagonal principal son todos unos y los demás elementos son ceros. Si en esa misma matriz, en vez tener 1, 1, 1 tiene números diferentes de 1, que no sea 0 tampoco, si es 0 es matriz nula, sería una matriz escalar (...) ¿Cuándo una matriz es traspuesta a otra? (...) Las filas se convierten en columnas y con eso es suficiente (...) Es igual a su traspuesta, pero ¿qué características tiene? Son los mismos*

[1] Siglas utilizadas para identificar la sesión de clases (S1), episodio (E1), año de obtención de información (A1) y líneas de transcripción (L3-4)

los elementos que están a diferentes lados de la diagonal superior (...) O sea, todos los números que están ubicados simétricamente al otro lado de la diagonal principal deben tener el mismo valor (...) ¿Y una matriz antisimétrica? (...) Esos elementos que están ubicados en el mismo sitio pero a diferentes lados de la diagonal tienen diferente signo (...) ¿Cuándo dos matrices son iguales? (...) Cuando los elementos son exactamente mismos"].

Una vez que el profesor ha explicado la definición y clasificación de matrices entrega una hoja de ejercicios propuestos a sus estudiantes para que practiquen el tema explicado (identificar los elementos de una matriz de acuerdo a su posición y realizar operaciones algebraicas con ellos, hallar el valor de las variables para que dos matrices sean iguales). Mientras resuelven los ejercicios, los estudiantes van consultando sus dudas con los compañeros o directamente al profesor. Jordy explica brevemente algunos detalles que los estudiantes han olvidado y que son necesarios en la resolución (por ejemplo, la multiplicación de radicales). Tomando como ejemplo uno de los ejercicios, el profesor hace una explicación más amplia del concepto de igualdad de matrices [S1.E1.A1.L121-133: *"En la otra parte hay que establecer las igualdades, hay que escribir las igualdades de cada elemento correspondiente en las matrices que se les da. La primera matriz es igual que la segunda y para que eso sea cierto, ¿qué debe ocurrir? Los elementos de las dos matrices que deben ser iguales. Establezcan las igualdades y encuentren el valor de las incógnitas, en cada una quedaría una ecuación con una incógnita"*].

Episodio 2: Suma de matrices y producto por un escalar

En el segundo episodio de esta sesión, Jordy aborda la suma de matrices y producto por escalar. Empieza con la suma de matrices haciendo un énfasis en que deben tener las mismas dimensiones para que se puedan sumar [S1.E2.A1.L143-145: *"Como una matriz es un arreglo, para sumar las matrices necesitamos obligatoriamente que todas tengan la misma dimensión, no se puede sumar una matriz que tenga dimensión diferente a otra"*], y a continuación escribe tres matrices A(2x3), B(2x39 y C(2x4) como ejemplos para explicar el algoritmo de la suma de matrices [S1.E2.A1.L146-161: *"Vamos a suponer que tenemos la matriz A y tenemos las matriz B y tenemos la matriz C, ¿cuáles de esas matrices pueden sumarse? (...) O podemos hacer también B+A ¿Por qué no se puede sumar A + C? (...) No tienen las mismas dimensiones, aquí ¿qué es lo que ocurre con respecto a B o a la matriz A? (...) Tiene una columna de más, entonces no podemos* *sumar A con C, no está definida esa suma, ni podemos sumar B con C porque no está definida esa suma, porque son de diferentes dimensiones las matrices, lo que sí podemos hacer es A + B, ¿qué hay que hacer para sumar? Usted toma los elementos que están en la misma ubicación y los suma"*].

Con los ejemplos de las tres matrices anteriores, Jordy pasa a explicar las propiedades de la suma de matrices: conmutativa, elemento inverso (elemento simétrico), elemento neutro, asociativa [S1.E2.A1.L165-197: *"¿Qué propiedad es esa? Si yo digo que A+B es igual que B+A (...) Propiedad conmutativa (...) voy a plantear un problema, ¿qué debo sumarle a "A" para que me de la matriz nula? (...) ¿Cómo podríamos definir esa matriz en donde cada elemento es el inverso sumativo? (...) Multiplicada por -1, o sería la matriz –A, ¿está claro? Si yo sumo una matriz con su inverso sumativo obtenemos la matriz nula, esa es otra propiedad, ese es elemento inverso, toda matriz tiene su inverso sumativo. Y si hago al revés ¿Qué matriz debo sumarle a la A? para obtener la matriz A (...) Sumarle 0, o sea A+0 es A, o sea que cualquier matriz tiene también el elemento neutro (...) Fíjense esto es A+B+C, pero en realidad ¿qué es lo que hemos hecho? A la matriz A+B le hemos sumado C, o sea hemos hecho primero esto (A+B) y luego le hemos sumado C, ¿podemos hacer de otra forma esa misma suma? (...) Por ejemplo A+(B+C), ¿cómo se llama esa propiedad? (...) Asociativa"*].

Prosigue con la explicación de cómo multiplicar dos por A, es decir, un escalar por una matriz A(2x3) que había escrito previamente en la pizarra [S1.E2.A1.L200-202: *"El escalar se multiplica por cada uno de los elementos de la matriz"*], combinándolo a su vez con suma y resta de matrices [S1.E2.A1.L215-220: *"vamos a hacer ahora junto la operación, por ejemplo, vamos a colocar un ejercicio donde hacemos todo junto y vamos a tener una sola matriz, aplicamos las dos cosas, producto por escalar y suma de matrices, por ejemplo, yo quiero que usted calcule 5A-4B-3C (...) Colocamos el 5 y la matriz A menos 4 y la matriz B, luego -3 y la matriz C"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En la Sesión 1 se refleja el conocimiento del profesor sobre la *Definición* de matriz, y *Registros de representación* al dejar en claro al estudiante la notación de las matrices y el empleo de los subíndices en cada elemento que las conforma y que denotan las filas y las columnas [KoT-D-I1[2]. El profesor conoce la definición de una matriz; KoT-RR-I1. El profesor conoce cómo se denotan las matrices; KoT-RR-I2. El profesor conoce la notación de los elementos de una matriz].

Es evidente también, el conocimiento de Jordy sobre las *Definiciones* de cada uno de los tipos de matrices y los ejemplos que utiliza. Por ejemplo, a partir de una matriz cuadrada forma una matriz rectangular; cuando explica qué es una matriz triangular superior menciona que existe también triangular inferior y aquellas donde se toma en cuenta la diagonal secundaria; en el caso de la matriz identidad y ante la respuesta de un estudiante que tiene unos y ceros, el profesor aclara que los unos son los de la diagonal principal y que si en esa misma matriz en vez de uno escribimos otros números, que a su vez sean diferentes de cero tendremos una matriz escalar; a partir de una matriz simétrica explica lo que es una matriz antisimétrica. Lo anterior indica que el profesor tiene un conocimiento sobre la importancia de los ejemplos, que en este caso le sirven para hacer claras diferenciaciones entre uno y otro tipo de matriz y que los estudiantes se puedan quedar con una imagen clara del concepto [KoT-D-I2. El profesor conoce la clasificación de matrices; KoT-D-I3. El profesor conoce la definición de matriz cuadrada; KoT-D-I4. El profesor conoce la definición de matriz rectangular; KoT-D-I5. El profesor conoce la definición de matriz nula; KoT-D-I6. El profesor conoce la definición de matriz triangular superior; KoT-D-I7. El profesor conoce la definición de matriz triangular inferior; KoT-D-I8. El profesor conoce la definición de matriz identidad o unitaria; KoT-D-I9. El profesor conoce la definición de matriz escalar; KoT-D-I10. El profesor conoce la definición de matriz traspuesta; KoT-D-I11. El profesor conoce la definición de matriz simétrica; KoT-D-I12. El profesor conoce la definición de matriz antisimétrica; KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices; KoT-D-I14. El profesor conoce ejemplos de cada uno de los tipos de matrices].

Además, el conocimiento del profesor acerca de *Definiciones*, se pone de manifiesto nuevamente cuando explica la igualdad de matrices con un ejemplo, donde utiliza expresiones algebraicas (igualdades literales) y los estudiantes deberán encontrar el valor de las incógnitas para llegar a establecer la igualdad de las matrices [KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices].

[2] Siglas utilizadas para identificar el subdominio (KoT), categoría (D) e indicador de conocimiento (I1).

En el segundo episodio, Jordy evidencia su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?* y *¿cuándo se puede hacer?)*, al explicar cómo sumar matrices y la condición requerida para poder efectuar esta operación algebraica, o sea, que las dimensiones de las matrices que se van a sumar sean las mismas [KoT-P1-I1. El profesor conoce el algoritmo para sumar matrices, KoT-P2-I1. El profesor conoce se requiere que las dimensiones de las matrices sean iguales para efectuar la suma].

Manifiesta también su conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos*, en este caso sobre las propiedades de la suma de matrices [KoT-PF-I1. El profesor conoce la propiedad conmutativa con respecto a la suma de matrices: A+B = B+A; KoT-PF-I2. El profesor conoce la propiedad asociativa con respecto a la suma de matrices: (A+B)+C = A+(B+C); KoT-PF-I3. El profesor conoce el elemento neutro con respecto a la suma de matrices: A+0=A; KoT-PF-I4. El profesor conoce el elemento inverso (elemento simétrico) con respecto a la suma de matrices: A+(-A)=0].

Al finalizar este episodio, el profesor evidencia conocimiento sobre *Procedimientos* (*¿cómo se hace?*) al realizar el producto de un escalar por una matriz y suma de matrices [KoT-P1-I1. El profesor conoce el algoritmo para sumar matrices; KoT-P1-I2. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar un escalar por una matriz].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Mientras Jordy explica cómo realizar la multiplicación de un escalar por una matriz combinado con suma y resta, advierte a los estudiantes sobre posibles errores que pueden cometer al realizar este procedimiento, como el detalle de no tomar en cuenta los signos, ya sea, del escalar o de los elementos de la matriz y que puede llevar a una respuesta incorrecta [S1.E2.A1.L221-225: *"Primero hacemos el producto por escalar. Entonces luego entra el escalar a multiplicar con su signo y queda afuera el signo +. Ese detalle suele ser motivo de errores muchas veces, cuando le colocan así un polinomio, usted multiplica el escalar con su signo y aquí queda ya sumado"*], dándonos así indicios de su conocimiento sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* [KFLM-FDA-I1. El profesor conoce que los estudiantes se pueden confundir en la multiplicación de los signos entre un escalar negativo y los elementos de una matriz].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Cuando Jordy enseña la clasificación de matrices escribe un ejemplo de cada tipo en la pizarra, así los estudiantes quedan con una visión clara de las características de cada matriz. Del mismo modo, cuando explica la suma de matrices escribe las matrices A, B y C, siendo A y B de dimensión 2x3 y C de dimensión 2x4; la matriz de dimensiones distintas la escribe con la finalidad de que los estudiantes vean claramente que matrices con dimensiones diferentes no se pueden sumar. Al referirse al producto de un escalar por una matriz utiliza un escalar positivo y luego en otro ejemplo, uno negativo, para que los estudiantes presten atención cuando realizan multiplicación de signos. El profesor podría haber explicado la clasificación de matrices solamente con la definición de cada una, la suma de matrices escribiendo en la pizarra dos matrices de las mismas dimensiones o el producto por escalar empleando sólo un escalar positivo por la matriz A; sin embargo, al analizar la sesión, pensamos que Jordy es consciente de la importancia de la variabilidad de ejemplos en la enseñanza de matemáticas.

Lo anterior nos da indicios del conocimiento de este profesor de *Ejemplos* para la enseñanza y podría representar una oportunidad de para profundizar en los tipos de ejemplos, con el afán de indagar sobre la justificación para la elección de los mismos en su actividad de enseñanza. [KMT-E-I1. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de la variabilidad de ejemplos en la enseñanza de la suma de matrices; KMT-E-I2. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de la variabilidad de ejemplos en la enseñanza del producto de un escalar por una matriz].

Sesión 2 (03-12-2011): Producto de matrices y álgebra de matrices

Descripción:

Episodio 1: Producto de matrices

Jordy comienza su clase haciendo que los estudiantes recuerden que en la clase anterior vieron que es necesario que dos matrices tengan las mismas dimensiones para que se puedan sumar, enseguida escribe una matriz A(2x3) en la pizarra para indicar que en el caso del producto de matrices también se necesita cumplir con una condición [S2.E1.A1.L5-7: *"Si tenemos la matriz A ¿Cuáles son las dimensiones de esa matriz? (...) La dimensión de esta matriz es 2x3. Para poder multiplicar dos matrices se necesita* *que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. Si A es así, B debe tener obligatoriamente tres filas, no importa el número de columnas"*]. Complementa su explicación escribiendo tres matrices más de diferentes dimensiones y a cada una la identifica como B cambiando sus dimensiones (3x1, 3x2, 3x4), con la finalidad de dejar claro a los estudiantes qué se necesita para la multiplicación de matrices. Posteriormente, hace referencia a las dimensiones que debe tener la respuesta del producto de dos matrices [S2.E1.A1.L30-33: *"Ahora, la respuesta del producto de dos matrices tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. La respuesta de AxB en este caso tendrá dimensiones 2x1, en este caso tendrá dimensiones 2x2 y en este caso tendrá dimensiones 2x4"*].

A continuación, Jordy hace una breve explicación de cómo responder el ejercicio 4 de la hoja de ejercicios propuestos y referido a las dimensiones de las matrices, donde deberán indicar si estas se pueden o no multiplicar y, en el caso de que se pueda, escribir las dimensiones de la matriz resultante. A raíz de la explicación de Jordy, un estudiante señala que *"en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que estén ubicadas"* y el profesor aprovecha esta afirmación del estudiante para hacer notar al resto de la clase que el producto de matrices no es conmutativo [S2.E1.A1.L56-63: *"Allí hicieron A(2x3)xB(3x1), pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede multiplicar, en este caso ¿qué pasa? (...) Correcto, en el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa (A· B ≠ B·A); no siempre es conmutativa, primero por las dimensiones y luego aunque se pudiese siendo matrices cuadradas, estas no siempre son conmutativas"*].

El profesor explica a los alumnos cómo multiplicar dos matrices con ejemplos concretos y para ello emplea las matrices que ya tenía en la pizarra identificándolas como A(2x3), B(3x1), C(3x2) y D(3x4) e indicando el algoritmo correspondiente [S2.E1.A1.L71-74: *"Lo que se hace es tomar la primera fila de la matriz A y la multiplicas por cada una de las columnas de la matriz B, se multiplican los elementos correspondientes y la suma de todos esos productos va a ser el elemento* a_{11} *de la matriz producto"*].

Episodio 2: Álgebra de matrices

En la última parte de la sesión (episodio 2), Jordy indica a los estudiantes que trabajarán el Álgebra de matrices, [S2.E2.A1.L114-118: *"Si multiplican matrices cuadradas de dimensiones nxn la respuesta va a ser otra matriz de las mismas dimensiones. Entonces* *para poder resolver funciones con matrices vamos a trabajar con matrices cuadradas. Vamos a tratar un tema que se llama Álgebra de matrices"*]. Explica cómo a partir de una matriz A(2x2) pueden obtener A elevada al cuadrado y A elevada al cubo, y procede a escribir un ejercicio [S2.E2.A1.L130-139: *"Si tenemos una función f(x) que diga por ejemplo* $2x^2-5x-3$*, defina f(A), entonces* $f(x) = 2x^2-5x-3$*,* $f(A)= 2A^2-5A-3$*. En este 3 aquí colocamos la matriz identidad de orden 2x2 para poder sumar, sino ese -3 no tiene forma de ser sumado acá, como estamos trabajando con matrices. Reemplazamos los valores y en vez de* A^2 *escribimos la matriz* $A^{2,}$ *luego donde está A se deberá reemplazar con los elementos de la matriz A y por último al lado del 3 escribir la matriz identidad 2x2"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el primer episodio, detectamos el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?* y *características del resultado)*. En el primer caso, al manifestar que para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz uno sea igual número de filas de la matriz dos y, en el segundo caso, el profesor hace explícito su conocimiento de características del resultado cuando indica que el producto resultante de dos matrices debe tener como dimensiones el número de filas de la matriz uno y el número de columnas de la matriz dos [KoT-P2-I2. El profesor conoce que para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz 1 sea igual al número de filas de la matriz 2; KoT-P4-I1. El profesor conoce que las dimensiones del producto resultante de dos matrices corresponden al número de filas de la matriz 1 y el número de columnas de la matriz 2].

El conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos* se hace evidente cuando el profesor, incitado por la afirmación realizada por un estudiante, expresa la no conmutatividad del producto de matrices, y sostiene que si son matrices cuadradas puede haber conmutatividad pero no siempre es así (no es conmutativa la multiplicación de dos matrices cuadradas diferentes aunque tengan las mismas dimensiones, por ejemplo). Relacionado a lo anterior, como parte de su conocimiento, el profesor señala, en una entrevista, un caso donde la multiplicación de matrices es conmutativa [E3.P7[3]: "*Cuando es la matriz inversa, ahí es conmutativo, o sea, la matriz inversa por su matriz que*

[3] Siglas utilizadas para identificar la entrevista (E3) y la pregunta (P7)

siempre da la identidad"] [KoT-PF-I5. El profesor conoce que generalmente el producto de matrices no es conmutativo: A·B≠B·A]. Referimos también, el conocimiento del profesor en cuanto a *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, correspondiente al algoritmo para llevar a cabo la multiplicación de dos matrices [KoT-P1-I3. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar matrices].

Lo descrito, que corresponde a un segundo episodio en esta sesión de clase, evidencia el conocimiento del profesor sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)* asociado a *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, ya que el profesor explica cómo trabajar las matrices como elementos numéricos en funciones cuadráticas y cúbicas y, a su vez, combina operaciones que corresponden a la suma de matrices, producto de dos matrices y producto de un escalar por una matriz [KoT-F2-I1. El profesor conoce que las matrices se pueden emplear como un objeto numérico que puede ser sujeto de operaciones (por ejemplo en el caso de una función en lugar de reemplazar las variables con un número real se puede emplear una matriz); KoT-P1-I2. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar un escalar por una matriz].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

En el desarrollo de la sesión dos encontramos indicios del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas, en lo referente a *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* [S2.E1.A1.L:103-106: *"Ahí tiene usted el ejercicio 5, si en caso no es posible realizar el producto, escriba que no se puede hacer. Siempre es bueno definir las dimensiones de las matrices para evitar algún tipo de error en el producto"*]. Estas palabras nos llevaron a indagar a través de una entrevista al profesor donde se le preguntó acerca de los principales errores que suelen cometer los estudiantes al realizar el producto de matrices y por qué cree que es importante definir las dimensiones de las matrices antes de realizar el producto. Así obtuvimos como respuesta [E3.P4: *"Siempre el error que primero pueden cometer es que el chico piense que hay que multiplicar número por número según la posición que está, o sea, puede ocurrir eso. Entonces al menos en ese sentido en la multiplicación de matrices, yo suelo insistir en las dimensiones, por eso al principio se les dice cómo determinar las dimensiones de una matriz y que sepan hacerlo bien para que no haya después confusión. Si yo tengo dos matrices cuadradas, los chicos pueden sacar resultado matriz 2x2 que es lo lógico pero* *en cambio pueden hacer lo mismo de la suma, multiplican los elementos que corresponden en cada matriz según su posición y sacan una matriz 2x2, pero obviamente tiene error porque no es así, suelen equivocarse en eso cuando no tienen claro el concepto o la definición de una operación"*]. Es claro el conocimiento de este profesor en cuanto a que los estudiantes pueden no tomar en cuenta las dimensiones de las matrices en la multiplicación, y además, intentar resolver el producto como si fuera una suma, por eso repite varias veces en el transcurso de la sesión que se necesita que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda para que se puedan multiplicar [KFLM-FDA-I2. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al realizar el producto de matrices sin tomar en cuenta previamente las dimensiones de las mismas].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Sabemos que el conocimiento de la enseñanza y de las características de aprendizaje de las matemáticas está relacionado. En este caso, lo descrito con relación al KFLM de Jordy y los ejemplos que emplea para explicar el producto de matrices nos lleva a indicios de KMT, ya que el profesor explica el producto empleando matrices que no son cuadradas A(2x3), B(3x1), C(3x2) y D(3x4); con lo cual asociamos un énfasis en la enseñanza, pensando que elige estos ejemplos por la posible repercusión en la visión del contenido de los alumnos, es decir, evita abordar el tema de la multiplicación con dos matrices cuadradas del mismo orden para dejar claro a los estudiantes la importancia que tiene definir las dimensiones de las matrices al multiplicar y que les llevará a determinar si se puede o no realizar el producto [KMT-E-I3. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de los ejemplos en la enseñanza del producto de matrices].

Sesión 3: (07-12-2011): Matriz inversa 2x2, matriz escalonada y matriz canónica

Descripción:

Episodio 1: Matriz inversa 2x2

El profesor comienza esta sesión introduciendo una definición de matriz inversa [S3.E1.A1.L8-21: *"La matriz inversa es otra matriz que al multiplicarse por la matriz dada, el resultado es la matriz identidad:* $AxA^{-1} = I$*. Si tú multiplicas un número por otro* *es inverso siempre que te dé 1, entonces siendo matrices al multiplicar la matriz por la inversa te tiene que dar la matriz identidad, estamos hablando de matrices cuadradas (...) Entonces ¿cómo encontramos la inversa?, vamos a partir de la propiedad. Si tenemos otra matriz x, y, z, w. Si multiplico esta matriz por esta otra matriz ¿qué me tiene que dar como resultado? (...) La matriz identidad"*]. Sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y Jordy enuncia una excepción de esta propiedad [S3.E1.A1.L13-14: *"También se da que el producto de una matriz por su inversa* (AxA^{-1}) *es conmutativo"*].

A continuación, inicia su explicación de cómo encontrar la matriz inversa de A(2x2), empleando $AxA^{-1} = I$. Se conocen los elementos de A y los de la matriz identidad, los elementos de A^{-1} los escribe como incógnitas (x, y, z, w); realiza el producto de AxA^{-1} e indica a los estudiantes que utilicen el concepto de igualdad de matrices para obtener sistemas de ecuaciones, y que los resuelvan por el método de eliminación para obtener así los elementos de la matriz inversa de A. Solicita a los estudiantes comprobar que la matriz inversa obtenida es correcta [S3.E1.A1.L45-46: *"Haga la prueba, multipliquen ahora la matriz A por la inversa que han encontrado a ver si es cierto que se obtiene la matriz identidad"*].

Una vez explicado el tema, entrega una hoja de ejercicios e indica que resuelvan el numeral 1 que consiste en calcular la inversa de las matrices A, B, C y D, con el procedimiento que han aprendido. Al darse cuenta de que algunos estudiantes comenten errores en la notación de las matrices indica [S3.E1.A1.L45-46: *"Los signos son importantes, los símbolos son importantes. Otra cosa, esto es una ecuación matricial. Aquí tenemos dos matrices pero es una ecuación, esto es igual que esto, siga manteniendo la igualdad. Porque esta matriz es igual a esta es que sacamos este sistema de ecuaciones. Al final usted termina escribiendo la matriz inversa,* A^{-1} *es igual a tal cosa"*]. Les hace notar a los estudiantes que es importante definir con su respectiva letra a cada matriz (si se trata de A, A^{-1} o I), ya que no es correcto escribir de forma seguida la matriz A, su inversa y la identidad denotando al inicio solo la letra A y el signo igual.

Episodio 2: Matriz escalonada y canónica

En el episodio dos, el profesor escribe tres matrices en la pizarra y solicita a los estudiantes que se fijen en las características de cada una, los ejemplos tienen la finalidad de explicar qué son matrices escalonadas [S3.E2.A1.L89-115: *"¿Qué pasa en la primera* *matriz, qué le ven de especial? Primero no son cuadradas, ¿qué tienen de especial? (...) ¿Qué pasa con los ceros? (...) Van aumentando a medida ¿que qué, se van incrementando en dónde? Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las filas. Lo importante es que haya ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila (...) Este tipo de matrices se llaman matrices escalonadas, va como una escalera y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener todas las filas ceros. A estos elementos que son los primeros elementos en cada fila diferentes de cero, se les conoce como elementos distinguidos de fila"*]. Jordy indica también en qué consiste una matriz canónica [S3.E2.A1.L123-126: *"Hay otro tipo de matriz que se llama de la forma canónica. La matriz reducida a la forma canónica es cuando los elementos distinguidos son unos y en su columna es el único número diferente de cero, son las dos condiciones"*].

Cada una de estas matrices, escalonada y canónica posee características que las diferencian y Jordy hace explícito esto a sus estudiantes [S3.E2.A1.L127-136: *"La forma escalonada solamente los ceros van aumentando en cada fila, esa es la forma escalonada. En la forma canónica ese elemento debe ser 1 y debe ser en su columna el único número diferente de cero. Para llegar a eso, tú puedes escoger cualquier matriz y transformarla a la forma escalonada y pueden haber muchas matrices escalonadas diferentes a la matriz que tú encontraste, o sea, entre ellas serían equivalentes, son equivalentes la una con la otra. Si de una matriz te sale otra porque le haces algunas operaciones son equivalentes pero reducirla a la forma canónica solamente hay una, para cada matriz hay una"*].

El profesor continúa con el desarrollo de la clase y escribe una matriz de dimensiones 3x4, procede a indicar posibles operaciones elementales entre filas para llegar a escalonarla, explicando claramente con ejemplos cada procedimiento que se puede realizar [S3.E2.A1.L141-164: *"Primero, puedes cambiar una fila con otra: $E_1 = f_i \rightarrow f_j$ (...) Otra cosa que se puede hacer, tú puedes reemplazar cualquier f_i por esa fila multiplicada por un escalar k diferente de 0: $E_2 = f_i \rightarrow f_i.k$. La tercera cosa que pueden hacer, puedes tomar una f_i cualquiera y a ella le puedes sumar otra f_j multiplicada por un escalar k: $E_3 = f_i \rightarrow f_i + k{\cdot}f_j$ (...) Y también pueden hacer la cuarta operación, vamos a reemplazar una f_i por ella multiplicada por un escalar cualquiera sumado a otra fila multiplicada por otro escalar cualquiera: $E_4 = f_i \rightarrow k{\cdot}f_i + k{\cdot}f_j$"*]. Finalmente, culmina su explicación poniendo en práctica lo explicado y reduciendo a la forma escalonada una matriz 3x4.

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el primer episodio, está presente el conocimiento del profesor sobre *Definiciones,* al explicar en qué consiste una matriz inversa y el concepto de igualdad de matrices. Además, pensamos que su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* se pone de manifiesto al señalar que si se multiplica una matriz por su inversa debe dar como resultado la matriz identidad. [KoT-D-I15. El profesor conoce la definición de matriz inversa ($AxA^{-1} = I$); KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices; KoT-P4-I12. El profesor conoce que el producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad]. Así mismo, muestra conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, al encontrar la inversa de una matriz aplicando $AxA^{-1} = I$ e igualdad de matrices [KoT-P1-I4. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $AxA^{-1} = I$].

Presenta además, su conocimiento sobre *Registros de representación* de la matriz inversa y la identidad, dando un énfasis a la notación matemática en este episodio, ya que insiste a sus estudiantes que es necesario e importante utilizar el lenguaje matemático formal correctamente, lo cual es también manifestado cuando se le preguntó en una entrevista por qué creía que es importante la notación [E3.P12: "*La notación es importante para que ellos sepan entender cuando están expresando una cuestión como una expresión algebraica, que sepan diferenciar en ella qué representa cada letra, cada símbolo"*] [KoT-RR-I3. El profesor conoce la notación de la matriz inversa; KoT-RR-I4. El profesor conoce la notación de la matriz identidad].

En el segundo episodio, es claro el conocimiento de este profesor sobre *Definiciones*, en este caso de la matriz escalonada y canónica. [KoT-D-I16. El profesor conoce la definición de matriz escalonada; KoT-D-I17. El profesor conoce la definición de matriz canónica].

Jordy presenta también, conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)*, porque aclara que una misma matriz puede ser escalonada de muchas formas y los resultados son equivalentes entre sí, pero al obtener la matriz canónica, solamente existe una para cada matriz original [KoT-P4-I2. El profesor conoce que una misma matriz puede escalonarse de distintas formas siendo todas equivalentes; KoT-P4-I3. El profesor conoce que cada matriz tiene sólo una forma de matriz canónica].

Al finalizar el episodio dos hay evidencias del conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, porque explica paso a paso cómo llegar a escalonar una matriz con cuatro tipos diferentes de operaciones elementales entre filas. [KoT-P1-I5. El profesor conoce el procedimiento para escalonar una matriz].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

En ocasiones los estudiantes conocen cómo resolver un ejercicio pero no prestan la debida atención al lenguaje matemático formal. Jordy tiene conocimientos sobre los posibles errores en cuanto a la notación de las matrices. En este episodio, se refleja la falta de atención de los estudiantes al denotar incorrectamente una matriz (A), su inversa (A^{-1}) y la matriz identidad (I), ya que tienden a llamar "A" a las tres matrices aunque son de naturaleza diferente. El profesor advierte que no es correcto [S3.E2.A1.L53-58: *"Errores que no deben cometer. Están escribiendo la matriz A ponen igual y escriben todo esto* (se refiere a la matriz A, su inversa y la identidad). *Esto no es cierto, no es cierto que A es igual a todo eso. No se trata se escribir signos en cualquier parte. Lo correcto es que A esta multiplicado por su inversa y que eso es igual a la matriz identidad"*]. El profesor evidencia su conocimiento sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, ya que al notar que un estudiante cometió este error mientras resolvía uno de los ejercicios hace una advertencia a toda la clase para que lo eviten [KFLM-FDA-I3. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar en la notación de diferentes clases de matrices].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Preguntamos al profesor en una entrevista cómo elige los ejemplos sobre matrices escalonadas que utilizó en esta clase [E2.P10: *La intención era escribirles tres matrices diferentes y cada una escalonada a su manera, si te das cuenta la última no tiene elementos diferentes de 0 en la primera columna, y la segunda no tiene elementos diferentes de 0 en la tercera fila, pero ambas son escalonadas, incluso no es cuestión de que vayan seguiditos los numeritos sino que puede haber una diferencia de varios* *números en el escalonamiento de una matriz. Las puse con la intención de que los estudiantes se den cuenta de que hay diferentes clases de matrices escalonadas y qué es lo fundamental de una matriz escalonada"*]. Jordy generalmente trabaja con ejemplos variados, en este caso, constituyen un medio para dar al estudiante una visión amplia de las características de matrices escalonadas a través de tres ejemplos de matrices, que aunque son del mismo orden (3x4) están escalonadas de distintas formas. De forma genérica, vemos aquí su conocimiento para la enseñanza en lo que concierne a la pertinencia de los ejemplos [KMT-E-I4. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de la variabilidad de los ejemplos en la enseñanza de la reducción de una matriz a su forma escalonada].

Sesión 4: (14-12-2011): Matriz canónica y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a la forma canónica

Descripción:

Episodio 1: Matriz canónica

Habiendo realizado en la sesión anterior una introducción sobre la matriz canónica a partir de la matriz escalonada, en el primer episodio de esta sesión el profesor escribe una matriz aumentada en la pizarra, y con la ayuda de los estudiantes efectúa operaciones elementales entre filas hasta escalonarla [S4.E1.A1.L7-26: *"Ahí tenemos esa matriz, vamos a reducirla para recordarlo todos, primero vamos a escalonarla con las operaciones elementales entre filas (...) ahí tenemos ya la matriz escalonada, eso fue lo que trabajamos la clase anterior"*]. Posteriormente, enlista las condiciones necesarias para que una matriz sea canónica [S4.E1.A1.L32-35: *"Son dos condiciones: Primera condición, todos los elementos distinguidos deben ser igual a 1 y, en cada columna donde esté el elemento distinguido, todos deben ser cero menos él"*]; de esta manera procede a reducir hasta su forma canónica a través de operaciones elementales entre filas, aquella matriz que previamente había escalonado.

El profesor indica a sus estudiantes que para practicar pueden reducir a su forma escalonada y canónica aquellas matrices que constan en la hoja de ejercicios que entregó en la clase anterior. Va preguntando cómo queda la primera matriz ya escalonada, y a su vez verifica que la respuesta esté correcta haciendo las operaciones él mismo; así crea el contexto propicio para indicar que una misma matriz puede presentarse escalonada de varias formas, mientras que cada matriz sólo tiene una forma de matriz canónica [S4.E1.A1.L107-109: *Si usted utiliza otro orden puede que la matriz escalonada no les salga igualita, puede variar las operaciones entre filas y les va a salir otra matriz escalonada, pero la canónica sí debe ser la misma"*].

Episodio 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a matriz canónica

En el segundo episodio de esta sesión, el profesor escribe una matriz A(3x3) aumentada y su canónica, la finalidad es hacer ver a los estudiantes que una aplicación de las matrices canónicas es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales [S4.E2.A1.L121-149: *"Vamos a tomar en cuenta esto como si fuese una matriz aumentada y veamos cada fila como si fuesen los coeficientes de una ecuación (...) si he llegado con operaciones elementales entre filas a esta matriz canónica (...) ya resolvió el sistema (...) utilizando operaciones elementales entre filas reduciendo a la forma canónica tenemos la solución del sistema de ecuaciones, en este caso insisto hay una única solución"*].

Explica además, la diferencia entre matriz de coeficientes y matriz aumentada [S4.E2.A1.L131-135: *"Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, si yo parto de aquí y ubico los coeficientes acá tengo una matriz. Hasta ahí sería la matriz de los coeficientes del sistema, al colocarle los elementos independientes le estoy colocando la matriz aumentada incluidos los términos independientes"*].

Jordy escribe ahora la matriz B(3x3) y su canónica, esta vez con la finalidad de que los estudiantes noten que hay sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones y al igual que en el episodio anterior se pueden resolver con operaciones elementales entre filas hasta reducir la matriz aumentada a su forma canónica. Hace además, una interpretación a los estudiantes sobre el resultado de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales que ha puesto como ejemplos [S4.E2.A1.L155-156, 181-184: *"Cuando hay tres variables y nos quedan tres filas hay una solución como en este caso (...) Aquí tengo más variables que ecuaciones en la matriz ya reducida a la forma canónica, tengo 3 incógnitas y tengo dos ecuaciones. Cuando ocurre eso, en ese momento el sistema tiene un número ilimitado de soluciones"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Jordy muestra su conocimiento sobre *Definiciones*, en este caso de una matriz canónica asociado a su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al reducir una matriz aumentada hasta su formas escalonada y canónica [KoT-D-I17. El profesor conoce la definición de matriz canónica; KoT-P1-I5. El profesor conoce el procedimiento para escalonar una matriz; KoT-P1-I6. El profesor conoce el procedimiento para reducir una matriz a su forma canónica].

Detectamos también, el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (características del resultado)*, ya que manifiesta diferencias entre una matriz escalonada y canónica, lo cual será de utilidad para el desarrollo de ejercicios por parte de los estudiantes [KoT-P4-I2. El profesor conoce que una misma matriz puede escalonarse de distintas formas siendo todas equivalentes; KoT-P4-I3. El profesor conoce que cada matriz tiene sólo una forma de matriz canónica].

El profesor muestra conocimiento sobre *Fenomenología* (usos y aplicaciones), debido a que conoce que las matrices canónicas pueden representar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Así mismo, se hace evidente el conocimiento del Jordy sobre *Definiciones* asociado a *Registros de representación* de una matriz de los coeficientes y una matriz aumentada, ya que hace explícito a los estudiantes que cuando trabajan con sistemas de ecuaciones pueden representar por un lado la matriz de coeficientes del sistema y si a esto le incluyen los términos independientes pasa a llamarse matriz aumentada [KoT-F2-I2. El profesor conoce que una aplicación de las matrices canónicas es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; KoT-D-I18. El profesor conoce en qué consiste la matriz de los coeficientes; KoT-D-I19. El profesor conoce en qué consiste la matriz aumentada; KoT-RR-I5. El profesor conoce la notación para la matriz de los coeficientes y la matriz aumentada].

Del mismo modo, podemos mencionar el conocimiento de Jordy en cuanto a *Procedimientos (características del resultado)*, por cuanto hace ver a los estudiantes las características de los sistemas de ecuaciones lineales resueltos (una solución, infinitas soluciones). Lo anterior se sustenta con lo expresado por el profesor en una entrevista cuando se le preguntó sobre estos ejemplos [E3.P3: *"Los ejercicios que se plantean* *siempre tienen variedad en las aplicaciones que se van aprendiendo. Suponga usted que se plantean varios ejercicios y todos apuntan a un mismo conocimiento, o a una misma dificultad o a un mismo resultado pues no tiene gracia. Por ejemplo, cuando planteas un problema de ecuaciones, pues dentro del problema tiene que haber la variedad: que haya infinitas soluciones, que haya una o que no haya soluciones. Para que el joven vaya viendo en los ejercicios que resuelve todas las posibilidades que hay en el tratamiento de ese tema*"].

El profesor hace explícitas las diferencias entre estos dos sistemas, siendo ambos compatibles, uno de ellos determinado (única solución) y el otro indeterminado (infinitas soluciones). Su conocimiento le permite elegir o inventar ejemplos de cada caso posible tomando en consideración dos tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Jordy es consciente de que el estudiante debe tener claro los distintos tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales y que estos se obtienen reduciendo una matriz a su canónica [KoT-P4-I4. El profesor conoce que reduciendo una matriz a su canónica se puede obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado; KoT-P4-I5. El profesor conoce que reduciendo una matriz a su canónica se puede obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado].

Sesión 5 (21-12-2011): Matriz inversa 3x3, cálculo del determinante 2x2, 3x3 y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

Descripción:

Episodio 1: Matriz inversa 3x3

Jordy explica a los estudiantes cómo calcular la matriz inversa de A(3x3), indicando que con las operaciones elementales entre filas (método de Gauss Jordan) deberán obtener una matriz identidad del lado izquierdo, y la matriz que quede en el lado derecho será la inversa [S5.E1.A1.L5-10: "*Vamos a escribir ahora una matriz en donde esté la matriz A y además esté la matriz identidad y a partir de ahí aplicando operaciones elementales entre filas vamos a obtener al lado izquierdo la matriz identidad y al lado derecho la matriz inversa de A así* $(A,I)\rightarrow(IA^{-1})$"]. El profesor hace una llamada de atención a sus estudiantes para que se fijen que pueden hacer más sencillas las operaciones elementales entre filas, necesarias para obtener la matriz identidad y con la intervención de los estudiantes procede a resolver el ejercicio propuesto [S5.E1.A1.L13-39: *"Si aplicamos operaciones elementales entre filas y en esta parte obtenemos la matriz identidad, automáticamente en esta otra parte nos va a quedar la matriz inversa de A, entonces hacemos ese proceso, ¿qué es lo primero que podemos hacer ahí?, ¿cuál es la primera cosa que podíamos hacer? (...) Yo por ejemplo haría: esta fila 3 la colocaría en la fila 1, para tener este 1 como primer elemento, eso es una de las cosas que se puede hacer, pero vamos a dejarla ahí. Entonces, a raíz de este elemento vamos a comenzar a hacer ceros el 3 y el 1 ¿Cómo haría 0 aquí? (...) Ya, procedemos a hacer eso. Luego $f_3 \rightarrow 2f_3 - f_1$ Ahora, ¿cuál hacemos 0? (...) Entonces f_3 vamos a reemplazarla por f_3+5f_2 Como la única fila que va a cambiar es f_3 el resto nos queda igualito ¿Siguiente paso? Hay que hacer 0 ese -1, entonces f_1 lo reemplazamos por f_1-f_2 Lo de abajo queda igualito. Y ahora hay que hacer 0 el 10 y el -7. Ahí, ¿qué es lo que falta hacer? (...) Entonces reemplazamos f_1 por $1/44f_1$; f_2 por $-1/44f_2$ y f_3 la reemplaza por $-1/44f_3$ Entonces, ¿cuál es la matriz inversa de A?"*].

Episodio 2: Cálculo del determinante 2x2, 3x3 y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

El profesor introduce una definición de determinante, y a su vez los usos del mismo [S5.E2.A1.L48-53: *"De una matriz se puede hacer permutaciones con los números, puede ir tomando un elemento de diferente fila diferente columna y multiplicarlos entre sí, y en base a eso podemos calcular lo que se llama el determinante de una matriz. Eso también nos va a servir para resolver sistemas de ecuaciones y para otras aplicaciones, para encontrar la inversa inclusive"*]. Explica también cómo calcular el determinante de una matriz 2x2 [S5.E2.A1.L55-65: *"Vamos a calcular el determinante de una matriz por ejemplo 2x2 (...) Yo puedo combinar los elementos de esa matriz tomando siempre un elemento de una fila y columna diferente (...) Entonces tú armas ese producto tomado en este sentido de manera diagonal y luego cuando haces la otra permutación le restas a ese producto entonces aquí le restas a ese producto, esa permutación, el producto de la otra permutación"*]. Jordy aprovecha el contexto para hacer hincapié a sus estudiantes en la notación de una matriz y un determinante [S5.E2.A1.L71-78: *"Una observación, la matriz 2x2 es esta (...) En el momento que calculamos el determinante ya no se lo coloca de esa forma, yo voy a calcular el determinante de la matriz A, entonces aquí en vez de paréntesis hay que colocar barras (...) El determinante se denota así det (A) o así $|A|$"*]

y expresa que el determinante es un escalar [S5.E2.A1.L76-77: *"El determinante de esa matriz es siempre un escalar, no es otra matriz"*].

Enseguida, el profesor explica cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas mediante la Regla de Cramer [S5.E2.A1.L85-97: *"Entonces, en este caso hay que calcular el determinante del sistema que está dado por los coeficientes de las incógnitas. Hay que calcular el determinante de* x_1 *y el determinante de* x_2 *(...) Ahora, para calcular* x_1 *lo que se hace es dividir el* Dx_1 *para el determinante del sistema y para calcular el* x_2 *divides el* Dx_2 *sobre el determinante del sistema"*]. Continúa la sesión con el cálculo del determinante de una matriz A(3x3) mediante la Regla de Sarrus [S5.E2.A1.L107-116: *"Lo que se suele hacer es aumentar las dos primeras filas en el mismo orden y se toman los elementos así (...) También se puede hacer, otra cosa que puede hacer usted es que estas dos columnas la repite allá y así usted logra fácilmente combinar o permutar, siempre un elemento de fila y columna diferente"*]. De esta forma, ya le es posible aplicar la Regla de Cramer nuevamente para resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas [S5.E2.A1.L127-139: *"Vamos a resolver un sistema de ecuaciones 3x3. Un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas. Escriba ahí el sistema siguiente* $3x - 2y + 5z = 5$; $2x - 3y + z = -2$; $x + 2y - 3z = -1$. *Hay que calcular el determinante del sistema (D), Dx, Dy, Dz y luego el valor de las incógnitas. Primero el determinante del sistema. El determinante para x. Ahí ya puede sacar x, será igual a 1/3. El determinante de y. El valor de y es entonces 4/3. El determinante de z, z sería 4/3 también"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO LOS TEMAS (KoT)

En el episodio uno, hay evidencia del conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, al encontrar la matriz inversa de A aplicando el método de Gauss Jordan. Las operaciones elementales entre filas de una matriz nos permiten generar diversos tipos de cálculos para llegar a obtener una matriz identidad, y en esta parte de la sesión, hay que destacar que el conocimiento del profesor no se limita solo al mero procedimiento sino también a que sabe elegir la forma más efectiva del mismo, conoce formas de optimizar el proceso, de hacerlo más práctico y más corto, el profesor reflexiona sobre las operaciones posibles y lo hace explícito a los alumnos [KoT-P1-I20. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando el método de Gauss Jordan].

En el episodio dos, podemos referir el conocimiento del profesor sobre *Definiciones*, ya que enuncia el concepto de determinante y también su conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, porque explica que el determinante lo aplicarán después al calcular la matriz inversa y resolver sistemas de ecuaciones lineales; es decir, conoce aplicaciones enmarcadas dentro de la propia matemática e incluso dentro del propio contenido. Jordy conoce también los *Registros de representación* de un determinante, y hace explícita la diferencia de la notación entre una matriz, cuyos elementos se escriben entre paréntesis, y un determinante, cuyos elementos se escriben entre barras. Así mismo, hay que mencionar su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)*, cuando el profesor menciona que el determinante es un escalar [KoT-D-I20. El profesor conoce la definición de determinante de una matriz; KoT-F2-I3. El profesor conoce que el cálculo del determinante de una matriz se puede aplicar en la resolución sistemas de ecuaciones lineales; KoT-F2-I4. El profesor conoce que el cálculo del determinante de una matriz se puede aplicar para obtener la matriz inversa; KoT-RR-I6. El profesor conoce la notación del determinante de una matriz; KoT-P4-I6. El profesor conoce que el determinante de una matriz es un escalar y no otra matriz].

Adicionalmente, en el segundo episodio, referimos conocimiento de este profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* para obtener el determinante de una matriz, tanto de orden dos como de orden tres, a través de la regla de Sarrus aplicada en sus diferentes variantes, es decir, aumentando las dos primeras filas o las dos primeras columnas. Hay que mencionar también el conocimiento del profesor sobre la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas [KoT-P1-I7. El profesor conoce cómo calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus; KoT-P1-I8. El profesor conoce cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Pensamos en indicios del conocimiento del profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, al mencionar que cuando se trabaja con determinantes, en lugar de paréntesis hay que colocar barras. Al parecer, Jordy lo hace explícito a sus estudiantes porque es consciente de que el no fijarse en la notación de cada uno, puede llevar a que los estudiantes no establezcan las diferencias entre un determinante y una matriz. Esto nos lleva a pensar en una oportunidad de investigación relacionada con el papel que este profesor otorga a la notación matemática en sus clases, lo cual estaría relacionado con el KPM [KFLM-FDA-I4. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar en la notación de una matriz y un determinante].

También creemos que el profesor conoce que cuando se calcula el determinante por la regla de Sarrus, para los estudiantes es común confundir el signo de los productos porque pueden olvidar que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan [S5.E2.A1.L119-122: *"Tener en cuenta eso, los productos así se suman y los productos así se restan. Los que van paralelos a la diagonal principal se suman, los productos de las permutaciones de los elementos que van paralelos a la diagonal secundaria se restan"*]. [KFLM-FDA-I5. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus por no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan].

Sesión 6 (28-12-2011): Matriz de cofactores, matriz adjunta y matriz inversa

Descripción

Episodio 1: Matriz de cofactores, matriz adjunta, matriz inversa

Jordy escribe una matriz 3x3 en la pizarra y da una definición de menor con su ejemplo [S6.E1.A1.L2-10: *"El menor de cualquier elemento a_{ij} es una matriz, donde no hay ningún elemento de la fila ni de la columna del elemento que tomas como referencia. Entonces ese es el menor, es una submatriz entonces tú quitas, para colocar el menor de una matriz quitas toda la fila y toda la columna que corresponde al elemento que tomas. Por ejemplo, si queremos escribir el menor del elemento a_{11} sería la matriz, entonces como a_{11} está aquí no tomamos en consideración ningún elemento ni de la fila ni de la columna a la que corresponde dicho elemento. Ese sería el menor"*]. Explica posteriormente cómo obtener los signos de la matriz de cofactores [S6.E1.A1.L15-17: *"Hay una forma de determinar signos, o sea cada elemento de la matriz se le determinan los signos elevando el -1 a la suma de los subíndices $(-1)^{i+j}$"*], para enseguida introducir la definición de cofactor y la diferencia con lo que es un menor [S6.E1.A1.L23-32:

"Entonces este signo de aquí lo toma el determinante del menor y en ese momento ese valor o ese número que obtenemos sería el cofactor. O sea ¿qué es el cofactor? El cofactor se podría decir que es el determinante del menor sin nada. Primero, ¿qué es el menor?, el menor de un elemento cualquiera, es una submatriz en donde no se toma en consideración ningún elemento de la fila y de la columna del elemento que se ha tomado, ese es un menor ¿Pero qué es el cofactor en cambio? El cofactor es el determinante de ese menor pero colocado el signo"].

Prosigue con una explicación de cómo obtener la matriz de los cofactores [S6.E1.A1.L34-61: *"Entonces vamos a obtener la matriz de los cofactores de A. Colocamos la matriz A, vamos a obtener la matriz de todos los cofactores de ella (...) Para* a_{11}*, la forma de escribirlo para colocar el signo -1 elevado a la 1+1 y el determinante del menor ¿cuál sería? Si este es* a_{11}*, el determinante del menor sería, eliminando la fila primera y la columna primera, o sea se eliminan la fila 1 y la columna 1 (...) Sí vamos a determinar el cofactor que es el determinante del menor con el signo respectivo. Entonces ¿cuál es el valor aquí? ¿Cuál sería el determinante para el elemento* a_{21}*? (...)* a_{31} *será igual, determinamos el signo ¿cuál es el determinante del menor? (...) Determinamos en la segunda columna la matriz de cofactores. Sería* $a_{12} = (-1)^{1+2}$*¿Cuál sería el determinante ahí? (...) ¿*a_{22} *será? (...) ¿*a_{32}*? (...) Falta la última columna (...) ¿Y el elemento* a_{33}*? (...) Esa es la matriz de los cofactores"*], haciendo un énfasis en que cuando se colocan barras ya no se trata del menor de una matriz sino de un determinante [S6.E1.A1.L39-41: *"Fíjese que al colocar esta presentación con barras estamos hablando de determinantes, no del menor, menor sería cuando colocamos paréntesis"*]. A partir de la matriz de los cofactores procede a obtener la matriz adjunta [S6.E1.A1.L62-64: *"Entonces con esa matriz de los cofactores determinamos la matriz adjunta. También se le llama adjunto clase. Y la matriz Adj (A) es la que acabamos de determinar pero traspuesta"*]. Una vez que ya tienen la matriz adjunta, indica a los estudiantes que van a calcular el determinante de A, y así ya será posible calcular la inversa de la matriz [S6.E1.A1.L72-78: *"Ahora, eso de ahí nos ayuda a encontrar la matriz inversa de A. Para encontrar la matriz inversa de A necesito calcular el determinante de A (...) La matriz inversa de A se obtiene multiplicando uno sobre el determinante de A por la Adj de A"*]. Con el ejemplo explicado, el determinante de la matriz se hace cero y el profesor advierte a sus estudiantes que cuando eso ocurre la matriz no tiene inversa [S6.E1.A1.L79-80: *"Como se nos hizo 0 el determinante no podremos encontrar la inversa"*].

Jordy solicita a los estudiantes encontrar la inversa de otra matriz A(3x3), de manera que practiquen lo que él ha explicado. Cuando llegan al cálculo del determinante, aprovecha para explicar que se puede utilizar el método del menor y los cofactores para obtener un resultado [S6.E1.A1.L135-140: *"Combinando alguna fila con el concepto de cofactor, también hay una forma de encontrar el determinante. Tomemos una fila cualquiera, vamos a calcular el determinante de otra manera utilizando los cofactores (...) Esa es otra forma de calcular el determinante de una matriz, tomas una fila cualquiera, es más fácil cuando tomas los elementos más pequeños, donde hayan más ceros porque cualquier número multiplicado por 0 es 0, entonces se hace más sencillo. Tomas una fila cualquiera, la multiplicas por el cofactor y sacas el determinante de esa matriz"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el discurso del profesor se puede notar la importancia que quiere transmitir a sus estudiantes sobre la distinción entre lo que es un menor y un cofactor, evidenciando así su conocimiento sobre *Definiciones* y acompañado de conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* cuando calcula la matriz de los cofactores, la matriz adjunta, el determinante por la regla de Sarrus y cuando expresa cómo calcular la inversa. Así mismo, detectamos su conocimiento sobre *Registros de representación*, al referirse a la notación de un determinante y de un menor, sabe que el menor se denota como una matriz y que si a esta le colocamos barras se trata del determinante del menor. También es posible mencionar un conocimiento sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)* cuando Jordy indica que si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa [KoT-D-I21. El profesor conoce en qué consiste el menor de una matriz; KoT-D-I22. El profesor conoce en qué consiste un cofactor; KoT-P1-I9. El profesor conoce cómo calcular la matriz de cofactores; KoT-P1-I10. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 3x3; KoT-P1-I7. El profesor conoce cómo calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus; KoT-P1-I11. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$; KoT-RR-I7. El profesor conoce la notación para el menor de una matriz; KoT-RR-I6. El profesor conoce la notación del determinante de una matriz; KoT-P2-I3. El profesor conoce que para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero].

Nuevamente se evidencia su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al calcular el determinante por el método del menor y los cofactores [KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores].

En la explicación de cómo calcular el determinante por menores y cofactores, el profesor tiene claro que siempre es más fácil el procedimiento si escoges la fila o columna que tenga más ceros, y lo hace explícito a sus estudiantes, lo cual nos lleva a pensar en su conocimiento de las formas más prácticas de realizar un procedimiento [KoT-P1-I13. El profesor conoce que cuando calculas el determinante de una matriz por el método el menor y cofactores, es más fácil el procedimiento si escoges aquella fila o columna donde haya más ceros o unos].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Jordy muestra conocimiento acerca de las *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, cuando explica cómo calcular el determinante de una matriz por el método del menor y cofactores [S6.E1.A1.L128-132: *"Un detalle por si acaso, esto de aquí ¿qué es? ¿es una matriz o un determinante? Esto no es una suma de escalares, no es una suma de matrices y producto por escalar. Esto es la combinación entre una fila y sus cofactores. Usted multiplica los elementos de una fila cualquiera por sus cofactores y eso lo suma y a ver qué sale. Esto es un determinante"*]. El profesor sabe que los estudiantes pueden equivocarse al resolver la multiplicación de un escalar por un determinante, aplicando el mismo procedimiento que cuando se multiplica un escalar por una matriz, por eso advierte a los estudiantes que es diferente [KFLM-FDA-I6. El profesor conoce que los estudiantes pueden no tomar en cuenta las propiedades de los determinantes y equivocarse al multiplicar un escalar por un determinante, resolviendo igual que cuando se multiplica un escalar por una matriz].

Sesión 7 (04-01-2012): Cálculo del determinante empleando cofactores, operaciones elementales entre filas y propiedades

Descripción:

Episodio 1: Cálculo del determinante empleando cofactores, operaciones elementales entre filas y propiedades

Jordy inicia esta sesión recordando a sus estudiantes cómo calcular el determinante de una matriz 3x3 a través del menor y los cofactores [S7.E1.A1.L2-13: *"Estamos ahora calculando el determinante utilizando cofactores, entonces para los que llegaron recién, para que se igualen en lo que estamos trabajando, tenemos aquí un determinante, vamos a calcularlo utilizando el método de cofactores. Tomamos una fila o una columna cualquiera, entonces cada cofactor tiene su signo, aquí sabemos que es signo positivo, multiplicamos + por + da + 3 y esto multiplicado por el determinante del menor. Igual con el 5 sabemos que aquí en la matriz de los signos tenemos signo negativo, entonces – por – da +, luego colocamos aquí el determinante del menor. Aquí tiene signo positivo entonces + por + da +, como es 1 no hace falta colocarlo, luego resolvemos cada uno de los determinantes"*]. Lo hace a manera de introducción, para explicar posteriormente que también se puede obtener el determinante con operaciones elementales entre filas y aplicando propiedades, de esta forma es posible encontrar el determinante de matrices de orden superior. El profesor utiliza una matriz A(3x3) y muestra el cálculo del determinante por menores y cofactores; esa misma matriz le sirve para hacer ver a los estudiantes que las operaciones elementales entre filas y propiedades de los determinantes son útiles para transformar en cero algunos elementos y así es más sencillo calcular un determinante por menores y cofactores, incluso aquellos de orden superior [S7.E1.A1.L14-39: *"¿Qué ocurriría si fuesen 0 el -5 y el 3? Esto se reduciría a 0, entonces una forma de trabajar o de aprovechar las operaciones elementales entre filas aplicando las propiedades de los determinantes (...) cuando tú aplicas en un determinante las operaciones entre filas (...) que le sumas el producto de un escalar por una fila a otra fila cualquiera, el determinante no cambia su valor (...) Aplico operaciones elementales entre filas para hacer 0, utilicemos este número como pivote y con esa fila hagamos 0 al -5 y al 3 (...) Aquí estamos utilizando operaciones elementales entre filas y cofactores, esto de aquí es necesario, podemos utilizarlo si tenemos determinantes de orden 4, 5. Logramos hacer 0 una fila o una columna y vamos reduciendo el tamaño, de hecho cuando trabaja con determinantes de 5x5 o 7x7 lo que se hace es reducir hasta 3x3 y de ahí ya se resuelve de las otras maneras"*].

El profesor procede a escribir un determinante de orden mayor al anterior (5x5), con la finalidad de mostrar a los estudiantes cómo podrán reducirlo hasta encontrar su valor, a través de las propiedades y operaciones elementales entre filas [S7.E1.A1.L40-43: *"Vamos a poner un determinante un poco mayor, o sea, siempre es recomendable en este caso tomar la fila o la columna donde hayan ceros, porque ya sabes que el cero multiplicado por cualquier determinante va a dar cero"*]. En su explicación incluye las opciones posibles y más convenientes para el cálculo de este determinante, recalcando que deberán mantener hasta el final cada uno de los factores que vayan llevando a medida que reducen el determinante, ya que será necesario multiplicar ese factor por lo que corresponda para llegar a una respuesta correcta [S7.E1.A1.L58-62: *"Ese 1 queda como factor, como es un 1 lo vamos a poner para que nos demos cuenta que vamos a ir llevando ese factor siempre, está claro que el +1 no va a variar ninguna cosa. Si fuese otro número hay que mantenerlo hasta el final y al final multiplicamos por lo que corresponda"*].

Con lo explicado anteriormente aprovecha para indicar otra propiedad de los determinantes [S7.E1.A1.L81-83: *"Un escalar al multiplicarse por un determinante, ese escalar solo multiplica a una fila o a una columna, o sea, no a todos los elementos, esa es una de las propiedades también"*] y advierte que no es igual que cuando se multiplica un escalar por una matriz [S7.E1.A1.L76-77, 89-90: *"Ese 2 afecta no como en las matrices que afectaba a todos los elementos, afecta solamente a una fila o a una columna (...) Esa es una cosa importante que hay que saber, no es lo mismo trabajar con determinantes que trabajar con matrices"*]. Así mismo, hace hincapié en que pueden sacar factor común de una fila o columna cuando se trata del determinante [S7.E1.A1.L84-86: *"Puedo sacar el factor común, si yo saco factor común de una fila, lo pongo aquí como factor del determinante y regreso a lo que tenía al principio"*]. Continúa resolviendo el ejercicio y saca factor común de una de las filas insistiendo en que pueden realizar diferentes tipos de operaciones pero es mejor aplicar siempre aquellas que simplifiquen los cálculos [S7.E1.A1.L108-111: *"Usted es el que hace el manejo de la operación, entonces usted resuelve y toma lo que mejor le conviene, la cosa está en que se haga el trabajo más fácil y se lo haga bien"*].

Finalmente, entrega una hoja de ejercicios a los estudiantes para que realicen una práctica e indica otras propiedades de los determinantes [S7.E1.A1.L157-167: *"Si yo pongo la fila primera como segunda y la segunda como primera, ¿qué pasó?, cambió el signo, o sea, aquí sí afecta el cambiar una fila por otra, si yo cambio una fila por otra la consecuencia es que cambia el signo del determinante (...) Si cambias el orden, un par de columnas, cambia también el signo del determinante (...)Otra propiedad de los determinantes es* *que si hay una fila o una columna que sean todos ceros, el determinante es 0, si todos son ceros el determinante es cero"*]. Enuncia también la condición para que una matriz sea invertible [S7.E1.A1.L172-176: *"Una matriz es invertible si su determinante no es igual a 0, es decir, si su determinante es diferente de 0, entonces usted lo único que hace es comprobar si el determinante no vale 0 entonces en ese caso la matriz es invertible, en caso de que el determinante salga 0 la matriz no es invertible"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En la primera parte del episodio, el conocimiento de los temas matemáticos que despliega el profesor se relaciona con *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, al calcular el determinante de una matriz 3x3 por el método del menor y cofactores. Involucra además, operaciones elementales entre filas que hacen evidente su conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos*, ya que enuncia una de las propiedades de los determinante que indica que si a los elementos de una fila se le suman los elementos de otra fila multiplicados por un número real, el valor del determinante no varía [KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I14. El profesor conoce cómo calcular el determinante aplicando propiedades; KoT-PF-I6. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía].

En la segunda parte del episodio, Jordy presenta nuevamente conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* en cuanto al cálculo del determinante de una matriz 5x5 con operaciones elementales entre filas y cofactores, donde no solo se evidencia un conocimiento del procedimiento sino también de las formas más eficaces y prácticas para obtener un resultado. El profesor es muy cuidadoso en su explicación al detallar las formas posibles de hacer los cálculos y justifica el porqué de la elección de una u otra. Incluimos además, su conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos*, ya que va enunciando diferentes propiedades de los determinantes a medida que avanza en la explicación del ejercicio y que se va haciendo necesario aplicar las mismas. Cuando explica que para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea diferente de 0, Jordy nos da indicios de su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)*. [KoT-P1-I14. El profesor conoce cómo calcular el determinante aplicando propiedades; KoT-PF-I7. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que un escalar multiplica solo a una fila o columna del determinante; KoT-PF-I8. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si en un determinante se cambian entre sí dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo; KoT-PF-I9. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero; KoT-P2-I3. El profesor conoce que para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

El profesor recalca que no es lo mismo multiplicar un escalar por una matriz que un escalar por un determinante, o que en el caso de cambiar el orden de las filas o las columnas de un determinante, su valor cambiará de signo [S7.E1.A1.L76-77, 81-83, 89-90, 163-165: *"Ese 2 afecta no como en las matrices que afectaba a todos los elementos, afecta solamente a una fila o a una columna (...) Anote bien eso, un escalar al multiplicarse por un determinante, ese escalar solo multiplica a una fila o a una columna, o sea, no a todos los elementos (...) Esa es una cosa importante que hay que saber, no es lo mismo trabajar con determinantes que trabajar con matrices (...) Insisto yo que no es lo mismo que en las matrices, en los determinantes sí tiene importancia el cambio ese, cambia el signo simplemente"*].

Pensamos en conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas *(Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje)* porque el profesor hace varias advertencias sobre lo anterior a lo largo de la sesión, ya que es consciente que los estudiante pueden equivocarse al no diferenciar que no es lo mismo multiplicar un escalar por una matriz que por un determinante, o que al intercambiar filas en las matrices estas siguen siendo equivalentes, sin embargo, en un determinante es distinto porque el intercambio hará que su valor cambie de signo [KFLM-FDA-I6. El profesor conoce que los estudiantes pueden no tomar en cuenta las propiedades de los determinantes y equivocarse al multiplicar un escalar por un determinante, resolviendo igual que cuando se multiplica un escalar por una matriz; KFLM-FDA-I7. El profesor conoce que los estudiantes pueden confundirse y no tomar en cuenta que si intercambian dos filas o dos columnas en un determinante, su valor cambiará de signo].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Los indicios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas de este profesor se reflejan a través de los *Ejemplos* que utiliza para explicar el cálculo del determinante en esta sesión. Podemos darnos cuenta, que utiliza un ejemplo que puede ser potente en cuanto a hacer ver al estudiante diferentes posibilidades de solución. Para resolver el determinante 5x5 plantea diferentes formas de realizar operaciones elementales entre filas para reducir el determinante [S7.E1.A1.L45-50, 103-111: *"Tenemos 5 filas, 5 columnas, entonces vamos a aplicar ahí las operaciones entre filas para ir reduciendo. Si al determinante le aplica operaciones elementales entre filas, no cambia su valor. ¿Qué fila o columna nos conviene revisar? Puede ser la fila 4, puede ser la columna 3 o puede ser la columna 5 que tiene un 1, también el 1 siempre nos ayuda porque eso no altera mayor cosa el valor (…) Tenemos varias opciones, por ejemplo, puedo tomar este 1 como pivote o puedo tomar yo este 1 como pivote o puedo tomar este 1 como pivote porque tengo ceros en esas columnas. ¿Con cuál trabajamos? Una cosa que también podemos hacer para no complicarnos es trabajar con los signos positivos del determinante, trabajemos con el cofactor que sea positivo siempre. Usted es el que hace el manejo de la operación, entonces usted resuelve y toma lo que mejor le conviene, la cosa está en que se haga el trabajo más fácil y se lo haga bien"*] [KMT-E-I5. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de los ejemplos en la enseñanza del cálculo del determinante de una matriz aplicando propiedades y operaciones elementales entre filas].

ANEXO 8. Esquemas del conocimiento de Jordy (Año 1 de observaciones)

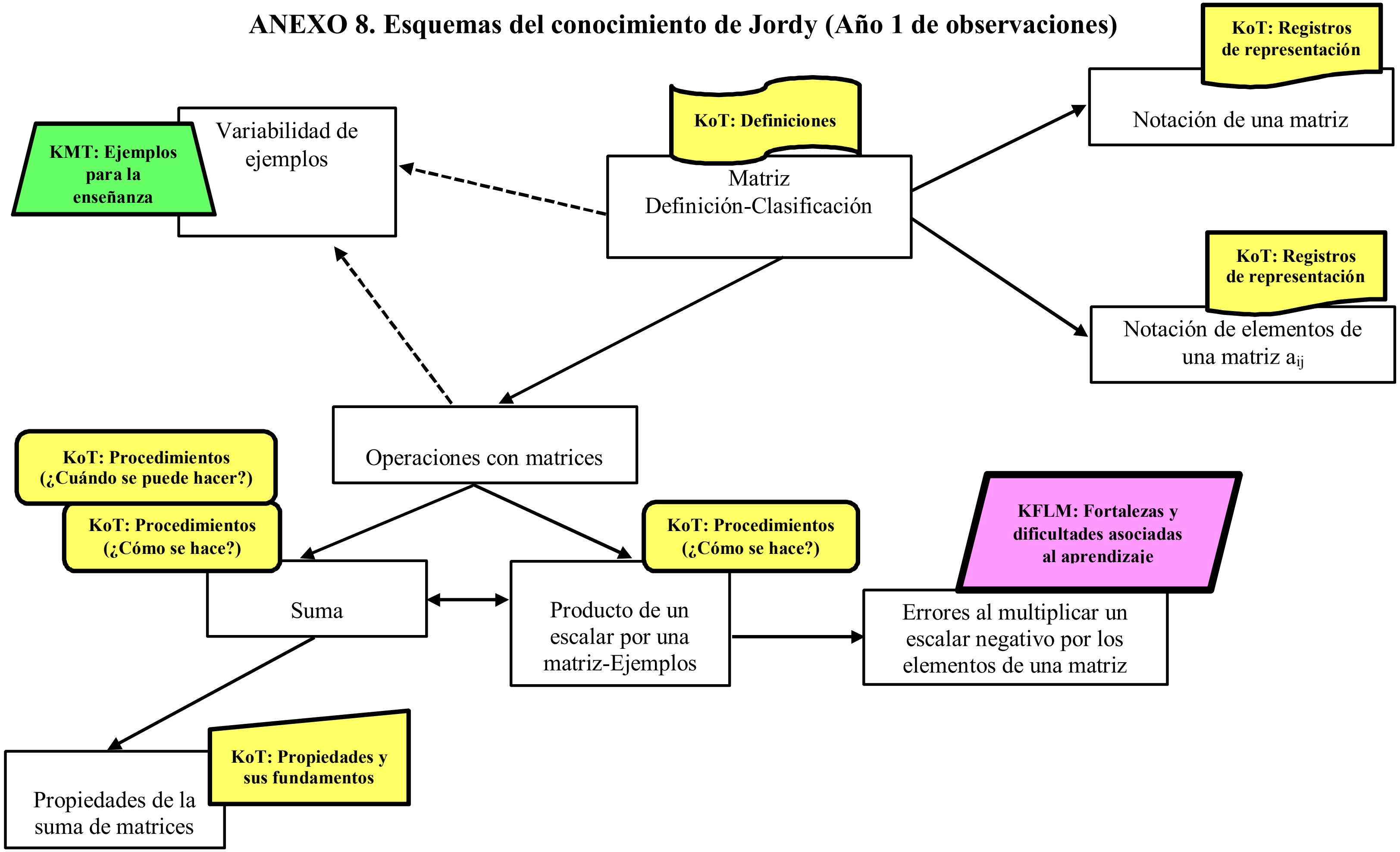


Figura 1. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 1-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Definición de matriz, clasificación de matrices, suma de matrices y producto por un escalar)

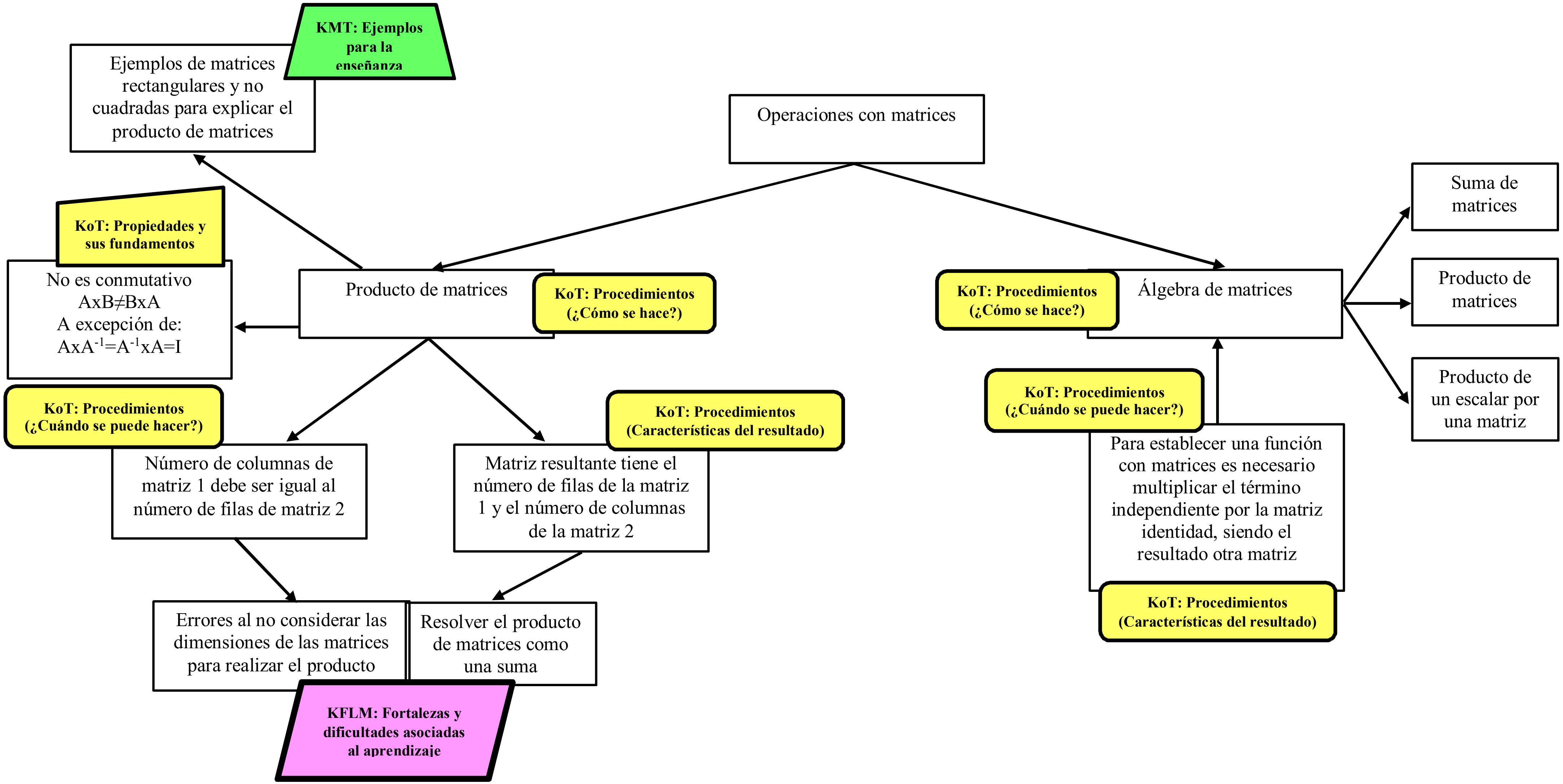


Figura 2. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 2-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Producto de matrices y álgebra de matrices)

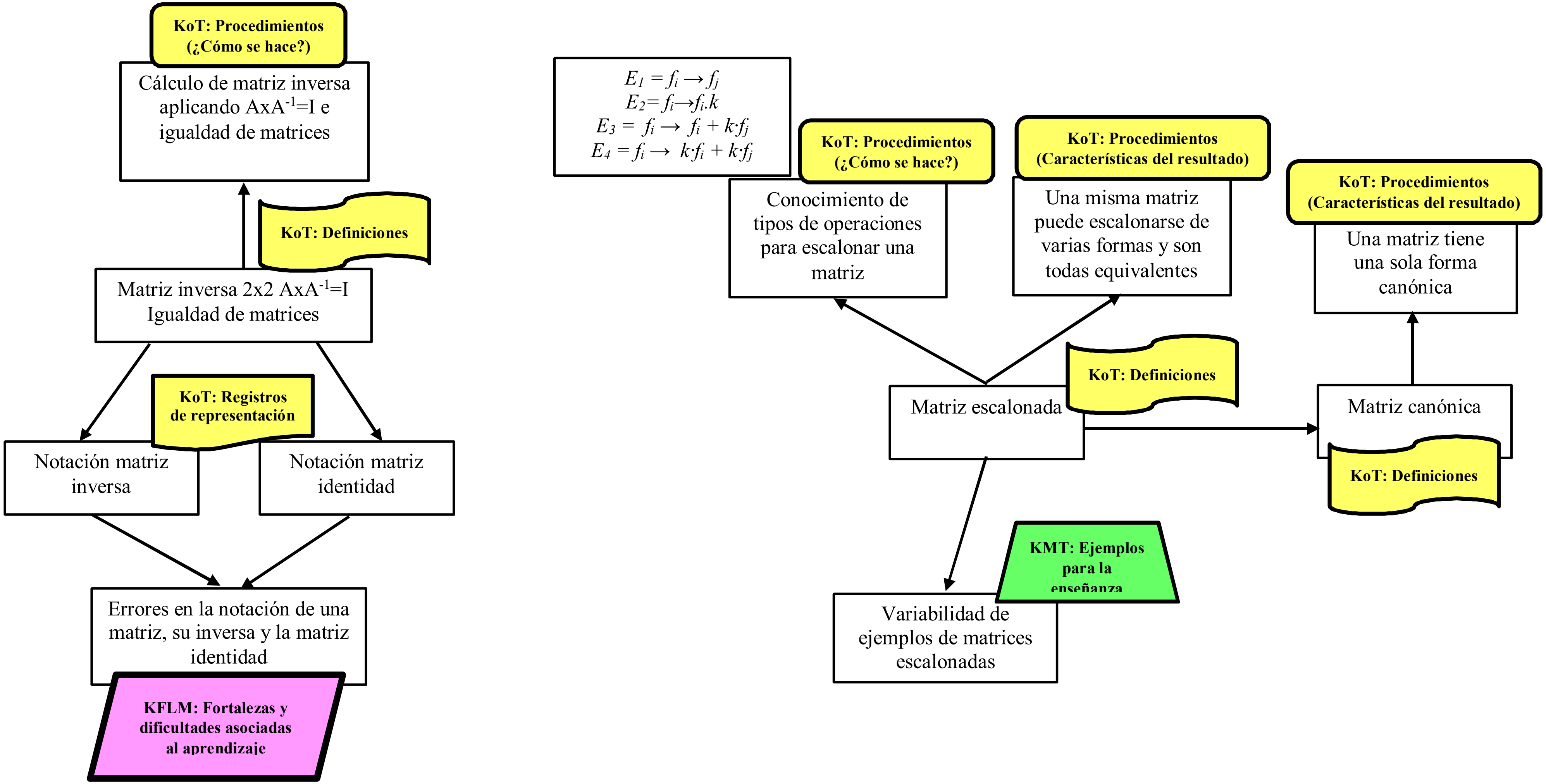


Figura 3. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 3-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Matriz inversa 2x2, matriz escalonada y matriz canónica)

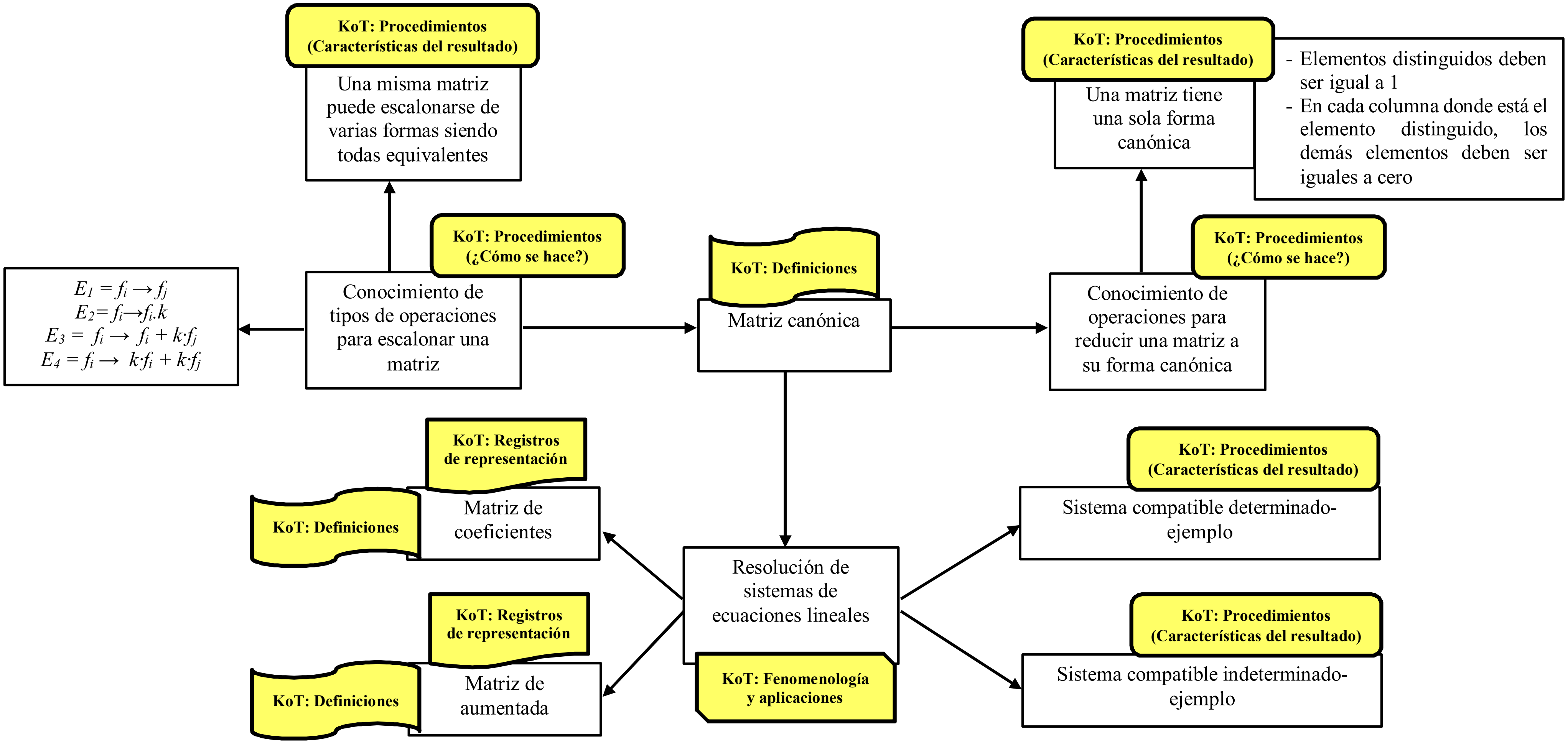


Figura 4. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 4-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Matriz canónica y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a la forma canónica)

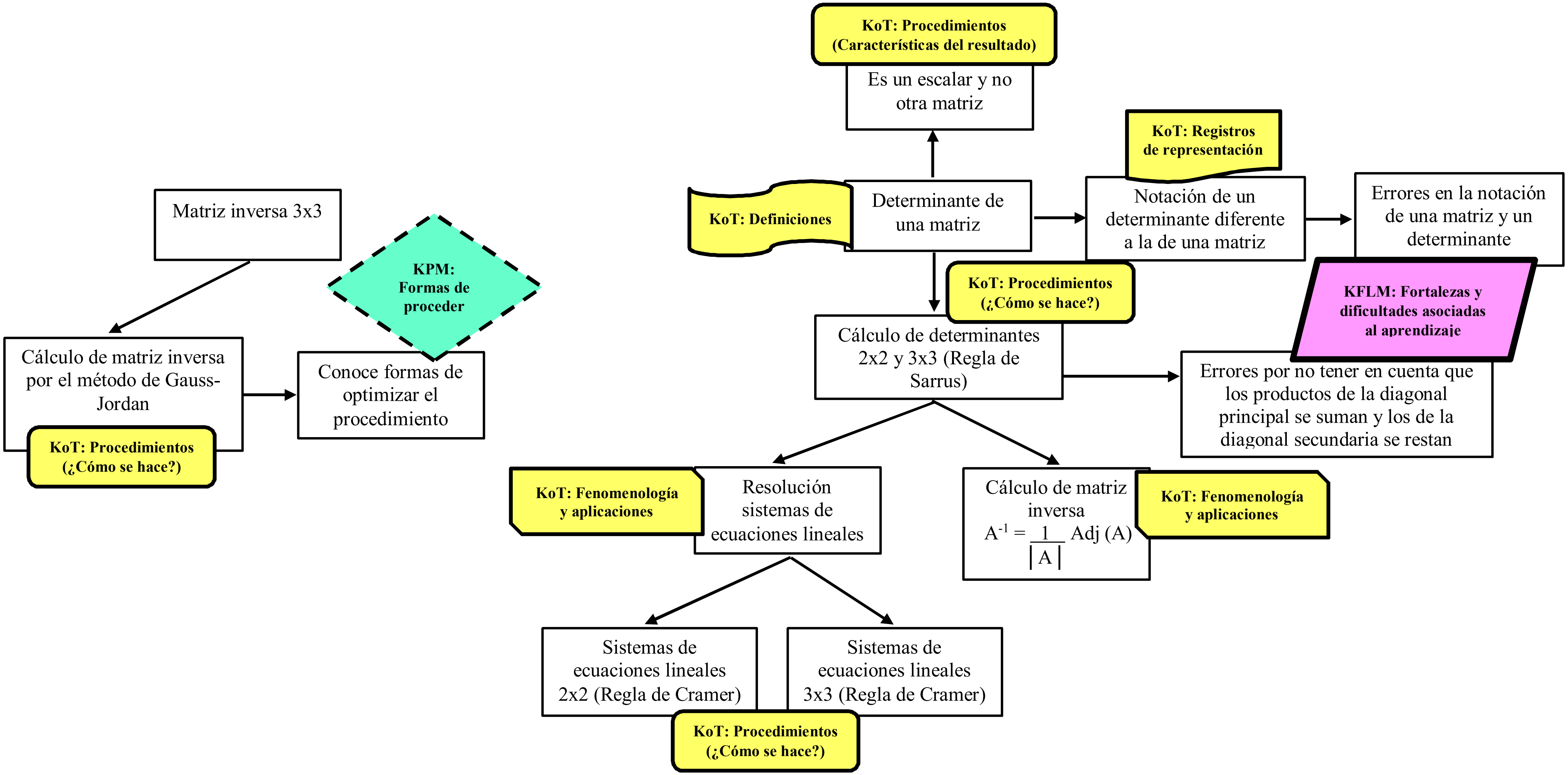


Figura 5. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 5-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Matriz inversa 3x3, cálculo del determinante 2x2, 3x3 y resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer)

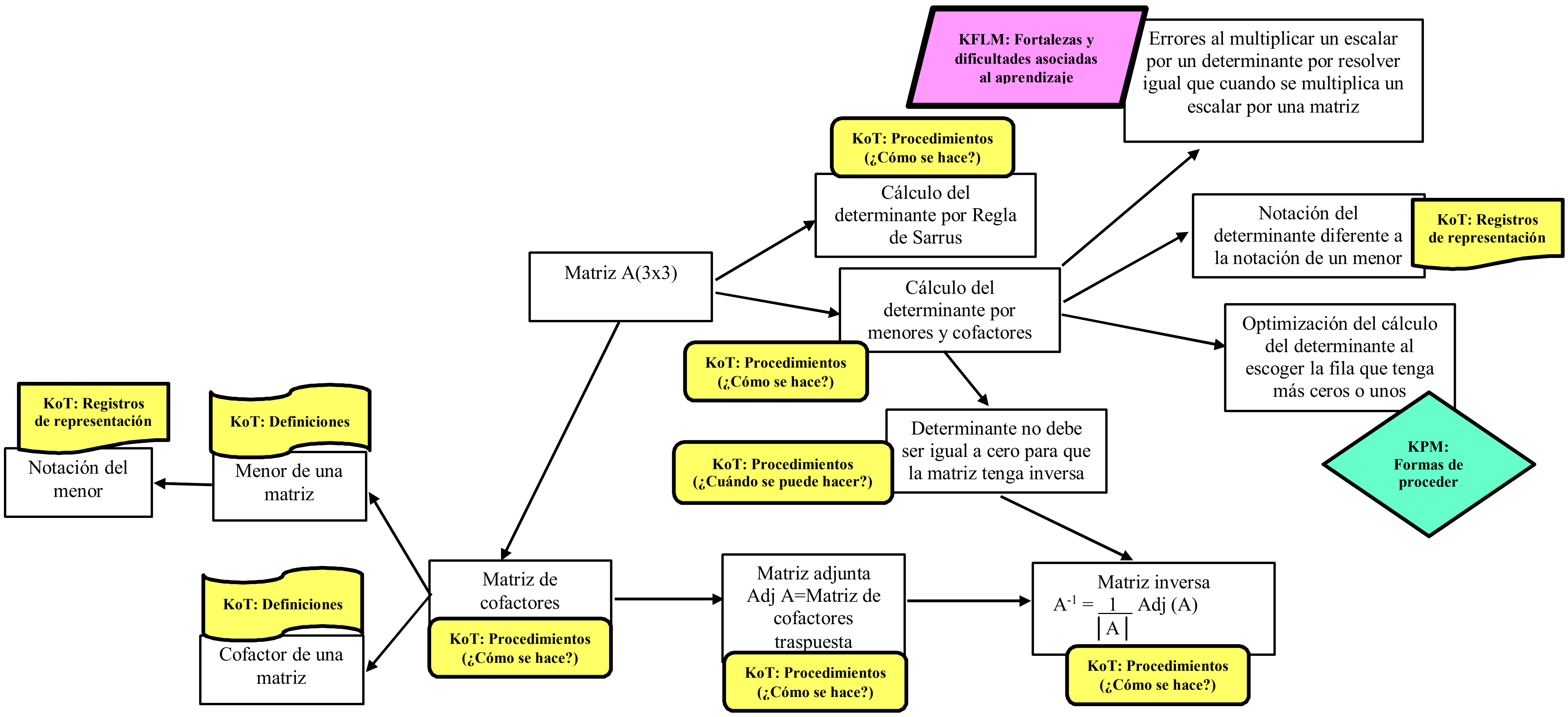


Figura 6. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 6-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Matriz de cofactores, matriz adjunta y matriz inversa)

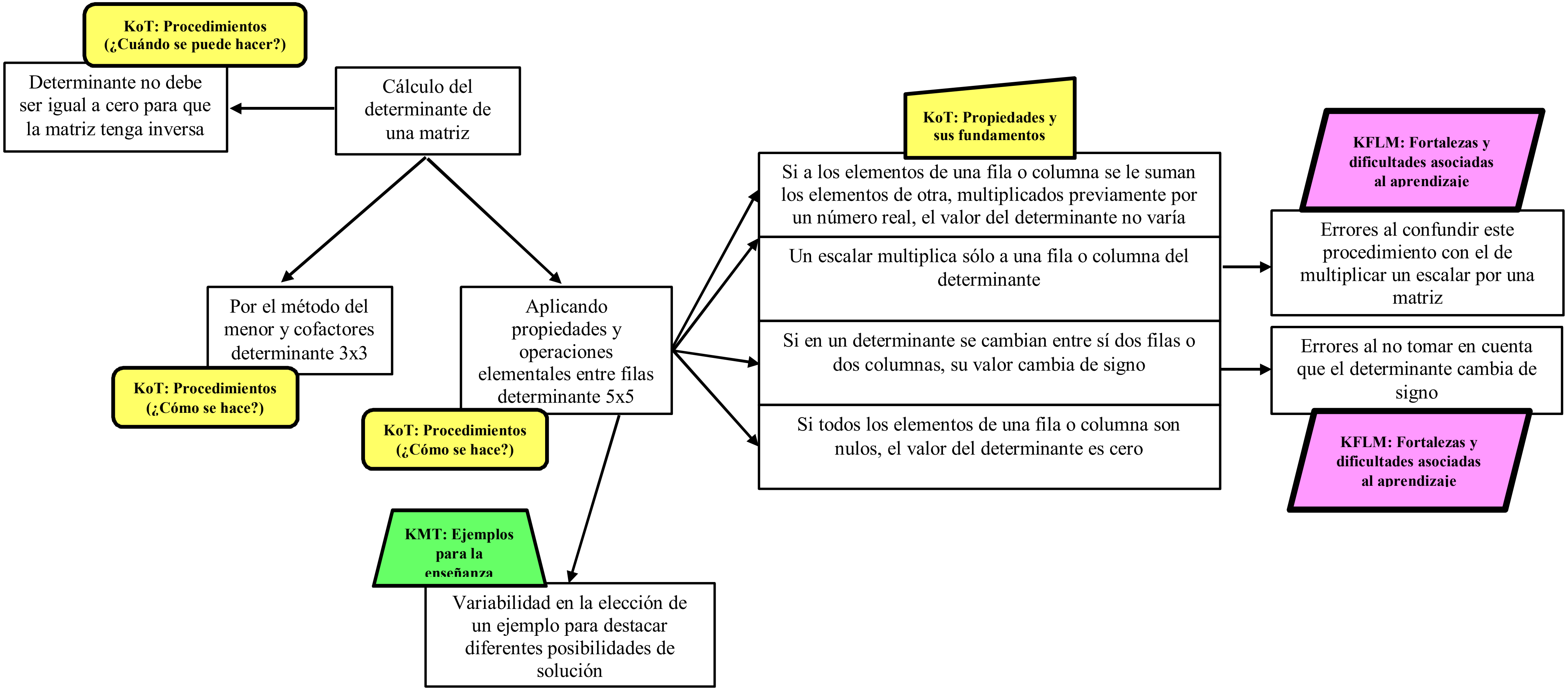


Figura 7. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 7-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Cálculo del determinante empleando cofactores, operaciones elementales entre filas y propiedades)

ANEXO 9. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Jordy (Año 2 de observaciones)

Sesión 1 (09-11-2012): Clasificación de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

Descripción:

Episodio 1: Clasificación de matrices

En esta sesión de clases, la clasificación de matrices es explicada con definiciones y ejemplos por tres grupos de estudiantes, que previamente habían consultado el tema.

El profesor interviene en la primera parte de la sesión para dar definiciones de tipos de matrices que no fueron expuestas por los estudiantes [S1.E1.A2.L14-35: *"La matriz simétrica es aquella donde los elementos opuestos a la diagonal principal tienen el mismo valor, con el mismo signo. Ahora la antisimétrica, ¿qué pasa con los elementos que están ubicados en el mismo sitio? Tienen el mismo valor a ambos lados de la diagonal principal pero con diferente signo. ¿Cuándo una matriz es invertible? Cuando tiene matriz inversa. ¿Cuál es la conjugada de 2+i? (...) ¿Qué es lo que le cambia? El signo a la parte imaginaria. La parte real se queda igual, lo que cambia es el signo de la parte imaginaria. La singular no tiene matriz inversa (...) La matriz unitaria es la matriz identidad. Las matrices iguales son las que tienen la misma dimensión y los elementos colocados en el mismo sitio y con el mismo valor. Cuando la inversa coincide con la traspuesta, esa es la matriz ortogonal"*].

Episodio 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

En la segunda parte de la sesión, Jordy escribe un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x-3y=5; 3x+9y=-7) y solicita a los estudiantes resolverlo por el método de adición y sustracción. Los estudiantes lo resuelven rápidamente dando el valor de cada incógnita. La finalidad del profesor, es explicar que otra forma de resolver el sistema es aplicando operaciones elementales entre filas, ya que les serán de utilidad en los temas posteriores [S1.E2.A2.L51-61, 85-86, 99-102: *"Vamos a aprender a resolver este sistema de otra forma. Lo que se va a explicar ahora es necesario que se lo maneje bien porque lo vamos a utilizar en el tema que sigue (...) Voy a escribir el sistema nuevamente y a* *realizar las operaciones (...) lo que vamos a hacer es la fila 2 la voy a reemplazar por -2f_2 +3f_1 (...) Vamos aplicando operaciones combinando las filas o simplemente multiplicando la ecuación que yo considere por un escalar cualquiera (...) Por eso me pareció conveniente comenzar resolviendo el sistema por el método de adición y sustracción para que usted recuerde y pueda resolverlo también con operaciones elementales entre filas que son útiles cuando trabajamos con matrices"*].

El profesor realiza las operaciones elementales entre filas para resolver el sistema y los estudiantes intervienen en algunas ocasiones cuando el profesor pregunta cuál es la siguiente operación a realizar. Jordy deja claro a los estudiantes que cada sistema que va quedando es equivalente al anterior [S1.E2.A2.L104-106: *"La segunda fila queda igualita y tengo otro sistema equivalente a los anteriores, entre ellos son equivalentes porque han sido producto de combinaciones entre sus filas, sus ecuaciones en este caso"*].

Menciona una forma para que las operaciones a realizar entre filas se tornen más sencillas [S1.E2.A2.L115-116: *"Una sugerencia, en caso de que hubiera en una de las dos ecuaciones un uno, si estuviera en la segunda fila se la puede cambiar también"*] y procede a escribir otro ejemplo donde para su resolución lo que conviene es cambiar las filas, ya que la x de la segunda ecuación tiene como coeficiente el 1 [S1.E2.A2.L117-122: *"Tiene ahora este otro sistema 5x-3y=-1; x+4y=3. Qué es lo primero que se puede hacer ahí? (...) ¿Por qué conviene cambiar las filas, la primera por la segunda? (...) Entonces nos conviene que el 1 esté al inicio*"]. También le indica a un estudiante que en la medida de lo posible intente utilizar como escalar en las operaciones, números enteros y no fraccionarios [S1.E2.A2.L146-150: *"Lo que iba a hacer su compañero de* $f_2 \rightarrow -1/5f_2 + f_1$ *no es que estaba mal, pero nos complicamos un poco el asunto porque tenemos que ir trabajando con un número fraccionario cada vez. Yo le dije cambie la fórmula no porque estaba mal sino por conveniencia"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Podemos evidenciar el conocimiento del profesor sobre *Definiciones* de las siguientes matrices: simétrica, antisimétrica, invertible, conjugada, singular, unitaria, igual y ortogonal con ejemplos de algunas de ellas, como un complemento a la explicación anterior que hicieron los estudiantes y con la finalidad de que todos manejen la misma información sobre la clasificación de matrices [KoT-D-I11. El profesor conoce la definición de matriz simétrica; KoT-D-I12. El profesor conoce la definición de matriz antisimétrica; KoT-D-I15. El profesor conoce la definición de matriz inversa ($AxA^{-1} = I$); KoT-D-I23. El profesor conoce la definición de matriz conjugada; KoT-D-I24. El profesor conoce la definición de matriz singular; KoT-D-I8. El profesor conoce la definición de matriz identidad o unitaria; KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices; KoT-D-I25. El profesor conoce la definición de matriz ortogonal].

Durante el desarrollo de la sesión se refleja el conocimiento de Jordy sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al resolver el sistema de ecuaciones con operaciones elementales entre filas, incluyendo aquí formas para optimizar el procedimiento y aplicar operaciones algebraicas sencillas. Sumado a esto, pensamos también en su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* porque hace explícito a sus estudiantes que en la resolución, cada sistema de ecuaciones lineales que va obteniendo mediante las operaciones elementales entre filas es equivalente al anterior [KoT-P1-I15. El profesor conoce cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas; KoT-P4-I7. El profesor conoce que cada sistema de ecuaciones lineales obtenido a través de operaciones elementales entre filas es equivalente al sistema anterior y al original].

Jordy menciona a sus estudiantes que las operaciones elementales entre filas que emplean para resolver sistemas de ecuaciones lineales serán de utilidad cuando trabajen con matrices. Pensamos entonces en el conocimiento sobre *Fenomenología* (usos y aplicaciones) de este profesor, ya que intenta que los estudiantes manejen bien las operaciones elementales entre filas que serán aplicadas dentro del mismo curso para resolver sistemas de ecuaciones por el método de Gauss Jordan o encontrar el determinante de una matriz [KoT-F2-I5. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss y Gauss Jordan; KoT-F2-I11. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución de la matriz inversa por el método de Gauss Jordan; KoT-F2-I10. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución del determinante de una matriz].

Sesión 2 (23-11-2012): Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 y 4 incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

Descripción:

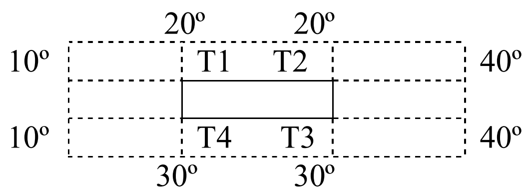
Episodio 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 incógnitas mediante operaciones elementales entre filas

Jordy comienza la clase indicando a los estudiantes el tema a estudiar [S2.E1.A2.L1-2: *"Hoy vamos a resolver sistemas de ecuaciones con matrices 3x3 y 4x4 y al final resolvemos un problema"*]. Escribe un sistema de ecuaciones lineales 3x3 y explica a los estudiantes cómo resolverlo a través de operaciones elementales entre filas, haciendo explícito que en este caso el pivote es el coeficiente de x de la primera ecuación y que será de utilidad para transformar en 0 el coeficiente de x de la segunda y tercera ecuación [S2.E1.A2.L6-10: *"Tomamos una fila y con el primer elemento de la ecuación nos ayudamos para hacer 0 los mismos elementos de las otras dos ecuaciones. Entonces el 3 sería el pivote y con él vamos a hacer 0 este 2x y -4x utilizando operaciones elementales entre filas"*]. Mientras explica el procedimiento, el profesor recuerda a los estudiantes que cada sistema que se va formando hasta llegar a la solución es equivalente a los anteriores [S2.E1.A2.L28-29: *Una cosa que hay que recordar, este nuevo sistema de ecuaciones es equivalente al de arriba ¿Qué significa que son equivalentes? Que las soluciones para este sistema son las mismas que para el de arriba"*].

Los sistemas de ecuaciones lineales equivalentes que ha obtenido durante la resolución, son de utilidad para que Jordy pueda hacer ver a los estudiantes los tipos de matrices abordados en la clase anterior; así, solicita que los comparen con una matriz y qué piensen qué tipo de matriz sería. De esta manera, pueden darse cuenta que los sistemas obtenidos representan matrices como la triangular superior, diagonal y la solución del sistema representa una matriz identidad [S2.E1.A2.L68-74: *"Si tú ves esto como una matriz ¿qué clase de matriz sería? (...) Sí y ¿luego viene? (...) No, esta es una matriz diagonal (...) Esta ¿cuál sería?*]. Jordy escribe dos ejercicios más en la pizarra y son los estudiantes quienes pasan a resolverlo.

Episodio 2: Resolución de sistema de ecuación lineal con cuatro incógnitas mediante operaciones elementales entre filas (problema)

Finalmente, les plantea un problema que deberán interpretar para formar un sistema de ecuaciones lineales (que en este caso tiene cuatro incógnitas) y resolverlo. El profesor da las directrices para que los estudiantes puedan interpretar el problema [S2.E2.A2.L117-130: *"Ahora dibujemos la placa, esta es metálica delgada y no recibe mayor temperatura perpendicular, o sea es una placa en el piso que no recibe mayor temperatura perpendicular y está sostenida en una malla metálica. Los 4 nodos a los que hace alusión son estos 4 puntos de intersección del medio. Tenemos T1, T2, T3 y T4, entonces dice que la temperatura en estos sitios es el promedio de los 4 nodos más cercanos y nos da la temperatura en los bordes. Por este lado tenemos una temperatura de 10º, por este borde de aquí arriba tenemos una temperatura de 20º; por el lado derecho hay una temperatura de 40º y en el lado inferior hay una temperatura de 30º. Entonces hay que plantear 4 ecuaciones, una para T1, una para T2, para T3 y T4. Te salen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, es un sistema, esa es la primera cosa que hay que hacer; resolverlo es encontrar la temperatura en cada nodo"*].



Jordy plantea la primera ecuación del sistema, los estudiantes plantean las demás y proceden a resolverlo. Un estudiante dice que la respuesta de T4 es *5/2*, lo cual es incorrecto y el profesor se dirige a toda la clase para que razonen con relación a las temperaturas correctas para cada nodo [S2.E2.A2.L162-172: *"T4 es el promedio de estos 4, solo entre 10 y 30 tenemos 40 y 40 para 4 es 10, entonces no puede ser menos de 10* (refiriéndose a la respuesta de T4) *porque acá hay temperaturas también. La fórmula que tienes al principio al plantear la ecuación te da la pauta de por dónde va el valor. Por ejemplo, ¿cuál es la temperatura mayor ahí? De los 4 nodos, ¿cuál tendrá mayor temperatura? (...) T3 porque tiene las dos mayores temperaturas cercanas ¿Cuál sería la menor temperatura? (...) Claro, fíjate que ninguna respuesta puede ser menor de 10*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Se hace evidente el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, al resolver el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde además del proceso, expresa que es necesario considerar como pivote un número diferente de 0 y que se puede cambiar de lugar las ecuaciones para facilitar las operaciones algebraicas [S2.E1.A2.L60-64, 79-81: *"Suponga que por ejemplo aquí tuviese un 0* (refiriéndose al 3x)*, una de las operaciones sería cambiar esta ecuación porque aquí arriba debe haber un número que no sea 0 para poder hacer 0 al resto. Eso también se puede hacer. Usted toma como pivote un número de la x, después que tiene 0 toma como pivote un coeficiente de y, así mismo uno de z (...) Si hay un sistema donde tienes un 1 en una x pero no está en la primera fila, tú la puedes cambiar, teniendo un 1 ahí se facilitan las operaciones"*]. De este modo, su conocimiento sobre *Procedimientos* va acompañado de las formas más eficaces de resolución. Por otro lado, al indicar que los sistemas de ecuaciones lineales obtenidos con las operaciones elementales son equivalentes unos con otros, el profesor pone de manifiesto conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)*. [KoT-P1-I15. El profesor conoce cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas; KoT-P4-I7. El profesor conoce que cada sistema de ecuaciones lineales obtenido a través de operaciones elementales entre filas es equivalente al sistema anterior y al original].

Cuando solicita a los estudiantes identificar los tipos de matrices que representan los sistemas de ecuaciones lineales equivalentes obtenidos en la resolución, el conocimiento que despliega el profesor hace referencia por un lado a *Definiciones* de matriz triangular superior, diagonal e identidad y, por otro lado, a *Procedimientos (características del resultado)* porque los sistemas equivalentes obtenidos en la resolución representan matrices triangular superior, diagonal y la solución del sistema representa una matriz identidad. [KoT-D-I6. El profesor conoce la definición de matriz triangular superior; KoT-D-I26. El profesor conoce la definición de matriz diagonal; KoT-D-I8. El profesor conoce la definición de matriz identidad o unitaria; KoT-P4-I8. El profesor conoce que cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, uno de los sistemas equivalentes obtenidos representa una matriz triangular superior; KoT-P4-I9. El profesor conoce que cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, uno de los sistemas equivalentes obtenidos representa una matriz diagonal; KoT-P4-I10. El profesor conoce que el último sistema obtenido o solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, representa una matriz identidad].

El planteamiento e interpretación del problema que consiste en encontrar las temperaturas de cuatro nodos de una placa metálica, nos conduce a pensar en el conocimiento del profesor sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)* de los sistemas de ecuaciones lineales y a su vez, la aplicación de las operaciones elementales entre filas, que en este caso serán de utilidad para hallar la temperatura en cada uno de los nodos señalados [KoT-F2-I6. El profesor conoce que a través de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (con operaciones elementales entre filas) se puede encontrar la solución de problemas matemáticos ficticios o de la vida real].

Cuando un estudiante da la respuesta de la temperatura de uno de los nodos de la placa metálica, la cual es incorrecta, pensamos en el conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* de Jordy, ya que este profesor hace ver a toda la clase el por qué la respuesta del estudiante es incorrecta y sobre qué valores deberán salir las soluciones. [KoT-P4-I14. El profesor es capaz de predecir las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales mediante la interpretación de los datos del problema planteado].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

El conocimiento del profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* se hace evidente al preguntarle en una entrevista qué dificultades presentan los estudiantes en el estudio de las matrices, ante lo cual respondió que comente errores principalmente en la realización de operaciones elementales entre filas para resolver sistemas de ecuaciones lineales [E4.P5: *"Lo que se les hace más complicado es que hay que usar procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones, la cuestión de la aplicación de las operaciones entre filas suele representar una dificultad pero a más de eso, es que allí un pequeño error les lleva a no poder resolver un ejercicio. Yo creo que eso es lo que más se les complica"*] [KFLM-FDA-I15. El profesor conoce que para los estudiantes constituye una dificultad la realización de operaciones elementales entre filas para resolver sistemas de ecuaciones lineales].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Jordy explica la resolución de sistemas de ecuaciones líneas con tres incógnitas empleando ejercicios numéricos. Si bien, podía haber utilizado este mismo tipo de ejercicios para explicar la resolución de un sistema con cuatro incógnitas, prefiere hacerlo con el planteamiento de un problema. Esto nos conduce a pensar en indicios de su conocimiento de la variabilidad de *Ejemplos* para la enseñanza de este tema, visto como una oportunidad de investigación en la que se podría profundizar [KMT-E-I6. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de la variabilidad de los ejemplos en la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas].

Sesión 3 (03-12-2012): Cálculo del determinante 3x3 y 4x4 por el método del menor y cofactores

Descripción:

Episodio 1: Cálculo del determinante 3x3 y 4x4 por el método del menor y los cofactores

Para iniciar la clase, Jordy intenta que los estudiantes recuerden cómo calcular un determinante de orden dos con un ejemplo [S3.E1.A2.L5-9: *"Cuando teníamos una matriz de orden 2 y la resolvíamos por determinantes calculando un valor numérico multiplicando la diagonal principal y restándole los elementos que forman la diagonal secundaria, entonces ahí tendríamos el determinante de una matriz de orden 2"*]. Con otro ejemplo, les recuerda que el determinante de orden tres ya lo han calculado aplicando la regla de Sarrus [S3.E1.A2.L10-15: *"El de orden tres ¿lo recuerdan? (...) ¿Qué métodos existen para hacerlo? Aumentábamos las dos primeras filas, multiplicábamos la diagonal principal y a eso le restábamos los productos de la diagonal secundaria"*]. Menciona también que el determinante es siempre un escalar [S3.E1.A2.L16: *"Y siempre el determinante es un número"*].

Con la introducción anterior, el profesor explica que ahora van a calcular un determinante de orden tres por el método del menor y los cofactores [S3.E1.A2.L17-18: *"Vamos a ver otro método, vamos a calcular el determinante utilizando el método de los cofactores"*], para lo cual escribe una matriz 3x3 en la pizarra. Haciendo referencia a un elemento de la matriz, manifiesta en qué consiste un menor [S3.E1.A2.L21-23: *"Por ejemplo, yo puedo aquí tener el menor, el menor es una submatriz, el menor de* a_{11} *se lo obtiene eliminando la fila de este elemento y la columna del elemento y nos queda una submatriz como esta"*] y también cómo determinar los signos de los cofactores [S3.E1.A2.L28-32: *"Y otra cosa que hay que tener en cuenta es que para cada elemento, en la matriz hay un signo y ese signo para cada elemento de la matriz está dado por -1 elevado a la suma de los subíndices de cualquier elemento* $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ *El signo de cada elemento está dado por esta fórmula"*].

Así explica finalmente a sus estudiantes, el proceso para calcular el determinante por el método del menor y los cofactores, indicando a su vez, que pueden tomar cualquier fila o columna como referencia para encontrar el determinante [S3.E1.A2.L46-65: *"Entonces, en base a las dos ideas, a los dos conceptos, se puede también calcular el determinante de esa matriz, combinando los dos conceptos, vamos a tomar una fila o columna cualquiera, vamos a calcular el determinante utilizando los menores. Si yo utilizo la primera fila debo tomar el elemento multiplicado por su signo respectivo. El determinante de A por este método sería: si tomo la primera fila, cada elemento con su signo y luego multiplicado por el determinante de su menor (...) Sí, pero tú puedes tomar la que quieras. Ahora tomemos la tercera columna, deberá salir el mismo determinante (...) Sale lo mismo, debe salir lo mismo, tomando cualquier fila o cualquier columna, ese es el método para calcular un determinantes de cualquier orden"*].

Procede a escribir una matriz B(4x4) y antes de iniciar la resolución del determinante hace que los estudiantes se fijen en las características de la matriz (el 0 de la segunda columna) [S3.E1.A2.L50-65: *"Entonces así mismo se toma la fila o la columna que cada uno considere pero aquí hay un caso interesante. Ahí está un 0, ese 0 nos ayuda a disminuir el grado de dificultad porque siempre vas a multiplicar el determinante de la submatriz que te va quedando por el valor del elemento que tomes en consideración, entonces conviene siempre tomar una fila o una columna donde haya 0 o donde haya muchos 1"*].

Para finalizar la clase, el profesor escribe una matriz C(4x4), cuyo determinante es encontrado por los estudiantes y la tarea que consiste en hallar el determinante de las matrices D y E (4x4).

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En la introducción de la clase, Jordy muestra conocimiento de *Procedimientos (¿cómo se hace?)* cuando realiza el cálculo de determinantes de orden dos y de orden tres (este último por la regla de Sarrus). Adicionalmente, sale a relucir su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* al expresar que el determinante es un escalar [KoT-P1-I7. El profesor conoce cómo calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus; KoT-P4-I6. El profesor conoce que el determinante de una matriz es un escalar y no otra matriz].

El profesor manifiesta su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, al indicar cómo se obtiene el menor de una matriz, cómo establecer el signo de cada cofactor de una matriz y cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores, haciendo explícito que en este proceso se puede emplear cualquier fila o columna de la matriz; *Definiciones*, al sostener que un menor es una submatriz y *Procedimientos (características del resultado)*, cuando elabora una tabla indicando que los signos de los cofactores de una matriz van alternados [KoT-P1-I16. El profesor conoce cómo obtener el menor de una matriz; KoT-P1-I17. El profesor conoce cómo determinar el signo del cofactor de una matriz; KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-D-I21. El profesor conoce en qué consiste el menor de una matriz; KoT-P4-I11. El profesor conoce que en la matriz de los cofactores los signos de cada elemento van alternados, de acuerdo a la suma de los subíndices de los elementos. Si es par, el signo es positivo y, si es impar, el signo es negativo].

Cuando el profesor calcula el determinante de la matriz B(4x4) nuevamente saca a relucir su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?),* sin embargo, en esta parte, además del proceso, conoce las formas para que las operaciones algebraicas que conlleva dicho cálculo sean más sencillas [KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I13. El profesor conoce que cuando calculas el determinante de una matriz por el método el menor y cofactores, es más fácil el procedimiento, si escoges aquella fila o columna donde haya más ceros o unos].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Vemos indicios del conocimiento de este profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, cuando advierte a sus estudiantes que no deberán equivocarse en los signos de la diagonal secundaria al calcular el determinante, que tengan en cuenta que siempre se resta [S3.E1.A2.L55-56: *"Y resolvemos, no se olvide que multiplicamos cruzado y se resta el producto de la diagonal secundaria"*]. Por otro lado, deja claro que las matrices y los determinantes tienen sus diferencias (el primero sería un arreglo de elementos distribuidos en filas y columnas, mientras que el segundo es un escalar) y por tanto las propiedades de cada uno serán diferentes [S3.E1.A2.L97-99: *"Algunas propiedades coinciden con las de las matrices, pero sólo en algunas, en otras hay diferencias. No es lo mismo una matriz que un determinante, no son la misma cosa"*] [KFLM-FDA-I8. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando método del menor y cofactores por no tener en cuenta que el producto de la diagonal secundaria se resta; KFLM-FDA-I9. El profesor conoce que los estudiantes pueden no tener claro las diferencias entre una matriz (conjunto de elementos distribuidos en filas y en columnas) y un determinante (es un escalar), al pensar que se aplican propiedades en igualdad de condiciones en ambos casos.

Sesión 4 (04-01-2013): Propiedades de los determinantes y cálculo del determinante por el método del menor y cofactores

Descripción:

Episodio 1: Propiedades de los determinantes

Previo a esta sesión, el profesor ha solicitado a los estudiantes consultar las propiedades de los determinantes. Jordy les pregunta las propiedades consultadas y va complementando la explicación con ejemplos y los casos que podrían presentarse en cada propiedad.

A partir de la respuesta de un estudiante sobre una de las propiedades de los determinantes que hace que este valga 0, el profesor enuncia otras más donde el determinante también es 0, incluida la explicación de lo que es una combinación lineal [S4.E1.A2.L3-30:

"Empecemos, dígame las propiedades que hacen que un determinante valga 0 (...) Sí, eso hace que un determinante valga 0. O sea vamos a poner un determinante de dos por dos, si las dos filas son igualitas ese determinante vale 0 (...) Cuando todos los elementos de una línea son nulos, o sea, puede ser una fila o una columna. ¿Cuándo más un determinante vale 0? (...) La fila 3 es igual a la fila 1 más la fila 2. O sea tú sumas las dos filas anteriores y si te da la fila 3, entonces ese determinante vale 0 (...) Si tú sumas las dos primeras filas te da la tercera, entonces el determinante allí vale 0 ¿Cómo le llaman a esto? (...) Una combinación lineal significa que esta fila (la tercera) *nace de la combinación lineal de estas dos* (primera y segunda). *También es 0 el determinante cuando la diagonal principal o la diagonal secundaria valen 0"*].

Ante la pregunta del profesor de *¿Qué otra propiedad consultaron?*, un estudiante da una respuesta y el profesor amplía la explicación [S4.E1.A2.L35-45: *"Esa es una matriz triangular, ¿Cómo calcula ese determinante? (...) Sí entonces ¿cuál es el determinante de esta matriz A? (...) Entonces si yo le digo a usted que vamos a calcular el determinante utilizando las propiedades; si tenemos un determinante con todos sus elementos podemos hacer que se vuelva triangular con las operaciones elementales entre filas y ya podemos calcular el determinante multiplicando la diagonal principal. Puede ser triangular superior o inferior y también puede ser una matriz diagonal"*].

Un estudiante menciona otra propiedad y el profesor escribe un ejemplo [S4.E1.A2.L49-59: *"O sea cambia el signo. Esa es otra propiedad. Si tenemos esta matriz A y calculamos su determinante, ¿Cuánto da? (...) Le cambiamos la fila a ver qué pasa. Debe dar ¿cuánto? (...) si trabaja con determinantes y cambian una fila por otra el valor del determinante cambia de signo"*].

El profesor continua la explicación de otra propiedad [S4.E1.A2.L63-71: *"O sea aplicando operaciones elementales entre filas. Usted a una fila le suma el producto de otra fila multiplicada por el número que quiera y el determinante sigue siendo el mismo. Eso lo debemos aprender porque cuando queremos hacer una matriz triangular para calcular el determinante, esas son operaciones que vamos a hacer. Por ejemplo, vamos a cambiar la fila dos por fila dos más 2 fila 1 a ver qué pasa. Aplique esa operación y compruebe que el determinante no cambió"*]. Jordy aprovecha el ejemplo que utilizó para comprobar que se cumple esta propiedad, y les solicita a los estudiantes que con el mismo determinante realicen otra operación [S4.E1.A2.L84-99: *"A ver con este mismo* *determinante ¿Qué ocurre si la fila dos la reemplazamos por 3 fila 2 menos fila 1? (...) ¿Seguro? (...) El resultado es el triple ¿Por qué será? (...) Eso, aquí no cambió para nada el determinante porque la fila que íbamos a modificar la hemos multiplicado por 1. En cambio acá la fila que vamos a modificar la multiplicamos por 3, en ese momento ¿qué le pasa al determinante?, queda multiplicado por 3. Entonces cuando haga usted este tipo de operaciones acuérdese al final que debe dividir para 3"*]. Lo último, lo hace con la finalidad de que noten que en el caso de aplicar esta propiedad y al escalar lo multipliquen por la fila o columna que van a cambiar, deberán recordar después dividir el resultado del determinante para este escalar y así obtener su valor real.

Jordy escribe una matriz A(2x2) en la pizarra, y les pregunta a los estudiantes si recuerda cómo multiplicar un escalar por una matriz. Entonces introduce otra propiedad de los determinantes haciendo hincapié en que es diferente cuando se multiplica un escalar por un determinante [S4.E1.A2.L104-114: *"¿Se acuerda usted como se hacía esto 5A? (...) Venga hágalo (...) Ahora ¿cómo haría si tuviera esto? 5|A| (...) Cuando usted multiplica un determinante por un escalar no se hace como cuando se trata de una matriz que se multiplica uno a uno cada elemento de la matriz, sino que se multiplica sólo una fila o una columna"*].

Para que practiquen las propiedades que han repasado con sus respectivos ejemplos, el profesor escribe un determinante 3x3 en la pizarra y solicita que lo hagan triangular [S4.E1.A2.L128-134: *"Ahora vamos a calcular determinantes utilizando las propiedades. Calcule usted el determinante. A ese determinante lo vamos a hacer triangular. Haga 0 todos los elementos que están aquí debajo, los tres elementos utilizando operaciones elementales entre filas. Una vez que tiene triangular calcula el determinante multiplicando la diagonal principal"*]. Así mismo, hace referencia a los estudiantes de cómo se denomina el elemento que toman como referente para hacer ceros los elementos de una fila o columna [S4.E1.A2.L138-141: *"¿Cómo se llama el número que tomamos como referencia cuando empezamos las operaciones? (...) Pivote, vamos a tomar como pivote al 3"*].

El profesor indica varias alternativas para hacer la matriz triangular y calcular el determinante demostrando que el resultado es el mismo [S4.E1.A2.L165-176: *"¿Qué otra cosa podíamos haber hecho antes de multiplicar con la matriz triangular que tenemos allí? (...) Ignorar el 3 o ignorar el 7 ¿o? Multiplicar esta fila por 1/3 y ésta fila* *por 1/7 y nos daba -25 ¿Qué otra cosa que podíamos haber hecho? (...) Sí, cambiar la fila 1 por la fila 2 (...) Claro si vamos a hacer eso, tenemos que colocar delante un menos ¿Sí te das cuenta? Ahí no multiplicas la fila que vas a cambiar, sólo multiplicas la otra y ahí no pasa nada"*]. Enseguida, emplea un determinante 4x4 para enseñar el mismo proceso, volverlo triangular y calcular su valor. El profesor también indica que este método es útil para calcular determinantes de cualquier orden [S4.E1.A2.L183-185, 218-219: *"Esto es utilizando las propiedades combinadas con operaciones elementales entre filas. Puede calcular determinantes de cualquier orden por ese método (...) Se puede poner el determinante que usted quiera, de cualquier dimensión, por ese método lo resuelve"*].

Episodio 2: Cálculo del determinante por el método del menor y cofactores

En un segundo episodio, Jordy enseña a los estudiantes el cálculo del determinante de una matriz 4x4 aplicando el método del menor y los cofactores, utilizando siempre como pivote los 1 que aparecen en el determinante, de manera que se simplifiquen las operaciones [S4.E2.A2.L221-233, 260-262: *"Otra cosa que podemos hacer es utilizar otros métodos para calcular el determinante, como el método del pivote (...) Hay muchos 0 ahí entonces va usted a ir combinando el método de aplicar las operaciones elementales entre filas y el método del cofactor. Entonces aquí lo importante va a ser que usted en cada fila tenga solamente un número y el resto sean 0. Se sugiere que siempre tome un 1 como pivote, este es el método del pivote, en donde esté ubicado el 1, porque con el 1 tú lo multiplicas por cualquier número, se lo sumas a otra fila y el determinante no cambia (...) En el momento que ya tienes todos 0 menos ese número; tomas ese número y lo multiplicas por el cofactor correspondiente, que es lo que hicimos aquí"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el episodio 1, es evidente el conocimiento del profesor sobre *Propiedades y sus fundamentos,* al abordar cada una de las propiedades de los determinantes:

- Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero.
- Si dos filas o columnas de una matriz son iguales, el determinante es cero.

- Si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más de las restantes filas o columnas, su determinante es cero.
- Cuando la diagonal principal o la diagonal secundaria de una matriz valen cero, su determinante es cero.
- Si en un determinante se cambian entre sí dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo.
- Un escalar multiplica sólo a una fila o columna del determinante.
- El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- Si a los elementos de una fila o columna, se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Su conocimiento sobre las propiedades va acompañado de aquel que aflora al explicar con ejemplos específicos las características de cada propiedad, con la finalidad de que los estudiantes manejen bien el tema. Al referirse a una de las propiedades que indica que si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más de las restantes filas o columnas, su determinante es 0; el profesor muestra su conocimiento sobre *Definiciones* al indicar a los estudiantes lo que es una combinación lineal [KoT-PF-I9. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero; KoT-PF-I10. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si dos filas o columnas de la matriz son iguales, el determinante es cero; KoT-PF-I11. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más de las restantes filas o columnas, su determinante es cero; KoT-PF-I12. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que cuando la diagonal principal o la diagonal secundaria de una matriz valen cero, su determinante es cero; KoT-D-I27. El profesor conoce la definición de una combinación lineal; KoT-PF-I8. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si en un determinante se cambian entre sí dos filas o dos columnas, su valor cambia de signo; KoT-PF-I7. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que un escalar multiplica solo a una fila o columna del determinante; KoT-PF-I13. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal; KoT-PF-I6. El profesor conoce la propiedad de los determinantes que indica que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía].

Por otra parte, al realizar la explicación con ejemplos de la propiedad que indica que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía, Jordy pone de manifiesto su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* al indicar [S4.E1.A2.L99-101: *"Cuando usted multiplica la línea que va a modificar, el determinante queda multiplicado por ese número entonces al final hay que dividir el determinante para ese número"*] [KoT-P4-I13. El profesor conoce que cuando se desea cambiar una fila o columna en un determinante y se multiplica por un escalar la fila o columna que se quiere cambiar, el determinante resultante habrá que dividirlo para el escalar y así obtener su valor real].

Al solicitar a los estudiantes que calculen el determinante de una matriz haciéndolo triangular el profesor nuevamente pone de manifiesto su conocimiento *sobre Propiedades y sus fundamentos*, acompañado de *Procedimientos (¿cómo se hace?)* porque realiza operaciones elementales entre filas hasta hacer el determinante triangular y calcular su valor multiplicando los elementos de la diagonal principal, además, en esta parte muestra a los estudiantes algunas posibles operaciones algebraicas y que no varían el resultado del determinante. También, hace evidente su conocimiento sobre *Definiciones* cuando indica lo que es el pivote en este tipo de ejercicios. Adicionalmente, destacamos su conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)* al indicar que las operaciones elementales entre filas son útiles para calcular el determinante, y *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)* al mencionar que combinando las operaciones elementales entre filas y propiedades, se puede calcular un determinante de cualquier orden [KoT-P1-I22. El profesor conoce el procedimiento para reducir una matriz a su forma triangular aplicando operaciones elementales entre filas; KoT-D-I28. El profesor conoce la definición de pivote en Álgebra Lineal; KoT-F2-I10. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución del determinante de una matriz; KoT-P2-I4. El profesor conoce que empleando operaciones elementales entre filas y propiedades se puede calcular un determinante de cualquier orden].

En el episodio 2, el profesor nos muestra su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al calcular el determinante utilizando el método del menor y los cofactores, y cuando en este caso, utiliza como pivote, los elementos igual a 1 que aparecen en el determinante, pensamos en su conocimiento sobre *Procedimientos (¿por qué se hace?)*, ya que explicita que procede de esta forma porque el producto de un valor por 1 es siempre más sencillo de calcular [KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P3-I1. El profesor conoce que para obtener el determinante de una matriz por el método del menor y los cofactores, puede utilizar como pivote los elementos iguales a 1, porque el producto de cualquier valor por uno es siempre más sencillo de calcular].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Durante el transcurso del episodio 1, pensamos en el conocimiento de Jordy sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* cuando el profesor sostiene [S4.E1.A2.L56-59, 115-117: *"Ahí hay que tener cuidado entonces, cuando trabajamos con matrices decimos que las matrices son equivalentes si cambia una fila por otra. Pero si trabaja con determinantes y cambian una fila por otra, el valor del determinante cambia de signo (...) Las matrices y los determinantes son parecidas, pero tienen sus propiedades diferentes porque son dos cosas diferentes, son otra cosa"*]. Al parecer, el comentario de este profesor va orientado a evitar que los estudiantes cometan errores al pensar que si en las matrices se pueden intercambiar las filas y estas siguen siendo equivalentes, en los determinantes será igual; sin embargo, el profesor les aclara que si se intercambian filas en un determinante, este cambiará de signo y les dice que las matrices y determinantes aunque tengan propiedades similares, no son lo mismo, son de naturaleza diferente. Por otra parte, también advierte que deberán tener cuidado con la notación de matrices y determinantes, considerando otro error que podrían cometer los estudiantes [S4.E1.A2.L118-119: *"Por eso debe tener cuidado con las notaciones, que no es lo mismo un paréntesis que una barra"*] [KFLM-FDA-I7. El profesor conoce que los estudiantes pueden confundirse y no tomar en cuenta que si intercambian dos filas o dos columnas en un determinante, su valor cambiará de signo; KFLM-FDA-I9. El profesor conoce que los estudiantes pueden no tener claro las diferencias entre una matriz (conjunto de elementos distribuidos en filas y en columnas) y un determinante (es un escalar), al pensar que se aplican propiedades en igualdad de condiciones en ambos casos; KFLM-FDA-I4. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar en la notación de una matriz y un determinante].

En esta misma línea, vemos un indicio de conocimiento del profesor cuando explica la propiedad de los determinantes que indica que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía [S4.E1.A2.L99-101: *"Cuando usted multiplica la línea que va a modificar, el determinante queda multiplicado por ese número entonces al final hay que dividir el determinante para ese número"*]. El profesor es cuidadoso en hacer ver a los estudiantes que si han multiplicado por un escalar la fila que van a cambiar no deberán olvidar dividir el determinante obtenido para el mismo escalar y así, encontrarán el determinante real; al parecer piensa en esto como un posible error [KFLM-FDA-I10. El profesor conoce que los estudiantes pueden equivocarse cuando calculan el determinante de una matriz, aplicando la propiedad que dice que si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía; ya que pueden no darse cuenta de que la respuesta es correcta solo si se divide el valor obtenido para el número por el cual se multiplicó la fila que sufre los cambios].

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Pensamos en indicios del conocimiento de este profesor sobre la enseñanza de las matemáticas por la selección de ejemplos utilizados en esta sesión de clases. Jordy escribe un ejemplo de cada una de las propiedades y, además, utiliza otros que hacen ver las variaciones posibles de una propiedad. Así mismo, es cuidadoso al hacer explícito cuáles serían las operaciones elementales entre filas que se podrían hacer para calcular un determinante y con varios ejemplos demuestra por qué unas son más sencillas que otras, o en el caso donde utiliza como pivote el 1, enfatizando que podría emplear como pivote cualquier otro número diferente de cero en el proceso, pero que si utilizan el 1 serán más sencillas las operaciones algebraicas [S4.E2.A2.L234-239: *"Entonces en este método se sugiere que siempre tomes como pivote un 1 y si no tienes un 1 lo hagas multiplicando por un número fraccionario (...) No obligado, pero es preferible para trabajar con números más pequeños. Si tienes un 1 con ese trabajas"*]. El profesor piensa cuidadosamente en cada ejemplo que va a escribir y que le será de utilidad para que el estudiante tenga una visión clara de las posibilidades de resolución del determinante [KMT-E-I5. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de los ejemplos en la enseñanza del cálculo del determinante de una matriz aplicando propiedades y operaciones elementales entre filas; KMT-E-I7. El profesor conoce la importancia (pertinencia) de los ejemplos en la enseñanza del cálculo del determinante de una matriz aplicando el método del menor y los cofactores].

Sesión 5 (07-01-2013): Cálculo del determinante por la regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

Descripción:

Episodio 1: Cálculo del determinante por la regla de Sarrus para resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

En este episodio, son los estudiantes quienes explican a sus compañeros cómo calcular el determinante mediante la regla de Sarrus, y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer. El profesor indica al resto de la clase que él irá reforzando la explicación.

Uno de los estudiantes da inicio a las exposiciones explicando en qué consiste la regla de Sarrus y el profesor nota que no tiene claro cuál es la diagonal principal y cuál es la secundaria, por tanto interviene [S5.E1.A2.L14-39: *"A ver ¿cuál es la diagonal principal? (...) Despacio, explique bien las cosas, yo le hago una pregunta ¿Cuál es la diagonal principal? (...) Sí pero usted me señala las dos figuras, arriba y abajo, hay dos líneas verdes ahí (...) ¿Cuál es la diagonal principal? (...) Y en la otra? (...) Entonces, la diagonal principal es sólo la línea verde pero de la de arriba y las diagonales paralelas con el vértice opuesto. ¿Qué significa eso? La línea verde de ahí, esa es la diagonal principal ¿Cuáles son las diagonales paralelas? La que tiene aquí, está en amarillo con su vértice opuesto (a_{21}, a_{32}, a_{13}). No estabas viendo eso. La diagonal paralela a la principal con su vértice opuesto y la que está arriba a_{12}, a_{23} es la otra diagonal paralela con su vértice opuesto a_{31}; esos productos se suman ¿Qué es lo que se resta? (...) Esos productos se restan"*].

Enseguida, otro estudiante escribe un determinante 3x3 y lo resuelve a manera de ejemplo para el resto de la clase. Posteriormente, un estudiante explica cómo pueden encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales a través de la regla de Cramer. Jordy realiza una intervención para que quede claro cómo calcular el determinante del sistema [S5.E1.A2.L83-88: *"A ver, hasta ahí, ese primer determinante es el que tú le* *llamas determinante principal, es el que está allá arriba, esa es la matriz de los coeficientes. Del sistema de ecuaciones toma todos los coeficientes, la x, la y, la z, la w, los que sean y los pones en una fila. Y así con la segunda ecuación, la segunda fila, etc., arman las filas con los coeficientes de cada ecuación y ese es el primer determinante, el que llaman* Δ*"*]. También aclara cómo calcular el determinante de cada una de las incógnitas [S5.E1.A2.L89-125: *"¿De dónde de salen* Δ*1,* Δ*2,*Δ*3,* Δ*n? (...) O como ahí le ponen x1, x2, x3 a las incógnitas, por eso le llama* Δ*1,* Δ*2,*Δ*3 (...) ¿Qué diferencia hay entre* Δ*1 y* Δ*? (...) Yo lo único que te pregunto es ¿qué diferencia hay entre* Δ*1 y* Δ*? (...) Eso, la columna donde están los coeficientes de la x son reemplazados por los términos independientes (...) Ya, ¿qué haces para* Δ*2? (...) Eso, ya vimos cómo se hace, ya está claro"*].

Interviene otro estudiante y escribe un problema con el cual deberán plantear el sistema de ecuaciones lineales, calcular los determinantes con la regla de Sarrus y el valor de las incógnitas con la regla de Cramer. El profesor interviene en el planteamiento del sistema de ecuaciones y va guiando la resolución del problema. Terminando este episodio, explica nuevamente el proceso que deben realizar [S5.E1.A2.L204-210: *"¿Quedó todo claro? Está claro que primero hay que calcular el determinante del sistema, que después hay que calcular el determinante para x, reemplazando la columna de x por los términos independientes y que así mismo para y, así mismo para z. Esos son los determinantes que hay que calcular, todo el tiempo hay que hacer lo mismo y luego x se saca dividiendo el determinante de x para el determinante del sistema, lo mismo se hace para y, para z"*].

El profesor entrega un compendio de ejercicios y les indica a los estudiantes que deben resolver el primero que consiste en un problema que hay que interpretar, platear el sistema de ecuaciones lineales y resolverlo por las reglas de Sarrus y Cramer. Jordy interviene en el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales [S5.E1.A2.L228-282: *"¿Cuál es el sistema de ecuaciones que sale en el problema? Tú tienes ya la primera ecuación ¿Cuál es la primera ecuación? (...) Muy bien, las edades combinadas de un padre y sus dos hijos suman 73, entonces "x" ¿a quién le llamo? (...) ¿"y" a quién le van a poner? A la edad del hijo 1 y "z" a la edad del hijo 2 (...) Planteen la otra, ¿cómo sería la segunda ecuación? Dentro de 10 años (...) O sea, también tiene 10 años más. Entonces esto es la edad actual, esto es 10 años después, ¿qué edad va a tener el padre? (...) Pero los hijos también tienen 10 años más (...) ¿Qué dice del padre con el hijo menor? (...) Entonces, esto de aquí (x+10) va a ser dos veces esto (z+10) ¿Cómo lo escribes? (...) ¿Si está* *claro? La edad del padre, eso va a pasar dentro de 10 años, la edad del padre va a ser el duplo de la edad del hijo. Suprime paréntesis y escribe la ecuación 2 (...) ¿Cuál es la tercera ecuación? ¿Ya la hiciste? ¿Quieres pasar a escribirla? Hace 12 años ¿qué ocurre? Todos tienen ¿qué cosa? (...) Hace 12 años compara qué edades, ah solamente la de los hijos: Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano (...) Esa es la ecuación 3. Ahí está organizado todo, ahora hay que calcular los determinantes necesarios y con eso está resuelto el problema"*].

Episodio 2: Cálculo del determinante por el método del menor y cofactores para resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer

Interviene aquí un segundo grupo de estudiantes para explicar cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores. El profesor hace una introducción del tema [S5.E2.A2.L285-288: *"Lo que van a explicar ellos es otro método para resolver los sistemas, lo que cambia aquí es la forma de calcular la determinante, es la única cosa que va a variar, entonces la parte esta de Cramer la van a obviar porque ya quedó claro por la buena explicación que dio el Grupo 1"*]. Un estudiante intenta explicar en qué consiste el menor y el cofactor pero no lo hace claramente, por tanto, interviene el profesor [S5.E2.A2.L306-321: *"A ver, aclaremos bien lo que es un cofactor y lo que es el menor porque ahí estás diciendo cosas que no son ciertas, lea bien lo que es el cofactor y lo que es el menor (...) Los cofactores son cada uno de los que están en el recuadro y con su signo (...) ¿De dónde salen esos signos? ¿Si se acuerda? Con la suma de los subíndices. Si la suma es par es positivo el cofactor, si la suma es impar es negativo. ¿Qué es el menor entonces? (...) ¿Cómo sacas el menor del 4? (...) Exacto ese es el menor, esa es la explicación que tenemos que dar, cuando tomas el 4 eliminas la columna del 4 y la fila del 4 y los números que te quedan fuera de eso, ahí está el menor"*].

Este grupo de estudiantes explica también la resolución un problema para practicar el procedimiento aprendido, en este caso deberán plantear el sistema de ecuaciones lineales, calcular el determinante por el método del menor y cofactores y encontrar el valor de las incógnitas por la regla de Cramer.

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Tanto en el primer como en el segundo episodio está presente el conocimiento de Jordy sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* porque sabe cómo calcular determinantes por la regla de Sarrus y el método del menor y cofactores, así como, encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales con la regla de Cramer. Asociamos aquí el conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, ya que en los ejercicios que propone a los estudiantes para que realicen una práctica, incluye problemas de aplicación, de manera que se fijen en la aplicación del contenido matemático, en que la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de esta forma y, ya sea encontrando los determinantes por la regla de Sarrus o el método del menor y cofactores, constituye la solución de un problema que puede representar una situación ficticia o de la vida real [KoT-P1-I7. El profesor conoce cómo calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus; KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I16. El profesor conoce cómo obtener el menor de una matriz; KoT-P1-I17. El profesor conoce cómo determinar el signo del cofactor de una matriz; KoT-F2-I3. El profesor conoce que el cálculo del determinante de una matriz se puede aplicar en la resolución sistemas de ecuaciones lineales; KoT-P1-I8. El profesor conoce cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer; KoT-F2-I13. El profesor conoce que a través de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (aplicando reglas de Sarrus y Cramer) se puede encontrar la solución de problemas matemáticos ficticios o de la vida real].

En ambos episodios muestra también su conocimiento sobre *Definiciones*. En el primero, el profesor tiene claro que los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales representan la matriz de los coeficientes y que con ella se calcula el determinante principal o del sistema. En el segundo, complementa la explicación del estudiante aclarando las definiciones de menor y cofactor [KoT-D-I18. El profesor conoce en qué consiste la matriz de los coeficientes; KoT-D-I21. El profesor conoce en qué consiste el menor de una matriz; KoT-D-I22. El profesor conoce en qué consiste un cofactor].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

En el primer episodio, cuando un estudiante explica cómo aplicar la regla de Sarrus para calcular un determinante 3x3, el profesor hace una intervención debido a las dudas del estudiante sobre cuál es la diagonal principal y cuál la secundaria, dejando claro al resto de la clase, cuáles son los elementos que se suman y cuáles son los que se restan. Por tanto, pensamos en indicios de su conocimiento sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, ya que al parecer el profesor conoce que cuando los estudiantes calculan el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus se pueden equivocar por no tener claro cuál es la diagonal principal y cuál la secundaria. De la misma manera, los estudiantes pueden no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal, sus paralelas y vértices opuestos se suman y, los de la diagonal secundaria, sus paralelas y vértices opuestos se restan [KFLM-FDA-I11. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus, por no diferenciar claramente las diagonales principal y secundaria; KFLM-FDA-I5. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus, por no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan].

Por otra parte, en el episodio 2, también hay indicios del conocimiento de Jordy sobre la categoría ya citada del KFLM, cuando interrumpe la explicación de un estudiante para aclarar al resto de la clase qué es un menor y qué es un cofactor, con la finalidad de que aprecien las diferencias. Da énfasis a la explicación porque al parecer piensa que puede constituir una dificultad para el estudiante no diferenciar entre los qué es un menor y un cofactor [KFLM-FDA-I12. El profesor conoce que para los estudiantes puede constituir una dificultad el no diferenciar claramente entre lo que es un menor y un cofactor].

Sesión 6 (14-01-2013): Calculo de la matriz inversa 2x2 y 3x3

Descripción:

Episodio 1: Cálculo de la matriz inversa empleando el determinante, la matriz de cofactores y la matriz adjunta

En el desarrollo de esta sesión participan un grupo de estudiantes que explica cómo llegar a la matriz inversa a través del cálculo del determinante, la matriz de los cofactores y la matriz adjunta. Así, un estudiante escribe una matriz A(3x3) y explica todo el procedimiento hasta obtener la matriz inversa empleando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$.

El profesor pregunta al estudiante qué es lo que hay que hacer para comprobar que la matriz resultante es efectivamente la inversa de la matriz A [S6.E1.A2.L35-37: *"Pero ¿cómo comprueba que sí es la inversa? Si multiplica la matriz que escribió al principio, la matriz A por la matriz inversa que está ahí debe salir la matriz identidad"*].

A partir de aquí, Jordy se dirige al estudiante que explicó el ejercicio para recalcar la importancia de la notación en matemáticas [S6.E1.A2.L38-49: *"Hay que tener cuidado cuando escribimos en la pizarra y no poner signos y rayas en cualquier parte porque hay algunos signos en matemáticas que tienen significado, entonces tú pones ahí un par de barras en el resultado, lo que hizo usted y eso significa valor absoluto, entonces ese número que decía ahí -2 entre esas barras si es valor absoluto vale 2, porque el valor absoluto siempre es positivo, entonces coloque los símbolos donde deben colocarse. Si va a calcular el determinante no le ponga paréntesis, hay que poner barras. Ahí, como está eso es una matriz, pero si va a calcular el determinante hay que poner barras en lugar del corchete, tengamos eso con cuidado para tener claro los conceptos, sino usted se confunde y confunde al resto"*].

Enseguida otro estudiante realiza otro ejercicio a manera de ejemplo en la pizarra y posteriormente, el profesor solicita a la clase resolver aquellos ejercicios relacionados al tema que están en el compendio entregado por él [S6.E1.A2.L76-77: *"Ahora resuelva los ejercicios de la hoja, si tiene alguna duda me lo dice"*]. Aprovecha para recordar a los estudiantes cómo obtener la matriz adjunta de una matriz 2x2 [S6.E1.A2.L80-91: *"Cuando es de 2x2 la matriz se puede hacer directamente la adjunta 2x2 ¿Qué es lo que pasa en la adjunta con relación a la primera matriz? ¿Qué cambios hay? (...) Esta diagonal cambia los signos, esta diagonal secundaria cambia de signos ¿Y qué pasa con la diagonal principal? (...) Se intercambian los elementos. Se puede llegar tranquilamente de esta matriz a la adjunta. Entonces puede encontrar usted directamente la adjunta y lo que sí hay que hacer es encontrar el determinante"*].

Una vez que ha explicado cómo obtener la matriz adjunta 2x2, Jordy realiza el resto de procedimientos hasta encontrar la matriz inversa y hace la comprobación para demostrar que se obtiene la matriz identidad, lo que lo lleva a un contexto adecuado para manifestar que el producto de matrices no es conmutativo, pero que aquí hay una excepción, ya que la multiplicación de una matriz por su inversa sí es conmutativa [S6.E1.A2.L99-104: *"Ahí sí se comprueba que sale la matriz identidad. Esa comprobación debe salir igualita si aplica la propiedad conmutativa, multiplicando así $A^{-1} \cdot A$, invirtiendo los factores debe dar lo mismo. Ese producto sí es conmutativo, verá que una de las propiedades de la multiplicación de matrices es que no son conmutativas, pero en este caso de la matriz inversa sí es conmutativa"*].

Episodio 2: Cálculo de la matriz inversa $A \cdot A^{-1} = I$

Otro grupo de estudiantes expone ante sus compañeros y el profesor, cómo encontrar la matriz inversa a través de $A \cdot A^{-1} = I$. Escriben un ejemplo en la pizarra que se compone de la matriz A multiplicada por los elementos de la matriz inversa que aparecen como incógnitas y este producto es igual a la matriz identidad. Explican que habrá que multiplicar A por su inversa para obtener sistemas de ecuaciones que permitan hallar los elementos de la matriz identidad a través de la igualdad de matrices. El profesor hace ver al resto de la clase que en este procedimiento se aplica la igualdad de matrices [S6.E2.A2.L119-124: *"¿Por qué resuelve eso, que x+3y =1? (...) Eso es una igualdad de matrices ¿Qué dice en la igualdad de matrices? Si dos matrices son iguales, los elementos que ocupan la misma posición son iguales"*]. El grupo de estudiantes presenta ejemplos con matrices de segundo y tercer orden.

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Jordy evidencia su conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)*, al hacer explícito que para comprobar que la matriz inversa obtenida es correcta, hay que multiplicarla por la matriz original y debe dar como resultado la matriz identidad [KoT-P4-I12. El profesor conoce que el producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad]. Hemos detectado también el conocimiento del profesor sobre *Registros de representación* cuando expresa que si los elementos se colocan entre paréntesis, se trata de una matriz, y que si se colocan entre barras, es un determinante

[KoT-RR-I1. El profesor conoce cómo se denotan las matrices; KoT-RR-I6. El profesor conoce la notación del determinante de una matriz].

El conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* de este profesor se hace explícito al obtener una matriz adjunta 2x2, que emplea para llegar finalmente a encontrar la matriz inversa de A con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$ [KoT-P1-I19. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 2x2; KoT-P1-I11. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$].

Al finalizar el primer episodio, Jordy muestra su conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos* cuando menciona que una de las propiedades de la multiplicación de matrices es que no son conmutativas; aunque al multiplicar una matriz por su inversa sí haya conmutatividad [KoT-PF-I5. El profesor conoce que generalmente el producto de matrices no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$].

Del episodio dos extraemos evidencia del conocimiento del profesor sobre *Definiciones*, en este caso de la igualdad de matrices, así como, aquel sobre *Procedimientos (¿cómo se hace)* al calcular la matriz inversa por $A \cdot A^{-1} = I$ [KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices; KoT-P1-I4. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $A \cdot A^{-1} = I$].

CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA (KPM)

Pensamos en un indicio del conocimiento del profesor sobre la práctica matemática, cuando menciona que los símbolos en matemáticas tienen significado [S6.E1.A2.L38-40: *"Hay que tener cuidado cuando escribimos en la pizarra y no poner signos y rayas en cualquier parte porque hay algunos signos en matemáticas que tienen significado"*]. Aunque lo que dice posteriormente nos lleva a su conocimiento sobre KFLM, esta afirmación podría constituir una oportunidad de sobre su conocimiento de la práctica matemática en cuanto al papel que tienen la notación matemática en sus clases [KPM-PNM-I1. El profesor conoce el papel de la notación en matemáticas].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

En el primer episodio, el profesor hace un llamado de atención al estudiante que ha resuelto un ejercicio sobre matriz inversa en la pizarra para que sea cuidadoso con la notación en la resolución del ejercicio. Lo expresado por el profesor, nos lleva a pensar en su conocimiento sobre las características de aprendizaje en lo referente a *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*. Jordy aprovecha que el estudiante se equivoca al escribir entre barras verticales la respuesta del determinante, y hace ver, tanto al estudiante, como al resto de la clase que es un error que no deben cometer, ya que si lo dejan así significa valor absoluto de un número. Además, indica también que si van a calcular un determinante deberán colocar los elementos entre barras y no entre paréntesis porque así estarían representando una matriz [KFLM-FDA-I4. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar en la notación de una matriz y un determinante].

ANEXO 10. Esquemas del conocimiento de Jordy (Año 2 de observaciones)

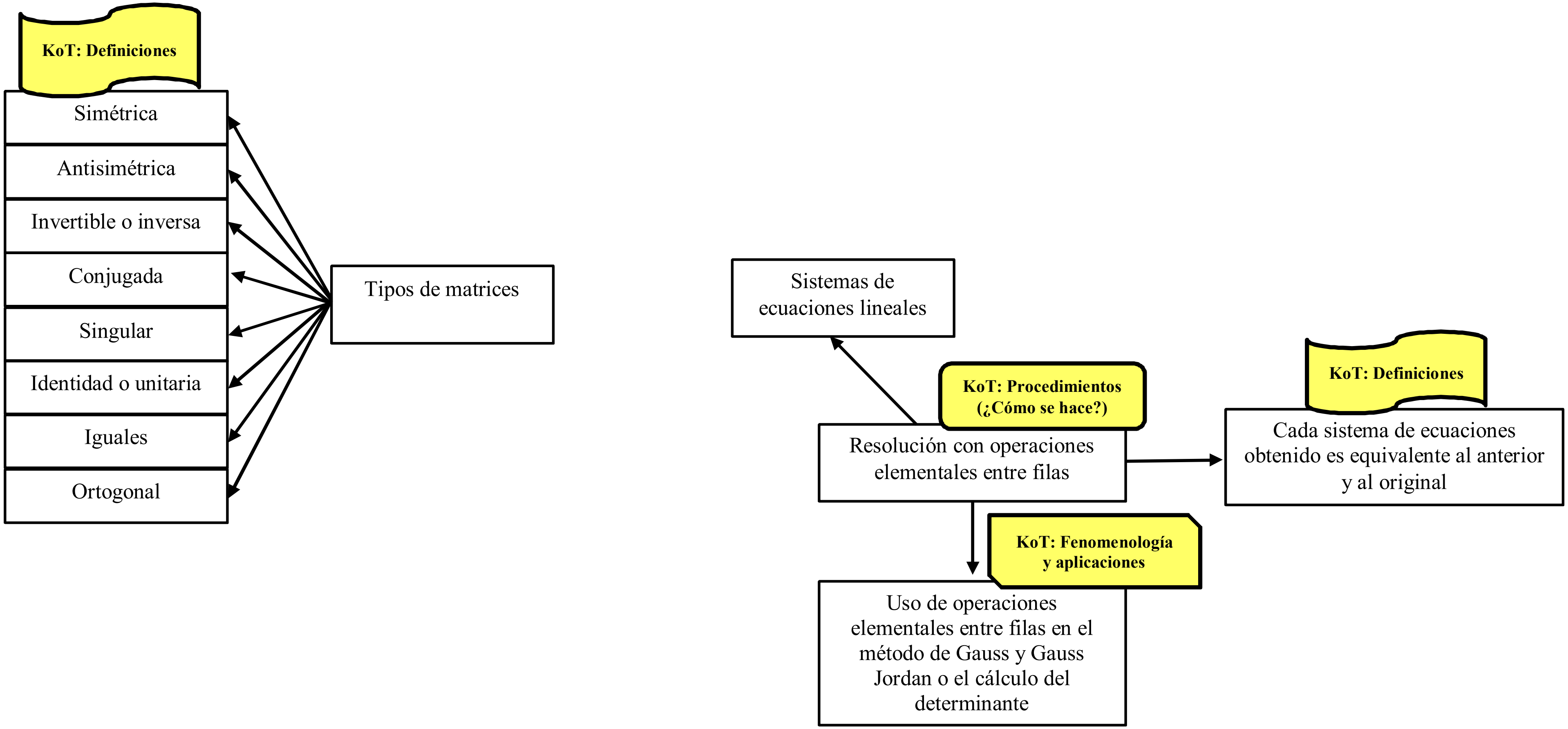


Figura 8. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 1-Año 2 bajo el enfoque del MTSK en la Sesión 1-Año 2 (Clasificación de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante operaciones elementales entre filas)

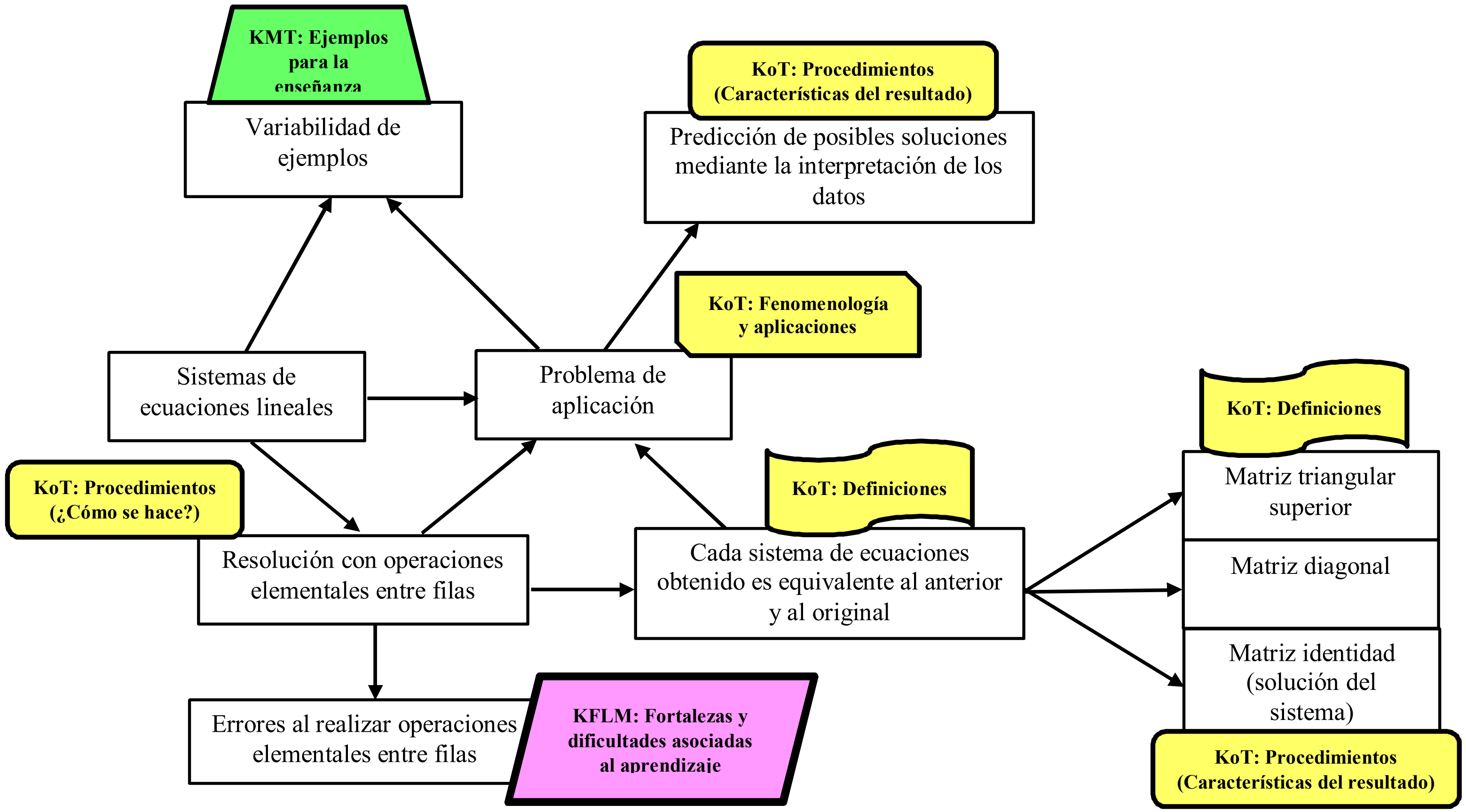


Figura 9. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 2-Año 2 bajo el enfoque del MTSK (Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con 3 y 4 incógnitas mediante operaciones elementales entre filas)

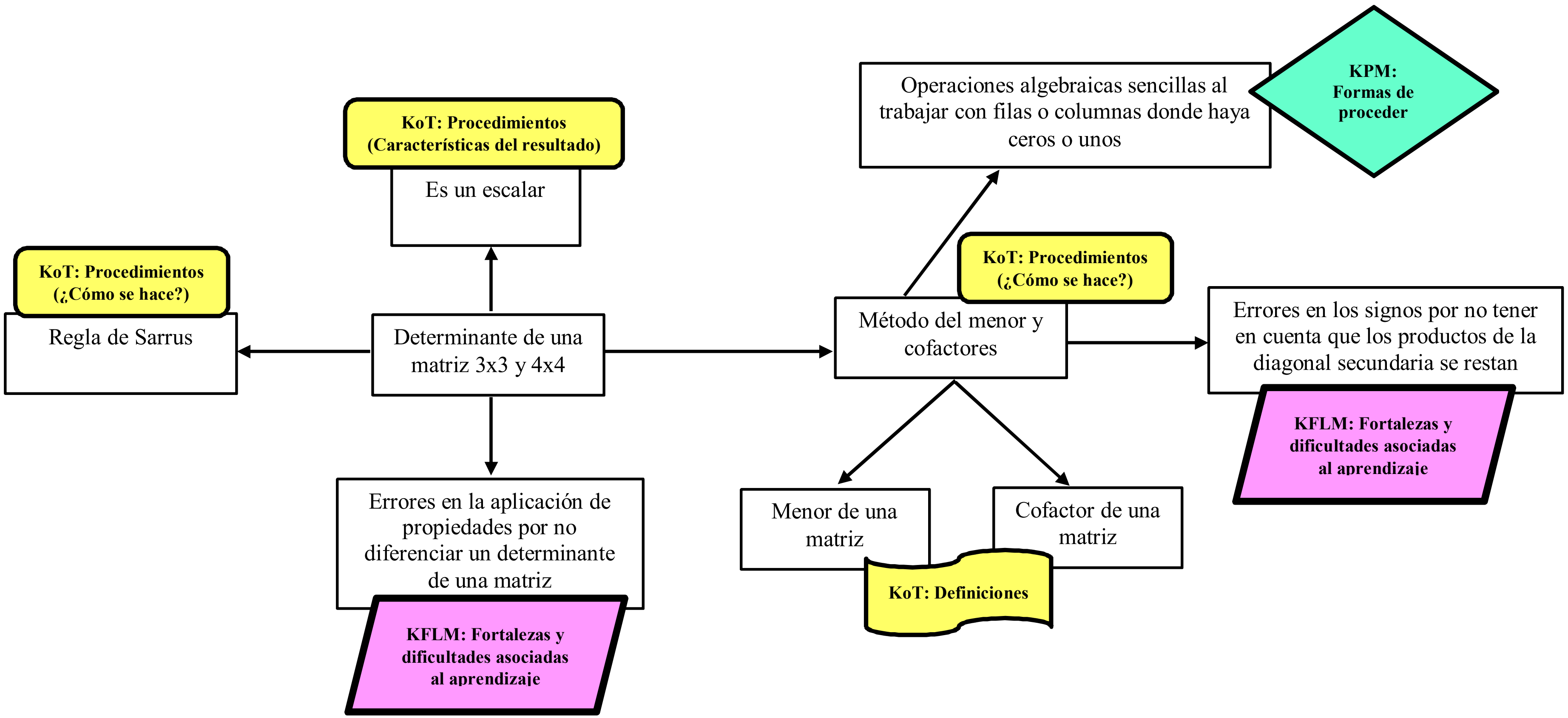


Figura 10. Esquema de conocimiento de Jordy Sesión 3-Año 2 bajo el enfoque del MTSK en la (Cálculo del determinante 3x3 y 4x4 por el método del menor y cofactores)

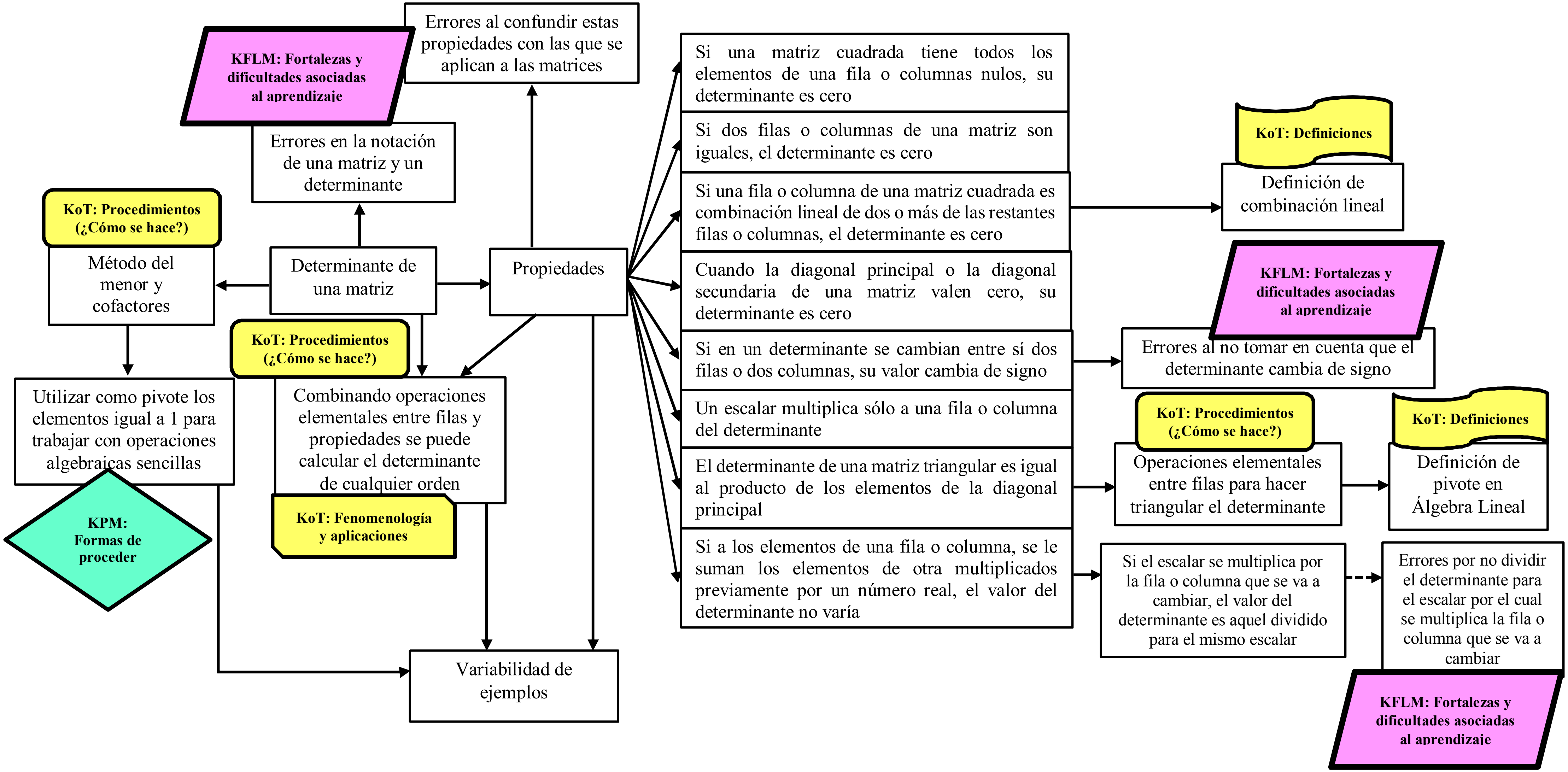


Figura 11. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 4-Año 2 bajo el enfoque del MTSK (Propiedades de los determinantes y cálculo del determinante por el método del menor y cofactores)

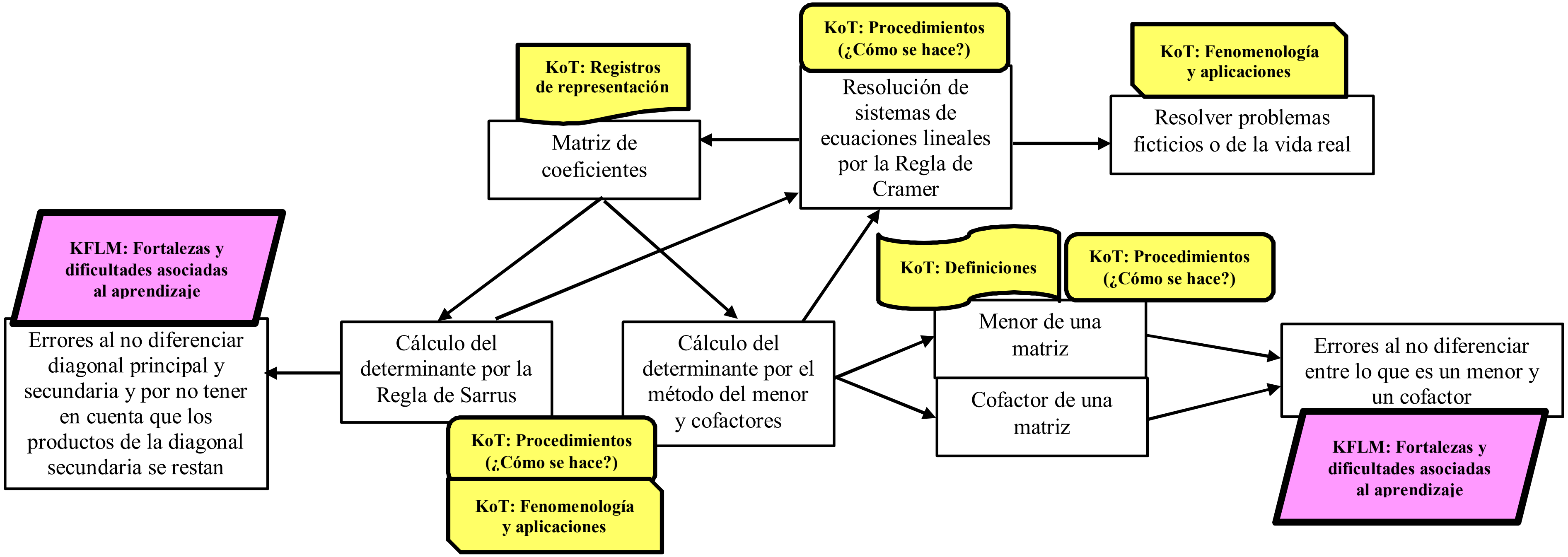


Figura 12. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 5-Año 2 bajo el enfoque del MTSK (Cálculo del determinante por la regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer)

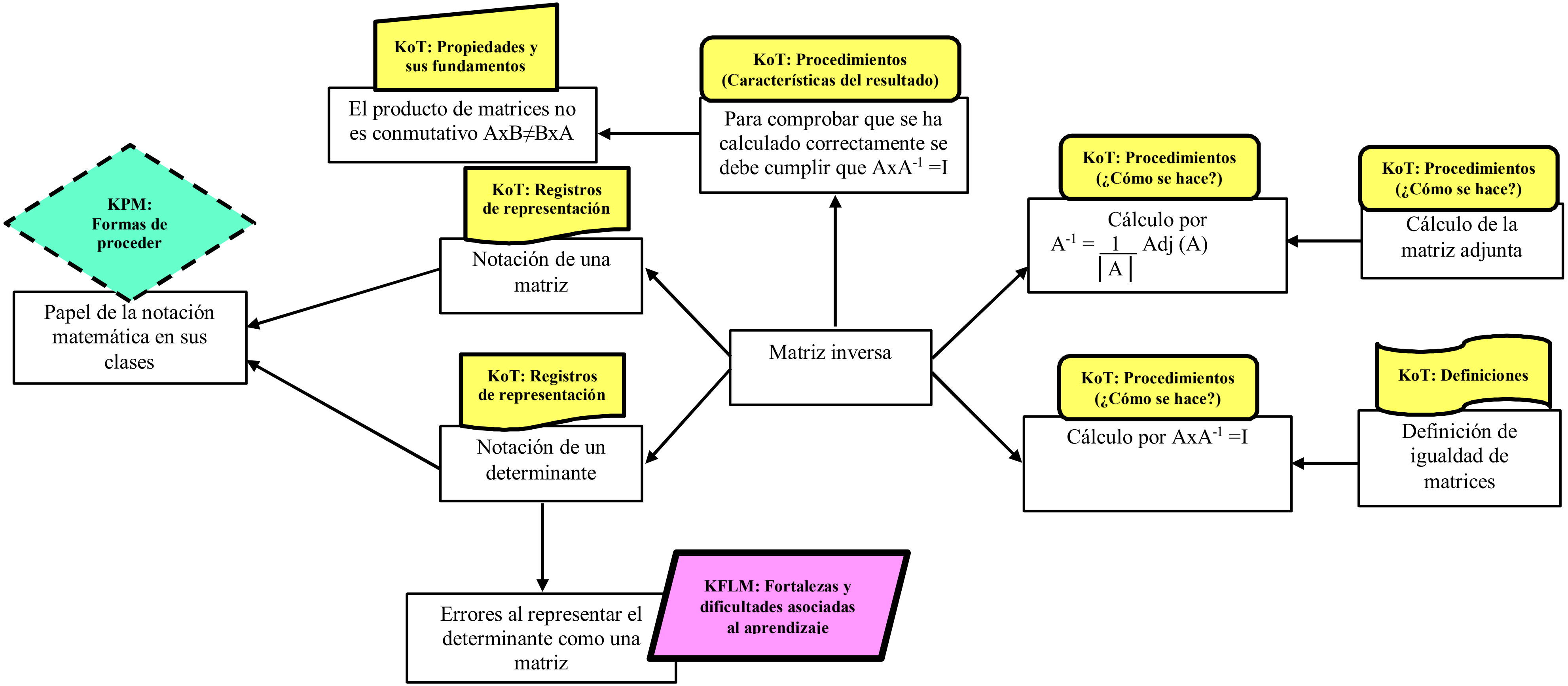


Figura 13. Esquema de conocimiento de Jordy en la Sesión 6-Año 2 bajo el enfoque del MTSK (Calculo de la matriz inversa 2x2 y 3x3)

ANEXO 11. Análisis preliminar de las concepciones de Jordy sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Metodología

Praxis (1,2)

En el aula de Jordy, *los ejercicios pretenden reproducir los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte de los alumnos* (TE1)[4]. El indicador describe perfectamente la actividad del aula del profesor y su énfasis en los errores de los estudiantes. Ya hemos visto en los apartados anteriores evidencias del conocimiento de este profesor sobre los errores de los estudiantes con el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; por ejemplo, el equivocarse en el cálculo de un determinante 3x3 por el método del menor y cofactores pensando que se procede igual que cuando se multiplica un escalar por una matriz (S6.128-132[5]). Este es un error que Jordy sabe que podrían cometer y hace alusión al mismo cuando aborda en sus clases el cálculo de determinantes por el método del menor y cofactores.

128 P: *Un detalle por si acaso, esto de aquí ¿qué es? ¿es una matriz o un*
129 *determinante? Esto no es una suma de escalares, no es una suma de*
130 *matrices y producto por escalar. Esto es la combinación entre una fila y*
131 *sus cofactores. Usted multiplica los elementos de una fila cualquiera por*
132 *sus cofactores y eso lo suma y a ver qué sale. Esto es un determinante.*

Al igual que este caso, hemos constado en las observaciones de las clases de Jordy, su especial atención a otros errores habituales, ya que en muchas ocasiones interrumpe sus explicaciones porque considera importante hacer advertencias sobre errores a los estudiantes. Relacionado a lo anterior, el profesor indica en una entrevista cómo determina los errores que cometen los estudiantes (E1.P14[6]), y su respuesta va en sintonía con lo observado en sus clases, ya que en la misma sugiere que existe una atención

---

[4] En el texto se incluye en cursivas aquellos indicadores provenientes de la descripción original del instrumento de análisis de concepciones de Carrillo (1998), con las siglas de la tendencia a la cual corresponden y el número del indicador. Aquellos indicadores en negritas y cursivas fueron incluidos por Climent (2005) en el instrumento original de análisis de concepciones de Carrillo (1998). Las palabras o frases en negritas, cursivas y subrayadas han sido adaptaciones incorporadas por la autora de acuerdo al contexto de la presente investigación.
[5] Siglas y números utilizados para identificar la sesión de clases (S6) y líneas de transcripción (128-132).
[6] Siglas utilizadas para identificar una entrevista (E1) y la pregunta (P14).

constante hacia los errores de sus estudiantes, y su finalidad es mencionarlos para que en lo posterior no se repitan.

E1.P14: *Los errores cometidos por los estudiantes en el tema de matrices se suelen determinar con las evaluaciones, talleres y en las mismas clases cuando ellos desarrollan los ejercicios, ahí voy mirando en qué se equivocan y luego se refuerza eso para que no sigan cometiendo los mismos errores.*

El profesor no expone los contenidos en su fase final, simula su proceso de construcción, apoyándose en estrategias expositivas (TE2). Jordy en sus explicaciones procura no presentar directamente la resolución y respuesta de los ejercicios, sino más bien, busca que el estudiante se fije por qué se llega a una determinada resolución y las características de esta, empleando ejemplos variados de un mismo contenido, y cuando se trata del uso de un algoritmo va construyendo las soluciones a través de preguntas dirigidas a todo el grupo de estudiantes, siendo corroborado esto además, en una entrevista (E1.P15), donde el profesor indica que en el transcurso de sus explicaciones todos los estudiantes pueden participar o aportar en la resolución de los ejercicios.

E1.P15: *Como técnica generalmente se plantean ejercicios y se piden opiniones a todos, para ver cómo se puede resolver tal o cual problema. Cuando se hacen talleres, en un momento determinado, suelo ir resolviendo cada problema en la pizarra (para todos), más que nada con aquellos ejercicios que tienen alguna complicación para aclarar las dudas, entonces ahí van participando los estudiantes, existe la oportunidad en ese momento de que todos puedan aportar.*

Así, por ejemplo, cuando explica el algoritmo de la suma de matrices (S1.146-163), se apoya en estrategias expositivas, con el predominio de ejemplos variados y preguntas que intentan captar la atención de los alumnos e inducir al razonamiento.

146 P: *Vamos a suponer que tenemos la matriz A y tenemos las matriz B y*
147 *tenemos la matriz C*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & 7 \\ 8 & -10 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

148 *¿Cuáles de esas matrices pueden sumarse?*

E: *A+B*
P: *O podemos hacer también B+A*
¿Por qué no se puede sumar A + C?
E: *Son diferentes*
P: *No tienen las mismas dimensiones, aquí ¿qué es lo que ocurre con respecto a B o a la matriz A?*
E: *La C tiene una columna de más*
P: *Tiene una columna de más, entonces no podemos sumar A con C, no está definida esa suma, ni podemos sumar B con C porque no está definida esa suma, porque son de diferentes dimensiones las matrices, lo que sí podemos hacer es A + B, ¿qué hay que hacer para sumar? Usted toma los elementos que están en la misma ubicación y los suma, por ejemplo 2+(-1)*

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Y en la segunda fila lo mismo
¿Qué pasaría si hacemos B + A?

En las observaciones de clases no participantes de este profesor, no encontramos evidencia de la utilización de equipo informático y/o software, lo cual es reconocido por Jordy en una entrevista (E1.P18), es decir, los recursos en los cuales se apoya son tradicionales, básicamente sólo utiliza la pizarra.

E1.P18: *No estoy empleando software, en eso me tienen que llamar la atención porque no estoy empleando ningún software por ahora. Tengo un programa en la computadora pero debo estudiarlo primero porque no podría presentarme ante los estudiantes sin prepararme.*

En el segundo año de observaciones de la práctica del profesor, existe un cambio en la metodología para explicar las clases, ya que algunos contenidos fueron consultados y expuestos por los estudiantes[7], y el profesor interviene en ciertos casos para complementar el contenido o corregir errores cometidos por los alumnos en su explicación al resto de sus compañeros. La clase sigue siendo expositiva, pero se observa que Jordy cede cierto protagonismo al estudiante, aunque sin cambiar demasiado la dinámica del aula, ya que aunque sea un alumno quien expone ahora la clase que ha preparado, realmente se sigue explicando un determinado procedimiento y luego se

[7] Este cambio en la metodología de las clases de los dos profesores que participan en esta investigación, se produce debido a que ambos imparten la asignatura de Álgebra Lineal en la misma carrera, y por tanto, han mantenido diálogos en los cuales decidieron establecer grupos de trabajo entre sus alumnos para que expliquen ciertos contenidos matemáticos durante las aulas, como una forma de fomentar la participación activa de los alumnos en sus clases

trabajan ejercicios de aplicación. Por tanto, habría acercamiento hacia una tendencia espontaneísta, aunque no podríamos decir que su Praxis llega a ser espontaneísta propiamente, ya que no hay actividades donde el estudiante explore o manipule; ni tampoco investigativa, porque no llega a proponer investigaciones orientadas hacia la resolución de problemas. Esto refleja, además, cambios en la concepción del aprendizaje del profesor y papel del alumno, que mencionamos más adelante.

Objetivos (3)

Los objetivos que persigue Jordy están al parecer relacionados con el contenido antes que con las actitudes de los estudiantes hacia el mismo, lo cual fue deducido en un primer momento a partir de su respuesta en una entrevista (E1.P1), donde expresa que lo importante es lo conceptual; por ejemplo que entiendan qué es una matriz, y lo procedimental; por ejemplo, el manejo de las operaciones y aplicaciones de las matrices. Por tanto, en sus clases, ***se persiguen objetivos terminales, poniéndose énfasis en objetivos <u>conceptuales</u> y procedimentales*** (TE3).

E1.P1: *Primero que entiendan lo que es una matriz, luego que sepan utilizarla para resolver un problema. Que puedan hacer las operaciones indicadas, plantear problemas de matrices y que sepan resolverlos. Porque las matrices sirven para la resolución de ecuaciones y tienen también otro tipo de aplicaciones en lo que es propiamente la carrera de Ingeniería en Sistemas.*

Lo enunciado por el profesor en la entrevista va acorde con lo observado en sus clases, ya que vemos un énfasis en objetivos conceptuales cuando aborda propiedades; por ejemplo, las de los determinantes, procurando que el estudiante comprenda el enunciado de las mismas, y las posibles variantes en una misma propiedad (S4*.1-126[8]). En la explicación del profesor se nota su esfuerzo por dejar claro cada enunciado con su respectivo ejemplo, donde inclusive menciona las diferencias con alguna propiedad de las matrices, como cuando se trata de multiplicar un escalar por una matriz y un escalar por un determinante.

Por otra parte, hace énfasis en objetivos procedimentales, es muy cuidadoso en explicar paso a paso los algoritmos, el cómo se hace, apoyándose en ejemplos, como en el caso

[8] El asterisco indica que la unidad de información corresponde al segundo año de observaciones de la práctica del profesor.

del manejo de operaciones elementales entre filas (S3.138-172) para la obtención de matrices escalonadas, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

138 P: *¿Qué puedes hacer para escalonar esa matriz?*
139 *Hay algunas operaciones que se llaman operaciones elementales entre*
140 *filas. Puedes hacer 4 cosas:*
141 *Primero, puedes cambiar una fila con otra:* $E_1 = f_i \rightarrow f_j$
142 *Puedes cambiar esta fila con la primera o la segunda con la tercera y la*
143 *matriz sigue siendo equivalente*
144 *Otra cosa que se puede hacer, Tú puedes reemplazar cualquier* f_i *por esa*
145 *fila multiplicada por un escalar k diferente de 0:* $E_2 = f_i \rightarrow f_i.k$
146 *La tercera cosa que pueden hacer, puedes tomar una* f_i *cualquiera y a*
147 *ella le puedes sumar otra* f_j *multiplicada por un escalar k:*
148 $E_3 = f_i \rightarrow f_i + k{\cdot}f_j$
149 *El intercambio está fácil, por ejemplo, yo puedo colocar esta matriz así*

$$E_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

150 *Esto de aquí es* E_1 *para que vea un ejemplo, si quiere de aquí puede*
151 *intercambiar otra fila y forma otra matriz equivalente*
152 *Si quiere aplicar* E_2 *entonces a esta segunda matriz que está aquí*
153 *vamos a reemplazarle* $f_2 \rightarrow -3f_2$

$$E_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_2 \rightarrow -3f_2$$

154 *Esa matriz es equivalente a esa y a la anterior*
155 *Vamos a aplicar* E_3
156 *Yo voy a pasar acá esta matriz, la fila 3 la voy a reemplazar por*
157 $f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad f_3 \rightarrow f_3\text{-}2f_1$$

158 *El escalar puede ser positivo o negativo*
159 *La fila 1 queda igualita*
160 *La fila 2 queda igualita, van a cambiar la fila 3*

$$E_3 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

161 *Y también pueden hacer la cuarta operación,*
162 *vamos a reemplazar una* f_i *por ella multiplicada por un escalar*
163 *cualquiera sumado a otra fila multiplicada por otro escalar cualquiera:*
164 $E_4 = f_i \rightarrow k{\cdot}f_i + k{\cdot}f_j$
165 *O sea, ahora multiplicas las dos, la que vas a reemplazar y la otra*
166 *que vas a sumar*
167 *Conste que el escalar de aquí puede ser 1 o -1, tú las puedes sumar*
168 *simplemente o las puedes restar o la puedes multiplicar por un*
169 *número fraccionario*
170 *Entonces, vamos a reemplazar ahora* f_1 *por* $2f_1\text{-}3f_3$
171 *Como va a reemplazar sólo* f_1, f_2 *y* f_3 *sigue siendo la misma, no cambia*

$$E_4 \quad \begin{bmatrix} -17 & 27 & 17 & -14 \\ 6 & -9 & -15 & -24 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Bueno, ahí tienen un ejemplo de cada cosa

Incluso en el segundo año de observación de su práctica, cuando contenidos como la inversa de una matriz es explicada por los estudiantes, al profesor le interesa que estos dominen los procedimientos (S6*.1-7.).

E: *Nosotros lo que vamos a hacer es calcular la matriz inversa*
por medio de la matriz adjunta
Vamos a proceder a hacer dos ejercicios
E: *Para empezar a trabajar con la matriz adjunta primero se tiene que*
sacar el determinante

$$A= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

P: *No se complique con los elementos de la matriz, interesa el*
procedimiento

Programación (4)

La programación que sigue Jordy *es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina* (TE4). Dicho documento ha sido elaborado por él mismo, en base a sus conocimientos, experiencias previas, y a lo que corresponde según el curriculum abordar en este nivel. De acuerdo a las respuestas obtenidas en una entrevista, el profesor admite que tiene la libertad de alterar el orden de los contenidos e incluso modificarlos si así lo cree conveniente (E4.P8). Sin embargo, durante los dos años de observaciones de su práctica la programación se ha tratado más bien como un documento cerrado, ya que al parecer lo que prima es la lógica de la propia asignatura. Indica además, que en ocasiones le ha tocado revisar algún tema anterior o hacerles ver a los estudiantes la utilidad del contenido en temas futuros (E3.P17).

E4.P8: *De hecho yo nunca he considerado el esquema de la asignatura como una camisa de fuerza, ahora hay una lógica en cuanto a qué temas ver antes o después, en el caso que se pueda sí se cambia el orden de los contenidos y lo otro en los sílabos hay un poco de libertad porque no nos dan ninguna cosa obligatoria. De hecho, los sílabos los tenemos que elaborar nosotros mismos, lo que está establecido es el marco teórico, los* *temas y subtemas, pero incluso en eso nos han dicho que tenemos libertad para modificar las temáticas, por ese lado hay la oportunidad de mejorar.*

E3.P17: *De acuerdo a la situación propia del aula a veces toca regresar para recordar algo que ya se vio, incluso alguna vez me ha tocado dándome cuenta que hay algo fundamental que no se domina, me ha tocado dejar el tema que estamos viendo y regresar a revisar totalmente alguna temática específica, incluso a veces se puede dar como un flash informativo de lo que en futuro toca ver con eso, sin que vayas a ahondar, pero hacerle ver que lo que estamos resolviendo nos va a servir para dentro de unos meses o dentro de algún tiempo.*

Sentido de la asignatura

Orientación (5)

Para Jordy, resultan importantes *tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad* (TE5). En el caso de los conceptos, al profesor le interesa que el estudiante pueda distinguir las características de un objeto matemático, pero a su vez diferenciarlo de otro de características similares, por ejemplo, cuando se trata de matrices escalonadas y canónicas (S3.127-136).

Las reglas son entendidas como algoritmos, vistos como procedimientos estándar que hay que seguir paso a paso. Para el profesor es importante que el estudiante se apropie de los procedimientos, y además, sea consciente del uso flexible de los mismos, en el sentido de que se busque la eficacia y simplicidad a la hora de usarlos. Interesa la lógica de dichos procedimientos, es muy claro en su práctica que cuando se trabajan los procedimientos busca enfatizar formas de simplificarlos o de hacerlos más fáciles para que el estudiante los reproduzca. Esto se observa, por ejemplo, en el procedimiento de cálculo de un determinante 3x3, donde interesa la lógica del método utilizado (menor y cofactores), y a su vez, procura que el estudiante note que es posible simplificar dicho procedimiento con el empleo de operaciones elementales entre filas (S7.1-36)

P: *Ahora interesa que se maneje bien las operaciones elementales entre filas. Estamos ahora calculando el determinante utilizando cofactores, entonces para los que llegaron recién, para que se igualen en lo que estamos trabajando, tenemos aquí un determinante, vamos a calcularlo utilizando el método de cofactores.*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Tomamos una fila o una columna cualquiera, entonces cada cofactor
tiene su signo, aquí sabemos que es signo positivo,
multiplicamos + por + da + 3 y esto
multiplicado por el determinante del menor. Igual con el 5 sabemos que
aquí en la matriz de los signos tenemos signo negativo, entonces – por –
da +, luego colocamos aquí el determinante del menor. Aquí tiene signo
positivo entonces + por + da +, como es 1 no hace falta colocarlo,
luego resolvemos cada uno de los determinantes

$$= 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

¿Qué ocurriría si fuesen 0 el -5 y el 3? Esto se reduciría a 0, entonces
una forma de trabajar o de aprovechar las operaciones elementales
entre filas aplicando las propiedades de los determinantes, eso usted lo
debe de haber consultado, cuando tú aplicas en un determinante las
operaciones entre filas, la tercera y la cuarta,
que le sumas el producto de un escalar por una fila a otra fila
cualquiera, el determinante no cambia su valor. Entonces vamos a
aplicar eso para hacer 0 a este -5 y al 3, ya vamos a ver qué ocurre
Aplico operaciones elementales entre filas para hacer 0, utilicemos este
número como pivote y con esa fila hagamos 0 al -5 y al 3, a ver cómo
Queda
Entonces, ¿con qué remplazamos la fila 1? Para hacer 0 al 3
¿Y la fila 2?

$$\begin{array}{l} f_1 \rightarrow f_1 - 3f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + 5f_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -8 & 22 \\ 0 & 7 & -33 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

Entonces aplicando el mismo concepto utilizamos la primera columna,
como este elemento es 0 al multiplicarlo
por cualquier determinante va a dar 0, o sea sería así

$$= 0 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} -1 & 22 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -8 & 22 \\ 7 & -33 \end{vmatrix}$$

Nos damos cuenta fácilmente, que esto ¿cuánto va a dar?,
esto va a dar 0 porque tenemos un factor 0 y el único valor que hay aquí
diferente de 0 sería ese entonces vea usted que sale lo mismo
Aquí estamos utilizando los cofactores.
Aquí estamos utilizando operaciones elementales entre filas y
cofactores, esto de aquí es necesario, podemos utilizarlo si tenemos
determinantes de orden 4, 5.

Finalidad (7)

La asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación ***en la propia matemática, para el estudio de otras disciplinas o en la vida cotidiana*** (TE7). Este indicador se refleja en lo expresado por el profesor en entrevistas, al indicar, por ejemplo, dentro de la propia matemática, que el tema de matrices es la base para abordar vectores y ecuaciones diferenciales (E2.P7).

E2.P7: *Siempre es necesario que se entienda de dónde viene cada cosa, incluso para poder entender algo es necesario que lo sepan, ahora nos toca trabajar con vectores y luego con otros contenidos que tienen como base las matrices y ahí se necesita o se requiere que se pueda ver qué es lo que ocurre, porque este contenido es importante para lo que viene después en cuestiones de cálculo y ecuaciones diferenciales y ellos necesitan tener bases, que puedan ir viendo lo que ocurre en la parte de la resolución de ejercicios y luego que puedan verlo en la gráfica o representación. Cuando vemos el determinante por ejemplo, en el caso de las matrices, yo generalmente lo digo, o sea si vamos a resolver un sistema de ecuaciones lineales digo que antes vimos el determinante y que precisamente esos conocimientos los podemos emplear aquí para encontrar las incógnitas, de alguna manera hago una conexión.*

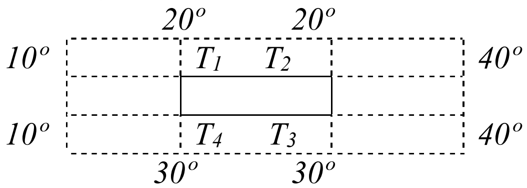
Sus expresiones concuerdan con lo visto en su práctica de aula cuando al explicar las propiedades de los determinantes, indica de qué se trata una combinación lineal y que será de utilidad en el tema de vectores (S4*.22-28).

22 P: *Si tú sumas las dos primeras filas te da la tercera, entonces el*
23 *determinante allí vale 0*
24 *¿Cómo le llaman a esto?*
25 E: *Una combinación lineal*
26 P: *Tenga en cuenta esto porque será de utilidad cuando trabajemos con*
27 *vectores. Una combinación lineal significa que esta fila* (la tercera) *nace*
28 *de la combinación lineal de estas dos* (primera y segunda).

Además, sostiene que hace notar a sus estudiantes la aplicación de temas como el determinante en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual se puede notar también en su práctica de aula cuando trabaja la regla de Sarrus y el método del menor y cofactores para encontrar el determinante de una matriz, con la finalidad de que sean aplicados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, a través de la regla de Cramer. Así mismo, en sus sesiones de clases hay evidencia del carácter práctico que Jordy le da a asignatura al enseñar, por ejemplo, cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales con operaciones elementales entre filas, con la finalidad última de que dichas operaciones sean aplicadas en la resolución de un problema que puede representar una situación real (S2*.117-130).

117 P: *Ahora dibujemos la placa, esta es metálica delgada y no recibe mayor*
118 *temperatura perpendicular, o sea es una placa en el piso que no recibe*

mayor temperatura perpendicular y está sostenida en una malla metálica. Los 4 nodos a los que hace alusión son estos 4 puntos de intersección del medio. Tenemos T1, T2, T3 y T4, entonces dice que la temperatura en estos sitios es el promedio de los 4 nodos más cercanos y nos da la temperatura en los bordes. Por este lado tenemos una temperatura de 10º, por este borde de aquí arriba tenemos una temperatura de 20º; por el lado derecho hay una temperatura de 40º y en el lado inferior hay una temperatura de 30º



Entonces hay que plantear 4 ecuaciones, una para T1, una para T2, para T3 y T4. Te salen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, es un sistema, esa es la primera cosa que hay que hacer; resolverlo es encontrar la temperatura en cada nodo.

Esto concuerda con lo que el mismo profesor expresa, ya que considera importante aplicar lo que se aprende para que no se olvide, aunque dicha aplicación no sea de forma inmediata (E3.P1).

E3.P1: *Primero yo considero que se aprende practicando, especialmente lo que es matemáticas, y luego para fijar bien el conocimiento el asunto es buscarle la aplicación, para qué sirve eso. Yo creo que eso es lo fundamental, primero practicar y luego aplicar lo que se aprende. Es probable que la aplicación en algunos casos no sea tan inmediata pero es bueno a todo lo que uno va aprendiendo encontrarle siempre la aplicación porque si no se olvida. Uno mismo dice esto no me está sirviendo para nada inmediato, simplemente el cerebro lo olvida.*

Concepción del aprendizaje

Tipo y forma-procesos (9, 10)

En lo relacionado al proceso de aprendizaje, en las sesiones de clases de Jordy, *aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo* (TE9) (regla general-aplicación a casos particulares), y donde *para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior* (TE10). Para asignar estos indicadores nos hemos basado en la respuesta obtenida a través de una entrevista (E2.P8), donde el profesor indica que de acuerdo a su criterio empieza explicando lo más sencillo o general para después profundizar en el contenido matemático.

E2.P8. *Al menos como criterio general siempre comienzo por cuestiones más sencillas. Otros colegas comienzan con ejercicios más complicados porque tienen un criterio, si alguien ya entendió lo más difícil pues lo más fácil ya está superado. Pues yo al menos toda la vida he pensado al revés, comenzamos por lo más sencillo y luego eso permite ir generalizando si quieres o ampliando el tema para ir profundizando y complicando más el asunto.*

Por otra parte, en las observaciones de aula, constatamos que el aprendizaje que propicia el profesor se da a través de un proceso deductivo. Si bien es cierto, no expone directamente un algoritmo o procedimiento cuando aborda el contenido matemático en la mayoría de sus clases, sino que más bien, primero presenta ejemplos y da pautas a los estudiantes para que noten las diferentes características de los mismos, finalmente explica el procedimiento o regla general que conlleva a la resolución de los ejercicios. Esto sucede por ejemplo, cuando expone el método para calcular el determinante por menores y cofactores como antecedente para abordar el caso particular del determinante de una matriz de orden cinco donde aplica el método ya explicado, operaciones elementales entre filas, y propiedades (S7.46-136).

En otro caso, y para que el estudiante llegue a captar las diferentes características del contenido matemático que explica, el profesor presenta tres tipos de matrices escalonadas resaltando sus diferentes particularidades (S3.88-113). A partir de allí, expone las diferentes operaciones elementales entre filas que se pueden realizar para escalonar una matriz (S3.138-172) y finalmente escribe un ejemplo para explicar el procedimiento (S3.173-2119.

En el segundo año de observación de la práctica del profesor, el aprendizaje ocurre además, con la intervención del alumno, ya que ha sido este el encargado de la búsqueda de información (en libros de texto, páginas web, etc.), la organización de esta y presentación al resto de compañeros de la clase. Podríamos decir que el aprendizaje se va construyendo a lo largo de la sesión entre el profesor y el estudiante, sin embargo, sigue siendo a través de un proceso deductivo (TE9). El profesor en una entrevista (E3.P14) reconoce que la exposición de contenidos matemáticos por parte de los estudiantes, constituye un método válido, ya que estos hacen un esfuerzo por aprender por su propia cuenta, sin embargo, considera que se da un buen aprendizaje cuando él mismo explica los contenidos.

E3.P14: *Claro, el hecho de que ellos preparen la explicación, siempre les va a servir para que aprendan mucho mejor un tema, tampoco eso elimina o contradice el hecho de que aprendan bien si yo se lo explico. Pero el hecho de tener ese esfuerzo para aprender ayuda porque ellos tienen la capacidad de aprender por su propia cuenta, el autoaprendizaje es muy importante porque después que tú sales de la universidad te toca aprender por tu cuenta. Yo sí creo que es muy válido el hecho de mantener ese tipo de exposición, de investigación, incluso si ellos necesitan en algún momento que tú se lo expliques, en la individualidad si ellos vienen y aclaran conmigo alguna duda que tienen, yo les explico particularmente para que ellos luego vayan y repliquen en clase. Aunque hayan tenido que recurrir a mí o a otro docente para que les explique algún detalle, es interesante, esa es otra cosa importante, que tengan la capacidad de buscar la información ya sea vía internet o la bibliografía y también información de las personas, que acudan a otro docente que domine el tema en referencia y aprendan de eso también. Son actitudes válidas para la vida, uno en el campo profesional tiene dudas y qué toca, o buscas información o buscas a las personas indicadas.*

Interesa también que el estudiante aprenda a través del razonamiento; por ejemplo, Jordy propone un problema de aplicación relacionado con sistemas de ecuaciones lineales, donde el estudiante deberá plantear el sistema, resolverlo y el profesor conduce su razonamiento en cuanto a las respuestas obtenidas. Sin embargo, no podríamos mencionar que se trata de una tendencia espontaneísta *(el aprendizaje se produce de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento)* o investigativa *(el aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesor* ***y que propician el razonamiento****)*, ya que el estudiante sabe que aunque ya no se trata de un ejercicio sino de un problema de aplicación, la clave está en aplicar los procedimientos o algoritmos enseñados por el profesor previamente, y en este caso, se trata de aplicar operaciones elementales entre filas para resolver un sistema de ecuaciones lineales. El razonamiento que conduce el profesor tiene que ver, más bien, con la lógica de las respuestas que deberán obtenerse para cada una de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales, a partir de los datos proporcionados (S2*.160-172).

Importancia de la argumentación (10’) e Interacción profesor-estudiantes-matemáticas (10’’)

El profesor ***no concede especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones*** (TR10’) durante el primer año de observación de su práctica; sin embargo, Jordy busca la participación activa de los estudiantes (aunque no de un estudiante específico) a través de la formulación de preguntas durante sus explicaciones, relacionadas estas con conocimientos previos, operaciones algebraicas, procedimientos (S6.105-114), dimensiones de las matrices (ya sea para realizar la suma, el producto o como respuesta de este S2.40-52), propiedades, operaciones elementales entre filas, o para plantear las ecuaciones lineales que conforman el sistema correspondiente a un problema de aplicación. Por tanto, ***el alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el flujo en la dirección profesor alumno que la inversa*** (TR10’’/TE10’’). Es evidente que Jordy interviene mayoritariamente en las sesiones de clases.

Sin embargo, en las entrevistas (E2.P1, E2.P10), Jordy manifiesta que es importante que el estudiante explicite con sus palabras la comprensión del contenido tratado, especialmente lo relacionado a los procedimientos (TE10’), lo cual constituye para él un resultado o evidencia de aprendizaje.

E2.P1: *Una de las cosas que siempre les digo a los jóvenes es que al momento de resolver una evaluación es donde demuestran que han captado, que dominan el contenido, el conocimiento. La evidencia de que se ha captado el conocimiento es en los talleres y las lecciones y también cuando hablan, al momento de expresarse, de explicar alguna cosa, si lo que están hablando y explicando es claro y va con el proceso que debe ser, ahí está demostrando el conocimiento.*

E2.P10: *Primero, en clase se explica y hay unos espacios de talleres. Si yo veo que un chico está trabajando allí y está haciéndolo correctamente pues está claro que sí entendió y mucho más todavía si alguien le pregunta y él le explica al compañero lo que está haciendo o le explica cómo hacerlo. Si él es capaz de explicar lo que está haciendo o cómo se debe hacer un proceso pues es una evidencia que sí ha aprendido.*

Lo mencionado por Jordy en las entrevistas no se refleja en el primer año de observaciones de clases, va más bien, de acuerdo con el segundo año de observaciones de su práctica, donde como ya hemos dicho anteriormente el estudiante interviene para exponer parte del contenido matemático de la clase, siendo ***importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje*** (TE10'). Algunos de los estudiantes repiten al pie de la letra lo consultado, sin embargo otros sí van explicando con sus palabras el contenido matemático. Por ejemplo, la explicación que hace un estudiante sobre el procedimiento para encontrar las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer (S5*.51-93).

E: *Ese vendría a ser el determinante de la matriz. Ahora, aquí de qué manera lo hicieron. Lo hicieron paso a paso, nosotros para no equivocarnos podríamos encerrar entre paréntesis, para saber cuáles son los valores que se van a multiplicar*
La regla de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:
El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas,
el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

E: *Sea Δ el determinante de la matriz de coeficientes*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

O sea, con la matriz lo que queremos sacar es el determinante
Y sean Δ1, Δ2.....Δn los determinantes que se obtienen al sustituir los coeficientes del numerador, los términos independientes en la primera columna, en la segunda columna, en la tercera columna y en la enésima columna, respectivamente.
Un sistema de Cramer tiene una sola solución que viene dada por las siguientes expresiones:
x1 = Δ1/Δ
x2 = Δ2/Δ
x3 = Δ3/Δ
xn = Δn/Δ
El Ing. nos dijo x1 es igual al determinante del primer valor cuando nosotros separamos los valores de x, los valores de y, y utilizamos estas expresiones para sacar el resultado. Ya lo vamos a ver, mi compañero va a explicar

P: *Ya primero una cosa, pongan la diapositiva anterior ¿esa Δ de dónde la sacan?*

E: *Esa es la determinante que vamos a sacar de la ecuación lineal*

P: *¿Con qué hallas ese determinante?*

E: *Con los valores de x, los valores de y con los coeficientes que están al* *costado de la ecuación lineal*

E: *Tenemos una ecuación de tres incógnitas, se sacan los coeficientes y se va reemplazando y una vez que se saca el determinante principal*

P: *A ver, hasta ahí, ese primer determinante es el que tú le llamas determinante principal, es el que está allá arriba, esa es la matriz de los coeficientes. Del sistema de ecuaciones toma todos los coeficientes, la x, la y, la z, la w, los que sean y los pones en una fila. Y así con la segunda ecuación, la segunda fila, etc., arman las filas con los coeficientes de cada ecuación y ese es el primer determinante, el que llaman* Δ *¿De dónde de salen* $\Delta 1$*,* $\Delta 2$*¸*$\Delta 3$*,* Δn*?*

E: *Son los que se han encontrado, las variables, nosotros sabemos llamarlas x, y, z. Entonces* $\Delta 1$ *sería* Δx*,* $\Delta 2$ *sería* Δy

P: *O como ahí le ponen x1, x2, x3 a las incógnitas, por eso le llama* $\Delta 1$*,* $\Delta 2$*¸*$\Delta 3$

En la práctica del profesor, observada en el año dos, aún sigue siendo más fuerte la interacción ***en dirección profesor alumno antes que a la inversa*** (TR10''/TE10''). Sin embargo, y a diferencia de las sesiones del primer año, sí se observa una interacción más equilibrada entre el estudiante y el profesor, al considerar la intervención de los estudiantes en la explicación de los contenidos matemáticos. Así, por ejemplo, cuando los estudiantes exponen la regla de Sarrus para calcular el determinante y uno de ellos comete algún error en la explicación del contenido al resto de sus compañeros, el profesor interviene con cuestiones que permiten que el mismo estudiante tome en cuenta el error y lo aclare al resto de la clase, siendo finalmente el profesor quien cierra la explicación para que le quede claro a todo el grupo (S5*.7-39).

Tipo de agrupamiento (11)

En cuanto al tipo de agrupamiento que tiene lugar en las clases de Jordy, al parecer sus concepciones tienen características tradicionales-tecnológicas, donde *la única forma de agrupamiento que permite un verdadero aprendizaje es el trabajo individual* (TR11/TE11) y espontaneístas, donde *la forma ideal de agrupamiento que propicia el aprendizaje es el trabajo en grupo, con sus correspondientes debates* (E11). Estos indicadores los relacionamos a algunas de las sesiones de clases analizadas, en las cuales observamos que los estudiantes intentan resolver los ejercicios propuestos de forma individual, sin embargo, el profesor permite que comparen sus procedimientos y respuestas con los compañeros, como por ejemplo, cuando trabajan la multiplicación de un escalar por una matriz (S1.227-232).

P: *Una vez que ya se ha hecho ese trabajo, este es el taller Nº 2,*
corrijan el literal d), en lugar de 4A deberán escribir 4D.
La sugerencia es que haga las operaciones aparte, debe trabajar hoy
el numeral 1, el numeral 2 y el numeral 3.
Vaya verificando con el compañero de al lado si tiene alguna duda
y si entre los dos no se ponen de acuerdo me avisan

Además, asociamos aquí la información obtenida a través de una entrevista, donde manifiesta que en sus clases permite que los estudiantes trabajen en forma individual, y también que puedan intercambiar ideas entre ellos (E4.P7-1). Los alumnos van resolviendo los ejercicios propuestos por el profesor según sus posibilidades, consultando dudas y respuestas con el compañero y directamente con el profesor (S4.78-85).

E4.P7-1: *Lo primero que suelo hacer al presentar un tema es revisar lo anterior, lo previo que debe saberse para un tema determinado y después de eso la explicación si se quiere general de lo que se va a estudiar, tratando de hacerlo participativo en lo posible. Como estrategia, la forma en que yo trabajo es dejar que el estudiante haga lo suyo y en caso que haya dudas me lo diga y también existe la posibilidad de que puedan preguntar a los compañeros.*

P: *Usted tiene ahí en la hojita todas esas matrices que ya las*
transformó en escalonadas, eso fue lo que hizo ya usted, ahora
hay que continuar hasta encontrar la forma canónica de cada una
Ese es el trabajo, entonces comience, haga por lo menos la matriz A
Vayan siempre comparando lo que les va resultando con el compañero,
así se van apoyando uno con otro
Ahora sí aproveche, compare, discuta, pregunte, este es el momento, al
momento de la lección ya no se permite ningún tipo de consulta.

El interés del profesor para que los estudiantes conformen grupos de trabajo para la consulta, preparación y exposición de contenidos matemáticos como una forma de aprendizaje, se refleja en el segundo año de observaciones de su práctica. Los estudiantes comienzan el desarrollo de ejercicios de aplicación de forma individual, sin embargo, el profesor permite que se hagan consultas sobre los procedimientos y las respuestas entre los compañeros. A pesar de que el profesor fomenta el trabajo en grupo y además como manifiesta en una entrevista (E3.P9) lo considera fundamental tanto para trabajar en clases como en la vida profesional, no se llegan a dar debates entre los estudiantes encargados de las exposiciones y el resto de la clase (lo cual es una característica de la tendencia espontaneísta).

E3.P9: *Una de las cosas que me parece a mí fundamental como medio para ir superando cualquier dificultad es el trabajo en equipo, a mí me parece una cuestión supremamente importante, incluso en el sentido de proyectarlo hacia lo que pasa en las empresa o en las instituciones en la parte laboral, porque tú nunca vas a trabajar sólo, siempre estarás trabajando con personas o dirigiéndoles, o como pares, o siendo tú subalterno. El hecho de estar trabajando en equipo y sabernos entender para resolver un ejercicio o para estudiar un tema determinado va capacitándonos para poder trabajar en el futro en sociedad, yo pienso que eso es una de las cosas que hay que enseñar, porque eso hay que enseñarlo, hacerle notar a los jóvenes la importancia del trabajo en equipo, la necesidad de aprender a trabajar en equipo y la sinceridad de los aportes que se pueden hacer en un trabajo en equipo, o sea, ir con la actitud de que quizá yo no sé nada pero voy ahí a aprender. Hay que insertarle en las ideas del joven que el trabajo en equipo es fundamental para su aprendizaje porque ahí es donde se puede aprender cosas que a lo mejor en las explicaciones que da el profesor o en lo que él ha leído no lo ha logrado entender.*

Papel del alumno

Participación en el diseño didáctico (15)

Con base en las unidades de información E4.P8 (detallada en la metodología) y E3.P2 obtenidas mediante entrevista y con lo recabado durante el primer año de observación de la práctica del profesor, podemos decir que *el alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.* (TR15/TE15), ya que es el profesor el que prepara las actividades que serán abordadas durante sus clases.

E3.P2: *Hay algunas que se sacan de los libros, como base y hay otras que uno se las inventa. Más que nada lo que es problema, los ejercicios a veces los tomo de los libros y a veces salen al momento de la clase, los pongo al azar, lo que vaya saliendo ahí se resuelve. Cuando es problema, eso hay que pensarlo un poquito antes de escribirlo, siempre es bueno, a veces también salen problemas así al momento de improvisación, pero por lo general siempre es bueno ya llevarlos preparados, más que nada los problemas, lo que son ejercicios numéricos yo los planteo allí directamente.*

No obstante, en el segundo año de observaciones, *el alumno participa indirectamente en el diseño didáctico* ***(a través de sus intervenciones en el quehacer del aula)*** (E15), aunque no lo condiciona. El estudiante participa indirectamente, por cuanto consulta el tema encargado por el profesor y prepara actividades (ejercicios) que le servirán para exponer al resto de sus compañeros el contenido, habiendo por tanto, un cierto cambio en las concepciones del profesor. Por ejemplo, Jordy encargó a un grupo de estudiantes que expongan la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por regla de Cramer, y estos, además de exponer el método, presentan un problema de aplicación como ejercicio práctico (S5*.136-142).

136	E:	*Yo les traje un pequeño problema para resolver*
137		*En una caja registradora hay 50 billetes de distintas denominaciones:*
138		*$20, $50, $100. Al contar el dinero se obtiene un total de $2250 dólares.*
139		*¿Cuántos billetes hay de cada denominación si la cantidad de billetes de*
140		*$20 es igual a la suma de las cantidades de billetes de 50 y 100?*
141	P:	*Deben plantear tres ecuaciones con tres incógnitas*
142		*¿Ya plantearon alguna ecuación?*

¿Qué hace? (17, 18, 19)

Durante el primer año de observaciones de las sesiones de clases, el papel del alumno se orienta a tomar apuntes de lo expresado y escrito en la pizarra por Jordy. *El alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17) y *la actividad del alumno no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción* (E18). Asociamos a estos indicadores lo expresando por el profesor en una entrevista (E3.P18) en cuanto a lo que considera esencial que el alumno haga en sus clases. Lo importante para el profesor es que el alumno preste la debida atención, que vaya resolviendo junto a él los ejercicios que enseña, acotando que el contenido referente a *matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales* es más bien algorítmico y, una vez que se ha explicado un procedimiento, la continuidad consiste en repetir el proceso.

E3.P18: *Yo tengo una concepción, la participación activa tiene diferentes formas de percibirse o de definirse, porque yo participo activamente cuando estoy atendiendo con toda la concentración del caso, a mí me gusta mucho que la gente esté siguiendo la explicación, me gusta bastante que la gente vaya junto conmigo resolviendo lo que estoy explicando, me gusta mucho que la gente incluso en el mismo momento en que estamos* *resolviendo se pregunte sin miedo a cortar el proceso, yo en esos casos suelo decir esa duda te la aclaro enseguida pero déjame terminar esta parte u opto por detenerme y explicar la duda que tiene. A mí me gusta mucho eso, que la gente esté diciendo, calculando, proponiendo, mientras se va resolviendo cualquier cosa y la otra cosa que siempre insisto es que el chico no puede estar en clase al menos solo mirando, a mí me parece que eso es como no estar queriendo aprender y en estos temas de aquí siempre es importante que tú vayas diciendo cosas y vayas resolviendo, y de hecho hay muchachos que como lo que se va explicando se lo hace lentamente para que todo el mundo vaya asimilando, hay algunos que cogen ya el hilo del asunto y siempre se adelantan, terminan antes de que uno concluya la explicación. Más que nada, en ese tipo de procedimiento si ya tú explicas cómo tiene que hacer y el resto es repetir el proceso, hay mucha gente que se adelanta y termina antes y a mí me parece eso mucho más válido, que haya gente que haga eso, que se adelante a lo que tú vas a hacer. Yo al menos les motivo a que hagan eso, si no son capaces de resolverlo al menos que vayan siguiendo, que vayan participando y que vayan anotando.*

La explicación del profesor basada en la exposición de ejemplos con sus características y la resolución de ejercicios paso a paso, es un indicio de que *la confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido* (TE19). Como la intervención del estudiante es escasa, y va más bien orientada a responder preguntas relacionadas con los procedimientos, pensamos que para el profesor es importante la comprensión del contenido, su metodología de enseñanza hace que el alumno escuche y entienda su explicación, para después reproducir el proceso, habiendo cierta evidencia de que en ocasiones *el ambiente dinámico que se propicia en la clase, permite que el alumno comunique su* ***razonamiento*** (E19). Por ejemplo, una cuestión por parte de un estudiante, al darse cuenta de que en el producto de matrices es importante la ubicación de estas, que lo lleva a indicar que dicho producto no es conmutativo (S2.54-59).

54 E: *O sea que en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que*
55 *estén ubicadas*
56 P: *¿Cómo sería eso? ¿Cómo lo podrías decir? Allí hicieron A(2x3)xB(3x1),*
57 *pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede*
58 *multiplicar, en este caso ¿qué pasa?*
59 E: *No es conmutativa*

En el segundo año de observaciones, en ciertas sesiones de clases se mantiene la toma apuntes por parte de los alumnos. Jordy ha variado la metodología, ya que él permite que los estudiantes consulten, preparen y expliquen el contenido matemático, es decir, ahora el profesor cede protagonismo a sus estudiantes. Esta técnica permite que el estudiante participe en el desarrollo de la clase, sin embargo, el estudiante *reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17), y la actividad de los alumnos que atienden la exposición de sus compañeros *no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción* (E18).

Además, la inclusión de grupos de estudiantes en la exposición de contenidos matemáticos hace que se produzca un ambiente dinámico en las clases, que *permite que el alumno comunique su* ***razonamiento****, experiencias y sentimientos con el profesor y los demás compañeros* (E19). Así los estudiantes hacen preguntas con relación al procedimiento, plantean sus dudas sobre el mismo (S1*.118-131) o comunican su razonamiento sobre los ejercicios propuestos (S6*.50-56).

P: *¿Qué es lo primero que se puede hacer ahí?*
E: *Cambiar las filas*
P: *¿Por qué conviene cambiar las filas, la primera por la segunda?*
E: *Porque en la segunda ecuación la x tiene coeficiente 1*
P: *Entonces nos conviene que el 1 esté al inicio. La fila 1 la vamos a intercambiar con la fila 2*

$$\begin{array}{ll} & 5x-3y=-1 \\ & x+4y=3 \\ \hline f_1 \rightarrow f_2 & x+4y=3 \\ & 5x-3y=-1 \end{array}$$

y nos queda el sistema que también es equivalente al primero
E: *En esos casos entonces cuando hay coeficiente 1 se cambia, ¿si tuviera por ejemplo un 3 queda igual?*
P: *Ahí no conviene, tiene que buscar la conveniencia suya para poder operar*
E: *Pero cuando el 1 está solamente en la segunda ecuación, ¿si estuviera en la primera ya no?*
P: *Si está en la primera fila ya lo dejas ahí.*

E: *Aquí haremos otro ejemplo*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz inversa primero tenemos que sacar el determinante
¿Por qué tenemos que sacar el determinante?
Porque el determinante tiene que ser diferente de 0. Si fuera 0, no

55 *habría matriz inversa y se denomina una matriz singular*
56 *El determinante sería -6*

Durante la explicación que hacen los estudiantes, el profesor interviene en situaciones puntuales cuando el estudiante se equivoca o no está claro lo que explica al resto de sus compañeros. Por ejemplo, cuando se trata de explicar lo que es un menor y un cofactor (S5*.302-321). Por otra parte, los grupos encargados de explicar la clase han preparado ejercicios y problemas de aplicación que deberán resolver los demás compañeros de clases, así cada quien va trabajando de acuerdo a sus posibilidades y a lo que haya comprendido de las explicaciones pasando al pizarrón a escribir dicha resolución (S5*.330-373).

Papel del profesor

¿Qué hace? (20), ¿Cómo hace? (21), ¿Qué hace? (22), Justificación (23)

En sus clases Jordy *actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas* (TE 20-23). Estas estrategias consisten en la exposición de ejemplos variados, procurando que los estudiantes noten diferentes características de los mismos, tanto en los procedimientos como en la notación.

Su papel consiste en explicar paso a paso la resolución de ejercicios, intentando hacer participativa su exposición mediante preguntas a los estudiantes, a través de las cuales, procura que se fijen en los detalles de la resolución, como en las formas de simplificar procedimientos y evitar errores. Cuando los estudiantes resuelven los ejercicios de la hoja de actividades proporcionada por el profesor con base en su explicación, este camina entre los estudiantes verificando lo que hace cada uno y en el caso de que haya errores o dificultades por parte de los estudiantes procura generalizar y/o hacer advertencias a todo el grupo clase, lo cual manifiesta también en una entrevista (E4.P7-2). Por ejemplo, nota que un estudiante comete errores en la notación de una matriz, su inversa y la matriz identidad y advierte a todo la clase que no deben confundir la notación de dichas matrices (S3.53-60).

E4.P7-2: *Por ejemplo, lo que aquí definen como coaching es lo que suelo hacer, cuando hay algún error se corrige y cuando hay un mal entendido se corrige, cuando veo que alguien está equivocándose generalizo para que todo el mundo vea qué está mal y lo que no se debe hacer.*

Además, promueve el uso de las estrategias expositivas en sus estudiantes al solicitar que preparen un contenido matemático para explicarlo a los compañeros.

Validación de la información (24')

Por una parte, ***el profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a los alumnos cuyas respuestas llevan a la "autocorrección"*** (TE24') mediante las peguntas que hace a los estudiantes, cuyas respuestas ayudan a aclarar dudas o a corregir errores. Por ejemplo, cuando uno de los estudiantes da una respuesta incorrecta para una de las incógnitas en el caso de un problema de aplicación, el profesor procura que el estudiante razone por qué esa respuesta no es correcta y sobre qué valores deberá estar la correcta (S2*.160-172).

Por otra parte, observamos en otras sesiones de clases que ***la información que se moviliza en el aula es validada por el grupo (grupo clase o pequeños grupos de trabajo). En ocasiones se sustituye el papel de la corrección que en TR/TE juega el profesor por los compañeros, pero no se potencia que los alumnos reflexionen sobre sus ideas ni que desarrollen estrategias de autovalidación de las mismas*** (E24'). Constatamos que entre un año y otro de observaciones de la práctica de Jordy han ido cambiando sus concepciones en cuanto a la validación de la información, con base en la metodología implementada que consiste en la organización previa de las sesiones de clases por parte del profesor y la conformación de grupos de trabajo de estudiantes, quienes preparan y exponen un contenido matemático. A través de esta técnica de exposición, el profesor considera que el estudiante también demuestra lo que ha aprendido (bajo su supervisión y complementando la explicación con lo que él considera adecuado que deben saber). Así, la información movilizada en el aula ya no es validada solo por Jordy, sino también por los grupos de exposición. Las cuestiones que realiza el profesor a los estudiantes llevan a que estos corrijan ciertos puntos de su exposición, aunque es más bien a nivel procedimental porque no hay evidencias de actividades reflexivas por parte de los estudiantes.

ANEXO 12. Entrevista 1 realizada a Carlos

1. **¿Hace cuántos años imparte asignaturas relacionadas con Matemáticas?**

Soy docente universitario desde hace 27 años, pero desde hace 17 años estoy impartiendo materias relacionadas a las ciencias exactas como es la Matemática y la Física.

2. **¿Hace cuántos años imparte Álgebra Lineal en el nivel universitario?**

Desde que se creó la nueva Facultad.

3. **¿Cuánto tiempo tiene trabajando como docente en la universidad?**

Tengo 10 años trabajando en la Universidad Técnica Estatal de Quevedo.

4. **¿Cuál es su titulación de pregrado?**

Soy Geólogo.

5. **¿Ha recibido cursos para impartir la unidad de aprendizaje Álgebra Lineal? ¿Cuántos y qué duración han tenido?**

Específicamente en el área de Álgebra Lineal no, pero sí en lo que es educación universitaria. Tengo un Diplomado en Enseñanza Superior, el cual tuvo una duración de seis meses.

6. **¿Ha participado en cursos relacionados con Didáctica y Pedagogía?**

Yo realmente me inicié como docente en una Universidad netamente relacionada con Filosofía y Letras, que tiene que ver con las Ciencias de la Educación; por lo tanto, recibimos capacitación permanente en Didáctica en la Universidad donde laboré antes que es la Universidad Técnica de Babahoyo.

7. **¿Qué expectativas tiene usted en lo referente al desempeño de sus estudiantes?**

En realidad yo tengo mucha esperanza en ellos, sobre todo que logren cubrir sus expectativas con respecto a la unidad de aprendizaje porque son ellos quienes han escogido la carrera que están siguiendo, entonces lo están haciendo por vocación. Por lo tanto, tienen que aprender las asignaturas que se les ha asignado.

8. **¿Especifica objetivos de aprendizaje de los temas incluidos en el programa de estudios que espera que alcancen sus estudiantes? A su respuesta, si es afirmativa: ¿Cómo?, ¿Cuándo?, ¿Los hace explícitos para usted? ¿Para los estudiantes? ¿Fija objetivos por temas más concretos que los que fije el programa de la materia?**

Sí. Yo trato de aplicar una metodología que va de lo simple a lo complejo, de tal manera que cuando ya se llega a concluir el semestre, los estudiantes cumplen con el objetivo trazado de aprender todas las unidades programadas en la asignatura. No recuerdo haber dado a conocer los objetivos de aprendizaje a los estudiantes.

Al momento no se está trabajando en un modelo por objetivos sino en un modelo por competencias, entonces los profesores tratamos de cumplir ciertas competencias mediante el proyecto integrador, que como su nombre lo indica se integran todas las unidades de aprendizaje del módulo. Por eso es que no nos trazamos objetivos sino propiamente competencias y el alumno va a adquirir habilidades.

9. **¿Cómo decide qué temas incluir en el curso de Álgebra Lineal y cuánto tiempo dedicar a cada tema?**

La decisión no viene de mi persona, los temas ya vienen establecidos en los programas que nos entregan a nosotros las autoridades de la Facultad. El tiempo que dura el semestre no lo dispongo yo, lo que hago es distribuir el programa de acuerdo a las semanas que tengo para dar clases (16 semanas).

10. **¿Qué conocimiento previo deben poseer los estudiantes para abordar con éxito el tema de matrices?**

Solamente tener conocimiento básico, elemental de la Matemática, es decir, operaciones básicas.

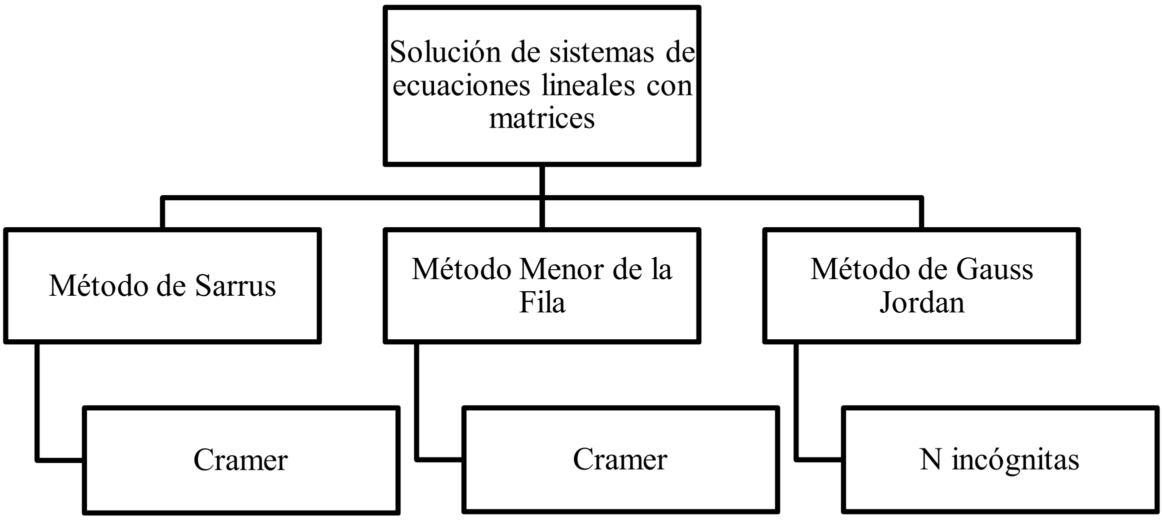
11. **¿Cuál es la importancia del tema (de matrices) en el currículo?**

Esta asignatura es muy importante porque se la aplica en diferentes áreas; más que nada en la carrera de Ingeniería en Sistemas aplican conocimientos de matrices en Base de datos, para elaborar software. Por eso esta asignatura es básica para esta carrera que es netamente técnica y manejan mucho lo referente a modelos matemáticos.

12. **¿Qué espera que aprendan sus estudiantes con relación al contenido (matrices)?**

Pienso que es identificar todos los datos numéricos, es decir, como deben ir ordenados y como van dándose los resultados; es decir, que aprendan como disponer los valores en las matrices para obtener los resultados.

13. **Escogiendo por ejemplo el tópico "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices" elaborar un mapa conceptual de los contenidos del mismo destacando aquellos que para usted son claves en el aprendizaje.**



14. **¿Cómo aborda usted la enseñanza de esos contenidos clave?**

Explicando el método para resolver con ejemplos varios y luego se aplica a los sistemas de ecuaciones.

15. **¿Cómo cree usted que dichos contenidos clave se relacionan con otros contenidos y cómo se trabajan esas relaciones en sus clases?**

Es aplicable a otras ciencias y para determinar valores desconocidos.

16. **Cuando introduce usted un tema nuevo como por ejemplo "solución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices", ¿considera**

indispensable hacer una relación con conceptos matemáticos vistos anteriormente? ¿Por qué?

Claro es indispensable. Los estudiantes para poder seguir la asignatura de Álgebra Lineal tienen que haber visto resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin aplicación de matrices sino utilizando otros métodos de eliminación para hallar las variables. En realidad lo que se trata es de mostrar al estudiante los diferentes métodos que existen para hallar las variables desconocidas. Para eso se aplican las matrices, para hallar esos valores y de una forma mucho más rápida

17. **¿Cómo evalúa a los alumnos en el tema?**

Normalmente aplico evaluaciones escritas y donde coloco ejercicios relacionados a la resolución de distintas matrices, lo cual ayuda a determinar el grado de aprendizaje que los estudiantes han obtenido. La evaluación es de carácter netamente cuantitativo. Únicamente es cualitativo cuando los estudiantes pasan a resolver ejercicios en la pizarra.

18. **¿Cuáles son las tareas de esta unidad?**

Las tareas que yo envío son ejercicios que les servirán a los estudiantes para practicar lo aprendido, de tal manera que adquieran ellos la habilidad y destreza en el desarrollo de los mismos. A medida que avanzan en un tema sobre matrices, desarrollan ejercicios sobre dicho tema. Los alumnos van aprendiendo a resolver los ejercicios de una manera mucho más práctica y demuestran mediante las tareas que ellos han alcanzado un nivel alto de aprendizaje.

19. **¿Qué partes del contenido a priori va a evaluar y por qué elige dichos contenidos?**

Yo evalúo las unidades del programa de estudios. Trato siempre de hacer una prueba que abarque todos los tópicos que se abordan en el tema de matrices, porque todos los tópicos son muy importantes y cada uno es la consecuencia del otro.

20. **¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del tema? Elegir una dificultad y ante esa dificultad ¿Qué cosas concretas le funcionan para paliar la misma? ¿Analiza usted los errores cometidos por los estudiantes en el desarrollo del tema de matrices? ¿Cómo?**

¿Qué acciones ha tomado para tratar de disminuir la incidencia de estos errores?

Realmente yo me he podido dar cuenta que constituye una dificultad que los estudiantes se distraigan. Los ejercicios de matrices son sumamente sencillos, pero necesitan de mucha concentración para no perder la ilación de lo que están haciendo. Cuando ya se distraen los estudiantes pierden la concentración y automáticamente los resultados no son los correctos. Es un procedimiento mecánico más que de razonamiento.

Para paliar la dificultad expuesta: no permitir que los estudiantes se distraigan, mantenerlos permanentemente en actividad, que ellos participen activamente resolviendo los ejercicios porque si los dejamos que los resuelvan solos en su hoja de trabajo, se desvinculan de la clase.

Yo los hago pasar a resolver ejercicios a la pizarra como una técnica, mas no porque no sepan, sino para mantenerlos activos y atentos en la clase.

Sí analizo los errores cometidos por los estudiantes en el tema de matrices. A los estudiantes se les dificulta hacer cálculos mentales, quieren utilizar la calculadora hasta para sumar cuanto es 3 + 1/2, cuando realmente lo pueden hacer mentalmente. Para disminuir la incidencia de los errores les insisto en que realicen cálculos mentales y que no solo empleen la calculadora, que este instrumento lo utilicen con números muy grandes.

21. **¿Qué hace para que todos participen en el desarrollo (explicaciones y resolución de problemas) de un tópico determinado del tema de matrices?**

Hago que todos participen en clases saliendo a la pizarra a resolver los ejercicios por partes, de tal manera que se convierten todos en un equipo de resolución de un solo ejercicio.

22. **¿Qué libro de texto utiliza en particular para enseñar este contenido (matrices)? ¿Por qué?**

El libro de Stanley I. Grossman, porque se encuentra en la Biblioteca de la Universidad y porque a los estudiantes se les facilita el desarrollo de los ejercicios contenidos en él.

23. **¿Cómo motivaría a los estudiantes para que aprendan el contenido de matrices? Explique con un ejemplo concreto**

Por ejemplo, que los estudiantes realicen un cuadro (una tabla) de sus calificaciones de todas las unidades de aprendizaje (asignaturas), para luego hacer operaciones con esas matrices.

24. **¿Qué recursos utiliza generalmente en las clases para el desarrollo del tema de matrices? ¿Emplea algún software específico?**

Solamente la pizarra, marcadores, borrador. En la actualidad no utilizo ningún otro recurso. No empleo ningún software porque los estudiantes ven una asignatura de programación donde aplican los conocimientos que adquieren en mis clases.

25. **¿Qué utilidad/aplicación tiene para usted el tema de matrices? ¿Lo hace explícito a los estudiantes? ¿Cómo?**

La asignatura de Álgebra Lineal no la aplico más que para la enseñanza. Para los estudiantes que están estudiando Ingeniería en Sistemas es útil el tema de matrices para elaborar software.

Sí hago explícito a los estudiantes la utilidad que tiene el tema de matrices, ellos en la actualidad elaboran software y utilizan las matemáticas que reciben. Por ejemplo, en el semestre anterior algunos estudiantes desarrollaron un software para sumar fracciones, otros elaboraron un software para determinar las variables aplicando determinantes.

Yo les doy a los estudiantes ejemplos prácticos, de la vida real, y así demostramos que las matemáticas no solo se aplican en una ciencia específica, sino para cualquier área, como nutrición, deportes o en una fábrica, es decir, las matrices tienen múltiples usos o aplicaciones

ANEXO 13. Transcripción de sesiones de clases de Carlos (Año 1 de observaciones)

Sesión 1 (11-11-2011): Clasificación y suma de matrices

Línea		Transcripción
1	P:	*Vamos a entrar al tema de clasificación de las matrices*
2		*Las matrices se las considera como un dato matemático y que se pueden*
3		*clasificar según el tamaño y su forma*
4		*Para clasificarlas según su tamaño vamos a considerar las siguientes*
5		*matrices, vamos a tener cuatro ejemplos*
6		*Ejemplo 1: la matriz G de orden 4x6*
		$G=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2/3 & 0 & 1 & 4 \\ 3/5 & 0 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1/2 & -5 & -2 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$
7		*Esta matriz ¿de qué orden es?*
8	E:	*4x6*
9	P:	*¿Por qué?*
10	E:	*Tiene cuatro filas y seis columnas*
11	P:	*Exacto, tiene cuatro filas y seis columnas*
12		*Entonces esta matriz con la cantidad de elementos que tiene va a*
13		*formar una matriz rectangular.*
14		*Por la distribución de los elementos de esta matriz, nos podemos dar*
15		*cuenta de que es diferente el número de filas y el número de columnas,*
16		*por lo tanto, a esta matriz se la conoce como rectangular*
17		*Vamos a anotar ahora otro ejemplo*
		$H=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1/2 & 3/4 & -1 \\ 0 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$
18		*Podrán darse cuenta que esta matriz de orden 3x3 tiene el mismo*
19		*número de filas y de columnas, significa entonces*
20	E:	*Es cuadrada*
21	P:	*Que esta matriz es cuadrada, muy bien*
22		*Vamos a continuar con la clasificación con otro ejemplo*
		$V=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ ½ \\ -3 \end{bmatrix}$
23		*Aquí tenemos una matriz que tiene cuatro filas y una sola columna.*
24		*A esta matriz por la distribución de sus elementos se le conoce*
25		*con el nombre de matriz columna o vector columna de cuatro filas.*
26		*Estas matrices tienen una sola columna y pueden tener cualquier*
27		*número de filas*
28		*Y el último ejemplo de esta clasificación sería*
		$W=\begin{bmatrix} 0 & -2 & ¾ & -2/3 & 0,8 \end{bmatrix}$
29		*Entonces esta matriz que tiene una sola fila y cinco columnas se le*
30		*da el nombre de matriz fila o vector fila de cinco columnas*

En forma generalizada esa es la clasificación de las matrices según su tamaño
Vamos a hacer ejercicios referentes a este tema, a esta clasificación según su tamaño, después continuamos con la clasificación según su forma
Clasifique las siguientes matrices por el tamaño

$$N= \begin{bmatrix} -3 \\ ½ \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz ¿cómo la podrían clasificar?
E: *Matriz columna*
P: *Según su tamaño esa matriz sería matriz columna o vector columna de tres filas*
Otro ejemplo

$$E= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Esa matriz?
E: *Matriz cuadrada*
P: *A ver Héctor ¿cuándo decimos que una matriz es cuadrada?*
E: *Tiene el mismo número de filas y columnas*
P: *Muy bien*
Víctor ¿cuándo decimos que una matriz es rectangular?
E: *Cuando la cantidad de columnas es diferente al número de filas*
P: *Vamos a escribir otro ejemplo*

$$F= \begin{bmatrix} -2/5 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

E: *Matriz F de orden 1x4, matriz fila*
P: *Sí, siempre debe escribirlo así o también se llama vector fila de cuatro columnas*
Ahora vamos a clasificar las matrices según su forma
Primero escribamos el ejemplo

$$H= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Qué particularidad ven ustedes aquí en esta matriz?
E: *Es cuadrada*
P: *Según su tamaño la podemos clasificar como cuadrada porque tiene cuatro filas y cuatro columnas*
E: *Es una matriz triangular*
E: *Es diagonal*
P: *Exacto, porque la mayoría de sus elementos son ceros, pero sin embargo, en la diagonal encontramos otros elementos diferentes de cero, entonces esta es una matriz diagonal.*
Anotemos el segundo ejemplo

$$I_5= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué me está indicando cuando dice una matriz cuadrada de orden 5?
E: *Que es 5 x 5*
Entonces según su tamaño es una matriz cuadrada
¿Qué particularidad ven ustedes en la matriz?
E: *Que tiene unos en la diagonal*
P: *Muy bien, a esta matriz que tiene dispuestos de esta manera sus elementos se la conoce como matriz unitaria*
Y dependiendo de la cantidad de filas y columnas, por ejemplo, en este caso es de orden 5, entonces escribimos matriz unitaria de orden 5
Vamos a escribir dos matrices como ejemplos

$$H=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el orden de la primera matriz?
E: *4x4*
P: *Según el tamaño es cuadrada.*
La segunda ¿qué orden tiene?
E: *3x3*
P: *Entonces las dos son cuadradas*
¿Qué particularidad ve en cada una?
E: *Tiene forma de triángulo*
P: *Exactamente.*
A esta matriz que tiene ceros en la parte inferior y sus elementos de la parte superior forman un triángulo, se le conoce como matriz triangular superior y la otra sería matriz triangular inferior
Si queremos clasificar a la matriz considerando el tamaño y la forma, podríamos decir es una matriz de orden 4x4, cuadrada y además es una matriz triangular superior
Ahora vamos a escribir unos ejercicios
Van a clasificar estas matrices por su forma

$$E=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad J=\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4/3 & 85 \end{bmatrix}$$

También va a escribir la matriz unitaria de orden 4
E: *Es una matriz de orden 2x2 y se llama matriz triangular superior*
P: *Bien ¿y la matriz J?*
E: *Es de orden 2x2 y se llama matriz triangular inferior*
P: *Escriba usted la matriz unitaria de orden 4*
Para referirnos a la matriz unitaria escribimos la I
Este tema es introductorio
Sólo se puede realizar la suma o resta de matrices siempre y cuando sean del mismo orden, pueden ser cuadradas, pueden ser rectangulares, lo importante es que las dos matrices sean del mismo orden.
Usted puede tener dos matrices rectangulares, por ejemplo, de orden 2x3 y la otra 3x2, entonces habrá que hallar la traspuesta de una de las matrices para que se puedan sumar
Entonces con dos matrices de un mismo orden se puede formar una nueva matriz
Yo les he dicho que las matrices son aplicadas en cualquier ciencia, en cualquier área, vamos a ver un ejemplo relacionado con la agricultura

Voy a escribir el ejemplo

Un agricultor posee tres fincas, cuyas pérdidas o ganancias medidas en toneladas en los dos últimos años, están relacionadas con las siguientes tablas

Vamos a elaborar las tablas, ustedes saben que las matrices no son otra cosa que la consecuencia de datos numéricos reales

Año A	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	-1/2	10	3	7	2
Finca 2	-3	2/3	0	12	-1
Finca 3	4	-2	-1	15	13

Entonces como decíamos solamente se puede hacer la sumatoria con matrices que tienen el mismo orden, obviamente si en las tres fincas tenemos ¿cuántos tipos de producción?

E: *Cinco*

P: *Cinco producciones, entonces ¿qué orden tendría una matriz formada por los elementos de esta tabla?*

E: *3x5*

P: *3x5, serían tres filas y cinco columnas*

Así mismo, para saber si hay ganancia o pérdida en el Año A con respecto al Año B, la otra matriz debe tener el mismo orden

Y se cumple porque la producción en las fincas continúa para cinco productos

Año B	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	5/2	12	-1	10	7
Finca 2	-7/5	5/3	-2	12	3
Finca 3	12	-5	3	22	23

Entonces el total de pérdida o ganancia en la producción de diferentes productos en estas fincas va a estar dado por los valores positivos y negativos que nos da con la sumatoria

¿Qué elementos yo sumaría entonces?

Serían los elementos que corresponden a fila 1 columna 1 del Año A con los elementos del Año B de la fila 1 columna 1

Escriba la nueva matriz

Años A+ B	Trigo	Arroz	Frijol	Maíz	Café
Finca 1	2	22	2	17	9
Finca 2	-22/5	7/3	-2	24	2
Finca 3	16	-7	2	37	36

Hemos terminado el ejemplo

Van a resolver ustedes algunos ejercicios

Tienen las matrices "X" e "Y"

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3/4 \\ -3 & 2/3 & 2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 5/3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3/4 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Hagan la suma

E:

$$X+Y = \begin{bmatrix} 2/3 & -2 & 7/2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 13/4 & 1 & 11/4 \\ 5 & 5/3 & 0 \end{bmatrix}$$

P: *Vamos a hacer otro ejercicio*

140 *Tienen la matriz H*

$$H=\begin{bmatrix} -3 & 0 & ½ & 1 \\ -2 & -1 & ¾ & 5 \\ 4/5 & 0 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

141 *Y la matriz K*

$$K=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2/5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

142 *¿Qué problema se nos presenta aquí*
143 *Que las dos son matrices rectangulares pero la una es de qué orden?*
144 E: *3x4 y 4x3*
145 P: *Exacto, entonces si yo quiero sumar tengo que hallar la traspuesta*
146 *de cualquiera de las dos*
147 *Vamos a hallar la traspuesta de la K, sería* $H+K^T$
148 *Pase Kevin, haga primero la traspuesta*
149 *¿Qué es matriz traspuesta?*
150 *Es cuando las filas se convierten en columnas y las columnas se*
151 *convierten en filas*
152 E: *La traspuesta es*

$$K^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2/5 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 3/2 \end{bmatrix}$$

153 P: *Continúe, ahora haga la suma*
154 E:

$$H+K^T=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7/2 & 6 \\ -2 & -3/5 & 7/4 & 3 \\ -1/3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

155 P: *Tienen ahora las siguientes matrices y deben hacer las sumas indicadas*

$$L=\begin{bmatrix} -3 & -3/5 & 4 \\ 1/4 & 2/3 & -5 \end{bmatrix}$$

156 *La matrices P y M*

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2/5 & 0 & -5/3 \end{bmatrix} \quad M=\begin{bmatrix} 0 & 2/5 & -3/7 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 4/5 \end{bmatrix}$$

157 *La matriz Q*

$$Q=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

158 *La matriz R*

$$R=\begin{bmatrix} 2/7 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3/5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

159 *Matriz S*

$$S=\begin{bmatrix} -3/8 & 3 & 2/3 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

160 *Matriz T*

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

161 *Y matriz N*

$$N= \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

162 *Bien, con todas las matrices que he escrito, van a formar las siguientes*
163 *matrices a) P+M, b) R+P, c) R+M, d) L+S, e) L+N, f) S+N*
164 *Como tarea les queda g) (P+M)+R, h) L+(S+N), i) Q^T+T, j) Q+T^T*

Sesión 2 (18-11-2011): Producto de un escalar por una matriz, producto de matrices y producto de matrices por bloques

Línea — Transcripción

1 P: *El producto escalar de matrices es la multiplicación de una matriz con*
2 *un número escalar.*
3 *Tenemos un ejemplo práctico*
4 *En una fábrica la producción de repuestos por hora en tres talleres*
5 *está relacionado por la matriz P; y se desea conocer la producción*
6 *durante 8 horas en cada taller*
7 *Bien, vamos a tener como ejemplo práctico la producción de repuestos*
8 *en distintos talleres y en el lapso de ocho horas, entonces simplemente*
9 *se multiplica cada una de las producciones por las ocho horas. Eso*
10 *significa la multiplicación de un producto escalar por una matriz.*
11 *Vamos a elaborar la tabla*

Repuestos/ Talleres	Tuercas	Tornillos	Cerrojos	Bisagras
Taller 1	28	22	18	10
Taller 2	32	40	12	15
Taller 3	47	45	15	9

12 *Con este ejemplo ven una vez más las aplicaciones de las matrices*
13 *Esta es una matriz P en la que queremos conocer la producción en ocho*
14 *horas de cada uno de estos repuestos*
15 *A partir de esta tabla podemos hallar una matriz 8P en la que vamos a*
16 *multiplicar simplemente cada una de las producciones por el número 8*
17 *¿De qué orden es la matriz?*
18 E: *3x4*
19 P: *Exacto*

$$\underset{(3x4)}{8P} = \begin{bmatrix} 8(28) & 8(22) & 8(18) & 8(10) \\ 8(32) & 8(40) & 8(12) & 8(15) \\ 8(47) & 8(45) & 8(15) & 8(9) \end{bmatrix}$$

20 *Ustedes escriban la respuesta*
21 *Víctor escriba las respuestas*
22 E:

$$\underset{(3x4)}{8P} = \begin{bmatrix} 224 & 176 & 144 & 80 \\ 256 & 320 & 96 & 120 \\ 376 & 360 & 120 & 72 \end{bmatrix}$$

23 P: *Vamos a hacer otros ejemplos con las matrices A y B van a formar*
24 *1/2A y –B*

$$A= \begin{bmatrix} -3 & 0 & ½ \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 6/5 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3/2 & 5/2 & 3/5 \end{bmatrix}$$

25 *Aquí lo que va a hacer es multiplicar cada elemento de A por 1/2*

Cuando decimos la matriz –B significa que vamos a multiplicar cada elemento por -1
Pase usted a resolver primero 1/2A y después –B.

E: *Primero 1/2[a]*

$$1/2A=\begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 3/5 \end{bmatrix}$$

-B sería

$$-B=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3/2 & -5/2 & -3/5 \end{bmatrix}$$

P: *Pase otro estudiante a escribir la respuesta de 1/2A-B. Fíjese que como hemos hecho por partes ½ A y luego –B, ya no tiene que cambiar signos, sólo realizar las operaciones indicadas. Una vez realizada la multiplicación del escalar por la matriz, solo falta sumar o restar los valores y escribir la respuesta*

E:

$$1/2A-B=\begin{bmatrix} -13/2 & 1 & 1/4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P: *Van a resolver ustedes estos ejercicios antes de pasar al producto de matrices*
Tienen las matrices U y V

$$U=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3/4 \\ 4 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \quad V=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1/4 \\ 1/2 & 3/5 \end{bmatrix}$$

También W y X

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ -2 & 3/4 \\ 5/2 & -2/5 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2/3 \\ -2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Deberán formar las matrices a) 2V-3/2W, b) 1/5W-2/7V, c) 5/3U-1/2X d) 1/7X-2/5U
Van pasando a resolver cada ejercicio
Bien, la multiplicación de matrices se puede realizar bajo ciertas condiciones y vamos a hacer un ejemplo práctico
Siempre yo les pongo un ejemplo práctico, de tal manera, que ustedes se den cuenta cuál es su aplicación.
En una ciudad la cantidad de vehículos por modelo en cada ruta de transporte urbano está indicado por la tabla T

T	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Ruta 1	3	8	5	2
Ruta 2	0	7	6	6
Ruta 3	1	3	5	4

En cada día de la semana, el consumo de galones de gasolina por modelo está indicado en la tabla G

G	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Modelo A	10	21/2	9	28/3	17/2
Modelo B	15/2	6	32/5	20/3	7
Modelo C	6	20/3	23/4	28/5	25/4
Modelo D	13/2	19/4	5	21/4	27/5

Si se podrán dar cuenta que tenemos aquí dos tablas que indican

diferentes situaciones, la primera son diferentes rutas que recorren cuatro modelos de autos (3x4), mientras que la segunda tabla está demostrando el consumo de gasolina por cada uno de los modelos durante los cinco días de la semana (4x5)
Si forman matrices, ¿estas van a ser iguales o no?
E: *No*
P: *No, sin embargo, eso no es lo que importa en este caso, a diferencia de la suma o resta, que es necesario que sean iguales las matrices con respecto al orden. En cambio, aquí la disposición que tienen es la correcta para poder hacer la multiplicación porque la multiplicación se hace las filas por las columnas, entonces van a coincidir el número de columnas de una matriz con el número de filas de la otra. Vamos a hallar el consumo de gasolina por cada ruta para cada día de la semana*
Multiplicamos TxG
Vamos a hacer otra tabla con los resultados
Para el día lunes tenemos que multiplicar el elemento que está en la primera fila primera columna de la tabla T por el elemento que está en la primera fila primera columna de la tabla G
Luego, el segundo elemento de la misma fila se multiplica por el elemento de la segunda fila primera columna y se suma al anterior, y así sucesivamente
Fíjese en el detalle, todos los elementos de esta primera fila (tabla T) *los multiplicamos por los elementos de esta primera columna* (tabla G) *y los sumamos entre sí de esta manera*
Van a llenar ustedes toda la tabla
Ahora esta misma fila por la segunda columna y los resultados van en el día martes. Ahí está planteado como deben ustedes ir multiplicando cada uno de los valores y sumándolos también, respectivamente, para poder tener el resultado final del consumo de gasolina en cada ruta por cada día de la semana
Bien entonces vamos ahorita a revisar lo que es multiplicación en bloques, este es otro método de realizar la multiplicación
Vamos a copiar estas matrices

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La multiplicación por bloques significa o sirve también para poder multiplicar matrices muy grandes, es decir, en este caso por ejemplo procedemos a dividir en bloques de esta manera, y le ponemos en cada bloque una letra, ya no pondré las letras A y B sino C, D, E, F, G, H, I, J, bueno una vez que yo tengo les ubico de esta manera:

$$A = \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} G & H \\ I & J \end{bmatrix}$$

Y realizamos la multiplicación respectiva, solamente con este artificio que hicimos aquí, entonces, ¿cómo procedo?
E: *CxG + DxI*
P: $AxB= \begin{bmatrix} CxG + DxI & CxH + DxJ \\ ExG + FxI & ExH + FxJ \end{bmatrix}$

Y luego, cada uno de estos valores los vamos a multiplicar por separado
Entonces reemplazamos, ¿qué tenemos que hacer aquí?
Multiplicar la C por la G, entonces ¿cuáles son los valores de C?
E: *1, -1, 2 y 0*
P: *Exacto 1, -1, 2 y 0 por ¿cuáles son los valores de G? 1, 4, 2 y -1,*
y esto debemos sumarlo a la multiplicación de D, ¿cuánto vale D?
2, 4, 4, 5 por ¿cuánto vale I? -3, 2, 0 y 1
Ok venga a resolver, venga Antonio, venga a resolver la multiplicación
de C con G. Ahí va saliendo cada uno a resolver a la pizarra
Si va a hacer directo cuidado con equivocarse
E: *Si multiplico CxG tendría otra matriz*

$$CxG=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

E: *En el caso de DxI*

$$DxI=\begin{bmatrix}-6 & 8\\ -12 & 13\end{bmatrix}$$

P *Ahora sume CxG + DxI*
E: *Nos quedaría*

$$CxG+DxI=\begin{bmatrix}-7 & 13\\ -10 & 21\end{bmatrix}$$

P: *Sí exactamente, excelente entonces que resulta, ya tenemos el primer*
resultado es esto de aquí, y ahí continuamos hasta lograr encontrar
todos los valores de la matriz
Ahora si pasen dos más, ahora vamos a hacer CxH + DxJ
¿Cuánto vale H? 3 y 0, CxH y DxJ, ¿cuánto vale J?1 y 2
Pase a multiplicar C por H, ¿esta matriz de que orden es?
E: *4x4*
P: *¿Esta matriz de aquí que orden es?*
E: *4x3*
P: *Entonces la multiplicación de las 2 ¿de qué orden me debería salir?*
E: *4x3*
P: *Sume el resultado de CxH con el resultado de DxJ*
E: $$CxH+DxJ=\begin{bmatrix}13\\ 20\end{bmatrix}$$
P: *Esos valores los ubica al lado que les corresponde,*
exactamente gracias, muy bien
El que sigue, usted va a hacer ExG y FxI
E: $$ExG+FxI=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -11 & -1\end{bmatrix}$$
P: *Karen, ya le toca ExH + FxJ*
E: $$ExH+FxJ=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}$$
P: *Ya, hasta ahí, AxB nos da*

$$AxB=\begin{bmatrix}-7 & 13 & 13\\ -10 & 21 & 20\\ -3 & 4 & -1\\ -11 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Entonces con eso se dan cuenta cómo se multiplican las matrices por
bloques, vamos a hacer otro ejercicio y armar otro bloque.

Sesión 3 (29-11-2011): Cálculo del determinante 3x3 por regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer

Línea		Transcripción
1	P:	*Antes de empezar a calcular el sistema de ecuaciones les voy a explicar*
2		*cómo funciona este método de Sarrus, para recordarles cómo funciona.*
		$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
3		*Este método consiste en hallar el valor del determinante aumentándole en*
4		*la parte inferior las dos primeras filas. Se le aumenta las dos primeras*
5		*filas con su respectivo signo, después se procede a multiplicar cruzado.*
6		*De izquierda a derecha se conserva el signo.*
7		*En cambio, de derecha a izquierda se multiplica y se cambia el signo.*
8		*Entonces de derecha a izquierda cambiamos el signo*
		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} =6+12-10+30+1+24=63$
9		*Vamos a resolver un sistema de ecuaciones*
10		*x + y + z = 4*
11		*2x – 3y + 5z = -5*
12		*3x -4y + 7z = 10*
13		*Para resolver el sistema de ecuaciones aplicamos la regla de Cramer que*
14		*consiste en tener valores en el numerador y valores en el denominador,*
15		*entonces los ubicamos de tal manera que si yo quiero hallar x, en*
16		*la ubicación de los valores de x van a ir los valores conocidos o términos*
17		*independientes, 4, -5, 10 porque lo que voy a hallar es x, ubico los de*
18		*y, luego los de z. Abajo, en el denominador, ubicamos todos los*
19		*coeficientes de las ecuaciones. Aplicando el método de Sarrus aumentamos*
20		*las dos primeras filas al final de las matrices*
21		*Pase usted Sr. a realizar los cálculos*
22	E:	*Voy a resolver directamente*
		$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & -4 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{-84+20+50+30+80+35 =131}{-21-8+15+9+20-14=1}$
23	P:	*Ahora el mismo procedimiento es para y, también para z. Pase usted Srta.*
24		*y encuentre el valor de y*
25		*Entonces lo que vamos a hallar es el valor de y, mantengamos los*

coeficientes de x, como lo que vamos a hallar es y no ponemos los coeficientes de y sino los valores conocidos, después ubicamos los coeficientes de z. Acá abajo ubicamos todos los coeficientes de las ecuaciones.
El determinante del sistema ya lo calcularon cuando hallaron el valor de x,¿a qué es igual?

E: *A 1*

P: *En todo caso aplicamos la regla de Sarrus aumentando las dos primeras filas*

E:

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&4&1\\2&-5&5\\3&10&7\\1&4&1\\2&-5&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&5\\3&-4&7\\1&1&1\\2&-3&5\end{vmatrix}}\quad\frac{=-35+20+60+15-50-56=-46}{-21-8+15+9+20-14=1}$$

P: *Calculamos el valor de z*

E:

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&4\\2&-3&-5\\3&-4&10\\1&1&4\\2&-3&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&5\\3&-4&7\\1&1&1\\2&-3&5\end{vmatrix}}\quad\frac{=-30-32-15-20-20+36=-81}{-21-8+15+9+20-14=1}$$

P: *Bien vamos a hallar las incógnitas de un sistema de ecuaciones aplicando otro método para hallar el determinante. Desde el primer semestre hemos venido viendo distintos métodos de eliminación para hallar las incógnitas y continuamos pero aplicando las matrices, por medio de los determinantes*
Vamos primero a aprender el método para después resolver el sistema de ecuaciones, tenemos esta matriz

$$H=\begin{bmatrix}-1&3&\frac{1}{2}\\4&0&2\\-2&-1&5\end{bmatrix}$$

El método consiste en hallar el valor del determinante, ¿cómo se resuelve?, de la siguiente manera, este valor inicial que está aquí (refiriéndose al -1 de la primera fila primera columna) *lo ponemos como cofactor, tapamos todo lo que está en la primera fila y en la primera columna, solo ubicamos los valores que están descubiertos. Después ubicamos el segundo número de la fila* (primera fila) *pero con el signo cambiado y así mismo tapamos la primera fila y la segunda columna y ubicamos sólo los números que están descubiertos, ¿cuáles son?*

E: *4, 2, -2 y 5*

54 P: *Y después ubicamos como cofactor el último término de la fila sin cambiar*
55 *el signo, los signos van alternados*

$$\overset{+}{-1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{-}{-3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{+}{+1/2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

56 *Este signo de aquí se multiplica por este de acá, menos por más, menos,*
57 *este de aquí que es positivo* (refiriéndose al 3) *se multiplica por el signo*
58 *negativo queda negativo y este de aquí queda positivo, o sea que*
59 *solamente se cambia el signo al segundo término*
60 *Ahora procedemos a hallar los determinantes. Para hallar los*
61 *determinantes multiplicamos cruzado y el segundo término de derecha a*
62 *izquierda se cambia de signo*
63 *¿Cuál es el valor del determinante entonces?*
64 E: -76
65 P: *Este es el método que ustedes van a utilizar para hallar las incógnitas, se*
66 *llama el menor de la fila para buscar el determinante*
67 *Van a hacer este ejercicio*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

68 E: *Yo paso*

$$1\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

69 *La respuesta es 1*
70 P: *Aquí tienen un sistema de ecuaciones*

$$A=\begin{cases} 7x + 10y + 4z = -2 \\ 5x - 2y + 6z = 38 \\ 3x + y - z = 21 \end{cases}$$

71 *Pase Sr. a resolver el sistema por la regla de Cramer y calculando el*
72 *determinante por el método menor de la fila*
73 *En este caso no debe aumentar las dos primeras filas para calcular el*
74 *determinante como con la regla de Sarrus, calcule el determinante por el*
75 *método menor de la fila*
76 E: *¿Escribo primero cómo va a quedar o resuelvo directamente?*
77 P: *Escríbalo y después calcula el determinante tanto del numerador*
78 *como del denominador*
79 E: *Escribiré aquí*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 10 & 4 \\ 38 & -2 & 6 \\ 21 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

80 *Y aquí calculo los determinantes*

$$x=\frac{-2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -10\begin{vmatrix} 38 & 6 \\ 21 & -1 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 38 & -2 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}}{7\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -10\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

81		*El valor de x es 8*
82	P:	*Cuando ya ustedes calculen ”y”, la parte de abajo o el determinante del*
83		*sistema, ese resultado les sirve para todas las incógnitas, solamente tienen*
84		*que resolver la parte de arriba*
85		*Veo que ya han calculado y, se obtuvo -5*
86		*Y z es igual a -2*

Sesión 4 (13-12-2011): Matriz inversa 2x2 y 3x3

Línea		**Transcripción**
1	P:	*Para hallar nosotros la matriz inversa de orden dos primero tenemos*
2		*que hallar la matriz adjunta y dividir cada uno de los elementos de*
3		*la matriz adjunta para el determinante de la matriz original*
4		*¿Cómo hallamos la matriz adjunta? Por ejemplo de la matriz*
		$J= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
5		*Vamos a escribir la adjunta, formamos otra matriz, la adjunta de J,*
6		*intercambiamos los elementos de la primera diagonal y en la segunda*
7		*diagonal solamente cambiamos los signos*
		$Adj(J)= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$
8		*Entonces aquí tenemos la matriz adjunta de J*
9		*Después hallamos el determinante de J*
10		*¿Cuál sería el valor del determinante? Multiplicamos cruzado*
11		*Det (J) =-6+4*
12		*Entonces el determinante de J es igual a -2*
13		*Para hallar la inversa de J tenemos que es igual a la matriz adjunta*
14		*dividida para el determinante*
		$J^{-1} = Adj(J)/Det(J)= \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}$
15		*Para hallar la adjunta les recuerdo, solamente se cambia el orden de*
16		*la diagonal principal pero se mantiene el mismo signo. En la segunda*
17		*diagonal sólo se cambia el signo*
18		*Ahora, para comprobar si está bien esa matriz inversa multiplicamos*
19		*la matriz original por la inversa y nos tiene que dar la matriz identidad*
20		$JxJ^{-1} = I$
21		*Bueno entonces reemplacemos los valores*
		$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
22		*Quiere decir que está bien resuelta esa matriz inversa*
23		*La matriz identidad también se llama matriz unitaria*
24		*Existe matriz inversa solo cuando el valor del determinante es diferente*
25		*de cero, entonces, si ustedes calculan el determinante y es cero ya*
26		*no existe la matriz inversa*
27		*Vamos a hacer ejercicios, usted encuentre la matriz inversa*
		$J= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $S= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $U= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $W= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

En todas tendrán que hacer la comprobación
Ahora trabajemos con la matriz inversa de orden tres
Tenemos

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bueno para saber si podemos llegar a la inversa hallamos primero el determinante. Tomamos la primera fila y la primera columna y escribimos los elementos, primera fila segunda columna, primera fila tercera columna

$$\mathrm{Det}(Y) = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} -0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Hagan esos cálculos y me dicen el valor del determinante
E: *Es igual a 25*
P: *El determinante de Y nos da 25, un número diferente de 0 por lo tanto sí hay matriz inversa*
Ahora vamos a hallar los cofactores, pero para hallarlos no vamos a poner número como en el caso del determinante, sino que vamos a poner solamente el signo
Si la suma de i + j es igual a número par esto es positivo
Si la suma de i + j es igual a número impar esto es negativo
Entonces 1 +1 = 2, es un número par, entonces el signo es positivo, sigo fila 1 columna 1, ¿cuáles son los elementos que quedan?
E: *1, 4, -2, 1*
P: *Sí está bien. Ahora, 1+2, entonces el signo es negativo, fila 1 columna 2 y así. Luego vamos a hallar los cofactores de la fila 2 columna 1 ¿qué signo?*
E: *Negativo*
P: *Fila 2 columna 1 y así con cada cofactor*

$$\mathrm{Cof}(1,1)=\begin{vmatrix} + & \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{Cof}(1,2)=\begin{vmatrix} - & \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{Cof}(1,3)=\begin{vmatrix} + & \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Cof}(2,1)=\overset{-}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} \quad \mathrm{Cof}(2,2)=\overset{+}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \quad \mathrm{Cof}(2,3)=\overset{-}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{Cof}(3,1)=\overset{+}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} \quad \mathrm{Cof}(3,2)=\overset{-}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \quad \mathrm{Cof}(3,3)=\overset{+}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Hay que diferenciar el determinante con los cofactores, para el determinante no solamente tomamos el signo de referencia sino también el número o elemento. En los cofactores solamente vamos a tomar el signo
Entonces, la matriz de los cofactores, al multiplicar cruzado sería
Ordenamos en una matriz todos los cofactores

$$\mathrm{Cof}\,(Y)= \begin{bmatrix} 9 & 10 & -7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora hallamos la adjunta de Y, es la traspuesta de la matriz de los cofactores

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Adj(Y)= 10 5 -10

-7 4 2

59 *Para hallar la inversa, es igual a la adjunta de Y sobre el determinante*
60 *de Y, puede simplificar también*

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} 9/25 & 2/25 & 1/25 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -7/25 & 4/25 & 2/25 \end{bmatrix}$$

61 *Con eso nosotros hemos hallado la matriz inversa de Y*
62 E: *¿Podría explicar por favor cómo obtener la adjunta?*
63 P: *Claro, las filas se convierten en columnas, ahí se da cuenta. Ahora hay*
64 *que verificar, tenemos que multiplicar Y por Y^{-1} y nos tiene que dar la*
65 *matriz identidad, de orden tres*
66 *$Y \times Y^{-1} = I$*

$$Y \times Y^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9/25 & 2/25 & 1/25 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -7/25 & 4/25 & 2/25 \end{bmatrix}$$

67 *Ustedes hacen la multiplicación y comprueban*
68 *Ahora vamos a resolver ejercicios en clase, escribiré unas matrices*
69 *y ustedes encuentran la inversa*

$$D= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad E= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

70 *Estas matrices también*

$$F= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad G= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

71 *Pueden resolver una aquí y las demás quedan de tarea*
72 *Vamos a ver la matriz inversa de orden dos pero por otro método, por*
73 *el método de Gauss Jordan, tenemos esta matriz*

$$J= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

74 *El método de Gauss Jordan francamente para una matriz de*
75 *orden 2 es demasiado largo, pero deben aprender de todas formas*
76 *Para aplicar el método de Gauss Jordan, lo expresamos primero*
77 *de esta manera*

$$\left[\begin{array}{cc:cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

78 *Aquí hacemos el proceso inverso, aquí obtenemos la matriz identidad a la*
79 *que ustedes tienen que llegar una vez que hacen la comprobación, y*
80 *tenemos que hacer un procedimiento de tal manera que estos valores de la*
81 *derecha* (matriz identidad) *se vengan a la izquierda y el resultado al final*
82 *será la matriz inversa*
83 *Este es un proceso que requiere que decidan qué operaciones harán, no es*
84 *de memoria. Por ejemplo, el primer punto es tratar de convertir el -3 en la*
85 *unidad, ¿cómo hago?*
86 E: *Puedo hacer operaciones con la fila 2 y sumar o restar a la fila 1,*
87 *dependiendo*
88 P: *Muy bien, puede darse ese caso pero yo les recomiendo que lo hagamos*
89 *mejor así, yo a la fila 1 la voy a multiplicar por -1/3 y también me va a*
90 *quedar 1*

$$f_1(-1/3) \rightarrow f_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como solamente se va a modificar la fila 1, copio igual los valores de la fila 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ojo que la operación afecta a toda la fila, no solo al -3. Ya este 1 de la derecha lo hemos traído a la izquierda, ¿Qué otra operación podemos hacer para tener la matriz identidad del lado izquierdo?

E: *Multiplicar y sumar*

P: *Exacto, multiplicar y sumar, vamos a convertir en 0 el 4, ¿Cómo hago?*

E: *Por 0*

P: *No, yo multiplicaré la fila 1 por -4, la sumo con la fila 2 y el resultado lo pondré en la fila 2*

$$f_1(-4)+f_2 \rightarrow f_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

¿Qué vamos a modificar ahorita? Es la fila 2, lo que está después de la flecha es lo que nos indica lo que vamos a modificar. Anotamos los valores de la fila 1 igualitos, vamos a hacer un artificio, nos vamos a valer de la fila 1 para modificar la fila 2, pero la fila 1 no la vamos a modificar ahorita

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 1 \end{array}\right]$$

Muchas veces les va a pasar que hacen un tipo de operación aquí y luego aplican otra y les va a dar el mismo resultado, un camino puede ser más corto, otro más largo, pero si están haciendo bien el procedimiento les da el mismo resultado.

Ahora quiero convertir en 1 el 2/3

E: *Debe multiplicar por 3/2*

P: *Entonces vamos a multiplicar la fila 2 por 3/2 como me está sugiriendo y esto va a ser el resultado de la fila 2*

$$f_2(3/2) \rightarrow f_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 1 \end{array}\right]$$

Quiere decir que lo que vamos a modificar ahorita es la fila 2, entonces vamos a anotar la fila 1 igualita

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \end{array}\right]$$

Por lo pronto ya tenemos los resultados de la fila 2 que encontró antes su compañero. ¿Qué más debo hacer?

E: *No lo tengo claro*

P: *Ahora voy a multiplicar la fila 2 por -1/3, lo sumo a la fila 1 y eso va a ser el resultado de la fila 1*

$$f_2(-1/3)+f_1 \rightarrow f_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \end{array}\right]$$

Anoto igualito todos los valores de la fila 2

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \end{array}\right]$$

Entonces primero resolvieron ustedes encontrando el determinante para hallar la matriz inversa, ahora aplicaron el método de Gauss Jordan y llegaron a lo mismo, es un proceso más largo pero necesario.

Van a hacer ustedes un ejercicio

Recuerde que la adjunta de una matriz 2x2 se halla intercambiando la primera diagonal y el signo de la segunda diagonal

ANEXO 14. Entrevista 2 realizada a Carlos

1. **¿Qué métodos emplea usted para saber que han aprendido (matrices)?**

Para saber qué tanto han aprendido los alumnos empleo el método heurístico (búsqueda o investigación) y hermenéutico (interpretación).

2. **¿Qué dificultades experimentó durante el desarrollo de la clase?**

Algunos estudiantes son dependientes de la calculadora hasta para operaciones pequeñas, especialmente con números fraccionarios. Tampoco repasan las clases dadas, lo que muchas veces impide avanzar.

3. **¿Cómo evalúa o verifica que se hayan alcanzado los objetivos de aprendizaje planteados?**

Para verificar si se han cumplido los objetivos de aprendizaje planteados realizo pruebas escritas individuales, donde los alumnos desarrollan lo aprendido de los diferentes contenidos.

4. **¿Han tenido todos los estudiantes la oportunidad de participar con preguntas y respuestas sobre el tema de la clase?**

Se distribuye la clase entre la explicación y la participación de cada uno de los alumnos, para que cada uno de ellos tenga la oportunidad de poner en práctica sus conocimientos adquiridos.

5. **¿Considera que se alcanzaron los objetivos propuestos para la clase?**

Sí considero que se alcanzaron los objetivos propuestos para la clase por cuanto los alumnos asimilan la información de tal forma que pueden resolver los ejercicios que se les plantea solo con la explicación dada.

6. **¿Cree que se han trabajado bien los aspectos principales del contenido de matrices? ¿Qué aspectos y por qué? ¿Cree que en general los alumnos lo han comprendido?**

Sí considero que se han desarrollado bien aspectos del contenido de la clase con respecto a lo que se refiere a las matrices utilizando el método deductivo – inductivo para que los alumnos aprendan progresivamente el contenido y puedan adquirir el conocimiento sin dificultad. Especialmente los aspectos relacionados a la aplicación en la vida diaria que tienen las matrices porque de esta manera no sienten que el aprendizaje es innecesario. También, a través del resultado de las evaluaciones puedo determinar si han comprendido las clases.

7. **¿Cree indispensable que los estudiantes conozcan la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos? ¿Por qué?**

Sí, yo considero que es indispensable que los alumnos conozcan de dónde proceden las diferentes formas de desarrollo de las matrices en las ciencias de las matemáticas porque los estudiantes necesitan conocer su aplicabilidad en la vida práctica, en la vida diaria.

8. **¿Qué criterios considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para abordar un tema de matrices? Por ejemplo en el caso del producto de matrices**

Para poder abordar el tema selecciono ejercicios fáciles de resolver. Por ejemplo, en el caso de producto de matrices inicio con ejemplo de orden dos.

9. **¿Qué criterios considera a la hora de elegir un ejemplo o ejercicio para reforzar o generalizar cierta idea sobre matrices? Por ejemplo en el caso del producto de matrices**

Para reforzar los conocimientos adquiridos se practica con ejemplos parecidos a los ya explicados, luego se aumenta la complejidad en la resolución de los mismos y también se realizan ejercicios de aplicación a cualquier área de las ciencias.

10. **¿En base a qué criterios escoge usted los ejercicios sobre matrices que les dejará de tarea para que practiquen?**

Para que los alumnos puedan practicar y realizar ejercicios después de las clases, escojo ejercicios que tengan similitud con los ya practicados en las mismas.

11. **¿Cómo sabe que un estudiante aprendió o captó la clase?**

Mido la capacidad de captación de la clase de los estudiantes a través de la resolución de ejercicios individuales que los alumnos realizan en la pizarra, su grado de rapidez o precisión con que resuelven.

12. **¿Qué recursos materiales utilizó en el desarrollo de este contenido?**

Se utilizan ejercicios varios sacados de libros de matrices, pizarra, tiza líquida, borrador.

13. **¿Son satisfactorios los resultados de las evaluaciones de los estudiantes sobre el contenido de matrices? ¿Por qué?**

Considero que sí son satisfactorios los resultados de las evaluaciones porque superan la nota mínima requerida para aprobar la asignatura.

14. **Considerando los resultados de las evaluaciones de sus estudiantes sobre el tema de matrices, ¿Qué actividades implementaría usted en sus clases para contribuir al aprendizaje de los estudiantes?**

Los estudiantes como son de la carrera de Ingeniería en Sistemas aplican sus conocimientos en el desarrollo de software.

ANEXO 15. Transcripción de sesiones de clases de Carlos (Año 2 de observaciones)

Sesión 1 (07-11-2012): Definición de matriz, filas, columnas e igualdad de matrices

Línea **Transcripción**

P: *Con respecto a las matrices podrán darse cuenta que aquí existe un cuadro relacionado con temas de nutrición*

	LACTOSA %	PROTEÍNA %	GRASA %
Leche	38	27	25
Queso	35	25	30
Mantequilla	36	22	32
Kumis	37	24	29

Lo que significa que las matrices pueden ser aplicadas en cualquier área de estudio, ya sea en geografía, cívica, historia, ciencias naturales, biología, química, porque no son otra cosa que datos o valores que tienen relación con lo que se esté trabajando. Por ejemplo: un cuadro de calificaciones tiene un orden establecido de valores de acuerdo a cada uno de los estudiantes, que pueden estar ordenados por curso, por paralelo, por facultades, etc.

En este caso tenemos un ejemplo nutricional, incluye leche, queso, mantequilla y kumis y tenemos los componentes como la lactosa, la proteína y la grasa que están en porcentaje.

Los valores que tenemos para leche 38, 27 y 25 se refieren a los porcentajes de lactosa, proteína y grasa, respectivamente y así con los demás componentes.

Podrán darse cuenta que son valores reales, este ejemplo es para demostrarles que las matrices no son situaciones adaptadas, no son números ordenados al azar sino que tienen un sentido propio de la realidad, las matrices son totalmente prácticas.

La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y las columnas de forma vertical

Lo que vemos en el cuadro lo podemos expresar en forma de matriz, donde cada número indica el porcentaje de un componente en un producto lácteo

$$\begin{array}{l c}
\begin{array}{l} \text{fila 1}\rightarrow \\ \text{fila 2}\rightarrow \\ \text{fila 3}\rightarrow \\ \text{fila 4}\rightarrow \end{array} &
\begin{bmatrix} 38 & 27 & 25 \\ 35 & 25 & 30 \\ 36 & 22 & 32 \\ 37 & 24 & 29 \end{bmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \end{array}
\end{array}$$

Aquí está expresado cómo se puede escribir una matriz, aquí hemos utilizado corchetes ¿cuántas filas tenemos?

E: *Cuatro*

P: *Exacto, que son todos los valores que están ubicados en forma horizontal. Ya cuando nosotros vamos a utilizar matrices, ya no ponemos los elementos como en la tabla sino que simplemente ubicamos los números o elementos. ¿Cuántas columnas tenemos?*

E: *Tres*

P: *Se podrán dar cuenta que las columnas están en forma vertical, entonces de acuerdo al arreglo de las filas y las columnas es el orden de la matriz.*

La anterior disposición de los números en el rectángulo de 4 filas y 3 columnas se llama una matriz de orden "cuatro por tres".

Siempre los elementos son nxm, n van a ser los valores de las filas y m de las columnas

La importancia también que tienen las matrices es que nosotros podemos realizar algunos cálculos matemáticos como hacer sumas, restas, multiplicaciones, inclusive a través de la matriz inversa hallar la matriz inicial con la que nosotros hemos desarrollado cualquier operación.

También a partir de las matrices nosotros podemos hallar x, y, z, dependiendo de la cantidad de incógnitas, resolver un sistema de ecuaciones aplicando matrices.

Ahora vamos a hablar sobre la notación de las matrices, la escritura de las matrices. Las matrices se escriben con letras mayúsculas

¿Cuántas filas y columnas tiene esta matriz?

$$M= \begin{bmatrix} -2 & 8 & 0 & 1/2 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 3 & -2/3 & -3/2 \\ 173 & 2/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E: *Tres y cinco*

P: *Entonces tenemos nosotros una matriz de orden 3x5. Ahora a esta matriz M donde están ubicados los números en forma explícita la conocemos como una matriz particular. Pero esta matriz particular corresponde en realidad a una matriz general. Las matrices generales se escriben con la misma letra pero con minúscula, el orden es el mismo y en cada uno de los casilleros correspondientes al elemento se va escribiendo la letra minúscula con su respectivo número que se refiere a la fila con la columna*

$$(m_{ij})3x5= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \end{bmatrix}$$

Llamemos m_{ij}, léase: "eme sub i, jota, al elemento que se encuentra en el cruce de la i-ésima fila con la j-ésima columna.

En la matriz M el valor de m_{14} ¿cuál sería?

E: *½*

P: *Que corresponde a ¿qué fila?*

E: *Primera*

P: *Y cuarta columna. Todos los elementos se los ubica de esa manera. No se olvide de que las matrices se denotan con letras mayúsculas y para referirnos a los números que se disponen en el rectángulo utilizamos letras minúsculas acompañadas de los números que indican su fila y su respectiva columna.*

Se podrán dar cuenta que los elementos de esa matriz son números reales y estos pueden estar integrados por números fraccionarios, radicales, cantidades negativas y positivas e incluso 0.

Continuamos con la igualdad de matrices. En este ejemplo 2 tenemos 2 matrices, la A y la B

$$\begin{bmatrix} -3/2 & 3^0 & 2 & 8-8 \\ & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 8/4 & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

A= -√4 5 2.5 1 B= -2 √25 5/2 3/3

La matriz A es particular de la matriz (a_{ij}) *2 x 4. La matriz B lo es de* (b_{ij}) *2 x 4. Es decir, que los elementos de la matriz A son iguales a los respectivos elementos de la matriz B y la igualdad se refiere a los elementos dispuestos en iguales sitios en las dos matrices del mismo orden; entonces diremos que la matriz A es igual a la matriz B y se escribe A=B Entonces para realizar la igualdad de matrices debemos ir comparando cada una de sus respectivas filas con sus respectivas columnas. La única forma que debemos darnos cuenta que solamente podemos realizar la igualdad de matrices cuando estas tienen el mismo orden, en este caso ¿de qué orden son las matrices?*

E: *2 x 4*

P: *En* a_{11} *el valor es -3/2, que corresponde en* b_{11} *a -1.5, son iguales los elementos de las matrices. Debemos ir comparando los elementos de las matrices y nos daremos cuenta si son iguales. Significa que cuando analicemos dos matrices para ver si son iguales deben tener primero el mismo orden y de ahí ir comparando cada uno de los elementos, puede haber resultados equivalentes a esa expresión matemática, que viene a ser lo mismo. No es lo mismo que yo diga* a_{11} *que* a_{21}*, cuidado, a veces manejan las matrices y se confunden con los subíndices de los elementos, nos estamos refiriendo a distintas filas. Bien, están ustedes en condiciones de realizar los siguientes ejercicios. Con los números de la matriz M del ejemplo 1, escribe una matriz particular* (m_{ij}) *5x3 La matriz que teníamos en el ejemplo 1, la matriz M era de 3x5, lo que ustedes van a hacer es convertirla en la matriz 5x3, lo que significa que van a hacer que todos los valores delas filas se conviertan en columnas. A esta matriz se la conoce con el nombre de matriz traspuesta.*

E: *Traspuesta*

P: *Sí y deberán escribir la forma de las matrices generales:* (h_{ij})*2x3,* (k_{ij})*3x6* (p_{ij})*4x4 Por otro lado, considerando las cuatro matrices que voy a escribir ustedes deberán contestar unas preguntas*

$$R=\begin{bmatrix} -2 & 3/4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 9 & \sqrt{25} \\ -15 & 30/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} -4/2 & -3/3 & 0.5 & -30/2 \\ 0.75 & 0 & 18/2 & 6 \\ 0 & 5^0 & 5 & 0/2 \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} \sqrt[3]{8} & (-1)^3 & 5/10 & -15 \\ 6/8 & 0 & 3^3 & 24/4 \\ 1-1 & 5/5 & 3+2 & -7+7 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1-3 & 1-1/4 & 2-2 \\ 7-8 & 1/2-1/2 & 8-7 \\ & & \\ \end{bmatrix}$$

3-5/2 6+3 8-3
-6-9 -3+9 3-3

Con las matrices R y Q establece cada una de las igualdades de la forma $r_{ij} = q_{ij}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$
Y escribes luego ¿Qué puedes concluir?
Demostrar la igualdad de las matrices S y T
¿Por qué las matrices R y S no son iguales?
Y finalmente, si se denota por S' a las matriz cuyas filas son las columnas de S, y cuyas columnas son las filas de S, prueba la igualdad R=S'. De igual forma, prueba que Q = T'

Sesión 2 (12-12-2012): Matriz escalonada y matriz identidad (operaciones elementales entre filas). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss (matriz escalonada)

Línea **Transcripción**

P: *Las operaciones elementales entre filas no van a ayudar a dos cosas, la primera es encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales, y la segunda, es que también pueden obtener la matriz inversa.*
En el caso de la matriz inversa, las operaciones elementales entre filas nos van a servir para llegar a la matriz identidad de la matriz original.
En el caso de una matriz 3x3 ¿cómo sería la matriz identidad?

E: *Serían tres unos en la diagonal principal y lo demás ceros*

P: *Exacto, entonces nosotros tenemos una matriz cualquiera y queremos encontrar la matriz identidad, para eso hacemos operaciones elementales entre filas.*
Entonces se llama operación elemental realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes:
Primero cambiar entre sí dos filas de una matriz, se puede representar por $F_i \leftrightarrow F_j$, siendo F_i y F_j dos filas de la matriz.
También multiplicar una fila por un escalar distinto de cero, se representa por $F_i \rightarrow \alpha F_j$
Otra cosa que se puede hacer es sumar a una fila otra fila multiplicada por un número real.
Se representa por $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$
ahí hemos representado como alfa el coeficiente cualquiera que vamos a multiplicar por los elementos de la fila.
Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz, reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir por filas a una matriz
Tenemos esta matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que vamos a hacer es demostrar que con las operaciones *elementales entre filas, esta matriz es equivalente a la matriz identidad Escalonamos una parte de la matriz. Escalonar una matriz es darle una forma triangular, donde los elementos de la parte inferior son ceros y la diagonal principal puede estar formada por unos Eso es escalonar una matriz Pero si nosotros transformamos en cero todos los elementos que están por encima de la diagonal principal estamos completando toda la matriz identidad O sea, que en la misma matriz podemos hacer dos cosas, una matriz escalonada y también la matriz identidad Considerando que primero vamos a escalonar la matriz hasta que tome forma de matriz triangular, se dan cuenta que el primer elemento tenemos que transformarlo en uno, y en este caso tenemos en la última fila el uno, ¿qué se procede a hacer?*

E: *Cambiar las filas*

P: *Exacto f_1 se cambia con f_3*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \; f_1 \rightarrow f_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos el uno Procedemos ahora a cambiar las filas dos y tres, transformando en cero el -2 y el 3 ¿Qué vamos a hacer? Multiplicar la fila uno por dos y lo sumamos a la fila dos

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; \begin{array}{l} f_2 \rightarrow f_2 + 2f_1 \\ f_3 \rightarrow f_3 - 3f_1 \end{array} \; \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos nosotros en la primera columna los valores que necesitamos de 1, 0 y 0 En la tercera fila también hemos transformado el tres en cero Se ha modificado ese cero que estaba al lado del tres, se ha convertido en 15 Ven que allí hemos multiplicado la fila uno por -3, ¿por qué?

E: *Porque al sumar con la fila 1 se hace cero*

P: *Exactamente, si tienen alguna pregunta por favor dígame Recuerde que estamos escalonando la matriz primero*

E: *¿Cuáles son las aplicaciones?*

P: *Ya he dicho que con la matriz escalonada podemos encontrar las incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones y con la matriz identidad hallamos la matriz inversa por Gauss Jordan Este procedimiento que estamos haciendo no es fijo, no es algo que usted tenga que hacerlo así exactamente Ustedes pueden aplicar otras operaciones elementales para escalonar la matriz, lo importante es que lleguen a obtener una matriz identidad y el procedimiento tenga razonamiento lógico No tiene que aprenderse nada de memoria Ahora, por ejemplo , podemos cambiar el signo de la fila 2 para ir con la secuencia de la matriz escalonada, lo que nos interesa es hacer positivo el uno de la segunda fila segunda columna*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$f_2 = -f_2 \quad 0 \quad 1 \quad -1$

$\qquad\qquad\;\; 0 \quad 15 \quad 1$

Podemos ahora modificar el valor de -5 de la fila uno y después
convertir en cero el 15
Entonces podemos multiplicar la fila 2 por el valor de 5 y para
modificar la fila 3 multiplicaremos la fila dos por -15
y sumamos la fila tres

$$\begin{array}{l} \\ f_1 \to f_1 + 5f_2 \\ f_3 \to f_3 - 15f_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

El procedimiento que sigue es hacer que el 16 se convierta en 1
Lo único que debemos hacer es multiplicar por 1/16 la fila 3,
para que al simplificar nos de la unidad

$$\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \to f_3/16 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasta ahí tenemos ya una matriz escalonada y podemos continuar
convirtiendo en cero los elementos de la parte superior a la
diagonal principal
Vamos a modificar entonces la fila uno, necesitamos que el -5 se haga 0
Multiplicamos la fila tres por 5, le sumamos la fila uno y se modifica
la fila uno

$$\begin{array}{l} \\ f_1 \to f_1 + 5f_3 \\ f_2 \to f_2 + f_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda que puedes aplicar las operaciones elementales entre filas
como tú creas conveniente
Lo importante es que lleguen a la matriz identidad
Ahora harán ustedes un ejercicio
Recuerde que llegando a escalonar la matriz, es decir, dejándola
triangular usted ya puede encontrar el valor de las incógnitas de un
sistema de ecuaciones lineales
Propongan un sistema de ecuaciones y pueden utilizar el método de
Gauss para resolverlo, ahí aplicarán lo aprendido
E: *Vamos a resolver el sistema de ecuaciones por el método de Gauss*
Tenemos 2x+3y+z=1, 3x-2y-4z=-3, 5x-y-z=4 (exposición del estudiante)
P: *Veo como que se les está complicando, la matemática es para*
simplificar y no para complicar, entonces yo veo como que están dando
vueltas y es importante que lleguen a un procedimiento que les
simplifique la solución, no que se les complique.
Tomando de los mismos ejercicios que me han traído ustedes, de
aquellos que iban a exponer.
A ver Ángel, usted me ha entregado aquí un ejercicio.
Copien este sistema x+2y+z=1, 2x+y+2z=2, 2x+y+z=3
Presten atención todos para que ya les quede claro cómo se
resuelven estos ejercicios.
Para resolver por el método de Gauss, lo que deben hacer es tomar
cada uno de los coeficientes y escribirlos como una matriz
Ahora, les recuerdo que acabamos de ver que tienen que
hallar la matriz escalonada para encontrar los valores de x, y, z

Significa que vamos a hacer que todos estos valores de aquí se hagan cero y estos de aquí se hagan uno.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Al ustedes intentar que estos elementos se conviertan en cero se les van a modificar estos uno, pero ustedes intentarán transformarlos nuevamente en cero con las operaciones elementales entre filas Entonces, yo les dije que para hallar las incógnitas x,y,z solo tenían que escalonar la parte de abajo (diagonal principal), *o sea convertir en 0. Si ustedes ya lo resuelven todo ya es la matriz identidad que van a hallar y la matriz identidad les sirve es para hallar la matriz inversa por Gauss Jordan. Yo quisiera que hagan los procedimientos de manera que les quede claro, tanto a usted que lo hace en la pizarra como a sus compañeros*
¿Qué va a modificar?

E: *La fila 2*

P: *Perfecto, entonces escriba f_2, así es que deben hacer ustedes para que no se pierdan, vamos a modificar f2, entonces ¿qué va a hacer?, multiplicar por -2 la fila 1 y la suma a la fila 2, entonces ahí como que les queda más claro*

E: *Sería*

$$f_2 \rightarrow f_2 - 2f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Y tendríamos entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

P: *Hagamos paso por paso, como solamente vamos a modificar la fila 2, copiamos igual las otras filas. Ya después cuando ustedes resuelvan un ejercicio ya lo harán con la práctica que ustedes tengan resumiendo los pasos, pero yo quisiera que ahora lo hagan paso a paso.*
¿Ahora qué va a modificar?

E: *La fila 3*
Voy a hacer 0 el 2 que está en la fila 3 (columna 1)

P: *Muy bien, si modifica la fila 3 ¿qué va a hacer?*

E: *f_3-$2f_1$*

$$f_3 \rightarrow f_3 - 2f_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Y tendríamos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Excelente hasta ahí está correcto*
Ya, fíjense en un detalle, al tratar de cambiar a 0 estos dos valores que están aquí (filas 2 y 3 columna 1), *fíjense que también cambiaron los 1 de la diagonal principal, que aparentemente ustedes decían ya tengo seguro en la diagonal principal los 1. Entonces se modificaron, pero eso*

no significa que ya no tiene solución, se sigue resolviendo. Vamos a ver, ¿cuál va a hacer ahora?

E: *El -3* (fila 2 columna 2) *lo voy a convertir en 1*

P: *Excelente, escriba arriba el procedimiento que va a hacer*

E: *Lo escribo aquí*

$$-1/3f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *No, yo le voy a recomendar mejor otro paso primero, le voy a recomendar convertir el -3* (fila 3 columna 2) *en 0 porque yo estuve revisando el ejercicio que usted iba a exponer. Entonces va a hacer usted $f_3 - f_2$, vamos a hacer así*

E: *Lo voy a escribir*

$$f_3 \rightarrow f_3\text{-}f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Yo les estoy recomendando estos pasos porque después se les hace muy largo el procedimiento. Escriba los valores que no se van a modificar, fila 1 y fila 2*

E: *Está bien*

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Ahora sí haga el paso que usted quería hacer hace un momento, pero escriba qué va a hacer*

E.

$$f_2 \rightarrow -1/3f_2 \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Como van a modificar los valores de la fila 2 pongo igualitos los valores de las filas 1 y 3*

E: *Nos queda la matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Fíjense en un detalles chicos, ya vamos llegando a lo que queríamos hallar, ya tenemos estos tres valores convertidos en 0 y estos tres elementos convertidos en 1, ¿qué vamos a hacer ahora? Cambiar el signo del -1* (fila 3 columna 3) *para que quede positivo, entonces la fila 3 la vamos a multiplicar por -1*

E: Sería

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

P: *Si nosotros hemos hecho bien el ejercicio ya está la respuesta allí porque hemos nosotros escalonado la matriz, hemos convertido en 0 estos elementos y la diagonal principal la hemos convertido en la unidad. Ahora sí vamos a hallar lo que queremos nosotros, los valores de x, y, z ¿Cuánto vale x? ¿Cuánto vale y? ¿Cuánto vale z?*

E: *Lo escribo*

$x+2y+z=1$

y =0
z=-1

P: *Cada fila va ir teniendo las variables, esta x ya no la escribe porque vale 0, la y vale 0 y la z vale -1. Ya con eso ya puede usted hallar los valores de x, y, z. Por lo pronto tiene dos valores y, z*

E: *x=2*

P: *Ahora reemplace usted en cualquiera de las ecuaciones originales y se le tiene que satisfacer cualquiera de las ecuaciones originales*

E: *Sí sale*

P: *Entonces ya se dieron cuenta, vamos a anotar cada uno de los pasos encerrados en un círculo para que vean cuál es la secuencia. Ya con esta matriz escalonada encontramos los valores de las incógnitas x, y, z. Ahora va a pasar usted a hacer otro ejercicio, yo le voy a ir dando las directrices. Obviamente no podía esperar que ustedes lo sepan todo porque es un tema nuevo, entonces con esta explicación les quedó más claro, con lo que hicimos suficiente, para qué seguir calculando, si allí ya podían hallar la respuesta.*

Sesión 3 (26-12-2012): Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 mediante matriz inversa

Línea **Transcripción**

P: *Vamos a resolver ejercicios de aplicación de las matrices, vamos a utilizar la matriz inversa para encontrar los resultados.*
Tenemos el siguiente problema:
En una fábrica de telas, dos máquinas alternan el trabajo diario. La primera produce telas de $50 cada metro pero gasta $60 por hora de producción, mientras que la segunda produce telas de $60 el metro y gasta $80 por hora de producción. Si el tiempo de trabajo y la cantidad de telas deben ser iguales cada día ¿Cuántas horas diarias y cuántos metros de tela deben producir para que la ganancia diaria sea de $100 con la primera máquina y de $80 con la segunda?
Podemos darnos cuenta de que lo que queremos es conocer cuántas horas diarias y cuántos metros de tela deben producir para que la ganancia sea de $100 en la primera máquina y de $80 en la segunda
En el planteamiento entonces vamos a identificar las incógnitas, vamos a considerar como n la primer incógnita que sería el número de metros de tela y la segunda incógnita h que sería las horas, cuántas horas diarias.
¿En qué tipo de matriz se nos va a convertir?
Se nos va a convertir en una matriz de ¿qué orden?

E: *Dos*

P: *Se nos va a convertir en una matriz de orden 2, solamente tenemos dos ecuaciones, con la primera máquina y con la segunda máquina.*
Si se podrán dar cuenta, al hacer el planteamiento le vamos a dar valores positivos a lo que produce ingreso y a lo que produce egreso valores negativos; entonces si nos ponemos a leer el enunciado nos podremos dar cuenta que existen dos máquinas, la primera produce telas de $50 cada metro, entonces eso es lo positivo, 50, al lado le ponemos la n que es el

número de metros de tela y después ponemos lo que gasta, entonces restamos $60 que es lo que se gasta por hora de producción. Pero así mismo dice que la ganancia en la primera máquina es igual a $100 y en la segunda máquina, la ganancia es de $80.

En la segunda máquina tenemos que la producción de tela es de $60 y el gasto es de $80, entonces se resta. Ahí tenemos un sistema de ecuaciones de dos incógnitas

Primera máquina	\$50n - \$60h = \$100
Segunda máquina	\$60n - \$80h = \$80

Ahora sí vamos a aplicar lo que son las matrices.

Vamos a extraer esta primera parte de aquí, la vamos a colocar en una matriz y le vamos a dar el nombre de C, a la matriz formada por 50, -60, 60 y -80, esa es la matriz C

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 50 & -60 \\ 60 & -80 \end{bmatrix}}$$

Pero ¿qué resulta? Hemos sacado las incógnitas, el número de metros de tela y las horas de producción. Esas incógnitas las ponemos también en forma de matriz. Si yo multiplico me va a quedar lo mismo 50n-60h y abajo 60n-80h

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 50 & -60 \\ 60 & -80 \end{bmatrix}} \times \underset{S}{\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}}$$

O sea que lo que hemos hecho es separar las incógnitas de los coeficientes, pero hemos armado otra matriz en la que se va a multiplicar y vamos a representar esa matriz con la letra S, de solución

Ya en una ocasión yo les decía que con las matrices, las letras que se utilizan generalmente son A, B, C, etc., pero cuando ya estamos resolviendo un problema utilizamos algo representativo de lo que queremos hallar. Por ejemplo, podemos utilizar la C como costos, la S de solución, en esas matrices. En la otra matriz vamos a poner nosotros las ganancias que queremos obtener, pero solamente le ponemos un signo igual. La ganancia de la primera máquina es de 100 y la ganancia de la segunda máquina es de 80, representamos esa matriz con la letra G de ganancia

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 50 & -60 \\ 60 & -80 \end{bmatrix}} \times \underset{S}{\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}} = \underset{G}{\begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}}$$

Entonces si se fijan aquí dice que C x S = G, pero yo no quiero hallar G, ¿Qué es lo que quiero hallar?

E: *S*

P: *Entonces, de esa fórmula, yo despejo la S y me queda que S = G/C, pero yo no lo voy a representar como fracción, sino como un producto. Al representar como un producto ¿qué me queda?*

E: $S = C^{-1} \times G$

P: *Si yo subo esa C que está en el denominador me va a quedar* C^{-1} *¿Y qué es la* C^{-1}*?*

E: *La inversa*

P: *La matriz inversa, o sea que matemáticamente se representa lo que queremos hacer realmente. Por eso, para nosotros hallar las incógnitas n* *y h ¿qué es lo que necesitamos conocer?*

Necesariamente tenemos que hallar la matriz inversa de C para después multiplicarla por G y el resultado nos va a dar el valor de las incógnitas n y h

¿Alguna pregunta antes de avanzar?

Para nosotros hallar la matriz inversa ¿qué debemos hacer primero?

E: *Hallar la adjunta y el determinante*

P: *Sí y es una matriz de orden 2. Ustedes para este ejercicio que es de aplicación pueden emplear el método que ustedes consideren necesario para hallar la respuesta, porque aquí no le dicen qué método aplicar*

En este caso yo aplicaré el método menor de la fila, hallaremos la adjunta de C. En la adjunta de C les recuerdo que la diagonal mayor se cambia de ubicación y la diagonal menor sólo se le cambia de signo

$$\text{Adj } C = \begin{bmatrix} -80 & 60 \\ -60 & 50 \end{bmatrix}$$

No se olvide que para nosotros saber si existe o no una matriz inversa ¿qué nos debe dar el determinante?

E: *Diferente de 0*

P: *Diferente de 0*

Si realmente el determinante es diferente de 0 entonces sí habrá matriz inversa

Aquí el determinante nos da -400, significa que sí hay matriz inversa.

Procedemos a hallar la matriz inversa dividiendo la adjunta para el valor que nos salió como determinante y de esta manera tenemos la matriz inversa de C

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/20 \\ 3/20 & -1/8 \end{bmatrix}$$

Ya entonces hemos hallamos la matriz inversa, pero arriba en la parte superior nos dimos cuenta que si despejábamos la S era igual a la inversa de C por la G, significa que tenemos que desarrollar ese producto

$$C^{-1} \text{ x } G = S = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El resultado que obtenemos de esta multiplicación nos da una matriz de 8 y 5, el 8 va a ser el número de metros de tela y 5 son las horas diarias que necesitamos

Así mismo se puede hacer la comprobación, en el primer sistema de ecuaciones nos tiene que dar 100 y en el segundo 80

Tienen que razonar para hacer el planteamiento, ya les estoy indicando que positivos son los valores que uno gana, lo que es ingreso, pero lo que es egreso, pérdida, eso es negativo, para poder plantear las matrices

Ahora, así mismo como hay ejercicios de aplicación de matrices de orden dos, también hay de orden 3

Tienen aquí otro problema

En la primera semana de trabajo en una pequeña empresa, 4 empleados hicieron 70 literas, las cuales se transportaron en 5 viajes. En la siguiente semana, 6 empleados hicieron 80 que se llevaron en 5 viajes. Y en la tercera semana 8 empleados hicieron 90 que se trasladaron en 6 viajes

¿Cuál debe ser el precio de venta de cada litera y cuál el salario semanal de cada empleado y cuánto debe pagarse por cada viaje de transporte para que la ganancia sea \$2700 en la primera semana, \$2600 en la

segunda y de $2480 en la tercera semana? Aquí nos piden determinar el precio de venta de cada litera, entonces la primera incógnita sería la p de precio de venta de cada litera y la segunda es el salario semanal, entonces la incógnita sería s del salario de cada empleado y después vamos a ver cuánto debe pagarse por cada viaje, ustedes pueden poner ahí la v de viaje o de viáticos ¿Quién planteó ya el ejercicio? Quiero que lo hagan ustedes Bien, les debo decir que la producción o fabricación de literas es lo positivo y lo negativo sería pagar a los empleados y también el costo de los viajes. ¿Ya está planteado? Lean bien, la producción de las literas va primero como lo positivo y lo demás es negativo

E: *¿Es así?*

P: *Usted ya lo tiene bien avanzado, excelente, usted ha utilizado otras incógnitas. Pero pienso que el orden si es importante, debe poner primero la inversa multiplicada por el valor de la ganancia. Muy bien Luis. Vamos a continuar, yo usaré estas incógnitas p=precio, s=salario y v=viaje Pero ustedes pueden utilizar las que crean convenientes Se forma un sistema de ecuaciones con tres incógnitas donde la primera semana la producción es de 70 literas pero hay un gasto de salario en 4 empleados y como son 5 viajes obviamente también es un gasto y la pregunta es ¿cuál debe ser el precio de venta de cada litera? ¿cuánto el salario de cada empleado? y ¿cuánto debe pagarse por viaje de transporte para que la ganancia sea en la primera semana $2700, en la segunda semana $2600 y en la tercera semana $2480?. Entonces para la segunda y tercera semana también planteamos las ecuaciones.*

Primera máquina	$70p - 4s - 5v = \$2700$
Segunda máquina	$80p - 6s - 5v = \$2600$
Tercera semana	$90p - 8s - 6v = \$2480$

Formamos las matrices respectivas y tomamos los coeficientes, independientemente de las incógnitas. Sigo yo manteniendo la C de costos, la S de solución y la G de ganancia, pero esta p, s y v correspondiente a las tres incógnitas de precio, salario y viáticos los coloco en forma de matriz. También ponemos como matriz los valores 2700, 2600 y 2480

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 70 & -4 & -5 \\ 80 & -6 & -5 \\ 90 & -8 & -6 \end{bmatrix}} \; X \; \underset{S}{\begin{bmatrix} p \\ s \\ v \end{bmatrix}} = \underset{G}{\begin{bmatrix} 2700 \\ 2600 \\ 2480 \end{bmatrix}}$$

Entonces tenemos que CxS es igual a G, pero yo necesito hallar S, al despejar me va a quedar S=G/C, la C la pasamos al numerador y nos queda $C^{-1}xG$ Para hallar la S de la solución tenemos que hallar la inversa de C y pueden utilizar ustedes el método que más fácil se les haga. En este caso, usaremos el menor de la fila. Hallemos el valor del determinante, yo he tomado la primera fila y la primera columna, entonces el cofactor se me hace 70 y queda lo que está expuesto allí. Después tomo el 4 pero ustedes saben que esto está en forma alternada, positivo, negativo, positivo

$$|C| = 70 \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} +4 \begin{vmatrix} 80 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 80 & -6 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}$$

Al resolver nos va a dar un valor positivo de 100. Sea positivo o negativo *no importa, lo que importa es que sea un valor diferente de 0 para que la matriz tenga inversa Así mismo con los cofactores vamos a hallar los valores de la adjunta*

$$Cof(1,1)= \begin{vmatrix} + & \\ -6 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} \quad Cof(1,2)= \begin{vmatrix} - & \\ 80 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix} \quad Cof(1,3)= \begin{vmatrix} + & \\ 80 & -6 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}$$

$$Cof(2,1)= \begin{vmatrix} - & \\ -4 & -5 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} \quad Cof(2,2)= \begin{vmatrix} + & \\ 70 & -5 \\ 90 & -6 \end{vmatrix} \quad Cof(2,3)= \begin{vmatrix} - & \\ 70 & -4 \\ 90 & -8 \end{vmatrix}$$

$$Cof(3,1)= \begin{vmatrix} + & \\ -4 & -5 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} \quad Cof(3,2)= \begin{vmatrix} - & \\ 70 & -5 \\ 80 & -5 \end{vmatrix} \quad Cof(3,3)= \begin{vmatrix} + & \\ 70 & -4 \\ 80 & -6 \end{vmatrix}$$

La matriz de cofactores sería

$$Cof\,(C) \begin{bmatrix} -4 & 30 & 100 \\ 16 & 30 & 200 \\ -10 & -50 & -100 \end{bmatrix}$$

Aquí ya no ubicamos el valor de la intersección con las columnas, solamente aplicamos el signo, que si 1+1 da un número par entonces el resultado en este caso no cambia de signo queda -4. Pero si yo tengo 1+2 nos da una cantidad impar, entonces allí sí se cambia el signo Y así sucesivamente

E: *Cuando es cofactor impar ¿se modifica el signo del resultado?*

P: *Sí se modifica el signo del resultado, por ejemplo, yo tengo aquí 24-40* (segunda fila primera columna) *me debe dar una cantidad negativa -16, pero esto de aquí corresponde a la fila 2 columna 1, 2+1 =3, es número impar, se modifica el signo del resultado*

E: *Cuando es par ¿se mantiene?*

P: *Cuando es par se mantiene el resultado. Mire aquí por ejemplo nos da -10, no se modifica el signo porque al sumar el cofactor de la fila con la respectiva columna* (tercera fila primera columna*) nos da un número par, se conserva el signo en -10 Entonces, para hallar la adjunta de C, ¿qué es lo que se hace?*

E: *La traspuesta*

P: *Sí la traspuesta de la matriz de cofactores*

$$Adj\,(C) = \begin{bmatrix} -4 & 16 & -10 \\ 30 & 30 & -50 \\ -100 & 200 & -100 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a hallar la matriz inversa C^{-1}, es igual a todos los valores de la adjunta dividida para el determinante Entonces tenemos que la inversa está constituida por los valores

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1/25 & 4/25 & -1/10 \\ 3/10 & 3/10 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora para hallar nosotros el valor de S, ¿qué tenemos que hacer?

E: *Multiplicar el valor de la inversa de C por G*

P: *Exacto*

$$C^{-1}xG = \begin{bmatrix} 60 \\ 350 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ok, entonces con eso ya tenemos la respuesta de las incógnitas verdad, donde 60 es el precio, 350 es el salario y 20 es lo que se debe ocupar en viaje, en viático

Reemplace en cualquiera de las ecuaciones y tiene que satisfacer a la ecuación

ANEXO 16. Entrevista 3 realizada a Carlos

1. **Según su criterio, ¿cómo se aprende en esta asignatura (Álgebra Lineal)?**

Realmente Álgebra Lineal es una de las ramas de las matemáticas y la matemática es una ciencia exacta, hay que razonar muchísimo porque no podemos aprendernos de memoria, los procedimientos no podemos aprenderlos de memoria para hallar un resultado sino que debemos razonar porque un mismo ejercicio lo podemos desarrollar con diferentes procedimientos y eso es lo que nos debe quedar a nosotros claro. Entonces nosotros debemos aprender el Álgebra Lineal practicándola, con la práctica adquirimos el aprendizaje porque si lo hacemos solamente una vez un ejercicio y creemos que ya lo sabemos todo nunca vamos a sentir que hemos aprendido, en el momento que nos vuelvan a poner otro ejercicio ya creemos que sabemos y nos damos cuenta de que no sabemos nada, eso es todo, es práctica.

2. **¿Cómo cree que se aprende Matrices?**

Es el mismo caso, debemos de tener muy en claro que es lo que queremos hallar, cuando hablamos de matrices específicamente hablamos de variables y son procedimiento diferentes para hallar las variables cuando aplicamos las matrices y eso es muy importante y darnos cuenta sus diferentes aplicaciones, podemos calcular áreas, saber para qué las podemos aplicar.

3. **¿Cómo planifica usted su clase?**

En primer lugar sigo el método que va desde lo inductivo a lo deductivo, ejercicios sencillos que el alumno se vaya familiarizando con la forma de resolver los ejercicios y les voy poniendo más complicado y cambiando los sistemas de resolución para que ellos vayan demostrando sus habilidades.

4. **¿De dónde extrae usted las actividades (ejemplos, ejercicios, tareas) que usted emplea en sus clases?**

De diferentes libros que sean de fácil acceso a ellos o yo les proporciono el material que yo creo que es más fácil para que ellos puedan familiarizarse con los ejercicios.

5. **Para explicar el producto de matrices por un escalar, el producto de dos matrices o el cálculo de sistemas de ecuaciones lineales con matrices usted**

emplea ejemplos prácticos, es decir que representen alguna situación y no sólo elementos de la matriz que hay que multiplicar, ¿Por qué emplea este tipo de ejemplos? ¿Qué potencialidad tienen para explicar ese contenido?

Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés.

6. **¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer los estudiantes al realizar el producto de matrices?, ¿Por qué cree que es importante definir las dimensiones de las matrices?**

Lo primero que deben tener muy claro los alumnos cuando estudian las matrices es aprender y tener bien claro cuáles son las filas, cuáles son las columnas, el orden que representan y el orden que debe llevar para multiplicar, para sumar, tener muy claros esos conocimientos que son conceptos.

7. **¿Cómo fundamentaría usted el algoritmo del producto de dos matrices, es decir, se ha planteado usted el por qué se hace y/o utiliza así dicho algoritmo? ¿Y en el caso de la multiplicación por bloques?**

Hay inclusive problemas de aplicación en los que se demuestra por qué se realiza el producto de una matriz, que si tenemos nosotros por decirle algo que unos coches circulan y son de tal modelo y queremos poner que los coches circulan en base a la cantidad de gasolina, entonces al realizar el producto de las matrices, nosotros tenemos como resultado final eso, o sea si nos ponemos nosotros a cambiar, en vez de ser AxB y CxD, podemos poner números que representen cantidades reales para llegar a resoluciones reales, así nos damos cuenta la utilidad que tiene la multiplicación de matrices.

8. **Tomando como base un episodio, usted en sus clases ¿Puede detectar las dificultades de un estudiante en particular? ¿Cómo?**

En realidad sí, normalmente cuando los jóvenes veo que tienen problemas en resolver unos ejercicios, esos ejercicios son los que les pongo siempre en las evaluaciones para que se den cuenta de que si tienen dificultades tiene que aprender, porque no les voy a poner los ejercicios que se les hicieron fáciles en el momento de la clase, les pongo siempre los ejercicios que se les complicaron durante la clase en la evaluación para ver si estudiaron. Y si no estudiaron, en la clase hacemos la corrección de las evaluaciones para ir viendo justamente en qué fallaron.

9. **De acuerdo a las dificultades de aprendizaje detectadas en los estudiantes, ¿Crea usted contextos específicos de aprendizaje? Cite un ejemplo**

No, debiera hacerlo pero inclusive existen las horas de tutoría, pero ningún alumnos las utiliza, o sea, ellos debieran acudir a uno porque tenemos esas horas inclusive en el distributivo (asignadas en sus actividades) pero ellos a pesar de que les pido que acudan para ahí fortalecer las clases no asisten. Es muy raro que los chicos asistan y los que normalmente lo hacen no son los que tienen dificultades en clases, son los que sí saben y quieren saber más. ¿Sabe por qué? Porque ahí se comprueba que el desconocimiento de las cosas hace creer a las personas que saben mucho pero entre más saben algo creen que saben menos, se cumple eso.

10. **Generalmente el producto de matrices no es conmutativo. ¿Conoce usted casos donde el producto de matrices sí es conmutativo? Cite ejemplos**

No, ni siquiera me he puesto a darme cuenta de eso.

11. **¿Por qué cree que es importante la notación en matemáticas? ¿Qué papel le da usted a la notación en sus clases?**

La notación en matemáticas es importante porque a veces uno puede personalizar esa nomenclatura, si utilizamos una multiplicación en la que queremos convertir el recorrido de los buses, de acuerdo a los galones de gasolina que consume, entonces yo tengo que utilizar la nomenclatura, si digo galones pongo la g. Podemos personalizar, que no crean que es solamente una letra establecida podemos nosotros también poner una letra. Si queremos convertir, que se yo, que los obreros usan determinadas cantidades de tela, entonces le asignamos una letra a cada cosa, es importante que todos sepan cómo manejar y personalizar la nomenclatura.

12. **¿Cree usted que los estudiantes tienen un aprendizaje significativo si son ellos mismos quienes preparan un contenido matemático (producto de matrices, cálculo de determinante, resolución de sistemas de ecuaciones)? Explique por qué**

Sí, pero existe un riesgo de que se hagan memoristas y que solamente se aprendan para el momento de la exposición, pero realmente no lo han hecho razonando. Son expertos para memorizar, hacen exposiciones increíbles, pero en el momento que yo les pongo un ejercicio diferente pero relacionado al mismo tema que ellos han expuesto, ya no lo pueden resolver porque solamente han aprendido de memoria, no razonaron cómo se resolvía el ejercicio. Por eso es que sí es importante de todas formas la guía. Es bueno para que manejen las herramientas de investigación, pero es importantísimo que igual uno sirva de guía, pero le cuento que cuando yo les daba clases estos grupos eran excelente cuando preparaban las clases, yo les ponía otros ejercicios cambiados y ellos los resolvían, los casos que te estoy comentando son de ahora que me he encontrado con chicos que solamente se aprenden lo que van a explicar, yo les pongo otros ejercicios relacionados a lo mismo y ya no pueden resolver. No todos los casos son lo mismo, sí es buena la metodología para cambiarles la mentalidad de memorista a que se conviertan en personas que reflexionen, que razonen, ya depende de nuestra guía.

13. **¿Cree usted que los estudiantes tienen dificultades para realizar operaciones elementales entre fila al resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss Jordan por ejemplo? ¿A qué se debe? ¿Qué hace usted frente a esas dificultades?**

Sí, hay dificultades y eso se debe a que no son organizados. Las matemáticas necesitan llevar un orden, a veces piensan que con las matemáticas no se requiere ser disciplinado y organizado para resolución, entonces ponen los valores en diferentes lugares y después no saben qué cantidad le corresponde a una cosa u otra, es el orden, se confunden más que nada cuando son de tercer orden las matrices y las vamos a resolver con Gauss o Gauss Jordan, no porque sea difícil sino que ellos se confunden porque no están siendo ordenados en la resolución. Por eso cuando yo les decía que pongan una flecha o la notación les servía como guía para hacerlo bien. Si van a utilizar las flechas en las operaciones elementales entre filas pues deberán utilizar flechas para todo porque si utilizan el signo igual ya están diciendo otra cosa. Cuando dicen que van a cambiar una fila por otra entonces tienen que poner es una flecha porque si le ponen el signo igual ya significa que están igualando esas cantidades y las van es a resolver. Por eso es importante la notación, el orden para poder llegar a los resultados sino nunca van a llegar a los resultados y otro detalle más, cuando ya terminan y no llegan al resultado correcto es el error más grande que quieran ir corrigiendo en el mismo ejercicio que han resuelto, tiene que tomar otra hoja y resolver nuevamente porque nunca van a encontrar el error y más bien van a perder tiempo, tiene que comenzar y hacer en orden y ahí llegan a la resolución correcta.

14. **¿Les explica usted la diferencia entre el método de Gauss y el método de Gauss Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo hace?**

Sinceramente no, nunca.

15. **El tema de matrices es parte del currículo establecido para alumnos de este nivel, ¿Considera usted en ocasiones la improvisación con los temas, de acuerdo a las necesidades de los alumnos o sigue el temario sin alteraciones?**

Sí es importante, inclusive a veces se les da una información que tal vez se les escapa, por ejemplo, se les hace complicación cuando tienen que sumar números fraccionarios, se olvidan hasta como se multiplica una cantidad por un número fraccionario. Cosas tan básicas hasta de primaria pero como no han ido practicando y utilizan mucho la calculadora, se olvidan cómo se resuelve algo tan básico como es una suma de fracciones o multiplicar una cantidad por 0, si multiplican ½ por 0 ponen 1/2 , se olvidan.

16. **¿Cree usted que es importante que un estudiante participe activamente mientras usted explica un contenido? ¿Por qué? ¿Realiza usted preguntas constantemente para que el estudiante se involucre en su explicación? Cite un ejemplo**

Para que no se distraigan y así yo puedo saber que están conectados con mi clase, porque puedo tenerlos yo en presencia pero realmente su mente está ausente. Entonces es importantísimo tenerlos activos, tanto haciendo ejercicios en la hoja como pasando a la pizarra a resolver, combinando las dos actividades porque pueden estar solo copiando en la hoja pero eso no significa que están ellos razonando ni pensando, solo copiando. Entonces si ellos salen a la pizarra ahí se dan cuenta de que estaban escribiendo por gusto.

17. **Para usted son muy importantes los ejemplos cuando explica una clase. Por tanto, ¿Cómo definiría usted una demostración matemática? Cite un ejemplo**

No, francamente no. Nunca me he planteado eso, pero cuando hablamos de demostración matemática yo entiendo así como demostración de fórmulas, por qué $A = B$ o por qué $A \neq B$. Demostrar aquello, como un teorema, sí lo he hecho pero no de esa manera, sino dándoles explicaciones que por qué aplicamos una cosa u otra, no podemos, por ejemplo llegar cuando el determinante es 0 no podemos continuar, no existe matriz inversa, entonces no tienen no necesidad de seguir resolviendo, ya basta con que calculen el determinante. Es importantísimo que resuelvan ciertas partes porque eso les va a ayudar a continuar o quedarse ahí.

ANEXO 17. Entrevista 4 realizada a Carlos

1. **¿Cómo enfocan la enseñanza del contenido de matrices?**

Un tema de aplicación, pertinente para los estudiantes de Ingeniería en Sistemas, se lo utiliza mucho en la programación.

2. **En base a la reflexión sobre su práctica docente, y en este caso referente a la enseñanza del contenido de matrices, ¿Qué considera usted que se podría mejorar?**

Emplear tal vez herramientas de software para que los alumnos practiquen utilizando la tecnología.

3. **¿Cómo definiría usted una oportunidad de aprendizaje?**

Existan permanentes capacitaciones de docentes para de esta manera siempre estar actualizado.

Y en el caso del estudiante, ¿Cómo definiría usted una oportunidad de aprendizaje para el estudiante? Los alumnos aprovechen que uno se esmera por dar la clase y más que nada si se está capacitando también uno, ya que socializamos lo que aprendemos.

4. **¿Cuáles son las dificultades más recurrentes en el aprendizaje del contenido de matrices?**

Realmente las matrices son sencillas, pero se les complica a los chicos cuando tienen números fraccionarios y cuando se aplican ciertos métodos que sirven para hallar variables de orden superior como el método de Gauss Jordan, eso se les complica un poco, porque son matrices más grandes con más elementos.

5. **Al momento de explicar una clase, ¿Considera usted a los estudiantes como un todo a quienes les explica el procedimiento para resolver un ejercicio? ¿Cree que es necesario conocer de antemano las características de cada estudiante y utilizar estrategias que permitan que su explicación sea clara para todos? ¿Por qué?**

Eso es básico, por eso es importantísimo al iniciar las clases con un curso determinado realizar una prueba de diagnóstico para definir cuál es el tipo de estudiante con el que uno cuenta, con qué grado de conocimiento vamos a trabajar con esos estudiantes, entonces en base a eso se trabajan no personalizado pero sí generalizado desde lo mínimo a lo más general, desde lo particular a lo general, no considerando como que todos saben, sino que partiendo desde los más sencillo para llegar a lo más complejo.

6. **¿Aplica variadas estrategias de enseñanza y actividades congruentes con la complejidad del contenido y en este caso, de las matrices? Explique con un ejemplo concreto**

Sí inclusive de acuerdo al grupo de estudiantes con el conocimiento que tengan me ingenio ejercicios que podrían ser de más fácil resolución.

Con un ejemplo concreto: Por ejemplo, antes de entrar al estudio de las matrices hay que enseñarles cómo encontrar el determinante, más que nada de orden 2 que es lo básico, se trabaja con el determinante de orden 2 y después se les demuestra que el determinante servirá para hallar las incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones, entonces si es de orden 2 es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: x e y, ya como se calculó el determinante entonces podemos aplicar la Regla de Cramer para hallar las incógnitas. Entonces se les hace más fácil, que entrar directamente a encontrar el valor de las incógnitas sin antes haber estudiado el determinante.

7. **Usted da clases en una carrera X y los programas de estudio (sílabos) ya suelen estar establecidos, ¿Cree usted que en ocasiones es necesario modificar los temas para que haya una secuencia entre temas anteriores y posteriores? ¿Lo considera usted para sus clases?**

Es muy difícil ajustarse porque si ya se hace una prueba de diagnóstico nos podemos dar cuenta muchas veces de que existen vacíos, entonces es importantísimo antes de entrar al tema que ya está programado en el sílabo darle una introducción a los conocimientos básicos que deben tener para poder trabajar con lo que se ha programado para la clase. Eso sucede mucho, por ejemplo, cuando vemos ecuaciones diferenciales que es una combinación de lo que son las derivadas y las integrales y el estudiante olvida, más aún si lo ha visto en distinto semestres, entonces hay que hacerles un repaso casi de dos meses de lo que son las derivadas inclusive las derivadas de orden superior, las integrales.

Lo básico aquí en el estudio de las matrices es tener conocimientos claros de Álgebra, por eso se les complica un poco cuando trabajamos con fracciones porque se les ha olvidado como se suman los quebrados, entonces hay que hacerles ese repaso.

¿Eso afecta poder cubrir el programa ya establecido?: No, porque se hace simultáneamente, a medida que van resolviendo ejercicio siguiendo los procedimientos para hallar los valores de las incógnitas se les va recordando cómo se hace la suma algebraica de números fraccionarios, una retroalimentación.

8. **¿Relaciona usted los contenidos de su asignatura con los contenidos de las demás asignaturas del módulo de manera que pueda incluir explicaciones, ejercicios, problemas o un tema (s) que sean de utilidad para alguna de las demás asignaturas del módulo? Si lo ha hecho, explicar ¿Cómo?**

Claro, sí porque por ejemplo, si nosotros estamos buscando el valor de las incógnitas, en física también existen incógnitas, se pueden aplicar matrices en ejercicios de física, si hay dos sistemas de ecuaciones se puede aplicar. Con las variables que se utilizan en física: tiempo, velocidad se puede trabajar también.

¿Usted lo hace conscientemente?: Bueno no, ya cuando se ve la necesidad de que se den cuenta los estudiantes de que sí existe relación de una unidad con otra, que a veces pareciera que es algo aislado pero se le demuestra que no lo es. Inclusive a veces hago ejercicios de aplicación de la vida real para que se demuestre.

9. **¿Le parece importante tomar apuntes en las clases?**

Yo les hago copiar la clase como una manera de tenerlos ocupados, además, la memoria es muy frágil y si copian ellos pueden después revisar sus apuntes y recordar cosas que suelen olvidar.

ANEXO 18. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Carlos (Año 1 de observaciones)

Sesión 1 (11-11-2011): Clasificación y suma de matrices

Descripción:

Episodio 1: Clasificación de matrices

Esta sesión de clase inicia con la explicación del profesor acerca de la clasificación de las matrices [S1.E1.A1.L2-3[9]: *"Las matrices se las considera como un dato matemático y que se pueden clasificar según el tamaño y su forma"*]. Prosigue con la clasificación de matrices según su tamaño, escribiendo ejemplos que le sirven para definir las características de una matriz rectangular, cuadrada, columna (vector columna) y fila (vector fila) [S1.E1.A1.L14-30: *"Por la distribución de los elementos de esta matriz, nos podemos dar cuenta de que es diferente el número de filas y el número de columnas, por lo tanto, a esta matriz se la conoce como rectangular (...) Podrán darse cuenta que esta matriz de orden 3x3 tiene el mismo número de filas y de columnas, significa entonces (...) Que esta matriz es cuadrada, muy bien (...) A esta matriz por la distribución de sus elementos se le conoce con el nombre de matriz columna o vector columna de cuatro filas. Estas matrices tienen una sola columna y pueden tener cualquier número de filas (...) Entonces esta matriz que tiene una sola fila y cinco columnas se le da el nombre de matriz fila o vector fila de cinco columnas"*]. Escribe varias matrices en la pizarra para que los estudiantes las clasifiquen según su tamaño.

En la segunda parte de este episodio, Carlos explica la clasificación de matrices según su forma [S1.E1.A1.L53: *"Ahora vamos a clasificar las matrices según su forma"*], para lo cual escribe ejemplos de matriz diagonal, unitaria, triangular superior, triangular inferior, y solicita a los estudiantes que se fijen en las características de cada una [S1.E1.A1.L55-86: *"¿Qué particularidad ven ustedes aquí en esta matriz? (...) Exacto, porque la mayoría de sus elementos son ceros, pero sin embargo, en la diagonal encontramos otros elementos diferentes de cero, entonces esta es una matriz diagonal (...) Muy bien, a esta matriz que tiene dispuestos de esta manera sus elementos se la conoce como matriz unitaria (...) A esta matriz que tiene ceros en la parte inferior y sus elementos de la parte*

[9] Siglas utilizadas para identificar la sesión de clases (S1), episodio (E1), año de obtención de información (A1) y líneas de transcripción (L2-3)

superior forman un triángulo, se le conoce como matriz triangular superior y la otra sería matriz triangular inferior"]. Escribe otros ejercicios para que los estudiantes clasifiquen matrices por su forma y tamaño.

Episodio 2: Suma de matrices

En el segundo episodio de la sesión de clase, Carlos indica a los estudiantes que la suma o resta de dos matrices se puede realizar si ambas son del mismo orden [S1.E2.A1.L99-101: *"Sólo se puede realizar la suma o resta de matrices siempre y cuando sean del mismo orden, pueden ser cuadradas, pueden ser rectangulares, lo importante es que las dos matrices sean del mismo orden"*]. Indica además, que en caso de que no tengan el mismo orden las matrices, habrá que verificar si se puede hallar la traspuesta de una de las dos para que puedan sumar [S1.E2.A1.L102-104: *"Usted puede tener dos matrices rectangulares, por ejemplo, de orden 2x3 y la otra 3x2, entonces habrá que hallar la traspuesta de una de las matrices para que se puedan sumar"*].

Para explicar el algoritmo de la suma de matrices, el profesor emplea un ejercicio de aplicación correspondiente a las pérdidas o ganancias de un agricultor que produce trigo, arroz, fríjol, maíz y café, en tres fincas, durante dos años consecutivos [S1.E2.A1.L107-112: *Yo les he dicho que las matrices son aplicadas en cualquier ciencia, en cualquier área, vamos a ver un ejemplo relacionado con la agricultura (...) Un agricultor posee tres fincas, cuyas pérdidas o ganancias medidas en toneladas en los dos últimos años, están relacionadas con las siguientes tablas"*].

Carlos elabora dos tablas y hace notar a los estudiantes que si se tratara de una matriz, estas tendrían el mismo orden y que se pueden sumar los elementos correspondientes [S1.E2.A1.L115-126: *"Entonces como decíamos solamente se puede hacer la sumatoria con matrices que tienen el mismo orden, obviamente si en las tres fincas tenemos ¿cuántos tipos de producción? (...) Cinco producciones, entonces ¿qué orden tendría una matriz formada por los elementos de esta tabla? (...) 3x5, serían tres filas y cinco columnas. Así mismo, para saber si hay ganancia o pérdida en el Año A con respecto al Año B, la otra matriz debe tener el mismo orden. . Y se cumple porque la producción en las fincas continúa para cinco productos"*].

Finalmente, el profesor explica cómo sumar ambas matrices [S1.E2.A1.L130-132: *"¿Qué elementos yo sumaría entonces? Serían los elementos que corresponden a fila 1 columna*

1 del Año A con los elementos del Año B de la fila 1 columna 1"]. Escribe una serie de matrices para que los estudiantes practiquen la operación aprendida e indica que en algunos de ellos deberán obtener la matriz traspuesta antes de sumar [S1.E2.A1.L145-151: *"Exacto, entonces si yo quiero sumar tengo que hallar la traspuesta (...) ¿Qué es matriz traspuesta? Es cuando las filas se convierten en columnas y las columnas se convierten en filas"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el primer episodio se evidencia el conocimiento del profesor con respecto a *Definiciones* de varias matrices, ya sea, por su tamaño o por su forma, empleando ejemplos concretos. En el caso de la clasificación de matrices por su tamaño, Carlos define las matrices rectangular, cuadrada, vector columna y vector fila. En el segundo caso, en la clasificación de matrices por su forma, define matriz diagonal, unitaria, triangular superior y triangular inferior [KoT-D-I2[10]. El profesor conoce la clasificación de matrices; KoT-D-I3. El profesor conoce la definición de matriz cuadrada; KoT-D-I4. El profesor conoce la definición de matriz rectangular; KoT-D-I6. El profesor conoce la definición de matriz triangular superior; KoT-D-I7. El profesor conoce la definición de matriz triangular inferior; KoT-D-I8. El profesor conoce la definición de matriz identidad o unitaria; KoT-D-I26. El profesor conoce la definición de matriz diagonal; KoT-D-I29. El profesor conoce la definición de matriz columna o vector columna; KoT-D-I30. El profesor conoce la definición de matriz fila o vector fila].

En el episodio dos, se refleja el conocimiento de Carlos sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)* debido a que el profesor expresa que para sumar o restar dos matrices estas deberán ser del mismo orden, y que en algunos casos se podrá trasponer una de las matrices para que tengan las misma dimensiones y se puedan sumar. Cuando explica el algoritmo de la suma de matrices, el profesor muestra conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*. Así mismo, vemos que hay conocimiento sobre *Definiciones* en este episodio, cuando explica lo que es una matriz traspuesta [KoT-P2-I1. El profesor conoce que se requiere que las dimensiones de las matrices sean iguales para efectuar la suma;

[10] Siglas utilizadas para identificar el subdominio (KoT), categoría (D) e indicador de conocimiento (I1).

KoT-P1-I1. El profesor conoce el algoritmo para sumar matrices; KoT-D-I10. El profesor conoce la definición de matriz traspuesta].

Evidenciamos el conocimiento del profesor sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, en este caso de la suma de matrices, cuando emplea un ejercicio de aplicación para explicar el algoritmo de la suma de matrices, el cual aunque es ficticio sirve para que los estudiantes noten que la suma de matrices se puede emplear en situaciones de la vida real [KoT-F2-I7. El profesor conoce que a través de la aplicación de la suma de matrices se puede encontrar la solución de problemas matemáticos ficticios o de la vida real].

Sesión 2 (18-11-2011): Producto de un escalar por una matriz, producto de matrices y producto de matrices por bloques

Descripción:

Episodio 1: Producto escalar de matrices

En el primer episodio de la sesión dos, Carlos enseña el producto de un escalar por una matriz, utilizando para ello un ejemplo de aplicación, que consiste en representar en una tabla la producción de repuestos de un taller, de la cual se desea saber su variación en el lapso de 8 horas [S2.E1.A1.L7-16: *"Bien, vamos a tener como ejemplo práctico la producción de repuestos en distintos talleres y en el lapso de ocho horas, entonces simplemente se multiplica cada una de las producciones por las ocho horas. Eso significa la multiplicación de un producto escalar por una matriz (...) Con este ejemplo ven una vez más las aplicaciones de las matrices (...) A partir de esta tabla podemos hallar una matriz 8P en la que vamos a multiplicar simplemente cada una de las producciones por el número 8"*]. Escribe varias matrices para que los estudiantes practiquen la multiplicación de una matriz por un escalar, combinado con suma y resta de matrices.

Episodio 2: Producto de matrices

El profesor aborda la multiplicación de matrices empleando otro ejercicio de aplicación, cuyos datos se constituyen en dos tablas [S2.E1.A1.L46-51: *"Siempre yo les pongo un ejemplo práctico, de tal manera, que ustedes se den cuenta cuál es su aplicación: En una ciudad la cantidad de vehículos por modelo en cada ruta de transporte urbano está* *indicado por la tabla T (...) En cada día de la semana, el consumo de galones de gasolina por modelo está indicado en la tabla G"*].

Hace notar a sus estudiantes las dimensiones en caso de que formen matrices con los elementos de las tablas [S2.E1.A1.L52-57: *"Si se podrán dar cuenta que tenemos aquí dos tablas que indican diferentes situaciones, la primera son diferentes rutas que recorren cuatro modelos de autos (3x4), mientras que la segunda tabla está demostrando el consumo de gasolina por cada uno de los modelos durante los cinco días de la semana (4x5). Si forman matrices, ¿estas van a ser iguales o no?"*]. Con lo anterior crea un contexto para que los estudiantes noten la diferencia entre sumar o restar y multiplicar matrices, indicando que para realizar el producto de dos matrices es necesario que coincidan el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda [S2.E1.A1.L59-64: *"No, sin embargo, eso no es lo que importa en este caso, a diferencia de la suma o resta, que es necesario que sean iguales las matrices con respecto al orden. En cambio, aquí la disposición que tienen es la correcta para poder hacer la multiplicación porque la multiplicación se hace las filas por las columnas, entonces van a coincidir el número de columnas de una matriz con el número de filas de la otra"*].

Procede a explicar cómo funciona el algoritmo para multiplicar dos matrices [S2.E1.A1.L68-82: *"Para el día lunes tenemos que multiplicar el elemento que está en la primera fila primera columna de la tabla T por el elemento que está en la primera fila primera columna de la tabla G. Luego, el segundo elemento de la misma fila se multiplica por el elemento de la segunda fila primera columna y se suma al anterior, y así sucesivamente. Fíjese en el detalle, todos los elementos de esta primera fila* (tabla T) *los multiplicamos por los elementos de esta primera columna* (tabla G) *y los sumamos entre sí de esta manera (...) Ahora esta misma fila por la segunda columna y los resultados van en el día martes. Ahí está planteado como deben ustedes ir multiplicando cada uno de los valores y sumándolos también, respectivamente, para poder tener el resultado final del consumo de gasolina en cada ruta por cada día de la semana"*].

Episodio 3: Producto de matrices por bloques

En el tercer episodio, Carlos explica la utilidad de la multiplicación de matrices por bloques y cómo realizarla, a partir de la matriz A(4x4) y la matriz B(4x3) [S2.E1.A1.L86-130: *"La multiplicación por bloques significa o sirve también para poder multiplicar matrices muy grandes, es decir, en este caso por ejemplo procedemos a dividir en bloques* *de esta manera, y le ponemos en cada bloque una letra, ya no pondré las letras A y B sino C, D, E, F, G, H, I, J (…)Y realizamos la multiplicación respectiva, solamente con este artificio que hicimos aquí, entonces, ¿cómo procedo? (…) Y luego, cada uno de estos valores los vamos a multiplicar por separado. Entonces remplazamos, ¿qué tenemos que hacer aquí? Multiplicar la C por la G, entonces ¿cuáles son los valores de C? (…) Exacto 1, -1, 2 y 0 por ¿cuáles son los valores de G? 1, 4, 2 y -1, y esto debemos sumarlo a la multiplicación de D, ¿cuánto vale D? 2, 4, 4, 5 por ¿cuánto vale I? -3, 2, 0 y 1 (…) Ahora sume CxG + DxI (…) Ahora si pasen dos más, ahora vamos a hacer CxH + DxJ (…) El que sigue, usted va a hacer ExG y FxI (…) Karen, ya le toca ExH + FxJ (…) Ya, hasta ahí, AxB nos da (…) Entonces con eso se dan cuenta como se multiplica, las matrices por bloques"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Hay que destacar el conocimiento del profesor sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, ya que explica el producto de un escalar (episodio 1) por una matriz y el de dos matrices (episodio 2) empleando ejemplos de aplicación, que si bien son ejercicios con datos ficticios, representan situaciones que pueden darse en la vida real. Por ejemplo, en el primer episodio explica el producto de un escalar por una matriz utilizando un ejemplo que representa la producción de repuestos en un lapso de 8 horas y en el segundo episodio, el algoritmo de la multiplicación de matrices es explicado con un ejercicio que representa las rutas que recorren distintos modelos de coches y el consumo de gasolina en cinco días de la semana. El profesor indica que a través de este ejemplo enseña no sólo el algoritmo, sino su utilidad [E3.P5[11]: *"Hay inclusive problemas de aplicación en los que se demuestra por qué se realiza el producto de una matriz, que si tenemos nosotros por decirle algo que unos coches circulan y son de tal modelo y queremos poner que los coches circulan en base a la cantidad de gasolina, entonces al realizar el producto de las matrices, nosotros tenemos como resultado final eso, o sea si nos ponemos nosotros a cambiar, en vez de ser AxB y CxD, podemos poner números que representen cantidades reales para llegar a resoluciones reales, así nos damos cuenta la utilidad que tiene la multiplicación de matrices"*] [KoT-F2-I8. El profesor conoce que a través de la aplicación del producto de un escalar por una matriz se puede encontrar la solución de problemas

[11] Siglas utilizadas para identificar la entrevista (E3) y la pregunta (P5)

matemáticos ficticios o de la vida real; KoT-F2-I9. El profesor conoce que a través de la aplicación del producto de dos matrices se puede encontrar la solución de problemas matemáticos ficticios o de la vida real].

Carlos muestra conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, cuando explica en el primer episodio cómo multiplicar un escalar por una matriz; en el segundo episodio, el algoritmo para multiplicar dos matrices y, en el tercer episodio, la multiplicación por bloques [KoT-P1-I2. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar un escalar por una matriz; KoT-P1-I3. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar matrices].

Así mismo, evidencia conocimiento sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)* al explicar, en el segundo episodio, la condición requerida para multiplicar dos matrices, es decir, que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. En el episodio tres, pensamos en este conocimiento cuando el profesor hace explícito que la multiplicación de matrices por bloques es útil cuando las dimensiones de estar son mayores [KoT-P2-I2. El profesor conoce que para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz 1 sea igual al número de filas de la matriz 2; KoT-P2-I5. El profesor conoce que la multiplicación de matrices por bloques constituye un artificio matemático que se puede utilizar para multiplicar matrices de dimensiones mayores].

Por otra parte, en los episodios uno y dos está presente el conocimiento del profesor sobre *Registros de representación*, debido a que los elementos numéricos de los ejemplos utilizados, tanto para explicar el producto de un escalar por una matriz, como el de dos matrices son presentados en tablas, para posteriormente hacer notar a los estudiantes que con dichos elementos numéricos se puede formar una matriz [KoT-RR-I1. El profesor conoce cómo se denotan las matrices].

Sesión 3 (29-11-2011): Cálculo del determinante 3x3 por regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer

Descripción:

Episodio 1: Cálculo del determinante 3x3 por regla de Sarrus y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer

Carlos inicia el episodio 1 de esta sesión de clase enseñando el cálculo del determinante por la regla de Sarrus con una matriz 3x3 [S3.E1.A1.L1-7: *"Antes de empezar a calcular el sistema de ecuaciones les voy a explicar cómo funciona este método de Sarrus, para recordarles cómo funciona. Este método consiste en hallar el valor del determinante aumentándole en la parte inferior las dos primeras filas. Se le aumenta las dos primeras filas con su respectivo signo, después se procede a multiplicar cruzado. De izquierda a derecha se conserva el signo. En cambio, de derecha a izquierda se multiplica y se cambia el signo"*].

La explicación anterior es una introducción para explicar la resolución de un sistema de ecuaciones lineales 3x3 por la regla de Cramer, el profesor escribe un sistema y con la intervención de los estudiantes encuentra el valor de las incógnitas x, y, z [S3.E1.A1.L13-36: *"Para resolver el sistema de ecuaciones aplicamos la regla de Cramer que consiste en tener valores en el numerador y valores en el denominador, entonces los ubicamos de tal manera que si yo quiero hallar x, en la ubicación de los valores de x van a ir los valores conocidos o términos independientes, 4, -5, 10 porque lo que voy a hallar es x, ubico los de y, luego los de z. Abajo, en el denominador, ubicamos todos los coeficientes de las ecuaciones. Aplicando el método de Sarrus aumentamos las dos primeras filas al final de las matrices (...) Entonces lo que vamos a hallar es el valor de y, mantengamos los coeficientes de x, como lo que vamos a hallar es y no ponemos los coeficientes de y sino los valores conocidos, después ubicamos los coeficientes de z. Acá abajo ubicamos todos los coeficientes de las ecuaciones. El determinante del sistema ya lo calcularon cuando hallaron el valor de x (...) Calculamos el valor de z"*].

Episodio 2: Cálculo del determinante 3x3 por el método menor de la fila y cofactores y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer

El episodio 2 consiste también en resolver un sistema de ecuaciones lineales por la regla de Cramer, calculando el determinante de una matriz 3x3 por el método menor de la fila (menor y cofactores) [S3.E2.A1.L37-61: *"Bien vamos a hallar las incógnitas de un sistema de ecuaciones aplicando otro método para hallar el determinante (...) Vamos primero a aprender el método para después resolver el sistema de ecuaciones, tenemos esta matriz. El método consiste en hallar el valor del determinante, ¿cómo se resuelve?,* *de la siguiente manera, este valor inicial que está aquí* (refiriéndose al -1 de la primera fila primera columna) *lo ponemos como cofactor, tapamos todo lo que está en la primera fila y en la primera columna, solo ubicamos los valores que están descubiertos. Después ubicamos el segundo número de la fila* (primera fila) *pero con el signo cambiado y así mismo tapamos la primera fila y la segunda columna y ubicamos sólo los números que están descubiertos, ¿cuáles son? (...) Y después ubicamos como cofactor el último término de la fila sin cambiar el signo, los signos van alternados (...) Ahora procedemos a hallar los determinantes. Para hallar los determinantes multiplicamos cruzado y el segundo término de derecha a izquierda se cambia de signo"*].

El profesor hacer notar a los estudiantes que el determinante del sistema de ecuaciones es el mismo, tanto en el cálculo "x", como de "y" y "z" al aplicar la regla de Cramer [S3.E2.A1.L81-83: *"Cuando ya ustedes calculen "y", la parte de abajo o el determinante del sistema, ese resultado les sirve para todas las incógnitas, solamente tienen que resolver la parte de arriba"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

Carlos evidencia conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al explicar el cálculo del determinante de una matriz 3x3 por dos métodos: regla de Sarrus (episodio 1) y menor de la fila (episodio 2), así como al resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando la regla de Cramer. Adicionalmente, pensamos en indicios de su conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)* dentro del propio Álgebra, ya que explica la regla de Sarrus y el método menor de la fila (cálculo del determinante) para que los estudiantes se den cuenta de que es indispensable en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por la regla de Cramer [KoT-P1-I7. El profesor conoce cómo calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus; KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I8. El profesor conoce cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer; KoT-F2-I3. El profesor conoce que el cálculo del determinante de una matriz se puede aplicar en la resolución sistemas de ecuaciones lineales].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Pensamos en indicios del conocimiento del profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* cuando el profesor explica el cálculo del determinante por la regla de Sarrus y método menor de la fila, ya que al parecer sabe que los estudiantes se pueden equivocar por no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan. Esto nos conduce a una oportunidad de investigación sobre el conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje de las matemáticas [KFLM-FDA-I5. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando la regla de Sarrus, por no tener en cuenta que los productos de la diagonal principal se suman y los de la diagonal secundaria se restan; KFLM-FDA-I8. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el determinante de una matriz aplicando método del menor y cofactores por no tener en cuenta que el producto de la diagonal secundaria se resta].

Sesión 4 (13-12-2011): Matriz inversa 2x2 y 3x3

Descripción:

Episodio 1: Matriz inversa 2x2

En el primer episodio, Carlos procede a explicar cómo obtener la inversa de una matriz de orden dos aplicando $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$ e indicando cómo calcular la matriz adjunta y el determinante [S4.E1.A1.L1-14: *"Para hallar nosotros la matriz inversa de orden dos primero tenemos que hallar la matriz adjunta y dividir cada uno de los elementos de la matriz adjunta para el determinante de la matriz original (...) Vamos a escribir la adjunta, formamos otra matriz, la adjunta de J, intercambiamos los elementos de la primera diagonal y en la segunda diagonal solamente cambiamos los signos (...) Después hallamos el determinante de J (...) ¿Cuál sería el valor del determinante? Multiplicamos cruzado (...) Para hallar la inversa de J tenemos que es igual a la matriz adjunta dividida para el determinante"*].

El profesor indica cómo comprobar que la matriz inversa obtenida es la correcta [S4.E1.A1.L18-20: *"Ahora, para comprobar si está bien esa matriz inversa* *multiplicamos la matriz original por la inversa y nos tiene que dar la matriz identidad* $JxJ^{-1} = I$ *(...) La matriz identidad también se llama matriz unitaria"*]. Además, menciona que una matriz tiene inversa cuando su determinante no es igual a cero [S4.E1.A1.L24-26: *"Existe matriz inversa solo cuando el valor del determinante es diferente de cero, entonces, si ustedes calculan el determinante y es cero ya no existe la matriz inversa"*]. Carlos finaliza este episodio escribiendo varias matrices 2x2 para que los estudiantes calculen la matriz inversa.

Episodio 2: Matriz inversa 3x3

En un segundo episodio de esta misma sesión de clase, Carlos procede a explicar cómo calcular la matriz inversa de orden 3, obteniendo primero el determinante por el método del menor de la fila que le indicará si efectivamente la matriz en mención tiene o no inversa [S4.E2.A1.L29-38: *"Ahora trabajemos con la matriz inversa de orden tres (...) Bueno para saber si podemos llegar a la inversa hallamos primero el determinante. Tomamos la primera fila y la primera columna y escribimos los elementos, primera fila segunda columna, primera fila tercera columna (...) El determinante de Y nos da 25, un número diferente de 0 por lo tanto sí hay matriz inversa"*].

Enseguida, indica que van a encontrar la matriz de cofactores [S4.E2.A1.L39-48: *"Ahora vamos a hallar los cofactores, pero para hallarlos no vamos a poner número como en el caso del determinante, sino que vamos a poner solamente el signo. Si la suma de i + j es igual a número par esto es positivo. Si la suma de i + j es igual a número impar esto es negativo. Entonces 1 +1 = 2, es un número par, entonces el signo es positivo, sigo fila 1 columna 1, ¿cuáles son los elementos que quedan? (...) Sí está bien. Ahora, 1+2, entonces el signo es negativo, fila 1 columna 2 y así"*]. A partir de la matriz de cofactores obtiene la matriz adjunta [S4.E2.A1.L57-58: *"Ahora hallamos la adjunta de Y, es la traspuesta de la matriz de los cofactores"*] y finalmente llega a la inversa [S4.E2.A1.L59-60: *"Para hallar la inversa, es igual a la adjunta de Y sobre el determinante de Y, puede simplificar también"*]. Carlos escribe cuatro matrices (D, E, F y G) para que los estudiantes practiquen y encuentran sus inversas.

Episodio 3: Matriz inversa 2x2 por el método de Gauss Jordan

En este episodio, el profesor procede a explicar otra forma de obtener la inversa de una matriz 2x2, por medio del método de Gauss Jordan [S5.E3.A1.L72-90: *"Vamos a ver la* *matriz inversa de orden dos pero por otro método, por el método de Gauss Jordan, tenemos esta matriz (...) Aquí hacemos el proceso inverso, aquí obtenemos la matriz identidad a la que ustedes tienen que llegar una vez que hacen la comprobación, y tenemos que hacer un procedimiento de tal manera que estos valores de la derecha* (matriz identidad) *se vengan a la izquierda y el resultado al final será la matriz inversa. Este es un proceso que requiere que decidan qué operaciones harán, no es de memoria. Por ejemplo, el primer punto es tratar de convertir el -3 en la unidad, ¿cómo hago? (...) Muy bien, puede darse ese caso pero yo les recomiendo que lo hagamos mejor así, yo a la fila 1 la voy a multiplicar por -1/3 y también me va a quedar 1"*].

El profesor hace notar a los estudiantes que las operaciones elementales entre filas necesarias al aplicar este método no son siempre las mismas, pero todas deben conducir a un mismo resultado [S5.E3.A1.L106-109: *"Muchas veces les va a pasar que hacen un tipo de operación aquí y luego aplican otra y les va a dar el mismo resultado, un camino puede ser más corto, otro más largo, pero si están haciendo bien el procedimiento les da el mismo resultado"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En el episodio 1 podemos evidenciar el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, ya que explica para el caso de una matriz 2x2 cómo calcular el determinante, la matriz adjunta y la matriz inversa. Así mismo, vemos conocimiento sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)* porque Carlos menciona que una matriz tiene inversa siempre y cuando su determinante sea diferente de cero. Por otro lado, el conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* lo hace explícito el profesor cuando indica que para comprobar que la matriz inversa obtenida es correcta habrá que multiplicarla por la matriz original y el resultado será la matriz identidad o unitaria [KoT-P1-I11. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$; KoT-P1-I19. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 2x2; KoT-P2-I3. El profesor conoce que para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero; KoT-P4-I12. El profesor conoce que el producto de una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad].

En el segundo episodio, el profesor pone de manifiesto nuevamente su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* al realizar el cálculo de la matriz inversa de orden tres, obteniendo para ello el determinante de la matriz por el método menor de la fila y matriz de cofactores, cuya traspuesta dará como resultado la matriz adjunta [KoT-P1-I11. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$; KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I9 El profesor conoce cómo calcular la matriz de los cofactores; KoT-P1-I17. El profesor conoce cómo determinar el signo del cofactor de una matriz; KoT-P1-I10. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 3x3].

En el tercer episodio vemos el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?*), debido a que empleando la misma matriz 2x2 del episodio 1, explica a los estudiantes cómo obtener la inversa por el método de Gauss Jordan, es decir, aplicando operaciones elementales entre filas [KoT-P1-I20. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando el método de Gauss Jordan].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Carlos muestra indicios de conocimiento que nos llevaría a una oportunidad de investigación sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje,* cuando en su explicación de cómo obtener la adjunta de una matriz de orden dos insiste en que en el caso de diagonal principal se cambia el orden de los elementos y en la diagonal secundaria sólo se cambia el signo [S4.E1.A1.L15-17: *"Para hallar la adjunta les recuerdo, solamente se cambia el orden de la diagonal principal pero se mantiene el mismo signo. En la segunda diagonal sólo se cambia el signo"*] [S4.E3.A1.L126-127: *"Recuerde que la adjunta de una matriz 2x2 se halla intercambiando la primera diagonal y el signo de la segunda diagonal"*]. Al parecer, el profesor es consciente que los estudiantes pueden cometer errores sobre todo con los signos en la obtención de la matriz adjunta 2x2 [KFLM-FDA-I13. El profesor conoce que para los estudiantes se pueden equivocar al obtener la adjunta de una matriz 2x2 por no tener en cuenta que en el caso de la diagonal principal se intercambian los elementos con su mismo signo y para la diagonal secundaria sólo se cambian los signos de los elementos].

Relacionado al conocimiento ya mencionado, el profesor hace notar a los estudiantes que en el cálculo del determinante de una matriz por el método menor de la fila y en la obtención de la matriz de cofactores, deben diferenciar que en el primer caso habrá que incluir el elemento de la fila o columna correspondiente, mientras que para los cofactores hay que tomar en cuenta los signos de acuerdo a la suma de los subíndices (i+j) de cada elemento de la matriz [S4.E2.A1.L52-54: *"Hay que diferenciar el determinante con los cofactores, para el determinante no solamente tomamos el signo de referencia sino también el número o elemento. En los cofactores solamente vamos a tomar el signo"*] [KFLM-FDA-I12. El profesor conoce que para los estudiantes puede constituir una dificultad el no diferenciar claramente entre lo que es un menor y un cofactor].

ANEXO 19. Esquemas del conocimiento de Carlos (Año 1 de observaciones)

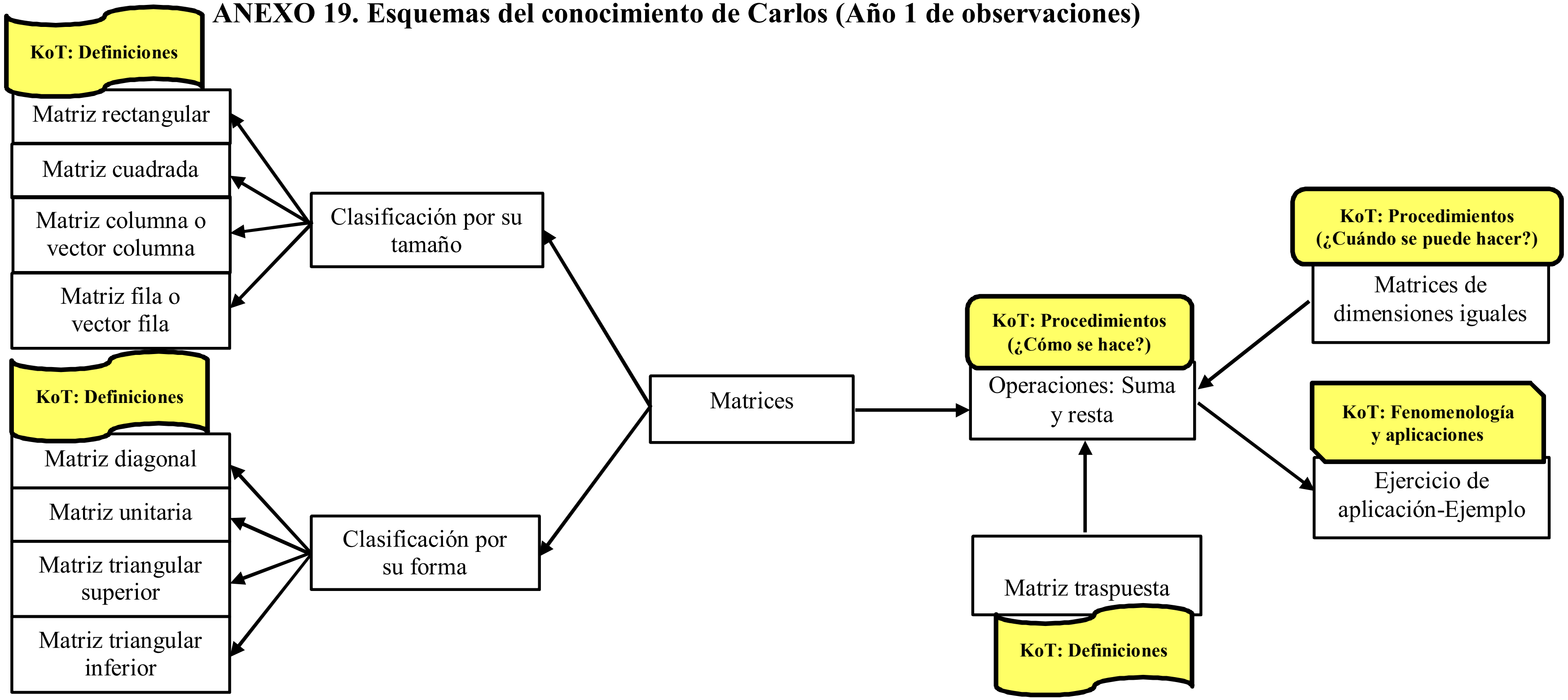


Figura 14. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 1-Año 1 bajo el enfoque del MTSK (Clasificación y suma de matrices)

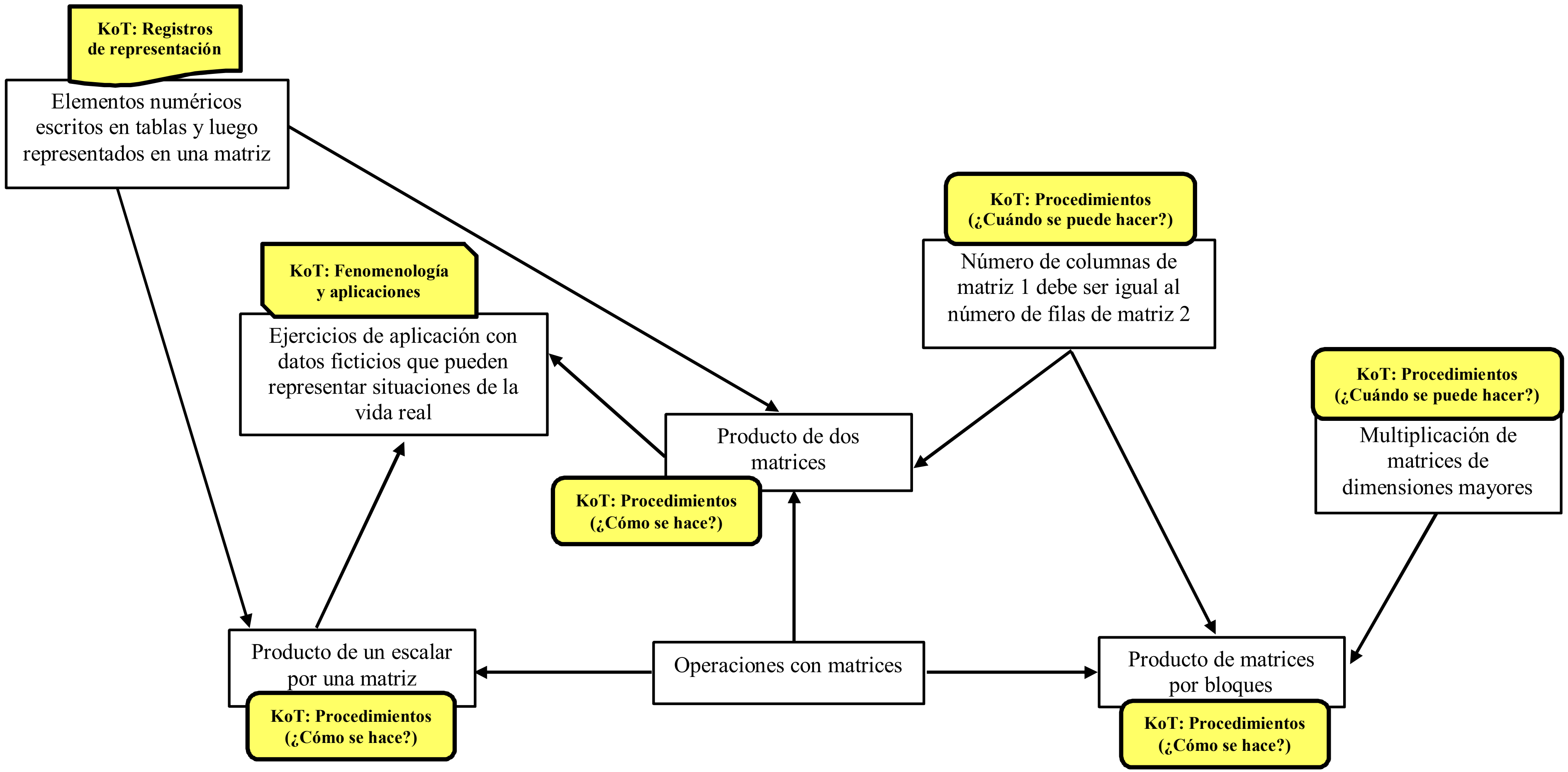


Figura 15. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 2-Año1 bajo el enfoque del MTSK (Producto de un escalar por una matriz, producto de matrices y producto de matrices por bloques)

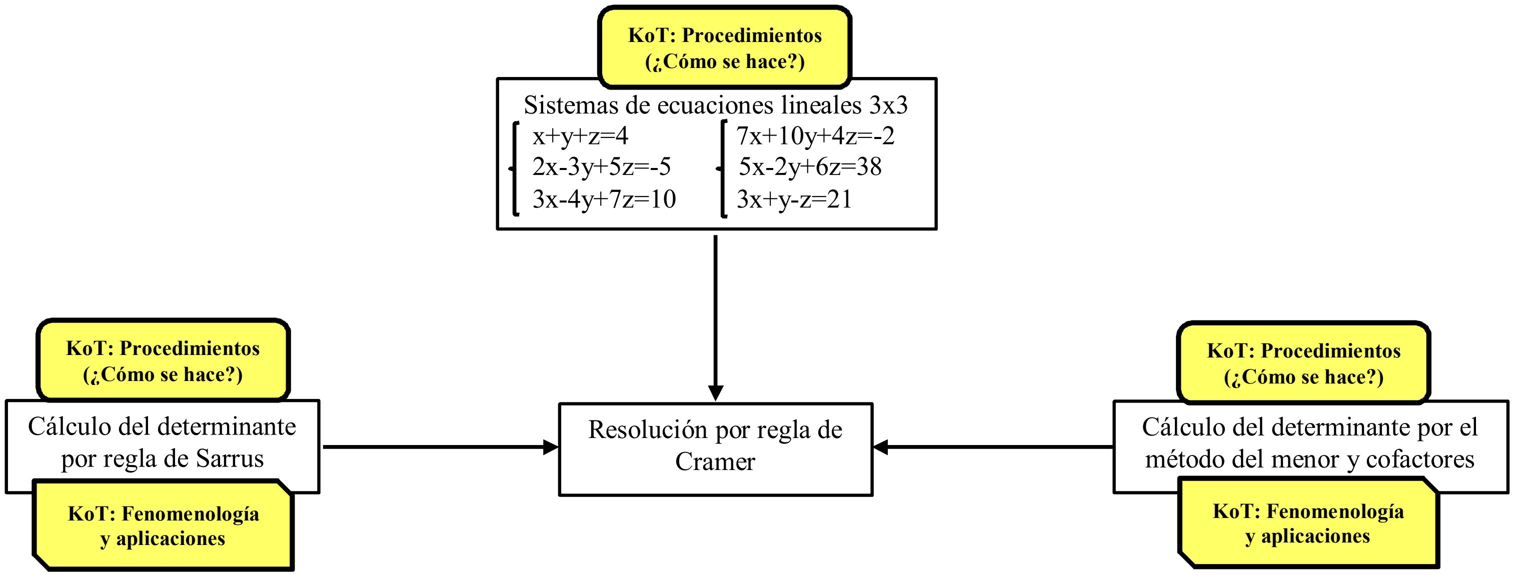


Figura 16. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 3-Año1 bajo el enfoque del MTSK (Cálculo del determinante 3x3 por regla de Sarrus y método del menor y cofactores. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 por regla de Cramer)

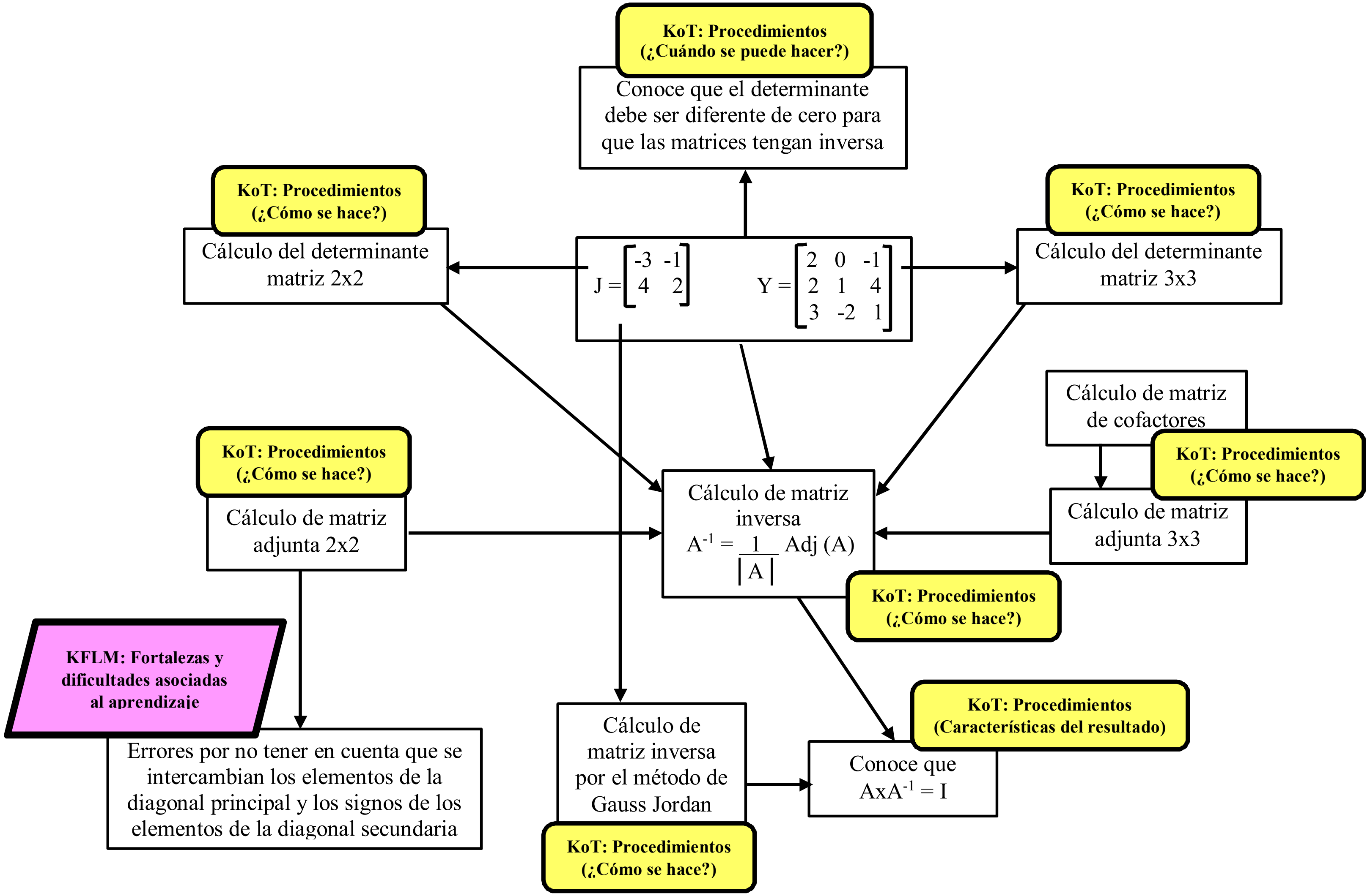


Figura 17. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 4-Año1 bajo el enfoque del MTSK (Matriz inversa 2x2 y 3x3)

ANEXO 20. Análisis preliminar del conocimiento especializado de Carlos (Año 2 de observaciones)

Sesión 1 (07-11-2012): Definición de matriz, filas, columnas e igualdad de matrices

Descripción:

Episodio 1: Definición de matriz, filas, columnas e igualdad de matrices

El profesor expone una tabla con información nutricional de productos lácteos, la misma que le sirve para indicar a los estudiantes las aplicaciones de las matrices y su definición [S1.E1.A2.L1-25: *"Con respecto a las matrices podrán darse cuenta que aquí existe un cuadro relacionado con temas de nutrición (...) En este caso tenemos un ejemplo nutricional, incluye leche, queso, mantequilla y kumis y tenemos los componentes como la lactosa, la proteína y la grasa que están en porcentaje. Los valores que tenemos para leche 38, 27 y 25 se refieren a los porcentajes de lactosa, proteína y grasa, respectivamente y así con los demás componentes. Podrán darse cuenta que son valores reales, este ejemplo es para demostrarles que las matrices no son situaciones adaptadas, no son números ordenados al azar sino que tienen un sentido propio de la realidad, las matrices son totalmente prácticas. La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y las columnas de forma vertical. Lo que vemos en el cuadro lo podemos expresar en forma de matriz, donde cada número indica el porcentaje de un componente en un producto lácteo"*].

Carlos hace explícitas algunas aplicaciones de las matrices dentro del campo matemático [S1.E1.A2.L41-48: "*La importancia también que tienen las matrices es que nosotros podemos realizar algunos cálculos matemáticos como hacer sumas, restas, multiplicaciones, inclusive a través de la matriz inversa hallar la matriz inicial con la que nosotros hemos desarrollado cualquier operación. También a partir de las matrices nosotros podemos hallar x, y, z, dependiendo de la cantidad de incógnitas, resolver un sistema de ecuaciones aplicando matrices"*].

Se refiere a la notación de las matrices y a las dimensiones de las mismas [S1.E1.A2.L26-40, 49-60: *"Aquí está expresado cómo se puede escribir una matriz, aquí hemos utilizado corchetes ¿cuántas filas tenemos? (...) Exacto, que son todos los valores que están ubicados en forma horizontal (...) ¿Cuántas columnas tenemos? (...) Se podrán dar* *cuenta que las columnas están en forma vertical, entonces de acuerdo al arreglo de las filas y las columnas es el orden de la matriz (...) Siempre los elementos son nxm, n van a ser los valores de las fila y m de las columnas (...) Ahora vamos a hablar sobre la notación de las matrices, la escritura de las matrices. Las matrices se escriben con letras mayúsculas (...) Entonces tenemos nosotros una matriz de orden 3x5. Ahora a esta matriz M donde están ubicados los números en forma explícita la conocemos como una matriz particular (...) Las matrices generales se escriben con la misma letra pero con minúscula, el orden es el mismo y en cada uno de los casilleros correspondientes al elemento se va escribiendo la letra minúscula con su respectivo número que se refiere a la fila con la columna"*].

Posteriormente, el profesor presenta dos matrices a los estudiantes con las que explica en qué consiste la igualdad de matrices [S1.E1.A2.L75-95: *"Continuamos con la igualdad de matrices. En este ejemplo 2 tenemos 2 matrices, la A y la B (...) La matriz A es particular de la matriz* (a_{ij}) *2 x 4. La matriz B lo es de* (b_{ij}) *2 x 4. Es decir, que los elementos de la matriz A son iguales a los respectivos elementos de la matriz B y la igualdad se refiere a los elementos dispuestos en iguales sitios en las dos matrices del mismo orden; entonces diremos que la matriz A es igual a la matriz B y se escribe A=B. En* a_{11} *el valor es -3/2, que corresponde en* b_{11} *a -1.5, son iguales los elementos de las matrices. Debemos ir comparando los elementos de las matrices y nos daremos cuenta si son iguales. Significa que cuando analicemos dos matrices para ver si son iguales deben tener primero el mismo orden y de ahí ir comparando cada uno de los elementos, puede haber resultados equivalentes a esa expresión matemática, que viene a ser lo mismo"*].

Finalmente, propone a los estudiantes varios ejercicios, con los cuales deberán demostrar la igualdad de matrices [S1.E1.A2.L100-121: *"Con los números de la matriz M del ejemplo 1, escribe una matriz particular* (m_{ij}) *5x3. La matriz que teníamos en el ejemplo 1, la matriz M era de 3x5, lo que van a hacer que todos los valores delas filas se conviertan en columnas. A esta matriz se la conoce con el nombre de matriz traspuesta (...) Con las matrices R y Q establece cada una de las igualdades de la forma* $r_{ij} = q_{ij}$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$ *y* $j = 1, 2, 3$ *Y escribes luego ¿Qué puedes concluir? Demostrar la igualdad de las matrices S y T ¿Por qué las matrices R y S no son iguales? Y finalmente, si se denota por S' a las matriz cuyas filas son las columnas de S, y cuyas columnas son las filas de S, prueba la igualdad R=S'. De igual forma, prueba que Q = T' "].*

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En esta sesión, el profesor muestra conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, ya que aborda el tema de matrices con un ejemplo práctico que contiene información nutricional sobre productos lácteos, con el cual expresa las aplicaciones de las matrices en situaciones de la vida real. Además, indica que se pueden aplicar también para encontrar matriz inversa y la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Lo expresado por el profesor en esta sesión concuerda con lo que menciona en una entrevista [E1.P19: *"Yo les doy a los estudiantes ejemplos prácticos, de la vida real, y así demostramos que las matemáticas no solo se aplican en una ciencia específica, sino para cualquier área, como nutrición, deportes o en una fábrica, es decir, las matrices tienen múltiples usos o aplicaciones"*] [KoT-F2-I14. El profesor conoce aplicaciones de las matrices].

Este conocimiento está acompañado de aquel sobre *Definiciones*, al indicar que una matriz es una disposición de elementos en filas y columnas; también describe en qué consiste matriz general y particular. Se refiere a la igualdad de matrices haciendo hincapié que deberán tener el mismo orden, sus elementos equivalentes y en ocasiones habrá que trasponer una de las matrices para determinar la igualdad [KoT-D-I1. El profesor conoce la definición de una matriz; KoT-D-I13. El profesor conoce la definición de igualdad de matrices; KoT-D-I10. El profesor conoce la definición de matriz traspuesta; KoT-D-I31. El profesor conoce la definición de matriz general; KoT-D-I32. El profesor conoce la definición de matriz particular].

Su conocimiento sobre *Registros de representación*, se pone de manifiesto al hacer explícito que las matrices se denotan con letras mayúsculas, sus elementos con letras minúsculas van entre corchetes, y los subíndices de los elementos corresponden a la fila y a la columna de acuerdo a donde están ubicados [KoT-RR-I1. El profesor conoce cómo se denotan las matrices; KoT-RR-I2. El profesor conoce la notación de los elementos de una matriz].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Pensamos en el conocimiento del profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* cuando se refiere a los subíndices que denotan la ubicación de los elementos de las matrices [S1.E1.A2.L96-98: *"No es lo mismo que yo diga* a_{11} *que* a_{21}*, cuidado, a veces manejan las matrices y se confunden con los subíndices de los elementos, nos estamos refiriendo a distintas filas"*]. Carlos es consciente de que los estudiantes se pueden confundir por no diferenciar claramente que el primer subíndice se refiere a la ubicación de las filas, y el segundo, a la ubicación de las columnas [KFLM-FDA-I14. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar al ubicar los elementos de una matriz por no diferenciar claramente que el primer subíndice (i) se refiere a la ubicación de la fila, y el segundo (j) se refiere a la ubicación de la columna].

Sesión 2 (12-12-2012): Matriz escalonada y matriz identidad (operaciones elementales entre filas). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss (matriz escalonada)

Descripción:

Episodio 1: Matriz escalonada y matriz identidad con operaciones elementales entre filas

En el primer episodio, Carlos se refiere a las aplicaciones de las operaciones elementales entre filas [S2.E1.A2.L1-6, 60-62, 90-92: *"Las operaciones elementales entre filas no van a ayudar a dos cosas, la primera es encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales, y la segunda, es que también pueden obtener la matriz inversa. En el caso de la matriz inversa, las operaciones elementales entre filas nos van a servir para llegar a la matriz identidad de la matriz original (...) Ya he dicho que con la matriz escalonada podemos encontrar las incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones y con la matriz identidad hallamos la matriz inversa por Gauss Jordan (...) Recuerde que llegando a escalonar la matriz, es decir, dejándola triangular usted ya puede encontrar el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales"*].

Expone los tipos de operaciones elementales entre filas que se pueden llevar a cabo para escalonar una matriz, así como, reducirla hasta la matriz identidad [S2.E1.A2.L9-26: *"Exacto, entonces nosotros tenemos una matriz cualquiera y queremos encontrar la matriz identidad, para eso hacemos operaciones elementales entre filas. Entonces se llama operación elemental realizada en una matriz a cualquiera de las transformaciones siguientes: Primero cambiar entre sí dos filas de una matriz, se puede representar por* $F_i \leftrightarrow F_j$*, siendo* F_i *y* F_j *dos filas de la matriz. También multiplicar una fila por un escalar distinto de cero, se representa por* $F_i \rightarrow \alpha F_j$*. Otra cosa que se puede hacer es sumar a una fila otra fila multiplicada por un número real. Se representa por* $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$*, ahí hemos representado como alfa el coeficiente cualquiera que vamos a multiplicar por los elementos de la fila. Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz, reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir por filas a una matriz"*].

Procede a explicar con una matriz 3x3, cómo reducirla hasta su forma escalonada y matriz identidad [S2.E1.A2.L28-88: *"Lo que vamos a hacer es demostrar que con las operaciones elementales entre filas, esta matriz es equivalente a la matriz identidad. Escalonamos una parte de la matriz. Escalonar una matriz es darle una forma triangular, donde los elementos de la parte inferior son ceros y la diagonal principal puede estar formada por unos (...) O sea, que en la misma matriz podemos hacer dos cosas, una matriz escalonada y también la matriz identidad. Considerando que primero vamos a escalonar la matriz hasta que tome forma de matriz triangular, se dan cuenta que el primer elemento tenemos que transformarlo en uno, y en este caso tenemos en la última fila el uno, ¿qué se procede a hacer? (...) Hasta ahí tenemos ya una matriz escalonada y podemos continuar convirtiendo en cero los elementos de la parte superior a la diagonal principal (...) Recuerda que puedes aplicar las operaciones elementales entre filas como tú creas conveniente. Lo importante es que lleguen a la matriz identidad"*].

Episodio 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss

A petición del profesor, los estudiantes proponen un sistema de ecuaciones lineales, que van a resolver por el método de Gauss, es decir, aplicando operaciones elementales entre filas hasta escalonar la matriz, que quede en forma triangular superior con unos en la diagonal principal. Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades por no tener claras las operaciones elementales más convenientes a realizar para encontrar el valor de las incógnitas, por lo tanto, Carlos interviene [S2.E2.A2.L97-106: *"Veo como que se les está complicando, la matemática es para simplificar y no para complicar, entonces yo veo como que están dando vueltas y es importante que lleguen a un procedimiento que les simplifique la solución, no que se les complique. Tomando de los mismos ejercicios que me han traído ustedes, de aquellos que iban a exponer A ver Ángel, usted me ha entregado aquí un ejercicio. Copien este sistema $x+2y+z=1$, $2x+y+2z=2$, $2x+y+z=3$. Presten atención todos para que ya les quede claro cómo se resuelven estos ejercicios"*].

Enseguida, con la participación de un estudiante, explica cómo resolver el sistema de ecuaciones lineales, aplicando el método de Gauss [S2.E2.A2.L107-186: *"Para resolver por el método de Gauss, lo que deben hacer es tomar cada uno de los coeficientes y escribirlos como una matriz. Ahora, les recuerdo que acabamos de ver que tienen que hallar la matriz escalonada para encontrar los valores de x, y, z. Significa que vamos a hacer que todos estos valores de aquí se hagan cero y estos de aquí se hagan uno. Al ustedes intentar que estos elementos se conviertan en cero se les van a modificar estos uno, pero ustedes intentarán transformarlos nuevamente en cero con las operaciones elementales entre filas (...) ¿Qué va a modificar? (...) Hagamos paso por paso, como solamente vamos a modificar la fila 2, copiamos igual las otras filas. Ya después cuando ustedes resuelvan un ejercicio ya lo harán con la práctica que ustedes tengan resumiendo los pasos, pero yo quisiera que ahora lo hagan paso a paso (...) Si nosotros hemos hecho bien el ejercicio ya está la respuesta allí porque hemos nosotros escalonado la matriz, hemos convertido en 0 estos elementos y la diagonal principal la hemos convertido en la unidad (...) Ahora reemplace usted en cualquiera de las ecuaciones originales y se le tiene que satisfacer cualquiera de las ecuaciones originales"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

El profesor, en el episodio 1 evidencia conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, ya que explica que las operaciones elementales entre filas pueden ser usadas para escalonar una matriz, lo cual permite hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales (método de Gauss) y también encontrar la matriz inversa (método de Gauss Jordan). [KoT-F2-I5. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de

Gauss y Gauss Jordan; KoT-F2-I11. El profesor conoce que las operaciones elementales entre filas son de utilidad en la resolución de la matriz inversa por el método de Gauss Jordan].

Podemos mencionar que existe conocimiento sobre *Definiciones* al indicar que una forma de escalonar una matriz significa darle una forma triangular superior (en el caso de una matriz cuadrada) [KoT-D-I16. El profesor conoce la definición de matriz escalonada].

Evidenciamos también, su conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)*, cuando menciona diferentes tipos de operaciones elementales entre filas que se pueden llevar a cabo para escalonar una matriz, así como, reducirla hasta obtener la matriz identidad. Este mismo tipo de conocimiento es mostrado por el profesor al escribir como ejemplo una matriz 3x3 y mediante operaciones elementales entre filas, primero demuestra cómo escalonarla y después cómo reducirla hasta llegar a la matriz identidad [KoT-P1-I5. El profesor conoce el procedimiento para escalonar una matriz].

En un segundo episodio, Carlos interviene ante las dificultades que observa en los estudiantes para desarrollar el procedimiento que los llevará a encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es así, que se evidencia nuevamente el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* cuando con la intervención de un estudiante explica al resto de la clase qué operaciones elementales entre filas deberán realizar para llegar a escalonar la matriz que se forma con los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. Así mismo, muestra conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* porque durante la sesión de clase, hace explícito que hay que escalonar la matriz hasta dejarla en forma triangular superior y los elementos de la diagonal principal transformados en unos (método de Gauss), así pueden llegar finalmente a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y posteriormente realizar la comprobación [KoT-P1-I18. El profesor conoce el procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss (operaciones elementales entre filas para escalonar una matriz, transformando en unos la diagonal principal); KoT-P4-I8. El profesor conoce que cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales mediante operaciones elementales entre filas, uno de los sistemas equivalentes obtenidos representa una matriz triangular superior].

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

La respuesta que Carlos proporcionó en una entrevista cuando le preguntamos acerca de las dificultades que presentan los estudiantes cuando realizan operaciones elementales entre filas fue la siguiente [E3.P12: *"Sí, hay dificultades y eso se debe a que no son organizados. Las matemáticas necesitan llevar un orden, a veces piensan que con las matemáticas no se requiere ser disciplinado y organizado para resolución, entonces ponen los valores en diferentes lugares y después no saben qué cantidad le corresponde a una cosa u otra, es el orden, se confunden más que nada cuando son de tercer orden las matrices y las vamos a resolver con Gauss o Gauss Jordan, no porque sea difícil sino que ellos se confunden porque no están siendo ordenados en la resolución. Por eso cuando yo les decía que pongan una flecha o la notación les servía como guía para hacerlo bien. Si van a utilizar las flechas en las operaciones elementales entre filas pues deberán utilizar flechas para todo porque si utilizan el signo igual ya están diciendo otra cosa. Cuando dicen que van a cambiar una fila por otra entonces tienen que poner es una flecha porque si le ponen el signo igual ya significa que están igualando esas cantidades y las van es a resolver. Por eso es importante la notación, el orden para poder llegar a los resultados sino nunca van a llegar a los resultados"*]. Lo anterior nos lleva a pensar en el conocimiento del profesor sobre *Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, ya que explica que la falta de orden y el uso incorrecto de la notación llevan a los estudiantes a cometer errores en la resolución de los ejercicios propuestos [KFLM-FDA-I16. El profesor conoce que los estudiantes se pueden equivocar por no resolver de forma ordenada un ejercicio o por el uso incorrecto de la notación matemática en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss y Gauss Jordan].

Sesión 3 (26-12-2012): Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 mediante matriz inversa

Descripción:

Episodio 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 mediante matriz inversa

El profesor dedica esta sesión a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el cálculo de la matriz inversa, planteando problemas a los estudiantes para mostrarles las aplicaciones de las matrices en situaciones que pueden darse en la vida real. Explica primero un problema donde se plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas [S3.E1.A2.L1-33: *"Vamos a resolver ejercicios de aplicación de las matrices, vamos a utilizar la matriz inversa para encontrar los resultados. Tenemos el siguiente problema (...) Podemos darnos cuenta de que lo que queremos es conocer cuántas horas diarias y cuántos metros de tela deben producir para que la ganancia sea de $100 en la primera máquina y de $80 en la segunda. En el planteamiento entonces vamos a identificar las incógnitas, vamos a considerar como n la primer incógnita que sería el número de metros de tela y la segunda incógnita h que sería las horas, cuántas horas diarias (...) Se nos va a convertir en una matriz de orden 2, solamente tenemos dos ecuaciones (...) Si se podrán dar cuenta, al hacer el planteamiento le vamos a dar valores positivos a lo que produce ingreso y a lo que produce egreso valores negativos; entonces si nos ponemos a leer el enunciado nos podremos dar cuenta que existen dos máquinas, la primera produce telas de $50 cada metro, entonces eso es lo positivo, 50, al lado le ponemos la n que es el número de metros de tela y después ponemos lo que gasta, entonces restamos $60 que es lo que se gasta por hora de producción. Pero así mismo dice que la ganancia en la primera máquina es igual a $100 y en la segunda máquina, la ganancia es de $80. En la segunda máquina tenemos que la producción de tela es de $60 y el gasto es de $80, entonces se resta. Ahí tenemos un sistema de ecuaciones de dos incógnitas"*].

Una vez que ha planteado el sistema de ecuaciones procede a indicar cómo formar las matrices que llevarán a la solución del sistema [S3.E1.A2.L33-53: *"Ahora sí vamos a aplicar lo que son las matrices. Vamos a extraer esta primera parte de aquí, la vamos a colocar en una matriz y le vamos a dar el nombre de C, a la matriz formada por 50, -60, 60 y -80, esa es la matriz C (...) Pero ¿qué resulta? Hemos sacado las incógnitas, el número de metros de tela y las horas de producción. Esas incógnitas las ponemos también en forma de matriz. Si yo multiplico me va a quedar lo mismo 50n-60h y abajo 60n-80h (...) O sea que lo que hemos hecho es separar las incógnitas de los coeficientes, pero hemos armado otra matriz en la que se va a multiplicar y vamos a representar esa matriz con la letra S, de solución (...) En la otra matriz vamos a poner nosotros las ganancias que queremos obtener, pero solamente le ponemos un signo igual. La ganancia* *de la primera máquina es de 100 y la ganancia de la segunda máquina es de 80, representamos esa matriz con la letra G de ganancia"*].

Procede a indicar que para llegar a la solución deben encontrar la matriz inversa [S3.E1.A2.L54-69: *"Entonces si se fijan aquí dice que C x S = G, pero yo no quiero hallar G, ¿Qué es lo que quiero hallar? (...) Entonces, de esa fórmula, yo despejo la S y me queda que S = G/C, pero yo no lo voy a representar como fracción, sino como un producto. Al representar como un producto ¿qué me queda? (...) Si yo subo esa C que está en el denominador me va a quedar* C^{-1} *La matriz inversa, o sea que matemáticamente se representa lo que queremos hacer realmente. Por eso, para nosotros hallar las incógnitas n y h ¿qué es lo que necesitamos conocer? Necesariamente tenemos que hallar la matriz inversa de C para después multiplicarla por G y el resultado nos va a dar el valor de las incógnitas n y h"*].

Explica cómo obtener la matriz inversa y la solución del sistema de ecuaciones [S3.E1.A2.L71-94: *"Para nosotros hallar la matriz inversa ¿qué debemos hacer primero? (...) En este caso yo aplicaré el método menor de la fila, hallaremos la adjunta de C. En la adjunta de C les recuerdo que la diagonal mayor se cambia de ubicación y la diagonal menor sólo se le cambia de signo (...) No se olvide que para nosotros saber si existe o no una matriz inversa ¿qué nos debe dar el determinante? (...) Diferente de 0 (...) Aquí el determinante nos da -400, significa que sí hay matriz inversa. Procedemos a hallar la matriz inversa dividiendo la adjunta para el valor que nos salió como determinante y de esta manera tenemos la matriz inversa de C (...) Ya entonces hemos hallamos la matriz inversa, pero arriba en la parte superior nos dimos cuenta que si despejábamos la S era igual a la inversa de C por la G, significa que tenemos que desarrollar ese producto (...) El resultado que obtenemos de esta multiplicación nos da una matriz de 8 y 5, el 8 va a ser el número de metros de tela y 5 son las horas diarias que necesitamos"*].

Episodio 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 mediante matriz inversa

Como segunda parte del episodio, procede a proponer otro ejercicio de aplicación de las matrices, donde se debe plantear un sistema de ecuaciones lineales de orden tres [S3.E2.A2.L100-128: *"Ahora, así mismo como hay ejercicios de aplicación de matrices de orden dos, también hay de orden 3 (...) Aquí nos piden determinar el precio de venta* *de cada litera, entonces la primera incógnita sería la p de precio de venta de cada litera y la segunda es el salario semanal, entonces la incógnita sería s del salario de cada empleado y después vamos a ver cuánto debe pagarse por cada viaje, ustedes pueden poner ahí la v de viaje o de viáticos ¿Quién planteó ya el ejercicio? Quiero que lo hagan ustedes (...) Usted ya lo tiene bien avanzado, excelente (...) Se forma un sistema de ecuaciones con tres incógnitas"*].

Al igual que en el episodio 1, prosigue a colocar los datos en forma de matrices [S3.E2.A2.L136-140: *"Formamos las matrices respectivas y tomamos los coeficientes, independientemente de las incógnitas. Sigo yo manteniendo la C de costos, la S de solución y la G de ganancia, pero esta p, s y v correspondiente a las tres incógnitas de precio, salario y viáticos los coloco en forma de matriz. También ponemos como matriz los valores 2700, 2600 y 2480"*].

Planteadas las matrices, explica que para llegar a la solución hay que obtener la inversa de una de las matrices [S3.E2.A2.L141-144: *"Entonces tenemos que CxS es igual a G, pero yo necesito hallar S, al despejar me va a quedar S=G/C, la C la pasamos al numerador y nos queda* C^{-1}*xG. Para hallar la S de la solución tenemos que hallar la inversa de C"*].

Explica que para encontrar la matriz inversa de orden tres, en este caso hallarán primero el determinante, después la matriz de cofactores, la adjunta para obtener la matriz inversa, y la solución del sistema de ecuaciones lineales [S3.E2.A2.L145-182: *"En este caso, usaremos el menor de la fila. Hallemos el valor del determinante, yo he tomado la primera fila y la primera columna, entonces el cofactor se me hace 70 y queda lo que está expuesto allí. Después tomo el 4 pero ustedes saben que esto está en forma alternada, positivo, negativo, positivo (...) Al resolver nos va a dar un valor positivo de 100. Sea positivo o negativo no importa, lo que importa es que sea un valor diferente de 0 para que la matriz tenga inversa. Así mismo con los cofactores vamos a hallar los valores de la adjunta (...) La matriz de cofactores sería (...) Aquí ya no ubicamos el valor de la intersección con las columnas, solamente aplicamos el signo, que si 1+1 da un número par entonces el resultado en este caso no cambia de signo queda -4. Pero si yo tengo 1+2 nos da una cantidad impar, entonces allí sí se cambia el signo. Y así sucesivamente (...) Entonces, para hallar la adjunta de C, ¿qué es lo que se hace? (...) Sí la traspuesta de la matriz de cofactores (...) Ahora vamos a hallar la matriz inversa* C^{-1}*, es igual a todos los* *valores de la adjunta dividida para el determinante (…) Ahora para hallar nosotros el valor de S, ¿qué tenemos que hacer? (…) Ok, entonces con eso ya tenemos la respuesta de las incógnitas verdad (…) Reemplace en cualquiera de las ecuaciones y tiene que satisfacer a la ecuación"*].

Análisis:

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KoT)

En esta sesión, el profesor desea demostrar a los estudiantes las aplicaciones de las matrices, por tanto, hace evidente su conocimiento sobre *Fenomenología (usos y aplicaciones)*, al emplear ejercicios que consisten en el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas, donde a través de la obtención de la matriz inversa podrán llegar a la solución. Los ejercicios que emplea el profesor, si bien son ficticios, pueden representar situaciones de la vida real, así en una entrevista nos indica por qué emplea estos ejercicios de aplicación [E3.P3: *"Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés"*] [KoT-F2-I12. El profesor conoce que una aplicación de la matriz inversa es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; KoT-F2-I15. El profesor conoce que a través de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (aplicando la matriz inversa) se puede encontrar la solución de problemas matemáticos ficticios o de la vida real].

Claramente existe conocimiento sobre *Procedimientos (¿cómo se hace?)* porque el profesor explica paso a paso cómo plantear los sistemas de ecuaciones a partir de la interpretación de cada problema, seguido de su conocimiento del método menor de la fila para conocer el determinante de matrices de orden dos y tres, así como el procedimiento para hallar la matriz adjunta de orden dos, matriz de cofactores y adjunta de orden tres. Además, conoce cómo aplicar la fórmula $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$ para obtener la matriz inversa y la multiplicación de matrices que le lleva a determinar la solución del sistema de ecuaciones lineales [KoT-P1-I21. El profesor conoce cómo plantear sistemas de ecuaciones lineales a partir de la interpretación de los datos de un problema de aplicación; KoT-P1-I12. El profesor conoce cómo calcular el determinante por el método del menor y cofactores; KoT-P1-I19. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 2x2; KoT-

P1-I10. El profesor conoce cómo calcular la matriz adjunta 3x3; KoT-P1-I9. El profesor conoce cómo calcular la matriz de los cofactores; KoT-P1-I17. El profesor conoce cómo determinar el signo del cofactor de una matriz; KoT-P1-I11. El profesor conoce cómo calcular la matriz inversa aplicando $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A)$; KoT-P1-I3. El profesor conoce el algoritmo para multiplicar matrices].

Vemos también, el conocimiento del profesor sobre *Procedimientos (¿cuándo se puede hacer?)*, cuando hace explícito que el determinante de una matriz debe ser diferente de 0 para que haya matriz inversa y por lo tanto el sistema tenga solución. Muestra conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* al indicar a los estudiantes que en la matriz de cofactores los signos van alternados, y por otro lado, que pueden reemplazar las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones del sistema con los valores encontrados, y si se satisface la ecuación, los resultados son los correctos [KoT-P2-I3. El profesor conoce que para que una matriz sea invertible es necesario que el determinante no sea igual a cero; KoT-P4-I11. El profesor conoce que en la matriz de los cofactores los signos de cada elemento van alternados, de acuerdo a la suma de los subíndices de los elementos. Si es par, el signo es positivo y, si es impar, el signo es negativo; KoT-P4-I15. El profesor conoce que para comprobar la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, los resultados obtenidos deben satisfacer a las ecuaciones que conforman en sistema].

ANEXO 21. Esquemas del conocimiento de Carlos (Año 2 de observaciones)

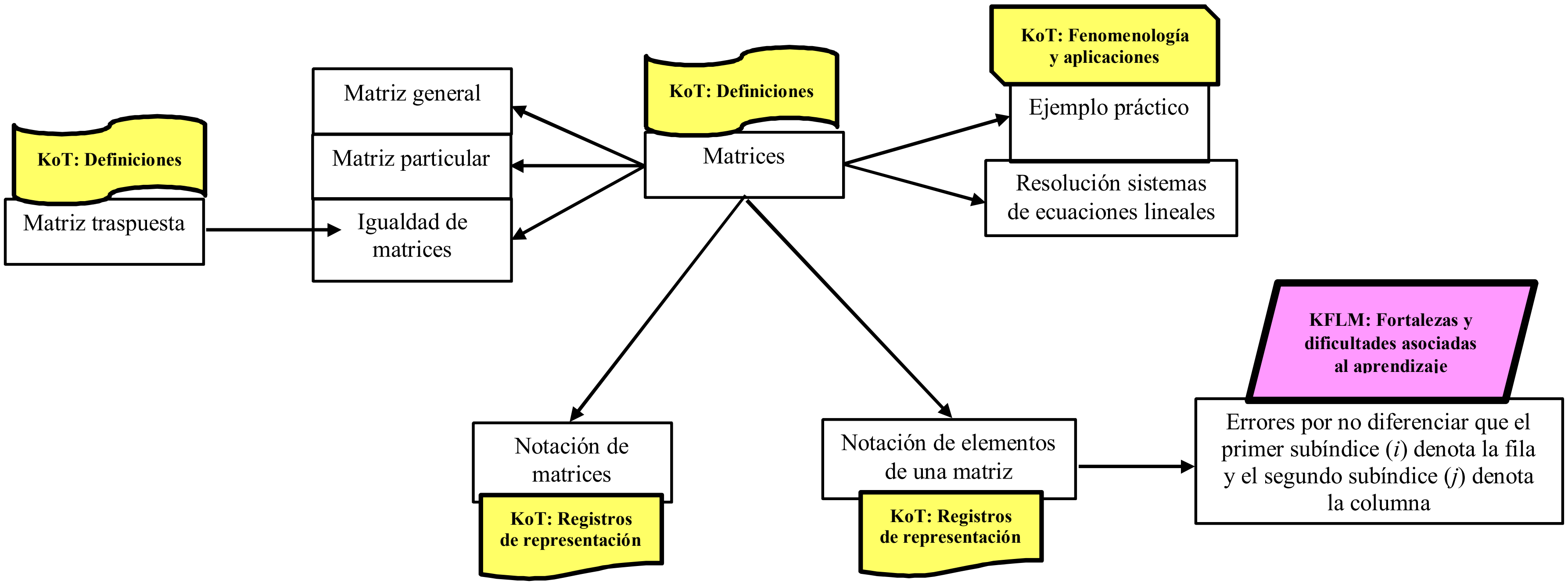


Figura 18. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 1-Año2 bajo el enfoque del MTSK (Definición de matriz, filas, columnas e igualdad de matrices)

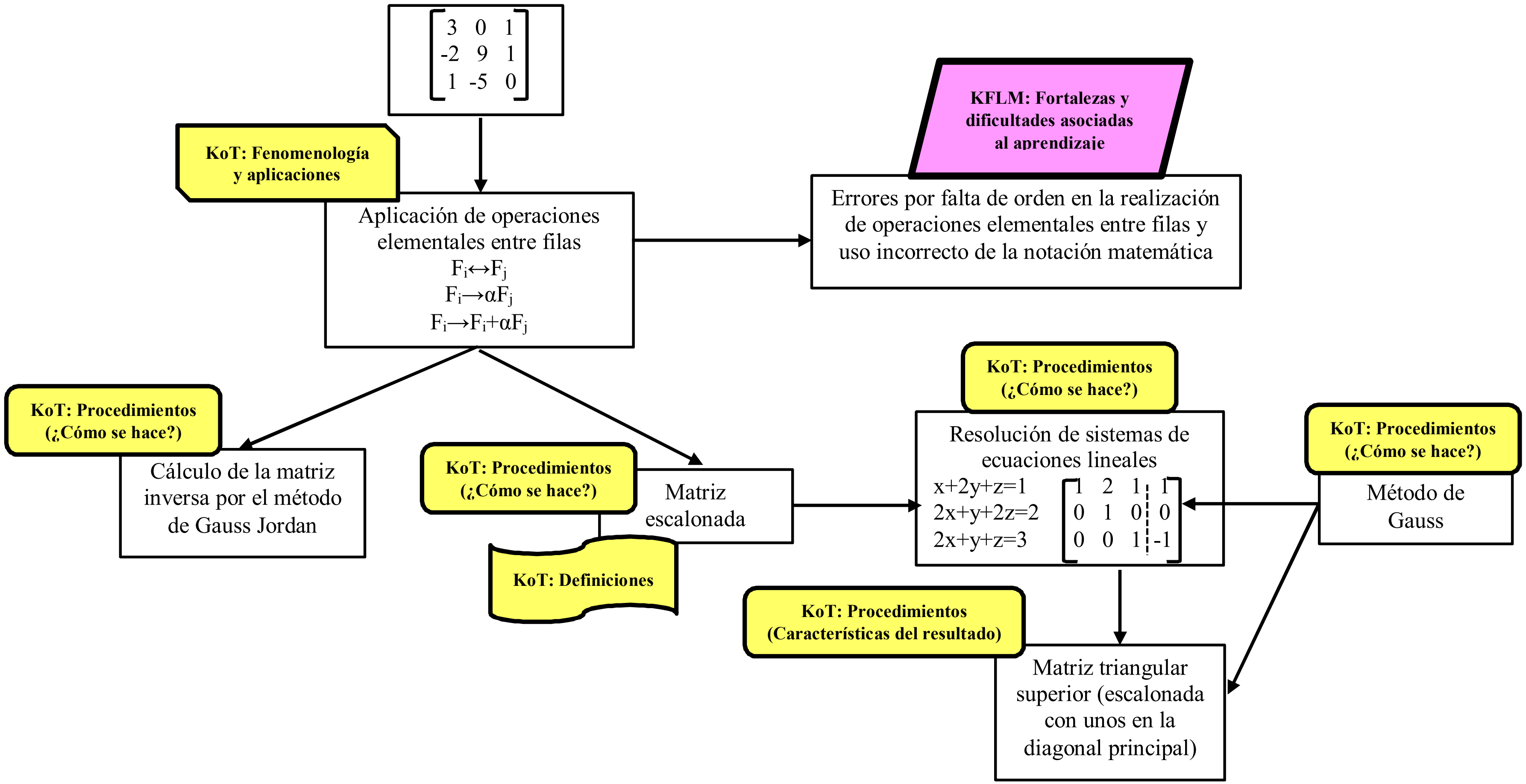


Figura 19. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 2-Año 2 bajo el enfoque del MTSK (Matriz escalonada y matriz identidad-operaciones elementales entre filas-Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss)

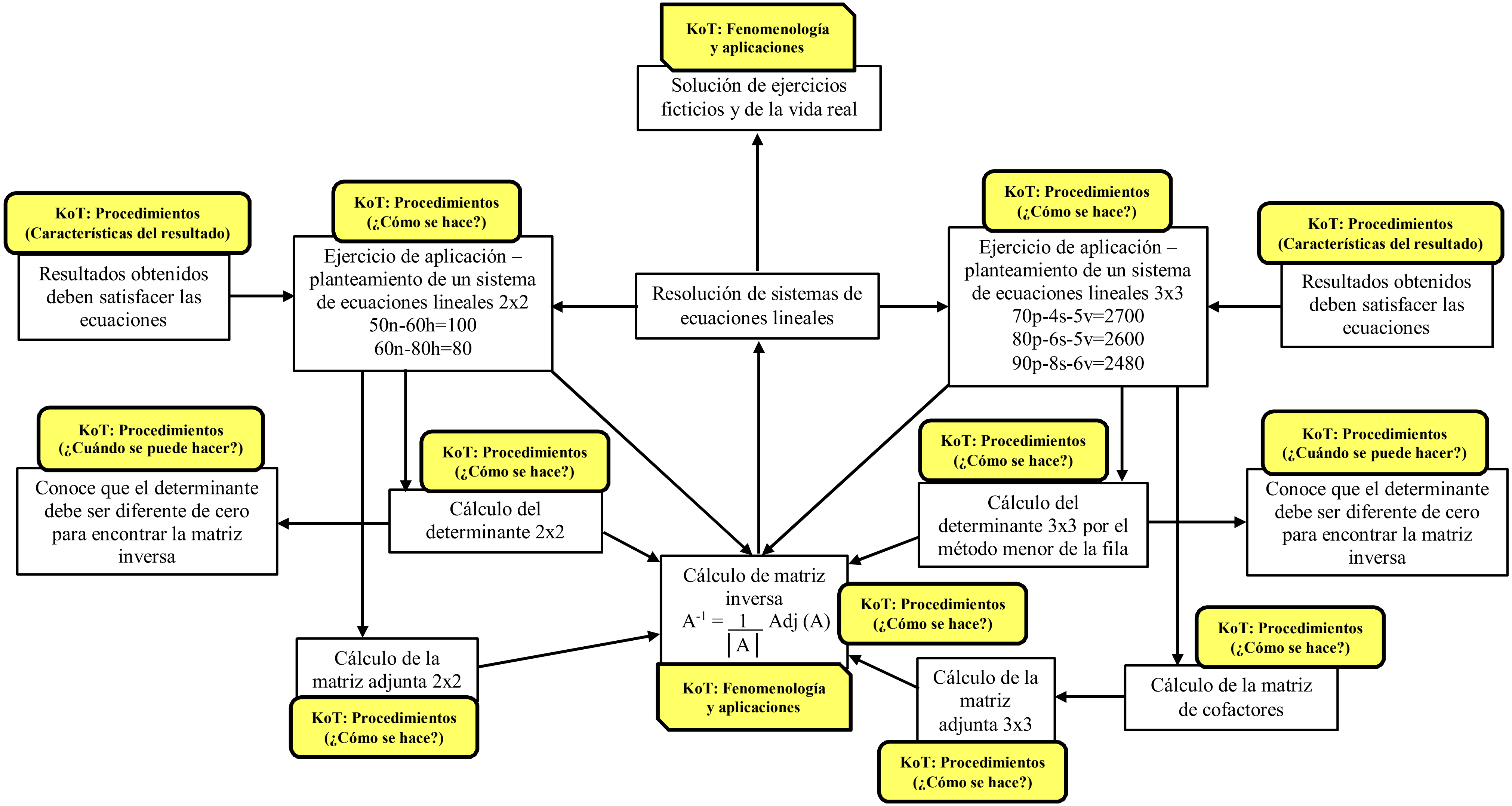


Figura 20. Esquema de conocimiento de Carlos en la Sesión 3-Año2 bajo el enfoque del MTSK (Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3 mediante matriz inversa)

ANEXO 22. Análisis preliminar de las concepciones de Carlos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Metodología

Praxis (1,2)

En general, la actividad del aula de Carlos *se caracteriza por la repetición iterada de ejercicios tipo* (TR1)[12]. Esto se ha deducido de las observaciones de su práctica y ha sido manifestado por el profesor en entrevistas (E2.P9[13], E2.P10), donde reconoce que los ejercicios que emplea para que los estudiantes practiquen son similares a los que utiliza en sus explicaciones previas.

E2.P9: *Para reforzar los conocimientos adquiridos se practica con ejemplos parecidos a los ya explicados, luego se aumenta la complejidad en la resolución de los mismos y también se realizan ejercicios de aplicación a cualquier área de las ciencias.*

E2.P10: *Para que los alumnos puedan practicar y realizar ejercicios después de las clases, escojo ejercicios que tengan similitud con los ya practicados en las mismas.*

<u>El profesor expone los contenidos en su fase final, apoyado en estrategias expositivas</u> (TR2), es decir, al referirse a procedimientos o algoritmos sobre el contenido matemático, durante el primer año de observación de su práctica, los explica en su totalidad sin mencionar características de los ejercicios utilizados, distintas formas de llegar a una resolución o las ventajas y desventajas de usar uno u otro procedimiento. Sin embargo, hay que destacar que varios de los ejemplos que emplea en sus explicaciones son de aplicación del contenido matemático. Por otra parte, en una entrevista (E1.P24), Carlos manifiesta que no emplea ningún tipo de software, siendo la pizarra el principal recurso para la exposición de sus clases.

---

[12] En el texto se incluye en cursivas aquellos indicadores provenientes de la descripción original del instrumento de análisis de concepciones de Carrillo (1998), con las siglas de la tendencia a la cual corresponden y el número del indicador. Aquellos indicadores en negritas y cursivas fueron incluidos por Climent (2005) en el instrumento original de análisis de concepciones de Carrillo (1998). Las palabras o frases en negritas, cursivas y subrayadas han sido adaptaciones incorporadas por la autora de acuerdo al contexto de la presente investigación.

[13] Siglas utilizadas para identificar una entrevista (E2) y la pregunta (P9).

E1.P24: *Solamente la pizarra, marcadores, borrador. En la actualidad no utilizo ningún otro recurso. No empleo ningún software porque los estudiantes ven una asignatura de programación donde aplican los conocimientos que adquieren en mis clases.*

Ya en el segundo año de observaciones de la práctica del profesor, existen ciertos cambios en la metodología de enseñanza, por cuanto permite la participación de grupos de estudiantes en la exposición de varios contenidos matemáticos[14], cediendo protagonismo a los mismos, con el apoyo del profesor para complementar las explicaciones o resolver correctamente un ejercicio. Si bien es cierto, en las sesiones aún se mantiene *la repetición iterada de ejercicios tipo* (TR1), tanto cuando explica el estudiante como cuando lo hace el profesor, se observa el empleo de herramientas informáticas, como el uso de diapositivas para la exposición de ciertos ejemplos.

75 P: *Continuamos con la igualdad de matrices. En este ejemplo 2 tenemos 2*
76 *matrices, la A y la B*

$$A=\begin{bmatrix} -3/2 & 3^0 & 2 & 8-8 \\ -\sqrt{4} & 5 & 2.5 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 8/4 & 0 \\ -2 & \sqrt{25} & 5/2 & 3/3 \end{bmatrix}$$

77 *La matriz A es particular de la matriz (a_{ij}) 2 x 4.*
78 *La matriz B lo es de (b_{ij}) 2 x 4.*
79 *Es decir, que los elementos de la matriz A son iguales a los respectivos*
80 *elementos de la matriz B y la igualdad se refiere a los elementos dispuestos*
81 *en iguales sitios en las dos matrices del mismo orden; entonces diremos*
82 *que la matriz A es igual a la matriz B y se escribe A=B*
83 *Entonces para realizar la igualdad de matrices debemos ir comparando*
84 *cada una de sus respectivas filas con sus respectivas columnas.*

23 P: *Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en*
24 *el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz,*
25 *reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir*
26 *por filas a una matriz*
27 *Tenemos esta matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

28 *Lo que vamos a hacer es demostrar que con las operaciones*
29 *elementales entre filas, esta matriz es equivalente a la matriz identidad*

1 P: *Vamos a resolver ejercicios de aplicación de las matrices, vamos a*

[14] Este cambio en la metodología de las clases de los dos profesores que participan en esta investigación, se produce debido a que ambos imparten la asignatura de Álgebra Lineal en la misma carrera, y por tanto, han mantenido diálogos en los cuales decidieron establecer grupos de trabajo entre sus alumnos para que expliquen ciertos contenidos matemáticos durante las aulas, como una forma de fomentar la participación activa de los alumnos en sus clases.

2 *utilizar la matriz inversa para encontrar los resultados.*
3 *Tenemos el siguiente problema:*

Objetivos (3)

El profesor ***persigue objetivos terminales, poniéndose énfasis en objetivos conceptuales y procedimentales*** (TE3). Carlos refiere algunos conceptos relacionados con el contenido como matriz, tipos de matrices, filas y columnas. Por otra parte, procura que el estudiante maneje los procedimientos o algoritmos relacionados con el contenido matemático. Por ejemplo, la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales (S3.9-20[15]).

9 P: *Vamos a resolver un sistema de ecuaciones*
10 $x + y + z = 4$
11 $2x - 3y + 5z = -5$
12 $3x -4y + 7z = 10$
13 *Para resolver el sistema de ecuaciones aplicamos la regla de Cramer que*
14 *consiste en tener valores en el numerador y valores en el denominador,*
15 *entonces los ubicamos de tal manera que si yo quiero hallar x, en*
16 *la ubicación de los valores de x van a ir los valores conocidos o términos*
17 *independientes, 4, -5, 10 porque lo que voy a hallar es x, ubico los de*
18 *y, luego los de z. Abajo, en el denominador, ubicamos todos los*
19 *coeficientes de las ecuaciones. Aplicando el método de Sarrus aumentamos*
20 *las dos primeras filas al final de las matrices*

Además, el énfasis procedimental constatado en el desarrollo de las clases del profesor, es sostenido por él en entrevistas (E1.P16, E3.P2). Así, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, indica que interesa mostrar a los estudiantes los diferentes métodos de resolución sosteniendo que el estudio de las matrices va orientado a encontrar el valor de incógnitas, y estas a su vez, pueden relacionarse con varias aplicaciones.

E1.P16: *Claro es indispensable. Los estudiantes para poder seguir la asignatura de Álgebra Lineal tienen que haber visto resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin aplicación de matrices, sino utilizando otros métodos de eliminación para hallar las variables. En realidad lo que se trata es de mostrar al estudiante los diferentes métodos que existen para hallar las variables desconocidas. Para eso se aplican las matrices, para hallar esos valores y de una forma mucho más rápida.*

[15] Siglas y números utilizados para identificar la sesión de clases (S3) y líneas de transcripción (9-24)

E3.P2: *Es el mismo caso, debemos de tener muy en claro qué es lo que queremos hallar, cuando hablamos de matrices específicamente hablamos de variables y son procedimientos diferentes para hallar las variables cuando aplicamos las matrices y eso es muy importante y darnos cuenta sus diferentes aplicaciones, podemos calcular áreas, saber para qué las podemos aplicar.*

Programación (4)

De acuerdo a las respuestas de Carlos obtenidas a través de entrevistas, sus concepciones sobre la programación están relacionadas con tendencias tradicionales y tecnológicas. Por una parte, *el profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida* (TR4), ya que indica que el sílabo con el que trabaja ha sido elaborado previamente por otras personas (E1.P9). Por otra parte, *para el profesor, la programación es un documento cerrado, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina* (TE4); esta asignación la realizamos pensando en sus expresiones sobre las relaciones entre contenidos matemáticos y al sostener que en ciertas ocasiones, y de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes, se ve obligado a dedicar tiempo al repaso de ciertos contenidos anteriores, necesarios para abordar los contenidos subsiguientes del programa de estudios (E4.P8).

E1.P9: *La decisión no viene de mi persona, los temas ya vienen establecidos en los programas que nos entregan a nosotros las autoridades de la Facultad. El tiempo que dura el semestre no lo dispongo yo, lo que hago es distribuir el programa de acuerdo a las semanas que tengo para dar clases (16 semanas).*

E4.P8: *Es muy difícil ajustarse porque si ya se hace una prueba de diagnóstico nos podemos dar cuenta muchas veces de que existen vacíos, entonces es importantísimo antes de entrar al tema que ya está programado en el sílabo darle una introducción a los conocimientos básicos que deben tener para poder trabajar con lo que se ha programado para la clase. Eso sucede mucho, por ejemplo, cuando vemos ecuaciones diferenciales que es una combinación de lo que son las derivadas y las integrales y el estudiante olvida, más aún si lo ha visto en distintos semestres, entonces hay que hacerles un repaso casi de dos meses de lo que son las derivadas, inclusive las derivadas de orden superior, las integrales. Lo básico aquí en el estudio de las matrices es tener conocimientos claros de Álgebra, por eso se les complica un poco cuando trabajamos con fracciones porque se les ha olvidado como se suman los quebrados, entonces hay que hacerles ese repaso.*

Sin embargo, ya en la práctica de aula de este profesor observada durante dos años consecutivos, no encontramos evidencias de que realizara explicaciones sobre conocimientos previos, quizá porque su metodología al explicar el contenido de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, está orientada a que el profesor exponga los procedimientos hasta su fase final.

Sentido de la asignatura

Orientación (5)

En las sesiones de clases *interesan tanto los conceptos y reglas como los procesos lógicos que los sustentan por su eventual reproductibilidad* (TE5). Sobre los conceptos, como ya hemos mencionado, el profesor enfatiza aquellos introductorios relacionados con matriz, filas, columnas y tipos de matrices. Por ejemplo, utiliza una tabla relacionada con el valor nutricional de ciertos productos alimenticios, la cual asocia con el uso de matrices en situaciones cotidianas y a través de ella, define matriz, filas y columnas (S1*.20-36).

20 P: *La matriz numérica "n por m" es una disposición de números o elementos*
21 *en un rectángulo de n filas y m columnas. Las filas de forma horizontal y*
22 *las columnas de forma vertical*
23 *Lo que vemos en el cuadro lo podemos expresar en forma de matriz,*
24 *donde cada número indica el porcentaje de un componente en un*
25 *producto lácteo*

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} \text{fila 1}\rightarrow \\ \text{fila 2}\rightarrow \\ \text{fila 3}\rightarrow \\ \text{fila 4}\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 38 & 27 & 25 \\ 35 & 25 & 30 \\ 36 & 22 & 32 \\ 37 & 24 & 29 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \end{array} \end{array}$$

26 *Aquí está expresado cómo se puede escribir una matriz, aquí hemos*
27 *utilizado corchetes ¿cuántas filas tenemos?*
28 E: *Cuatro*
29 P: *Exacto, que son todos los valores que están ubicados en forma*
30 *horizontal. Ya cuando nosotros vamos a utilizar matrices, ya no*
31 *ponemos los elementos como en la tabla sino que simplemente ubicamos*
32 *los números o elementos. ¿Cuántas columnas tenemos?*
33 E: *Tres*
34 P: *Se podrán dar cuenta que las columnas están en forma vertical, entonces*
35 *de acuerdo al arreglo de las filas y las columnas es el orden de la*
36 *matriz.*

En cuanto a las reglas, como ya hemos dicho existe un énfasis en el desarrollo de procedimientos o algoritmos en las clases de Carlos, orientadas hacia la reproducción repetitiva de ejercicios. Por ejemplo, una vez que el profesor ha indicado en qué consiste la regla de Cramer (S3.9-20) y la obtención del determinante por el método del menor y cofactores), procura que el estudiante pase al pizarrón a reproducir los procedimientos enseñados (S3.42-85) y este patrón se repite en todas sus sesiones de clases.

42 P: *Vamos primero a aprender el método para después resolver el sistema de*
43 *ecuaciones, tenemos esta matriz*

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 3 & ½ \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

44 *El método consiste en hallar el valor del determinante, ¿cómo se*
45 *resuelve?, de la siguiente manera, este valor inicial que está aquí*
46 (refiriéndose al -1 de la primera fila primera columna) *lo ponemos como*
47 *cofactor, tapamos todo lo que está en la primera fila y en la primera*
48 *columna, solo ubicamos los valores que están descubiertos. Después*
49 *ubicamos el segundo número de la fila* (primera fila) *pero con el signo*
50 *cambiado y así mismo tapamos la primera fila y la segunda columna y*
51 *ubicamos sólo los números que están descubiertos, ¿cuáles son?*
52 E: *4, 2, -2 y 5*
53 P: *Y después ubicamos como cofactor el último término de la fila sin cambiar*
54 *el signo, los signos van alternados*

$$\overset{+}{-1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{-}{-3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{+}{+1/2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

55 *Este signo de aquí se multiplica por este de acá, menos por más, menos,*
56 *este de aquí que es positivo* (refiriéndose al 3) *se multiplica por el signo*
57 *negativo queda negativo y este de aquí queda positivo, o sea que solamente*
58 *se cambia el signo al segundo término*
59 *Ahora procedemos a hallar los determinantes. Para hallar los*
60 *determinantes multiplicamos cruzado y el segundo término de derecha a*
61 *izquierda se cambia de signo*
62 *¿Cuál es el valor del determinante entonces?*
63 E: -76
64 P: *Este es el método que ustedes van a utilizar para hallar las incógnitas, se*
65 *llama el menor de la fila para buscar el determinante*
66 *Van a hacer este ejercicio*

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

67 E: *Yo paso*

$$1\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

68 *La respuesta es 1*
69 P: *Aquí tienen un sistema de ecuaciones*

$$A = \begin{cases} 7x + 10y + 4z = -2 \\ 5x - 2y + 6z = 38 \\ 3x + y - z = 21 \end{cases}$$

70 *Pase Sr. a resolver el sistema por la regla de Cramer y calculando el*
71 *determinante por el método menor de la fila*
72 *En este caso no debe aumentar las dos primeras filas para calcular el*
73 *determinante como con la regla de Sarrus, calcule el determinante por el*
74 *método menor de la fila*
75 E: *¿Escribo primero cómo va a quedar o resuelvo directamente?*
76 P: *Escríbalo y después calcula el determinante tanto del numerador*
77 *como del denominador*
78 E: *Escribiré aquí*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 10 & 4 \\ 38 & -2 & 6 \\ 21 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

79 *Y aquí calculo los determinantes*

$$x=\frac{-2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -10\begin{vmatrix} 38 & 6 \\ 21 & -1 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 38 & -2 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}}{7\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -10\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

80 *El valor de x es 8*
81 P: *Cuando ya ustedes calculen "y", la parte de abajo o el determinante del*
82 *sistema, ese resultado les sirve para todas las incógnitas, solamente tienen*
83 *que resolver la parte de arriba*
84 *Veo que ya han calculado y, se obtuvo -5*
85 *Y z es igual a -2*

A Carlos le interesa que queden claros los procedimientos, por ello se esfuerza en reproducir los mismos empleando ejercicios similares a los ejemplos. Su práctica concuerda con lo mencionado en una entrevista (E3.P1), donde el profesor indica que el Álgebra Lineal se aprende practicando de forma repetitiva, y que un ejercicio se puede desarrollar a través de diferentes procedimientos.

E3.P1: *Realmente Álgebra Lineal es una de las ramas de las matemáticas y la matemática es una ciencia exacta, hay que razonar muchísimo porque no podemos aprendernos de memoria los procedimientos para hallar un resultado, sino que debemos razonar porque un mismo ejercicio lo podemos desarrollar con diferentes procedimientos y eso es lo que nos debe quedar a nosotros claro. Entonces nosotros debemos aprender el Álgebra Lineal practicándola, con la práctica adquirimos el aprendizaje porque si lo hacemos solamente una vez un ejercicio y creemos que ya lo sabemos todo nunca vamos a sentir que hemos aprendido, en el momento que nos vuelvan a poner otro ejercicio ya creemos que sabemos y nos damos cuenta de que no sabemos nada, eso es todo, es práctica.*

Finalidad (7)

Para el profesor, *la asignatura no sólo ha de tener una finalidad informativa, sino también un carácter práctico que permita su aplicación* ***en la propia matemática, para el estudio de otras disciplinas o en la vida cotidiana*** (TE7). Carlos procura que en sus clases los estudiantes puedan visualizar aplicaciones del contenido matemático, en este caso de *matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales*. Así, sus ejemplos para la enseñanza están relaciones con aplicaciones en diversos ámbitos. Dentro de la vida cotidiana, se ha podido constatar en su práctica de aula la enseñanza a través de ejemplos de aplicación de la suma y multiplicación de dos matrices, matriz inversa y sistemas de ecuaciones lineales (S2.12-14).

12 P: *Con este ejemplo ven una vez más las aplicaciones de las matrices*
13 *Esta es una matriz P en la que queremos conocer la producción en ocho*
14 *horas de cada uno de estos repuestos*

Por otra parte, el profesor menciona constantemente en sus clases aplicaciones del contenido dentro de la propia matemática. Por ejemplo, de forma general indica la aplicación de las matrices en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (S1*.41-48), y destaca el carácter práctico de las operaciones elementales entre filas y su aplicación en la obtención de las matrices escalonada, inversa, y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (S2*.60-62).

41 P: *La importancia también que tienen las matrices es que nosotros*
42 *podemos realizar algunos cálculos matemáticos como hacer sumas,*
43 *restas, multiplicaciones, inclusive a través de la matriz inversa hallar la*
44 *matriz inicial con la que nosotros hemos desarrollado cualquier*
45 *operación.*
46 *También a partir de las matrices nosotros podemos hallar x, y, z,*
47 *dependiendo de la cantidad de incógnitas, resolver un sistema de*
48 *ecuaciones aplicando matrices.*
23 P: *Las operaciones elementales entre filas son de gran importancia en*
24 *el estudio de matrices, ya que nos permite escalonar una matriz,*
25 *reducir por filas a una matriz y las dos cosas, escalonar y reducir*
26 *por filas a una matriz*

60 P: *Ya he dicho que con la matriz escalonada podemos encontrar las*
61 *incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones y con la matriz*
62 *identidad hallamos la matriz inversa por Gauss Jordan*

Relacionado a lo anterior, asociamos también las expresiones del profesor en una entrevista (E4.P7), en la cual hace alusión a la importancia de demostrar al estudiante la aplicación de un contenido matemático en la enseñanza de otro. Así, por ejemplo, menciona que esta es la lógica de abordar por ejemplo, el determinante de una matriz para su empleo posterior en la enseñanza de la regla de Cramer.

E4.P7: *Por ejemplo, antes de entrar al estudio de las matrices hay que enseñarles cómo encontrar el determinante, más que nada de orden 2 que es lo básico, se trabaja con el determinante de orden 2 y después se les demuestra que el determinante servirá para hallar las incógnitas de cualquier sistema de ecuaciones, entonces si es de orden 2 es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: x e y, ya como se calculó el determinante entonces podemos aplicar la regla de Cramer para hallar las incógnitas. Entonces se les hace más fácil, que entrar directamente a encontrar el valor de las incógnitas sin antes haber estudiado el determinante.*

Por otra parte, el profesor se refiere además, en sus clases, a la aplicación de las matrices dentro de otras disciplinas (S1*.3-9), lo cual es expresado también en una entrevista, en las cual indica que hace explícitas las aplicaciones en diferentes áreas, y que los estudiantes sí aplican las matemáticas que reciben en el desarrollo de software matemático (E1.P25).

P: *Lo que significa que las matrices pueden ser aplicadas en cualquier*
área de estudio, ya sea en geografía, cívica, historia, ciencias naturales,
biología, química, porque no son otra cosa que datos o valores que
tienen relación con lo que se esté trabajando. Por ejemplo: un cuadro de
calificaciones tiene un orden establecido de valores de acuerdo a cada
uno de los estudiantes, que pueden estar ordenados por curso, por
paralelo, por facultades, etc.

E1.P25: *Para los estudiantes que están estudiando Ingeniería en Sistemas es útil el tema de matrices para elaborar software. Sí hago explícito a los estudiantes la utilidad que tiene el tema de matrices, ellos en la actualidad elaboran software y utilizan las matemáticas que reciben. Por ejemplo, en el semestre anterior algunos estudiantes desarrollaron un software para sumar fracciones, otros elaboraron un software para determinar las variables aplicando determinantes. Yo les doy a los estudiantes ejemplos prácticos, de la vida real, y así demostramos que las matemáticas no solo se aplican en* *una ciencia específica, sino para cualquier área, como nutrición, deportes o en una fábrica, es decir, las matrices tienen múltiples usos o aplicaciones.*

Añade además, que cuando a los estudiantes se les demuestra la aplicación de un contenido matemático, estos muestran más interés en aprender (E3.P5).

E3.P5: *Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es de aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos le ponen más interés.*

Concepción del aprendizaje

Aprendizaje (8)

De acuerdo a las sesiones de clases observadas, al parecer *el aprendizaje se sigue concibiendo como memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la asignatura* (TE8). La asignación de este indicador al aprendizaje se sustenta por la respuesta obtenida por el profesor en una entrevista (E2.P11), en la cual indica que mide el aprendizaje de los estudiantes cuando pasan a la pizarra a resolver ejercicios de forma individual, y ya que Carlos mide el "grado de rapidez o precisión", antes que el razonamiento en la resolución de un ejercicio, creemos que promueve un aprendizaje memorístico.

E2.P11: *Mido la capacidad de captación de la clase de los estudiantes a través de la resolución de ejercicios individuales que los alumnos realizan en la pizarra, su grado de rapidez o precisión con que resuelven.*

Tipo y forma-procesos (9, 10)

Para Carlos *el único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo* (regla general-aplicación a casos particulares) (TR9); el profesor se enfoca en explicar en sus clases procedimientos o algoritmos hasta su fase final. La aplicación del método deductivo de aprendizaje que se constata en sus clases, también fue corroborada por Carlos en entrevistas (E2.P6, E1.P3). Le interesa "facilitar" el aprendizaje de sus estudiantes, de manera que se familiaricen con el contenido sin ninguna dificultad.

E2.P6: *Sí, considero que se han desarrollado bien aspectos del contenido de la clase con respecto a lo que se refiere a las matrices utilizando el método deductivo – inductivo para que los alumnos aprendan progresivamente el contenido y puedan adquirir el conocimiento sin dificultad. Especialmente los aspectos relacionados a la aplicación en la vida diaria que tienen las matrices porque de esta manera no sienten que el aprendizaje es innecesario.*

E1.P3: *En primer lugar sigo el método que va desde lo deductivo a lo inductivo, ejercicios sencillos, que el alumno se vaya familiarizando con la forma de resolver los ejercicios y les voy poniendo más complicado y cambiando los sistemas de resolución para que ellos vayan demostrando sus habilidades.*

Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que viene del exterior (TE10). Este patrón se repite a lo largo de las sesiones de clases de este profesor, el conocimiento que adquiere el alumno en las clases es reproducido en la resolución de ejercicios de similares características a los expuestos por el profesor. Por ejemplo, el Carlos explica la regla de Sarrus y el método menor de la fila, y el estudiante con base en esta explicación resuelve los sistemas de ecuaciones lineales aplicando la regla de Cramer (cuyo procedimiento ya ha sido explicado previamente por el profesor).

En el segundo año de observaciones de la práctica del profesor, este permite que algunos contenidos matemáticos sean consultados, preparados y expuestos por los estudiantes, sin embargo, su práctica no llega a ser investigativa, ya que el alumno imita el proceso de enseñanza del profesor (exposición de procedimientos y ejemplos). Al parecer, Carlos considera que permitir que el estudiante exponga un contenido matemático tiene desventajas, ya que sostiene que en ciertos casos, este puede volverse memorista y por tanto, siempre es necesaria la guía del profesor, de manera que se pueda incentivar el razonamiento del estudiante (E3.P13). No obstante, en la sesiones de clases observadas no se llega a incentivar el descubrimiento, manipulación de materiales (E10), ni razonamiento del alumno propiamente (I10), sino más bien, se fomenta el manejo de procedimientos o algoritmos.

E3.P13: *Sí, pero existe un riesgo de que se hagan memoristas y que solamente se aprendan para el momento de la exposición, pero realmente no lo han hecho razonando. Son expertos para memorizar, hacen exposiciones increíbles, pero en el momento que yo les pongo un ejercicio diferente pero relacionado al mismo tema que ellos han expuesto,* *ya no lo pueden resolver porque solamente han aprendido de memoria, no razonaron cómo se resolvía el ejercicio. Por eso es, que sí es importante de todas formas la guía. Es bueno para que manejen las herramientas de investigación, pero es importantísimo que igual uno sirva de guía, pero le cuento que cuando yo les daba clases estos grupos eran excelentes cuando preparaban las clases, yo les ponía otros ejercicios cambiados y ellos los resolvían, los casos que te estoy comentando son de ahora que me he encontrado con chicos que solamente se aprenden lo que van a explicar, yo les pongo otros ejercicios relacionados a lo mismo y ya no pueden resolver. No todos los casos son lo mismo, sí es buena la metodología para cambiarles la mentalidad de memorista a que se conviertan en personas que reflexionen, que razonen, ya depende de nuestra guía.*

Importancia de la argumentación (10') e *Interacción maestro-estudiantes-matemáticas (10'')*

Durante el primer año de observaciones de su práctica de aula, el profesor ***no concede especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones*** (TR10'), ya que el estudiante interviene de forma muy escasa en las clases y cuando pasa a resolver un ejercicio al pizarrón, su desempeño es más bien a nivel procedimental, sin argumentar o hacer preguntas.

Ya en el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos, al parecer, ***es importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje*** (TE10'). Creemos que el profesor concede cierta importancia a la argumentación por parte del alumno, y en este caso no se trata de una verbalización con las propias palabras del alumno de lo que previamente ha expresado el profesor, sino, de una verbalización con palabras del estudiante del contenido matemático consultado y preparado con la finalidad de ser expuesto a sus compañeros. Este cambio en las concepciones del profesor, es considerado como una consecuencia de haber empezado a promover que los alumnos expongan la clase, de manera que tengan un espacio para explicar el contenido matemático al resto de sus compañeros.

En general, en las sesiones de clases observadas ***el alumno interactúa con la asignatura y el profesor, siendo el último el intermediario entre ésta y el alumno. La interacción que se produce entre el profesor y el alumno no es equilibrada, siendo más fuerte el***

flujo en la dirección profesor alumno que la inversa (TR10''/TE10''). El alumno interviene en pocas ocasiones, por ejemplo, para indicar ciertas características de las matrices (S1.53-63); mencionando las dimensiones de algunas matrices durante la enseñanza del algoritmo de la suma (S1.115-122); dando resultados de la multiplicación de diferentes matrices, y en ocasiones, el estudiante pasa al pizarrón para reproducir el procedimiento enseñado por el profesor, como es el caso de la aplicación de la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales (S3.21-36). Es decir, es evidente que las intervenciones del profesor son las que predominan en la clase.

En el segundo año de observaciones, el alumno interactúa con la asignatura y sus compañeros al exponer un contenido matemático. Sin embargo, se sigue manteniendo una mayor interacción del profesor hacia los estudiantes antes que a la inversa (TR10''/TE10''), ya que ante ciertas dificultades que observa el profesor en la explicación que dan los estudiantes sobre el contenido matemático, decide intervenir e ir explicando él mismo el procedimiento, aunque es el estudiante el que va siguiendo la explicación y escribiendo los cálculos en la pizarra.

Papel del alumno

Participación en el diseño didáctico (15)

Durante el año uno de observaciones de las aulas, *el alumno no participa ni activa ni pasivamente en el diseño de las actividades, programación, etc.* (TR15/TE15), siendo el profesor quien prepara las actividades para impartir las clases, apoyándose en diferentes textos, de acuerdo a sus expresiones en una entrevista (E3.P4).

E3.P4: *De diferentes libros que sean de fácil acceso a ellos o yo les proporciono el material que yo creo que es más fácil para que ellos puedan familiarizarse con los ejercicios.*

En el año dos de observaciones de la práctica de Carlos, *el alumno participa indirectamente en el diseño didáctico* ***(a través de sus intervenciones en el quehacer del aula)*** (E15), ya que es el encargado de exponer una parte del contenido matemático que el profesor tiene previsto abordar en una sesión de clases.

¿Qué hace? (17, 18, 19)

Por una parte, *hay una sobrevaloración implícita de los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que proviene del profesor* (TR17). Carlos manifiesta en una entrevista (E4.P10) por qué le parece importante la toma de apuntes en sus clases, de allí la asignación de este indicador.

E4.P10: *Yo les hago copiar la clase como una manera de tenerlos ocupados, además, la memoria es muy frágil y si copian ellos pueden después revisar sus apuntes y recordar cosas que suelen olvidar.*

Por otra parte, *el alumno, al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, reproduce el proceso lógico mostrado por el profesor; imitando así su estilo cognitivo* (TE17). Esto se da especialmente cuando el profesor solicita al estudiante que resuelva algún ejercicio en el pizarrón (S3*.111-127), donde se constata que el estudiante basado en la explicación de Carlos intenta reproducir el procedimiento aprendido.

P: *Aquí nos piden determinar el precio de venta de cada litera, entonces la*
primera incógnita sería la p de precio de venta de cada litera y la segunda
es el salario semanal, entonces la incógnita sería s del salario de cada
empleado y después vamos a ver cuánto debe pagarse por cada viaje,
ustedes pueden poner ahí la v de viaje o de viáticos
¿Quién planteó ya el ejercicio? Quiero que lo hagan ustedes
Bien, les debo decir que la producción o fabricación de literas es lo
positivo y lo negativo sería pagar a los empleados y también el costo de los
viajes. ¿Ya está planteado?
Lean bien, la producción de las literas va primero como lo positivo y lo
demás es negativo
E: *¿Es así?*
P: *Usted ya lo tiene bien avanzado, excelente, usted ha utilizado otras*
incógnitas. Pero pienso que el orden si es importante, debe poner primero
la inversa multiplicada por el valor de la ganancia. Muy bien Luis. Vamos
a continuar, yo usaré estas incógnitas p=precio, s=salario y v=viaje
Pero ustedes pueden utilizar las que crean convenientes

La actividad del alumno no incluye un tiempo para la reflexión sobre su propia acción (E18). Este indicador se sustenta, tanto cuando es el profesor quien explica el contenido matemático, en el caso de los estudiantes que exponen el contenido matemático, y cuando los estudiantes atienden la exposición de sus compañeros. Además, nos basamos en entrevistas, donde el profesor menciona que considera que los alumnos deben estar constantemente resolviendo los ejercicios propuestos por él, ya sea en su puesto de trabajo o pasando al pizarrón, como una forma de mantenerlos activos y atentos (E1.P20, E3.P17). Para el profesor es importante que los estudiantes pasen al pizarrón a resolver los ejercicios propuestos, de manera que sean capaces de poner en práctica el algoritmo o procedimiento enseñado; lo cual se observa, por ejemplo, cuando se trata de multiplicar un escalar por una matriz (S2.28-36) o cuando se practica la multiplicación de matrices en bloques (S2.83-111).

E1.P20: *No permitir que los estudiantes se distraigan, mantenerlos permanentemente en actividad, que ellos participen activamente resolviendo los ejercicios porque si los dejamos que los resuelvan solos en su hoja de trabajo, se desvinculan de la clase. Yo los hago pasar a resolver ejercicios a la pizarra como una técnica, mas no porque no sepan, sino para mantenerlos activos y atentos en la clase.*

E3.P17: *Para que no se distraigan y así yo puedo saber que están conectados con mi clase, porque puedo tenerlos yo en presencia pero realmente su mente está ausente. Entonces es importantísimo tenerlos activos, tanto haciendo ejercicios en la hoja como pasando a la pizarra a resolver, combinando las dos actividades porque pueden estar solo copiando en la hoja pero eso no significa que están ellos razonando ni pensando, solo copiando. Entonces si ellos salen a la pizarra ahí se dan cuenta de que estaban escribiendo por gusto.*

La confianza del alumno en lo expuesto por el profesor, inducida por la técnica empleada, le impide cuestionarse sobre el fondo del contenido (TE19). La técnica de Carlos consiste en ir explicando el contenido con ejemplos sencillos, y posteriormente utilizar ejercicios similares para que los estudiantes practiquen siguiendo mecánicamente lo aprendido (S2*.188-195), por tanto, estos confían en lo expuesto por el profesor, sin cuestionarse más allá de lo que este les enseña.

P: *Entonces ya se dieron cuenta, vamos a anotar cada uno de los pasos
encerrados en un círculo para que vean cuál es la secuencia. Ya con
esta matriz escalonada encontramos los valores de las incógnitas x, y, z.
Ahora va a pasar usted a hacer otro ejercicio, yo le voy a ir dando las
directrices. Obviamente no podía esperar que ustedes lo sepan todo
porque es un tema nuevo, entonces con esta explicación les quedó más
claro, con lo que hicimos suficiente, para qué seguir calculando, si allí
ya podían hallar la respuesta.*

Papel del profesor

¿Qué hace? (20), ¿Cómo hace? (21), ¿Qué hace? (22), Justificación (23)

El profesor actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico, organiza los contenidos de aprendizaje, los cuales transmite mediante exposición, utilizando estrategias organizativas/expositivas que procuran ser atractivas (TE 20-23). Carlos es quien organiza el contenido de la sesión de clases, y explica a los estudiantes a través de ejemplos, destacando de su práctica que procura que dichos ejemplos sean de aplicación del contenido matemático, no sólo dentro de la propia matemática, sino además en otros ámbitos (situaciones cotidianas). En las sesiones de clases observadas, el profesor intenta distribuir la clase entre su explicación (a través de un ejemplo) y luego la participación de los estudiantes resolviendo ejercicios similares en el pizarrón, lo cual es corroborado por sus expresiones en una entrevista (E2.P4).

E2.P4: *Se distribuye la clase entre la explicación y la participación de cada uno de los alumnos, para que cada uno de ellos tenga la oportunidad de poner en práctica sus conocimientos adquiridos.*

El profesor utiliza ejemplos de aplicación para explicar la suma de matrices (relacionado con las pérdidas o ganancias de un agricultor en su finca), producto por un escalar, multiplicación de matrices, matriz inversa, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (cálculo de producciones, ingresos y egresos en una fábrica), ya que considera prioritario que los estudiantes observen las aplicaciones del contenido que enseña (lo cual ha sido plasmado ya en párrafos anteriores).

En el segundo año de observaciones de la práctica de Carlos, este transmite la clase empleando herramientas informáticas, como diapositivas con conceptos y ejemplos para que los estudiantes capten los procedimientos. Escucha ciertas sugerencias con relación a los procedimientos, sin embargo, cuando el estudiante está resolviendo un ejercicio en el pizarrón interviene de manera que el alumno aplique la forma que el profesor considera más adecuada para llegar a una respuesta (S2*.147-158).

147 P: *Vamos a ver, ¿cuál va a hacer ahora?*
148 E: *El -3* (fila 2 columna 2) *lo voy a convertir en 1*
149 P: *Excelente, escriba arriba el procedimiento que va a hacer*
150 E: *Lo escribo aquí*

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{lccc|c} -1/3f_2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}$$

P: *No, yo le voy a recomendar mejor otro paso primero, le voy a recomendar convertir el -3* (fila 3 columna 2) *en 0 porque yo estuve revisando el ejercicio que usted iba a exponer. Entonces va a hacer usted $f_3 - f_2$, vamos a hacer así*

E: *Lo voy a escribir*

$$\begin{array}{l} \\ \\ f_3 \rightarrow f_3\text{-}f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P: *Yo les estoy recomendando estos pasos porque después se les hace muy largo el procedimiento. Escriba los valores que no se van a modificar, fila 1 y fila 2*

Validación de la información (24')

El profesor es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta (TR24'). Por ejemplo, cuando nota que un estudiante está confundiendo a sus compañeros con la explicación del método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, interviene indicando qué operaciones hay que realizar para que el procedimiento sea correcto, siendo el mismo estudiante que expone el que escribe en la pizarra lo que le va indicando el profesor (S2*.97-106, S2*.188-195).

P: *Veo como que se les está complicando, la matemática es para simplificar y no para complicar, entonces yo veo como que están dando vueltas y es importante que lleguen a un procedimiento que les simplifique la solución, no que se les complique.*
Tomando de los mismos ejercicios que me han traído ustedes, de aquellos que iban a exponer.
A ver Ángel, usted me ha entregado aquí un ejercicio.
Copien este sistema x+2y+z=1, 2x+y+2z=2, 2x+y+z=3
Presten atención todos para que ya les quede claro cómo se resuelven estos ejercicios.

P: *Entonces ya se dieron cuenta, vamos a anotar cada uno de los pasos encerrados en un círculo para que vean cuál es la secuencia. Ya con esta matriz escalonada encontramos los valores de las incógnitas x, y, z. Ahora va a pasar usted a hacer otro ejercicio, yo le voy a ir dando las directrices. Obviamente no podía esperar que ustedes lo sepan todo porque es un tema nuevo, entonces con esta explicación les quedó más claro, con lo que hicimos suficiente, para qué seguir calculando, si allí ya podían hallar la respuesta.*