

糸 捲 運 動 に 就 いて

奥 田 薫

On the Winding Motion of the Bobbin

Kaoru OKUDA

It is our object to study the motion and the safety state of the bobbin assuming that the moment of inertia of the bobbin is constant and the bobbin is revolving at the angular velocity and the rolling friction is acting between the rotating shaft and the supporting bearing. And we found the strength of the winding string on the bobbin under the stable condition of the constant angular velocity. Also we found the value of the angular velocity when we added any moment for the rotating shaft.

〔1〕 緒 論

外部より適当なモーメントが加えられた時糸捲が回転する場合、軸と軸受面の間における回転摩擦や糸捲管の重心の偏心および角速度エネルギーが起るとしてその運動状態を研究し管に巻きとられる糸の安全状態を調査したものである。

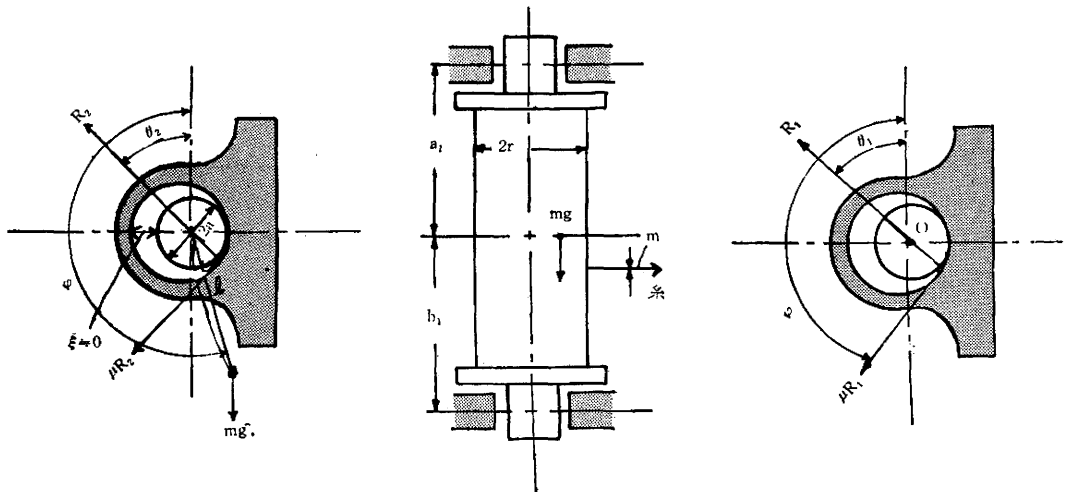


Fig. 1

〔2〕 基 礎 方 程 式

慣性モーメント I である糸捲が固定軸の周りを回転して糸を送り出すものとする。重心軸は慣性の軸と一致するものとし軸受面と軸との間には固体摩擦 μ が作用するものとし上下の軸受の抗力が各々 R_1 , R_2 および摩擦力を F_1 , F_2 とし軸の中心より糸捲の重心までの距離を l とし重心の方向お

よび抗力が鉛直線となす角を φ , θ_1 , θ_2 とする。回転軸の直径は軸受の直径と同一と仮定しその大きさは $2a$ とする。糸巻がモーメント M により或角速度にて回転していると

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu a R + mgl \sin \varphi = M \dots\dots (1)$$

ここに $R=R_1+R_2$, で m は糸巻の質量で固体摩擦係数は相対速度の関数である。

一定温度のもとにおいては速度が増加すると共に摩擦係数は減少する。図は鋼軸が鋳鉄軸受内を回転するとき摩擦係数を示すもので $\mu=0.5$ より速度の増加と共に減少して $\mu=0.2$ に達し以後は回転速度が増加しても殆ど一定であることを示す。

この $\mu=0.5$ より $\mu=0.2$ に達する摩擦係数は或曲線であるが近似的には直線と見做すことができる。

この場合図より $A=0.5$ ととり得る。

とり円半径を δ とすると $\mu = [f\{\mu R(\omega a - \omega \delta)\}]$ であらわされる。実験の結果を総合して考え μ を次のようにおく

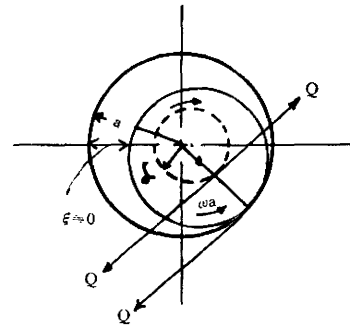


Fig. 2

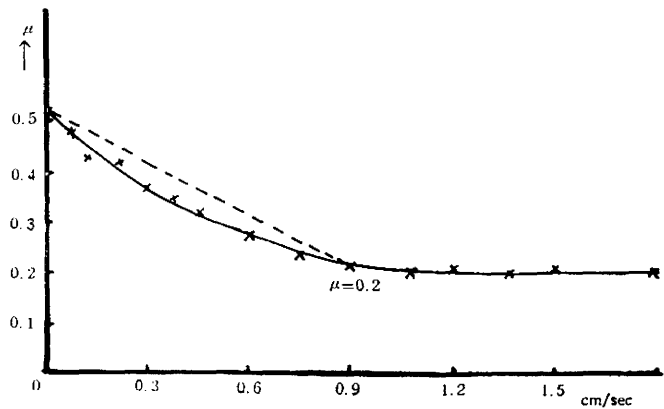


Fig. 3

$$\mu = A - B \left(\frac{dx}{dt} \right)^\sigma = A - B \left\{ \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\}$$

よって原式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} a R + mgl \sin \varphi = M \dots\dots\dots (2)$$

次に糸巻の重心の運動に就いて求心的加速度および円周方向の加速度を考えて次の式を得る。簡単のために $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおく、

$$ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -R \left[\cos(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \sin(\varphi - \theta) \right] - mg \cos \varphi \dots (3)$$

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R \left[-\sin(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \cos(\varphi - \theta) \right] - mg \sin \varphi \dots\dots\dots (4)$$

今 (1) (3) より R を消去すると

$$ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = - \frac{1}{\left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\}} \left\{ M - I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - mgl \sin \varphi \right\} \left[\cos(\varphi - \theta) - \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \sin(\varphi - \theta) \right] - mg \cos \varphi \dots\dots\dots (5)$$

又 (3) (4) より R を消去すると

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\left\{ ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \cos \varphi \right\} \left[-\sin(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \cos(\varphi - \theta) \right]}{\left[\cos(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \sin(\varphi - \theta) \right]} - mg \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(1)より近似式として

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} aR + mg l \sin \varphi = M \quad \dots\dots\dots (7)$$

加えるモーメントは糸捲の性質として $M = M_0 |\sin \omega t|$ ($0 \leq \omega t \leq \frac{T}{2}$) である。すなわち 0 より $\frac{T}{2}$ においては常に正であるモーメントが加えられることを必要とする。その値は

$$M = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t, \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$\text{ここに } a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} M_0 \sin \omega t \cdot dt = \frac{4}{\pi} M_0$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} M_0 \sin \omega t \cdot \cos \omega t \cdot dt$$

$$= \frac{4M_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t \right\} dt$$

$$n = 1 \text{ のとき } a_1 = \frac{2M_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin 2\omega t \cdot dt = 0$$

$$n > 1 \text{ のとき } a_n = \frac{2M_0}{T} \left[\left\{ -\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right\} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \left\{ (-1)^{n+1} - 1 \right\} \frac{2M}{\pi(n^2 - 2)}$$

よって
$$M = \frac{2M_0}{\pi} \left(1 - \frac{2 \cos 2 \omega t}{3} - \frac{2 \cos 4 \omega t}{15} - \frac{2 \cos 6 \omega t}{35} \dots\dots\dots \right)$$

次に $l=0$ である望ましい一般形を考えると (3) (4) より

$$\frac{-\sin(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \cos(\varphi - \theta)}{\cos(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \sin(\varphi - \theta)} = \tan \varphi \quad \dots\dots\dots (8)$$

車軸の回転が解ればこの式より抗力 R の方向が求められる。

その抗力の大きさは

$$R = \frac{-mg \cos \varphi}{\left[\cos(\varphi - \theta) + \left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} \sin(\varphi - \theta) \right]} \quad \dots\dots\dots (9)$$

今近似的に $\left\{ A - B \left(a \frac{d\varphi}{dt} \right)^\sigma \right\} = \mu = \tan \theta_\mu$ として一定とすると (8) 式は $\theta = \pi - \theta_\mu$ となり抗力 $R = mg \cos \theta_\mu$ は一定となる。

よって原式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu a R = \frac{2M_0}{I} \left(1 - \frac{2 \cos 2 \omega t}{3} - \frac{2 \cos 4 \omega t}{15} - \frac{2 \cos 6 \omega t}{35} \dots\dots \right) \dots (10)$$

現空間におけるこの原方程式を像空間に於ける像関数に移すと

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu a R \supset I \left[s^2 L F(\varphi) - s \cdot F(0) - F'(0) \right] + \frac{\mu a R}{s} \dots\dots\dots (11)$$

初期条件として $t=0$ のとき $\varphi=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$ であるから $F(0)=0$, $F'(0)=0$ となる。

また右辺は

$$\frac{2M_0}{\pi} \left(1 - \frac{2 \cos \omega t}{3} - \frac{2 \cos 4 \omega t}{15} - \frac{2 \cos 6 \omega t}{35} \dots\dots \right) \supset \frac{2M_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + (2\omega)^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{15} \frac{s}{s^2 + (4\omega)^2} - \frac{2}{35} \frac{s}{s^2 + (6\omega)^2} \dots\dots\dots \right\} \dots\dots (12)$$

$$\therefore F(\varphi) \supset -\frac{\mu a R}{I s^3} + \frac{2M_0}{I \pi} \left\{ \frac{1}{s^3} - \frac{2}{3} \frac{1}{s\{s^2 + (2\omega)^2\}} - \frac{2}{15} \frac{1}{s\{s^2 + (4\omega)^2\}} \right. \\ \left. - \frac{2}{35} \frac{1}{s\{s^2 + (6\omega)^2\}} \dots\dots\dots \right\} \dots\dots (13)$$

$$= -\frac{\mu a R}{I s^3} + \frac{2M_0}{I \pi} \left[\frac{1}{s^3} - \frac{2}{3(2\omega)^2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + (2\omega)^2} \right\} - \frac{2}{15(4\omega)^2} \left\{ \frac{1}{s} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s}{s^2 + (4\omega)^2} \right\} - \frac{2}{35(6\omega)^2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + (6\omega)^2} \right\}^2 \dots\dots\dots \right] \dots\dots (14)$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\mu a R}{2I} t^2 + \frac{2M_0}{I \pi} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6\omega^2} \{1 - \cos 2 \omega t\} - \frac{1}{120\omega^2} \{1 - \cos 4 \omega t\} \right. \\ \left. - \frac{1}{630\omega^2} \{1 - \cos 6 \omega t\} \dots\dots\dots \right] \dots\dots (15)$$

故に角速度は

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\mu a R}{I} t + \frac{2M_0}{I \pi} \left[t - \frac{1}{6\omega^2} \{1 + 2 \omega \sin 2 \omega t\} - \frac{1}{120\omega^2} \{1 + 4 \omega \sin 4 \omega t\} \right. \\ \left. - \frac{1}{630\omega^2} \{1 + 6 \omega \sin 6 \omega t\} \dots\dots\dots \right] = \xi \left\{ -\frac{\mu a R}{I} t + \frac{2M_0}{I} \xi(t) \right\} \dots (16)$$

故に糸捲の角速度 $\dot{\varphi}$ は固体摩擦係数, 軸径, 慣性モーメント, 回転モーメントを含んだ時間の関数である。

更に次に μ を角速度の関数と考えると

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (A - B a \frac{d\varphi}{dt}) a R = \frac{2M_0}{\pi} \left(1 - \frac{2 \cos 2 \omega t}{3} - \frac{2 \cos 4 \omega t}{15} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos 6 \omega t}{35} \dots\dots\dots \right) \dots\dots (17)$$

前と同様現空間における原方程式を像空間における像関数に移す。抗力は一定と考えると

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - B a^2 R \frac{d\varphi}{dt} + A a R \supset I \left[s^2 L F(\varphi) - s \cdot F(0) - F'(0) \right] \\ - B a^2 R \left[s L F(\varphi) - F(0) \right] + \frac{A a R}{s} \dots\dots\dots (18)$$

初期条件を前と同様とすると

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} - B a^2 R \frac{d\varphi}{dt} + A a R \supset L F(\varphi) \left[I s^2 - B a^2 R s \right] \dots\dots\dots (18')$$

故に

$$LF(\varphi) \left[s^2 - \frac{Ba^2R}{I} s \right] = -\frac{AaR}{Is} + \frac{2M_0}{I\pi} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + (2\omega)^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{15} \frac{s}{s^2 + (4\omega)^2} - \frac{2}{35} \frac{s}{s^2 + (6\omega)^2} \dots \right\} \dots \dots (19)$$

$$\therefore LF(\varphi) = -\frac{AaR}{Is^2 \left(s - \frac{Ba^2R}{I} \right)} + \frac{2M_0}{I\pi} \left[\frac{1}{s^2 \left(s - \frac{Ba^2R}{I} \right)} - \frac{2}{3} \frac{1}{\left(s - \frac{Ba^2R}{I} \right) \{ s^2 + (2\omega)^2 \}} \right. \\ \left. - \frac{2}{15} \frac{1}{\left(s - \frac{Ba^2R}{I} \right) \{ s^2 + (4\omega)^2 \}} \right. \\ \left. - \frac{2}{35} \frac{1}{\left(s - \frac{Ba^2R}{I} \right) \{ s^2 + (6\omega)^2 \}} \dots \right] \dots \dots (20)$$

$$\therefore \varphi = -\frac{AI}{B^2a^3R} \left\{ -1 - \frac{Ba^2R}{I} t + e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right\} - \frac{2M_0I}{\pi B^2a^2R} \left[\left\{ -1 - \frac{Ba^2R}{I} t + e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right\} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\frac{Ba^2R}{I} \right)^2 + 4\omega^2} \left\{ e^{\frac{Ba^2R}{I} t} - \cos 2\omega t - \frac{Ba^2R}{I} \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right\} \right. \\ \left. - \frac{2}{15} \frac{1}{\left(\frac{Ba^2R}{I} \right)^2 + 16\omega^2} \left\{ e^{\frac{Ba^2R}{I} t} - \cos 4\omega t - \frac{Ba^2R}{I} \frac{1}{4\omega} \sin 4\omega t \right\} \dots \right] \dots (21)$$

故に角速度は

$$\dot{\varphi} = -\frac{AI}{B^2a^3R} \left\{ -\frac{Ba^2R}{I} + \frac{Ba^2R}{I} e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right\} - \frac{2M_0I}{\pi B^2a^2R} \left[\left\{ -\frac{Ba^2R}{I} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Ba^2R}{I} \cdot e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right\} - \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\frac{Ba^2R}{I} \right)^2 + 4\omega^2} \left\{ \frac{Ba^2R}{I} \cdot e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\omega \sin 2\omega t - \frac{Ba^2R}{I} \cos 2\omega t \right\} - \frac{2}{15} \frac{1}{\left(\frac{Ba^2R}{I} \right)^2 + 16\omega^2} \left\{ \frac{Ba^2R}{I} e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right. \right. \\ \left. \left. + 4\omega \sin 4\omega t - \frac{Ba^2R}{I} \cos 4\omega t \right\} - \frac{2}{35} \frac{1}{\left(\frac{Ba^2R}{I} \right)^2 + 36\omega^2} \left\{ \frac{Ba^2R}{I} e^{\frac{Ba^2R}{I} t} \right. \right. \\ \left. \left. + 6\omega \sin 6\omega t - \frac{Ba^2R}{I} \cos 6\omega t \right\} \dots \right] \dots \dots (22)$$

次に角速度が一定の場合 $\dot{\varphi} = \Omega =$ 一定とすると $\varphi = \Omega t$ および角加速度 $\ddot{\varphi} = 0$ となる。
 $\mu = \tan \theta_\mu$ とすると (6) より

$$\theta = \tan^{-1} \frac{l \Omega^2 \sin \Omega t}{l \Omega^2 \cos \Omega t + g} = \theta_\eta \dots \dots (23)$$

この式と (4) より抗力の大きさは

$$R = -mg \frac{\sin \Omega t \cos \theta_\mu}{\sin (\Omega t - \theta_\mu)} = mg \sqrt{g^2 + l^2 \Omega^2 + 2gl \Omega^2 \cos \Omega t} \cdot \cos \theta_\mu \dots \dots (24)$$

今 $l=0$ とおくと $R=mg \cos \theta_\mu$

モーメントMの値は (1) により

$$M = mg l \sin \theta_\mu + \tan \theta_\mu \cdot R a = \tan \theta_\mu \cdot mg \cos \theta_\mu \cdot a = mg a \tan \theta_\mu \cdot \cos \theta_\mu \dots (25)$$

今 $mg=200g$, $a=0.3cm$ とすると抗力及び加ふべきモーメントMは次のようになる。

			g	g-cm
$\mu=0.5$	$\tan \theta_\mu = \tan 26^\circ 40'$	$\cos \theta_\mu = 0.8936$	$R = 178.72$	$M = 26.808$
$\mu=0.45$	" = $\tan 24^\circ 20'$	" = 0.9112	$R = 182.24$	$M = 24.600$
$\mu=0.40$	" = $\tan 21^\circ 50'$	" = 0.9283	$R = 184.76$	$M = 22.278$
$\mu=0.35$	" = $\tan 19^\circ 20'$	" = 0.9436	$R = 188.72$	$M = 19.818$
$\mu=0.30$	" = $\tan 16^\circ 50'$	" = 0.9572	$R = 191.44$	$M = 17.232$
$\mu=0.25$	" = $\tan 14^\circ 0'$	" = 0.9703	$R = 194.06$	$M = 13.356$
$\mu=0.20$	" = $\tan 11^\circ 20'$	" = 0.9805	$R = 196.10$	$M = 11.766$

この表より明かに固体摩擦係数が少くなるにつれてすなわち角速度が増加するにしたがって加ふべきモーメントは著しく減少することを知る。

〔4〕 結 言

- (1) 軸と軸受面との間の固体摩擦係数 μ は軸の回転にしたがい減少し線速度約 50m/sec に到り固体摩擦係数は約 0.2 と減少し、その後は軸回転が増加しても ω の値は一定であるから μ の値を減少せんとすればその回転は可能なる限り、速いがよい。
- (2) 軸径 a は出来るだけ少なるがよい。これを増すと抗力が増加し角速度が減少し固体摩擦係数が増加する。
- (3) 糸捲管の重心の偏心は捲糸に激突を与えるからこれを避けねばならぬ。
- (4) 角速度が一定であるときは角加速度は零となり今 1 秒間に運ばれる糸の長さを l' 、その質量を m' とすると糸に加わる力は $m' l' \frac{d\omega}{dt} = 0$ となり力がかからないで唯捲とられることになる。よってこれが糸の安定条件となる。
- (5) 固体摩擦係数を小にするため軸受と軸との超仕上とこの部分に対する注油を必要とする。
- (6) a が小なる程加えらるべきモーメントは小でよい。
- (7) 偏心重量のかかる長さは出来るだけ小であることを要し質量 m も亦小なるが望ましい。
- (8) 摩擦係数を可能なる限り小にするには軸受として球軸受が適当である。製作上困難なことではあるが重心の偏心を除き振動を除去するには近代的な水軸受を使用すればよい。

(受理年月日 昭和35年9月27日)