

なめらかな円管内の流れと急拡大損失

立花規良*・喜多正和**

Flow and Loss due to Sudden Enlargement in
a Smooth Pipe of Circular Cross-Section

Motoyoshi Tachibana , Masakazu Kita

(Received June 15, 1977)

On the steady flow of liquids through a sudden enlargement in circular section pipes, an experimental investigation was carried out in the range of $10^3 - 10^4$ of Reynolds number.

And, it was shown that (1) in the characterization ($\xi - Re_1$) of loss due to a sudden enlargement, a transition phenomenon is found in $Re_1 = (2 - 4) \times 10^3$, (2) the loss coefficient due to a sudden enlargement ξ is composed of ξ'_v (the part due to velocity distribution) and ξ_s (the part related to shear stress) and ξ is less than ξ'_v in laminar flow, and (3) the situation of pressure recovery in the downstream of a sudden enlargement is under the influence of Reynolds number and rate of enlargement.

1. 緒言

流体が円管内を流れ、その断面積が急拡大する場合、流れは減速し、圧力は上昇する。このような流れの状態では、流れがはぐりし、渦域が形成され、円管内の摩擦による損失にくわえ、急拡大による付加的な損失が生ずる。この損失は、水力学における古典的な問題の一つとして、運動量の法則を応用してとかれ、Borda-Carnotの公式として知られるきわめて簡単な表示式であらわされる。しかし、この公式は、実際に用いるときには、検討を必要とする多くの仮定にもとづかれている。そこで、公式の妥当性を調べるために、高レイノルズ数 ($Re_1 : 10^4 - 10^5$) 域において、Gibson¹⁾、Archer²⁾、植松³⁾、等により実験的に研究され、急拡大損失と拡大率や平均流速の関係が明らかにされ、各種の実験式が作成され、今日に至っている。一方、電子計算機を利用した数値解法の発達と共に、流体力学的な課題の一つとして、その幾何学的形状の単純さや工学的応用性のために

急拡大部における流れの解明がとりあげられた。この場合、流れはおそく層流であるとされる。Macagnoら⁴⁾は、レイノルズ数の低い層流域 ($Re_1 : \sim 200$) において、差分数値解法により、急拡大部に発生する渦や流線模様などを決定し、実験結果と比較し、解析結果が満足すべきものであることを報告している。しかし、このような数値解析は、レイノルズ数の増加と共に、計算時間が急増し、解を求めるのが困難となり、目下のところ、遷移域ないしは乱流域での解析はなされていないようである。

そこで、著者らは、円管内流れにおける遷移域を含むレイノルズ数が $10^3 - 10^4$ の範囲で実験をおこない、管摩擦、速度分布、急拡大圧力回復、急拡大損失、などにつき検討し、急拡大損失と速度分布の関係を明らかにした。

おもな記号

- a 円管ないしは円管路の半径
- d 円管ないしは円管路の直径
- x_0 圧力回復距離 - 図 1
- u 円管の任意半径位置 r の速度
- \bar{u} 円管内の平均流速
- u_{max} 円管の管軸上の最大速度
- Q 円管ないしは円管路内流量
- h_x 円管路の拡大部から下流側に x なる距離における圧力液頭 - 図 1
- h_m 円管路の拡大部下流側の最大圧力液頭 - 図 1
- Δh 円管路の拡大部における上昇圧力液頭 - 図 1
- h_e 円管路の急拡大による損失液頭

$$h_e = \frac{(\bar{u}_1^2 - \bar{u}_2^2)}{2g} - \Delta h$$

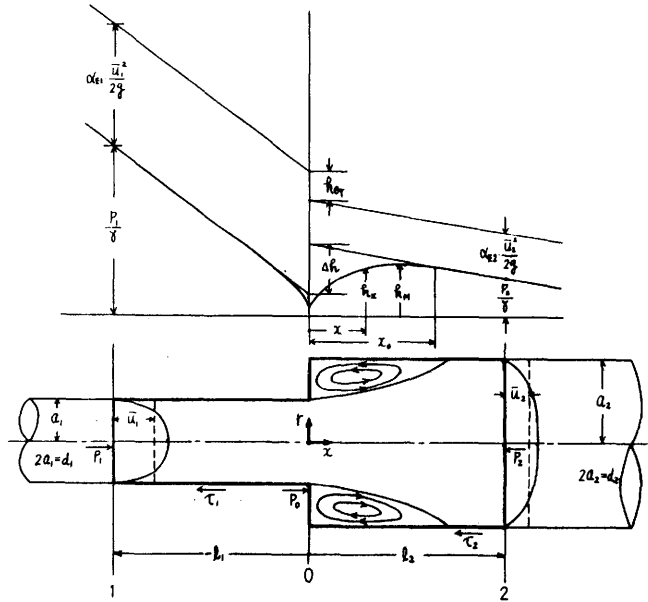


図 1 円管路内急拡大部の流れと圧力変化

- h_f 円管の長さ l における摩擦損失液頭
- P/γ 円管路における圧力液頭、 γ 流体の比重量 $\gamma = \rho g$ 、 ρ 流体の密度
- τ 円管路の拡大部近傍における管壁でのせん断応力、 μ 流体の粘性係数
- τ_w 円管内流れにおける管壁でのせん断応力、 ν 流体の運動粘性係数 $\nu = \mu/\rho$
- m 拡大管の拡大率 $m = (a_2/a_1)^2 = (d_2/d_1)^2$
- Re 円管ないしは円管路内の流れのレイノルズ数 $Re = \bar{u}d/\nu$
- λ 管摩擦係数 $\lambda = \frac{h_f}{\frac{l}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g}}$ 、 G 圧力回復率 $G = \frac{h_m - h_x}{\Delta h}$
- ξ 急拡大損失係数 $\xi = \frac{h_e}{\frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{2g}}$ 、 ξ_T 急拡大損失係数 $\xi_T = \frac{h_{eT}}{\frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{2g}}$ - 式 (7)

ξ'_v 急拡大損失係数の速度分布に依存する部分 $\xi'_v = \xi'_v + \Delta \xi$ 、 $\Delta \xi = \xi_T - \xi$
 ξ'_s 急拡大損失係数のせん断応力が関係する部分、 ξ_{sc} 、 ξ_{sq} ξ'_s の表示式の定数 - 式 (18)

α_v, n 速度分布表示式の実験的定数と実験的指数 - 式 (13)

α_E 速度分布に関する補正係数 - 式 (2)、 α_M 速度分布に関する補正係数 - 式 (4)

α_s せん断応力に関する補正係数 - 式 (5)

α_p 円管路の急拡大部の圧力に関する補正係数 - 式 (6)

円管路の急拡大部の上流側と下流側を区別しあらかず場合には、必要に応じて、上流側に添字 1 を、下流側に添字 2 をつける。

2. 理 論

図 1 のように、円管路の途中に急拡大部が存在する定常流において、急拡大部の上流と下流の二つの断面 1 および 2 にベルヌーイの定理を適用すると、

$$\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_{E1} \frac{\bar{u}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_{E2} \frac{\bar{u}_2^2}{2g} + h_{eT} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{\bar{u}_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{\bar{u}_2^2}{2g} \quad (1)$$

となる。ここで、 h_{eT} は急拡大による損失液頭で、右辺の第四項と第五項は、断面 1 と急拡大部 および急拡大部と断面 2 の間の摩擦損失である。 α_E は、

$$\alpha_E = \frac{2}{a^2 \bar{u}^3} \int_0^a u^3 r dr \quad (2)$$

で定義される円管内の速度分布に依存する補正係数である。次に、急拡大部の上流と下流の二つの断面 1 および 2 と管路壁によりとりかこまれた部分に、運動量の法則を適用すると、

$$\int_0^{a_2} \rho u^2 \cdot 2\pi r dr - \int_0^{a_1} \rho u_1^2 \cdot 2\pi r dr = \pi a_1^2 P_1 + \pi (a_2^2 - a_1^2) P_0 - \pi a_2^2 P_2 - \int_{-l_1}^0 2\pi a_1 \tau_1 dx - \int_0^{l_2} 2\pi a_2 \tau_2 dx \quad (3)$$

をうる。今、

$$\alpha_M = \frac{2}{a^2 \bar{u}^2} \int_0^a u^2 r dr \quad (4), \quad \alpha_s = \frac{l}{2\tau_w} \int_0^l \tau dx = \frac{l}{\frac{\lambda}{8} \rho \bar{u}^2} \int_0^l \tau dx \quad (5), \quad \alpha_p = \frac{P_0}{P_1 - \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{\rho \bar{u}_1^2}{2}} \quad (6)$$

で定義される速度分布、せん断応力、圧力、に関する補正係数を導入し、整理すると、

$$h_{eT} = -\frac{m-1}{m} (\alpha_p - 1) \frac{P_1}{\gamma} + \left[(\alpha_{E1} - \frac{\alpha_{E2}}{m^2}) - 2 \left(\frac{\alpha_{M1}}{m} - \frac{\alpha_{M2}}{m^2} \right) + \left\{ (\alpha_p - 1) + \frac{\alpha_{S1} - \alpha_p}{m} \right\} \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \frac{\alpha_{S2} - 1}{m^2} \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \right] \frac{\bar{u}_1^2}{2g} \quad (7)$$

となる。急拡大損失係数 ξ_T を、

$$h_{eT} = \xi_T \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{2g} = \xi_T \left(1 - \frac{1}{m} \right)^2 \frac{\bar{u}_1^2}{2g} \quad (8)$$

で定義すると、式 (7) より、

$$\xi_T = -\frac{\alpha_p - 1}{m-1} \frac{P_1}{\gamma} + \frac{(m^2 \alpha_{E1} - \alpha_{E2}) - 2(m \alpha_{M1} - \alpha_{M2})}{(m-1)^2} + \frac{\{m^2(\alpha_p - 1) + m(\alpha_{S1} - \alpha_p)\} \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + (\alpha_{S2} - 1) \lambda_2 \frac{l_2}{d_2}}{(m-1)^2} \quad (9)$$

がえられる。式 (9) における諸係数は、一般に、レイノルズ数と拡大率の関数で、実験的に決定可能である。また、実験結果から算出された急拡大損失係数が、レイノルズ数と拡大率のみにより相関づけられ、圧力 P_1 に独立な場合には、 $\alpha_p = 1$ とみなせ、式 (9) は、

$$\left. \begin{aligned} \xi_T &= \xi_T(m, Re) = \xi_V + \xi_S \\ \xi_V &= \frac{(m^2 \alpha_{E1} - \alpha_{E2}) - 2(m \alpha_{M1} - \alpha_{M2})}{(m-1)^2} \\ \xi_S &= \frac{m(\alpha_{S1} - 1) \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + (\alpha_{S2} - 1) \lambda_2 \frac{l_2}{d_2}}{(m-1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。なお、このとき、断面 1 と断面 2 の速度が一樣である (\bar{u}_1 および \bar{u}_2) として、急拡大損失係数 ξ_T を定義 (従来、慣習的に使用されてきた) すると、 ξ_T との間に、

$$\xi = \xi_T - \Delta \xi \quad \left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \frac{n \cdot (\alpha_{E1} - 1) - (\alpha_{E2} - 1)}{(m-1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

の関係があり、式 (10) に準ずると、

$$\xi = \xi(m, Re) = \xi'_v + \xi_s \quad \left. \begin{aligned} \xi'_v &= \frac{(m^2-1) - 2(m\alpha_{M1} - \alpha_{M2})}{(m-1)^2} \\ \xi_s &= \frac{m(\alpha_{S1}-1)\lambda_1 \cdot k_1/d_1 + (\alpha_{S2}-1)\lambda_2 \cdot k_2/d_2}{(m-1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。

流体がなめらかな円管内を定常的に流れるときの速度分布は、Pai によれば⁵⁾

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - (1 - \alpha_v) \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \alpha_v \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \quad (13)$$

と表示され、実験的係数 α_v と実験的指数 n は、流れのレイノルズ数の関数である。今、乱流における値を、

Nikuradse の実験結果⁶⁾ から決定すると、 α_v と n は、

$$\left. \begin{aligned} \text{層流} \quad \alpha_v &= 0 & - Re < 2 \times 10^3 \\ \text{乱流} \quad \alpha_v &= 0.453 + 0.0541 \cdot \log_{10} Re \\ n &= 6.2 + 4.7 \cdot \log_{10} Re \end{aligned} \right\} - 4 \times 10^3 < Re < 105 \times 10^3 \quad (14)$$

となる (付録参照)。式 (13) より、速度分布の補正係数 α_M と α_E は、

$$\alpha_M = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \frac{(n-1)(n+4)}{(n+1)(n+2)} \cdot \alpha_v + \frac{2(n-1)^2}{(n+2)(2n+1)} \cdot \alpha_v^2}{\left(1 + \frac{n-1}{n+1} \cdot \alpha_v\right)^2} \quad (15)$$

$$\alpha_E = 2 \cdot \frac{1 + \frac{(n-1)(n^2+17n+8)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \alpha_v + \frac{(n-1)^2(2n^2+17n+18)}{(n+1)(n+2)(n+3)(2n+1)} \cdot \alpha_v^2 - \frac{3(n-1)^3}{(n+1)(n+3)(3n+1)} \cdot \alpha_v^3}{\left(1 + \frac{n-1}{n+1} \cdot \alpha_v\right)^3} \quad (16)$$

となる。式 (14) にもとづき算定された α_M と α_E を、図 2 に示した。

ξ_v および ξ'_v は、図 2 と式 (10) ないしは式 (12) を組合せると算定される。計算結果を図 3 に示した。図 3 - a は、層流の場合で、 ξ_v および ξ'_v は Re

に独立で m のみの関数となり、 ξ'_v は m の増加関数で、 m が大きくなると 1 に漸近することがわかる。図 3 - b は、乱流の場合で、供試拡大管の m に対応する結果を例示した。 ξ'_v は Re の弱い増加関数でその値は、 m の増加と共に増大することが見出される。

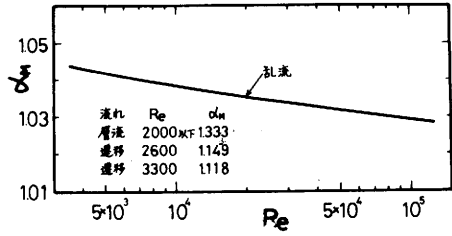


図 2 - a α_M と Re の関係

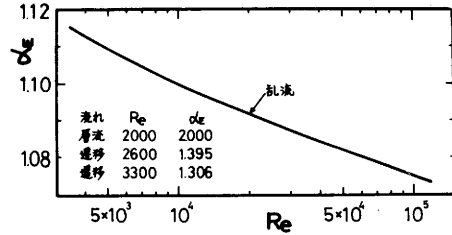


図 2 - b α_E と Re の関係

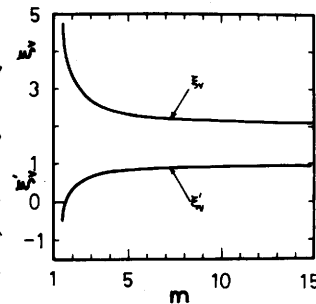


図 3 - a ξ_v, ξ'_v と m の関係

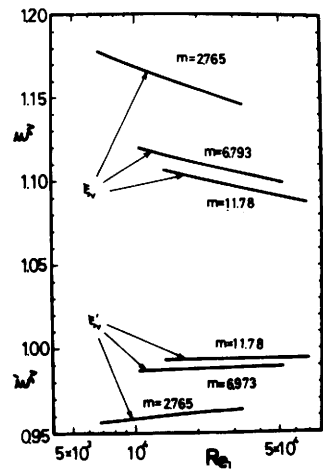


図 3 - b ξ_v, ξ'_v と Re の関係

3. 実験

3.1 装置と方法

実験装置の概略を、図 4 に示した。供試液体は、オーバー・フロー方式により、定液頭（3.46 m）のもとで、水平に設置された試験管路（⑧）を通り、流量調節弁（⑩）をへて流出するようになっている。試験管路は、アクリル製円管から作成され、圧力測定孔（直径 0.5 mm）が流れ方向に沿ってつけられている。管路の流れ方向の圧力分布を多管式マンノメータ（⑨）により観測し、管内の流量は流量調節弁の開度により変化させ、流出口で重量法により決定した。このとき、採集試料の温度を測定し、運動粘性係数や比重の補正に使用した。

管内の速度分布は、円管路において、圧力分布観測部の下流で円筒形ピトー管を使用し、ピトー管を水平断面内直径に沿って移動させる方法により決定した。供試ピトー管は外径 1 mm（内径 0.65 mm，長さ 67 mm）の注射針の中央部に総圧測定用の 0.5 mm の測定孔をあけ、先端を閉鎖したもので、実験時には円管をつきぬけるように設置される。このため、静圧はピトー管設置位置より、10 mm ずつ上流と下流の管壁にもうけた圧力測定孔（直径 0.5 mm）により求めた。任意半径位置（1 / 50 mm 精度のノギスにより決定）における速度は、着色四塩化炭素をマンノメータ液体とした傾斜式マンノメータにより観測した動圧と管軸部での最大速度と重量法による平均流速にもとづく検定曲線の関係から決定した。

3.2 試験管路と供試液体

実験に使用した急拡大試験管路の主要諸元を、表 1 に示し、各拡大管の圧力測定位置の配置図を、図 5 に示した。図中の寸法単位は mm で、縮尺は任意である。円管内の速度分布は、拡大管を構成したと同材質の内径 1.830 cm の試験円管で測定した。

供試液体は、水道水とグリセリン水溶液で、その運動粘性係数をウペローデ粘度計により測定し、比重をハイドロメータにより決定した。実験時におけるグリセリン水溶液の運動粘性係数と比重量は、（1.46 - 14.6）c.St. および（1012 - 1126）kgf/m³であった。

4. 実験結果とその検討

4.1 管摩擦

供試円管の管摩擦特性を明らかにするために、速度分布測定用円管と

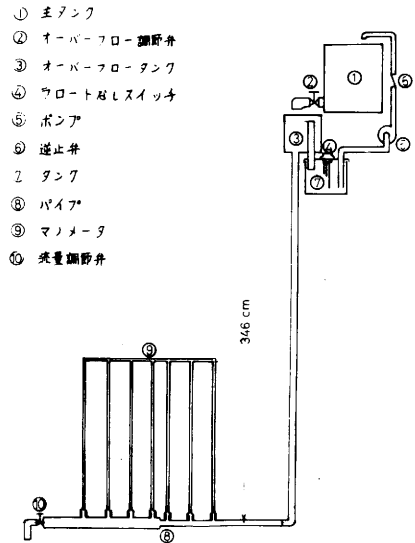


図 4 実験装置の概略

試験管路	上流側管内径 d_1 cm	下流側管内径 d_2 cm	拡大率 $m = (d_1/d_2)^2$
No.1	0.539	1.850	11.78
No.2	0.536	1.397	6.793
No.3	0.528	0.878	2.765
No.4	0.858	1.508	3.089

表 1 供試拡大管の主要諸元

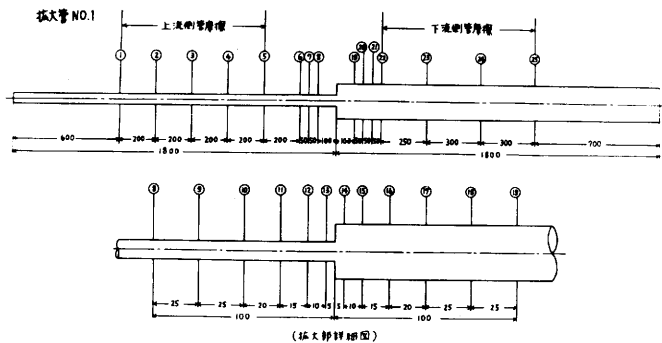


図 5 - a 急拡大観測用拡大管 No.1

拡大管の上流側円管における管摩擦係数とレイノルズ数の関係を図示し層流となめらかな円管の乱流の公式を記入した。その一例を、図 6 に示した。このような図から、供試円管は、水力学的になめらかであると判定しうる。さらに、拡大管の下流側円管で、水力こう配線が直線となった部分の管摩擦損失から算出した λ と Re の関係を図示したのが、図 7 である。図 7 - a は拡大管 No.1 の下流部分の結果で、実験結果のばらつきが大きい。これは、水力こう配線のこう配の小さいことに起因する観測誤差の影響もあるが、拡大率が大きく ($m = 11.78$)、拡大部によるみだれや助走域効果が残存するためであると考えられる。図 7 - b は拡大率が、拡大管 No.1 にくらべ、約 $1/4$ の拡大管 No.4 の結果である。実験結果のばらつきは小さくなり、乱流では、Blasius の式とほぼ一致している。しかし、層流および遷移域では、図 6 の結果と多少の差異がみられる。これは、拡大部によるみだれの影響より、助走域効果に起因すると推定され、拡大部から十分はなれた領域で λ を算定すれば消失すると思われるが、供試管路の諸元から、確認することはできなかった。

4.2 速度分布

水が円管内を流れるときの速度分布を流量を変化させて測定した。その実験結果の概要をまとめ

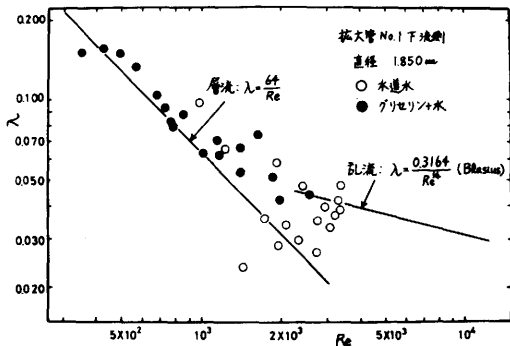


図 7 - a 管摩擦特性 拡大管 No.1 下流側

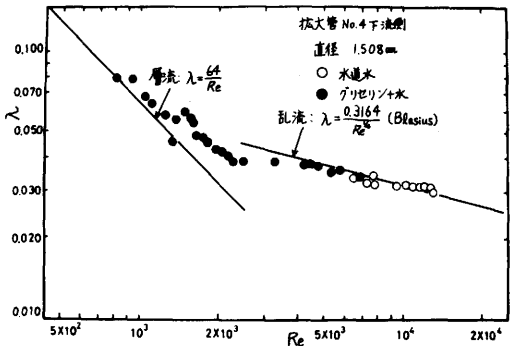


図 7 - b 管摩擦特性 拡大管 No.4 下流側

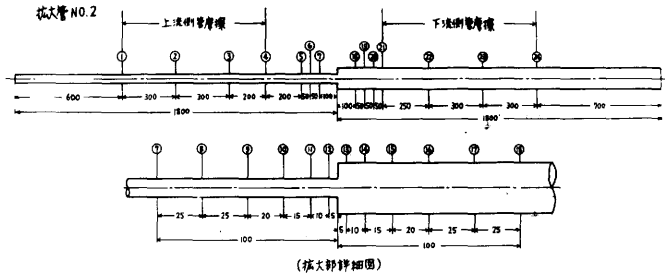


図 5 - b 急拡大観測用拡大管 No.2

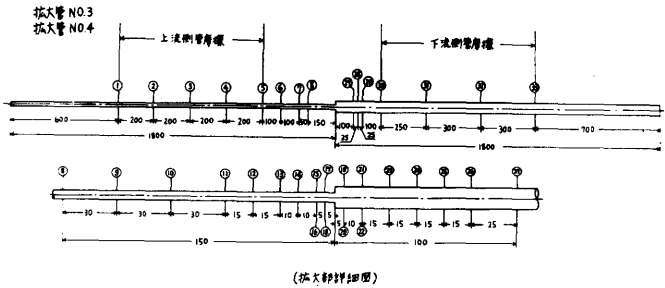


図 5 - c 急拡大観測用拡大管 No.3 & No.4

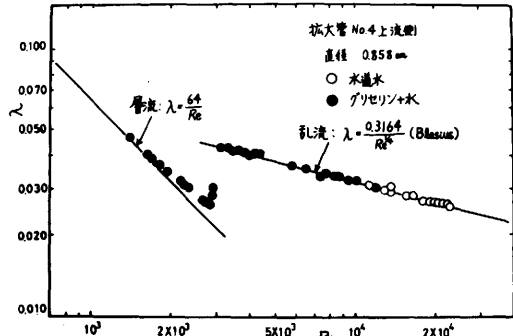


図 6 管摩擦特性 拡大管 No.4 上流側

て、表 2 に示した。平均流速と最大速度の比 \bar{u}/u_{max} は、レイノルズ数の増加と共に増大するが、その傾向をしらべるために、 \bar{u}/u_{max} と Re の関係を図示したのが、図 8 である。図には、過去の実験結果の代表例として、Nikuradse⁶⁾と Bogue⁷⁾のものを併記し、式 (14) にもとづく関係式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{u}}{u_{max}} &= \frac{1}{2} & - Re < 2 \times 10^3 \\ \frac{\bar{u}}{u_{max}} &= \frac{9.56 + 7.11 \cdot \log_{10} Re + 0.254 \cdot (\log_{10} Re)^2}{14.4 + 9.4 \cdot \log_{10} Re} & - 4 \times 10^3 < Re < 105 \times 10^3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を記入した。本実験の結果が他の実験結果とよい一致をみせ、妥当性をもつものであることがわかった。

次に、速度分布とその表示式 (13) を比較するために、 u/u_{max} と r/a の関係を図示し、式 (13)、(14) の計算結果を記入した。その一例を、図 9 に示した。

その結果、実験結果は、図 9 と同程度に、計算結果とよく一致することがわかった。本実験では、 $Re < 4 \times 10^3$ において、円筒形ピトー管による動圧が小さく、使用した傾斜式マンメータによる観測が不可能で、速度分布を実測することができなかった。しかし、管摩擦に関する実験結果から判断して円管内の層流では、速度分布は放物線

レイノルズ数 $Re = \frac{u_{max} D}{\nu}$	流量 Q (質量法)	流量 Q (体積法)	管内流速 u (平均)	最大速度 u_{max}	$\frac{u}{u_{max}}$	$\frac{\bar{u}}{u_{max}}$
4954	456	450	2891	376	0.987	0.769
6453	594	620	3766	472	1.044	0.789
9039	832	877	5275	65.8	1.054	0.802
12120	11.22	11.64	71.13	88.4	1.037	0.805
14541	13.41	13.59	85.02	104.0	1.013	0.817

表 2 実験結果 — 速度分布

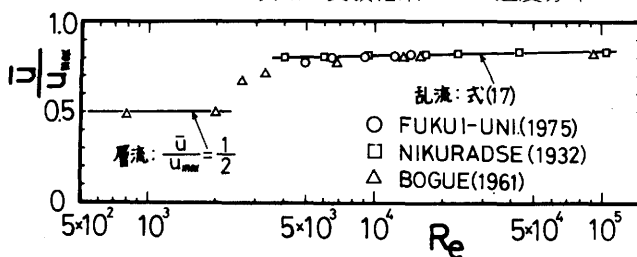
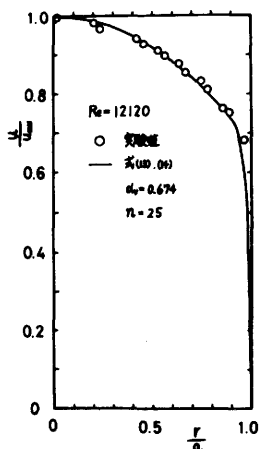


図 8 \bar{u}/u_{max} と Re の関係

分布になっているものと推定される。なお、遷移域 ($2 \times 10^3 < Re < 4 \times 10^3$) については、Bogue の実験結果⁷⁾ により、式 (13) の表現能力を検討することができる。付録に示した方法により実験結果から決定された α_v と n を用い、式 (13) から計



算された結果を実験 図 9 u/u_{max} と r/a の関係

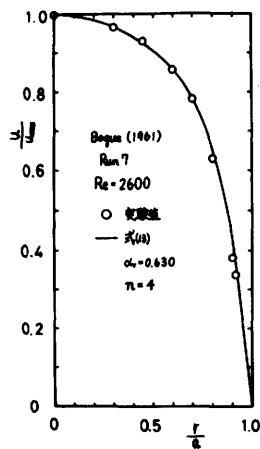
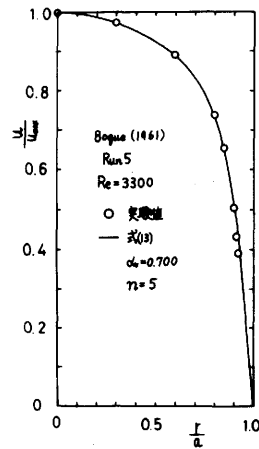


図 10 u/u_{max} と r/a の関係 (Bogue)



結果と共に図示したのが、図 10 である。これらの図より、計算結果は実験結果をよくあらわすことが見出され、式 (13) は、層流や乱流の領域のみならず、遷移域においても、速度分布の表示式として有用であることがわかる。また、図 8 の実験結果と式 (17) のよい一致も、式 (13) の有効性を傍証しているといえる。

4.13 急拡大圧力回復

急拡大部のある円管路の流れ方向の圧力の変化の状態の測定結果の代表的なものを、図 11 に示した。上図は流れが乱流、下図は流れが層流の場合である。図中の直線は、上流および下流の急拡大部

の影響が及ばないと考えられる部分の水力こう配直線で拡大部の近傍で測定結果の直線からの逸脱がみられ、特に、拡大部の下流における圧力回復の状態は上流の流れの状態により、おおいに異なることが見出される。そこで、この拡大部以後の圧力回復について検討する。

まず、測定結果が下流の水力こう配直線の延長線上に復帰した拡大部からの距離 x_0 につき、下流側円管直径 d_2 で無次元化した圧力回復距離 x_0/d_2 を上流のレイノルズ数 Re_1 に対し図示した。それが図 12 である。この図の (a) 図は拡大管 No. 2 の上流および下流の流れを記号分け ($Re < 2 \times 10^3$ - 層流, $2 \times 10^3 < Re < 4 \times 10^3$ - 遷移, $Re > 4 \times 10^3$ - 乱流) 図示したもので、このような各拡大管の図示の代表曲線をまとめたのが (b) 図である。これらの図より、

(1) x_0/d_2 は、一般に、 Re_1 の増加と共に、層流における高い値から急激に減少し、 $Re_1 = (3 - 6) \times 10^3$ で最小値をとり、それ以後漸次増加し、一定値 (その値は層流の限界 $Re = 2 \times 10^3$ の値より小さい) に近づく傾向をもつ。

(2) 層流では、 x_0/d_2 は、 Re_1 の増加と共に急減し、その変化率は m の小さいほど著しい。また、 Re_1 の一定値では、 m の増加と共に x_0/d_2 は小さくなる。

(3) $Re_1 = (3 - 12) \times 10^3$ の中間域では、実験結果のばらつきを考慮すると、 x_0/d_2 は m に独立で 3 - 5 となる。

(4) Re_1 の十分大きい乱流では、 x_0/d_2 は一定

となり、その値は m の増加と共に減少するが、それはあまり大きくない ($m = 3 \rightarrow 12$, $x_0/d_2 = 6.6 \rightarrow 5$)。ことが見出され、拡大部以後の圧力回復が達成される距離は、流れと拡大率に依存し、単純な関数関係で表示しえないが、層流では、他の流れの状態にくらべ、著しく長くなることがわかった。

次に、下流側の圧力回復の状態

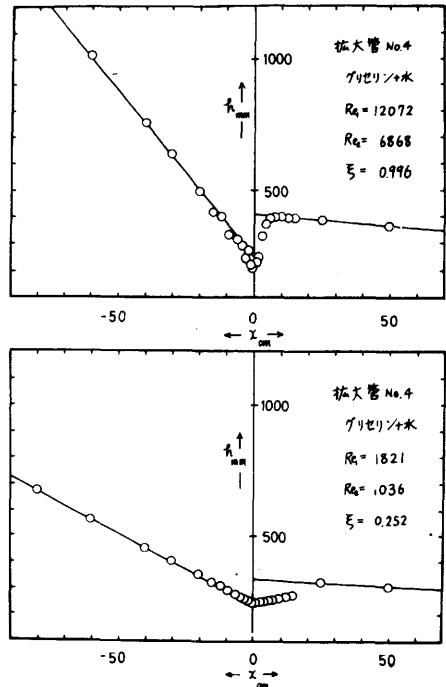


図 11 流れ方向の圧力分布

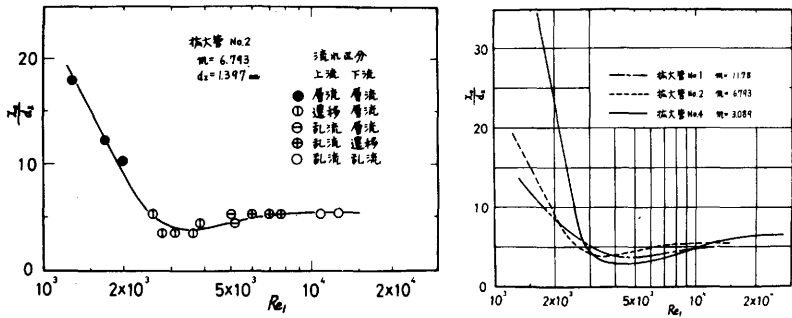


図 12 x_0/d_2 と Re_1 の関係 (a) 拡大管 No. 2 (b) 各拡大管の代表曲線

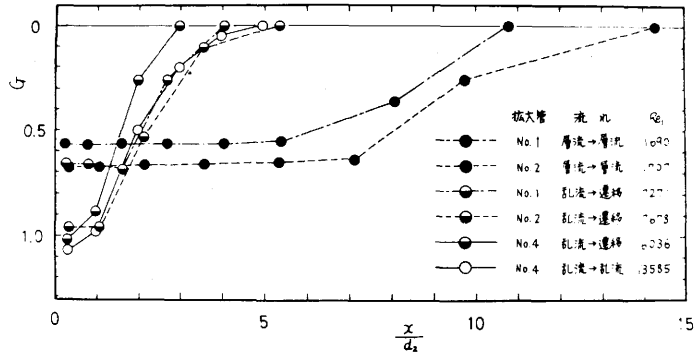


図 13 G と x/d_2 の関係

をみるために、圧力回復率 G と下流側の無次元距離 x/d_2 の関係を、いくつかの代表的な実験結果に対し図示したのが、図 13 である。この図より流れが層流であるか非層流（乱流と遷移流）であるかによる圧力回復の状態の差異は明白で、圧力回復は、層流では長い距離をかけてゆるやかに起こされるのに対し、乱流では急激で回復距離も短いことがわかった。

4.4 急拡大損失

円管路における急拡大損失特性を検討するために、上流側のレイノルズ数 Re_1 が $10^3 - 2 \times 10^4$ の範囲でおこなった実験結果から、急拡大損失係数 ξ を算出し、 Re_1 に対し図示した。それが図 14 である。これらの図より、各拡大管の実験結果は、

$$\xi = \xi(Re_1)$$

であることが見出され、種種の P_1 のもとでの実験結果が図示されていることを考えると、 ξ は P_1 に独立であるといえる。すなわち、本実験域では、 $\alpha_p = 1$ とみなしうる。次に、 Re_1 が $(2 - 4) \times 10^3$ において、 ξ が急激に変化する遷移現象がみとめられる。この領域では、上流側の流れは円管内の流れの遷移域に対応し圧力分布を測定するマンメータの液頭の変動は大きくなり、観測の精度は低下する。しかし、このことを考慮に入れても、円管内流れの管摩擦特性 ($\lambda - Re$) におけるような遷移域が急拡大損失特性 ($\xi - Re$) にも存在するといえる。 Re_1 が 2×10^3 以下になると、マンメータの液頭の動きはおちつき、流れは層流になる。層流域においては、 ξ は遷移や乱流の領域より小さくなり、その程度は拡大率 m が小さい程著しい。また、 Re_1 が 4×10^3 程度以上になると上流のマンメータの液頭の動きは安定し、流れが乱流になったことがわかるが、拡大率のいかんによっては、下流が遷移域にはいり、マンメータ液頭の動きが強くなることもある。しかし、下流側では、上流側にくらべ、圧力降下が小さく、観測結果への影響は上流側ほど小さくなく、測定結果のばらつきもそれほど大きくなる。さらに、 Re_1 が大きくなると上流および下流ともに乱流となり、 ξ はレイノルズ数の増加につれ、やや小さくなるないしは一定となる傾向を示す。このような領域では、 ξ

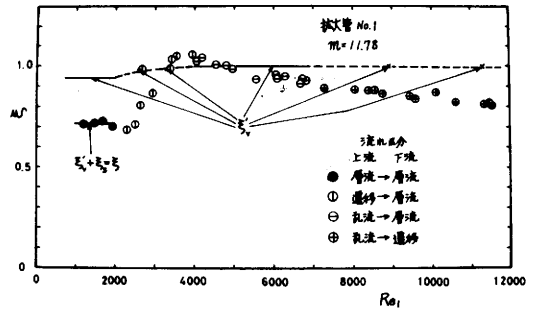


図 14-a ξ と Re_1 の関係 (拡大管No.1)

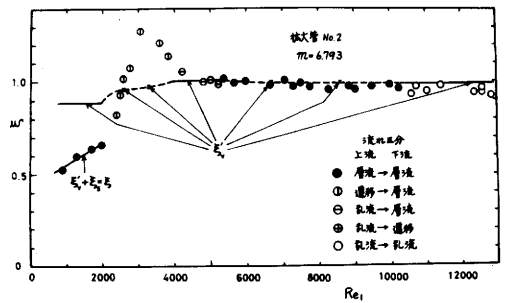


図 14-b ξ と Re_1 の関係 (拡大管No.2)

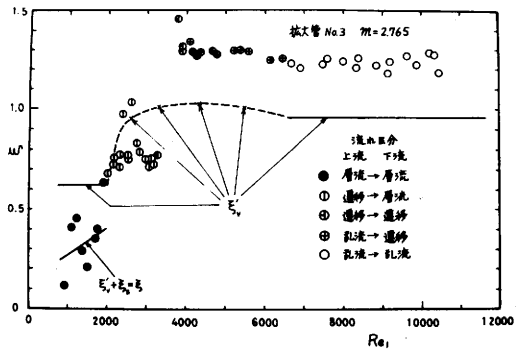


図 14-c ξ と Re_1 の関係 (拡大管No.3)

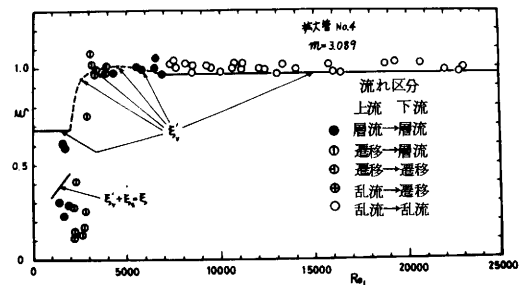


図 14-d ξ と Re_1 の関係 (拡大管No.4)

は m の減少と共に増大する。以上のように、 ξ_s は、複雑な挙動を示すが、一般に、

$$\xi_s = \xi_s(m, Re_1)$$

と関数表示しうることが明らかになった。

そこで、 ξ_s に関する表示式 (12) を検討するために種類の流れにおける ξ'_v を式 (13) ~ (16) にもとづき計算し、その結果を、図 14 に記入した。

層流域 ($Re_1 < 2 \times 10^3$) では、各拡大管において、 ξ_s は ξ'_v より小さいことが見出される。これより、 ξ_s と ξ'_v の差である ξ_{sc} は、その値が負であることがわかる。これは、拡大部下流に形成された渦域により拡大部下流の管壁におけるせん断応力にもとづくせん断力が相当条件下の定常な円管内流れにおけるせん断力より小さい。すなわち、 ξ_{sc} の表示式 (12) において、 $\alpha_{s2} < 1$ のためであると推定される。今、 ξ_{sc} を直接的に算定することは困難なので、 ξ_s の実験結果と ξ'_v の計算結果から算出し、その特性を明らかにするために、 $-\xi_{sc}$ と Re_1 の関係を図示した。拡大管No.2の結果を図 15 に例示した。このような図示から、 $-\xi_{sc}$ は、

$$-\xi_{sc} = \xi_{sc} - \xi_{sc} Re_1 \quad (18)$$

のような代表直線であらわされるのがわかる。そこで、最小二乗法により、 ξ_{sc} と ξ_{sc} を決定し、 m に対し図示したのが、図 16 で図には代表曲線を記入した。これらの結果の妥当性をみるために、拡大管No.4の場合につき、 ξ_{sc} を図 16 と式 (18) から算出し、 ξ'_v の計算結果とあわせて ξ_s を算出し、図 14 - d に記入した。計算結果は実験結果のばらつきの中間を通り、ほぼ満足すべきものと考えうる。なお、同様にして求めた他の拡大管における ξ_s の計算結果も図 14 の (a) ~ (c) 図に併記した。

非層流域 ($Re_1 > 2 \times 10^3$) では、 ξ_s と ξ'_v の差である ξ_{sc} は、 Re_1 や m と複雑な関係にあり単純な形で表現できない。そこで、 $Re_1 = 10^4$ における ξ_{sc} の値の m に対する図示を試みた。それが図 17 である。これより、 $Re_1 = 10^4$ では、 ξ_{sc} は m の増加と共に減少し、拡大率が大きくなると層流の場合のように、 $\xi_{sc} < 0$ となることがわかる。これは、拡大率の増加と共に、拡大にもとづく流れの減速効果が増大し、それが拡大部に生じた渦に影響し、拡大部の下流におけるせん断力の異常性 ($\alpha_{s2} > 1 \rightarrow \alpha_{s2} \sim 1 \rightarrow \alpha_{s2} < 1$) を生ぜしめた結果であると推察される。

急拡大損失係数はレイノルズ数が十分大きくなると拡大管の拡大率のみの関数とみなしうようになり、従来の実験式

種類	d_1 cm	$m = \frac{D_2}{d_1}$	レイノルズ数		急拡大損失係数			
			$Re = \frac{\rho U d_1}{\mu}$	$Re = \frac{\rho U D_2}{\mu}$	本実験	Gibson	Archer	植松
No.1	0.539	11.78	10000	2914	0.85	1.059	0.955	1.006
No.2	0.536	6.793	10000	3837	0.96	1.046	0.960	1.016
No.3	0.528	2.765	10000	6014	1.24	1.036	0.982	1.078
No.4	0.858	3.089	10000	5690	1.00	1.039	1.017	1.064

* 下流側の流れは、孔流端より遷移域にある。
 ** 実験式の適用域、 $1.5 < m < 9.3$ の外にある。
 *** 実験式の適用域、 $2.2 < m < 6.2$ の外にある。

表 3 実験結果 — 急拡大損失係数

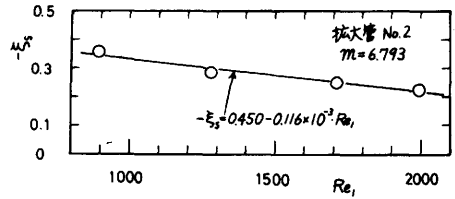


図 15 $-\xi_{sc}$ と Re_1 の関係 (拡大管No.2)

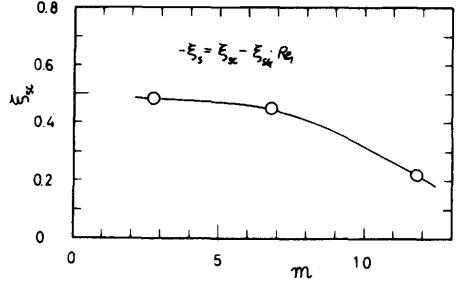


図 16 - a ξ_{sc} と Re_1 の関係 (層流)

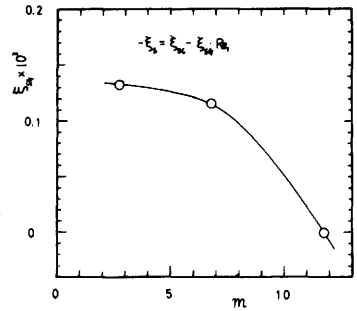


図 16-b ξ_{sc} と m の関係 (層流)

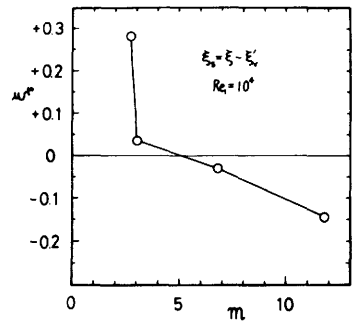


図 17 ξ_{sc} と m の関係 ($Re = 10^4$)

は、このような領域で作成された。そこで、本実験結果と諸実験式を比較するために、 $Re = 10^4$ における各拡大管の実験結果と諸式による計算結果をまとめて示したのが、表 3 である。本実験の結果は、植松の結果と類似な傾向を示すが、 ξ の m による変化の程度はより強いことが見出される。

5. 結論

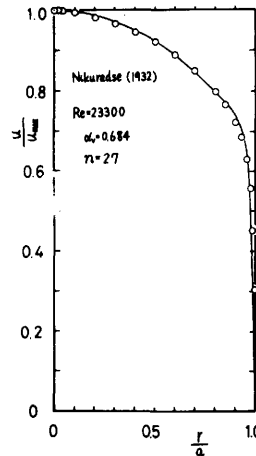
流体がなめらかな円管および大小二本のなめらかな円管で構成された途中に同心急拡大部のある円管路を定常的に流れる場合を、レイノルズ数が $10^3 - 10^4$ の範囲で実験的にしらべ、検討した結果次のことが明らかになった。

- (1) 円管内の速度分布は、層流、遷移、乱流の全領域を通じ、Pai の表示式を修正した実験式によりあらわすことができる。
- (2) 円管路の急拡大部以後の圧力回復は、流れのレイノルズ数と拡大管の拡大率に依存し、層流では長い距離をかけてゆるやかに起こされるのに対し、乱流では急激で回復距離も短い。
- (3) 円管路内の急拡大損失特性 ($\xi \sim Re$) には、円管内流れの管摩擦特性 ($\lambda \sim Re$) におけるような層流から乱流への遷移現象が、 $Re = (2 - 4) \times 10^3$ でみられ、一般に、 ξ は層流域より乱流域の方が大きい。
- (4) 急拡大損失係数 ξ は、速度分布に依存する部分 ξ'_v とせん断応力が関係する部分 ξ_s に分けられ、それぞれ、流れのレイノルズ数と拡大管の拡大率の関数で、層流では、 $\xi < \xi'_v$ である。

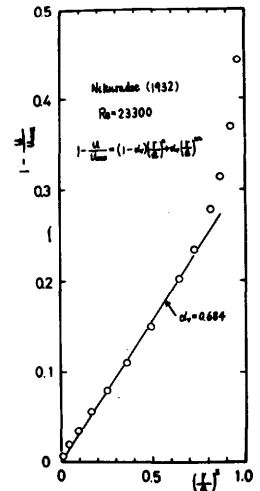
おわりに、実験に協力された 奥原正博、田中 茂、早見清典、掘田研二、木戸俊夫、福島清司、吉川 淳、 の諸君に謝意を表します。

付録 式 (13) の α_v と n の決定

速度表示式 (13) は、層流と乱流の両方の流れを総合的に表示するのが特長で、遷移域の速度分布の表示にも応用できる。Nikuradse の $Re = (4 - 105) \times 10^3$ のデータ⁶⁾ から、 u/u_{max} と r/a を計算した。その結果の一例を図示したのが、付図 1 である。式 (13) を検討すると、 r/a が 0 に近いところでは、 n が 1 にくらべ十分に大きくなると (例えば、10 程度)、右辺の第三項は第二項にくらべ無視できるようになることが見出される。そこで、 $(1 - u/u_{max})$ と $(r/a)^2$ の関係の図示を試みた。その結果を、付図 2 に図示した。このような図示から、 $(r/a)^2 < (0.5 - 0.7)$ で、 $(1 - u/u_{max})$ と $(r/a)^2$ の間に比例関係 (零点を通る直線関係で表示が可能) が存在することがわかり、代表直線のこう配から α_v



付図 1 u/u_{max} と r/a の関係



付図 2 $(1 - u/u_{max})$ と $(r/a)^2$ の関係

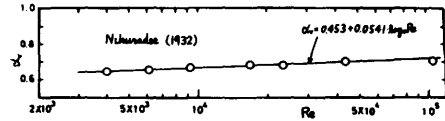
を算定した。さらに、この α_v を用いて、 $r/a=1$ での測定結果 ($r/a = 0.96$) を式 (13) に代入し n を算出し、それに近い整数を、その値と決定した。このようにしてきめられた α_v と n を Re に対し図示したのが、付図 3 と付図 4 である。両図よりわかるように、データは直線で代表表示することが可能である。すなわち、実験式

$$\left. \begin{aligned} \alpha_v &= 0.453 + 0.0541 \cdot \log_{10} Re \\ \eta &= 6.2 + 4.7 \cdot \log_{10} Re \\ 4 \times 10^3 &< Re < 105 \times 10^3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

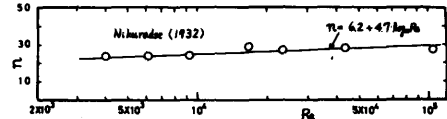
がえられる。式 (14) による計算結果を付図 1 に記入した。計算結果は、この程度に、実験結果とよい一致をみせる。

文 献

- 1) A.H.Gibson, Proc. Roy. Soc., 83A, (1910), 366;
Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 48, (1911), 97.
- 2) W.H.Archer, Trans. ASCE., 76, (1913), 999.
- 3) 植松時雄、日本機械学会論文集、2-7, (昭11-5), 254.
- 4) E.O.Macagno and T.K.Hung, J. Fluid Mech., 28, (1967), 43.
- 5) S.I.Pai, J. Franklin Inst., 256-4, (1953), 337.
- 6) J.Nikuradse, VDI-Forschungsheft 356, (1932), 12.
- 7) D.C.Bogue, Ph.D. Dissertation, University of Delaware, (1961).



付図 3 α_v と Re の関係



付図 4 η と Re の関係

本論文は、昭和50年10月1日、日本機械学会北陸地方講演会（福井）で講演（機講論、No.757-1、昭和50.10）したものに加筆しまとめた。

なお、本論文の一部は、著者の一人（喜多）の修士論文（福井大学、昭和50.2）にもとづかれており、修士論文のご査読に対し、福井大学の葦埜 勲教授ならびに部谷尚道教授に感謝の意を表します。