日本機械学会論文集(C 編)
53 巻 487 号(昭 62-3)

論文 No. 86-0657 A

感度解析を用いた振動システムの同定*
(第2報, ばねで支持された剛体系への適用)

鞍谷文保**, 藤川 猛***, 沖田耕三**

System Identification of Vibration Systems Using Sensitivity Analysis
(2nd Report, Application to a Rigid Body System Supported by Springs)

Fumiyasu KURATANI, Takeshi FUJIKAWA, and Kozo OKITA

A method based on sensitivity analysis is presented for identifying the moment of inertia, spring constants and location of the center of gravity of a rigid body system supported by springs. This method is used to examine a technique for determining spring constants, spring locations and their arrangement so that the desired natural frequencies can be in tune. Further, the moment of inertia and the location of the center of gravity are identified from modal parameters measured in a vibration test model. The results of this investigation will be valuable in applications to vibration-proof-foundation design.

Key Words: Vibration, System Identification, Sensitivity Analysis, Rigid Body System, Modal Parameter, Vibration-Proof-Foundation Design

1. まえがき

機械の防振支持設計では，通常機械から発生する励振力の周波数に対して，垂直方向の固有振動数が低くなるように支持ばねのばね定数が選定される．さらに水平方向など他のモードの振動が問題になるときは，それらの固有振動数が主要な励振周波数より低くなるか，あるいは励振力が多数の周波数を含む場合には，固有振動数が周波数の谷間になるようにばね定数や支持位置が調整される[1]．このような調整は従来試行錯誤的に行うのが普通であって，低次モードに対しては振動絶縁や共振回避が達成できても，高次モードの共振まで避けるのは困難な場合も多い．このような場合には，望ましい固有振動数配置になるようなばね定数や支持位置を求める手段があれば，防振設計が行いやすくなる．ところで固有振動数のチューニングを行うには，まず支持すべき物体の質量，慣性モーメント，重心位置などの値を正確に把握し，次いで所望の固有振動数が得られるように，ばね定数の選定や支持位置，質量分布の改善などをはかる必要がある．慣性モーメントや重心位置の値は設計図面から算定できるが，複雑な形状のものになると算定の労力が大変であり誤差も生じやすい．別の方法として，系を自由状態にして測定する大久保ら[2]の方法もあるが，専用の試験設備が必要であり実際の運転状態での測定が困難な場合もある．このようなときは，仮の防振支持あるいは試作状態における振動測定データを基に，慣性モーメントや重心位置の値が同定できれば，実機のより精度の良い値を得ることができる．さらに既設の状態でのばね定数など系の定数が同定できれば，設計目標との差異や既存設備の防振機能診断も可能となり，より最適化がはかられる．ところが防振設計において，固有振動数を目標の値に分散配置するための方法は従来試行錯誤的に行われており，系統的に系の定数を定めてゆく方法は見当たらない．また振動測定データから系を同定する方法は $[M]$,$[K]$ などの特性行列の形で同定する方法として，長松ら[3][4]や岡田ら[5]の研究が見られるが，慣性モーメントさらには長さの次元を持つ重心位置などの物理定数までを，直接同定した例は，まだ見られないようである．

そこで本報では，前報[6]の感度解析による同定手法

* 昭和61年11月24日 関西支部第246回講演会において講演，原稿受付 昭和61年5月22日．
** 正員，兵庫県立工業試験場（〒654 神戸市須磨区行平町3-1-12）．
*** 正員，(株)神戸製鋼所要素技術センター（〒651 神戸市中央区脇浜町1-3-18）．

をこのような問題に拡張し，防振設計における固有振動数のチューニングおよび実測データから慣性モーメント，重心位置，ばね定数などを算定する手法を検討する．

2. 解析理論

2·1 振動解析と逆問題　本報で対象とする剛体系は，図1に示すように剛体が多数のばねで支持されたモデルである．通常このようなモデルの振動解析では質量，慣性モーメント，重心位置，ばね定数，ばね支持位置などのモデル定数を与えて固有値解析を行い，固有値，固有ベクトルなどのモード特性を求める．しかし本研究では，逆にいくつかの固有値，固有ベクトルを与えて質量，慣性モーメント，重心位置，ばね定数を同定する手法を考える．ばね定数を同定する場合には，図1のような多数のばねのばね定数をそれぞれに同定することはできないので，図2に示す3個の並進ばねと3個の回転ばねのばね定数を同定した後，同定した6個のばね定数から図1のばねのばね定数を定める．図1と図2のばね定数の関係は後述する．重心位置を同定する場合には，重心位置をある定義した点からの絶対位置として表す必要があるため，任意なある点を原点とし，空間に固定された固定座標系で運動方程式を考える．今，図2に示すように固定座標系をO-XYZ，同定計算の初期値として与えられる剛体の重心を原点とする重心座標系をG-$X'Y'Z'$，ばね座標系をK-$X''Y''Z''$とする．ただしX', Y', Z'軸およびX'', Y'', Z''軸は固定座標系のX, Y, Z軸と平行になるように，またばね座標系の原点は図1の多数のばねの弾性中心になるように選んだとする．剛体の質量をm, X', Y', Z'軸まわりの慣性モーメントをJ_{xx}, J_{yy}, J_{zz}，慣性乗積をJ_{xy}, J_{yz}, J_{zx}，固定座標系における重心位置をG(G_x, G_y, G_z)，ばね座標系の原点位置をK(S_x, S_y, S_z), X'', Y'', Z''軸方向の並進ばね定数をK_x, K_y, K_z，軸まわりの回転ばね定数をK_ϕ, K_θ, K_ψとする．また剛体のX', Y', Z'軸方向の並進変位をx', y', z'，軸まわりの回転変位をϕ', θ', ψ'とすれば，微小変位の範囲では重心座標系における慣性力ベクトルは

$$\begin{Bmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \\ M'_\phi \\ M'_\theta \\ M'_\psi \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{xx} & -J_{xy} & -J_{yz} \\ & \text{SYM.} & & & J_{yy} & -J_{zx} \\ & & & & & J_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \\ \ddot{\phi}' \\ \ddot{\theta}' \\ \ddot{\psi}' \end{Bmatrix}$$

あるいは，

$$\boldsymbol{F}' = -[M]\ddot{\boldsymbol{U}}' \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

となる．また固定座標系における変位ベクトル$\boldsymbol{U}=\{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}^T$，慣性力ベクトル$\boldsymbol{F}_m=\{f_{mx}, f_{my}, f_{mz}, M_{m\phi}, M_{m\theta}, M_{m\psi}\}^T$と重心座標系における$\boldsymbol{U}'$, $\boldsymbol{F}'$の関係は次式となる．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U}' &= [T_m]\boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{F}_m &= [T_m]^T\boldsymbol{F}' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

ただし，

$$[T_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & G_z & -G_y \\ 0 & 1 & 0 & -G_z & 0 & G_x \\ 0 & 0 & 1 & G_y & -G_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式(1)，(2)より，固定座標系における慣性力ベクトルは次式となる．

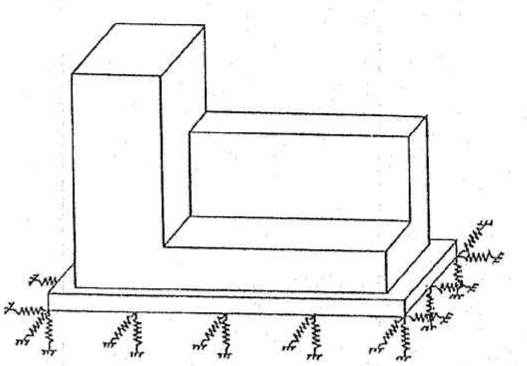

図1　剛体系モデル

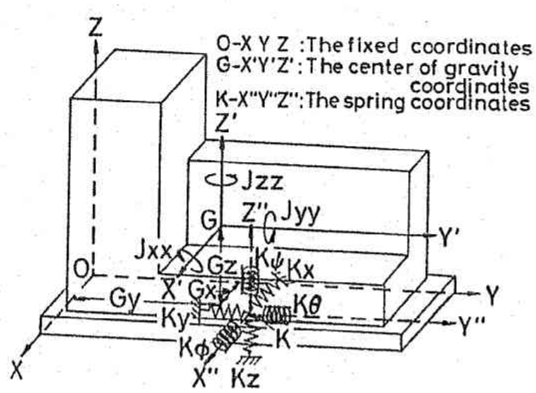

図2　同定計算用モデル

$$F_m=-[T_m]^T[M][T_m]\ddot{U} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

次に6個のばねの X'', Y'', Z'' 軸方向の並進変位を x'', y'', z'', 軸まわりの回転変位を ϕ'', θ'', ψ'' とすれば，ばね座標系における弾性力ベクトルは，

$$\begin{Bmatrix} f''_x \\ f''_y \\ f''_z \\ M''_\phi \\ M''_\theta \\ M''_\psi \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_x & & & & & \\ & K_y & & 0 & & \\ & & K_z & & & \\ & & & K_\phi & & \\ & 0 & & & K_\theta & \\ & & & & & K_\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ \phi'' \\ \theta'' \\ \psi'' \end{Bmatrix}$$

あるいは，

$$F''=-[K]U'' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となる．また固定座標系における変位ベクトル $\boldsymbol{U}$, 弾性力ベクトル $F_k=\{f_{kx}, f_{ky}, f_{kz}, M_{k\phi}, M_{k\theta}, M_{k\psi}\}^T$ とばね座標系における $\boldsymbol{U''}$, $\boldsymbol{F''}$ の関係は次式となる．

$$\left.\begin{aligned} U''&=[T_k]U \\ F_k&=[T_k]^T F'' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ただし，

$$[T_k]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & 1 & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & 1 & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式(4)，(5)より，固定座標系における弾性力ベクトルは次式となる．

$$F_k=-[T_k]^T[K][T_k]U \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

したがって，図2に示すモデルの固定座標系における自由振動方程式は次式となる．

$$[T_m]^T[M][T_m]\ddot{U}+[T_k]^T[K][T_k]U=0 \quad \cdots(7)$$

通常の振動解析では，式(7)に対応する次式の固有方程式

$$[T_k]^T[K][T_k]N_j=\lambda_j[T_m]^T[M][T_m]N_j \quad \cdots(8)$$

を解いて6組の固有値 λ_j, 固有ベクトル $N_j(j=1\cdots6)$ の固有ペアを求めることになるが，本研究では逆にいくつかの固有値，固有ベクトルを与えてモデル定数を同定することを目的としており，以下その手法について説明する．基本的考え方は前報で述べたので，重複する箇所は簡単に述べる．手法として感度解析を用いる方法を採用し，次のように行う．

（1） 同定すべきモデル定数（以下モデル変数と呼ぶ）および目標とするモーダルパラメータ（以下目標と呼ぶ）を選定，設定する．

（2） モデル変数の初期値を与えて固有値解析，感度解析を行い，初期モデルのモーダルパラメータ，モーダルパラメータ感度を算出する．

（3） 算出した感度を用いて，初期モデル変数修正後のモーダルパラメータを予測し，その予測値と目標との偏差を最小にするようにモデル変数を修正する．

（4） 修正されたモデル変数を用いて同様の過程を収束するまで繰返す．

図2のモデルのばね定数が同定された場合に，図1の多数のばねのばね定数，ばね支持位置を定める考え方を示す．図1のそれぞれのばね支持位置における X'', Y'', Z'' 軸（図2の K-$X''Y''Z''$ 座標系と同じとする）方向のばね定数を k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}, 支持位置を $L_i(L_{xi}, L_{yi}, L_{zi})(i=1,\cdots,n$：$n$ はばね支持点の個数）とすると，図2の6個のばね定数との関係は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} k_{xi}=K_x \\ &\sum_{i=1}^{n} k_{yi}=K_y \\ &\sum_{i=1}^{n} k_{zi}=K_z \\ &\sum_{i=1}^{n} (L_{zi}^2 k_{yi}+L_{yi}^2 k_{zi})=K_\phi \\ &\sum_{i=1}^{n} (L_{xi}^2 k_{zi}+L_{zi}^2 k_{xi})=K_\theta \\ &\sum_{i=1}^{n} (L_{yi}^2 k_{xi}+L_{xi}^2 k_{yi})=K_\psi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

以上の方程式を解いて未知ばね定数と支持位置を求めることになるが，一義的に決定できるのは6個の未知数であるから，（未知数の数－6個）の制約条件を付けて解く．

2・2 感度解析[7] モデル変数の修正量を求める際に必要な感度の計算法について説明する．ここでは，特に重心位置などの長さの次元を持つモデル変数の感度を，前報の感度解析手法を拡張して求める．モデル変数を一般に d_k と表すと，固有値 λ_j, 固有ベクトル N_j は d_k の関数であるので，それらを初期値まわりに Taylor 展開すると次式となる．

$$\left.\begin{aligned} \lambda_j&=\lambda_{j0}+\lambda'_{j0}\Delta d_k+\cdots \\ N_j&=N_{j0}+N'_{j0}\Delta d_k+\cdots \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

式(10)における λ'_j, N'_j は，それぞれ固有値，固有ベクトルの一次感度で次のようにして求める．固有方程式(8)を d_k について偏微分すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} &[T_k]^{T\prime}[K][T_k]N_j+[T_k]^T[K]'[T_k]N_j \\ &+[T_k]^T[K][T_k]'N_j+[T_k]^T[K][T_k]N'_j \\ &=\lambda'_j[T_m]^T[M][T_m]N_j+\lambda_j[T_m]^{T\prime}[M][T_m]N_j \\ &+\lambda_j[T_m]^T[M]'[T_m]N_j+\lambda_j[T_m]^T[M][T_m]'N_j \\ &+\lambda_j[T_m]^T[M][T_m]N'_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11) \end{aligned}$$

ここで $[M]'$, $[K]'$, $[T_m]'$, $[T_k]'$ はそれぞれ $[M]$, $[K]$, $[T_m]$, $[T_k]$ の各成分のうち，d_k に関する成分だけを残し，他の成分は零としたマトリックスとして簡単に求められる．式(11)の左から N_j^T を乗じ，$N_j^T[T_k]^T[K][T_k]=\lambda_j N_j^T[T_m]^T[M][T_m]$ の関係を用いれば，次式のように変形でき λ_j' が求まる．

$$\begin{aligned}\lambda_j'=\{&N_j^T([T_k]^{T\prime}[K][T_k]+[T_k]^T[K]'[T_k]\\&+[T_k]^T[K][T_k]')N_j\\&-\lambda_j N_j^T([T_m]^{T\prime}[M][T_m]+[T_m]^T[M]'[T_m]\\&+[T_m]^T[M][T_m]')N_j\}\\&/\{N_j^T[T_m]^T[M][T_m]N_j\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(12)$$

式(12)より λ_j' が求まると，N_j' については式(11)を変形した次の一次方程式を解くことにより求まる．

$$\begin{aligned}\{[T_k]^T[K][T_k]&-\lambda_j[T_m]^T[M][T_m]\}N_j'\\=\{(&\lambda_j'[T_m]^T[M][T_m]+\lambda_j[T_m]^{T\prime}[M][T_m]\\&+\lambda_j[T_m]^T[M]'[T_m]+\lambda_j[T_m]^T[M][T_m]')\\&-([T_k]^{T\prime}[K][T_k]+[T_k]^T[K]'[T_k]\\&+[T_k]^T[K][T_k]')\}N_j\end{aligned}\quad\cdots\cdots(13)$$

ただし式(13)の左辺の係数マトリックスは正則でないので，前報で述べたようにマトリックスのランクを一つ下げ N_j' を求める．

以上の方法で，$[M]$, $[K]$ を構成するモデル変数だけでなく，$[T_m]$, $[T_k]$ を構成する重心位置などの長さの次元を持つモデル変数のモーダルパラメータ感度も求めることができる．

2・3 モデル変数の同定法　通常，剛体系モデルの振動実験により得られる情報は，回転変位を直接測定することが困難であることより，固有振動数と剛体の任意な点の並進変位から成る振動モード形と考えられる．したがって同定を行う場合の目標として，3・2節までの回転成分を含む固有ベクトル $N_j=\{X_j, Y_j, Z_j, \Phi_j, \Theta_j, \Psi_j\}$ の形を用いるのではなく，測定したモード形をそのまま目標として設定できるように，初期モデルの固有ベクトル，固有ベクトル感度を並進成分だけから成るモード形およびその感度に変換することを考える．今，目標とする振動モード形 $\zeta_j^*=\{X_{1j},\cdots,X_{lj}, Y_{1j},\cdots,Y_{mj}, Z_{1j},\cdots,Z_{nj}\}$（$l, m, n$ はそれぞれ図2の X, Y, Z 軸方向の測定点の個数）の各成分が得られた測定点の位置を $P_i(P_{xi}, P_{yi}, P_{zi})$ $(i=l+m+n)$ とすると，ζ_j と N_j および ζ_j' と N_j' の関係は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\zeta_j&=[T_p]N_j\\\zeta_j'&=[T_p]N_j'\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(14)$$

ただし，

表 1　立体モデルのモデル定数

m kg	452.8	Jyz kg・m²	-4.422	kx N/m	3.000X10⁴
Jxx kg・m²	44.67	Jzx kg・m²	-0.4599	ky N/m	3.000X10⁴
Jyy kg・m²	14.67	Gx m	-0.01250	kz N/m	3.000X10⁴
Jzz kg・m²	41.93	Gy m	-0.06250	Lx m	0.3000
Jxy kg・m²	-1.769	Gz m	0.2188	Ly m	0.7500

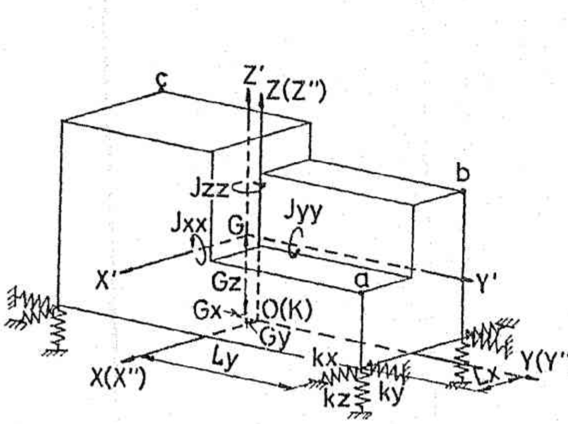

図 3　立体モデル（固有値解析用モデル）

表 2　各モデルの固有振動数（Hz）

Mode number	Initial model	Object model	Modified model
1st	1.994	1.994	1.986
2nd	2.460	2.460	2.460
3rd	2.591	2.591	2.593
4th	5.514	6.000	6.062
5th	6.559	8.750	8.810
6th	7.086	12.00	11.92

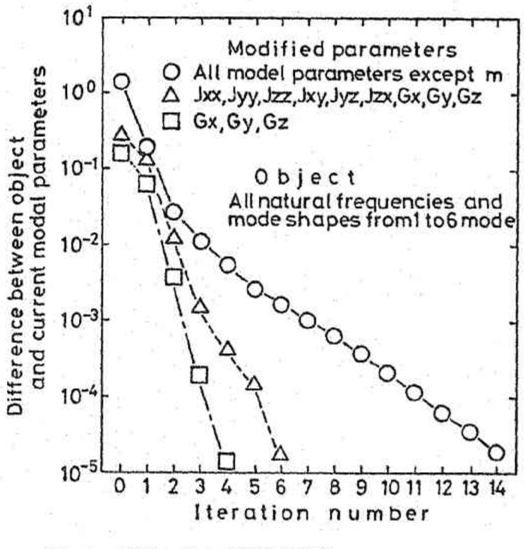

図 4　繰返し数と偏差の関係
（目標が真の固有値解析結果の場合）

$$
[T_p]=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & P_{z1} & -P_{y1} \\
 & & & \vdots & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & P_{zl} & -P_{yl} \\
0 & 1 & 0 & -P_{z,l+1} & 0 & P_{x,l+1} \\
 & & & \vdots & & \\
0 & 1 & 0 & -P_{z,l+m} & 0 & P_{x,l+m} \\
0 & 0 & 1 & P_{y,l+m+1} & -P_{x,l+m+1} & 0 \\
 & & & \vdots & & \\
0 & 0 & 1 & P_{y,l+m+n} & -P_{x,l+m+n} & 0
\end{bmatrix}
$$

また固有振動数 f_j と固有値 λ_j の関係が $f_j=\sqrt{\lambda_j}/2\pi$ であることより，固有振動数感度 f_j' と固有値感度 λ_j' の関係は $f_j'=\lambda_j'/(8\pi^2 f_j)$ となる．この関係および式(14)の関係式を式(10)に代入することにより，次式が得られる．

$$
\left.\begin{aligned}
f_j&=\sqrt{\lambda_{j0}}/2\pi+\lambda_{j0}'/(8\pi^2 f_{j0})\Delta d_k+\cdots\\
&=f_{j0}+f_{j0}'\Delta d_k+\cdots\\
\zeta_j&=[T_p]N_{j0}+[T_p]N_{j0}'\Delta d_k+\cdots\\
&=\zeta_{j0}+\zeta_{j0}'\Delta d_k+\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)
$$

初期モデルに対して固有値解析，感度解析を行い，そのときの固有振動数 f_{j0}，振動モード形 ζ_{j0} およびそれぞれに対する感度 f_{j0}', ζ_{j0}' が求まっており，目標として f_j^*, ζ_j^* が設定されたとする．そこで式(15)で得られるモデル変数修正後の予測値 f_j, ζ_j が，f_j^*, ζ_j^* に接近してゆくようにモデル変数の修正量 Δd_k を決めてゆく．記号の統一化をはかるために予測値をまとめて ξ，初期値を ξ_0，目標を ξ^*，モデル変数の修正量を $\boldsymbol{\Delta d}$，さらに感度をまとめて $[V]$ とする．今，式(15)において二次以上の高次の感度を無視すると，モデル変数修正後の予測値 ξ は，

$$\xi=\xi_0+[V]\boldsymbol{\Delta d} \quad \cdots\cdots(16)$$

と表され，ξ と ξ^* の偏差の二乗和 E

$$E=(\xi^*-\xi)^T[W](\xi^*-\xi) \quad \cdots\cdots(17)$$

が最小になるように $\boldsymbol{\Delta d}$ を決める．ここで $[W]$ は目標の重要度を決める対角マトリックスである．式(16)を式(17)に代入し，E を $\boldsymbol{\Delta d}$ の成分 Δd_k について偏微分して得られた式を零とおくことにより，次の連立方程式が導かれる．

$$\{[V]^T[W][V]\}\boldsymbol{\Delta d}=[V]^T[W](\xi^*-\xi_0) \quad \cdots(18)$$

式(18)を解くことにより Δd_k を求めることができるが，式(16)中の $[V]$ は一次感度より成るマトリックスであるため，式(18)で得られた Δd_k が大きい場合には予測値の誤差が大きくなり，最良なモデルとはいえない．したがって Δd_k の大きさを制限し，小さな修正を積み重ねた反復計算により最良なモデル変数を求める必要がある．

なお前報の考察より，目標を設定する場合に目標の数をモデル変数の数より多くとり，式(18)の左辺の係数マトリックスが特異にならないようにする．

3. 計　算　例

提示した手法の妥当性と有効性を検討するために，簡単な剛体系モデルを対象として同定計算，チューニング計算を試みた．

3・1 固有値解析結果を基にした同定計算例　同定計算例として，既知のモデル定数から得られた固有値解析結果を目標とする場合を示す．対象として図3に示すように，ばね座標系の原点 K から X'' 方向に L_x, Y'' 方向に L_y だけ離れた，原点に対して対称な4

表 3　改良されたモデルと初期モデルのモデル定数の比較

Model parameter		Initial model	Modified model
kx	N/m	3.000X10⁴	5.024X10⁴
ky	N/m	3.000X10⁴	2.833X10⁴
kz	N/m	3.000X10⁴	2.958X10⁴
Lx	m	0.3000	0.2524
Ly	m	0.7500	1.0454

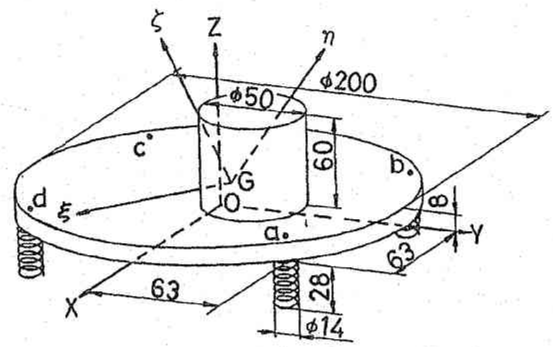

図 5　鋼製供試体（実験モデル）

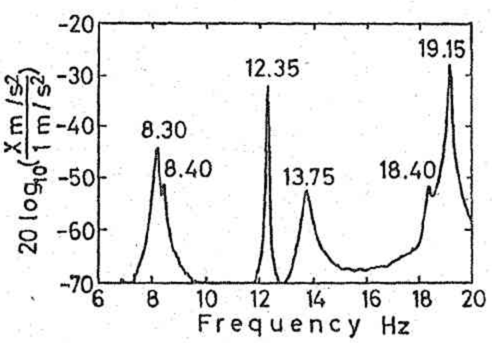

図 6　パワースペクトル（点 a の X 方向の応答）

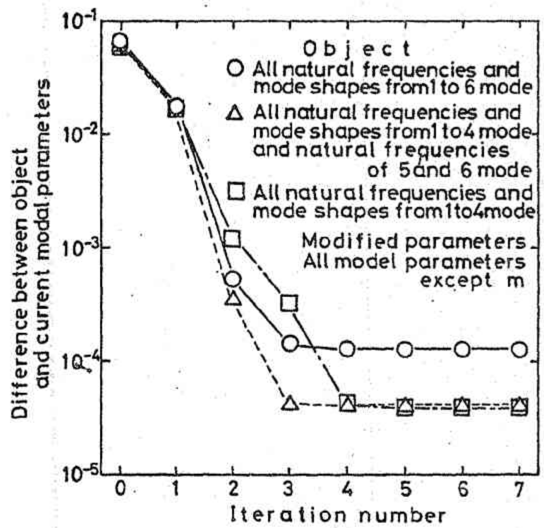

図 7　繰返し数と偏差の関係
（目標として実測データを用いる場合）

表 4　同定されたモデル変数とモデル定数の比較

Model Parameter	Case	1 (No = 42)		2 (No = 30)		3 (No = 28)	
	Correct Value	Final Value	Error %	Final Value	Error %	Final Value	Error %
m　kg	3.029	3.029	—	3.029	—	3.029	—
J_{xx} kg·m²	7.238×10^{-3}	7.255×10^{-3}	0.23	7.143×10^{-3}	- 1.31	7.480×10^{-3}	3.34
J_{yy} kg·m²	6.916×10^{-3}	6.945×10^{-3}	0.42	6.927×10^{-3}	0.16	7.359×10^{-3}	6.41
J_{zz} kg·m²	1.208×10^{-2}	1.231×10^{-2}	1.90	1.226×10^{-2}	1.49	1.217×10^{-2}	0.75
J_{xy} kg·m²	3.862×10^{-4}	3.782×10^{-4}	- 2.07	3.944×10^{-4}	2.12	2.422×10^{-4}	-37.29
J_{yz} kg·m²	6.373×10^{-4}	6.497×10^{-4}	1.95	6.264×10^{-4}	- 1.71	6.067×10^{-4}	- 4.80
J_{zx} kg·m²	4.248×10^{-4}	4.365×10^{-4}	2.75	4.267×10^{-4}	0.45	4.086×10^{-4}	- 3.81
G_x　m	6.127×10^{-3}	6.184×10^{-3}	0.93	6.163×10^{-3}	0.59	6.151×10^{-3}	0.39
G_y　m	9.191×10^{-3}	9.281×10^{-3}	0.98	9.201×10^{-3}	0.11	9.183×10^{-3}	- 0.09
G_z　m	1.521×10^{-2}	1.520×10^{-2}	- 0.07	1.508×10^{-2}	- 0.85	1.515×10^{-2}	- 0.39
k_x　N/m	2.125×10^{3}	2.162×10^{3}	1.74	2.162×10^{3}	1.74	2.163×10^{3}	1.79
k_y　N/m	2.125×10^{3}	2.161×10^{3}	1.69	2.161×10^{3}	1.69	2.162×10^{3}	1.74
k_z　N/m	4.721×10^{3}	4.773×10^{3}	1.10	4.766×10^{3}	0.95	4.767×10^{3}	0.97
L_x　m	6.300×10^{-2}	6.989×10^{-2}	10.94	6.956×10^{-2}	10.41	7.007×10^{-2}	11.22
L_y　m	6.300×10^{-2}	6.993×10^{-2}	11.00	6.979×10^{-2}	10.78	7.005×10^{-2}	11.19

箇所を，X'', Y'', Z'' 軸方向のばね定数がそれぞれ k_x, k_y, k_z のばねで支持されている六自由度系の立体モデルを取り上げる．座標系として，固定座標系をばね座標系と一致させ，重心座標系を固定座標系と平行にとった．表 1 に図 3 のモデルのモデル定数を示すが，表中に記していないばね座標系におけるばね支持位置高さ L_z は，すべてのばね支持位置高さが原点 K と一致するため $L_z=0$ となる．表 1 の値を用いて通常の固有値解析を行うと，6 個の固有振動数と回転成分を含む 6 組の固有ベクトルが得られる．この固有ベクトルを，式(14)の関係を用いて並進成分のみから成る振動モード形に変換する．ただし目標とするモード形の成分は，剛体の運動を一義的に決定するのに最低必要な，図 3 中の点 a の Z 方向，点 b の X, Y, Z 方向，点 c の X, Z 方向に対応する 6 成分とする．したがって目標の数（以下 N_0 と記す）は，最大 6 個の固有振動数と 6×6 個のモード形成分の合計 42 個（$N_0=42$）となる．ここではこの 42 個の値を目標とし，同定計算用のモデル変数として考えられる質量 m, 慣性モーメント J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, 慣性乗積 J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, 重心位置 G_x, G_y, G_z および 12 個のばねの合成ばね定数 K_x, K_y, K_z, K_ϕ, K_θ, K_ψ の合計 16 個のうち，質量 m だけが既知の場合，m とすべてのばね定数が既知の場合および重心位置だけが未知の場合の三とおりのモデル変数について同定計算を行った．既知のモデル定数の値は，表 1 の値および表 1 の値を式(9)に代入し算出した値を用いた．また目標の重みはすべて 1.0，モデル変数修正量 Δd_k は，$0.1\,d_k$ を超えないように制限した．モデル変数の初期値を表 1 の値の 80％の値として計算した場合の，繰返し数と式(17)の偏差 E との関係を図 4 に示す．ただし，計算はすべてパーソナルコンピュータ（HP 9816 S）で行った．図 4 において，モデル変数の数が 3 個の場合には 4 回で，9 個の場合には 6 回で，15 個の場合でも 12 回で偏差が 10^{-4} 以下になり，同定されたモデル変数はすべて表 1 の値と等しくなった．

3・2　固有振動数のチューニング例　4・1 節のモデルを対象として，ばね定数，ばね支持位置を調整して固有振動数を所望の値に分散配置するチューニング例を示す．今，励振力として基本周波数 5.5 Hz および 6.5 Hz を有すると想定した機械の防振支持において，垂直方向の固有振動数が 5.5 Hz の 50％以下になるように初期設計したモデルを，4・1 節図 3 のモデルと考える．表 2 の右から 3 列めに表 1 の値を用いて計算した固有振動数を示すが，三次が垂直方向の固有振動数であり，四次，五次がそれぞれ Y 軸まわり，X 軸まわりのロッキングモードの固有振動数である．したがって，ここで想定した励振力に対して一次から三次までは問題はないが，四次が 5.5 Hz の励振力と共振しており，さらに五次が 6.5 Hz の励振力と共振していることになる．そこで，四次および五次の固有振動数を移動させて共振回避させることを考えるが，一次から三次までの固有振動数が大きくならないように，しかも六次の固有振動数が 5.5 Hz や 6.5 Hz の 2 倍高調波成分と共振しないようにしながら，四次の固有振動数を励振周波数 5.5 Hz と 6.5 Hz の谷間に，五次を 6.5 Hz と 5.5 Hz の 2 倍高調波成分 11 Hz の谷間にチューニングする．そのような目標として，表 2 の右から 2 列めの 6 個の固有振動数を設定し，モデル変数とした 6 個のばね定数 K_x, K_y, K_z, K_ϕ, K_θ, K_ψ を

調整するチューニング計算を行った．ただし，残りの既知のモデル定数は4・1節同様表1の値を用いた．チューニングされたモデルの固有振動数を表2の右から1列めに示すが，一次から三次までが移動せず，四次が5.5 Hzと6.5 Hzの谷間に，五次が6.5 Hzと5.5 Hzの2倍高調波11 Hzの谷間に，六次が11 Hzと6.5 Hzの2倍高調波13 Hzの谷間にチューニングされていることがわかる．またチューニングされたモデル変数と初期モデルのモデル定数の比較を表3に示すが，x方向のばね定数k_xおよび支持位置L_x, L_yが大きく変わっていることがわかる．ただし，表3の値はチューニングされた6個のばね定数を式(9)に代入し，X'', Y'', Z''各方向の四つのばねがすべて同一の特性を有し，ばね座標系の原点Kに対して対称な位置に取付けられるとして求めた，一つのばねのばね定数および支持位置である．

3・3　実測データからの設計諸元の同定　ここでは，対象として図5に示す鋼製の円盤と円筒より成る剛体が，4個の同一のコイルばねで支持された構造体を取り上げ，この供試体に対して振動実験を行い，固有振動数，振動モード形を測定し，その情報を基に供試体のモデル定数（設計諸元）を同定する．座標系のとり方は4・1節と同様であり，図5中に固定座標系だけを示す．また，このモデルの形状より算出した重心位置，慣性主軸を参考のため図5に併記する．実験方法は図5中に示す点a, b, c, dに加速度計を取付け，剛体を自由振動させたときの点aのX方向の応答をFFTアナライザに導き，パワースペクトルを求める．図6にパワースペクトルを示すが，図6中の6個のピークから固有振動数を知ることができる．振動モード形は点dのX方向の応答を規準とし，点a, b, cの加速度計を順次X, Y, Z方向に取付け，点dの応答との振幅比および位相差を固有振動数ごとに求めることで得た．その結果，モード形は一次，四次，六次がξ方向とη軸，ζ軸まわりの振動が連成したモード形，二次，三次，五次がη方向，ζ方向とξ軸まわりの振動が連成したモード形となっていた．このモデルのモデル定数としては，質量m，慣性モーメントJ_{xx}, J_{yy}, J_{zz}，慣性乗積J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}，重心位置G_x, G_y, G_zそして4個のコイルばねの合成ばね定数$K_x, K_y, K_z, K_\phi, K_\theta, K_\psi$の合計16個であるが，ここでは$m$を除いた15個のモデル定数を未知として同定計算を行う．目標としては，測定で得られた6個の固有振動数と図5中の点aのX, Y, Z方向，点bのY, Z方向，点cのZ方向の6成分から成る6組の振動モード形のうち，次に示す三とおりの場合を考えた．

ケース1：一次から六次までのすべての固有振動数と振動モード形(N_0=42)の場合．

ケース2：一次から六次までの固有振動数と一次から四次までの振動モード形(N_0=30)の場合．

ケース3：一次から四次までのすべての固有振動数と振動モード形(N_0=28)の場合．

目標の重みとして，固有振動数を10.0，振動モード形を1.0とし，モデル変数の初期値を図5のモデルの質量および形状から算出した値の90％の値として計算を行った場合の，繰返し数と偏差Eの関係を図7に示す．図7において，すべての場合に4回ぐらいで収束状態に近くなっていることがわかる．また，表4に三とおりの目標に対して同定されたモデル変数と，図5のモデルの質量，形状から算出した慣性モーメント，慣性乗積，重心位置，およびコイルばね定数算出式[8]から算出したばね定数との比較を示す．ただし同定されたモデル変数のうち，ばね定数k_x, k_y, k_zおよびばね支持位置L_x, L_yは，同定された$K_x, K_y, K_z, K_\phi, K_\theta, K_\psi$の値を式(9)に代入し，四つのコイルばねが同じ特性を持ち，原点に対して対称な位置に取付けられたとして求めた，一つのコイルばねのばね定数，支持位置である．表4において，L_x, L_yの誤差が大きいのは正しい値として原点からばねの中心までの距離を考えたためであり，実際のばね支持位置L_x, L_yは原点からばねの外側の端までの距離，すなわち$L_x = L_y = 0.07$ mではないかと考えられる．L_x, L_yを除けばケース1，ケース2とも誤差は小さく，供試体の良い同定が行われたと思われるが，ケース3の一次から四次までだけの情報を基に同定した場合には，ケース1, 2に比べて慣性モーメント(J_{zz}は除く)，慣性乗積に誤差の大きいものがある．これは慣性モーメント，慣性乗積は五次・六次モードに影響を大きく及ぼすため，逆に五次・六次モードの情報が全くない場合には，精度良い同定が行われにくいと思われる．したがって同定計算を行う場合には，少なくともすべての固有振動数を目標に入れるべきであると考えられるが，モデル変数の数が少ない場合にはこの条件をゆるめることができる．

4. 結　　言

前報の感度解析による同定手法を拡張し，ばねで支持された剛体系の慣性モーメント，ばね定数および重心位置を，固有振動数，振動モード形の情報から同定する手法を提示した．そしてこの手法を防振支持系の固有振動数チューニングに応用すべく，所望の固有振動数配置を達成するためのばね定数や支持位置の選定

を試みた．さらに仮設置された防振支持系の振動実測データから，系の慣性モーメント，ばね定数および重心位置を精度良く算定することをめざして，簡単な鋼製モデルの振動実験を実施し，同定が良好に行えることを示した．

以上により，本手法は剛体系の防振支持設計に有効に活用できる見通しを得た．

文　献

（1） 谷口編，振動工学ハンドブック，（昭56），811，養賢堂．
（2） 古川・大久保，昭和60年度精機学会春季大会学術講演会論文集，（昭60-3），839．
（3） 大熊・長松，機論，**50**-464，C（昭60），719．
（4） 長松，モード解析，（昭60），165，培風館．
（5） 岡田・ほか2名，機論，**51**-471，C（昭60），3051．
（6） 藤川・鞍谷・ほか2名，機論，**52**-476，C（昭61），1224．
（7） 藤川・ほか3名，機講論，No. 830-6（昭58-6），254．
（8） ばね技術研究会編，ばねの設計，第2版（昭53），53，丸善．

討　論

〔質問〕　福田敏男〔東京理科大学工学部〕

（1） 実験では，システム同定のためどのようなデータ（定常，非定常）を用いられたのか．

（2） 振動システム同定する際に，初期誤差はどの程度まで許されるのか．

〔回答〕　（1） 実測データからの同定計算において，目標として設定する固有振動数，振動モード形は，図5に示す供試体において一次から六次までの各モードごとに励起しやすい位置を，それぞれインパクトハンマで加振し，自由振動させたときの応答から得た．

（2） 同定しようとする慣性モーメント，重心位置などのモデル定数（以下モデル変数と呼ぶ）の初期値設定の目安を定量的に述べることは困難である．たとえば，モデル変数の数が少ない場合と多い場合とでは，初期値の誤差により収束性が大きく異なる．また，モデル変数の組合せによっても収束性が異なる．さらに，目標とする固有振動数，振動モード形により，たとえば初期モデルが真のモデルの縮小，拡大モデルのように振動モード形は近いが，固有振動数が大きく異なる場合には，初期値の誤差が大きくとも収束する．しかし，各モードの固有振動数が非常に接近している場合や振動モード形が近い場合には真値に収束しにくい．

したがって，同定しようとする対象モデルやモデル変数により初期値設定の目安が変わってくるが，本報で取り上げた図3のモデルの場合には，重心位置（モデル変数3個）だけを同定する場合に初期値を真値の50％にしても8回の繰返し計算で真値に収束したが，質量を除いた残りの15個のモデル定数を同定する場合には，初期値を真値の80％にしても14回の繰返し計算を要する．