日本機械学会論文集(C編)
52巻476号(昭61-4)

論文 No. 85-0644 A

感度解析を用いた振動システムの同定*
(第1報, 解析方法の説明と基礎的検討)

藤川 猛**, 新田 勝**
沖田耕三***, 鞍谷文保***

System Identification of Vibration Systems Using Sensitivity Analysis
(1 st Report, Explanation of the Analysis Method and Fundamental Considerations)

by Takeshi FUJIKAWA, Masaru NITTA,
Kozo OKITA, and Fumiyasu KURATANI

The authors attempt to construct a system with several degrees of freedom having the same modal parameters as those obtained by FEM analysis or measurement. In this paper, a system identification method using sensitivity analysis is proposed for an undamped lumped-mass model. In the method, model parameters such as mass values or spring constants are initially given and then modified by the least-squares minimization procedure to minimize the difference between the predicted modal parameters and the desired values. Some conditions on the selection of the model parameters and the desired values are discussed for obtaining the solution of system identification. System constructions, for example, with three or five degrees of freedom models are shown, thereby demonstrating typical characteristics of the presented method.

Key Words : Vibration, Vibration System, System Identification, Sensitivity Analysis, Eigen Value Analysis

1. 緒 言

構造物の振動解析を行う場合, 有限要素法 (FEM) を用いて連続体構造物を細かく分割すれば, かなり忠実なモデルを組み立てることができ解析精度も良好である. しかし, 多くの場合大形計算機を長時間用いてばく大な計算費用を必要とする. したがって, 構造物を小自由度の質点系にモデル化して扱うほうが有利な場合も少なくない. 例えば, 防振装置の設計において機械やイナーシャブロックは剛体とし, これに防振ばねを加えた簡単な質量, ばね系のモデルで扱える. 構造物の弾性変形が問題になる振動問題においても, この構造物を簡単な多質点系にモデル化できれば, この構造物にさらに他の部分系や非線形要素が加わった複雑な全体系の解析も短い計算時間で実行できる.

連続体構造物を簡単な多質点系にモデル化する場合に重要なことは, 低次モードの固有振動数, 固有ベクトルなどの振動特性をなるべく精度よく表現することである. 材料力学的な計算だけでは小自由度多質点系の質量, ばね定数の算出が難しい場合には解析的な方法として, 例えばFEMで離散化したモデルをGuyanの静縮小によって節点縮小を行う方法, FEM解析で得た低次のモード座標を物理座標系に再変換する方法などが考えられる. しかしこれらの場合, もとの大規模な質量, 剛性マトリックス $[M]$, $[K]$ から縮小系の $[M]$, $[K]$ が得られるものの, 系のモデル定数である質量, ばね定数は陽な形で現れずモデルのイメージがわきにくい. また実験的方法としては, 加振実験で得た伝達関数からシステム同定を行って振動特性を把握する, いわゆる実験モード解析法が広くゆきわたっている. しかし, 実験モード解析では同定した内容をモード座標系で表現する方法が支配的である. 振動特性を物理座標系の質量, 減衰, 剛性マトリックスで同定しようとする研究もいくつかはみられる. 一つの考え方として, 固有振動数, 固有ベクトルなどのモーダルパラメータを用いることなく, 伝達関数から直接 $[M]$, $[C]$, $[K]$ を決定する研究[1]がある. また別の考え方として, モーダルパラメータを用いて $[M]$, $[C]$, $[K]$ を決定する研究[2][3]があるが, どちらも質量, ばね定数などのモデル定数までの完全な同定はなされていない. モーダルパラメータ感度を用いて, 目標とする固有振動数, 応答変位などに合うようにモデル定数

* 昭和60年11月20日 関西支部第245回講演会において講演, 原稿受付 昭和60年5月16日.
** 正員, (株)神戸製鋼所(〒651 神戸市中央区脇浜町1-3-18).
*** 正員, 兵庫県立工業試験場(〒654 神戸市須磨区行平町3-1-12).

を修正する最適設計に関する研究[4][5]もあるが，小自由度のモデルを構築する場合のように多数のモデル定数を同時に修正することはなされていない．同様に，構造解析プログラム ASTRO/MOVE[6]~[8]でも，測定されたモーダルパラメータに合うように FEM モデルを修正する方法を提供しているが，これは大自由度の FEM モデルにおいて小数の不確定要素を推定しようとするものである．

そこで本研究では，FEM 解析あるいは加振実験などで得た固有振動数，固有ベクトルなどの情報を基に小規模多質点系モデルのシステム同定を行う場合に，物理座標系の $[M]$, $[K]$ にとどまらず，質量，ばね定数などのモデル定数までさかのぼって同定する．その意義として，以下のことがあげられる．

（1） 物理的イメージの浮かぶモデルを見いだすことによって振動現象の理解を助ける．

（2） 振動モデルの自由度削減の一手法とする．

（3） 機械構造物の慣性モーメント，重心位置，剛性などを定める手段に利用する．

（4） 所望の振動特性が得られるような機械設計を行うための質量や剛性の適切な選択が行える手段を提供する．

これらを目的とする研究の第一歩として，本報ではまず不減衰振動系を取り上げ，固有振動数，固有ベクトルを既知とし，それと同じ振動特性を有する小規模多質点集中質量系のモデル定数，すなわち質量 m_i, ばね定数 k_{ij} を同定する手法を検討する．

2. おもな記号

$[M]$：質量マトリックス
$[K]$：剛性マトリックス
$[V]$：感度マトリックス
$[W]$：重み係数マトリックス
$[A]$：モデル定数マトリックス
$[\Omega]$：固有値マトリックス
$[N]$：固有ベクトルマトリックス
$\boldsymbol{x}$：変位ベクトル
$\boldsymbol{U}_j$：固有ベクトル
$\boldsymbol{U}'_j$：固有ベクトル感度
$\boldsymbol{d}$：モデル変数ベクトル
$\Delta\boldsymbol{d}$：修正量ベクトル
ϕ：モーダルパラメータベクトル
m_i：質量
k_{ij}：ばね定数
n：自由度
N_p：モデル変数の数
N_0：目標値の数
d_k：モデル変数
λ_j：固有値
λ'_j：固有値感度

添　字

i：質量要素番号
ij：ばね要素番号
j：モード次数
$_0$：初期値
*：目標値

3. 解析理論

3・1 振動解析と逆問題　図1に示すような多質点集中質量系モデルにおいて，質量は集中質量とし，ばねは質点と固定端を接続するばね（絶対ばね）と質点間を接続するばね（相対ばね）を考える．図1はばねをせん断ばねと考え，紙面に垂直な方向の面外振動を想定した図を示している．

図1のモデルの自由振動方程式は，マトリックスを用いて

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}}+[K]\boldsymbol{x}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

と表される．質点 i の質量を m_i, 質点 i と固定端を接続する絶対ばねのばね定数を k_{ii}, 質点 i, j 間を接続する相対ばねのばね定数を k_{ij}, 系の自由度を n とすると $[M]$, $[K]$ はつぎのようになる．

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix},\ [K]=\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

ただし $K_{ii}=k_{ii}+\sum_{l=1}^{n}k_{il}$, $K_{ij}=-k_{ij}$ である．式(1)に対応する固有方程式は

$$[K]\boldsymbol{U}_j=\lambda_j[M]\boldsymbol{U}_j \quad\cdots\cdots(2)$$

となり，これを解けば n 組の固有値 λ_j, 固有ベクトル $\boldsymbol{U}_j(j=1, \cdots, n)$ の固有ペアが得られる．

通常の振動解析ではモデル定数 m_i, k_{ij} を与えて式(2)を導き，これを解いて λ_j, $\boldsymbol{U}_j$ などのモーダルパ

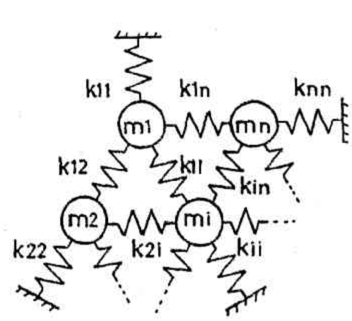

図1　多質点集中質量系モデル

ラメータを求めることになる．しかし，ここでは逆にいくつかの固有値，固有ベクトルを与えて，モデル定数 m_i, k_{ij} を同定してゆく方法を考える．その手法として感度解析を用いる方法を採用し，つぎのように行う．

(1) 系を表現するモデルの自由度を決め，同定すべき質量，ばねの選定および目標とするモーダルパラメータの設定を行う．

(2) 選定したモデル定数(以下モデル変数と呼ぶ) m_i, k_{ij} の初期値を設定し，通常の方法で固有値解析を行う．さらにこのとき各モデル変数に対するモーダルパラメータ感度を算出しておく．

(3) 算出した感度を用いて初期モデルを変更したときのモーダルパラメータを予測する．その予測値と設定した目標モーダルパラメータ(以下目標値と呼ぶ)との偏差を最小にするようにモデル変数を修正する．

(4) 修正されたモデル変数を用いて再度固有値解析を行い，以後同様の過程を収束するまで繰り返す．

3·2 感度解析 この節ではモデル変数の修正量を決める際に必要な感度の計算法[9]について述べる．モデル変数である m_i, k_{ij} などを一般に d_k と表すと固有値 λ_j，固有ベクトル $\boldsymbol{U}_j$ は d_k の関数であるので，それらを初期値まわりに Taylor 展開する．

$$\left.\begin{aligned}\lambda_j&=\lambda_{j0}+\lambda_j'\Delta d_k+\cdots\cdots\\ \boldsymbol{U}_j&=\boldsymbol{U}_{j0}+\boldsymbol{U}_j'\Delta d_k+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式(3)における $\lambda_j', \boldsymbol{U}_j'$ はそれぞれ固有値，固有ベクトルの一次感度と呼ばれるもので，つぎのようにして求めることができる．固有方程式(2)を d_k について偏微分すると次式が得られる．

$$[K]'\boldsymbol{U}_j+[K]\boldsymbol{U}_j'=\lambda_j'[M]\boldsymbol{U}_j+\lambda_j[M]'\boldsymbol{U}_j+\lambda_j[M]\boldsymbol{U}_j' \quad\cdots\cdots(4)$$

左から $\boldsymbol{U}_j^T$ を乗じ $\boldsymbol{U}_j^T[K]=\lambda_j\boldsymbol{U}_j^T[M]$ の関係を用いるとつぎのように変形でき λ_j' が求まる．

$$\lambda_j'=\{\boldsymbol{U}_j^T[K]'\boldsymbol{U}_j-\lambda_j\boldsymbol{U}_j^T[M]'\boldsymbol{U}_j\}/\{\boldsymbol{U}_j^T[M]\boldsymbol{U}_j\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここで $[K]', [M]'$ は $[K], [M]$ のうち，モデル変数 d_k についての成分だけを残し，他は零としたマトリックスとして簡単に求められる．式(5)より λ_j' が求まると，$\boldsymbol{U}_j'$ については式(4)を変形して

$$\{[K]-\lambda_j[M]\}\boldsymbol{U}_j'=\{\lambda_j'[M]+\lambda_j[M]'-[K]'\}\boldsymbol{U}_j\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

とすれば，右辺は既知量であるので式(6)の一次方程式を解くことにより $\boldsymbol{U}_j'$ が求まる．ただし式(6)の左辺のマトリックス $\{[K]-\lambda_j[M]\}$ はこのままでは正則でないので，固有値に重根がない場合には $\boldsymbol{U}_j'$ の成分のうち一つは零(固有値ベクトルのその成分はモデル変数変更後も変化しない)と拘束することによって，マトリックスのランクを一つ下げ $\boldsymbol{U}_j'$ を求める．

以上のようにして式(5)，(6)より，モデル変数を変更したときの固有値，固有ベクトルに対する感度 $\lambda_j', \boldsymbol{U}_j'$ を計算することができる．

3·3 モデル変数の同定法 初期モデル変数に対して固有値解析，感度解析を行い，そのときの固有値 λ_{j0}，固有ベクトル $\boldsymbol{U}_{j0}$ およびそれぞれに対する感度 $\lambda_{j0}', \boldsymbol{U}_{j0}'$ が求まっているとする．一方固有値，固有ベクトルのうち，目標値として $\lambda_j^*, \boldsymbol{U}_j^*$ が与えられたとする．そこで式(3)で得られるモデル変更後の予測値 $\lambda_j, \boldsymbol{U}_j$ が $\lambda_j^*, \boldsymbol{U}_j^*$ に接近してゆくようにモデル変数の修正量 Δd_k を決めてゆく．記号の統一化をはかるために $\lambda_j, \boldsymbol{U}_j$ の各成分をまとめて ϕ とし，初期値のまとめたものを ϕ_0，目標値のまとめたものを ϕ^* とする．さらにモデル変数の修正量をまとめて $\Delta\boldsymbol{d}$ とし，各モデル変数のモーダルパラメータに対する感度をまとめて $[V]$ とする．いま式(3)において二次以上の高次の感度を無視すると，モデル変更後の予測値 ϕ はつぎのように表される．

$$\phi=\phi_0+[V]\Delta\boldsymbol{d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

これを目標値 ϕ^* と比較し，最小二乗法を適用してその誤差が最小になるように $\Delta\boldsymbol{d}$ を決める．その場合の評価量として，次式で定義するスカラ量を考える．

$$E=(\phi-\phi^*)^T[W](\phi-\phi^*)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ここで $[W]$ は目標値の数と等しい数の重み係数から成る対角マトリックスであり，目標値の重要度に応じて適宜その大きさを決定してやる．式(7)を式(8)に代入し，E を $\Delta\boldsymbol{d}$ の成分 Δd_k について偏微分するとつぎのようになる．

$$\boldsymbol{E}=2[V]^T[W]\{\phi_0+[V]\Delta\boldsymbol{d}-\phi^*\}\quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

ここで $\boldsymbol{E}$ は $\partial E/\partial d_k$ をならべたベクトルである．式(9)を零とおくことにより，$\Delta\boldsymbol{d}$ の成分を未知数とする次式が求まる．

$$\{[V]^T[W][V]\}\Delta\boldsymbol{d}=[V]^T[W](\phi_0-\phi^*)\cdots(10)$$

このように現状モデルに対するモーダルパラメータ ϕ_0 および感度 $[V]$ を計算しておけば，式(10)の一次方程式を解くことにより，目標のモーダルパラメータ ϕ^* に近づくようなモデル変数の修正量 $\Delta\boldsymbol{d}$ を求めることができ，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_0+\Delta\boldsymbol{d}$ よりモデル変数の値が決まる．しかし式(7)の感度マトリックス $[V]$ の成分は，式(3)の Taylor 展開において二次以上の項を省略した一次感度より成るマトリックスであるため，$\Delta\boldsymbol{d}$ の成分 Δd_k の値が大きな場合には予測値の誤差が大きくなる．したがって式(10)で得た $\Delta\boldsymbol{d}$ の値が最良状態ではなく，小さな修正の積み重ねの反復計算により最

良状態へもってゆく必要がある．

3・4　解の存在とモデル変数，目標モーダルパラメータの設定に関する検討　同定する振動系モデルの自由度を n とし，図1に示すような n 個の質量 $m_i(i=1,\cdots,n)$，n 個の絶対ばね $k_{ii}(i=1,\cdots,n)$，$n(n-1)/2$ 個の相対ばね $k_{ij}(i=1,\cdots,n,\ j=i+1,\cdots,n)$ から成っているモデルの構築を考える．図2のように複数個のばねが並列あるいは直列に結合されている場合は，これらを集約して一つのばねに置き換えるものとする．このようにすると n 自由度系モデルのモデル定数の数は，合計 $n+n+n(n-1)/2=n(n+3)/2$ 個となる．ところで n 自由度系の固有方程式は式(2)のようになるが，ここで $\boldsymbol{N}_j=[M]^{1/2}\boldsymbol{U}_j$，$[A]=[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}$ とおくと，つぎの標準形に変換される．

$$[A]\boldsymbol{N}_j=\lambda_j\boldsymbol{N}_j \quad\cdots\cdots(11)$$

ここで $[A]$ は $n\times n$ の対称マトリックスである．この固有方程式は n 組の固有値と固有ベクトルの固有ペアを有しており，それらをまとめて

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},\ [N]=[\boldsymbol{N}_1\cdots\boldsymbol{N}_n]$$

と表すと式(11)は

$$[A][N]=[N][\Omega] \quad\cdots\cdots(12)$$

となる．固有ベクトルは互いに独立であるので $[N]$ は逆行列が存在し，式(12)の右から $[N]^{-1}$ を乗じると

$$[A]=[N][\Omega][N]^{-1} \quad\cdots\cdots(13)$$

が得られる．すなわち固有値，固有ベクトルが与えられると $[A]$ が一義的に決まる．ところで $[A]$ の独立な成分の数は，マトリックスの対称性を考えると $n(n+1)/2$ 個であり，系の特性を支配する因子の数は $n(n+1)/2$ 個であると考えられる．したがってモデル変数の数が $n(n+3)/2$ 個の場合には，冗長すぎてモーダルパラメータから一義的に決定することはできず，すくなくともモデル定数の数と支配因子の数の差 $n(n+3)/2-n(n+1)/2=n$ 個は，あらかじめ既知量として与えておかねばならない．

つぎにモーダルパラメータの数を考えると，n 自由度系では n 個の固有値と n 個の成分をもつ n 組の固有ベクトルの合計 $n+n\times n=n(n+1)$ 個の目標値が存在するように見える．しかし固有ベクトルは大きさを規準化する必要があり，（例えば成分の最大値を単位量として規準化する）この拘束条件のために有効な固有ベクトルの成分は各モードについて一つ減り，結局 n 自由度系では n^2 個の目標値が存在する．ところが系の支配因子の数は $n(n+1)/2$ 個であるから，n^2 個の目標値をとった場合には目標値のほうが多すぎて一般的にはすべての目標値を合わせるモデル変数を求めることはできず，最良近似の意味においてしかモデル変数を同定することができない．n^2 個の目標値がマトリックス $[A]$ の $n(n+1)/2$ 個の支配因子から膨張した形で生み出される真のモーダルパラメータの場合にはもとのモデル変数を完全に同定できるが，誤差を含む場合には完全な同定は困難となるであろう．またモデル変数の数は最大 $n(n+1)/2$ 個であるから目標値の数も $n(n+1)/2$ 個あればよく，モデル変数の数が少なくなれば目標値の数も少なくてよいはずである．もちろん目標値の数はモデル変数の数より多く選ばなくてはならない．目標値を少なくして n^2 個以下にする場合，どれを目標値として採用し，どれを省略するかが問題になる．式(13)をみるとマトリックス $[A]$ は $[\Omega]$ を $[N]$ によって相似変換して求めている．すなわち $[\Omega]$ が $[A]$ の特性を決めるもとになっており，$[\Omega]$ の成分である λ_j を一つでもまびくとそれを相似変換した $[A]$ が正則でなくなる．またある質点 m_i の固有ベクトル成分を全く目標値に採用しなかった場合には $[N]$ の行成分がすべて零になり，$[N][\Omega][N]^{-1}$ の i 行 i 列成分が零となって $[A]$ が特異マトリックスになる．そこで n 自由度系の同定では，n 個の固有値およびある質点の固有ベクトル成分を少なくとも一つは含まねばならない．以下に述べるような計算例においても，固有値あるいは質点の固有ベクトル成分すべてを目標値から除いた場合には，同定計算過程において式(10)の $\{[V]^T[W][V]\}$ が特異マトリックスになり一次方程式の解が得られない，あるいはモデルが一義的に決まらず収束しない事実を経験した．モデル変数の数が $n(n+1)/2$ 個より少なく既知のモデル定数の数が増えると，その分だけ $[A]$ 内の支配因子を固定することになり，目標値である固有値，固有ベクトルの成分の数を減らしてもモデル変数の同定が可能となる傾向にある．

以上の考察および数値計算例の経験をまとめるとつぎのようになる．

（1）　モデル変数の数 N_p は支配因子の数より少なくしなければならない．すなわち $N_p\leqq n(n+1)/2$ そ

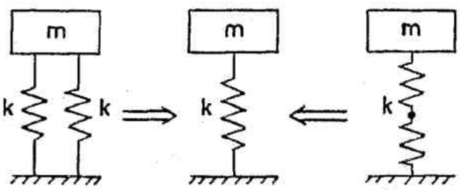

図 2　ばねの集約例

れゆえ残りのモデル定数 $[n(n+3)/2-N_p$ 個] は既知量として与える必要がある．

（2） 目標値の数 N_0 は N_p より多くとる必要がある．モデル変数の数 N_p が $n(n+1)/2$ 個の場合には目標値の中にすべてのモード次数の固有値およびある質点の固有ベクトル成分を少なくとも一つは含まねばならない．しかし既知モデル定数の数が多くモデル変数の数が少ない場合には，この条件をゆるめることができる．そして設定した目標値が適切かどうかは式(10)の係数マトリックスの特異性，または収束性で判断できる．

なお $N_0>N_p$ の場合は最良近似の意味で同定可能，$N_0=N_p$ の場合には目標値の正確な同定が可能となるが，目標値が現実的な値から大きく離れた場合には実固有値解析の範囲では同定できなくなる．

4. 計　算　例

本報で提案する同定手法の計算例を簡単な振動系モデルについて示す．なお式(10)により求めたモデル変数修正量 Δd_k は $0.5\,d_k$ を超えないように制限した．

4・1 三自由度系モデルの場合 最初のモデルとして図3に示す三自由度系をとりあげる．この場合，3・4節で述べたことからモデル定数は $n(n+3)/2=9$ 個，モーダルパラメータは $n^2=9$ 個となる．

4・1・1 モデル変数を変更した場合の同定結果について ($N_0=9,\ N_p=6$) 既知のモデル定数を用いて固有値解析により得られる真のモーダルパラメータ ($N_0=9$) を目標値として，モデル変数 ($N_p=6$) の組合せを変更したときの同定結果について検討を行う．表1は目標値の算出に用いたモデル定数を，表2は固有値解析結果を示す．

表2の値を目標値とし，モデル変数の組合せを変えた場合の繰返し数と評価式(8)の誤差 E との関係を図4に示す．ただしモデル変数6個の初期値はすべて1.0とし，残りの3個の既知量として与えるモデル定数の値は表1のものを用いた．また重み係数の値はすべて1.0とした．図4において，各ケースの収束のしかたは異なるが繰返し数7回から10回の間で誤差が 10^{-12} 以下となり，同定されたモデル変数はすべて表1の値と等しくなった．したがって，目標値が式(11)の $[A]$ の支配因子から膨張した形で生みだされる真のモーダルパラメータの場合には，モデル変数の組合せを変更してもすべての場合に正確なモデルを同定できる．また目標値が真のモーダルパラメータの場合には，3・4節の条件を満たすように目標値 ($N_0<9$)，モデル変数 ($N_p<6$) を設定してもすべて同様の結果となる．

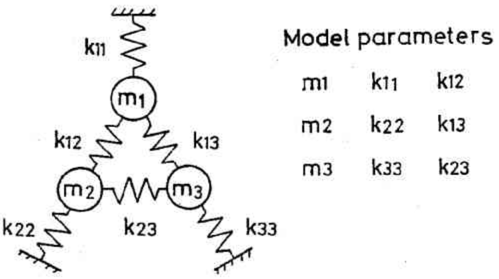

図 3 三自由度系モデル

表 1 三自由度系モデル定数

Model parameter	m1 kg	m2 kg	m3 kg	k11 N/m	k22 N/m	k33 N/m	k12 N/m	k13 N/m	k23 N/m
	3.0	2.0	4.0	30.0	40.0	20.0	10.0	30.0	20.0

表 2 モーダルパラメータ
（固有値解析結果）

Mode No.		1	2	3
Eigen value λ_j		8.760	29.48	37.59
Eigen vector	u_{1j}	0.809	1.0	-0.0803
	u_{2j}	0.535	-0.130	1.0
	u_{3j}	1.0	-0.572	-0.219

表 3 モーダルパラメータ
（誤差を含む場合）

Mode No.		1	Error %	2	Error %	3	Error %
Eigen value		10.0	14.16	30.0	1.76	40.0	6.41
Eigen vector	u_{1j}	0.80	-1.11	1.0	—	-0.10	-24.53
	u_{2j}	0.50	-6.54	-0.10	23.08	1.0	—
	u_{3j}	1.0	—	-0.60	- 4.90	-0.20	8.68

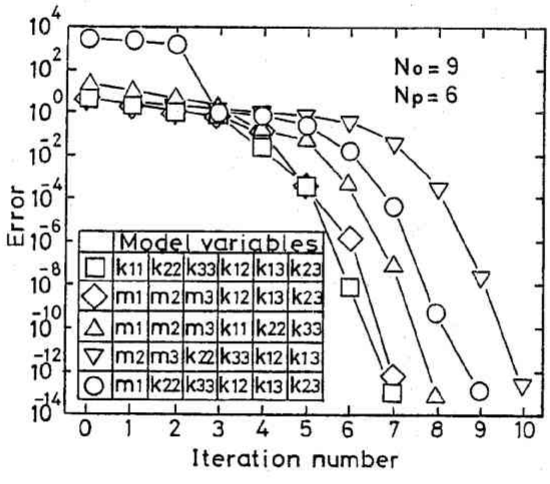

図 4 繰返し数と誤差の関係
（目標値が真のモーダルパラメータの場合）

った．

4·1·2　目標値が誤差を含む場合　今度は目標のモーダルパラメータが測定値である場合を想定し，誤差を含む場合を考える．例えば目標のモーダルパラメータを，表2の値を参考にして実際の測定誤差より大きい誤差をもつ表3の値とする．

a．$N_p=6, N_0=9, 8, 7, 6$ の場合　表3の誤差を想定した目標値を用い，モデル変数の数 $N_p=6$ の場合に目標値の数 N_0 を 9，8，7，6 と変えたときの同定結果について検討した．ただしモデル変数として6個のばねを選び，質量に表1の値を与えた．図5は繰返し数と誤差の関係を示す．図5において，目標値が誤差を含む場合には $N_0=N_p$ の場合だけが誤差が零に近くなり，$N_0>N_p$ の場合にはある程度の誤差を含んだまま収束していることがわかる．表4は収束したモデルのモーダルパラメータと目標モーダルパラメータとの比較を，$N_0=9, 6$ の場合について示す．表4において，$N_0=9$ の場合には各モード次数の固有ベクトルに誤差がある．しかし $N_0=6$ の場合には目標とした固有ベクトルの誤差は零となっている．また $N_0=6$ の場合の目標としない固有ベクトルの値を $N_0=9$ のものと比較すると，誤差が大きい傾向にあることがわかる．つぎに $N_0=9, 6$ の場合の同定されたモデル変数と表1の固有値解析に用いたモデル定数との比較を表5に示す．表5において，$N_0=9$ のモデル定数の値が $N_0=6$ の場合に比べて，オリジナルなモデル定数に近い傾向にあることがわかる．

以上のことより，$N_0=N_p$，すなわち目標値の数とモデル変数の数が等しい場合には，目標とするモーダルパラメータを有するモデルを完全に構築できる．したがって，大自由度の振動モデルを小自由度の振動モデルにリダクションする場合などのように，あるモーダ

表4　同定モデルのモーダルパラメータと目標モーダルパラメータの比較

Modal parameter	Desired value	$N_0=9$ Final value	$N_0=9$ Error %	$N_0=6$ Final value	$N_0=6$ Error %
λ_1	10.0	10.0	0.0	10.0	0.0
u_{11}	0.80	0.811	1.38	0.800	0.0
u_{21}	0.50	0.503	0.60	0.500	0.0
u_{31}	1.0	1.0	—	1.0	—
λ_2	30.0	30.0	0.0	30.0	0.0
u_{12}	1.0	1.0	—	1.0	—
u_{22}	-0.10	-0.093	7.00	-0.071	29.0
u_{32}	-0.60	-0.585	2.50	-0.582	3.00
λ_3	40.0	40.0	0.0	40.0	0.0
u_{13}	-0.10	-0.091	9.00	-0.100	0.0
u_{23}	1.0	1.0	—	1.0	—
u_{33}	-0.20	-0.196	2.00	-0.190	5.00

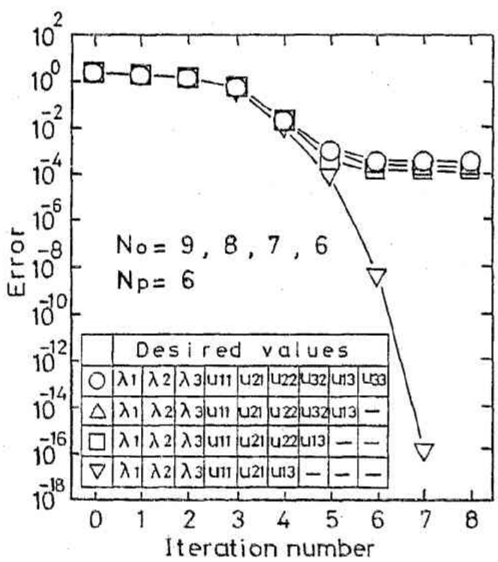

図5　繰返し数と誤差の関係（目標値に誤差を含む場合，$N_p=6$）

表5　同定モデル変数と表1（モデル定数）の比較（$N_p=6$）

Model variable	Original value	$N_0=9$ Final value	$N_0=9$ Error %	$N_0=6$ Final value	$N_0=6$ Error %
k_{11} N/m	30.0	30.29	0.97	33.38	11.27
k_{22} N/m	40.0	45.56	13.90	45.59	13.98
k_{33} N/m	20.0	24.77	23.85	24.50	22.50
k_{12} N/m	10.0	10.06	0.60	10.24	2.40
k_{13} N/m	30.0	29.07	-3.10	28.86	-3.80
k_{23} N/m	20.0	19.62	-1.90	19.45	-2.75

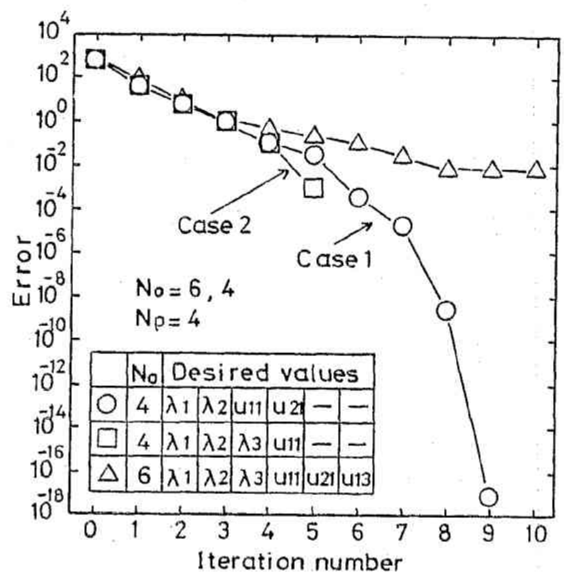

図6　繰返し数と誤差の関係（目標値に誤差を含む場合，$N_p=4$）

表 6　同定モデル変数と表1（モデル定数）の比較（$N_p=4$）

Model variable	k11 N/m	k12 N/m	k13 N/m	k23 N/m
Original value	30.0	10.0	30.0	20.0
Final value	42.50	-2.52	49.62	20.15

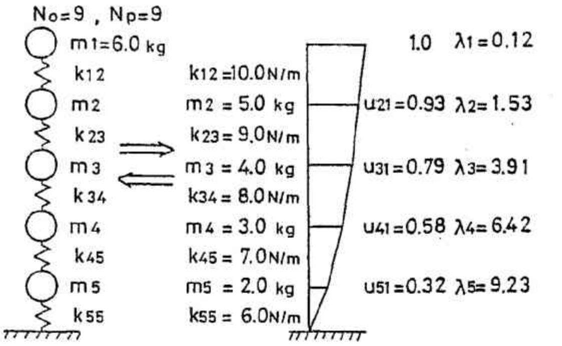

図 7　五自由度系モデルのシステム同定例

ルパラメータを重要視する場合には，目標とするモーダルパラメータの数とモデル変数の数を等しくすることにより，完全にその特性をもつモデルを構築することができる．しかし測定などにより得られたモーダルパラメータから，測定対称の質量，ばね定数などを推定しようとする場合には，測定から得られる情報を目標値になるべく多く採用して同定を行ったほうがよいと思われる．

b．$N_p=4, N_0=6, 4$ の場合　　$N_p=6$ の場合と同様に表3の目標値を用い，モデル変数の数 $N_p=4$ の場合に目標の数 N_0 を6，4と変えた場合の同定計算を行った．4個のモデル変数として，$k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{23}$ のばねを選んだ．図6は繰返し数と誤差の関係を示す．図6において，$N_0=6$ の場合には前述（a）の $N_0>N_p$ の場合と同様に誤差を含んだまま最良状態に収束した．$N_0=4$ の場合には，ケース1のように誤差が小さくなる場合と，ケース2のように繰返し数5回におけるモデルの固有値解析の結果，一次の固有値が負となり実固有値解析の範囲では同定計算続行不可能な場合が現れた．またケース1の場合の同定されたモデル変数と表1の固有値解析に用いたモデル定数との比較を表6に示す．表6において，同定されたモデル変数の値はオリジナルなモデル定数と大きく異なる傾向にあり，特に k_{12} の値は負となっており現実的でない定数値に同定されている．したがって，目標の値が現実的でない場合に少数のモデル変数で同定しようとすると，同定できない場合や同定できてもモデル変数が物理的に意味のないものになる可能性がある．

4・2　五自由度系モデルの場合　　つぎに五自由度系モデルの場合の同定計算例を示す．図7は同定計算に用いたモデルと目標に用いたモーダルパラメータを示す．このモデルは5個の集中質量と図7に示す5個のばねを考え，五自由度系における残りの10個のばね定数はすべて零とした．そしてモデル変数は，モデルの絶対的スケールを拘束するため既知とした m_1 を除いた9個を考えた．目標値は $\lambda_j (j=1, \cdots, 5)$ と一次モードの固有ベクトルの内有効な成分 $u_{k1} (k=2, \cdots, 5)$ の合計9個とした．したがって $N_0=N_p$ の場合の同定計算となる．モデル変数の初期値をすべて1.0として計算を行ったところ，繰返し数17回で誤差が 10^{-13} となり，モデル変数の値は目標値算出に用いたものと同じになった．

5．結　　言

（1）モーダルパラメータの情報を基に，感度解析を用いてそれらを精度よく表現する小規模多質点系モデルを構築する手法を提示した．

（2）目標とするモーダルパラメータの数と同定すべきモデル変数の数に関して，同定可能な条件を示した．

（3）計算例において，目標とするモーダルパラメータの値と同定されたモデル変数の値の関係を例示した．

文　　献

（1）長松・大熊，機論，**51**-464，C（昭60），719.
（2）大久保・ほか2名，精密機械，**46**-11（昭55），1351.
（3）Tlusty, J. and Moriwaki, T., *CIRP Ann.*, **25**-2 (1976), 497.
（4）山川・ほか3名，機論，**48**-435，C（昭57），1750.
（5）長松・ほか2名，機論，**49**-439，C（昭58），314.
（6）*System Identification For Linear Structures Using ASTRO/MOVE, Seminar on System Identification Text,* (1984), ANCO Engineers, INC.
（7）Blakely, K. D. and Dobbs, M. W., *Spec. Publ. Soc. Automot. Eng.*, SP-529 (1982), 15.
（8）Blakely, K. D. and Walton, W. B., *Proc. 2nd Int. Modal Anal. Conf.*, 12308 (1984), 82.
（9）藤川・ほか3名，機講論，No. 830-6（昭58-6），254.

討　　論

〔質問〕　平松　力〔福井大学工学部〕

（1）式（8）の評価量の重み係数の大きさを適宜決定してやるとあるが，$[W]$ は固有値 λ_j と固有ベクトル $\boldsymbol{U}_j$ とに分けられるので，いずれを目標値の重要度と考えるのか．Rayleigh 法などから考えると $\boldsymbol{U}_j$ に関するほうは収束性が悪いように思うがいかがか．

（2）式（10）で得た $\boldsymbol{\Delta d}$ が最適値ではなく，その成分 Δd_k の値が大きい場合には制限し反復計算を行うことになっているが，どの程度の制限が必要か，またそのときの収束性との関係はいかがか．

（3）1228 ページの 4 章の前の文章であるが，$N_0 > N_p$ の場合は $N_0 = N_p$ の場合より条件が悪くなると思うが，$N_0 > N_p$ についても同様に同定できなくなると解釈すべきか．

（4）貴研究の緒言とも関係するが，この論文で適用しようとする範囲の構造物とは防振設計のような剛体の機械の質量と支持ばねといったいわゆるばね質量系のみを考えるのか．はり，板のようなこう配，曲げモーメントが関係する構造物にも拡張していくのか．

〔回答〕（1）重み係数の大きさと収束性の関係を定量的には把握していないが，$[W]$ の成分を固有値 λ_j と固有ベクトル U_j に分けて重みを変えた場合の計算例からも，ご指摘のように固有ベクトルのほうの重みを大きくした場合には収束性が悪くなる．したがって，各モード間の重要度を考えない場合には，固有値のほうの重みを大きくするほうが収束性が良いと考えられる．

（2）モデルの自由度，変更するモデル変数にもよるが，本報で取り上げた五自由度以下の場合では，モデル変数の変更量 Δd_k の最大値を $0.5\,d_k$ より大きくした場合には固有値，固有ベクトルの予測誤差が大きくなり収束性が悪くなったり，収束しない場合が現れる．また，自由度が大きくなるにしたがい一次感度で予測できる固有ベクトルの範囲が狭まる傾向にあり，その場合にはさらに Δd_k の最大値を小さくする必要がある．

（3）$N_0 > N_p$ の場合にも同定できない場合が生じるので，そのとおりである．

（4）防振設計に適用する場合においても，問題となるのは機械の質量，支持ばねだけではなく，機械の重心位置，慣性モーメントなどがより重要な設計変数として考えられる．したがって，今後，質量，ばねだけでなく別の次元，例えば長さの次元を持つ設計変数の同定にも適用していく予定である．また，ご教示いただいた，はり，板のような材料特性が任意に変化する任意形状の系からなる構造物への適用も今後の課題として検討していきたい．