

ダイオード検波器出力の信号対雑音比について

小泉 卓也* 白神 良昭**
山内 清彦***

The Output Signal to Noise Ratio of Semiconductor Diode
Detector When an Extraneous Noise Disturbance Exists in
the Input

Takuya KOIZUMI, Yoshiaki SHIRAGA
Kiyohiko YAMAUCHI

(Received 30 May, 1966)

Usually the semiconductor diode detector can be constructed to give either half-wave linear or quadratic rectification characteristics by choosing a suitable load impedance and setting up an adequate input signal level, though the diode itself has a half-wave exponential response for comparatively small voltages. The exponential response of the forward current of the diode can be expressed by means of an expansion in the series of powers of (eV/kT) , where e is the charge of an electron, k is Boltzmann's constant, T is the absolute temperature, and V is an effective junction voltage. For input levels lower than $(kT/e) \cong 26\text{mV}$ at 302°K , however, it will suffice to consider only the first two terms discarding all the other terms of higher orders for practical purposes. In other words it is possible to approximate the actual diode characteristics by the sum of half-wave linear characteristics and quadratic ones. With this fact in mind we have made an attempt to relate the output signal-to-noise ratio to the corresponding input ratio and to show how this relationship depends on the input signal-to-noise ratio and responses of linear low pass filters at the input and at the output when the input consists of normal random noise and a sinusoidal carrier process. The result is rather complicated in its appearance, but what can be deduced from it is to some extent straight-forward. Details of analysis will be described in the following.

1 緒 言

各種通信装置の中でダイオードは混合、検波、整流等の役目を果たす重要な半導体部品である。検波器として用いる場合は、入力レベルおよび負荷抵抗を適当に選ぶ事によって直線検波器あるいは自乗検波器として使用する事が可能である。例えば、ダイオードに加わる電圧が比較的大きい場合は、入力電圧と検波電流との間には近似的に自乗特性が見られ、小さい場合には

直線的と見做して良い。しかし一般的には、ダイオード出力電流中には入力電圧に比例する項とその自乗に比例する項、および更に高次の項が含まれている。しかし常温に於いては、後述するように入力電圧が 26mV より小さければ、3次の項は1次の項の $1/6$ 以下となり、入力電圧を適当にすれば無視出来るようにする事が可能である。そこでダイオード特性を1次と2次の項のみで近似し、入力として正弦波信号とランダム

*助手 **助教授 ***教授

雑音を加えた場合、出力の信号対雑音比と入力とのそれとはどのような関係にあるかを解析した。なお、検波器の後には低域フィルタが接続されているものとし出力信号としては、入力信号による検波直流電流の増加分を取った。振幅変調波の検波の場合はさらに複雑となるが、これについては後の機会に報告する。

2 非直線系出力の2次モーメント

図-1に於いて T_g は記憶能力のない非直線系とす

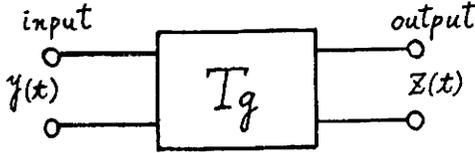


Fig. 1 A zero-memory nonlinear system

る。入力集合 $y(t)$ は stationary とすれば出力集合 $z(t)$ も stationary である。この出力集合の covariance 関数を考える。

$$z(t) = T\{y\} = g[y(t)] \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$M_z(t_2 - t_1) \equiv M_z(t) = \overline{z(t_1) \cdot z(t_2)} \\ = \overline{T_g\{y_1\} \cdot T_g\{y_2\}} = E\{g[y(t_1)] \cdot g[y(t_2)]\} \\ = \iint g(y_1) \cdot g(y_2) W_2(y_1, y_2; t) dy_1 dy_2, \\ (t = t_2 - t_1) \quad \dots\dots\dots(2)$$

但し、 $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_2)$, $W_2(y_1, y_2; t)$ は y_1, y_2 の joint probability density とする。今入力集合の中の一つを取って $y^{(j)}$ で表し、 $z^{(j)} = g(y^{(j)})$ の両辺のラプラス変換を行なうと、

$$L\{g[y^{(j)}(t)]; p = i\xi\} \equiv f(i\xi) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y^{(j)}} \cdot g[y^{(j)}] dy^{(j)} \quad \dots\dots\dots(3)$$

逆変換を行なえば、

$$g[y^{(j)}(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ic_1}^{+\infty - ic_1} f(i\xi) e^{i\xi y^{(j)}(t)} d\xi \quad \dots\dots\dots(4)$$

これは集合全体に対しても同様に、

$$z(t) = g[y(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi) e^{i\xi y} d\xi \quad \dots\dots\dots(5)$$

と書く事が出来る。これより次の関係が得られる。

$$E\{g(y_1) \cdot g(y_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi_1) f(i\xi_2) \\ \times e^{i\xi_1 y_1 + i\xi_2 y_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots(6)$$

ξ_1, ξ_2 は一般には複素数であるから、 $e^{i\xi_1 y_1 + i\xi_2 y_2}$ はランダム変数 y_1, y_2 の特性関数 F_{y_1, y_2} になるとはいえない。何故なら特性関数は実数の ξ_1, ξ_2 に対してのみ定義されているからである。しかし解析接続によって複素数の ξ_1, ξ_2 に対しても同じ関数形を持つという事実があるので、次のように書く事が出来る。

$$E\{g(y_1) \cdot g(y_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi_1) f(i\xi_2) F_{y_1, y_2}(i\xi_1, i\xi_2; t) d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

従って式(6)より

$$E\{g(y_1) \cdot g(y_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi_1) f(i\xi_2) F_{y_1, y_2}(i\xi_1, i\xi_2; t) d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots(8)$$

今入力集合が正弦搬送波とランダム雑音である場合を考えて、

$$y(t) = S(t) + N(t) = A \cos(\omega_c t + \phi) + N(t) \quad \dots\dots\dots(9)$$

と表す。

$$M_z(t) = E\{g(S_1 + N_1) \cdot g(S_2 + N_2)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \\ \times \iint_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi_1) f(i\xi_2) F_{y_1, y_2}(i\xi_1, i\xi_2; t) d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$S(t)$ と $N(t)$ は互いに独立であるから、 $F_{y_1, y_2}(i\xi_1, i\xi_2; t)$ は夫々 $S(t)$ と $N(t)$ の特性関数 F_S と F_N の積として表す事が出来、

$$M_z(t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} f(i\xi_1) \cdot f(i\xi_2) F_2(i\xi_1, i\xi_2; t) \cdot F_2(i\xi_1, i\xi_2; t) N d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。 $N(t)$ が正規分布をするランダム雑音と仮定すれば F_N は次のように級数展開出来る。

$$F_2(i\xi_1, i\xi_2; t) N = \exp\left[-\frac{\phi}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_N(t)^n \phi^n}{n!} \xi_1^n \xi_2^n \quad \dots\dots\dots(12)$$

ただし、

$$\phi = \overline{N^2}, \quad \overline{N} = 0, \quad k_N(t) = -\frac{1}{\phi} \overline{N_1 N_2} \quad \text{とする。}$$

一方、 $F_2(i\xi_1, i\xi_2; t) S$ は

$$F_2(i\xi_1, i\xi_2; t) S = \langle \exp\{i\xi_1 A \cos(\omega_c t_1 + \phi) + i\xi_2 A \cos(\omega_c t_2 + \phi)\} \rangle S \quad \dots\dots\dots(13)$$

次の Bessel 関数の公式を用いれば、

$$e^{i\alpha \cos(\beta + \phi)} = \sum_{m=0}^{\infty} i^m \epsilon_m J_m(\alpha) \cos m(\beta + \phi) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$F_S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{m+n} \epsilon_m \epsilon_n \langle J_m(\xi_1 A) \cdot J_n(\xi_2 A) \cos m(\omega c t_1 + \phi) \cdot \cos(\omega c t_2 + \phi) \rangle_{\phi} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m J_m(\xi_1 A) \cdot J_m(\xi_2 A) \cos m(\omega c t_2 - \omega c t_1) \dots (15)$$

ただし、 $\epsilon_m = 2(m \neq 0)$, $\epsilon_0 = 1$
式(12)および(15)を式(11)に代入すると、

$$M_z(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} f(i\xi_1) \cdot f(i\xi_2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \epsilon_m \epsilon_n \phi^n \kappa_N(i)^n}{n!} \xi_1^n \xi_2^n \exp\left[-\frac{\phi}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\right] \times J_m(\xi_1 A) \cdot J_m(\xi_2 A) \cos m \omega c (t_2 - t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \phi^n \kappa_N(t)^n \cos m \omega c t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} f(i\xi) \xi^n J_m(\xi A) \exp\left(-\frac{\phi}{2} \xi^2\right) d\xi \right]^2 \dots (16)$$

今検波器の動特性が次のようであると仮定する。すなわち、

$$g[y] = \begin{cases} By^p + Dy^q, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \dots (17)$$

このような検波器に対しては式(3)より、

$$f(i\xi) = \frac{B p!}{(i\xi)^{p+1}} + \frac{D q!}{(i\xi)^{q+1}} \dots (18)$$

さて次に式(16)の積分項を計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} f(i\xi) \xi^n J_m(\xi A) \exp\left(-\frac{\phi}{2} \xi^2\right) d\xi \\ &= \frac{B p!}{2\pi i^{p+1}} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \xi^{n-p-1} J_m(\xi A) \exp\left(-\frac{\phi}{2} \xi^2\right) d\xi \\ &+ \frac{D q!}{2\pi i^{q+1}} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \xi^{n-q-1} J_m(\xi A) \exp\left(-\frac{\phi}{2} \xi^2\right) d\xi \\ &= \frac{B p! (-1)^{m+n}}{2(m!)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{p-n}{2}} \left(\frac{A^2}{2\phi}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &\times \frac{{}_1F_1\left[\frac{m+n-p}{2}; m+1; \frac{-A^2}{4(\phi/2)}\right]}{\Gamma\left[(2+p-m-n)/2\right]} \\ &+ \frac{D q! (-1)^{m+n}}{2(m!)} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{p-n}{2}} \left(\frac{A^2}{2\phi}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &\times \frac{{}_1F_1\left[\frac{m+n-q}{2}; m+1; \frac{-A^2}{4(\phi/2)}\right]}{\Gamma\left[(2+q-m-n)/2\right]} \\ &\equiv \mu_{n,m}^{(p)} + \mu_{n,m}^{(q)} \dots (19) \end{aligned}$$

上式に於いて $\left(\frac{A^2}{2\phi}\right)$ は入力の信号対雑音電力比を表し、これを a_0^2 とおく。また、 ${}_1F_1$ は confluent hypergeometric 関数と呼ばれるものである。式(16)より

$$M_z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \phi^n \kappa_N(t)^n \cos m \omega c t \left[\left(\mu_{m,n}^{(p)}\right)^2 + \left(\mu_{m,n}^{(q)}\right)^2 + 2\left(\mu_{m,n}^{(p)}\right)\left(\mu_{m,n}^{(q)}\right) \right] \dots (20)$$

3 出力の信号対雑音比

信号が存在する事による検波後の直流成分の増加分を出力信号と定義すれば、 \bar{S}_{out} は次のように表し得る。

$$\bar{S}_{out} = \bar{Z} \Big|_{a_0 > 0} - \bar{Z} \Big|_{a_0 = 0} \dots (21)$$

しかるに $\frac{1}{Z^2}$ は式(20)に於いて信号と雑音の積の項がない状態、すなわち $m = n = 0$ と置き且つ $t = 0$ と置けば求められる。これを $M_z(t)_{dc}$ と書けば、

$$M_z(t)_{dc} = \bar{Z}^{-2} \left[\frac{B p!}{2} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{p/2} \frac{{}_1F_1\left(-\frac{p}{2}; 1; -a_0^2\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} + \frac{D q!}{2} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{q/2} \frac{{}_1F_1\left(-\frac{q}{2}; 1; -a_0^2\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right)} \right]^2 \dots (22)$$

これより

$$S_{out} = \frac{B p! \phi^{p/2}}{2^{p/2+1} \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} \left[{}_1F_1\left(-\frac{p}{2}; 1; -a_0^2\right) - 1 \right] + \frac{D q! \phi^{q/2}}{2^{q/2+1} \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right)} \left[{}_1F_1\left(-\frac{q}{2}; 1; -a_0^2\right) - 1 \right] \dots (23)$$

$M_z(t)$ は直流分、 $n \times n$, $s \times n$, および $s \times s$ の混変調積を含んでいるから、

$$M_z(t) \equiv M_z(t)_{dc} + M_z(t)_{n \times n} + M_z(t)_{s \times n} + M_z(t)_{s \times s} \dots (24)$$

とおく事が出来る。出力の平滑用フィルターの帯域幅を Δf 、雑音の電力スペクトル密度を $W_z(f)_{noise}$ とすれば、

$$\begin{aligned} \overline{N^2}_{out} &= \int_0^{\Delta f} W_z(f)_{noise} df = 4 \Delta f \int_0^{\infty} \{M_z(t)_{n \times n} \\ &+ M_z(t)_{s \times n}\} dt \dots (25) \end{aligned}$$

出力の信号対雑音比は従って次のように書き表わせる。

$$(S/N)_{out} = \frac{\bar{S}_{out}}{(\overline{N^2}_{out})^{1/2}} = \frac{\bar{S}_{out}}{2 \left[\Delta f \int_0^{\infty} \{M_z(t)_{n \times n} + M_z(t)_{s \times n}\} dt \right]^{1/2}} \dots (26)$$

4 数式の計算

信号が雑音に比べて強い場合を以下考慮する。式(20)および(28)に含まれている超幾何関数 (confluent hypergeometric function) は次のような漸近展開式を使用して計算出来る。すなわち,

$${}_1F_1(\alpha; \beta; -x) = \frac{\Gamma(\beta)x^{-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\alpha-\beta+1)_m}{m!x^m};$$

$$x > 0, (\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1), (\alpha)_0 = 1$$

.....(29)

さて、式(28)を式(20)に代入してかつ $m=0, n \geq 1$ と置く事により $M_z(t)_{n \times n}$ の諸項、また $m \geq 1, n \geq 1$ と置く事により $M_z(t)_{s \times n}$ の諸項が求められる。その結果を記すと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^n k_N(t)^n (\mu_n^{(p)})^2}{n!} = \frac{B^2(p)!^2 \left(\frac{\psi}{2}\right)^{2p} a_0^{2p}}{4}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t)}{\Gamma^4\left(1 + \frac{p-1}{2}\right)} \right] + \frac{1}{a_0^4} \right.$$

$$\times \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t) \cdot 2 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2}{\Gamma^4\left(1 + \frac{p-1}{2}\right)} + \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2}{2! \Gamma^4\left(1 + \frac{p-2}{2}\right)} \right]$$

$$+ \frac{1}{a_0^6} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t) \left\{ \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \left(\frac{1-p}{2} + 1\right)^2 \right\}}{\Gamma^4\left(1 + \frac{p-1}{2}\right)} \right.$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2 \cdot 2 \left(\frac{2-p}{2}\right)^2}{2! \Gamma^4\left(1 + \frac{p-2}{2}\right)} + \frac{2^3 \cdot k_N(t)^3}{3! \Gamma^4\left(1 + \frac{p-3}{2}\right)} \left. \right]$$

$$+ \dots \left. \right\} \dots \dots \dots (30)$$

$M_z(t)_{n \times n}$ の第2項

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^n \cdot k_N(t)^n}{n!} (\mu_n^{(q)})^2$$

は式(28)に於いて B を D に、 p を q に変えれば求められる。 $M_z(t)_{n \times n}$ の第3項は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi^n k_N(t)^n}{n!} \times 2 (\mu_n^{(p)}) (\mu_n^{(q)})$$

$$= \frac{B D (p!) (q!) \left(\frac{\psi}{2}\right)^{p+q} a_0^{p+q}}{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-1}{2}\right)} \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{a_0^4} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t) \left\{ \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2}\right)^2 \right\}}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-1}{2}\right)} \right]$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2}{2! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-2}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-2}{2}\right)} \left. \right]$$

$$+ \frac{1}{a_0^6} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p-1}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-1}{2}\right)} \right.$$

$$\times \left\{ \frac{\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \left(\frac{1-p}{2} + 1\right)^2}{2!} + \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{1-q}{2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{1-q}{2}\right)^2 \left(\frac{1-q}{2} + 1\right)^2}{2!} \right\}$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2}{2! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-2}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-2}{2}\right)}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{2-p}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-q}{2}\right)^2 \right\} +$$

$$\frac{2^3 \cdot k_N(t)^3}{3! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-3}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{q-3}{2}\right)} \left. \right] + \dots \dots \dots (31)$$

$M_z(t)_{s \times n}$ の第1項は、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m (-1)^{n+m}}{n!} \phi^n k_N(t)^n \cos m \omega t$$

$$\times (\mu_{m,n}^{(p)})^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^2(p)!^2 \left(\frac{\psi}{2}\right)^{2p} a_0^{2p}}{2} \cos m \omega t$$

$$\times \left\{ \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-1}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-1}{2}\right)} \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{a_0^4} \left[\frac{2^2 \cdot k_N(t) \left(\frac{m+1-p}{2}\right) \left(\frac{m+1-p-m}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-1}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-1}{2}\right)} \right]$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2}{2! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-2}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-2}{2}\right)} \left. \right]$$

$$+ \frac{1}{a_0^6} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t) \left\{ \left(\frac{m+1-p}{2}\right)^2 \left(\frac{m+1-p-m}{2}\right)^2 \right. \right.}$$

$$\left. \left. \Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-1}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-1}{2}\right) \right. \right.$$

$$+ \frac{\left(\frac{m+1-p}{2}\right) \left(\frac{m+1-p+1}{2}\right) \left(\frac{m+1-p-m}{2}\right)}{\left. \left. + \frac{p-m-1}{2} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. \left(\frac{m+1-p-m+1}{2}\right) \right\} \right.$$

$$+ \frac{2^3 \cdot k_N(t)^2 \cdot \left(\frac{m+2-p}{2}\right) \left(\frac{m+2-p-m}{2}\right)}{2! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-2}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-2}{2}\right)}$$

$$+ \frac{2^3 \cdot k_N(t)^3}{3! \Gamma^2\left(1 + \frac{p-m-3}{2}\right) \Gamma^2\left(m+1 + \frac{p-m-3}{2}\right)} \left. \right]$$

$$+ \dots \dots \dots \} \dots \dots \dots (30)$$

$M_s(t)_{s \times n}$ 第 2 項

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \phi^n k_N(t)^n \cos m \omega_c t \left(\frac{\mu_m^{(p)}}{m^n} \right)^2$$

は B を D に、p を q に変えれば求められる。最後に、 $M_s(t)_{s \times n}$ の第 3 項は、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \phi^n k_N(t)^n \cdot \cos m \omega_c t \times 2$$

$$\times \left(\frac{\mu_m^{(p)}}{m^n} \right) \left(\frac{\mu_m^{(q)}}{m^n} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} B D (p!) (q!) \left(\frac{\phi}{2} \right)^{\frac{p+q}{2}}$$

$$a_0^{p+q} \cos m \omega_c t \left\{ \frac{1}{a_0^2} \right.$$

$$\times \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t)}{\Gamma \left(1 + \frac{p-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-1}{2} \right)} \right.$$

$$\left. \frac{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-1}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-1}{2} \right)} \right]$$

$$+ \frac{1}{a_0^4} \left[\frac{2^1 \cdot k_N(t) \left\{ \left(\frac{m+1-p}{2} \right) \left(\frac{m+1-p-m}{2} \right) \right\}}{\Gamma \left(1 + \frac{p-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-1}{2} \right)} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{m+1-q}{2} \right) \left(\frac{m+1-q-m}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-1}{2} \right)} \right]$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2}{2! \Gamma \left(1 + \frac{p-m-2}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-2}{2} \right)}$$

$$\left. \frac{\Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-2}{2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{q-m-2}{2} \right)}{\Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-2}{2} \right) \Gamma \left(1 + \frac{q-m-2}{2} \right)} \right]$$

$$+ \frac{1}{a_0^6} \left\{ \left[\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{m+1-p}{2} \right) \left(\frac{m+1-p+1}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{p-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-1}{2} \right)} \right. \right.$$

$$\left. \frac{\left(\frac{m+1-p-m}{2} \right) \left(\frac{m+1-p-m+1}{2} \right) + \frac{1}{2}}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-1}{2} \right)} \right.$$

$$\left. \frac{\left(\frac{m+1-q}{2} \right) \left(\frac{m+1-q+1}{2} \right) \left(\frac{m+1-q-m}{2} \right)}{\left(\frac{m+1-q-m+1}{2} \right)} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{m+1-p}{2} \right) \left(\frac{m+1-p-m}{2} \right) \left(\frac{m+1-q}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{p-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-1}{2} \right)} \right.$$

$$\left. \frac{\left(\frac{m+1-q-m}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-1}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-1}{2} \right)} \right\}$$

$$\times 2^1 \cdot k_N(t)$$

$$+ \frac{2^2 \cdot k_N(t)^2 \left\{ \left(\frac{m+2-p}{2} \right) \left(\frac{m+2-p-m}{2} \right) \right\}}{2! \Gamma \left(1 + \frac{p-m-2}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-2}{2} \right)}$$

$$+ \frac{\left(\frac{m+2-q}{2} \right) \left(\frac{m+2-q-m}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-2}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-2}{2} \right)}$$

$$+ \frac{2^3 \cdot k_N(t)^3}{3! \Gamma \left(1 + \frac{p-m-3}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{p-m-3}{2} \right)}$$

$$\left. \frac{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-3}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-3}{2} \right)}{\Gamma \left(1 + \frac{q-m-3}{2} \right) \Gamma \left(m+1 + \frac{q-m-3}{2} \right)} \right\}$$

$$+ \dots \dots \dots \} \dots \dots \dots (31)$$

5 入力雑音の自己相関関数

RC フィルターを通して白色雑音が検波器に加えられるとすれば、検波器入力雑音の電力スペクトル密度は次式で与えられる。

$$W_y(f)_{noise} = \frac{W_0}{1 + \omega^2 / \alpha^2}, \quad \alpha > 0 \dots \dots \dots (32)$$

従って Wiener-Khintchine の定理より自己相関関数は、

$$K_y(t) = \frac{W_0 \alpha}{4} e^{-\alpha |t|} \equiv \phi e^{-\alpha |t|},$$

$$\phi = \frac{W_0 \alpha}{4} \dots \dots \dots (33)$$

$$k_N(t) = \frac{1}{\phi} K_y(t) = e^{-\alpha |t|} \dots \dots \dots (34)$$

6 実際のダイオードの特性

実際のダイオードの順方向特性が次式で表される事は周知のとおりである。すなわち、

$$I_f = I_s \left\{ \exp \left(\frac{eV}{kT} \right) - 1 \right\} \dots \dots \dots (35)$$

ここで、 I_f : 順方向電流、 I_s : 飽和電流、 e : 電子の電荷、 k : Boltzmann 定数、 T : 絶対温度、 V : 有効接合電圧とする。

$$I_f = I_s \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{eV}{kT} \right)^n - 1 \right\} = I_s \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{eV}{kT} \right)^n \right\} \dots \dots \dots (36)$$

$\left(\frac{eV}{kT} \right) < 1$ ならば実用的には第 2 項までの近似を行

なえば良い。というのは、今 $\left(\frac{eV}{kT} \right) = 1$ とすれば、

$$I_f = I_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \dots \dots \right\} \text{となり、第 3}$$

項は初項の $\frac{1}{6}$ の大きさになり、 $\left(\frac{eV}{kT}\right) < 1$ ならば第3項以上の高次項はさらに小さくなるからである。従って、

$$I_f \cong I_s \left\{ \left(\frac{eV}{kT} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{kT} \right)^2 \right\}, \quad \frac{eV}{kT} < 1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

上式と式(17)を比較すれば、明かに次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} B &= \left(\frac{eV}{kT} \right) I_s, & D &= \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{kT} \right)^2 I_s \\ p &= 1, & q &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$\left(\frac{kT}{e} \right)$ の値は 302°K に於いて、約 26mV である。

7 信号分および雑音分の計算

式(28)に式(37)および(38)の関係を代入すると、信号分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{S}_{out} &= \left(\frac{e}{kT} \right) I_s \psi^{1/2} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} + a_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi} \right) + \frac{1}{a_0} \right. \\ &\times \left(\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \right) + \frac{1}{a_0^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{32\pi} \right) + \frac{1}{a_0^5} \left(\frac{3\sqrt{2}}{128\pi} \right) + \dots\dots \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 I_s \psi \left\{ a_0^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

雑音分も(28)~(31)の各式および、文中に説明のみで書く事を省略した他の2項にも(38)の関係を代入し、さらにこれ等をもて積分するなど式(28)に示されている操作で求められる。以下積分の結果を示すと、

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \psi^n k_N(t)^n}{n!} (\mu_n^{(p)})^2 dt \\ &= \left(\frac{e}{kT} \right)^2 I_s^2 \psi \alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{1}{8\pi^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{a_0^4} \left(\frac{1}{16\pi^2} \right) + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \psi^n k_N(t)^n}{n!} (\mu_n^{(q)})^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e}{kT} \right)^4 I_s^2 \psi^2 \alpha^{-1} \left\{ a_0^2 \left(\frac{8}{\pi^2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{10}{9\pi^2} \right) + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \psi^n k_N(t)^n}{n!} \times 2 (\mu_n^{(p)}) \\ &\quad (\mu_n^{(q)}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e}{kT} \right)^3 I_s^2 \psi^{3/2} \alpha^{-1} \left\{ a_0 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{a_0} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \right) + \frac{1}{a_0^3} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right) + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \psi^n k_N(t)^n \cos m\omega c t \\ &\times (\mu_{m,n}^{(p)})^2 dt = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 I_s^2 \psi \left\{ \frac{8\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega c^2} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{9} \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega c^2} + \frac{1}{25} \frac{1}{\alpha^2 + 25\omega c^2} + \dots\dots \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{a_0^2} \left\{ -\frac{4\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega c^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega c^2} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha^2 + 25\omega c^2} + \dots\dots \left. \right\} + \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha^2 + 4\omega c^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 9\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) \\ &+ \frac{1}{a_0^4} \left[\frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{-1}{\alpha^2 + \omega c^2} + \frac{7}{\alpha^2 + 9\omega c^2} + \frac{23}{\alpha^2 + 25\omega c^2} \right) \right. \\ &+ \dots\dots \left. \right] - \frac{\alpha}{2\pi^2} \left(\frac{3}{\alpha^2 + \omega c^2} + \frac{15}{\alpha^2 + 4\omega c^2} \right. \\ &+ \frac{35}{\alpha^2 + 9\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) + \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{9\alpha^2 + \omega c^2} \right. \\ &+ \frac{9}{9\alpha^2 + 9\omega c^2} + \frac{25}{9\alpha^2 + 25\omega c^2} + \frac{49}{9\alpha^2 + 49\omega c^2} \\ &\left. + \dots\dots \right) + \dots\dots \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 &\equiv \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \psi^n k_N(t)^n \cos m\omega c t \\ &\times (\mu_{m,n}^{(q)})^2 dt = \frac{1}{8} \left(\frac{e}{kT} \right)^4 I_s^2 \psi^2 \left\{ a_0^2 \left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega c^2} \right. \right. \\ &+ \frac{32\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{9} \frac{1}{\alpha^2 + 4\omega c^2} + \frac{1}{225} \frac{1}{\alpha^2 + 16\omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{35^2} \frac{1}{\alpha^2 + 36\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) \left. \right] \\ &- \frac{16\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha^2 + 4\omega c^2} + \frac{1}{15} \frac{1}{\alpha^2 + 16\omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{35} \frac{1}{\alpha^2 + 36\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) \\ &+ \frac{16\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{4\alpha^2 + \omega c^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{4\alpha^2 + 9\omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{25} \frac{1}{4\alpha^2 + 25\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) \\ &+ \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{4\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^2 + 4\omega c^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 16\omega c^2} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha^2 + 36\omega c^2} + \dots\dots \left. \right] - \frac{8\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{4\alpha^2 + \omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{4\alpha^2 + 9\omega c^2} + \frac{1}{4\alpha^2 + 25\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) \\ &+ \frac{4\alpha}{\pi^2} \left(\frac{1}{9\alpha^2 + 4\omega c^2} + \frac{1}{9\alpha^2 + 16\omega c^2} \right. \\ &+ \frac{1}{9\alpha^2 + 36\omega c^2} + \dots\dots \left. \right) + \dots\dots \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &\equiv \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon_m (-1)^{m+n}}{n!} \phi^n k_N(t)^n \cos m \omega_c t \\
 &\times 2 \left(\mu_{m,n}^{(p)} \right) \left(\mu_{m,n}^{(q)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e}{kT} \right)^3 I_s^2 \psi^{3/2} \left\{ a_0 \left(\frac{4}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_c^2} \right) \right. \\
 &+ \frac{1}{a_0} \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_c^2} \right) + \frac{1}{a_0^3} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_c^2} \right) \\
 &+ \dots \dots \dots \left. \right\} \dots \dots \dots (45)
 \end{aligned}$$

求むる信号対雑音比は式(39)~(45)を用いて表され、次のようになる。

$$(S/N)_{out} = \frac{\bar{S}_{out}}{2\sqrt{\Delta f} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)^{1/2}} \dots \dots \dots (46)$$

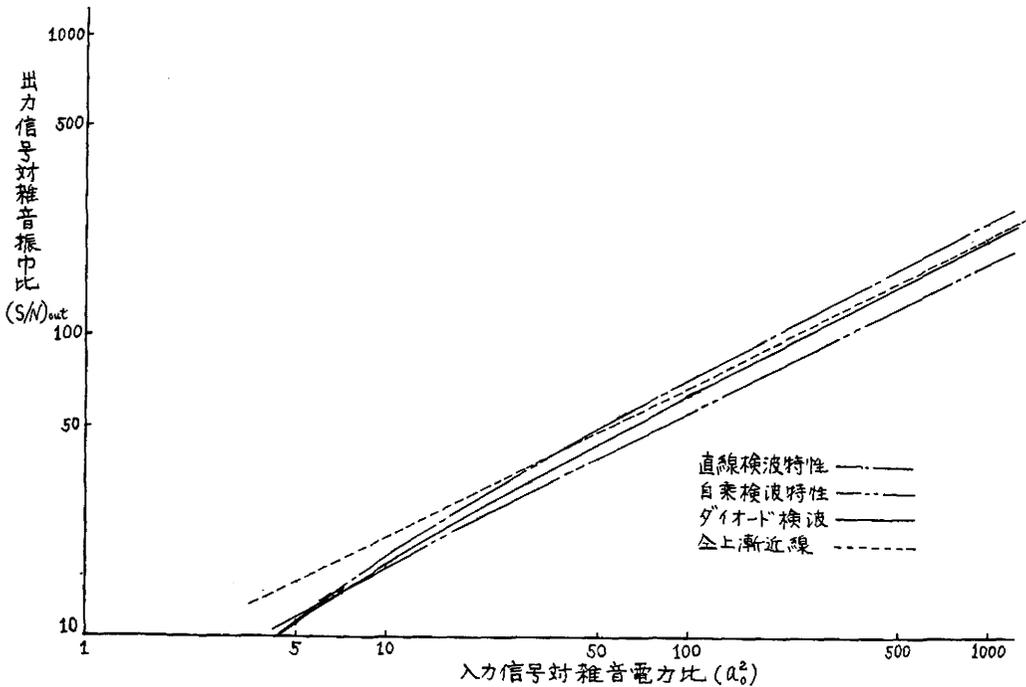


Fig. 2 Input-output signal-to-noise ratio

9 結 言

式(39)~(46)を見れば判るように、ダイオード検波器出力の信号対雑音比は、入力信号対雑音比、入力フィルタの周波数特性、出力フィルタの帯域幅等の関数として表される。数値計算では出力の信号対雑音比が入力のそれ(振幅比)よりも大きくなっているが、これは出力に現れる $n \times n$ 及び $s \times n$ の混変調積の周波数の高い成分を平滑フィルタで除去しているためであ

8 数値計算例

信号レベルを一定、即ち $A = 20mV$ と仮定し、 a_0 の値をいろいろ変化させた場合の出力の信号対雑音比の値を、直線検波特性、自乗検波特性、ダイオード検波特性について計算した結果を図-2に示す。

ただし、 $f_c = 1Mc$, $\alpha/2\pi = 1.5Mc$, $\Delta f = 20kc$, $T = 302^\circ K$ と仮定した。

図中、漸近線は a_0 の値が非常に大きい場合の $(S/N)_{out}$ の特性を示すもので、

$$\lim_{a_0^2 \rightarrow \infty} (S/N)_{out} \cong 6.76 a_0$$

なる関係で表される。

図-2より判る事は、 a_0 が大きい範囲では、大きい信号対雑音比を得るためには直線検波がもっとも良く、自乗検波は思わしくないということである。従って、当然ダイオード検波はその中間に位置すると言う事は推則できるが、図-2にもそれがはっきり現れている。然し a_0 が非常に小さい場合は、直線検波よりもむしろ自乗検波の方が優れている。これは図-2で $a_0 = 5.5$ 付近で、両曲線が交わっている事からも

うかがわれるが、一般的に言える事実である。 a^2_0 が非常に大きくなると、ダイオード検波特性では、 a_0 (入力信号対雑音振幅比) と出力の信号対雑音振幅比との間に比例関係を生ずる。これは直線検波、自乗検波、更に高次の検波特性に対しても言えることである。逆に a^2_0 が非常に小さい場合は、出力の信号対雑音振幅比は a^2_0 に比例する。ダイオード検波特性が直線検波や自乗検波特性と一番異なる点は、式(20)から判るように出力の covariance 関数の中に、直線検波特性の自己相関関数、自乗検波特性の自己相関関数、および両検波特性の相互相関関数に相当する項が含まれているという事実である。このために出力雑音中には、直線、自乗両検波特性によるもののほかに、 $\frac{3}{2}$ 乗検波特性に相当するような雑音が含まれている。これは式(42)および(45)という、その中に $\left(\frac{e}{kT}\right)^8 \phi^{3/2}$ なる係数を

持った雑音項が存在する事から明らかである。信号項の中には当然、直線、自乗両検波特性による成分が含まれている。

本稿では、入力信号は無変調搬送波であると仮定したので、出力信号は検波直流電流と定義せざるを得ない。入力信号が振幅変調波で入力雑音が搬送周波数を中心として比較的狭帯域にしか存在しない場合、またダイオードに検波電流によってバイアスがかかる事を考慮したような場合の解析は更に興味深く、実際に即した問題であるが、非常に複雑になることはまぬがれない。一般に入力信号が大きい場合は、ダイオードを直線検波器として動作させるのが、最良の信号対雑音比を得る方法である。

文 献

Middleton, D., An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, 1960.