UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

Departamento de Fundamentos de Economía, Historia Económica y Sociología

SITUACIONES DE VOTACIÓN EN CONTEXTOS PARLAMENTARIOS

TESIS DOCTORAL

Omar de la Cruz Vicente

Director: *Joaquín Pérez Navarro*

Alcalá de Henares, 2012

Universidad de Alcalá

DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
Plaza de la Victoria
28802 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfonos: 91 885 42 02 / 51 54
Fax: 91 885 42 39
dpto.economia@uah.es

El Doctor. D. JOAQUÍN PÉREZ NAVARRO, profesor Titular del Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá,

CERTIFICA:

Que la tesis Doctoral con título "Situaciones de votación en contextos parlamentarios" elaborada por Omar de la Cruz Vicente, ha sido dirigida por mi y doy conformidad a su presentación para su depósito y para proceder a su lectura y defensa, de acuerdo con la normativa vigente.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en Alcalá de Henares, a diez de Mayo de 2012.

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ - Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica

Fdo. Joaquín Pérez Navarro

Universidad de Alcalá

DEPARTAMENTO DE
FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA
E HISTORIA ECONÓMICA
Plaza de la Victoria
28802 Alcalá de Henares (Madrid)
Teléfonos: 91 885 42 02 / 51 54
Fax: 91 885 42 39
dpto.economia@uah.es

La Doctora Dª. GLORIA MORENO RAYMUNDO, profesora Titular del Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica de la Universidad de Alcalá,

CERTIFICA:

Que la tesis Doctoral con título "Situaciones de votación en contextos parlamentarios" elaborada por Omar de la Cruz Vicente, reúne los requisitos exigidos para proceder a su defensa y aprobación, de acuerdo con la normativa vigente.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente certificado en Alcalá de Henares, a diecisiete de Mayo de 2012.

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ - Departamento de Fundamentos de Economía e Historia Económica

Fdo. Gloria Moreno Raymundo

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a mis padres Ángel y Avelina su esfuerzo y trabajo, el ejemplo que me han dado, y todo lo que he aprendido de ellos.

En segundo lugar, a mi inseparable mujer, Eva, su constante apoyo y ánimo. Sin ella no hubiera sido posible esta Tesis. A mis dos hijos: Noa, la niña de mis ojos, y Ángel, que acaba de nacer. También debo agradecer su disposición y ayuda en la tarea paterna a mi madre, Avelina y a mis suegros, Victor y Rosa.

En tercer lugar a mi Director de Tesis, Joaquín, que ha conseguido iniciarme en el camino de la investigación. A Eva Senra y José Luis Jimeno por sus revisiones y sus consejos en la etapa final. También agradezco a Gregorio, Leonor y Elena su apoyo incondicional desde el principio y a todos los compañeros de la Universidad: Cristina, Alejandro, Isabel, Esperanza, Fernando,…, etc.

En cuarto y último lugar, a todos mis amigos especialmente a Israel.

A mi padre y a mis hijos, Noa y Ángel.

ÍNDICE

SUMMARY

The main aim of this work is to study the parliamentary floor voting procedures. There are two kinds of decisions: the voting process to pass a bill and the formation of a committee. This general objective could be divided in four intermediate objectives:

1. To compare the voting procedures used to pass a bill in the parliaments of United States and Europe; also to study their theoretic properties.

2. To analyze the outcomes of the parliamentary procedures, depending on the behavior of the Legislators and to define a new way to choose better outcomes.

3. To study the voting process used in the low chamber of the Spanish Parliament to create a special committee call the “Table”, which has very important attributions.

4. To make an empiric analysis in the way of voting the “Table”.

Content of Chapters

Chapter 1, entitled *“An introduction to the parliamentary voting procedures”*, explain the basic concepts of the framework: agenda, voting procedures (successive and amendment procedure are the most known), the voting behavior of the Legislators (sincere voting, when they vote solely in accordance with his or her preferences; sophisticated voting, when they vote in a strategic way, trying to get the best outcome with information of others` preferences; cooperative voting, defined by Schwartz (1990)), the theoretic properties (Condorcet, Pareto, Participation and Monotony) and the solution sets (Top Cycle, Banks Set, Tournament Equilibrium Set).

In Chapter 2, entitled *“Literature results related with properties and solution sets”*, sum up the most important results in the literature about this work (paradoxes and solution sets in the parliamentary procedures depending on the behavior of the Legislators).

Chapter 3 deals with the new results of the parliamentary procedures used to pass a bill. New properties are defined and tested in the parliamentary procedures depending

on the behavior of the Legislators. A new solution set (TEQE) is suggested with less number of alternatives than TEQ defined by Schwartz (1990).

In Chapter 4, the voting process of the formation of the committee in the Spanish Congress called the “Table” is analyzed from the Game Theory point of view. It results in a relation between the Nash Equilibrium of the voting procedure and the Jefferson-d´Hondt rule. In addition, this theoretic study is checked with all the real votes of the low chamber of the Spanish Congress.

Chapter 5 sum up the most important conclusions of the Thesis and it describes the lines of future work.

Main Contributions

The main contributions are four:

Firstly, we define a new behavior in the Legislators and new (theoretic and practice) properties. We tested them in the parliamentary voting procedures used to pass a bill. These theoretic properties are mainly Participation properties related with a characteristic of these procedures: they are sequential procedures.

Secondly, we suggested a new solution set with fewer alternatives than the Tournament Equilibrium Set, defined by Schwartz (1990). We conjecture its existence for all the alternatives but we have showed it for few alternatives (less than six). If an alternative in this set is chosen, the agenda could be less manipulative by the organizer.

Thirdly, we analyze the Spanish procedure to choose the members of the “Table” in the low chamber of the Parliament. We showed that, in general, the Nash Equilibrium of the game lead to the allocation of the Jefferson-d´Hondt rule, Pérez y De la Cruz (2012).

Finally, we study all votes made by the low chamber of the Spanish Parliament (from 1977) and we realized that sometimes there are Nash Equilibrium but they are not the outcome of the votation. We tried to explain why it could happen. Nevertheless, the allocation of the Jefferson d´Hondt rule is satisfied in all the real votes (except one case).

INTRODUCCIÓN

Esta Tesis se enmarca dentro de la Teoría de Votaciones en Comité en un contexto parlamentario. El objetivo principal es analizar los **procedimientos de votación utilizados en la toma de decisiones parlamentarias**.

La Teoría Moderna de la Elección Social surge con el trabajo de Kenneth J. Arrow (1951) *Social Choice and Individual Values*. Desarrolla el "Teorema General de Posibilidades", demostrando la imposibilidad de encontrar un procedimiento que cumpla un conjunto razonable de propiedades a la vez.

Dentro de la ***Social Choice,*** surge la Teoría de las Votaciones en Comité con el economista británico Duncan Black y su libro "*The Theory of Committees and Elections"* (1958) enmarcado en un contexto parlamentario. Se han realizado varias contribuciones sobre el trabajo de Black. Una de las más brillantes es "*Theory of Voting"* (1969) de Robin Farquharson, con una visión estratégica del juego generado por una votación.

Esta Tesis analiza los procedimientos de votación aplicados en un contexto parlamentario para tomar dos tipos de decisiones: el proceso de votación de las enmiendas a un Proyecto de Ley y la elección de miembros para formar un órgano rector de la Cámara.

Dentro del primer tipo de decisión y en primer lugar, se comparan las propiedades de los métodos de votación aplicados en los parlamentos de Estados Unidos y Europa, a partir de los trabajos de Miller (1995) y Rasch (1995), entre muchos otros; además, se estudian sus características y sus propiedades teóricas, relacionadas principalmente con la propiedad de Participación, ampliando los estudios de Moulin (1988) y Pérez (2001).

En segundo lugar, se analizan los conjuntos de alternativas finales[1] que alcanzan los métodos parlamentarios según el modo de actuar de los Legisladores a partir de la información sobre las preferencias. Siguiendo la línea de Laffond *et al*. (1995) y con la

[1] Son alternativas que se obtienen en un método de votación para todas las agendas.

propuesta de Reid (1997), se intenta definir un nuevo conjunto de alternativas que reduce el *Tournament Equilibrium Set* (TEQ), propuesto por Schwartz (1990).

Dentro del segundo tipo de decisión, se estudia el método de votación aplicado en el Congreso de los Diputados español para elegir los miembros que forman la Mesa del Congreso, con un análisis más formal que en De la Cruz *et al*. (2004) y desde un punto de vista diferente a Cox (1991). Además, se realiza un análisis empírico de las elecciones para formar la Mesa del Congreso contrastando la teoría planteada con las votaciones realizadas.

Las siguientes cuatro secciones son la motivación de la Tesis planteando algunas de las preguntas a resolver, el contexto parlamentario, las aportaciones principales y el contenido de los Capítulos.

Motivación.

La motivación de la tesis surge del intento de dar respuesta a varias preguntas. Dichas preguntas pueden ser de carácter general, ¿tiene interés el estudio de los métodos de votación?, ¿es el resultado independiente del método?, ¿afecta la actuación del parlamentario al resultado de la votación?

Otras son de carácter teórico: ¿qué tipo de métodos se aplican en el Parlamento?, ¿qué propiedades tienen?, ¿qué tipo de paradojas[2] pueden aparecer?, ¿son frecuentes?, ¿qué relaciones existen entre los métodos?, ¿qué clase de alternativas obtienen dichos métodos?, ¿existe la posibilidad de manejar el resultado final en función del orden de las alternativas?, ¿en qué grado?, ¿cómo influye la actuación de los Legisladores en el tipo de alternativas?, ¿existe algún modo de reducir el conjunto de alternativas alcanzable por un método parlamentario?

Y otras tienen un carácter práctico: ¿existe un modo de votar en la elección de Vicepresidentes y Secretarios en la Mesa del Congreso de los Diputados, que permita alcanzar un Equilibrio de Nash?, ¿es la asignación obtenida un Equilibrio de Nash?, ¿es una asignación proporcional?, ¿se han alcanzado Equilibrios de Nash en las votaciones a la Mesa del Congreso?, ¿se han alcanzado asignaciones d´Hondt en las votaciones pasadas?

[2] En este contexto, una paradoja es un elemento contra-intuitivo en el proceso de votación.

Contexto.

El Parlamento es el marco de estudio de este trabajo. Es una de las instituciones sociales más importantes de toma de decisiones, porque se encarga del proceso de creación de leyes (tiene la mayor parte de la iniciativa legislativa) y las decisiones alcanzadas son vinculantes para los ciudadanos.

En algunos países existen dos cámaras que se dividen desigualmente el trabajo. En estos casos, la Cámara Baja realiza la mayor parte del trabajo legislativo y será el **marco de esta investigación** (aunque se utilizará la palabra “Parlamento” para aludir a dicha Cámara Baja). La Cámara Alta ratifica las decisiones de la Cámara Baja.

En el caso español, la Cámara Baja, o Congreso de los Diputados está formada por varios Grupos Parlamentarios. Sus escaños representan las distintas ideologías del país. Como institución tiene una organización interna gestionada a través de la Mesa del Congreso, la Junta de Portavoces, el Pleno, las Comisiones, Diputación Permanente y las Ponencias.

En la Cámara Baja se pueden tomar dos tipos de decisiones:

1. Después de un proceso de debate, el Parlamento **vota las enmiendas a un Proyecto de Ley**.

2. En España, al principio de cada Legislatura, el Pleno **elige los miembros de la Mesa** del Congreso, que es el órgano rector más importante.

Esta tesis analiza estos dos tipos de decisiones.

Aportaciones principales.

Las aportaciones principales de la tesis son cuatro:

1. Se amplía el análisis de las propiedades y paradojas de los métodos parlamentarios.

2. Se plantea una posible reducción del conjunto de alternativas finales que, en teoría, pueden alcanzarse con un método parlamentario.

3. Se estudia teóricamente el proceso de votación utilizado en la elección de miembros Vicepresidentes y Secretarios en la Mesa del Congreso de los Diputados en España.

4. Se analiza empíricamente el modo en que se han elegido los miembros de la Mesa del Congreso.

En primer lugar, se definen nuevas propiedades (teóricas y prácticas) y se evalúa su cumplimiento en los métodos parlamentarios, con especial atención a las propiedades de Participación[3]. En general, estos métodos no cumplen las propiedades propuestas.

En segundo lugar, se propone un nuevo conjunto de alternativas finales más reducido que el conjunto TEQ. Se ha conseguido probar su existencia para seis alternativas y se conjetura su extensión a un número mayor de alternativas. El nuevo conjunto está formado por alternativas alcanzables independientemente del modo de votar de los Legisladores y el organizador de la agenda puede ordenar las alternativas entre un menor número de alternativas.

En tercer lugar, se analiza el procedimiento de elección de los miembros de la Mesa del Congreso en el Parlamento español desde el punto de vista de la Teoría de Juegos. Los Equilibrios de Nash de este procedimiento coinciden (en la mayoría de los casos) con la asignación de puestos de la regla Jefferson-d´Hondt. Véase Pérez y De la Cruz (2012). También se aplica el estudio a la Mesa del Senado y a la Mesa de los Parlamentos Autonómicos en España.

En cuarto lugar, se estudian las votaciones en la elección de miembros a la Mesa del Congreso desde 1977. Según el análisis teórico, el modo de votar en la elección de la Mesa de la legislatura 2004-2008, entre otras, no fueron un Equilibrio de Nash. Por otro lado, en todas las elecciones (salvo una) se obtuvo la asignación d´Hondt.

[3] Si un Legislador entra a votar, no se alcanza una alternativa menos preferida que si no votara.

Contenido de los Capítulos

El Capítulo 1, titulado "*Introducción a los métodos de votación parlamentarios*", tiene como objetivo principal aclarar los conceptos básicos de la Tesis. En primer lugar, se describen los requerimientos en la toma de decisiones de los países europeos, con especial atención al método de la mayoría. En segundo lugar, se definen unos conceptos básicos: la agenda, los métodos aplicados en los Parlamentos, así como las propiedades teóricas más importantes. En tercer lugar, se plantean los posibles comportamientos de los votantes que dan lugar a diferentes conjuntos de alternativas finales.

El capítulo 2 titulado "*Resultados de la literatura en relación con las propiedades, los conjuntos de alternativas finales*" resume los resultados más relevantes obtenidos en la literatura sobre el tema de la tesis doctoral. Se analizan las propiedades y paradojas conocidas de los métodos parlamentarios y los conjuntos de alternativas finales que pueden alcanzar los métodos parlamentarios según el comportamiento de los votantes.

En el capítulo 3 se exponen los **nuevos resultados** obtenidos del análisis de los métodos parlamentarios aplicados en el proceso de aprobación de un proyecto de ley. En primer lugar, se completa el estudio de las propiedades y paradojas de los métodos parlamentarios, en función de la actuación de los parlamentarios (aplicando propiedades conocidas a métodos con un comportamiento diferente de los votantes y definiendo nuevas propiedades). En segundo lugar, se propone una reducción del conjunto de alternativas finales alcanzable por los métodos parlamentarios.

En el Capítulo 4, se estudia desde un punto de vista teórico el **método de votación utilizado en la formación de la Mesa del Congreso de los Diputados español**, relacionando los equilibrios de Nash del juego con la asignación de puestos de la regla Jefferson-d´Hondt. Finalmente, se realiza un análisis empírico de las votaciones de la Mesa del Congreso, para comprobar si se acercan al análisis teórico realizado.

En el Capítulo 5 se resumen las conclusiones más importantes del trabajo realizado y se abren líneas futuras de investigación.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE VOTACIÓN PARLAMENTARIOS

1.1. Introducción

La Tesis estudia dos contextos de votación en el Parlamento: la votación que se realiza en el proceso de aprobación de un Proyecto de Ley (que se tratará hasta el *Capítulo 3*) y la elección de un órgano representativo (en el *Capítulo 4*), como es la Mesa del Congreso de los Diputados. Dentro del primer contexto de votación, el marco es la Cámara Baja o Congreso de los Diputados (en el caso español) aunque se utilice la denominación genérica “Parlamento”.

En este marco parlamentario, generalmente formado por un grupo relativamente pequeño de legisladores, se toman decisiones en varias etapas entre dos grupos de alternativas. Es lo que se denomina en la literatura ***sequential binary voting***, como una de las tres grandes categorías de procedimientos de votación. Las otras dos grandes categorías son procedimientos de agregación instantánea y procedimientos de eliminación, que se suelen utilizar en contextos de elecciones con muchos votantes y varios candidatos, o situaciones en las que los votantes no pueden reunirse y emitir sus votos de manera repetida tan fácilmente.

Este capítulo pretende aclarar los conceptos básicos necesarios para entender el proceso de votación de un Proyecto de Ley. En primer lugar, se tratan las diferentes características de las alternativas sometidas a votación: el status quo (la Ley vigente), la propuesta legislativa con los diversos tipos de enmiendas (que serán las alternativas) y la agenda (orden de las alternativas). En segundo lugar, los legisladores o parlamentarios (son los votantes), su comportamiento (modo de votar según la información de que dispongan), y, finalmente, el método de votación que se aplica (según el Parlamento y las enmiendas a votar), algunas de las propiedades deseables de los métodos de votación y las características de las alternativas que pueden ser resultado de este proceso de votación.

Después de la descripción de la notación, se plantea el marco de las votaciones de un Proyecto de Ley en el Parlamento y se estudian los requerimientos de mayoría para la toma de decisiones parlamentarias en países europeos. A continuación se define la agenda y se plantean los métodos de votación parlamentarios. También se presentan las propiedades, y los comportamientos que pueden tener los Legisladores. La última sección se dedica a la definición de los conjuntos de alternativas finales alcanzables por los métodos parlamentarios.

1.2. Notación y terminología.

En este apartado se definirán algunos conceptos básicos relacionados con el tipo de preferencias que tienen los votantes, la definición de un método de votación parlamentario, la matriz de victorias y representación de un torneo entre otros.

Se supone un conjunto de alternativas *A* y un conjunto de *N* votantes con unas preferencias (relaciones entre dichas alternativas para cada votante). Si se designan con R_i las preferencias del votante *i*, entonces, dadas dos alternativas *x* e *y*, xR_iy significa que la alternativa *x* es al menos tan preferida como la *y* para el votante *i*. Se supone que la relación de preferencias es reflexiva (xR_ix), completa (para todo *x* e *y*, en *X* o bien xR_iy, o bien yR_ix) y transitiva (para todo *x, y, z,* en *X*, si xR_iy, yR_iz, entonces xR_iz. R_i es el orden débil, pero podría definirse un orden estricto). *También se utiliza la siguiente notación para simplificar:* $x_i>x_j$ *significa que una mayoría de votantes prefiere* x_i *a* x_j.

Un método de votación parlamentario es un procedimiento por el que, dadas unas alternativas ordenadas en una agenda, unos votantes (legisladores) con unas preferencias sobre las alternativas y un comportamiento (se define en la sección 1.8), se obtiene una única alternativa como resultado del proceso de votación. Es decir, es un procedimiento resolutivo, análogo en este sentido a las **funciones de votación,** cuyo resultado es una única alternativa, mientras que las correspondencias de votación obtienen como resultado un conjunto de alternativas. En un contexto parlamentario no tendría sentido usar métodos no resolutivos, aunque sí puede calcularse el conjunto de alternativas finales que alcanza un método para todas las agendas posibles.

La matriz de victorias es un instrumento que permite realizar los cálculos más rápidamente. Es una tabla de doble entrada que se genera a partir de las preferencias de los votantes. La primera fila y la primera columna están formadas por todas las alternativas y en el interior de la matriz aparece un 1 si una mayoría de votantes prefiere la alternativa de la primera columna a la alternativa de la primera fila y un 0 si pierde. Ese conjunto de relaciones de victoria y derrota por mayoría también recibe el nombre de torneo.

Ejemplo 1.1. *Torneo con cuatro alternativas.*

Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_3x_4x_2$[1]

1 votante con preferencias $x_2x_3x_1x_4$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

Para el ejemplo anterior la matriz de victorias es:

Tabla 1.1. *Ejemplo de una matriz de victorias*

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		0	0	1
x_2	1		0	1
x_3	1	1		1
x_4	0	0	0	

Así, la alternativa x_i derrota (>) a la alternativa x_j creando el torneo:

$x_1>x_4$

$x_2>x_1$

$x_3>x_1,x_2,x_4$

$x_4>x_2$

Una comparación es el enfrentamiento de dos conjuntos de alternativas. Cada uno de estos conjuntos puede estar formado por una o varias alternativas. Una alternativa vence directamente a otra si en su comparación existe una mayoría de votantes que la prefiere a la otra. Una alternativa vence indirectamente a otra si existe una cadena de alternativas tal que la alternativa situada a la izquierda derrota a la alternativa situada a su derecha.

En este trabajo, y por razones de sencillez, se suponen preferencias estrictas e información completa, pues se espera que los debates, comisiones y reuniones generen la información necesaria para tener claras las posiciones de los Grupos Parlamentarios y por lo tanto de los Legisladores.

[1] Siendo x_1 la alternativa más preferida y x_2 la menos preferida.

1.3. El marco para la toma de decisiones legislativas en un parlamento.

El marco de esta Tesis son las votaciones que se realizan en un parlamento para aprobar un Proyecto de Ley y para elegir miembros en un órgano representativo. Existe una diversidad de Parlamentos, desde el Congreso de los EEUU, el Parlamento Europeo, cada uno de los Parlamentos nacionales y, en algunos países como España, los Parlamentos Autonómicos. Cada Parlamento tiene sus normas de funcionamiento, pero en esta sección se presenta el modo en que se organiza el trabajo de aprobación una Ley en el Congreso de los Diputados español

1.3.1. Organización del trabajo en el Congreso de los Diputados español.

El trabajo parlamentario se organiza a través del principio de la división del trabajo, ver el Reglamento del Congreso de los Diputados, Título III titulado “De la organización del Congreso”. Se realizan votaciones en todos los órganos según sus normas de funcionamiento y su conjunto de competencias.

Los órganos del Parlamento español son la Mesa del Congreso, la Junta de Portavoces, el Pleno, las Comisiones, Diputación Permanente y las Ponencias (aunque en algunas legislaturas se ha hablado de Subcomisiones y Subponencias). Aquí se realiza una brevísima definición pero podría verse Fernández Riveira (2003) para más información.

La **Mesa del Congreso** es el órgano rector y de representación colegiada de la Cámara. Está integrada por el Presidente del Congreso, que la preside, por cuatro Vicepresidentes y cuatro Secretarios. Todos ellos son elegidos por la Cámara al comienzo de la legislatura, utilizando un sistema que favorece su distribución entre distintos grupos parlamentarios. A la Mesa le corresponde el gobierno interior y la organización del trabajo parlamentario. Dentro del primer aspecto asume la elaboración del presupuesto del Congreso, la dirección y control de su ejecución, la ordenación de gastos y diversas competencias en materia de personal. En cuanto a la organización del trabajo parlamentario, le compete la programación de las líneas generales de actuación de la Cámara, la coordinación de los trabajos de sus distintos órganos, la calificación sobre los escritos y documentos parlamentarios, la decisión sobre su admisibilidad y procedimiento de tramitación y otras funciones previstas en el Reglamento. La Mesa está asistida y asesorada por el Secretario General. En varias ocasiones la Mesa realiza sus funciones previa audiencia de la Junta de Portavoces (de este modo el Presidente está rápidamente informado de las diversas corrientes de opinión sin tener que reunir al Pleno).

El **Pleno** es la reunión de todos los miembros de la Cámara, y la mayor parte de la función legislativa se soporta por el esquema: Ponencia-Comisión-Pleno. En el Pleno no será necesario el voto ponderado por estar la totalidad de los miembros, pero las votaciones serán más largas. Es el órgano más representativo, con máxima legitimidad y publicidad (el Diario de Sesiones recoge todas las incidencias por escrito) por lo que las votaciones más relevantes políticamente deben votarse en el Pleno. **Este trabajo se centra en las votaciones en el Pleno.**

La **Junta de Portavoces** es el órgano a través del cual participan los Grupos Parlamentarios en la ordenación del trabajo de la Cámara. Está integrada por el Presidente del Congreso, que actúa como su Presidente, y por los portavoces de todos los Grupos Parlamentarios, los cuales disponen de total autonomía para designar a su representante. A sus reuniones también asisten un representante del Gobierno, los miembros de la Mesa (al menos un Vicepresidente y un Secretario) y el Secretario General. La principal función de este órgano es la fijación del orden del día de las sesiones plenarias (o agenda, su denominación más común). De otra parte, debe ser consultada en diversas ocasiones, como la preparación del calendario y la ordenación de los trabajos, la fijación del número de miembros de las Comisiones, la creación de cierto tipo de estos últimos órganos o la ordenación de los debates, entre otras.

Las **Comisiones** están constituidas en proporción al tamaño de los distintos grupos parlamentarios y tienen una función legislativa importante pues son los órganos que se encargan de los Proyectos y proposiciones de Ley. Así, realizan peticiones a la Mesa del Congreso para distribuir las materias, el objeto de estudio y las decisiones entre Comisiones. Para realizar correctamente su función, las Comisiones pueden reclamar la presencia de autoridades o funcionarios relacionados con el objeto de trabajo, pedir comparecencia a otras personas expertas en la materia.

La **Diputación Permanente** es un órgano de naturaleza especial al que corresponde velar por los poderes de la Cámara cuando ésta no está reunida. Cumple un papel de sustituto del Pleno del Congreso para que determinadas y especiales funciones no queden desatendidas cuando el Congreso haya sido disuelto o haya expirado su mandato. Tal es lo que ocurre con la convalidación de los Decretos-Leyes dictados por el Gobierno, y con la información, autorización y declaración, según los casos, de los estados de alarma, excepción y sitio. Asimismo, puede instar la celebración de sesiones extraordinarias de la Cámara cuando ésta no se encuentre en período ordinario de sesiones. Sus miembros se distribuyen en forma proporcional entre los distintos grupos parlamentarios, para reflejar la composición de la Cámara. Su Presidente es el propio Presidente del Congreso.

Las **Ponencias** (con el tiempo se reguló la institucionalización de estos órganos de trabajo, con la denominación de Subcomisiones) son instrumentos básicos de trabajo que se crean en el interior de la Comisiones y que con carácter colegiado y proporcional estudian y preparan determinados asuntos para emitir a término un informe que será elevado a la Comisión que las creó. No tienen Presidencia, por lo que son bastante flexibles y con un número reducido de miembros.

Las votaciones en la Junta de Portavoces, las Comisiones y las Ponencias se realizan con el criterio de voto ponderado, es decir, el voto de cada miembro de un Grupo parlamentario en el órgano representa a todos los escaños que posee dicho Grupo en la Cámara. De este modo, se representa, de manera proporcional, la pluralidad de intereses y visiones que integran el Parlamento.

En la web del Congreso de los Diputados *** indicar la web entre paréntesis*** aparece un órgano adicional: la **Secretaría General** que engloba los distintos servicios administrativos y técnicos de la Cámara, desempeñados por funcionarios. Su carácter es profesional. Bajo la superior autoridad de la Mesa y del Presidente, corresponde a la Secretaría General ofrecer a los órganos parlamentarios y a los Diputados apoyo para el desarrollo de sus tareas. Más concretamente, presta su asesoramiento jurídico y técnico a dichos órganos, facilita distintas prestaciones y organiza los medios materiales y humanos precisos para que la Cámara pueda reunirse y ejercer sus funciones. Está dirigida por el Secretario General, que es nombrado por la Mesa del Congreso a propuesta del Presidente entre los Letrados de las Cortes Generales con más de cinco años de servicios efectivos. Sus unidades básicas son, además del propio Secretario General, dos Secretarías Generales Adjuntas y las siguientes direcciones: Relaciones Institucionales; Comunicación; Asesoría Jurídica; Intervención del Congreso de los Diputados; Asistencia Técnico-Parlamentaria; Comisiones; Estudios, Análisis y Publicaciones; Documentación, Biblioteca y Archivo; Relaciones Internacionales; Presupuestos y Contratación; Recursos Humanos y Gobierno Interior;

Infraestructuras e Instalaciones y Centro de Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones.

Todos los órganos descritos realizan un **debate** con anterioridad a la votación, que permite realizar un filtro previo que va depurando alternativas a través de diversas reuniones y negociaciones. Este debate se compone de discusión y persuasión con el objetivo de convencer mediante argumentos de mayor conveniencia, que suelen aparecer en los medios de comunicación para reducir la distancia entre el Parlamentario y el ciudadano. Ello tiene una implicación relevante para esta Tesis: la información sobre las posiciones de cada grupo es, generalmente, conocida antes de la votación. A esto se une la disciplina de voto por la que todos los miembros de un grupo votan en el mismo sentido. En el caso español el Reglamento del Congreso en el Capítulo tercero del Título IV regula los aspectos organizativos del debate.

En el marco parlamentario del Pleno, los legisladores expresan sus preferencias (que previamente han debatido) sobre un conjunto de alternativas (el status quo, la propuesta de Proyecto de Ley y las enmiendas), según un orden (denominado agenda) y a través de un procedimiento de voto binario (pueden votar a favor o en contra), secuencial y resolutivo (se alcanza una alternativa). Por ello, es necesario describir las características de las alternativas que se votan en los parlamentos y el modo en el que se vota.

1.3.2. Las alternativas en el Parlamento.

El proceso de votación de un Proyecto de Ley en el Parlamento trata de modificar el status quo vigente con una propuesta de Proyecto y las diferentes enmiendas asociadas al Proyecto propuesto. Tres son las alternativas características de un contexto legislativo:

1. El **status quo** es el estado actual en la legislación de un país. Normalmente es la alternativa que se alcanza si no hay acuerdo. Es una alternativa diferente y puede tener un tratamiento especial (en cuando al lugar en el orden de voto). Puede estar al principio de la votación, al final o en ambos (las preguntas a contestar con votaciones de los parlamentarios tratarían de averiguar si es necesario modificar el status quo, al principio, a continuación votar todas las enmiendas al Proyecto de Ley y el resultado final volverlo a comparar con el status quo).

2. El **Proyecto de Ley** es la alternativa propuesta, generalmente, por el grupo parlamentario que tiene la mayoría en la Cámara, que trata de modificar el status quo existente.

3. Se proponen varios tipos de **enmiendas** al Proyecto de Ley con significado diferente:

a) Las **enmiendas a texto alternativo** (o **enmiendas sustitutas**) reemplazan por completo el Proyecto de Ley inicialmente propuesto.

b) Las enmiendas al articulado que modifican partes del Proyecto. Son **enmiendas compatibles** porque puede admitirse cualquier combinación de ellas, es decir, si hay dos enmiendas compatibles e_1 y e_2 puede admitirse el Proyecto sin enmendar, enmendado con la enmienda e_1, enmendado con e_2 o enmendado con e_1 y e_2.

c) Las enmiendas a la enmienda modifican enmiendas. Son enmiendas de segundo orden[2]. No se tratarán en esta Tesis.

1.3.3. Modo de votar en un Parlamento.

Para tomar una decisión sobre estas alternativas la mayoría de los Parlamentos requiere la presencia de un número mínimo de miembros. Esta exigencia se denomina **quórum** y se establece para obtener legitimidad y escoger la decisión correcta[3]. En el caso español, el artículo 78 del Reglamento del Congreso de los Diputados apartado primero regula este aspecto:

"Para adoptar acuerdos, la Cámara y sus órganos deberán estar reunidos reglamentariamente y con asistencia de la mayoría de sus miembros."

[2] Este tipo de enmiendas pueden aparecer en el Parlamento de Estados Unidos (no se permiten enmiendas de tercer orden), pero no aparecen en España.

[3] En Felsenthal (1990) se demuestra una relación directa entre el quórum y la probabilidad de acertar en la decisión. Si el número de miembros en la cámara es el mínimo exigido, la posibilidad de obstrucción es mayor pues grupos pequeños de legisladores pueden bloquear las decisiones y proteger el status quo simplemente absteniéndose.

En el apartado segundo explica lo que sucede si no se alcanza el quórum:

> *"Si llegado el momento de la votación o celebrada ésta resultase que no existe el quórum a que se refiere el apartado anterior, se pospondrá la votación por el plazo máximo de dos horas. Si transcurrido este plazo tampoco pudiera celebrarse válidamente aquélla, el asunto será sometido a decisión del órgano correspondiente en la siguiente sesión."*

Los Legisladores, agrupados normalmente por las preferencias que tienen sobre las alternativas, debaten[4], presentan iniciativas, proponen enmiendas, pero al final la decisión depende de una votación. La elección es binaria, pues los votantes deben decidir, sucesivamente, entre dos alternativas: a favor o en contra de la enmienda presentada. En un contexto democrático, la regla de decisión es la mayoría y los requerimientos dependen de la importancia de dicha decisión:

- La pluralidad o mayoría relativa elige la alternativa que recibe un mayor número de votos (si hay sólo dos candidatos coincide con la siguiente regla). No se tienen en cuenta cuántas alternativas compiten ni cuantos electores se abstienen.

- La mayoría simple y relativa escoge la alternativa que obtiene más de la mitad de los votos. No se tiene en cuenta la abstención (los participantes expresan su apoyo con un *sí* o *no*), aunque puede ser importante para decidir si la asamblea alcanza el quórum. Se abre una posibilidad práctica de una abstención coordinada, pues si se abstienen el mismo número de Legisladores del lado del gobierno y de la oposición, el resultado no varía.

- La mayoría absoluta necesita el apoyo de más de $\frac{1}{2}n$ de la asamblea siendo n el número total de miembros. Si todos los legisladores tienen preferencias estrictas y votan coincide con la mayoría simple. Si decrece la participación, la exigencia de la mayoría absoluta aumenta. Por ejemplo, si sólo votan tres cuartos de los miembros, entonces se necesitan dos tercios de los votos emitidos para sacar la propuesta. De este modo, la abstención cuenta a favor del status quo.

[4] Parlamento proviene del latín y significa hablar.

- Las mayorías especiales o cualificadas exigen más que la mayoría absoluta: tres quintos, dos tercios y cinco sextos del total de miembros son ejemplos utilizados en el Parlamento europeo.

En general, los Parlamentos aplican la mayoría simple para aprobar las Leyes ordinarias (será el supuesto de esta Tesis). En Portugal y España es necesario una mayoría absoluta para las Leyes orgánicas (tienen una mayor importancia pues su contenido afecta a los derechos fundamentales de los ciudadanos). También se aplica la mayoría absoluta en los votos de confianza. Para enmiendas constitucionales se requieren mayorías cualificadas (normalmente se exige una mayoría de dos tercios).

Los legisladores deben expresar su voto a favor, en contra o indiferente entre dos opciones planteadas. Existen tres categorías relacionadas con el grado de información requerido a los Legisladores: secreto, semi-público (anónimo) o público (los votos se graban):

1. Secreto: es excepcional. Sólo se aplica para comprobar las credenciales de un Miembro de la Cámara al elegir a sus representantes en otros cuerpos. Además, no está permitido que el partido dirija el comportamiento individual, por lo que la unidad del partido es más difícil de conseguir.

2. Semi-público: No se graban los votos individuales. Está permitido que el partido dirija la votación, aunque en Parlamentos grandes es difícil controlar las ausencias. Se puede subdividir en:

    a) Voto por asentimiento o aprobación: sólo se utiliza si hay una única propuesta.

    b) Voto por voz: los Legisladores deben decir sí o no a la vez y la opinión que se exprese más alto se considera la opinión de la mayoría. Se utiliza para los asuntos sin controversia.

    c) Votar levantando las manos: es más útil al permitir contar los votos a favor y en contra de una moción.

    d) Votar levantándose del escaño: es similar al anterior, pero más preciso y se suele utilizar para comprobar el voto levantando las manos. Es útil en cámaras pequeñas pues en cámaras más grandes requiere más tiempo. Es anónimo porque no se graban los votos.

e) Voto por papeletas sin marca: son papeles con colores relacionados con los deseos de voto del Legislador. Es preciso, pero utiliza mucho tiempo.

Los métodos semi-públicos no informan de la existencia de quórum en la cámara o si se consigue la mayoría absoluta. Por ello, el voto público es necesario.

3. Voto público: los votos se graban. Este procedimiento utiliza mucho tiempo y puede dar una oportunidad a la obstrucción.

La votación pública se puede efectuar de varias formas para conocer la existencia o no de quórum en la cámara y en las votaciones que requieran la mayoría absoluta:

a) Votar por división: los miembros forman dos zonas en la cámara (la zona del "sí" y la zona del "no"), caminando y situándose en éllas, y sus nombres son anotados. Utiliza mucho tiempo.

b) Votar pasando lista: los miembros comunican su decisión al ser nombrados y su respuesta es grabada. Utiliza mucho tiempo.

c) Votar con una papeleta: los miembros se registran en un papel y escriben su posición. Se suele combinar con el procedimiento anterior, de forma que según se les va nombrando colocan el papel en una caja. Este modo de votar se utiliza en la elección de los miembros de la Mesa del Congreso.

d) Votar electrónicamente: cada Diputado presiona los botones de su mesa y los resultados se computan y presentan inmediatamente en una pantalla en la pared de la cámara. El procedimiento es rápido, preciso, ahorra tiempo y evita disputas. Además, los Legisladores pueden ver si han votado correctamente.

En España, dentro del Congreso de los Diputados cada Diputado vota electrónicamente en cada una de las etapas del Proyecto de Ley, siendo un voto público que aparece reflejado con un color (verde si es a favor o rojo si es en contra) en una pantalla electrónica (ver el Reglamento del Congreso, Capítulo 4 del Título IV).

1.4. La agenda parlamentaria: definición y clasificación.

La agenda parlamentaria es el orden en que se votan las alternativas: los Proyectos de Ley y las distintas enmiendas. Este instrumento también se utiliza en otros contextos pero en el ámbito parlamentario tiene gran relevancia porque permite alcanzar una **única alternativa** como resultado de todo el proceso de votación. En el Reglamento del Congreso (Art. 67) se regula este aspecto: el Presidente fija el orden del día en el Pleno, de acuerdo con la Junta de Portavoces (en las Comisiones su respectiva Mesa de acuerdo con el Presidente y teniendo en cuenta el calendario de la Cámara).

Las agendas en un contexto parlamentario recogen dos aspectos del proceso de votación: primero, dicho proceso es **secuencial** pues no se votan todas las alternativas a la vez, sino que existe un número de etapas; segundo, es **binario**, ya que en cada etapa debe tomarse una decisión entre dos conjuntos de alternativas. En primer lugar se votan dos conjuntos de alternativas y en función del resultado obtenido en esta etapa, se realiza otra votación entre otros dos conjuntos de alternativas.

En Miller (1995) se propone como ejemplo simple de agenda, pero no trivial, una votación parlamentaria para elegir entre el status quo, un Proyecto de Ley y una enmienda a dicho Proyecto:

P: Proyecto de Ley.
E: enmienda al Proyecto de Ley.
Sq: status quo.

En el Congreso de los Estados Unidos la votación respondería a las siguientes preguntas con un sí o un no:

1. ¿Se acepta la enmienda?
2. ¿El Proyecto (enmendado o no) es aceptado?

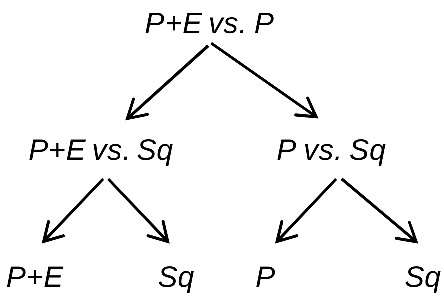
Los métodos parlamentarios son secuenciales por lo que pueden representarse gráficamente a través de un **árbol de decisión**. Esto es, una sucesión de nodos (unos son nodos de decisión y otros son nodos finales) y ramas, que representa gráficamente el proceso de votación.

El árbol en un contexto parlamentario suele tener dos ramas en cada etapa porque se comparan dos grupos de alternativas:

1. *P+E* versus *P*.
2. El ganador de la etapa anterior versus el status quo.

La agenda sería (*P+E*, *P*, *Sq*) y el árbol corresponde con la Figura 1.1:

Figura 1.1. *Árbol del método de la enmienda estándar*



El árbol se complica según la naturaleza de las alternativas, porque si hubiera una enmienda a la enmienda *E* (en EEUU sí se permiten), denominada *E'*, entonces, las preguntas a responder serían:

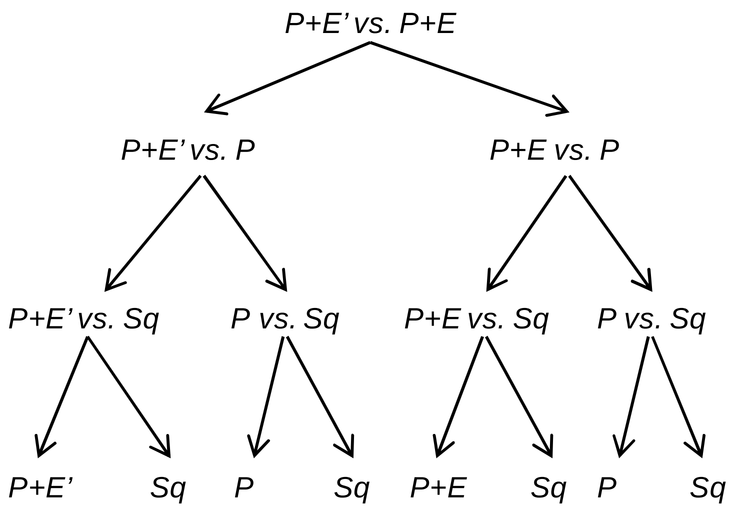
1. ¿Es aceptada la enmienda a la enmienda?
2. ¿Es la enmienda (enmendada o no) aceptada?
3. ¿Se acepta el Proyecto (enmendado o no)?

Estas preguntas corresponden a las siguientes comparaciones por pares:

1. *P+E'* vs *P+E*.
2. El ganador de 1. versus *P*.
3. El ganador 2. versus *Sq*.

La agenda en este caso sería (*P+E’*, *P+E*, *P*, *Sq*) y el árbol se corresponde con la figura 1.2:

Figura 1.2. *Árbol del método de la enmienda estándar ampliado*



Este árbol generalizado corresponde al método de la enmienda estándar (se define más formalmente en la sección siguiente). El status quo se incluye como última alternativa en la agenda, porque se trata de comparar en la última etapa el Proyecto de Ley, mejorado con las enmiendas, con el estado actual de la legislación. Este orden de voto utilizado en los países Anglo-Americanos es contrario al orden en que se generan las alternativas. En Shepsle y Weingast (1984) se denomina “*backwards-built*”.

El ejemplo anterior podría complicarse si se suponen dos Proyectos de Ley, el original *P* y uno sustituto *P’*, con sus respectivas enmiendas *E* y *E’*. Las preguntas a realizar en el parlamento de la mayoría de los países Anglo-Americanos serían:

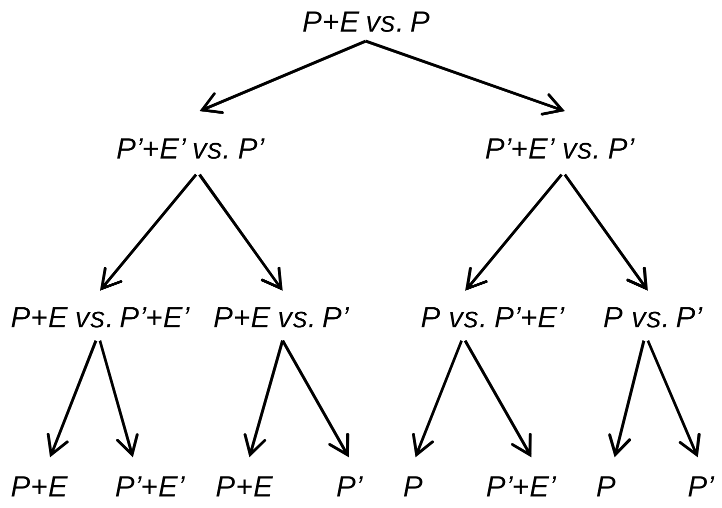
1. ¿Es la enmienda del Proyecto original aceptada?
2. ¿Es la enmienda del Proyecto sustituto aceptada?
3. ¿Es el Proyecto sustituto (enmendado o no) aceptado (en lugar del Proyecto original enmendado o no)?
4. ¿Es el Proyecto resultante de 3. aceptado?

Esto corresponde a las comparaciones por pares:

1. *P+E* versus *P*.
2. *P’+E’* vs. *P’*.
3. Ganador de 1. vs. ganador de 2.
4. Ganador de 3. vs. status quo.

La agenda sería (*P+E'*, *P*, *P'+E'*, *P'*, *Sq*) y el árbol se corresponde con la figura 1.3 (eliminando la comparación última contra el status quo):

Figura 1.3. *Árbol del método de la enmienda sustituta*

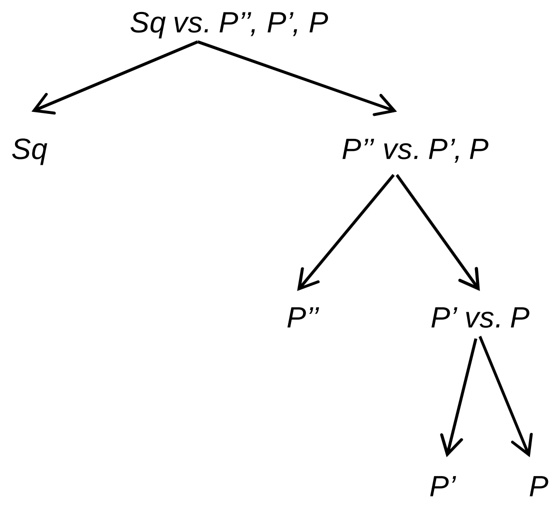


En los países Europeos, por el contrario, se suelen utilizar dos métodos diferentes según las enmiendas sean sustitutas o compatibles. Además, se realiza en distintos momentos. Si las enmiendas son sustitutas se suele ordenar el voto del siguiente modo (utilizando el método sucesivo que se definirá más adelante):

1. ¿Debería el status quo modificarse? Es decir, *Sq* versus el resto de alternativas.
2. Si es así, ¿se acepta la enmienda a la totalidad *P'*?
3. Si se rechaza *P'*, ¿se acepta la enmienda a la totalidad *P''*? En caso contrario se aceptará el Proyecto del gobierno, *P*.

La agenda sería (*Sq*, *P'*, *P''*, *P*) y el árbol se corresponde con la figura 1.4:

Figura 1.4. *Árbol del método sucesivo*



Entonces se abre la fase de propuesta de enmiendas sobre el articulado del Proyecto original. Se suponen dos enmiendas e_1 y e_2. Estas enmiendas son compatibles y se votan de un modo lógico, esto es, enmienda por enmienda:

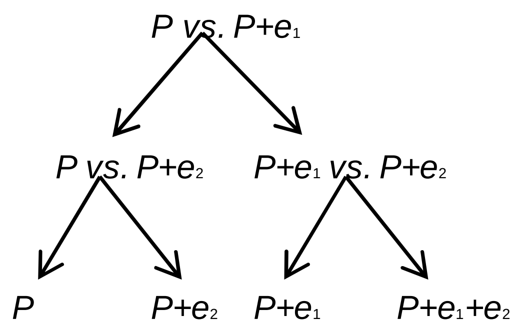
1. ¿Se acepta la primera enmienda?
2. ¿Se acepta la segunda enmienda?
3. ¿El Proyecto final enmendado con la primera, la segunda o ambas es aceptado?

Correspondiente a las etapas:

1. P vs $P+e_1$.
2. P vs $P+e_2$ si ha ganado P en la etapa anterior.
   $P+e_1$ vs $P+e_1+e_2$ si ha ganado $P+e_1$ en la etapa anterior.
3. El ganador de 2. versus el status quo.

La agenda sería (P, $P+e_1$, $P+e_2$, $P+e_1+e_2$, Sq) y el árbol se corresponde con la figura 1.5 (eliminando la comparación última contra el status quo):

Figura 1.5. *Árbol del método de la enmienda compatible*



Existen diversas clasificaciones de los árboles en función de diferentes criterios (Miller, 1995):

1. En función del número de votaciones, los árboles pueden ser:
   - Uniformes: se realiza un número fijo de votaciones. Todas las ramas tienen la misma longitud.
   - No uniformes: no se realiza un número fijo de votaciones. Un voto en una etapa inicial puede determinar si el voto se realiza en una etapa posterior.

2. En función del número de alternativas a eliminar, los árboles pueden ser (en terminología anglosajona):
   - Completos: no puede eliminarse más de una alternativa en cada votación.
   - Incompletos: pueden eliminarse varias alternativas en cada votación.

3. En función de la continuidad de la alternativa ganadora, los árboles pueden ser:
   - Continuos: el ganador en una votación entra en la siguiente.
   - Discontinuos: el ganador de una votación no entra en la siguiente.

4. En función de la simetría, los árboles pueden ser:
   - Simétricos: las alternativas se intercambian respecto del eje central del árbol y el resultado es el mismo. Una agenda simétrica es uniforme, no repetitiva (las alternativas rechazadas no entran a la votación) y completa (las alternativas elegidas no dependen de la elección de la etapa anterior).
   - No simétricas: el resultado no es el mismo si se intercambian las alternativas respecto del eje central.

Según el tipo de alternativas a votar y la relación entre dichas alternativas, la agenda puede ser una u otra. Es conocido que la agenda influye en el resultado final (existe abundante literatura al respecto) y por ello, en teoría, el organizador del orden del día tiene un cierto poder para influir en dicho resultado. Dicho resultado también depende del método de votación utilizado y del comportamiento de los legisladores.

1.5. Definición de los métodos parlamentarios más estudiados.

En esta sección se definen los métodos de toma de decisiones parlamentarias aplicados en la votación de un Proyecto de Ley, que dependen del tipo de enmiendas que se voten. Las alternativas en un contexto parlamentario son los Proyectos de Ley, Proyectos sustitutos y sus enmiendas. Las enmiendas pueden ser compatibles (pueden aceptarse varias a la vez, unas sí y otras no o todas a la vez[5]) o incompatibles (la aceptación de una impide la aprobación de la otra). Las primeras, pueden ser de primer orden, (afectan al Proyecto original) o de segundo orden (afectan a las enmiendas, es decir, son enmiendas a las enmiendas[6]).

Los métodos parlamentarios para las votaciones ordinarias de alternativas de legislación en los Parlamentos de distintos países varían en función de las enmiendas a votar: el método sucesivo y el método de la enmienda estándar son los dos más estudiados por su grado de generalidad (si bien no parecen apropiados para votar enmiendas compatibles). Aunque menos conocidos, existen otros métodos que también se aplican en la realidad parlamentaria: el método de la enmienda compatible, el método de la enmienda sustituta y el método tema por tema.

1.5.1. El método sucesivo.

El método sucesivo enfrenta cada alternativa al resto de alternativas, siguiendo una agenda preestablecida. Si la alternativa obtiene la mayoría, gana. En caso contrario, dicha alternativa se elimina y se enfrenta la siguiente (en la agenda) con el resto de alternativas hasta encontrar un ganador. **Es posible encontrar ganador antes de la última etapa**.

Se suponen cuatro alternativas: un Proyecto *P* propuesto por el gobierno, dos Proyectos sustitutos (*P’* y P’’), y *Sq* (status quo)[7]. La votación enfrentaría:

1. *Sq* versus (vs.) el resto.
2. *P’’* vs. el resto.
3. *P’* vs. *P*

[5] Se supone que las enmiendas compatibles son independientes.
[6] Es la terminología aplicada en el Parlamento de Estados Unidos. No se permiten enmiendas de orden mayor a dos.
[7] Una aclaración en la notación: se escribirán letras mayúsculas, si las alternativas son Proyectos incompatibles entre sí. Se denotarán con “e_i” a las distintas enmiendas de un Proyecto de Ley.

Las preguntas en un contexto parlamentario serían:

1. ¿Se acepta *el status quo*?
2. ¿Se acepta *P´´*?
3. ¿Se acepta *P´*?

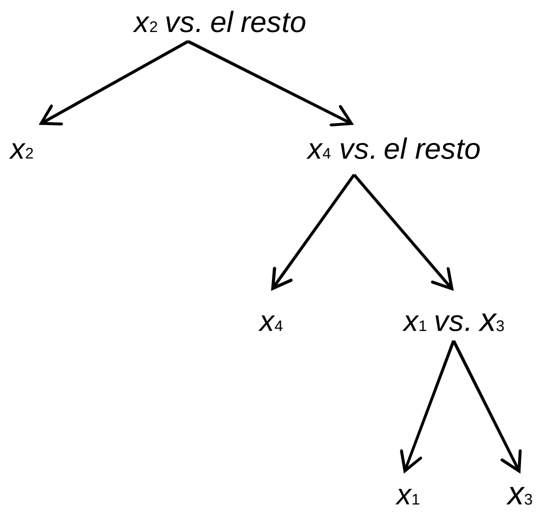
El árbol de la votación está en la figura 1.4. Es posible que el status quo esté al principio o al final (o en ambos). Así, la primera pregunta responde si se debe cambiar el status quo. Si una mayoría no tiene el status quo en primer lugar en sus preferencias se continúa votando (en caso contrario se acaba la votación y no se legisla).

En segundo lugar, se pregunta si el Proyecto *P''* es preferido al resto de alternativas por una mayoría de votantes, es decir, una vez que se ha eliminado el status quo de las preferencias de los votantes, ¿aparece el Proyecto *P''* en la primera preferencia de la mayoría de votantes? Si la respuesta es afirmativa, la votación finaliza y *P''* es aceptado. En caso contrario, se elimina *P''* de las preferencias de los votantes y se pregunta ¿tiene una mayoría de votantes la alternativa *P'* la primera en su lista de preferencias?. En este caso afirmativo, *P'* sería la alternativa escogida. En caso negativo, la alternativa elegida sería la *P*.

Sea el perfil del ejemplo 1.1 y cambiemos la denominación de las alternativas *Sq, P'', P', P por* x_i, para simplificar:

1 votante con preferencias $x_1x_3x_4x_2$
1 votante con preferencias $x_2x_3x_1x_4$
1 votante con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

Con la agenda (x_2, x_3, x_4, x_1) el método sucesivo se representa en el árbol:



El método compara los votantes con x_2 en primer lugar (1) y los votantes con el resto de alternativas (x_1, x_3, x_4) en primer lugar (2). Como x_2 no obtiene la mayoría, ya que sólo un votante la prefiere en primer lugar, se elimina. La siguiente alternativa en la agenda x_3, está en primer lugar de la lista de preferencias en dos votantes (porque se ha eliminado la x_2), mientras que el resto de alternativas es preferido a x_3 por sólo un votante. Por ello, el resultado con el método sucesivo es x_3.

Con el método sucesivo es necesario conocer el orden completo de las preferencias de los votantes para poder realizar la votación. No es suficiente con tener información de las comparaciones por pares entre todas las alternativas.

En el método sucesivo una alternativa eliminada no vuelve a entrar en la votación, y una alternativa aceptada es elegida por lo que se finaliza la votación. Se puede eliminar todo el conjunto de alternativas (menos una) en una única votación. Este método tiene una agenda continua no uniforme e incompleta.

1.5.2. Método de la enmienda estándar.

El método de la enmienda estándar[8] compara las alternativas por pares según una agenda. La alternativa ganadora de cada comparación es enfrentada con otra alternativa, hasta que se agotan las alternativas. El ganador final se encontrará en la última etapa.

[8] En Black (1948,1958) se define originalmente con el nombre procedimiento ordinario de una comisión, mientras que Farquharson lo denominó procedimiento de enmienda.

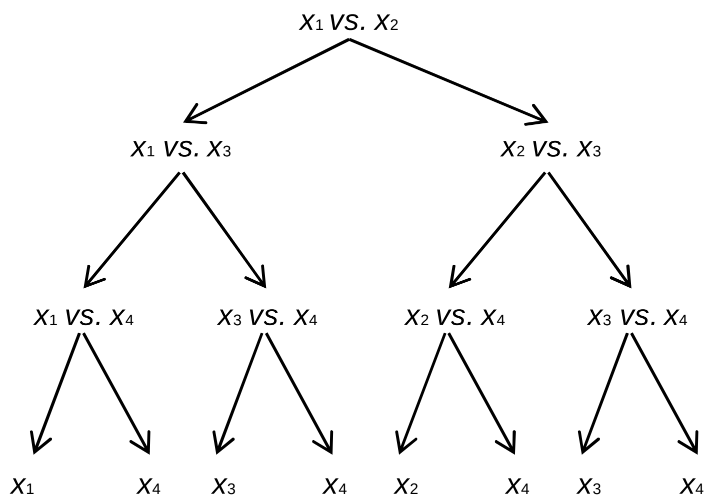
Se supone un Proyecto de Ley y varias enmiendas sustitutas. Dada una agenda (x_1, x_2, x_3, x_4), la votación de la enmienda es:

1. x_1 vs. x_2.
2. El ganador de 1. vs. x_3.
3. El ganador de 2. vs. x_4.

Las preguntas planteadas en el Parlamento son:

1. ¿Debería x_1 ser reemplazada por x_2?
2. ¿Debería el ganador de la primera etapa reemplazar a x_3?
3. ¿Debería el ganador de la segunda etapa reemplazar a x_4?

El árbol es



Consideremos de nuevo el ejemplo 1.1, cuyo perfil de preferencias es:

1 votante con preferencias $x_1x_3x_4x_2$

1 votante con preferencias $x_2x_3x_1x_4$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4), el ganador de la primera etapa es x_2, *ya que* un votante prefiere x_1 antes que x_2, mientras que dos votantes prefieren x_2 antes que x_1. En la siguiente etapa, el ganador de la etapa anterior, x_2, es enfrentado a x_3 (el siguiente en la agenda) ganando x_3 por dos votantes frente a uno. En la tercera y última etapa, el ganador de la etapa anterior, x_3, es preferido a x_4 por la mayoría de votantes por lo que x_3 es el resultado final con la enmienda estándar.

Con el método de la enmienda estándar no es necesario conocer las preferencias individuales de los votantes. Es suficiente con tener información de las comparaciones por pares entre todas las alternativas. Además, una alternativa eliminada no vuelve a entrar en la votación, mientras que una aceptada siempre entra en la siguiente etapa de dicha votación. Este método tiene una agenda uniforme, completa y continua.

1.5.3. El método de la enmienda compatible

Se suponen una alternativa *P* y dos enmiendas (e_1, e_2) que son compatibles, es decir, son enmiendas del primer orden porque afectan a la alternativa original[9]. No son mutuamente excluyentes y ambas pueden incorporarse al Proyecto original. Así, se forman las alternativas siguientes:

P alternativa original (sin enmendar)

$P+e_1$ alternativa enmendada con la primera enmienda.*

$P+e_2$ alternativa enmendada con la segunda enmienda.

$P+e_1+e_2$ alternativa enmendada con las dos enmiendas.

El procedimiento consta de dos preguntas:

- ¿Se acepta la primera enmienda?
- ¿Se acepta la segunda enmienda?

Las votaciones son:

1. P vs. $P+e_1$.

2.1. P vs. $P+e_2$ si P gana en 1.

2.2. $P+e_1$ vs. $P+e_1+e_2$ si $P+e_1$ gana en 1.

El árbol de la votación aparece en la figura 1.5. La agenda es continua pues el ganador en cada etapa entra en la segunda. La agenda es incompleta porque existen alternativas que nunca entran en el voto (aunque entran en juego todas las enmiendas): $P+e_2$ no entra en el voto si $P+e_1$ gana en la primera votación. $P+e_1+e_2$ no entra en el voto si P gana en la primera votación. Por ello, el número de votaciones es menor. Esto implica que la agenda es incompleta.

---

[9] Podría plantearse una única enmienda "e_1+e_2", pero en el procedimiento parlamentario en los países anglosajones puede pedirse una división de la cuestión en partes e_1 y e_2. Véase Miller (1995) pág. 15.

En el método de la enmienda compatible, una alternativa eliminada no entra más, y una aceptada entra en la siguiente, pero una enmienda eliminada no vuelve a entrar y una aceptada permanece siempre como añadida dentro de la alternativa.

Con el perfil del ejemplo 1.1, si se supone que x_1, x_2, x_3, x_4 son P, $P+e_1$, $P+e_2$ y $P+e_1+e_2$ respectivamente, el resultado de la votación con la agenda sería (x_1, x_2, x_3, x_4) es x_4. La alternativa x_2 gana en su comparación con x_1 y es derrotada por x_4 en la última comparación.

1.5.4. El método de la enmienda sustituta.

Si se suponen dos Proyectos de Ley, el original P y uno sustituto P', con sus respectivas enmiendas E y E'. Las preguntas a realizar en el parlamento de la mayoría de los países Anglo-Americanos serían:

1. ¿Es la enmienda del Proyecto original aceptada?
2. ¿Es la enmienda del Proyecto sustituto aceptada?
3. ¿Es el Proyecto sustituto (enmendado o no) aceptado (en lugar del Proyecto original enmendado o no)?

Esto corresponde a las comparaciones por pares:

1. $P+E$ versus P.
2. $P'+E'$ vs. P'.
3. Ganador de 1. vs. ganador de 2.

La agenda sería ($P+E$, P, $P'+E'$, P') y el árbol se corresponde con la figura 1.3. Con las preferencias del ejemplo 1.1, el resultado de la votación con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) es x_3: la alternativa x_2 gana en su comparación con x_1. La alternativa x_3 gana a x_4. Y en la comparación entre x_2 y x_3, el resultado es x_3.

Esta descripción del método corresponde a un caso especial: **el método de la enmienda sustituta binaria**[10] que necesita tener un número de alternativas igual a 2^k (generadas con k enmiendas) relevante para esta Tesis (como se demostrará en el *Capítulo* 3). Pero se puede generalizar: dada una agenda y una partición del conjunto de alternativas (en dos o más), el procedimiento de la enmienda sustituta generalizado aplica la enmienda estándar sobre las particiones obteniendo una alternativa ganadora

[10] En otros contextos se conoce como el método Knock out, utilizado también en algunos ámbitos deportivos como el tenis.

por cada partición. A continuación se vuelve a aplicar la enmienda sobre estas alternativas ganadoras parciales obteniendo el resultado final.

En el método de la enmienda sustituta una alternativa eliminada no vuelve a entrar, mientras que una alternativa aceptada no tiene porqué entrar en la siguiente etapa (discontinuidad).

1.5.5. El método tema por tema

Se suponen un conjunto de Proyectos y enmiendas que puedan ser aprobadas o derrotadas independientemente. Las preguntas son:

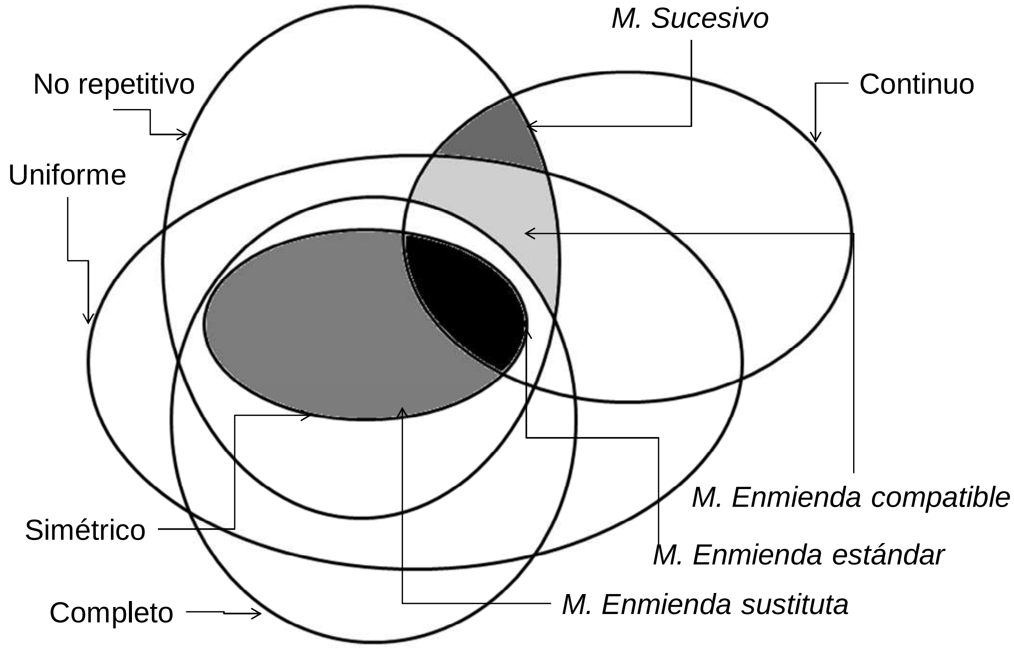
1. El Proyecto primero, ¿es aprobado?
2. El Proyecto segundo, ¿es aprobado?
3. Y así sucesivamente hasta finalizar los Proyectos a votar.

El árbol de este método está formado por varios nodos de decisión (aislados) con dos ramas únicamente. Aunque este método se aplica en la realidad, el análisis es muy sencillo, por lo que **no será estudiado** en este trabajo.

Este método consigue votar 2^k alternativas en k votaciones. No debe confundirse este método con la enmienda compatible. La diferencia fundamental es que las decisiones en el método tema por tema son elecciones sobre cada Proyecto (independiente y no compatible), mientras que el método de la enmienda compatible se votan las enmiendas (independientes pero compatibles).

En la figura 1.6, tomada de Miller (1995), se comparan los árboles de los diferentes métodos parlamentarios según las propiedades de sus agendas.

Figura 1.6. *Propiedades de los árboles de los métodos parlamentarios*



El método de la enmienda estándar es el único método con un árbol no repetitivo, completo, uniforme y continuo. Todas las agendas simétricas tienen las tres propiedades, pero sólo la enmienda estándar es continua y simétrica.

La tabla 1.2, que es una versión modificada de una encontrada en Rasch (1995), muestra la comparación de los procedimientos utilizados en Europa Occidental para la aprobación de legislación con más de dos alternativas. En Estados Unidos se votan conjuntamente enmiendas sustitutas y compatibles, mientras que en España el método depende de las características de las enmiendas: si las enmiendas son a la totalidad se aplica el método sucesivo y si las enmiendas son al articulado se aplica el método de la enmienda compatible.

Tabla 1.2. *Métodos de votación de más de dos alternativas en la Cámara Baja*

Método sucesivo	*Método de la enmienda estándar*	*Método de la enmienda compatible*	*Método de la enmienda sustituta*
Austria, Bélgica, Dinamarca, Francia, Alemania, Grecia, Islandia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Holanda, Noruega, Portugal, España[11], México, Argentina y Chile	Reino Unido, Suiza, Suecia, Finlandia y Estados Unidos	España[12] Reino Unido y Estados Unidos	Estados Unidos

En la tabla 1.2 se observa que, en general, los Parlamentos de los países europeos eligen sus alternativas con el método sucesivo. Sólo cuatro países aplican el método de la enmienda estándar (también utilizada en Estados Unidos): Reino unido, Suiza, Suecia y Finlandia.

En el Parlamento español, puede leerse en el título V del Reglamento del Congreso y, más concretamente, en el artículo 110.2 “Las enmiendas podrán ser a la totalidad o al articulado.” En el artículo 110.3 “Serán enmiendas a la totalidad las que versen sobre la oportunidad, los principios o el espíritu del Proyecto de Ley y postulen la devolución de aquél al Gobierno o las que propongan un texto completo alternativo al del Proyecto. Sólo podrán ser presentadas por los Grupos Parlamentarios.” Y en el 110.4. “Las enmiendas al articulado podrán ser de supresión, modificación o adición. En los dos últimos supuestos, la enmienda deberá contener el texto concreto que se proponga.”

El **método sucesivo en el Parlamento español** se deduce del artículo 112.3 “…el Presidente someterá a votación las enmiendas a la totalidad defendidas, comenzando por aquellas que propongan la devolución del Proyecto al Gobierno”, el artículo 112.4. “Si el Pleno acordare la devolución del Proyecto, éste quedará rechazado y el Presidente del Congreso lo comunicará al del Gobierno. En caso contrario, se remitirá a la Comisión para proseguir su tramitación” y el artículo 112.5 “Si el Pleno aprobase una enmienda a la totalidad de las que propongan un texto alternativo, se dará traslado del mismo a la Comisión correspondiente, publicándose en el «Boletín Oficial

[11] Aplicado a las enmiendas a la totalidad.
[12] Aplicado a las enmiendas al articulado.

de las Cortes Generales» y procediéndose a abrir un nuevo plazo de presentación de enmiendas, que sólo podrán formularse sobre el articulado.”

A modo de ejemplo, el 25 de Abril de 2012 se realizaron los debates y las votaciones de las diez enmiendas a la totalidad del Proyecto de Ley de los Presupuestos Generales del Estado para el año 2012. En la práctica se hizo una **única votación conjunta**, porque todas tienen la misma finalidad: la devolución del Proyecto. Los votos emitidos fueron 339; a favor, 156; en contra, 182; Abstenciones, 1. Por lo tanto, el Proyecto de Ley siguió su tramitación.

Se aplicó el método sucesivo para 11 alternativas, siendo la primera el Proyecto presentado por el Gobierno, las siguientes los proyectos alternativos de los grupos parlamentarios, y la última el status quo. De haber obtenido menos votos a favor que en contra, el proyecto de Ley habría sido eliminado, y hubieran pasado a votarse, por orden, las distintas enmiendas de totalidad o proyectos alternativos, desembocando en el status quo (devolución al gobierno del Proyecto, para que elabore uno nuevo o se plantee prorrogar los presupuestos anteriores), si ninguno hubiese obtenido mayoría.

Según el artículo 113.1. **“**Finalizado el debate de totalidad, si lo hubiere habido, y en todo caso el plazo de presentación de enmiendas, la Comisión nombrará en su seno uno o varios ponentes para que, a la vista del texto y de las enmiendas presentadas al articulado, redacte un informe en el plazo de quince días”, según el artículo 114.1 “Concluido el informe de la Ponencia, comenzará el debate en Comisión, que se hará artículo por artículo. En cada uno de ellos podrán hacer uso de la palabra los legisladores que traten de enmendar al artículo y los miembros de la Comisión” y el artículo 114.3: **“**Durante la discusión de un artículo, la Mesa podrá admitir a trámite nuevas enmiendas que se presenten en este momento por escrito por un miembro de la Comisión, siempre que tiendan a alcanzar un acuerdo por aproximación entre las enmiendas ya formuladas y el texto del artículo. También se admitirán a trámite enmiendas que tengan por finalidad subsanar errores o incorrecciones técnicas, terminológicas o gramaticales.”

En la siguiente fase del proceso de votación aparece el método de la enmienda compatible: según el artículo 118.1 “El debate en el Pleno podrá comenzar por la presentación que, de la iniciativa del Gobierno haga un miembro del mismo y, por la que del dictamen, haga un Diputado de la Comisión, cuando así lo hubiere acordado ésta. Estas intervenciones no podrán exceder de quince minutos.” Además, “La Presidencia de la Cámara, oídas la Mesa y la Junta de Portavoces, podrá:

1º. Ordenar los debates y las votaciones por artículos, o bien, por materias, grupos de artículos o de enmiendas, cuando lo aconseje la complejidad del texto, la homogeneidad o interconexión de las pretensiones de las enmiendas o la mayor claridad en la confrontación política de las posiciones.

2º. Fijar de antemano el tiempo máximo de debate de un Proyecto, distribuyéndolo, en consecuencia, entre las intervenciones previstas y procediéndose, una vez agotado, a las votaciones que quedaren pendientes.”

En el artículo 119 se regula la posibilidad de que el texto final no fuera claro y la **votación final en el Pleno comparándolo con el status quo**.

“Terminado el debate de un Proyecto, si, como consecuencia de la aprobación de un voto particular o de una enmienda o de la votación de los artículos, el texto resultante pudiera ser incongruente u oscuro en alguno de sus puntos, la Mesa de la Cámara podrá, por iniciativa propia o a petición de la Comisión, enviar el texto aprobado por el Pleno de nuevo a la Comisión, con el único fin de que ésta, en el plazo de un mes, efectúe una redacción armónica que deje a salvo los acuerdos del Pleno. El dictamen así redactado se someterá a la decisión final del Pleno, que deberá aprobarlo o rechazarlo en su conjunto, en una sola votación.” En la siguiente fase el Proyecto se remite al Senado y continúa su tramitación.

1.6. Definición de las propiedades (Condorcet, Monotonía, Pareto, Participación).

Existe una gran variedad de propiedades exigibles a un método de votación. En un contexto parlamentario no sólo es importante conocer las propiedades teóricas que cumplen los métodos también hay que tener en cuenta las propiedades prácticas.

A continuación, se enumeran las propiedades más importantes analizadas en la literatura según cuatro categorías (el cumplimiento de dichas propiedades aparece en el *Capítulo 2*) y una categoría de propiedades relevantes desde un punto de vista práctico (analizadas en el *Capítulo 3*):

Las propiedades llamadas de Condorcet se refieren a los éxitos que una alternativa tiene en su comparación con otras, en el sentido de que se cumpla, o no, que una mayoría de votantes la prefiere antes que a esas otras.

Definición 1.1. *Un método de votación cumple el criterio de Condorcet cuando elige al ganador de Condorcet, si existe. El ganador de Condorcet es la alternativa que derrota a todas las demás* (*es preferida por una mayoría absoluta de votantes a cualquiera de las otras*) *en las comparaciones por pares.*

Las propiedades de monotonía estudian cómo afectan los cambios en las preferencias de los votantes al conjunto de alternativas elegidas, en el sentido de averiguar si es posible que, al mejorar una alternativa en las preferencias de un votante, dicha alternativa se vea perjudicada.

Definición 1.2. *Un método cumple la propiedad de monotonía cuando un apoyo adicional a una alternativa no le perjudica, es decir, si una alternativa es elegida y un votante la mejora en su lista de preferencias, entonces seguirá siendo elegida*[13]*.*

Las propiedades de Pareto analizan las alternativas desde un punto de vista social, en el sentido de averiguar si es posible que resulte elegida una alternativa mal considerada socialmente (unánimemente menos preferida que otra).

[13] Esta propiedad, y las siguientes, tienen un gran contenido normativo.

Definición 1.3. *Un método de votación cumple la propiedad de Pareto si no puede ser elegida ninguna alternativa x que esté Pareto dominada por otra z* (*todos los votantes prefieren a z antes que a x*).

Las propiedades de Participación hacen referencia a la conveniencia para los votantes de votar, o no votar, comparando las alternativas elegidas, en ambos casos, por el método de votación. Véase Jimeno (2003).

Definición 1.4.
a) Participación, Moulin (1988): si una alternativa x es elegida y entra un grupo de votantes idénticos que la prefiere antes que a otra alternativa z, entonces z no debe de ser elegida.
Si se incumple esta propiedad aparece la Paradoja de la Abstención.

b) Participación Positiva: si una alternativa x es elegida y entra un grupo de votantes idénticos que ***la tiene en primer lugar*** *(en su lista de preferencias), entonces x debe de seguir siendo elegida.*
Si se incumple esta propiedad aparece la Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva.

c) Participación Negativa: si una alternativa z no es elegida y entra un grupo de votantes idénticos que ***tiene a z en último lugar*** *(en su lista de preferencias), entonces z no debe de ser elegida.*
Si se incumple esta propiedad aparece la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa.

d) Participación débil: si una alternativa x es elegida y entra un grupo de votantes idénticos que la prefiere antes que a otra alternativa z, teniendo a x en primer lugar (en su lista de preferencias) y z en el último, entonces z no debe de ser elegida.
Si se incumple esta propiedad aparece la Paradoja Fuerte de la Abstención.

Puede redefinirse la Paradoja de Pareto como la *Paradoja de la Abstención para todos los votantes*: si votan todos los votantes, saldrá elegida una alternativa *x* tal que, hay otra alternativa *y* que todos los votantes la prefieren a *x*.

Existen otras propiedades relevantes como la neutralidad (todas las alternativas son tratadas de la misma manera) y la anonimidad (todos los votantes son tratados de la misma manera) son propiedades exigibles a varios métodos propuestos en la literatura. En contextos parlamentarios, la neutralidad no suele existir, pues el status quo tiene un papel especial. En cambio, la anonimidad si se suele cumplir en los métodos de votación parlamentarios aunque a veces se incumple para resolver empates.

Otras propiedades más prácticas como la sencillez y claridad del método, la rapidez en la toma de decisiones también son relevantes en un contexto parlamentario y se comentarán en el *Capítulo 3*.

1.7. Definición de los comportamientos (sincero, sofisticado y cooperativo).

El modo de actuar de los votantes es relevante porque influye en el resultado y, por lo tanto, en las propiedades del método de votación. Los Legisladores pueden comportarse, al menos, de tres modos, en función del grado de información sobre las preferencias del resto de votantes y del grado de cooperación: pueden tener un comportamiento sincero, un comportamiento sofisticado o un comportamiento cooperativo.

1.7.1. Comportamiento sincero.

El agente o legislador puede no conocer las preferencias del resto o conocerlas pero no utilizarlas porque cree que "debe" votar siguiendo sus verdaderas preferencias[14]. En ese caso, en cada nodo de decisión del árbol el legislador opta por la alternativa que se sitúa más alta en su ranking de preferencias.

El ejemplo 1.1 utilizado para mostrar el funcionamiento del método de la enmienda es también válido para entender el comportamiento sincero de los votantes.

1.7.2. Comportamiento sofisticado.

En Farquharson (1969) se define por primera vez un comportamiento sofisticado. Es lo que podríamos llamar un voto estratégico. Para calcular el resultado de un método con este comportamiento, se parte de los nodos de decisión inmediatamente anteriores a los nodos finales en el árbol de votación. En esta etapa, los votantes tienen una estrategia dominante (votar por la alternativa más alta de su lista de preferencias). El árbol se poda y se sustituye cada nodo de decisión por el resultado que se alcanzaría en caso de que la votación llegara a ese punto. De este modo se asciende sucesivamente en la comparación de alternativas hasta llegar al nodo inicial[15]. Se trata de un razonamiento de adelante hacia atrás que podemos llamar inducción hacia atrás generalizada.

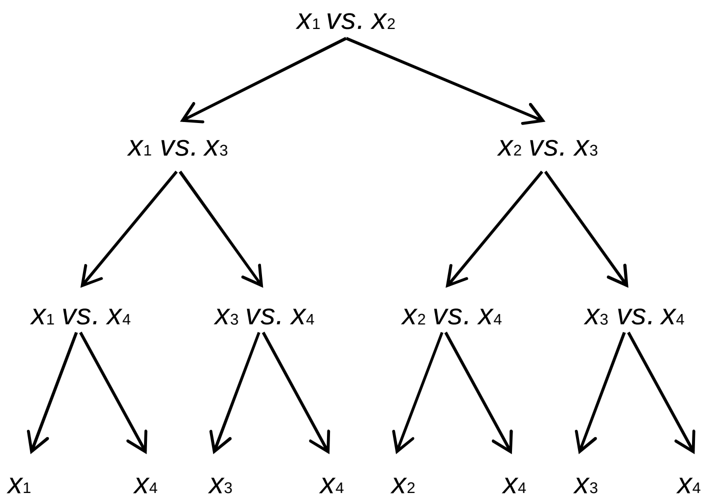
Así, cuando se efectuara el voto en la práctica parlamentaria, los votantes realizarían reflexiones del tipo: si con este modo de votar se llegara a ese nodo final, entonces ganaría esta alternativa, que no es del agrado de la mayoría

[14] Este comportamiento se ha supuesto en los ejemplos anteriores.
[15] Algoritmo propuesto por en McKelvey y Niemi (1978).

porque pierde con esta otra. Por lo tanto, se decide un modo distinto de votar que conduciría más bien a la elección de esta última.

Para realizar el cálculo con este comportamiento, los votantes han de tener información sobre todas las preferencias de los agentes (se supone que son las verdaderas preferencias) y sus actuaciones en el momento de votar. Así, es posible anticiparse y conseguir la mejor alternativa posible para todos los votantes.

Ejemplo 1.2. *El método de la enmienda estándar con un comportamiento sofisticado:*



Es decir, en los cuatro nodos finales del árbol del método de la enmienda estándar, ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría si se llegara a cada uno de estos nodos?: ¿sería x_1 preferido por una mayoría a x_4?, ¿sería x_3 preferido por una mayoría a x_4?, ¿sería x_2 preferido por una mayoría a x_4?, ¿sería x_3 preferido por una mayoría a x_4? Una vez contestadas estas preguntas habría que preguntarse: ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre la ganadora de la primera y segunda pregunta (del primer y segundo nodo final)? Y ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre la ganadora de la tercera y cuarta pregunta (tercer y cuarto nodo)? Finalmente, ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre las ganadoras de las dos últimas preguntas?.

Así, se podaría el árbol empezando por los nodos finales y dejando para sucesivas podas el resultado preferido por una mayoría. El resultado que quede en el nodo inicial corresponde al resultado final que se alcanzaría con el comportamiento sofisticado de los votantes.

Suponiendo la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4), se retoma el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_3x_4x_2$

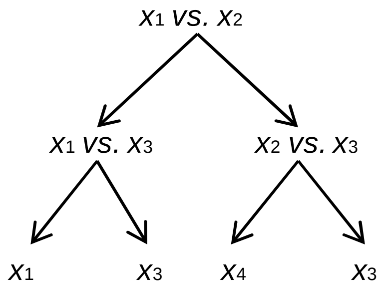
1 votante con preferencias $x_2x_3x_1x_4$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

Aunque la información necesaria se encuentra en la matriz de victorias este ejemplo se explicará con más detalle describiendo únicamente las comparaciones que son necesarias:

En la comparación	El ganador es
x_1 vs x_4	x_1
x_3 vs x_4	x_3
x_2 vs x_4	x_4
x_3 vs x_4	x_3

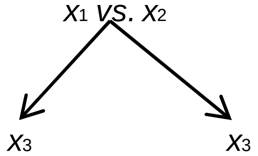
De este modo se podría trazar un árbol de la enmienda podado:



Analizando éste de manera análoga, la tabla de comparaciones:

En la comparación	El ganador es
x_1 vs x_3	x_3
x_4 vs x_3	x_3

Nos conduciría al nuevo árbol podado:



En este árbol podado por segunda vez, los votantes, independientemente del resultado de la comparación entre x_1 y x_2, están anticipando que en la siguiente etapa aparece x_3 como el resultado final.

1.7.3. Comportamiento cooperativo.

La cooperación es el acuerdo de dos o más agentes para coordinar sus acciones, permitiendo alcanzar un resultado más ventajoso a los miembros de la coalición que el resultado obtenido de no existir tal coalición.

En el caso extremo de consenso total, el resultado es independiente del procedimiento y de la estructura de la agenda. El consenso en una coalición permite prescindir de cualquier método de votación u orden en el voto para alcanzar el resultado. De cualquier forma, la posibilidad de que se rompan algunos pactos devuelve la importancia al procedimiento de votación.

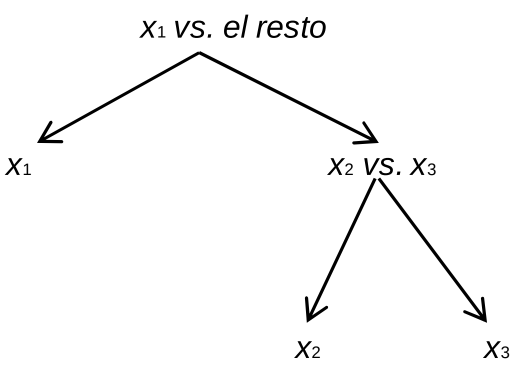
Existen diversas interpretaciones de comportamiento cooperativo. En esta Tesis se escoge la **versión definida en Schwartz (1990)** explicada en la sección siguiente, de modo que, todas las alternativas que forman el *Tournament Equilibrium Set* podrían haber sido las finalmente elegidas en caso de comportamiento cooperativo, independientemente del método y la agenda.

Supongamos el ejemplo 1.3 con tres alternativas y la agenda (x_1, x_2, x_3).

Ejemplo 1.3. *Diferencia de resultados al cambiar el comportamiento de los votantes.*
Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_3$
1 votante con preferencias $x_2x_3x_1$
1 votante con preferencias $x_3x_1x_2$

Que se corresponde con el árbol:



El resultado con el **método sucesivo y un comportamiento sincero** de los votantes es x_2. La alternativa x_1 se elimina en la primera votación al no recibir una mayoría de votantes. La alternativa x_2 gana en la comparación con x_3.

El resultado con el método sucesivo y un comportamiento **sofisticado** de los votantes es x_1. La alternativa x_2 gana en la comparación con x_3. Anticipando esta decisión, los votantes que prefieren la alternativa x_1 a la alternativa x_2 (una mayoría), optarían por votar por x_1 en la primera votación, por lo que el resultado sería x_1. Si la agenda hubiera empezado con la alternativa x_2 o x_3, éstas alternativas, respectivamente, habrían sido el resultado de la votación.

El resultado del voto **cooperativo** es cualquiera de las tres alternativas x_1, x_2 o x_3. Si, por ejemplo, se supone que los votantes piensan, en principio, que el resultado será x_1. El tercer votante tiene incentivos para ofrecer al segundo un acuerdo para alcanzar x_3, preferido por los dos a x_1. El primer votante puede en ese caso ofrecer un acuerdo con el segundo para alcanzar x_2, mejor alternativa para éste que el acuerdo ofrecido por el tercer votante. El ciclo finaliza: el primer y tercer votante tienen incentivos para votar cooperativamente y obtener x_1.

1.8. Definición de los conjuntos de alternativas finales

Es importante aclarar la relación entre los conceptos de métodos de votación parlamentarios y de conjuntos de alternativas finales (*solution sets*) a ellos asociados, por un lado, y los conceptos de funciones de votación (*voting functions*) y correspondencias de votación (*voting correspondences)* por otro.

Una vez fijada una agenda concreta, y un tipo de comportamiento de los votantes, un método de votación parlamentario es un caso particular de función de votación, ya que a cada perfil de preferencias de los votantes le asigna una única alternativa elegida.

Sin embargo, fijado el tipo de comportamiento y el método de votación, para cada perfil de preferencias si se consideran todas las agendas posibles, se obtiene un conjunto de alternativas para cada perfil, una por cada agenda. Éste, al que se ha denominado conjunto de alternativas finales asociadas a dicho método, es un caso particular de correspondencia de votación, ya que a cada perfil de preferencias de los votantes le asigna un conjunto de alternativas elegidas.
Se plantea así un doble análisis teórico. En primer lugar, se prefieren métodos que cumplan propiedades normativas deseables (Pareto, Monotonía, Participación, e*TC*.), y en segundo lugar, *ceteris paribus*, se prefieren métodos que conducen a conjuntos con un número pequeño de alternativas antes que aquellos métodos que conducen a conjuntos más grandes porque un **hipotético organizador de la agenda** con intención de actuar egoístamente tendrá menos posibilidades de manejar o manipular el resultado final.

En la literatura, se han creado conjuntos de alternativas en torno a la idea democrática de preferencia mayoritaria, es decir, la relación de preferencia colectiva relevante es que una mayoría prefiera *x* a *y*. En esta sección se definen aquellos que serán útiles más adelante.

1.8.1. Ganador de Condorcet.

El ganador de Condorcet es la alternativa que gana al resto en sus comparaciones por pares. Suele ganar con distintas coaliciones.

Ejemplo 1.4. *Conjuntos de alternativas finales: ganador de Condorcet*

2 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3x_4$

2 votantes con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

En esta situación el ganador de Condorcet es la alternativa x_2 porque las relaciones de mayoría son $x_2>x_1$, $x_2>x_3$ y $x_2>x_4$. En concreto, existe una mayoría de 5 votantes que prefiere x_2 a x_1, una mayoría de 5 votantes que prefiere x_2 a x_1, y una mayoría de 5 votantes que prefiere x_2 a x_4. En definitiva, en su comparación con cualquier otra alternativa, x_2 la vence por mayoría.

1.8.2. Conjunto de Pareto

El conjunto de Pareto está constituido por las alternativas que no están Pareto dominadas por ninguna otra. Una alternativa *x* está Pareto dominada por otra *y* si todos los votantes prefieren a *y* antes que a *x.* Por ejemplo:

Ejemplo 1.5. *Conjuntos de alternativas finales: conjunto de Pareto*

1 votante con preferencias $x_2x_4x_1x_3$

1 votante con preferencias $x_4x_2x_1x_3$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

En esta situación, el conjunto de Pareto estaría formado por x_2, x_3 y x_4.

1.8.3. Conjunto Ciclo Superior (*o Top Cycle* (*TC*))

El conjunto *TC* cumple la condición de que cada alternativa del conjunto gana por mayoría a las que están fuera, y además ningún subconjunto de *TC* cumple dicha condición. En otras palabras, el conjunto Top Cycle elige a aquellas alternativas que vencen directa o indirectamente a todos los demás, es decir, para cada alternativa existe una cadena de mayorías estrictas que la une a todas las demás. Pero puede contener alternativas Pareto dominadas. Además, si hay ganador de Condorcet, el *TC* está formado por dicha alternativa.

En el cálculo del conjunto *TC* para una determinada situación, no se requiere toda la información detallada en el perfil de preferencias, sino que basta con la información resumida en la matriz de victorias, es decir, en el torneo de relaciones de mayoría. Lo mismo puede decirse para los siguientes conjuntos definidos de esta sección.

Ejemplo 1.6. *Conjuntos de alternativas finales: Top Cycle.*
Se supone el torneo:

$x_1 > x_5$

$x_2 > x_1, x_3, x_5$

$x_3 > x_1, x_4$

$x_4 > x_1, x_2$

$x_5 > x_3, x_4$

En este torneo el conjunto *TC* coincide con el conjunto total de alternativas $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, pues el posible construir el ciclo superior $x_2 > x_1 > x_5 > x_3 > x_4 > x_2$.

1.8.4. Conjunto de Banks

Si existe ganador de Condorcet el conjunto de Banks, definido en Banks (1985), está formado por esa alternativa. En caso contrario se escoge una alternativa arbitraria x_1 (se probarán todas las alternativas), y se busca otra alternativa x_2 tal que $x_2 > x_1$. Si existe esa alternativa x_2, entonces se busca otra alternativa x_3 tal que $x_3 > x_2$ y $x_3 > x_1$. Así, hasta que ya no pueda encontrarse una alternativa *y* que gane a todas las alternativas x_i. Tenemos así una lista ordenada de alternativas (también denominada trayectoria) "x_k, x_{k-1},...., x_2, x_1" siendo x_k la última alternativa encontrada. Se dice que dicha alternativa, x_k, es la primera alternativa de esa lista y por ello pertenece al conjunto de Banks.

Por lo tanto, el conjunto de Banks está formado por las alternativas que están en lo alto de una trayectoria. Calculemos el conjunto de Banks en el mismo ejemplo 1.6:

Alternativa x_1: las alternativas que ganan a x_1 son x_2, x_3 y x_4. Por ello, se pueden crear tres trayectorias iniciales x_2x_1, x_3x_1 y x_4x_1.

1. La alternativa x_4 gana a x_2 y a x_1 por lo que se crea la trayectoria $x_4x_2x_1$ y, como no hay alternativa que gane a x_4, x_2 y x_1, la alternativa $\boldsymbol{x_4}$ **pertenece a Banks**.
2. La alternativa x_2 gana a x_3 y x_1 por lo que se crea la trayectoria $x_2x_3x_1$ y, como no hay alternativa que gane a x_2, x_3 y x_1, la alternativa $\boldsymbol{x_2}$ **pertenece a Banks**.
3. La alternativa x_3 gana a x_4 y x_1 por lo que se crea la trayectoria $x_3x_4x_1$ y, como no hay alternativa que gane a x_3, x_4 y x_1, la alternativa $\boldsymbol{x_3}$ **pertenece a Banks**.

Alternativa x_2*:* la única alternativa que gana a x_2 es x_4, por lo que se crea la trayectoria x_4x_2. No hay alternativa que gane a x_4 y a x_2, por lo que x_4 pertenece a Banks.

Alternativa x_3*:* las alternativas que ganan a x_3 son x_2 y x_5. Por ello, se pueden crear dos trayectorias iniciales x_2x_3 y x_5x_3.

1. No hay alternativa que gane a x_2 y x_3, por tanto la alternativa $\boldsymbol{x_2}$ **pertenece a Banks**.
2. La alternativa x_2 gana a x_5 y x_3 por lo que se crea la trayectoria $x_2x_5x_3$ y, como no hay alternativa que gane a x_2, x_5 y x_3, la alternativa $\boldsymbol{x_2}$ **pertenece a Banks**.

Alternativa x_4*:* las alternativas que ganan a x_4 son x_3 y x_5. Por ello, se pueden crear dos trayectorias iniciales x_3x_4 y x_5x_4.

1. La alternativa x5 gana a x3 y x4 por lo que se crea la trayectoria x5x3x4 y, como no hay alternativa que gane a x5, x3 y x4, la alternativa x5 pertenece a Banks.
2. No hay alternativa que gane a x5 y x4, la alternativa x5 pertenece a Banks.

Alternativa x_5*:* las alternativas que ganan a x_5 son x_1 y x_2. Por ello, se pueden crear dos trayectorias iniciales x_1x_5 y x_2x_5.

1. La alternativa x_2 gana a x_1 y x_5 por lo que se crea la trayectoria $x_2x_1x_5$ y, como no hay alternativa que gane a x_2, x_1 y x_5, la alternativa $\boldsymbol{x_2}$ **pertenece a Banks**.
2. No hay alternativa que gane a x_2 y x_5, la alternativa $\boldsymbol{x_2}$ **pertenece a Banks**.

Por lo tanto, el conjunto de Banks está formado por las alternativas x_2, x_3, x_4 y x_5.

1.8.5. Conjunto de equilibrio del torneo TEQ

El conjunto TEQ definido en Schwartz (1990) plantea una definición más formal:

“Dado un conjunto de alternativas, se supone una alternativa *x* y una alternativa *y* que derrota a *x*. Entonces cualquier coalición formada que pretenda elegir *x* de dicho conjunto de alternativas sería derrotada por una coalición para elegir la alternativa y. Si hubiera varias alternativas que derrotaran a *x*: y_1,..., y_k, como los votantes actúan de modo cooperativo, reemplazarán a *x* por algún y_i.”

El conjunto TEQ se calcula de modo recursivo: se supone una alternativa (se hará con todas) y se eligen aquellas que la derrotan. Entre este grupo se preselecciona a aquellas que derrotan a alguna (o todas) de las que están en el grupo. De entre las alternativas preseleccionadas se vuelve a elegir a aquellas que derrotan a alguna (o todas) en ese grupo de preseleccionadas. Y así, sucesivamente hasta que la última selección de alternativas coincide con la penúltima.

El conjunto TEQ cumple tres propiedades: si existe un ganador de Condorcet, TEQ coincide con él, mientras que si existe un ciclo alto de tres alternativas, TEQ contiene todas las alternativas de dicho ciclo y sólo ellas. El TEQ del TEQ es el TEQ.

Calculemos el conjunto TEQ sobre el ejemplo 1.6:

Para calcular el **conjunto TEQ** se realiza una primera preselección de alternativas que derrotan a una dada (y así para todas las alternativas) y se repite este proceso sobre las alternativas preseleccionadas hasta que las alternativas que se seleccionan coincidan con las elegidas en una etapa anterior.

Recordemos el torneo:

$x_1 > x_5$

$x_2 > x_1, x_3, x_5$

$x_3 > x_1, x_4$

$x_4 > x_1, x_2$

$x_5 > x_3, x_4$

Primera preselección (sobre $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$):
Las alternativas que derrotan a x_1 son x_2, x_3, x_4. Se repite el proceso en este grupo de alternativas. La alternativa que derrota a x_2 dentro del grupo x_2, x_3, x_4 es x_4. La alternativa que derrota a x_3 dentro del grupo es x_2. La alternativa que derrota a x_4 dentro del grupo es x_3. Esto siempre sucede cuando existen un ciclo de tres alternativas en ese torneo, por lo que las tres pueden pertenecer al TEQ en una primera vuelta.

Alternativa	Derrotada por	Derrotada por
x_1	x_2	$\boldsymbol{x_4}$
	x_3	$\boldsymbol{x_2}$
	x_4	$\boldsymbol{x_3}$

La alternativa que derrota a x_2 es x_4, y por lo tanto pertenece al TEQ en una primera vuelta.

Alternativa	Derrotada por
x_2	$\boldsymbol{x_4}$

Las alternativas que derrotan a x_3 son x_2 y x_5, como x_2 es preferida a x_5, x_2 es preseleccionada.

Alternativa	Derrotada por	Derrotada por
x_3	x_2	
	x_5	$\boldsymbol{x_2}$

Las alternativas que derrotan a x_4 son x_3 y x_5, como x_5 es preferida a x_3, x_5 es preseleccionada.

Alternativa	Derrotada por	Derrotada por
x_4	x_3	$\boldsymbol{x_5}$
	x_5	

Las alternativas que derrotan a x_5 son x_1 y x_2, como x_2 es preferida a x_1, x_2 es preseleccionada.

Alternativa	Derrotada por	Derrotada por
x_5	x_1	$\boldsymbol{x_2}$
	x_2	

Las alternativas elegidas en una **primera preselección son por tanto $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$ y $\boldsymbol{x_5}$.**

Segunda preselección (sobre $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$):
Si se repite el proceso: x_2 es derrotada por x_4, por lo que x_4 es preseleccionada de nuevo; x_3 es derrotada por x_2 y x_5, y (como x_2 gana a x_5) x_2 pasa a la segunda preselección; x_4 es derrotada por x_3 y x_5, y (como x_5 es preferida a x_3) x_5 pasa a la segunda preselección, x_5 es derrotada por x_2, que pasa la segunda preselección. Las alternativas que forman **la segunda preselección son $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_4}$ y $\boldsymbol{x_5}$**.

Resumiendo:

2ª Selección		
Alternativa	Derrotada por	Derrotada por
x_2	$\boldsymbol{x_4}$	
x_3	x_2	
	x_5	$\boldsymbol{x_2}$
x_4	x_3	$\boldsymbol{x_5}$
	x_5	
x_5	$\boldsymbol{x_2}$	

Tercera preselección (sobre $\{x_2, x_4, x_5\}$):

Si se repite el proceso se vuelven a obtener las mismas tres alternativas (porque hay un ciclo) que en la etapa anterior.

3ª Selección	
Alternativa	Derrotada por
x_2	$\boldsymbol{x_4}$
x_4	$\boldsymbol{x_5}$
x_5	$\boldsymbol{x_2}$

Por ello, el conjunto *TEQ* está formado por x_2, x_4 y x_5.

1.8.6. Conjunto de Copeland

El conjunto de Copeland está formado por las alternativas que derrotan a un mayor número de alternativas. En este ejemplo 1.6, el conjunto de Copeland es la alternativa x_2, porque es la única alternativa que gana a un mayor número de alternativas (3).

1.9. Conclusiones.

En este primer Capítulo se han definido los conceptos necesarios para comprender el contexto parlamentario en la votación de un Proyecto de Ley: cómo se organiza el trabajo en el Congreso de los Diputados español, las características de las alternativas en el proceso de aprobación de un Proyecto de Ley, los métodos de votación aplicados en este contexto, las propiedades, los diferentes comportamientos de los legisladores y los conjuntos de de alternativas finales que pueden alcanzarse por dichos métodos teniendo en cuenta todas las agendas posibles.

CAPÍTULO 2. RESULTADOS CONOCIDOS DE LOS MÉTODOS DE VOTACIÓN PARLAMENTARIOS

2.1. Introducción.

En este *Capítulo* se resumen los resultados más relevantes obtenidos en la literatura sobre el primer aspecto del tema de esta Tesis: propiedades y conjuntos de alternativas finales de los métodos parlamentarios aplicados en las votaciones para aprobar un Proyecto de Ley.

Por un lado, se describen la mayoría de las propiedades definidas en el *Capítulo 1*, con un comportamiento sincero de los votantes, en el método sucesivo y el método de la enmienda estándar, que son los métodos de votación (aplicados en la aprobación de Proyectos de Ley) representativos de Europa y los países Anglosajones respectivamente. En Ordeshook y Schwartz (1987) se amplian algunos resultados para el método de la enmienda compatible y el método de la enmienda sustituta.

Por otro lado, en Laffond *et al.* (1995) se representan en una tabla de doble entrada los conjuntos de alternativas finales que puede alcanzar cada método de votación (Top Cycle, Banks y TEQ, entre otros) describiendo sus relaciones según uno sea subconjunto de otro, la intersección esté vacía, etc.

Este breve *Capítulo* se organiza del siguiente modo: la sección 2.2 analiza las propiedades conocidas de los métodos parlamentarios y la sección 2.3 trata los conjuntos de alternativas finales.

2.2. Propiedades y paradojas conocidas de los métodos parlamentarios.

En esta sección se revisa la literatura relacionada con el cumplimiento de las cuatro propiedades (el criterio de Condorcet, el criterio de Pareto, Monotonía y Participación) descritas el *Capítulo* 1 en los métodos parlamentarios. En Nurmi (1987, 1999) y Ordeshook y Schwartz (1987), entre otros, se trata este tema ampliamente.

Los criterios de Condorcet, Pareto y Monotonía se han analizado, suponiendo un comportamiento sincero de los votantes, en algunos métodos parlamentarios. En el *Capítulo 3* se analizarán para un comportamiento sofisticado y se extenderá el análisis al resto de métodos.

Se han obtenido resultados generales en funciones y correspondencias de votación relacionados con la propiedad de Participación. El artículo seminal de Moulin (1988) prueba que la propiedad de Participación es incompatible con la propiedad de Condorcet, en funciones de votación (que asignan un único elegido a cada situación). Además, en Pérez (2001) se demuestra que, en general, en todas las correspondencias de votación (que asignan un conjunto de elegidos a cada situación, sea únitario o no), las que cumplen el criterio de Condorcet sufren las versiones fuertes de la Paradoja de la Abstención.

Según se mostrará en la proposición 2.1 y 2.2, **los únicos métodos parlamentarios que no cumplen el criterio de Condorcet son el método sucesivo y el método de la enmienda compatible, ambos con un comportamiento sincero de los votantes. El resto se ven afectados por la Paradoja de la Abstención, ya sea el comportamiento de los votantes sincero o sofisticado.**

El resto de la sección plantea, para cada método de votación, las propiedades relacionadas con Condorcet, Pareto, Monotonía y Participación analizadas en la literatura.

2.2.1. El método sucesivo.

El método sucesivo **no cumple el criterio de Condorcet**, pues no siempre elige un ganador de Condorcet.

Ejemplo 2.1. *El método sucesivo, el criterio de Condorcet y el criterio de Pareto*
Sea el perfil:

40 votantes con preferencias $x_1x_3x_4x_2$

35 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

25 votantes con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

Y la agenda (x_3, x_2, x_4, x_1).

En la primera votación sólo 25 de los 100 votantes votarían por x_3 (frente al resto de alternativas), por lo que se eliminaría. En la siguiente x_2 sería apoyada por 35 votos, que también se eliminaría. Y finalmente, x_4 se apoyaría por la mayoría (35+25 votantes) frente a la alternativa x_1 (con 40 apoyos) obteniendo a x_4 como ganadora. El candidato Condorcet es la alternativa x_3 porque derrota a las demás en las comparaciones por pares y sin embargo no es escogida.

El método sucesivo **tampoco cumple la propiedad de Pareto** pues en el ejemplo anterior, la alternativa escogida es x_4, pero todos los votantes prefieren x_3 a x_4. La alternativa x_4 está dominada en el sentido de Pareto. Por ello, el método sucesivo sufre la paradoja de Pareto.

En Nurmi (2004) se interpreta este fallo en la propiedad de Pareto como una paradoja de la Abstención, pues todos los votantes tienen incentivos para abstenerse, pero no trata las versiones fuertes de dicha paradoja (que se estudiarán en el *Capítulo* 3).

En Rasch (1987) se demuestra que el método sucesivo **es monótono**. Si una alternativa consigue la mayoría de los votos, esa es la decisión que se toma. En cambio, en Taylor y Pacelli (2009), se prueba que la propiedad de monotonía puede no cumplirse cuando se repite una alternativa en la agenda, por ejemplo el status quo, y esto puede suceder en la práctica parlamentaria

2.2.2. El método de la enmienda estándar.

El método de la enmienda **es un método Condorcet**, es decir, elige al candidato Condorcet si existe.

Ejemplo 2.2. *El método de la enmienda estándar y el criterio de Condorcet*
Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_3x_2$
1 votante con preferencias $x_2x_3x_1$
1 votante con preferencias $x_3x_1x_2$

Y la agenda (x_1, x_2, x_3) organizada en dos votaciones:

1. x_1 *vs.* x_2
2. El ganador de 1. *vs.* x_3.

En la primera votación gana x_1 (2 votos frente a 1 de x_2). En la segunda votación gana x_3 (2 votos frente a 1 de x_1). Por ello, la alternativa ganadora sería x_3, que es además candidata Condorcet porque no es derrotada por x_1 ni por x_2 en sus comparaciones por pares.

En Nurmi (1987) se reconoce que "si no existe candidato de Condorcet, la enmienda no diferencia entre un verdadero candidato Condorcet y un candidato que está en un ciclo de mayorías". El ejemplo siguiente ilustra dicho problema:

Ejemplo 2.3. *El método de la enmienda estándar y la paradoja de Condorcet*
Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_3$
1 votante con preferencias $x_2x_3x_1$
1 votante con preferencias $x_3x_1x_2$

Se supone que x_1 y x_2 son Proyectos de Ley, mientras que x_3 es el status quo. La agenda es (x_1, x_2, x_3). En la primera votación gana x_1 (con 2 votos frente a 1 de x_2). En la segunda votación gana x_3 (con 2 votos frente a 1 de x_1).

Por ello, la alternativa ganadora sería x_3, a pesar de que existe una alternativa x_2 que es preferida por una mayoría de dos votantes. De hecho, para cualquier agenda se puede encontrar una alternativa preferida a la ganadora por una mayoría (existe un ciclo de mayorías y no hay ganador de Condorcet). Este fenómeno es conocido como la Paradoja de Condorcet.

El método de la enmienda estándar **cumple las propiedades de monotonía** si se mantiene fija la agenda. Si la alternativa ganadora en el método de la enmienda recibe un mayor apoyo incrementará las oportunidades de derrotar a las alternativas que derrotaba sin dicho apoyo.

Se recuerda que la condición de Pareto requiere que, cuando todos los votantes prefieren estrictamente x_1 a x_2, entonces la alternativa x_2 no debería ser elegida

Ejemplo 2.4. *El método de la enmienda estándar y la paradoja de Pareto*

Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_3x_4$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_1x_2$

1 votante con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

1 votante con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

Si se considera la agenda (x_2, x_3, x_1, x_4) organizada en tres votaciones:

1. x_2 *vs.* x_3,
2. El ganador de 1. vs. x_1
3. El ganador de 2. vs. x_4.

La alternativa ganadora de la primera votación es x_2, de la segunda es x_1 y de la tercera x_4. Sin embargo, x_3 es preferido a x_4 por todos los votantes. Esto muestra que el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes **no cumple la condición de Pareto**.

Como se ha relatado al principio de la sección todos los métodos de votación parlamentarios que cumplen Condorcet se ven afectados por la Paradoja de la Abstención. A modo de ejemplo, se plantea el caso de la propiedad de Participación Positiva en el método de la enmienda estándar, tomado de Nurmi (2004).

Ejemplo 2.5. *La enmienda estándar y la paradoja de la Abstención Fuerte Positiva*

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$

3 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

3 votantes con preferencias $x_3x_4x_1x_2$

5 votantes con preferencias $x_4x_1x_3x_2$

El resultado con un comportamiento sincero de los votantes y la agenda (x_2, x_3, x_4, x_1) es x_1. Si entran a votar 4 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$ el resultado es x_4 (deja de ser elegido x_1 que es la primera preferencia de todos los votantes que entran). Por ello, el método de la enmienda estándar **sufre la Paradoja fuerte de la Abstención Positiva**.

2.2.3. El método de la enmienda compatible.

En Ordeshook y Schwartz (1987) se demuestra con un ejemplo sencillo que el método de la enmienda compatible **sufre la paradoja de Pareto y no escoge el ganador de Condorcet** con un comportamiento sincero de los votantes: si se supone un conjunto de votantes con un comportamiento sincero y las mismas preferencias: $x_3>x_4>x_2>x_1$ siendo P (=x_1) la alternativa original (sin enmendar), $P+e_1$ (=x_2) la alternativa enmendada con la primera enmienda, $M+e_2$ (=x_3) la alternativa enmendada con la segunda enmienda, y $M+e_1+e_2$ (=x_4) la alternativa enmendada con las dos enmiendas. Con la agenda $x_1x_2x_3x_4$, organizada en las siguientes etapas:

1. x_1 vs. x_2
2. a) x_1 vs. x_3, si gana x_1 en la primera etapa.
   b) x_2 vs. x_4, si gana x_2 en la primera etapa.

En la primera etapa ganaría x_2 enfrentándose con x_4 en la segunda etapa, siendo x_4 el resultado de la votación, a pesar de que x_3 es preferida a x_4 por todos los votantes y es el ganador de Condorcet.

2.2.4. El método de la enmienda sustituta.

El método de la enmienda sustituta siempre **escoge un ganador de Condorcet**, si existe.

Además, Con un comportamiento sincero y sofisticado de los votantes **sufre la paradoja de Pareto**. Un ejemplo de una votación real en Estados Unidos (tomado de Ordeshook y Schwartz (1987)):

Ejemplo 2.6. *El método de la enmienda sustituta y paradoja de Pareto*
Sea el perfil:

1 votante con preferencias: $x_1x_3x_6x_2x_5x_4x_7$
1 votante con preferencias: $x_2x_5x_3x_4x_1x_6x_7$
1 votante con preferencias: $x_4x_1x_6x_5x_3x_2x_7$

La agenda con siete alternativas es (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), siendo x_7 el status quo y organizada del siguiente modo:

1. x_1 vs. x_2 (reemplazar o no la enmienda con una enmienda sustituta).
2. el ganador de 1. vs. x_3 (enmendar o no el proyecto).
3. x_4 vs. x_5 (enmendar o no el proyecto sustituto).
4. el ganador de 3 vs. x_6 (reemplazar o no el sustituto (perfeccionado) por el sustituto del sustituto).
5. El ganador de 2 vs. el ganador de 4 (reemplazar o no el proyecto sustituto (perfeccionado) por el sustituto que sobrevive).
6. El ganador de 5 vs. x_7, el status quo (decidir entre el ganador del proceso anterior y el status quo).

Descrito en términos de torneo:

x_1 gana a x_2, x_3, x_5, x_6 y x_7

x_2 gana a x_4. X_5 y x_7

x_3 gana a x_2, x_4, x_6 y x_7

x_4 gana a x_1, x_6 y x_7

x_5 gana a x_3, x_4 y x_7

x_6 gana a x_2, x_5 y x_7

El resultado con un comportamiento sofisticado de los votantes es x_6, que está Pareto dominado por x_1.

Como el método de la enmienda sustituta binaria es un caso especial del método de la enmienda sustituta, las propiedades que cumpla ésta última coinciden con las que cumple la primera.

El resumen de las propiedades estudiadas anteriormente puede verse en la tabla siguiente:

Tabla 2.1. *Resumen de propiedades de los métodos parlamentarios* (*con comportamiento sincero*) descritas *en la literatura*

	*Propiedades que **no cumple***	*Propiedades que **cumple***
Sucesivo	Condorcet Pareto[1]	Monotonía
M. Enmienda	Pareto Participación Participación Positiva[2]	Condorcet Monotonía
M. Enmienda compatible	Condorcet Pareto	
M. Enmienda sustituta	Pareto[3]	Condorcet

2.2.5. Relaciones entre paradojas.

Las propiedades de Participación, Monotonía y Pareto están muy relacionadas entre sí:

1. La propiedad de Pareto es equivalente a la propiedad de Participación para todos los votantes (Nurmi, 2004).

2. La propiedad de Monotonía tiene una relación muy cercana a Participación (especialmente Participación Positiva) en cuanto al espíritu: en la de Monotonía se mejora a la alternativa empujándola en la lista de preferencias de un votante, mientras que en la de Participación se mejora a la alternativa al entrar el legislador y votar.

3. Como la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa o la Positiva son versiones fuertes de la Paradoja de la Abstención, el método que sufre las primeras está afectado también por ésta última.

[1] Con un comportamiento sincero y sofisticado.
[2] Probado por Nurmi (2004) aunque se aplica el resultado de Pérez (2001) a todos los métodos Condorcet como se ha descrito al principio de la sección 2.2.
[3] Con un comportamiento sincero y sofisticado.

2.3. Conjuntos de alternativas finales de los métodos parlamentarios según el comportamiento.

El conjunto de posibles alternativas finales alcanzables por un método de votación en función del comportamiento es una información relevante para el analista (estudia los métodos) y para el organizador de la agenda (pretende formar la agenda que conduce a su mejor resultado).

En la literatura **se prefieren los conjuntos pequeños frente a los grandes porque el método es más afinado y se reduce la posible "manipulación" del organizador de la agenda.** Véase Laffond *et al.* (1995)**.** Es decir, si el organizador de la agenda de aprobación de un proyecto de ley conociera el conjunto de alternativas que alcanza un método de votación (dado el comportamiento de los votantes), es decir el conjunto de las elegibles, entonces cuanto más reducido sea dicho conjunto habrá menos posibilidades de organizar una agenda que consiga una alternativa deseada por dicho organizador.

En esta sección se revisan tres aspectos: en primer lugar se estudia a qué conjunto de alternativas finales conducen los métodos parlamentarios en función de la actuación de los votantes, en segundo lugar se describen las características de dichos conjuntos y en tercer lugar se relacionan entre sí.

En Miller (1995) se resume los conjuntos de alternativas finales en los métodos parlamentarios distinguiendo proposiciones con un comportamiento sincero, sofisticado y cooperativo. En este apartado se resumen las proposiciones más relevantes:

Proposición 2.1. *Con un comportamiento sincero de los votantes:*

a) Un candidato perdedor de Condorcet[4] *no puede ser el resultado de un método de votación binario.*

b) Cualquier alternativa (excepto el perdedor de Condorcet) puede ser el resultado del método sucesivo, incluso una alternativa que esté fuera del conjunto Top-Cycle.

c) Para cualquier alternativa en el conjunto Top-Cycle, existe una agenda en el método sucesivo y en el método de la enmienda estándar para la cual es el resultado.

[4] Un candidato es perdedor de Condorcet si todas las alternativas le derrotan en sus comparaciones por pares. Una mayoría de votantes prefiere a cualquier otra alternativa antes que al perdedor de Condorcet.

d) *Todas las alternativas que son resultado del método de la enmienda sustituta pertenecen al conjunto Top-Cycle.*

Proposición 2.2. *Con un comportamiento sofisticado de los votantes:*

a) *El resultado, con una agenda que compara a dos grupos de alternativas pertenece al conjunto Top-Cycle.*
b) *Si hay un ganador de Condorcet será el único resultado.*
c) *El resultado del método de la enmienda estándar pertenece al conjunto de Banks.*
d) *El resultado del método de la enmienda sustituta conduce al Top-Cycle.*

Proposición 2.3. *Con un comportamiento cooperativo de los votantes, tal como el propuesto en Schwartz (1990), todos los métodos parlamentarios conducen al conjunto TEQ.*

En resumen, los métodos parlamentarios alcanzan distintos conjuntos de alternativas dependiendo de los comportamientos:

Tabla 2.1. *Conjuntos de alternativas finales y métodos parlamentarios.*

Métodos y comportamientos	*Sincero*	*Sofisticado*	*Cooperativo*
Sucesivo	Más amplio que TC[5]	TC	TEQ
Enmienda Estándar	TC	Banks	TEQ
E. Compatible	Más amplio que TC	¿?	TEQ
Enmienda sustituta	TC	TC	TEQ

En Laffond *et al.* (1995) se comparan los conjuntos de alternativas finales analizando sus relaciones por pares. El conjunto TEQ es subconjunto de Banks, que a su vez es subconjunto del Top Cycle.

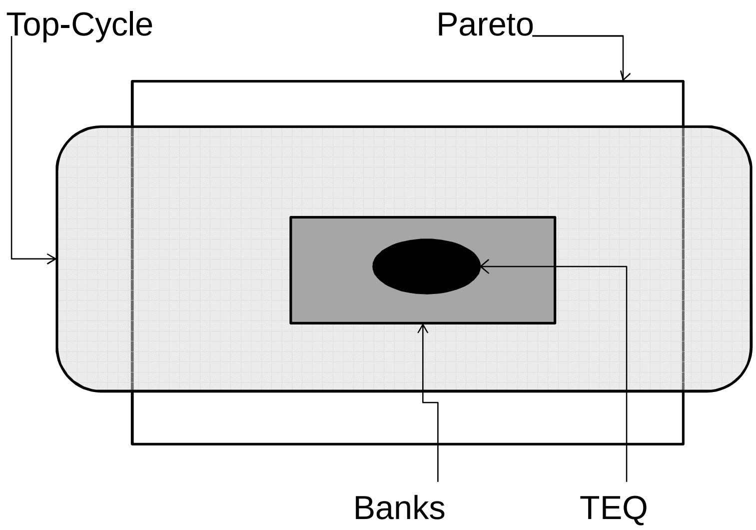
Tabla 2.2. *Relación en los conjuntos de alternativas finales*

	Top Cycle	**Banks**	**TEQ**
Top Cycle			
Banks	$\subset$		
TEQ	$\subset$	$\subset$	

[5] Más amplio que el Top-Cycle, sin incluir al perdedor de Condorcet.

Se ha probado que la relación entre algunos de los conjuntos más relevantes definidos se corresponde con la Figura 2.1.

Figura 2.1. *Relación entre los conjuntos de alternativas finales más relevantes.*



En la figura anterior se muestra la relación entre los conjuntos creados a partir de la idea democrática de la mayoría. Si existe el ganador de Condorcet, esa alternativa será la única alternativa que forme el Top-Cycle, el conjunto de Pareto (alternativas que no están Pareto dominadas), el conjunto de Banks y el TEQ.

En Reid (1997) se propone un nuevo conjunto de alternativas finales denominado conjunto Equitativo (de interés para esta Tesis), planteando cuestiones sobre su relación con el TEQ. La definición, análisis y respuesta a algunas de sus preguntas se realiza en el *Capítulo* 3.

2.4. Conclusiones

En este *Capítulo* se ha revisado, para los métodos parlamentarios más importantes, el cumplimiento de las propiedades de Condorcet, Pareto, Monotonía y Participación. También se ha tratado la identificación de los conjuntos de alternativas finales y la manipulación de la agenda existente. Aunque ningún método está libre de paradojas el método de la enmienda estándar sufre el menor número de ellas.

Dos grupos de cuestiones teóricas, no estudiadas en la literatura (y que se plantearán en el *Capítulo* 3), son:

1. Por un lado, las propiedades analizadas en la literatura se refieren en general a un comportamiento sincero de los votantes, pero ¿es posible definir nuevas paradojas de Participación relacionadas con el proceso de votación por etapas de los métodos parlamentarios? ¿cumple algún método dichas propiedades?

2. Por el otro, en Laffond *et al*. (1995) se relacionan dichos conjuntos, pero ¿sería posible construir un conjunto de alternativas final más reducido que el TEQ?

CAPÍTULO 3. NUEVOS RESULTADOS TEÓRICOS DE LOS MÉTODOS DE VOTACIÓN PARLAMENTARIOS

3.1. Introducción.

El parlamento español está formado por dos Cámaras: la Cámara baja (el Congreso de los Diputados) y la Cámara alta (el Senado). Este *Capítulo* se centra en la primera de ellas porque es donde se proponen los Proyectos de Ley desde que se plantean las iniciativas legislativas, se consensuan las propuestas, hasta que finalmente se aprueban las leyes.

En este marco parlamentario se aplican métodos de votación en dos ámbitos diferentes: la toma de decisiones sobre Proyectos de Ley y sus enmiendas; y la elección de un órgano representativo. En este *Capítulo* se exponen los nuevos resultados teóricos obtenidos del análisis de los métodos parlamentarios aplicados al primero de los ámbitos y el *Capítulo 4* se centra en el segundo.

Existen cuatro secciones diferenciadas dentro del *Capítulo*:

En primer lugar, se reflexiona sobre las propiedades prácticas de los métodos de votación, en concreto se pretende responder a la pregunta ¿porqué los métodos parlamentarios son ésos y no otros? Por ello, se analizan algunas propiedades prácticas (rapidez y sencillez).

En segundo lugar, se plantea una nueva equivalencia entre dos métodos parlamentarios: el método de la enmienda compatible sofisticada y el método de la enmienda sustituta binaria. Es un resultado análogo al conseguido en Miller (1977), donde demostró que, dada una agenda A, el método sucesivo sofisticado equivale al método de la enmienda estándar sincera con la agenda "espejo[1]" de A. Las equivalencias permiten asegurar que los métodos cumplen las mismas propiedades y conducen a los mismos conjuntos de alternativas finales.

[1] La agenda espejo de la agenda $(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$ es $(x_n, x_{n-1},..., x_3, x_2, x_1)$.

En tercer lugar, se definen nuevas propiedades de Participación (relacionadas con el aspecto secuencial de los métodos parlamentarios) y de Monotonía. Así, se podrán comparar los métodos parlamentarios en función de su cumplimiento.

En cuarto lugar, se propone una reducción del conjunto de resultados *TEQ*: se parte del conjunto Equitativo[2], *E*, formado por las alternativas que se obtiene al aplicar el método de la enmienda estándar, a una agenda equitativa, que produce el mismo resultado independientemente del comportamiento de los votantes (sincero o sofisticado). Se deducen las características y propiedades teóricas de este conjunto *E*; también se obtiene, de paso, un modo de calcular la agenda Equitativa. La propuesta de reducción del *TEQ* es el conjunto de resultados *TEQE*[3], intersección entre el conjunto *TEQ* y el conjunto Equitativo. Está contenido dentro del conjunto de Banks.

Se analizan todos los torneos con hasta seis[4] alternativas asegurando la existencia del conjunto *TEQE* y estudiando las relaciones entre dicho conjunto y el de Banks, el *TEQ* y el *E*.

[2] Definido en Reid (1997).
[3] Se ha demostrado su existencia para un número pequeño de alternativas.
[4] Para más de 6 alternativas todas las pruebas realizadas mantienen la conjetura.

3.2. Propiedades prácticas de los métodos de votación parlamentarios.

Los métodos de votación parlamentarios tienen características diferentes del resto de métodos, debido al ámbito en el que se emplean, el Parlamento: deben de ser sencillos para los propios parlamentarios, pero también para que los ciudadanos puedan entender el proceso de aprobación de un proyecto de ley.

Los métodos de votación parlamentarios:

1. Son sencillos de entender: es importante que los legisladores comprendan el funcionamiento de la votación para evitar errores.

2. Son sencillos en cuanto al acto votar: no es necesario escribir una lista ordenada de alternativas para conocer el resultado. Las tres opciones que tienen los votantes son: sí, no o abstención.

3. Los métodos son binarios y secuenciales: realizan la comparación entre dos conjuntos de alternativas y la votación se divide en varias etapas sucesivas. Esto implica sencillez.

4. Son transparentes pues todos los votantes observan el resultado y pueden comprobar cómo se ha votado en la Cámara en su conjunto.

5. Son resolutivos ya que sólo puede salir elegida una alternativa, un proyecto de ley con las enmiendas aprobadas (no tiene sentido aplicar métodos no resolutivos).

Entre los métodos no parlamentarios existen algunos famosos como, por ejemplo, el **método de Borda**. Este método no es secuencial y obliga a escribir una lista de alternativas (esto lo hace más complejo en el momento del voto). En cambio, tiene propiedades teóricas interesantes pero desde un punto de vista práctico es menos transparente, más complejo y no siempre es resolutivo.

Además, existen otras reglas de votación como el método de Hare y el de Coombs, que tienen una estructura de eliminación secuencial muy similar al método sucesivo con un comportamiento sincero, ver Rasch (1987) y la sección 3.4. Con el **método Hare**, si el 50% de los votantes tienen una alternativa situada en primer lugar en su lista de preferencias, entonces esa alternativa es elegida. Si esa alternativa no existe, entonces la alternativa con un número menor de votos es eliminada, y en este caso, se vuelve a repetir el cálculo sobre el resto de alternativas, habiendo eliminado de sus preferencias dicha alternativa.

El método Hare evita el problema de la agenda al eliminar la alternativa que menos primeros puestos obtiene. El resultado es independiente de la agenda. No cumple Condorcet, ni escoge al perdedor de Condorcet (como el método sucesivo).

El **método de Coombs** realiza un cambio en el modo de eliminar alternativas: elimina aquella alternativa que es la última en las preferencias para un mayor número de votantes. Tampoco es Condorcet.

Estos métodos tienen estructuras parecidas pero su aplicación en la práctica parlamentaria implicaría que los legisladores deberían escribir el orden completo de todas sus alternativas. Esto elimina la sencillez y parte de la transparencia.

La **rapidez y la sencillez** de un método de votación parlamentario son propiedades deseables. La dificultad estriba en analizar estas propiedades prácticas desde un punto de vista objetivo. Por ello, se tratará de estudiar la rapidez y la sencillez a través de dos elementos: el número de comparaciones realizadas por cada método para alcanzar el resultado y la información que se solicita a los votantes para votar.

Los instrumentos que se utilizan para la medición objetiva de estas propiedades son el número de comparaciones entre alternativas (permiten evaluar la rapidez del método), la información necesaria por cada categoría de agentes y su comportamiento. Un método se considerará más rápido cuando el número de votaciones realizadas sea menor. Un método será más “sencillo” si es necesaria menos información (de las preferencias de los votantes para alcanzar el resultado).

3.2.1. El número de comparaciones de un método parlamentario.

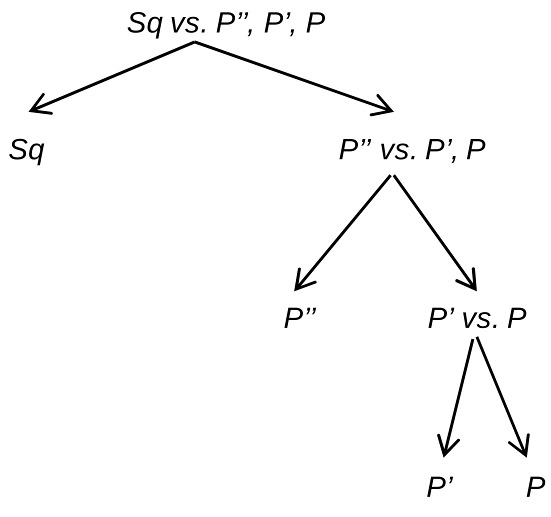
El número de comparaciones (entre alternativas) de un método de votación coincide con el número de nodos de decisión que son necesarios para alcanzar la alternativa final y varía en función del comportamiento de los votantes (se suponen n alternativas):

El **método sucesivo con un comportamiento sincero de los votantes** realiza un número de comparaciones menor o igual a *n*-1, pues es posible alcanzar el resultado en cualquier votación (incluso en la primera): siempre que la alternativa reciba una mayoría de votos frente al resto de alternativas no eliminadas. El método sucesivo con un comportamiento sofisticado realiza *n*-1 comparaciones, equivalente al método de la enmienda estándar sincera.

Por ejemplo, si se suponen cuatro alternativas (*Sq*, *P''*, *P'* y *P*), existe un máximo de tres comparaciones con el método sucesivo con un comportamiento sincero. La primera pregunta a responder es si merece la pena cambiar el status quo. Si una mayoría no tiene el status quo en primer lugar en sus preferencias se continúa votando (en caso contrario se acaba la votación con una sola comparación y no se legisla).

En segundo lugar, se pregunta si el proyecto *P''* es preferido al resto de alternativas por una mayoría de votantes, es decir, una vez que se ha eliminado el status quo de las preferencias de los votantes, ¿aparece el proyecto *P''* en la primera preferencia de la mayoría de votantes? Si la respuesta es afirmativa, la votación finaliza (con dos comparaciones) y *P''* es aceptado. En caso contrario, se elimina *P''* de las preferencias de los votantes y se pregunta ¿tiene una mayoría de votantes la alternativa *P'* en primer lugar en su lista de preferencias?. En este caso afirmativo, *P'* sería la alternativa escogida. En caso negativo, la alternativa elegida sería la *P,* es decir, son 3 comparaciones:

Figura 3.1. *El método sucesivo*

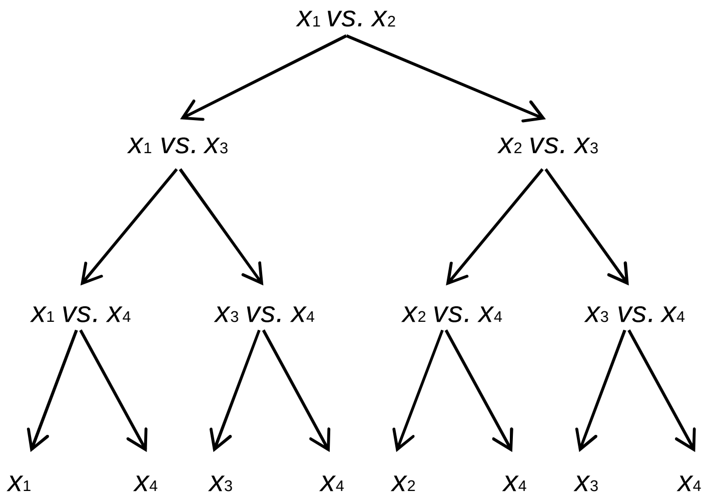


En este ejemplo, el método sucesivo con un comportamiento sofisticado de los votantes tiene exactamente tres al partir del nodo final y tratar de averiguar cuáles serían las alternativas elegidas en caso de que se llegara a dicho nodo final. De este modo, se poda el árbol por abajo, dejando únicamente las alternativas que resultarían ganadoras hasta llegar al nodo inicial.

La primera pregunta sería ¿debe *P’* ser reemplazado por *P*? El ganador de esta primera comparación ¿debe ser reemplazado por *P’’*? El ganador de esta segunda comparación ¿debe ser reemplazado por el *status quo*?.

Se supone la equivalencia $P=x_1$, $P'=x_2$, $P''=x_3$, y $Sq=x_4$ para la figura 3.2 siendo la agenda el orden (x_1, x_2, x_3, x_4). Esto implica que el método sucesivo con un comportamiento sofisticado de los votantes en la agenda (x_4, x_3, x_2, x_1) es equivalente a aplica el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes y la agenda espejo: (x_1, x_2, x_3, x_4), según se demostró en Miller (1977).

Figura 3.2. *El método sucesivo con un comportamiento sofisticado de los votantes o método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero.*



Así pues, el **método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes** y el **método sucesivo con un comportamiento sofisticado** realizan n-1 comparaciones.

Por otro lado, el **método de la enmienda estándar con un comportamiento sofisticado de los votantes** realiza $2^{(n-1)}-1$ comparaciones para alcanzar el resultado pues parte de los nodos finales del árbol hasta alcanzar el primer nodo. Es decir, en los cuatro nodos finales del árbol del método de la enmienda estándar de la figura 3.2, ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría si se llegara a cada uno de estos nodos?: ¿sería x_1 preferido por una mayoría a x_4?, ¿sería x_3 preferido por una mayoría a x_4?, ¿sería x_2 preferido por una mayoría a x_4? Son 3 comparaciones.

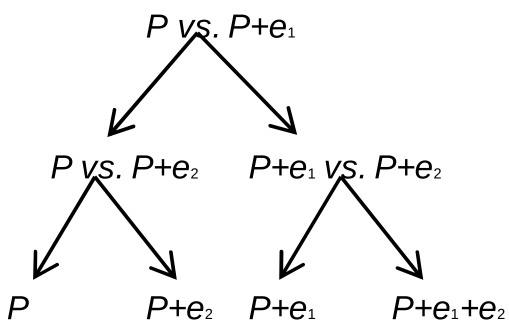
Una vez contestadas estas preguntas habría que preguntarse: ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre la ganadora de la primera y segunda pregunta (del primer y segundo nodo final)? Y ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre la ganadora de la tercera y cuarta pregunta (tercer y cuarto nodo)? Son 2 comparaciones más. Finalmente, ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría entre las alternativas ganadoras en las dos últimas preguntas? Es una comparación más.

Así, se podaría el árbol empezando por los nodos finales y dejando para sucesivas podas el resultado preferido por una mayoría. El resultado que quede en el nodo inicial corresponde al resultado con el comportamiento sofisticado de los votantes. En este caso concreto con cuatro alternativas las comparaciones realizadas son siete, es decir, $4 + 2 + 1 = 2^3 - 1$.

El **método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero de los votantes** tiene un número de comparaciones mucho menor que el número de alternativas. En general, el número de comparaciones es igual al número de enmiendas propuestas. Sean $n=2^h$ alternativas para h enmiendas. Se realizan h comparaciones (es decir, el logaritmo en base 2 del número de alternativas).

Por ejemplo, si se proponen dos enmiendas, es decir, $h=2$, a un proyecto de ley P, se forman cuatro alternativas (P, $P+e_1$, $P+e_2$, $P+e_1+e_2$) y se realizan dos comparaciones:

Figura 3.3. *El método de la enmienda compatible*



1. ¿Se acepta la enmienda primera? La comparación enfrenta P vs. $P+e_1$.
2. ¿Se acepta la enmienda segunda? Si gana P en 1. se compara P vs. $P+e_2$. Si gana $P+e_1$ en 1. se enfrenta $P+e_1$ vs. $P+e_1+e_2$.

Es importante observar que este método tiene sentido por el significado de las alternativas. Aunque teóricamente puedan tratarse todas las agendas, sólo el orden lógico de discusión (P, $P+e_1$, $P+e_2$, $P+e_1+e_2$) es relevante.

El número de alternativas crece exponencialmente con las enmiendas propuestas, mientras que el número de comparaciones crece linealmente con las enmiendas propuestas.

El **método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado de los votantes** realiza n-1 comparaciones. Con cuatro alternativas hay tres comparaciones: ¿qué alternativa sería preferida P ó $P+e_2$?, ¿qué alternativa sería preferida $P+e_1$ ó $P+e_1+e_2$?, ¿qué alternativa sería preferida por una mayoría de entre las alternativas ganadoras en la primera y segunda pregunta?

El **método de la enmienda sustituta binaria sincera de los votantes** necesita n-1 comparaciones para alcanzar el resultado final.

Si se supone un proyecto de ley P, una enmienda al proyecto E, un proyecto sustituto P' y una enmienda al proyecto sustituto E'; las alternativas son: M el proyecto de ley sin enmendar. $P+E$ el proyecto enmendado; P' el proyecto de ley sustituto sin enmendar; $P+E'$ el proyecto sustituto enmendado.

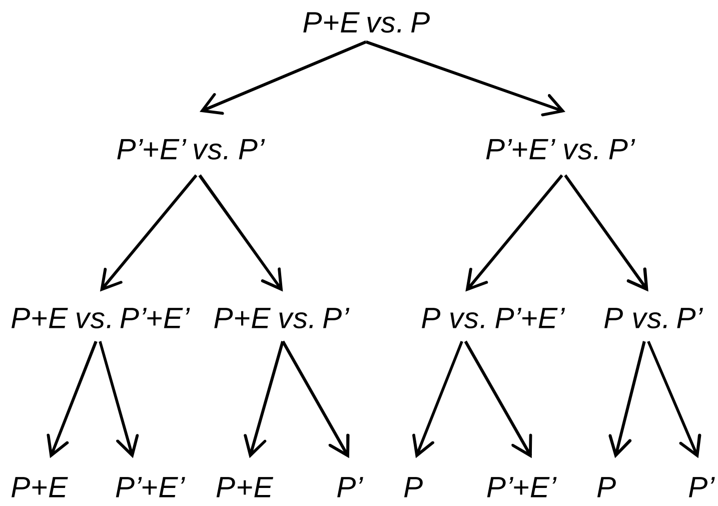
El proceso responde a las siguientes preguntas en los Parlamentos Anglo-Americanos:

1. ¿Se acepta la enmienda al proyecto original?
2. ¿Se acepta la enmienda al proyecto sustituto?
3. ¿Se acepta el proyecto original o el sustituto?

Los emparejamientos correspondientes con las cuatro alternativas son tres:

1. P vs. $P+E$.
2. P' vs. $P'+E'$
3. El ganador de 1 vs. el ganador de 2.

Figura 3.4. *Enmienda sustituta binaria*



El **método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sofisticado de los votantes** realiza $2^{(n-1)}$-1 comparaciones. El proceso es similar al método de la enmienda estándar con un comportamiento sofisticado explicado más arriba.

A modo de resumen se comparan, en la tabla 3.1, los métodos parlamentarios en función del número de votaciones necesarias para alcanzar el resultado. El método sucesivo sincero es el método más rápido, seguido de la enmienda compatible. La enmienda estándar y la enmienda sustituta realizan el mismo número de comparaciones, siendo los métodos más lentos.
El comportamiento sofisticado maneja más información y conlleva el cálculo de más etapas (que el comportamiento sincero) para conocer el resultado.

Tabla 3.1. *Comparaciones necesarias para alcanzar el resultado*

	Comportamientos	
Métodos	*Sincero*	*Sofisticado*
M. Sucesivo	$\leq n-1$	$n-1$
M. Enmienda estándar	$n-1$	$2^{(n-1)}$-1
M. Enmienda compatible	$\log_2 n$	$n-1$
M. Enmienda sustituta binaria	$n-1$	$2^{(n-1)}$-1

Siendo *n* es el número de alternativas

3.2.2. Cantidad de información utilizada por el método.

En el contexto parlamentario es posible distinguir cuatro tipos de agentes: los votantes, el organizador de la agenda, el analista y el diseñador, que necesitan distinto nivel de información (conocimiento de las preferencias de los votantes) en función de sus objetivos.

Los **votantes** sinceros escogen su alternativa más preferida; los votantes con un comportamiento sofisticado realizan sus cálculos sabiendo las preferencias de todos los votantes entre cada par de alternativas, y su estrategia les permitirá obtener mejores resultados finales; **el organizador** buscará una agenda que favorezca sus propios intereses; y el objetivo del **analista** es estudiar las propiedades de los métodos, sus relaciones, conjuntos de alternativas finales, etc. Por último, el **diseñador** buscará o construirá aquellos métodos de votación que cumplan determinadas propiedades.

Dada una agenda, la información que necesitan los **votantes** con un comportamiento sincero es su propio perfil de preferencias. Los votantes con un comportamiento sofisticado, necesitan conocer las comparaciones globales de todos los votantes (y el perfil entero en caso del método sucesivo sofisticado), así como el comportamiento de los votantes.

La importancia de la información requerida por los votantes radica en los diferentes resultados alcanzables en función de la actuación de los votantes: dado un método de votación parlamentario, el conjunto de alternativas finales con un comportamiento sofisticado de los votantes es más reducido que el correspondiente a un comportamiento sincero (a excepción de la enmienda sustituta, en que es el mismo: Top Cycle).

Como consecuencia del párrafo anterior y desde el punto de vista del **organizador de la agenda**, el comportamiento de los votantes y el método de votación influyen en el conjunto de alternativas finales y por lo tanto, influyen en el conjunto de agendas a escoger por el organizador (para alcanzar su objetivo).

Para el **analista**, parece intuitivo que un comportamiento sofisticado puede permitir que los métodos cumplan más propiedades que un comportamiento sincero, porque los votantes utilizan más información, pudiendo votar estratégicamente a favor de alternativas que no están en lo alto de su lista de preferencias para alcanzar un resultado final mejor. En cambio, sería posible definir la siguiente **Paradoja de la información:** *en ciertos métodos de votación, con un comportamiento sofisticado de los votantes se puede alcanzar un resultado Pareto dominado al que se alcanzaría con un comportamiento sincero* (se mostrará más adelante en el método sucesivo y el método de la enmienda sustituta).

El cuarto agente es el **diseñador**, que más allá de analizar los métodos y sus propiedades trata de proponer mejoras en dichos métodos y aconsejar sobre el modo adecuado de votar a los parlamentarios. En este caso, la información debe fluir entre los votantes y el diseñador, antes y después de la votación para que el diseñador pueda hacer su función.

Como conclusión de esta sección, la rapidez y sencillez del proceso de votación dependen del número de comparaciones y de la información utilizada por los agentes de dicho proceso. En esta sección, se han analizado dichas propiedades prácticas en los métodos parlamentarios según el comportamiento de los agentes comprobando que la rapidez y la sencillez disminuyen al aumentar el número de comparaciones e información necesaria.

3.3. Una nueva relación de equivalencia entre dos métodos parlamentarios

En la literatura se han analizado equivalencias entre métodos de votación. En lo referente a los métodos parlamentarios merece la pena distinguir dos aportaciones: por un lado en Miller (1977) se demostró que "*dada una agenda A, el método sucesivo con un comportamiento sofisticado equivale al método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero, y con la agenda "espejo*[5]*" de A"*.

Por otro lado, en Rasch (1987) se propuso que el método sucesivo con un comportamiento sincero equivale al método Hare para la agenda de eliminación de alternativas del método Hare:

"Si para un perfil de preferencias sobre un conjunto de alternativas, una de ellas es escogida por el método Hare, entonces existe una agenda con el método sucesivo con un comportamiento sincero optimista que también escoge a esta alternativa".

Si la agenda del método sucesivo es el orden de eliminación de las alternativas del método Hare (definido en la sección 3.2.), el resultado es el mismo. Una alternativa del método Hare siempre puede alcanzarse con esa agenda en el método sucesivo, pero una alternativa en el método sucesivo (para una agenda que no sea el orden de eliminación de Hare) no coincidirá con el resultado del método Hare.

Cuando existe una equivalencia el resultado de aplicar los dos métodos es el mismo, cumplen las mismas propiedades, sufren las mismas paradojas y conducen al mismo conjunto de resultados. Por ello, se propone una nueva equivalencia entre métodos parlamentarios. En esta sección se demuestra que el método de la enmienda compatible sofisticada equivale al método de la enmienda sustituta binaria sincera para una agenda determinada. En primer lugar se define el método de la enmienda sustituta binaria, en segundo lugar se plantea la equivalencia y se concluye con las implicaciones del análisis.

[5] La agenda espejo de la agenda (x_1, x_2, x_3,..., x_n), es (x_n, x_{n-1},..., x_3, x_2, x_1).

3.3.1. El método de la enmienda sustituta binaria

Se recuerda y amplia la definición del método planteada en el *Capítulo* 1.

Definición 3.1. El método de la enmienda sustituta binaria
El método de la enmienda sustituta binaria compara las alternativas de dos en dos hasta que finaliza la agenda, siendo necesario tener un número de alternativas igual a 2^k*. Como resultado de esta primera votación, se obtienen* $\frac{2^k}{2}$ *alternativas. Este proceso de votación de alternativas de dos en dos se repite sucesivamente, hasta que queda una única alternativa, que es la finalmente elegida.*

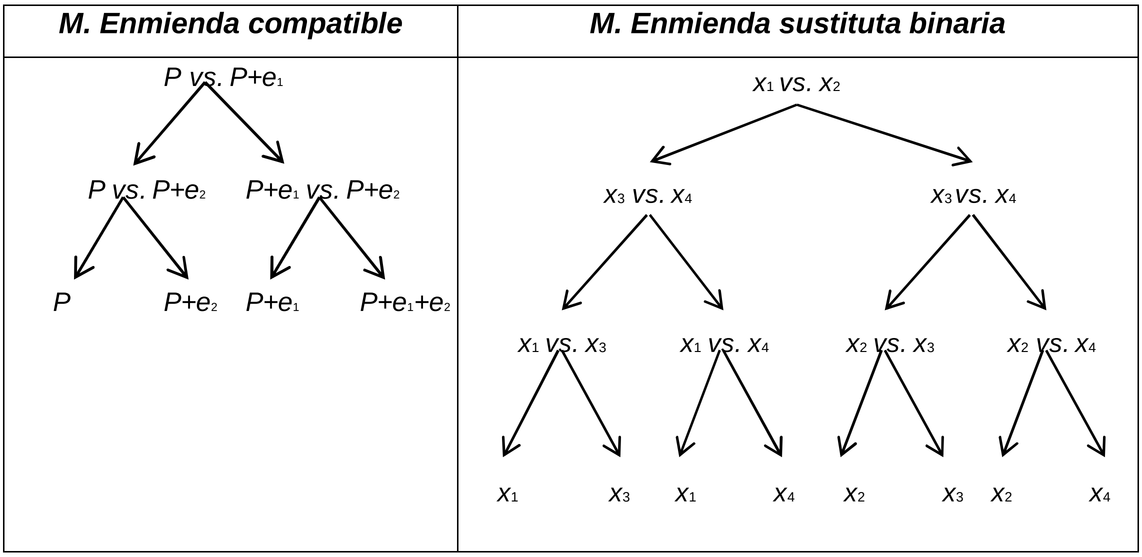
En el contexto deportivo se utiliza (modificado) para los torneos de jugadores de tenis. Por ejemplo, si hay cuatro alternativas, el método de la enmienda sustituta binaria compara las alternativas de dos en dos, es decir, x_1 versus x_2 y x_3 versus x_4. Y finalmente realiza una comparación entre las alternativas ganadoras de dichos enfrentamientos.

Aunque la estructura de este método de votación pudiera parecer muy teórica (entre otras razones porque el número de alternativas debe ser potencia de 2), el modo de comparación de alternativas es útil en un contexto parlamentario por su estrecha relación con el método de la enmienda compatible.

3.3.2. Equivalencia entre los métodos. Formación de la agenda equivalente.

Por ejemplo, se supone un proyecto de ley P con dos (k=2) enmiendas (e_1 y e_2), que generan 4 alternativas: P, P+e_1, P+e_2, P+e_1+e_2. Si en el árbol del método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero se denominan a las alternativas de los últimos nodos: P, P+e_2, P+e_1, P+e_1+e_2, respectivamente, x_1, x_2, x_3, x_4, y se plantea el voto del método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado, tenemos el árbol del método de la enmienda sustituta binaria.

Figura 3.5. *Equivalencia entre dos métodos parlamentarios*



El método de la enmienda sustituta binaria necesita tener un número de alternativas igual a 2^k (generadas con k enmiendas compatibles) y **precisamente los últimos nodos del árbol del método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero** (necesarios para empezar el cálculo con un comportamiento sofisticado) **son todas las alternativas, sin repetirse ninguna.**

Proposición 3.1*:*

Sea V la agenda a votar (x_1, ..., x_{2k}) con k enmiendas, el resultado del método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado equivale al método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero para una agenda determinada V'.

Demostración:

Con una propuesta P y k enmiendas se forman 2^k alternativas ($n=2^k$) ordenadas lógicamente en V: (P, $P+e_1$, $P+e_2$, $P+e_3$,..., $P+e_k$, $P+e_1+e_2$,.., $P+e_{k-1}+e_k$,.., $P+\sum_{i=2}^{k} e_i$, $P+\sum_{i=1}^{k} e_i$), que es la agenda votada en el método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero.

Además, como el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado de los votantes parte de las últimas comparaciones, se puede demostrar que:

- En la última comparación las alternativas son distintas entre sí y forman todo el conjunto de alternativas.
- El número de últimas comparaciones del método de la enmienda compatible sincera es 2^{k-1}, siendo k el número de alternativas (exactamente igual que el número de primeras comparaciones[6] en la enmienda sustituta binaria sincera).

La agenda utilizada para votar **el método de la enmienda sustituta binaria se denominada *V'*** y se puede crear de un modo recursivo: para construir la agenda con k enmiendas es necesario conocer la agenda con k-1 enmiendas y así sucesivamente hasta partir de la agenda creada con una enmienda (dos alternativas).

Con una enmienda, la agenda del método de la enmienda compatible sofisticada V_1: (P, P+e_1) y la agenda del método la enmienda sustituta binaria sincera coinciden V_1': (P, P+e_1).

Si se añade una enmienda, e_2, la agenda de la enmienda compatible sofisticada se convierte en V_2: (P, P+e_1, P+ e_2, P+e_1+e_2). Se han añadido las alternativas P+e_2 y P+e_1+e_2 que se intercalan en la agenda de la enmienda sustituta de un modo lógico entre las alternativas de la agenda V_1' generando la agenda V_2': (P, P+e_2, P+e_1, P+e_1+e_2) en el método la enmienda sustituta binaria sincera. Véase la figura 3.5.

Para una agenda con tres enmiendas V_3: (P, P+e_1, P+e_2, P+e_3, P+e_1+ e_2, P+e_1+e_3, P+e_2+e_3, P+e_1+e_2+e_3), se han incluido cuatro alternativas nuevas P+e_3, P+e_1+e_3, P+e_2+e_3, P+e_1+e_2+e_3 que se intercalan en V_2' generando la agenda V_3': (P, P+e_3, P+e_2, P+e_2+e_3, P+e_1, P+e_1+e_3, P+e_1+e_2, P+e_1+e_2+e_3).

En general, para un número de enmiendas compatibles k, y de alternativas $n = 2^k$, con una agenda inicial V_n, la agenda V_n' se genera intercalando las 2^{k-1} alternativas nuevas en la agenda V_{n-1}', de manera que a la derecha de cada alternativa x_i se inserta la alternativa x_i+e_k. Este modo de generar la agenda V_n' está completa y lógicamente determinado por esta regla recursiva de inserción, siendo innecesaria (y muy difícil) la descripción explícita completa de V_n'. □

[6] La primera vez que una alternativa se compara con otra. Por ejemplo, si hay 4 alternativas la primera ronda contiene 2 comparaciones.

Las implicaciones que tiene esta equivalencia entre el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado y el método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero, son fundamentalmente dos: por un lado, las propiedades que cumplen y las paradojas que sufren serán las mismas; alcanzan el mismo conjunto de alternativas final.

3.4. Nuevas propiedades de Participación y Monotonía en los métodos parlamentarios.

Esta sección puede dividirse en dos apartados: por un lado, se explora qué propiedades conocidas en la literatura (y definidas en el *Capítulo* 1) cumplen los métodos parlamentarios suponiendo comportamientos diferentes de los votantes. Por el otro, se plantean nuevas propiedades centradas en los conceptos de Participación y Monotonía.

3.4.1. Propiedades de Participación y Monotonía conocidas adaptadas a funciones de votación.

En esta sección se tratan las propiedades de Participación y Monotonía conocidas (con especial dedicación a las primeras) para después poder definir nuevas propiedades.

En el contexto parlamentario, las propiedades de Participación deben analizarse teniendo en cuenta el comportamiento de los parlamentarios. La literatura ha estudiado estas propiedades con un comportamiento sincero de los votantes (resumidas en la tabla 2.1 del *Capítulo* 2): cada agente vota en siguiendo únicamente sus lista de preferencias (sin realizar cálculo estratégico) y la abstención es una decisión individual que influye en el proceso de votación.

Sin embargo, **con un comportamiento sofisticado**[7], los votantes aprovechan las preferencias de todos los agentes y realizan cálculos estratégicos, teniendo en cuenta las relaciones de preferencia de partida, y el número de votantes efectivos (que no se abstienen), en el cómputo de las comparaciones por pares de las alternativas. Se parte de los nodos finales de un árbol (dada una agenda) hasta alcanzar el nodo inicial.

Por ello, si unos votantes desean abstenerse (para intentar alcanzar un resultado mejor que votando) deben de informar al resto de parlamentarios para que rehagan los cálculos y tengan en cuenta ésta información. Es decir, no pueden "escaquearse", la abstención debe ser de dominio público.

---

[7] Las propiedades con un comportamiento cooperativo, en el sentido de Schwartz (1990), no pueden analizarse porque el resultado del método de votación es un conjunto de alternativas independientemente de la agenda.

De hecho, si unos votantes se abstienen y no informan al resto de votantes, es posible que el resultado sea el mismo que votando. En el ejemplo 3.1 se muestra la aparición de la Paradoja de la Abstención en el método sucesivo con un comportamiento sofisticado:

Ejemplo 3.1. *Paradoja de la Abstención en el método sucesivo con un comportamiento sofisticado.*

Sea el perfil:

3 votantes con preferencias $x_2>x_3>x_4>x_1$

3 votantes con preferencias $x_3>x_4>x_1>x_2$

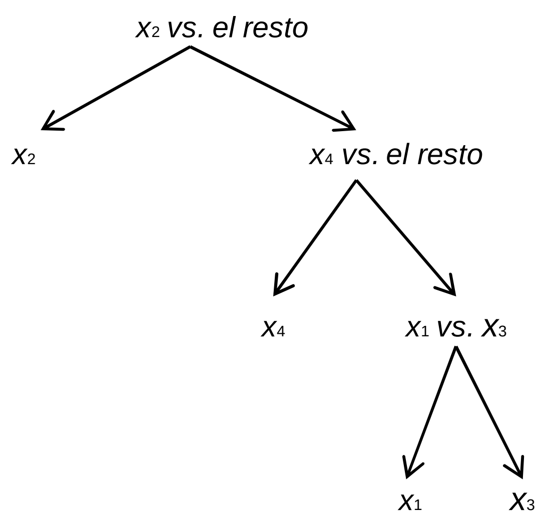
5 votantes con preferencias $x_4>x_1>x_3>x_2$

4 votantes con preferencias $x_1>x_3>x_2>x_4$

La matriz de victorias es:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		1	1	0
x_2	0		0	0
x_3	0	1		1
x_4	1	1	0	

Que corresponde al árbol de decisión:



El resultado con un comportamiento sofisticado y la agenda (x_2, x_4, x_1, x_3) es x_4. En efecto, en la primera decisión es eliminada x_2, y en la segunda decisión elegida x_4, porque los votantes, que en su mayoría prefieren x_4 a x_1 y a x_2, calculan que en caso de llegar al último nodo sería elegida x_1.

Si los cuatro últimos votantes se abstienen e informan de su abstención, entonces el resultado es x_3, ya que en la nueva situación x_3 es la alternativa de Condorcet. Estos votantes han evitado, absteniéndose, que sea elegida su última alternativa. Se ha producido una paradoja de la abstención fuerte negativa.

Si los mismos cuatro votantes se abstienen, pero no informan de su acción, los seis primeros votantes (3 con preferencias $x_2x_3x_4x_1$ y 3 con preferencias $x_3x_4x_1x_2$) realizarán el siguiente cálculo sofisticado: si llegara la última etapa, ganaría x_1 a x_3 por 9 contra 6 votos. Como x_4 es preferido a x_1 por 11 contra 4 votos, entonces en la etapa en que se compara x_4 versus el resto (y en la primera etapa), estos seis votantes votarán a favor de x_4. De este modo, el resultado sería x_4. **En este caso se alcanza la misma alternativa si los cuatro últimos votantes se abstienen que si votan, por no haber informado a todos los votantes de su abstención.**

Incumplir las propiedades de Participación, Participación positiva y Participación negativa definidas en el *Capítulo 1* significa sufrir la Paradoja de la Abstención, la Paradoja de la Abstención Fuerte Positiva y la Paradoja de la Abstención Fuerte Negativa.

En Moulin (1988) se establece que ninguna función de votación consistente con el principio de Condorcet satisface la propiedad de Participación, es decir, todas las reglas de Condorcet se ven sometidas a la paradoja de la Abstención. Además, en Pérez (2001) se demuestra que todas las correspondencias de votación (que asignan un conjunto de elegidos a cada situación, sea unitario o no) asociadas a métodos parlamentarios, y que cumplen el criterio de Condorcet, sufren las versiones fuertes de la Paradoja de la Abstención.

Según esto, **los únicos métodos parlamentarios que podrían librarse de tal paradoja, ya que no cumplen el criterio de Condorcet, son el método sucesivo y el método de la enmienda compatible, ambos con un comportamiento sincero de los votantes. El resto se ven afectados por las Paradojas de la Abstención, ya sea el comportamiento de los votantes sincero o sofisticado.**

Así pues, se tratan en la siguientes subsecciones el método de votación sucesivo y el método de la enmienda compatible, ambos con un comportamiento sincero.

3.4.1.1. Propiedades de Participación en el método sucesivo.

Esta subsección estudia el primero de los métodos y trata dos aspectos: por un lado, se define el comportamiento pesimista dentro del comportamiento sincero; por otro lado, se estudian las paradojas que sufre el método según los diferentes comportamientos de los votantes: sincero optimista, sincero pesimista y sofisticado.

1) Definición del método sucesivo con un comportamiento sincero pesimista.

Recordemos que la definición del método sucesivo con un comportamiento sincero es la siguiente: se enfrenta cada alternativa al resto de alternativas, siguiendo una agenda preestablecida. Si la alternativa obtiene la mayoría, gana. En caso contrario, dicha alternativa se elimina y se enfrenta la siguiente (en la agenda) con el resto de alternativas hasta encontrar un ganador.

Esta interpretación de la literatura se corresponde con un punto de vista optimista, en el que cada agente vota a favor de su alternativa más alta de la lista de sus preferencias, con el objetivo de alcanzar su mejor alternativa. Expresémoslo con más detalle. En el momento de tomar en consideración la alternativa x, decidiendo por mayoría si la dan por buena y definitiva o bien la eliminan para pasar a considerar el resto de alternativas vigentes, cada agente vota a favor de x sólo si es su favorita de entre las vigentes. Este comportamiento tiene un sesgo de previsión optimista, en el sentido de que el sistemático rechazo de toda alternativa que no sea su actual favorita sólo se entiende si el agente tiene la previsión de que obrando así conseguirá al final que su actual favorita sea la elegida. De manera análoga, un agente cuyo sesgo fuese simétrico en sentido pesimista, se conformaría con evitar que al final fuera elegida su alternativa menos deseada, y para ello votaría a favor de la alternativa x en consideración, siempre que x no fuese su peor alternativa entre las vigentes. Así, es posible definir un comportamiento pesimista, según el cual, el votante optará por cualquier alternativa que no sea la última en su lista de preferencias.

Así, **el método sucesivo con un comportamiento pesimista** aplica la definición del método sucesivo estudiada en el *Capítulo 1*, pero los votantes votarán a favor de una alternativa siempre que no sea la última de su lista de preferencias. Ello implica que las primeras alternativas tienen una mayor probabilidad de ser elegidas que con un comportamiento optimista, que será mayor cuanto más alto sea el número de alternativas.

Ejemplo 3.2. *Método sucesivo con un comportamiento sincero optimista y sincero pesimista.*

Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_3$

1 votante con preferencias $x_2x_3x_1$

1 votante con preferencias $x_3x_1x_2$

Y la agenda (x_1, x_2, x_3). El método sucesivo enfrenta:

1. x_1 vs. el resto
2. En caso de que x_1 sea rechazado, x_2 vs. x_3,

Con un **comportamiento sincero optimista**, en la primera votación x_1 se eliminaría porque sólo hay un votante con x_1 en primer lugar). En el enfrentamiento entre x_2 y x_3, una mayoría prefiere a x_2 antes que a x_3.

Con un **comportamiento sincero pesimista**, el resultado final alcanzado sería x_1, porque en la primera votación el primer y el tercer votante votarían a x_1.

Las alternativas situadas en los primeros lugares de la agenda tienen una mayor probabilidad de salir elegidas con el método sucesivo y un comportamiento pesimista, debido a que los votantes aceptarán las alternativas siempre que no sean las últimas de su lista de preferencias. Además, esto será más frecuente según se reduce el número de listas de preferencias distintas y se aumenta el número de alternativas.

Es posible realizar una equivalencia entre el método sucesivo con un comportamiento pesimista y el método Coombs:

"Si para un perfil de preferencias sobre un conjunto de alternativas, una de ellas es escogida por el método Coombs, entonces existe una agenda con el método sucesivo con un comportamiento sincero pesimista que también escoge a esta alternativa".

La diferencia entre comportamiento optimista y pesimista es útil con un comportamiento sincero, pero con un **comportamiento sofisticado**, el resultado es el mismo porque sólo depende de las comparaciones de alternativas por pares, es decir, de la matriz de victorias:

	x_1	x_2	x_3
x_1		1	0
x_2	0		1
x_3	1	0	

Como todos conocen sus preferencias. Si llegara la votación al enfrentamiento entre x_2 y x_3, una mayoría preferiría a x_2. Como una mayoría prefiere a x_1 antes que a x_2. El tercer votante actúa sofisticadamente y vota a favor de x_1 en la primera votación.

Este nuevo comportamiento, denominado pesimista, dentro de la versión sincera del método permite diferenciar las paradojas (fundamentalmente relacionadas con la Participación de los votantes) desde los dos puntos de vista: sincero optimista y sincero pesimista. El resumen del análisis de las propiedades (conocidas y las nuevas) del método sucesivo con un comportamiento sincero y pesimista aparece al final de esta sección.

2) Propiedades conocidas de Participación en el método sucesivo con un comportamiento sincero optimista.

Esta sección trata las propiedades no analizadas en la literatura sobre el método sucesivo con un comportamiento sincero optimista.

Proposición 3.2. *El método sucesivo con un comportamiento sincero optimista:*

a) Cumple la propiedad de Participación Positiva.

b) Sufre la Paradoja de la Abstención fuerte Negativa.

Demostración:

a) Dado un conjunto de alternativas *X* y un perfil de preferencias cualquiera, si para una agenda cualquiera V = (x_1, ...x_k,... x_n) el resultado es x_k, entonces:

1. Las (k-1) alternativas anteriores a x_k se han eliminado en el proceso de votación, porque sólo una minoría de votantes tendrá a cada una de esas k-1 alternativas en el primer lugar de sus preferencias en el momento en que le toca ser elegida o eliminada.

2. Una mayoría de votantes prefiere a x_k en la comparación de x_k versus el resto de alternativas no eliminadas, porque tienen a x_k en su primera preferencia, una vez eliminadas las (k-1) alternativas anteriores.

Si entra un votante con x_k como alternativa más preferida (la primera de la lista), entonces:

1. Las (k-1) alternativas que se eliminaban antes siguen eliminándose porque este votante no varía el resultado (ya que tiene a x_k como primera en su lista) y las (k-1) alternativas están después de x_k en la lista de este votante (seguirá habiendo una minoría de votantes con las k-1 alternativas en primer lugar).
2. Cuando se llegue a la decisión entre x_k y el resto, x_k obtendrá la mayoría de nuevo con un votante adicional de diferencia, puesto que el nuevo votante apoyará a x_k frente al resto.

Por todo ello, x_k no dejará de ser elegida y esto demuestra que el método sucesivo sincero optimista cumple la propiedad de participación positiva.

b) Dado el perfil:

3 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

3 votantes con preferencias $x_3x_4x_1x_2$

5 votantes con preferencias $x_4x_1x_3x_2$

Y la agenda (x_2, x_3, x_4, x_1), el resultado con un comportamiento sincero de los votantes es x_3. Si entran dos votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$, el resultado es x_4, que es el último en la lista de preferencias de los dos votantes que entran. □

3) Propiedades conocidas de Participación en el método sucesivo con un comportamiento sincero pesimista.

El objetivo de esta subsección es analizar qué propiedades cumple el método sucesivo con el comportamiento pesimista (con especial atención a las propiedades de Participación).

Proposición 3.3. *El método sucesivo con un comportamiento sincero pesimista:*

a) Cumple la propiedad de Participación Negativa.

b) Sufre la Paradoja de la Abstención fuerte Positiva y la Paradoja de Pareto.

Demostración:

a) El método sucesivo con un comportamiento sincero y pesimista **cumple la propiedad de Participación Negativa**: si un conjunto de votantes elige a x_k (dada una agenda y un perfil de preferencias) y se abstiene un votante con x_k al final de su lista de preferencias (votaba a favor del resto en la comparación de x_k versus el resto de alternativas), entonces:

1. Las (k-1) alternativas que se eliminaban antes de escoger a x_k, seguirán siendo eliminadas ahora porque reciben menos apoyo que antes de la abstención.
2. En la comparación de x_k con el resto de alternativas, x_k obtendrá el mismo número de apoyos, mientras que el resto recibirá un voto menos (el del votante que se abstiene). Por lo tanto, x_k seguirá siendo el resultado final.

b) Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_2x_1x_4x_3$.
3 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$.
2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$.

Dada la agenda (x_4, x_2, x_1, x_3), el resultado con un comportamiento sincero pesimista es x_4, porque cuatro votantes (frente a tres) no tienen a x_4 la última en su lista de alternativas. Si los dos primeros votantes se abstienen, x_4 se elimina en la primera votación porque existe una mayoría de tres votantes (frente a dos) que tienen a x_4 en último lugar. El resultado es x_2, la alternativa más preferida de los votantes que se abstienen.

Sea ahora el perfil:

1 votante con preferencias $x_2x_1x_3$.
2 votantes con preferencias $x_2x_3x_1$.

Dada la agenda (x_3, x_2, x_1), el método sucesivo con un comportamiento sincero y pesimista elige x_3, porque no es la última alternativa de una mayoría de votantes, a pesar de que x_2 es el ganador de Condorcet y todos los votantes prefieren x_2 a x_3. □

Así pues, el método sucesivo con un comportamiento sincero pesimista cumple Participación Negativa, sufre la paradoja de la Abstención Fuerte Positiva y la paradoja de Pareto. Tampoco cumple el criterio de Condorcet.

3.4.1.2. Propiedades de Participación en el método de la enmienda compatible.

Esta subsección tratará de analizar las propiedades conocidas de Participación en el método de la enmienda compatible según el comportamiento de los votantes.

Propiedades conocidas en el método la enmienda compatible con un comportamiento sincero.

Este método no elige una alternativa perdedora de Condorcet, pues en el caso de llegar a la última etapa no saldría elegida por definición (la alternativa contra la que se enfrenta ganaría a la perdedora de Condorcet).

En la literatura se ha demostrado que el método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero **sufre la paradoja de Pareto** por lo que también sufre la que Nurmi (2004) denomina paradoja de la Abstención para todos los votantes.

Proposición 3.4. *El método de la enmienda compatible,*

a) Con un comportamiento sincero de los votantes sufre la paradoja de la Abstención Fuerte Positiva, la paradoja de la Abstención Fuerte Negativa y paradoja de la Abstención Fuerte.

b) Con un comportamiento sofisticado de los votantes sufre la paradoja de Pareto.

Demostración:

a) Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_4x_3$

2 votantes con preferencias $x_1x_4x_2x_3$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3x_4$

2 votantes con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

1 votante con preferencias $x_4x_3x_2x_1$

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

La matriz de victorias es:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		0	1	1
x_2	1		1	0
x_3	0	0		0
x_4	0	1	1	

Las etapas son:

1. x_1 vs. x_2 (P vs. P+e_1).
2. a) x_1 vs x_3 si gana x_1 en 1. (P vs. P+e_2 si gana P)

   b) x_2 vs. x_4 si gana x_2 en 1. (P+e_1 vs. P+e_1+e_2 si gana P+e_1)

Dada la agenda natural (x_1, x_2, x_3, x_4), el resultado con un comportamiento sincero es x_4, pero si entran 2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$, el resultado es x_3, por lo que esos votantes hubieran obtenido su mejor alternativa si se hubieran abstenido. Como al votar deja de ser elegida la alternativa primera en sus preferencias, este método sufre la **Paradoja de la Abstención Fuerte Positiva.**

Sea ahora el perfil:

3 votantes con preferencias: $x_6x_5x_2x_3x_1x_7x_8x_4$

2 votantes con preferencias: $x_6x_8x_3x_1x_2x_5x_7x_4$

Dada la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5, x_7, x_8), el resultado es x_5 (que, además, está Pareto dominada por x_6). Si entran 2 votantes con preferencias $x_8x_6x_1x_2x_4x_7x_5x_3$, la alternativa elegida es la peor en su lista, esto es, x_3.

Sea ahora el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$

3 votantes con preferencias $x_3x_4x_2x_1$

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) se obtiene x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen (en todas las comparaciones) el resultado es x_4. **No sólo evitan su peor alternativa, sino que además alcanzan su mejor alternativa. Esto se debe a que no entran todas las alternativas en el voto.** El método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero sufre la **Paradoja de la Abstención Fuerte**.

b) Sean 8 alternativas ordenadas según la agenda (P, P+e_1, P+e_2, P+e_3, P+e_1+e_2, P+e_1+e_3, P+e_2+e_3, P+e_1+e_2+e_3), respectivamente (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8).

En la primera votación se enfrenta x_1 vs. x_2.

En la segunda votación si gana x_1, se compara x_1 vs. x_3.

a) Si vuelve a ganar x_1, se enfrenta x_1 vs. x_4.

b) Si gana x_3, se enfrenta x_3 vs. x_7.

En la segunda votación si gana x_2, se compara x_2 vs. x_5.

a) Si gana x_2, se vota x_2 vs. x_6.

b) Si gana x_5, se vota x_5 vs. x_8.

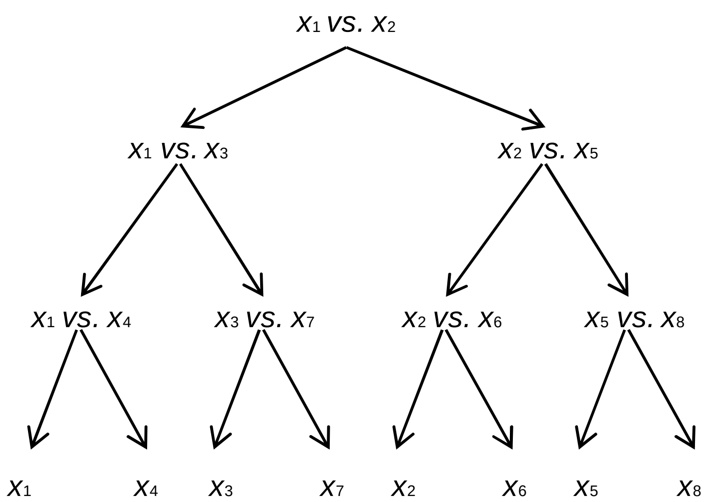
Y sea un perfil:

1 votante con preferencias $x_8x_4x_1x_2x_7x_3x_5x_6$

1 votante con preferencias $x_7x_3x_4x_1x_2x_5x_6x_8$

1 votante con preferencias $x_5x_6x_8x_3x_1x_2x_7x_4$

El árbol se corresponde con:



El resultado con un comportamiento sofisticado de los votantes es la alternativa x_2, Pareto dominada por x_1. □

Así pues, el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado de los votantes **sufre la paradoja de Pareto**.

3.4.1.3. Propiedades de Monotonía.

En general, parece que todos métodos parlamentarios cumplen la propiedad teórica de monotonía (así es en los métodos analizados en este trabajo): mover una alternativa hacia arriba en las preferencias de un votante garantiza que dicha alternativa nunca estará peor situada que cuando no se había movido. En Rasch (1987) y Nurmi (1987) se demuestra el cumplimiento de la propiedad de monotonía en el método sucesivo y en el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes, respectivamente (véase el *Capítulo 2*).

Esta subsección se organiza en dos partes: primero se analiza el método sucesivo con un comportamiento pesimista y el método de la enmienda compatible; en segundo lugar, se plantean tres paradojas relacionadas con el incumplimiento de la propiedad de monotonía con contraejemplos de dichas paradojas.

1) *Propiedad de Monotonía en el método sucesivo con un comportamiento pesimista y el método de la enmienda compatible.*

Se estudia la propiedad conocida de Monotonía en los métodos sucesivo con un comportamiento pesimista y de la enmienda compatible:

Proposición 3.5. *El método sucesivo con un comportamiento sincero y pesimista, y el método de la enmienda compatible* (*con comportamiento tanto sincero como sofisticado*) *cumplen la propiedad de monotonía.*

Demostración:
Si una alternativa *x* es escogida con el método sucesivo pesimista y un conjunto de votantes la da un empujón hacia arriba en sus preferencias, las alternativas que antes se eliminaban, se siguen eliminando (las alternativas situadas en las últimas posiciones se mantienen en el mismo lugar). En la etapa que compara la alternativa *x* versus el resto, *x* tendrá un número igual o mayor de apoyos (debido a los votantes que le han ayudado). Por lo tanto, si en la situación anterior la alternativa era escogida, el cambio le favorece y también será escogida.

El método de la **enmienda compatible y el método de la enmienda sustituta también cumplen la propiedad de monotonía** pues, si gana una alternativa *x*, y un votante la “empuja” hacia delante en su lista de preferencias (por ejemplo, si *x* era la tercera en su lista y pasa a ser la segunda), entonces *x* sigue siendo elegida. Es decir, si *x* es el resultado del método de votación y un votante la da un apoyo adicional, en las comparaciones en las que *x* ganaba, *x* seguirá ganando; y por lo tanto, seguirá siendo el resultado. □

2) Tres paradojas relacionadas con Monotonía y contraejemplos.

Pueden definirse tres tipos de paradojas relacionadas en algún modo con el incumplimiento de la propiedad de monotonía (comparten el mismo espíritu): la paradoja con preferencias reversibles, la paradoja con preferencias espejo y la paradoja que resulta de intercambiar la primera y la última alternativa.

Definición 3.5. *La paradoja con* ***preferencias reversibles*** *aparece si el resultado alcanzado con las preferencias revertidas es preferido por una mayoría al resultado obtenido con las verdaderas preferencias.*

Esta propiedad se define por Saari and Barney (2003) y también se analiza en Nurmi (2004), si bien tiene mucho parecido con la propiedad de dualidad descrita en Fishburn (1973) y Pérez (1995). En este trabajo se tratará con menos detalle debido a que no posee características normativas muy claras.

Definición 3.6. *La paradoja con* ***preferencias espejo*** *es la aplicación de la paradoja anterior a un conjunto de votantes con una única lista de preferencias en común: si un número de agentes revierte sus preferencias alcanzan un resultado más preferido que votando su verdadera lista de preferencias.*

Además, es posible definir una versión fuerte positiva y negativa, si los votantes consiguen alcanzar su alternativa más preferida con la lista espejo que votando o evitar alcanzar la alternativa menos preferida al votar con la lista espejo, respectivamente.

Definición 3.7. *La paradoja que resulta de* ***intercambiar la primera y la última alternativa*** *aparece si el resultado obtenido con las preferencias de un votante, que ha intercambiado su primera alternativa por la última, es más preferido que el obtenido con su verdadera lista de preferencias.*

A continuación se analizan estas paradojas en los métodos parlamentarios:

Proposición 3.6. *La paradoja con* ***preferencias reversibles****, en la que todos los votantes revierten sus preferencias, puede aparecer*[8] *en la enmienda compatible*.

Demostración:

Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_1x_2x_4x_3$

1 votante con preferencias $x_2x_4x_3x_1$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_1x_2$

El resultado con la **enmienda compatible y un comportamiento sincero** de los votantes, con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4), es x_3. Si los votantes votaran de acuerdo con su lista revertida o espejo, el resultado sería x_4, preferido por una mayoría a x_3. □

Proposición 3.7. *La paradoja con* ***preferencias espejo*** *aparece en el método sucesivo con un comportamiento sofisticado de los votantes y la enmienda compatible con un comportamiento sincero*.

Demostración:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$
3 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$
3 votantes con preferencias $x_3x_4x_1x_2$
5 votantes con preferencias $x_4x_1x_3x_2$

[8] No se ha encontrado en el método la enmienda estándar ni el sucesivo.

El resultado del **método sucesivo y un comportamiento sofisticado**[9] con la agenda (x_1, x_4, x_3, x_2) es x_1. Es la versión fuerte negativa.

Si llegaran a la última votación del árbol, los votantes compararían x_3 y x_2 obteniendo x_3. Si llegaran a la penúltima, entonces enfrentarían x_3 y x_4, ganando x_3. Anticipando esta situación, en la primera votación se enfrentarían x_3 y x_1, y ganaría x_1. Es decir, las previsiones de los votantes (por el conocimiento de las preferencias del resto) y el cálculo estratégico de los votantes conduce a un resultado como x_1.

Los 3 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$ son los más perjudicados, pues se obtiene la alternativa menos preferida de su lista. Si votan de acuerdo con su lista de preferencias espejo $x_1x_4x_3x_2$, el resultado es x_4, más preferido, según sus verdaderas preferencias, que x_1.

Sucedería lo mismo si los mismos 3 votantes votaran de acuerdo con cualquiera de las listas de preferencias $x_1x_2x_4x_3$, $x_1x_4x_2x_3$, $x_2x_1x_4x_3$, $x_2x_4x_1x_3$, $x_2x_4x_3x_1$ y con todas aquellas que tienen x_4 en primer lugar.

El método de la **enmienda compatible con un comportamiento sincero** de los votantes sufre la paradoja de las preferencias espejo para un conjunto de votantes (versión fuerte **negativa**):

Si se suponen 4 alternativas y la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) sobre el perfil:

2 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$.
3 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$.
2 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$.

El resultado es x_3. Si los dos primeros votantes revierten sus preferencias: $x_3x_4x_2x_1$ el resultado es x_4, evitando así escoger la peor alternativa para ellos (x_3).

Por último, el método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero sufre la paradoja de las preferencias espejo para un conjunto de votantes (versión fuerte **positiva**):

[9] Y por lo tanto, el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero también, con la agenda espejo: (x_2, x_3, x_4, x_1).

Si se suponen 4 alternativas y la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) sobre el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$.

3 votantes con preferencias $x_1x_4x_3x_2$.

2 votantes con preferencias $x_3x_4x_2x_1$.

El resultado es x_1. Si los dos primeros votantes revierten sus preferencias: $x_3x_2x_1x_4$, el resultado es x_4, alcanzando su mejor alternativa. □

Proposición 3.8. *La paradoja que resulta de* **intercambiar la primera y la última alternativa de la lista,** *aparece en el método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero (versión fuerte negativa).*

Demostración:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$.

3 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$.

2 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$.

Y la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4). Las comparaciones son:

1. x_1 vs. x_2 (P vs. $P+e_1$).
2. x_1 vs x_3 si gana x_1 en 1. (P vs. $P+e_2$ si gana P)
3. x_2 vs. x_4 si gana x_2 en 1. ($P+e_1$ vs. $P+e_1+e_2$ si gana $P+e_1$)

El resultado con un comportamiento sincero es x_3. Si los dos primeros votantes intercambian la primera alternativa por la última: $x_3x_2x_4x_1$, el resultado es x_2, evitando así que sea elegida la peor alternativa para ellos (x_3). □

3.4.2. Nuevas propiedades de Participación.

En esta sección se definen nuevas propiedades relacionadas con la Participación y Monotonía, y se comprueba su cumplimiento en los métodos parlamentarios.

Moulin (1988) define en el contexto de funciones de votación la propiedad de **Participación**: si una alternativa x es elegida, y entra un grupo de votantes idénticos que la prefiere a una alternativa *y*, entonces *y* no puede salir elegida. Si se incumple aparece la Paradoja la Abstención (*No Show Paradox*).

En la literatura se supone que los votantes tienen tres opciones: si, no y abstención (equivalente a no asistir a la votación). En la realidad parlamentaria, existen más posibilidades: por un lado, es posible asistir a la votación y votar sí, no o **abstenerse en alguna comparación** (debido a que los métodos de votación parlamentarios son secuenciales). Por el otro, es posible no asistir a la votación. También merecería la pena destacar la diferencia existente entre asistir absteniéndose en todas y no asistir: Corte y Real (2004) defienden que el quórum exigible en la votación puede marcar la diferencia entre una opción y la otra. Es posible que existan situaciones en las que al no asistir no se forme el quórum necesario para que la cámara pueda votar, mientras que si se formara, podría suceder que, el resultado sería menos preferido para aquellos votantes que podrían haber decidido no asistir.

Las propiedades de Participación en alguna comparación aprovechan que el modo de votar en los métodos parlamentarios es **secuencial, es decir, consta de varias etapas para alcanzar el resultado**. En cada etapa se realiza la comparación entre dos grupos de alternativas, por lo que aparece la posibilidad de abstenerse en alguna de las comparaciones y votar en otras (a diferencia de la versión tradicional, que consiste en abstenerse en todas las comparaciones):

Definición 3.8.

a) ***Participación en cualquier comparación****: si x_1 es el resultado de una votación y entra un votante que prefiere x_1 a x_2, en una comparación cualquiera, entonces el resultado no puede ser x_2.*

b) ***Participación débil en cualquier comparación****: si x_1 es el resultado de una votación y entra un votante con la alternativa x_1 en primer lugar y la alternativa x_2 en último lugar de sus preferencias, en una comparación cualquiera, entonces x_2 no puede salir elegida.*

c) ***Participación positiva en cualquier comparación****: si x es el resultado de una votación y entra un votante que tiene a x en primer lugar de su lista de preferencias, en una comparación cualquiera, entonces x debe seguir siendo el resultado.*

d) ***Participación Negativa en cualquier comparación****: si x no es el resultado de la votación y entra un votante con x en último lugar de sus preferencias, en una comparación cualquiera, x no puede ser el resultado de la votación.*

Siguiendo la terminología de Pérez (2001), toda función que incumpla la primera propiedad sufre la Paradoja de la Abstención en alguna comparación. Aquella función que incumpla la segunda propiedad sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención en alguna comparación y toda función de votación que no satisface alguna de las dos últimas propiedades está sometida a la Paradoja Fuerte de la Abstención en alguna comparación.

Hasta ahora, incluida la definición 3.8, las propiedades se han expresado suponiendo que entran votantes y votan alcanzando una alternativa menos preferida, pero también es posible interpretarlo al contrario. Es decir, suponiendo que los votantes se abstienen y consiguen una alternativa más preferida. Los ejemplos que siguen seguirán esta última interpretación.

Proposición 3.9: ***Todos*** *los métodos de votación con un comportamiento sincero y sofisticado sufren las Paradojas Fuertes Positivas y Negativas de la Abstención en alguna comparación (excepto la versión fuerte positiva en el método sucesivo con un comportamiento sincero optimista y la versión fuerte negativa con un comportamiento sincero pesimista).*

Demostración:

a) El método de la enmienda estándar:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_3x_1x_2$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3$

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2$

Con un comportamiento sincero y la agenda (x_1, x_2, x_3) obtiene x_1. Si los dos primeros votantes con preferencias $x_3x_1x_2$ se abstienen en la primera comparación (x_1 vs. x_2) ganaría x_2 y votan en la segunda (x_2 vs. x_3) gana x_3 y obtienen su mejor alternativa. Por lo tanto el método **sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva en alguna comparación.**

Sea ahora el perfil (respecto del ejemplo anterior sólo cambian los dos primeros votantes):

2 votantes con preferencias $x_3x_2x_1$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3$

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2$

Con un comportamiento sincero con la agenda (x_3, x_2, x_1) obtiene x_1. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación (x_3 vs. x_2) ganaría x_2 y votan en la segunda (x_2 vs. x_1) ganaría x_2, evitando alcanzar su peor alternativa. El método **sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa en alguna comparación**.

Sea ahora el perfil,

2 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$

3 votantes con preferencias $x_4x_2x_3x_1$

2 votantes con preferencias $x_2x_3x_1x_4$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado **con un comportamiento sofisticado** es x_2. Si los dos primeros votantes se abstienen en todas las comparaciones se alcanza x_2, mientras que si se abstienen en la comparación x_2 versus x_4 y votan en todas las demás gana x_1, su alternativa más preferida. Así pues, sufre la **Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva en alguna comparación**.

Sea ahora el perfil:

3 votantes con preferencias $x_2x_3x_4x_1$

3 votantes con preferencias $x_3x_4x_1x_2$

5 votantes con preferencias $x_4x_1x_3x_2$

4 votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$

El resultado del **método de la enmienda estándar con un comportamiento sofisticado** con la agenda (x_2, x_3, x_4, x_1) es x_4 (la peor alternativa de los 4 últimos votantes). Si 4 votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$ se abstienen en la comparación x_3 versus x_1 el resultado es x_3 (se evita escoger la alternativa menos preferida para los cuatro votantes). Así pues, sufre **la Paradoja de abstención fuerte negativa en alguna comparación**.

b) El método sucesivo:

La Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva en alguna comparación no aparece en el método sucesivo con un comportamiento sincero por la misma razón que cumple participación Positiva (véase la demostración de la Proposición 3.2). En cambio, **sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_3x_2x_1$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3$

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2$

El método sucesivo con un comportamiento sincero con la agenda (x_2, x_3, x_1) obtiene x_1. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera votación (x_2 vs. resto) gana x_2, evitando que al votar se alcance su peor alternativa. El método sufre la **Paradoja Fuerte de la Abstención Fuerte Negativa**.

Sea ahora el perfil,

2 votantes con preferencias $x_1x_2x_4x_3$.

3 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$.

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$.

Y la agenda (x_4, x_3, x_2, x_1) el resultado con un comportamiento sincero **pesimista** es x_4, porque cuatro votantes (frente a tres) no tienen a x_4 la última en su lista de alternativas. Si los dos primeros votantes se abstienen en todas las comparaciones el resultado es x_3, mientras que, **si se abstienen en la primera comparación**, consiguen que x_4 se elimine, votan en la segunda comparación y x_3 también es eliminada. En la última comparación votan y consiguen x_1, su alternativa más preferida.

El método sucesivo con un comportamiento sincero y pesimista **cumple la propiedad de Participación Negativa en alguna comparación** porque cumple la propiedad de Participación Negativa (véase la demostración de la Proposición 3.3).

No se analizan las paradojas del método sucesivo con un comportamiento sofisticado pues son equivalentes a las propiedades del método de la enmienda estándar y un comportamiento sincero, véase Miller (1977).

c) El método de la enmienda compatible.

El método de la enmienda compatible con un comportamiento sincero de los votantes **sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_3x_2$

3 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación (x_1. vs. x_2) ganaría x_2 y votan en la segunda (x_2. vs. x_4) se obtiene x_4, por ello, al abstenerse en la primera comparación alcanzan su mejor alternativa.

La enmienda compatible con un comportamiento sincero de los votantes s**ufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_1x_4x_2x_3$

3 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación (x_1. vs. x_2) ganaría x_2 y votan en la segunda (x_2. vs. x_4) obtienen x_4. Al abstenerse en la primera comparación evitan su peor alternativa.

La enmienda compatible con un comportamiento sincero de los votantes **sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención en alguna comparación:**

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$

3 votantes con preferencias $x_3x_2x_1x_4$

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación, pero no en la segunda, en la primera (x_1. vs. x_2) gana x_2 y en la segunda (x_2. vs. x_4) obtienen x_4. **No sólo evitan su peor alternativa al abstenerse en alguna comparación, sino que además alcanzan su mejor alternativa.**

El método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado no se analiza por su equivalencia con el método de la enmienda sustituta binaria tratada en la siguiente subsección.

d) El método de la enmienda sustituta.

El método de la **enmienda sustituta con un comportamiento sincero de los votantes sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Positiva en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_1x_2$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_4x_3$

2 votantes con preferencias $x_3x_1x_4x_2$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación (x_1. vs. x_2), ganaría x_2, y votando en la segunda (x_3. vs. x_4) y en la tercera (x_2 vs. x_4), obtienen x_4. Al abstenerse en la primera comparación alcanzan su mejor alternativa (x_4).

El método de la **enmienda sustituta sincera sufre la Paradoja Fuerte de la Abstención Negativa en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_1x_2x_3$

3 votantes con preferencias $x_2x_3x_1x_4$

2 votantes con preferencias $x_3x_1x_2x_4$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_3. Si los dos primeros votantes se abstienen en la primera comparación (x_1. vs. x_2) ganaría x_2, y votando en la segunda (x_3. vs. x_4) y en la tercera (x_2 vs. x_3), se obtiene x_2. Al abstenerse en la primera comparación evitan su peor alternativa.

El método de **la enmienda sustituta sofisticada sufre la paradoja Fuerte de la Abstención Negativa en alguna comparación**:

Sea el perfil:

2 votantes con preferencias $x_4x_3x_2x_1$

3 votantes con preferencias $x_2x_1x_3x_4$

2 votantes con preferencias $x_1x_3x_2x_4$

Con la agenda (x_1, x_2, x_3, x_4) el resultado es x_1. Si los dos primeros votantes se abstienen en la comparación x_2 *versus* x_3 y votan en todas las demás, gana x_2, evitando alcanzar su alternativa menos preferida. Si se abstienen en todas las comparaciones también se alcanza x_2. □

Para finalizar esta sección de paradojas, merece la pena definir una **nueva paradoja** (que podría denominarse la *paradoja de la información*): **el comportamiento sofisticado en los votantes con un método de votación puede hacer que escojan una alternativa Pareto dominada por la que escogerían con el comportamiento sincero los mismos votantes**. La paradoja aparece porque la información que tienen los votantes cuando votan sofisticadamente (de la lista de preferencias de todos los votantes) no es aprovechada y casualmente la votación de cada votante de un modo sincero (teniendo en cuenta únicamente sus preferencias) obtiene un resultado mejor para todos los votantes. El método sucesivo sufre esta paradoja:

Ejemplo 3.3. *El método sucesivo con un comportamiento sofisticado de los votantes escoge una alternativa Pareto dominada por el resultado escogido si el comportamiento fuera sincero.*

Sea el perfil:

1 votante con preferencias $x_5x_2x_3x_4x_1x_0$

1 votante con preferencias $x_4x_5x_1x_2x_3x_0$

1 votante con preferencias $x_3x_4x_5x_1x_2x_0$

La agenda propuesta es ($x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$) siendo x_0 el status quo.

La matriz de victorias es:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0		0	0	0	0	0
x_1	1		1	0	0	0
x_2	1	0		1	0	0
x_3	1	1	0		1	0
x_4	1	1	1	0		1
x_5	1	1	1	1	0	

El resultado del método sucesivo con un comportamiento sincero es x_4, mientras que con un comportamiento sofisticado es x_1, y se puede observar que la alternativa x_1 es Pareto dominada por x_4 y x_5.

El comportamiento sincero de los votantes en el método sucesivo da lugar a un conjunto de alternativas tan amplio que, casualmente, consigue un resultado dentro del conjunto de Banks, mientras que con un comportamiento sofisticado se obtiene un resultado dentro del conjunto del Top Cycle y fuera de Banks. Puede demostrase que el conjunto de Banks está formado por x_3, x_4, x_5 y el Top Cycle por x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

El resultado sofisticado del método sucesivo x_1 es Pareto dominado por x_4 que es el resultado sincero, por lo que a todos los votantes les hubiera interesado abstenerse.

También se ha encontrado esta paradoja en el **método de la enmienda sustituta**. En ejemplo 2.6 del *Capítulo 2* el resultado de la votación con un comportamiento sofisticado de los votantes es x_6 Pareto dominado por el resultado con un comportamiento sincero, x_1.

En definitiva, con un comportamiento sincero, es decir, sin aprovechar la información de cada votante sobre el perfil de preferencias del resto de votantes (cada votante sólo conoce sus propias preferencias) se puede alcanzar un resultado más preferido por la totalidad de los votantes que el resultado obtenido con un comportamiento sofisticado (analizando las comparaciones por pares de las alternativas para todos los votantes). En cierto modo recuerda al Dilema del Prisionero[10] de Teoría de Juegos.

3.4.3. Resumen de propiedades.

En esta sección aparece una enumeración de las propiedades analizadas y un cuadro resumen que ilustra las propiedades que cumplen, o no, los métodos parlamentarios en función del comportamiento de los votantes:

[10] Se describe en la sección 4.2.1 del *Capítulo* 4.

1. Condorcet
2. Monotonía.
3. Pareto
4. Participación.
5. Participación positiva.
6. Participación negativa.
7. Participación en algunas comparaciones positiva.
8. Participación en algunas comparaciones negativa.
9. Participación débil.
10. Preferencias reversibles
11. Preferencias espejo para un conjunto de votantes positiva
12. Preferencias espejo para un conjunto de votantes negativa
13. Intercambio de primera y última alternativa de la lista.

Tabla 3.2. *Resumen de propiedades*

	1	2	3	4	5	6	**7**	**8**	**9**	10	**11**	**12**	**13**
Sucesivo sincero optimista	0	1	0	0	1	0	***1***	***0***					
Sucesivo sincero pesimista	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***					
Sucesivo sofisticado	1	1	0	0	0	0	***0***	***0***				***0***	
Enmienda estándar sincera	1	1	0	0	0	0	***0***	***0***				***0***	
Enmienda estándar sofisticada	1	1	0	0	0	0	***0***	***0***					
Enmienda compatible sincera	0	1	0	0	0	0	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***
Enmienda compatible sofisticada	***1***	***1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***					
Enmienda sustituta sincera	1	1	0	0	0	0	***0***	***0***					
Enmienda sustituta sofisticada	1	1	0	0	0	0	***0***	***0***					
Enmienda sustituta binaria sincera	***1***	***1***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***					
Enmienda sustituta binaria sofisticada	***1***	***1***		***0***	***0***	***0***	***0***	***0***					

1. Cumple la propiedad.

0. No cumple la propiedad.

En cursiva y negrita aparecen las aportaciones de este trabajo a la literatura.

Para finalizar esta sección se reflexiona sobre las propiedades que cumplen y no cumplen los métodos parlamentarios. En primer lugar se resumen las propiedades que cumplen y en segundo lugar las que no cumplen.

3.4.3.1. Propiedades que cumplen los métodos parlamentarios

Los métodos parlamentarios cumplen las propiedades de monotonía, perdedor de Condorcet y Condorcet (si el comportamiento de los votantes es sofisticado).

La no monotonía es un fallo común de las reglas de agregación en varias etapas, en cambio, **los métodos parlamentarios cumplen monotonía**. El criterio de monotonía es uno de los criterios básicos de democracia en la toma de decisión. Un apoyo adicional al ganador no lo perjudica. Se han definido otras propiedades de monotonía (de la 10 a la 13 de la tabla resumen) y se conjetura que *los métodos parlamentarios de la enmienda estándar, sustituta y sucesivo sí las cumplen.*

Todos los métodos parlamentarios **cumplen la propiedad de Perdedor de Condorcet**, es decir, ninguno obtiene como resultado una alternativa que es derrotada por el resto de alternativas, porque en la última comparación sería eliminada.

Además, los métodos parlamentarios analizados con un comportamiento sofisticado de los votantes cumplen la propiedad de **Condorcet**, mientras que si el comportamiento es sincero sólo el método de la enmienda estándar y el método de la enmienda sustituta escogen el ganador de Condorcet, siempre que exista.

3.4.3.2. Propiedades que no cumplen los métodos parlamentarios

Con un comportamiento **sincero de los votantes la propiedad de Pareto no se cumple por ningún método parlamentario**. Sorprende que aparezcan situaciones en un parlamento en las que todos los votantes obtengan un resultado menos deseable votando que no votando. Además, el método sucesivo y la enmienda compatible pueden elegir una alternativa Pareto dominada independiente de la hipótesis de comportamiento individual (sincero optimista y pesimista, y sofisticado).

Precisamente, los métodos que cumplen menos propiedades son los utilizados en los parlamentos europeos. Eso implica que es necesario que los legisladores cooperen para tratar de evitar las paradojas descritas.

En general, los métodos parlamentarios no cumplen las propiedades de Participación (fuertes ni débiles) independientemente del comportamiento de los votantes con dos excepciones: el método sucesivo sincero cumple la propiedad de

Participación Positiva en su versión optimista y la propiedad de Participación Negativa en su versión pesimista.

A pesar de la relación tan estrecha que pareciera existir entre las propiedades de monotonía y Participación, los métodos parlamentarios cumplen monotonía, mientras que no cumplen Participación (con la excepción del método sucesivo sincero).

El incumplimiento de la propiedad de Participación puede interpretarse como una manipulación por parte de los votantes, que al abstenerse consiguen una alternativa más preferida que votando.

En conclusión esta sección ha mostrado que, con un comportamiento sincero, todos los métodos parlamentarios son monótonos pero sufren la Paradoja de la Abstención y la de Pareto (a excepción del método sucesivo). Con un comportamiento sofisticado, algunos evitan la Paradoja de Pareto, pero siguen apareciendo Paradojas de la Abstención, incluso en sus versiones fuertes.

3.5. Conjuntos de alternativas finales de los métodos parlamentarios. Propuesta de un nuevo conjunto.

En esta sección se completa el análisis de los conjuntos de alternativas finales de los métodos parlamentarios y se propone un nuevo conjunto que trata de reducir el conjunto más pequeño alcanzado por un método parlamentario: el *TEQ*.

Es conocido que el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes obtiene resultados dentro del Top Cycle, y el comportamiento sofisticado conduce al conjunto de Banks (véase Miller, 1995). Los métodos parlamentarios analizados con un comportamiento cooperativo de los votantes obtienen resultados dentro del conjunto *TEQ*, que es un subconjunto, a veces propio, del conjunto de Banks.

Esta sección completa, en primer lugar, la literatura referente a los conjuntos de alternativas alcanzados por los métodos parlamentarios según el comportamiento; en segundo lugar, se define el conjunto Equitativo (propuesto en Reid (1997) para plantear un nuevo conjunto de resultados *TEQE*: intersección entre el conjunto *TEQ* y el conjunto Equitativo *E*. Finalmente, se analiza su existencia para un número de alternativas menor o igual a seis, se relaciona con el conjunto de Banks, *TEQ*, *E* y se interpreta su significado.

3.5.1. Conjuntos de alternativas finales de los métodos parlamentarios y la importancia de la agenda.

En esta subsección se analizan los conjuntos de alternativas finales que alcanzan, considerando todas las agendas, el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado (que equivale al método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero) y el método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sofisticado.

Dado un método parlamentario, un comportamiento de los votantes y una agenda se obtiene una alternativa. Si se obtienen **las alternativas para todas las posibles agendas** se crea un conjunto. Dicho conjunto es lo que se denomina conjunto de alternativas finales (***Solution Set***), y no es otra cosa que la correspondencia de votación asociada a dicho método parlamentario.

El número de alternativas del conjunto es relevante porque indica el posible margen que tiene el organizador de la agenda para alcanzar, en teoría, un resultado que satisfaga sus intereses. Por ello, es interesante encontrar el modo de alcanzar conjuntos de alternativas finales más **pequeños**, para que el tamaño o intensidad de la "manipulación" de la agenda sea menor (véase Laffond *et al.,* 1995).

La tabla 2.2 del *Capítulo* 2 referente a los conjuntos de alternativas finales dejaba sin completar la entrada correspondiente al conjunto alcanzado por **el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado** (equivalente al método de la enmienda sustituta binaria sincera, véase la sección 3.4).

Por ejemplo, se considera una votación con el método de la enmienda sustituta binaria con ocho alternativas (generadas a partir de tres enmiendas sustitutas) y un comportamiento sincero o sofisticado, suponiendo que las preferencias vienen dadas por un torneo (expresado mediante una matriz de victorias).

Ejemplo 3.4. *Conjunto de alternativas finales en la enmienda sustituta binaria.*

La matriz de victorias es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		0	0	0	0	0	0	0
x_2	1		0	0	0	0	0	0
x_3	1	1		0	0	0	0	0
x_4	1	1	1		0	0	1	0
x_5	1	1	1	1		1	0	0
x_6	1	1	1	1	0		1	0
x_7	1	1	1	0	1	0		1
x_8	1	1	1	1	1	1	0	

El Top Cycle en este ejemplo es $\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ puesto que $x_7 > x_8 > x_6 > x_5 > x_4 > x_7$. El conjunto de Banks está formado por tres alternativas: $\{x_6, x_7, x_8\}$.

El método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero de los votantes obtiene para todas sus agendas resultados dentro del conjunto de alternativas $\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, mientras que, con un comportamiento sofisticado, el conjunto de alternativas finales es $\{x_4, x_6, x_7, x_8\}$. Las alternativas x_4 y x_5 no pertenecen al conjunto de Banks.

M. Enmienda sustituta		*Top-Cycle*	*Banks*
C. Sincero	*C. Sofisticado*		
x_4, x_5, x_6, x_7, x_8	x_4, x_6, x_7, x_8	x_4, x_5, x_6, x_7, x_8	x_6, x_7, x_8

En las proposiciones 2.1 y 2.2 apartados d, tomadas de Miller (1995), se afirma que: el conjunto de alternativas finales del método de la enmienda es el conjunto Top-Cycle. El método de la enmienda sustituta binaria es un caso especial con 2^k alternativas generadas con k enmiendas, véase la definición 3.1, por lo que el conjunto de alternativas finales como máximo será el Top-Cycle, pero podría ser un subconjunto.
El ejemplo 3.4 demuestra que el conjunto de alternativas finales de la enmienda sustituta binaria no es el conjunto de Banks.

Esto implica que el conjunto de alternativas finales de la **enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero o sofisticado obtiene alternativas dentro del TC**
En cambio, si existe un ganador de Condorcet, esa alternativa es el resultado independientemente del comportamiento de los votantes. Además, por la equivalencia definida, el método de la enmienda compatible sofisticada conduce al mismo conjunto: el Top-Cycle.

Tabla 3.3. *Conjunto de alternativas de los métodos parlamentarios.*

Métodos y Comportamientos	*Sincero*	*Sofisticado*	*Cooperativo*[11]
M. Sucesivo	K[12]	TC	*TEQ*
M. Enmienda estándar	TC	Banks	*TEQ*
M. Enmienda compatible	K	***TC***	*TEQ*
M. Enmienda sustituta	TC	TC	*TEQ*
M. Enmienda sustituta binaria	***TC***	***TC***	*TEQ*

En cursiva y negrita las aportaciones a la literatura.

[11] En el sentido de Schwartz (1990).
[12] Es un conjunto más amplio que el *TC*, pero excluye al perdedor de Condorcet.

Los conjuntos de alternativas finales de los métodos de votación parlamentarios dependen del comportamiento de los Legisladores: con un comportamiento sincero (en el método sucesivo y la enmienda compatible) es posible alcanzar a cualquier resultado (exceptuando al perdedor de Condorcet); con un comportamiento sofisticado siempre escoge el ganador de Condorcet, si existe; pero si no existe, entonces el método sucesivo, el método de la enmienda sustituta y la enmienda compatible pueden dar lugar a resultados Pareto dominados.

El conjunto de alternativas final alcanzable con un voto cooperativo (*TEQ*) es el más reducido de todos los métodos de votación que se describen. Además, es independiente de la agenda y del método. En consecuencia, se plantean varias preguntas: ¿es posible reducir el conjunto *TEQ*? La respuesta a esta pregunta se tratará de responder en las siguientes secciones.

3.5.2. El conjunto Equitativo (E). Agendas equitativas.

Después de definir unos conceptos básicos, esta sección se organiza en dos partes:

1. Por un lado, se plantea el conjunto Equitativo, *E*. Existen tres objetivos: caracterizar la alternativa que resulta de una agenda Equitativa, crear un algoritmo para formar las agendas Equitativas (el resultado del voto con comportamiento sincero y sofisticado es el mismo) en el método de la enmienda estándar y localizar el conjunto Equitativo relacionándolo con el resto de conjuntos conocidos (fundamentalmente el *TEQ*).
2. Por otro lado, se define el conjunto *TEQE*[13] (intersección entre el conjunto *E* y el conjunto *TEQ*); así, se caracterizan las alternativas del conjunto, se interpretan y se relaciona dicho conjunto con el conjunto de Banks, *TEQ* y *E*.

Tres conceptos son claves en el análisis de esta sección: agenda Equitativa, alternativa Equitativa y conjunto Equitativo.

a) Agenda Equitativa

Una agenda Equitativa es una agenda tal que el resultado con un comportamiento sincero de los votantes es idéntico al resultado con un comportamiento sofisticado. En este análisis se supone el método de votación parlamentario de la enmienda estándar.

[13] Existe para un número menor o igual a seis alternativas.

b) Alternativa Equitativa:

El método de la enmienda estándar con una agenda Equitativa obtiene una alternativa equitativa. Véase Reid (1997) para una definición en relación con la teoría de grafos.

c) Conjunto Equitativo:

Es el conjunto formado por todas las alternativas equitativas, dado un perfil de preferencias. Reid (1997) obtuvo cuatro conclusiones importantes en relación con el conjunto Equitativo:

1. Si *x* es ganador de Condorcet, entonces es el resultado obtenido, para todas las agendas, con un comportamiento sincero y sofisticado de la enmienda. En este caso todas las agendas son Equitativas y la alternativa equitativa es el ganador de Condorcet. Por lo tanto, el estudio se centrará en los torneos sin ganador de Condorcet.

2. Las posibles alternativas equitativas pertenecen a Banks. El método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero de los votantes conduce al Top Cycle y con un comportamiento sofisticado a Banks (que es subconjunto del Top Cycle). Por esto el conjunto intersección es el conjunto de Banks.

3. El número de agendas Equitativas aumenta con el número de alternativas; también aumenta la proporción de torneos que tienen alguna agenda equitativa, en relación con el número total de torneos.

4. En general, si existe un ciclo superior de tres alternativas (tres alternativas que forman un ciclo entre sí y derrotan al resto de alternativas) no existe agenda Equitativa.

Esta cuarta conclusión de Reid generaría el problema de que el conjunto Equitativo estaría vacío cuando existe un ciclo superior de tres alternativas. Para evitarlo, el conjunto Equitativo debe redefinirse así: "**Es el conjunto de alternativas equitativas en caso de que no exista un ciclo superior de tres alternativas, y es el conjunto de Banks, si existe un ciclo superior de tres alternativas**". Es fácil demostrar que, en este último caso, coincide con *TEQ*, que también está constituido por las tres alternativas del ciclo superior.

Por otro lado, la probabilidad de encontrar una agenda Equitativa se incrementa con el número de alternativas y el número de votantes, mientras que la probabilidad de encontrar ciclos de tres alternativas decrece. En la tabla 3.4 y a modo de ilustración, aparecen estimaciones, mediante simulación aleatoria, de las probabilidades de encontrar una agenda Equitativa con tres votantes[14], bajo la **hipótesis de cultura imparcial** (según la cual, las preferencias de los votantes se distribuyen de una manera uniforme e independiente). Se ha considerado un número de alternativas de 3 a 6 y se ha realizado la simulación propia sobre 10.000 repeticiones.

Tabla 3.4. *Probabilidad estimada de encontrar una agenda Equitativa*[15]

Alternativas	*P(E)*
3	0,937
4	0,944
5	0,948
6	0,96

Se recuerdan los conjuntos de Banks y *TEQ*, y se calcula el conjunto Equitativo, del ejemplo 1.6 del *Capítulo* 1:

Sea el torneo:

$x_1 > x_5$

$x_2 > x_1, x_3, x_5$

$x_3 > x_1, x_4$

$x_4 > x_1, x_2$

$x_5 > x_3, x_4$

B={x_2, x_3, x_4, x_5}, *TEQ*={x_2, x_4, x_5}, *E*={x_2, x_4}

El conjunto de Banks está formado por x_2, x_3, x_4 y x_5. El **conjunto *TEQ*** está formado por x_2, x_4 y x_5. Véase la sección 1.9 del *Capítulo* 1 para su descripción paso a paso.

El **conjunto Equitativo** está formado por las alternativas x_2 y x_4. La agenda Equitativa (x_4, x_5, x_2, x_1, x_3) obtiene la alternativa x_2 como resultado del método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero y sofisticado de los votantes. Sucede lo mismo con la agenda (x_3, x_5, x_1, x_4, x_2) y la alternativa x_4.

[14] Se ha elegido un número de tres votantes porque la probabilidad de encontrar un ciclo superior de tres alternativas es más alta.

[15] En Reid (1997) se explica el modo de calcular la probabilidad de encontrar una agenda Equitativa.

En la siguiente sección se analiza este ejemplo con profundidad describiendo el proceso de cálculo de todas las agendas equitativas.

3.5.3. Formación de la agenda Equitativa, características de la alternativa equitativa y del conjunto Equitativo.

Se obtienen en esta subsección algunos resultados nuevos, que comprenden cinco aspectos relevantes: la formación de la agenda Equitativa, creando un procedimiento heurístico de búsqueda de alternativas equitativas, las características de las alternativas equitativas, su posición dentro de la agenda y un análisis del conjunto Equitativo. Todo esto prepara el terreno para las siguientes subsecciones en las que se define el *TEQE*, se estudia si el conjunto *TEQE* es no vacío, su relación con otros conjuntos y su interpretación.

3.5.3.1. Formación de una agenda Equitativa y características de la alternativa equitativa:

Para formar una agenda Equitativa es útil seguir los siguientes consejos:

- Se escoge una alternativa, que se denominará a partir de aquí posible alternativa equitativa, *x*, de manera que pertenezca al conjunto de Banks y que derrote al mayor número de alternativas (dentro de Banks).

- Las alternativas que ganen a la posible alternativa equitativa *x* deben estar a su izquierda. Si alguna estuviera a la derecha, entonces la agenda que se intenta formar no obtendría como resultado sincero la alternativa *x*. En efecto, aunque *x* progresara en sus comparaciones con otras, acabaría enfrentándose a esa que la vence estando a su derecha, siendo eliminada en ese momento. Tampoco sería resultado sofisticado. Así pues, a la derecha de *x* sólo habrá alternativas derrotadas por ella.

- Sin embargo, tampoco puede suceder que todas las alternativas derrotadas por *x* estén a su derecha, pues en ese caso no se obtendría *x* como resultado sincero, ya que la primera alternativa que se enfrente a *x* le vencerá.

- Las alternativas que sean derrotadas por x deben colocarse formando una trayectoria de Banks no maximal[16] (es decir, no deben estar todas las alternativas que derrotan a x, por lo dicho en el apartado anterior) a la derecha de x. En caso contrario, x no sería el resultado sofisticado.

- Las alternativas situadas a la izquierda de x y la propia alternativa x deben estar ordenadas de modo que el resultado sincero de esa subagenda sea x. En otras palabras, si se formara el subtorneo correspondiente a dichas alternativas, x tendría que pertenecer al Top Cycle. Esto garantizaría que x fuese el resultado sincero de la agenda completa (porque x ganaría a todas las alternativas situadas a su derecha).

En definitiva, la alternativa equitativa debe ser el resultado del método de la enmienda estándar con una agenda, independientemente de si el comportamiento de los votantes es sincero o sofisticado. Para ello, debe cumplir dos condiciones:

1. La alternativa equitativa x es una alternativa tal, que está en la cima de una trayectoria de Banks no maximal, es decir, una trayectoria de Banks que no contiene a todas las alternativas que la alternativa equitativa derrota. De esta forma, la alternativa equitativa será elegida con el voto sofisticado.

2. Además, a la izquierda de la alternativa equitativa aparecerán aquellas que derrotan a dicha alternativa y la/s alternativa/s derrotada/s por x, que no entran en la trayectoria de Banks. De esta forma, la alternativa equitativa será elegida con el voto sincero.

Continuación del ejemplo 1.6, mostrando cuál es la formación de las agendas equitativas:

El proceso de deducción de la agenda equitativa parte de las alternativas del conjunto Banks (en el ejemplo son x_2, x_3, x_4 y x_5).

Análisis de x_2:
La alternativa x_2 derrota a x_1, x_3 y x_5. Existen varias combinaciones de posibles trayectorias de Banks, algunas de las cuales no tienen a x_2 en lo alto (por ejemplo x_2x_1

[16] La trayectoria de Banks maximal con una alternativa x en la cima es aquella que contiene a todas las alternativas que derrota x.

porque x_4 gana a x_2 y a x_1). Otras trayectorias son maximales como, por ejemplo, $x_2x_5x_3x_1$ (tienen a todas las alternativas que x_2 derrota a la derecha) por lo que x_2 no podría ser resultado sincero. Las trayectorias relevantes son las que no son maximales pues x_2 necesita ganar a una alternativa que pueda situarse a la izquierda y que derrote en un ciclo a aquellas alternativas que derrotan a x_2.

Alternativa x_2		
Trayectorias no maximales fallidas	*Trayectorias no maximales*	*Agendas equitativas resultantes*[17]
x_2x_1 porque x_4 podría colocarse a la izquierda	x_2x_3	$x_1x_4x_5x_2x_3$ $x_4x_1x_5x_2x_3$ $x_5x_4x_1x_2x_3$ $x_4x_5x_1x_2x_3$
$x_2x_5x_1$ porque x_4 podría colocarse a la izquierda ya que x_1 es preferido a x_5	x_2x_5	$x_1x_4x_3x_2x_5$ $x_4x_1x_3x_2x_5$ $x_3x_4x_1x_2x_5$ $x_4x_3x_1x_2x_5$ $x_3x_1x_4x_2x_5$ $x_1x_3x_4x_2x_5$.
	$x_2x_1x_3$	$x_4x_5x_2x_1x_3$ $x_5x_4x_2x_1x_3$
	$x_2x_3x_1$	$x_4x_5x_2x_3x_1$ $x_5x_4x_2x_3x_1$
	$x_2x_1x_5$	$x_3x_4x_2x_1x_5$ $x_4x_3x_2x_1x_5$
	$x_2x_3x_5$	No tiene
	$x_2x_5x_3$	No tiene

La alternativa x_2 está en lo alto de la trayectoria no maximal x_2x_3 porque no hay alternativa que derrote a x_2 y a x_3 (por lo que x_2 será resultado sofisticado). Además, x_2 dispone de x_1 y x_5 para poder ser resultado sincero, es decir, el orden de las alternativas x_1, x_2, x_4 y x_5 (con x_2 al final) tiene que conducir a la elección de x_2. Esto sucede en $x_1x_4x_5x_2$, $x_4x_1x_5x_2$, $x_5x_4x_1x_2$, $x_4x_5x_1x_2$ (mientras que las combinaciones $x_5x_1x_4x_2$ y $x_1x_5x_4x_2$ obtienen como resultado sincero a x_4). Por lo tanto, las agendas equitativas así obtenidas son $(x_1, x_4, x_5, x_2, x_3)$, $(x_4, x_1, x_5, x_2, x_3)$, $(x_5, x_4, x_1, x_2, x_3)$ y $(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3)$.

La alternativa x_2 está en lo alto de la trayectoria no maximal x_2x_5 porque no hay alternativa que derrote a x_2 y a x_5 (por lo que x_2 será resultado sofisticado). Además, x_2 dispone de x_1 y x_3 para poder ser resultado sincero, es decir, el orden de las

[17] En la tabla se quitan los paréntesis y comas por razones de espacio.

alternativas x_1, x_2, x_3 y x_4 (con x_2 al final) tiene que conducir a x_2. Esto sucede en $x_1x_4x_3x_2$, $x_4x_1x_3x_2$, $x_3x_4x_1x_2$, $x_4x_3x_1x_2$, $x_3x_1x_4x_2$ y $x_1x_3x_4x_2$. Por lo tanto, las agendas equitativas así obtenidas son $(x_1, x_4, x_3, x_2, x_5)$, $(x_4, x_1, x_3, x_2, x_5)$, $(x_3, x_4, x_1, x_2, x_5)$, $(x_4, x_3, x_1, x_2, x_5)$, $(x_3, x_1, x_4, x_2, x_5)$ y $(x_1, x_3, x_4, x_2, x_5)$.

La alternativa x_2 está en lo alto de la trayectoria no maximal $x_2x_3x_1$ (no es maximal porque x_5 no está incluida en esa trayectoria) y como la alternativa x_5 derrota a x_4, entonces x_2 es el resultado sincero del orden $x_4x_5x_2$ y $x_5x_4x_2$. Esto permite que x_2 sea elegida con un comportamiento sofisticado y sincero. Las agendas equitativas que dan lugar a x_2 resultantes de este análisis serían $(x_4, x_5, x_2, x_1, x_3)$ y $(x_5, x_4, x_2, x_1, x_3)$. Análogamente con la trayectoria $x_2x_3x_1$ se obtendrían las agendas $(x_4, x_5, x_2, x_3, x_1)$ y $(x_5, x_4, x_2, x_3, x_1)$.

Puede comprobarse que x_2 también está en lo alto de la trayectoria no maximal $x_2x_1x_5$. Esto permite que x_2 sea escogida con un resultado sofisticado. Además, x_2 es el resultado sincero del torneo $x_3x_4x_2$. Las agendas equitativas son $(x_3, x_4, x_2, x_1, x_5)$ y $(x_4, x_3, x_2, x_1, x_5)$.

La alternativa x_2 está en lo alto de la trayectoria no maximal $x_2x_5x_3$, pero no se obtiene agenda equitativa porque la única alternativa derrotada por x_2 y situada a la izquierda, x_1, no consigue derrotar a la alternativa x_4 (que es la única que derrota a x_2). Esto implica que x_2 no sería resultado sincero. Del mismo modo x_2 también está en lo alto de la trayectoria no maximal $x_2x_3x_5$, pero no se forma agenda equitativa porque x_2 no puede ser resultado sincero, debido a que x_4 gana a x_1 y a x_2.

Análisis de x_3:

La alternativa x_3 derrota a x_1 y a x_4, y está en la cima de la trayectoria $x_3x_4x_1$, por tanto pertenece a Banks.

Alternativa x_3
Trayectorias no maximales fallidas
x_3x_1 porque x_2 gana a x_1 y a x_3
x_3x_4 porque x_5 gana a x_3 y a x_4

Como x_3 sólo gana a x_1 y a x_4, hay dos posibles trayectorias de Banks no maximales: x_3x_1 y x_3x_4, pero en ninguna de las dos x_3 está en la cima: x_2 gana a x_1 y a x_3; x_5 gana a x_3 y a x_4.

Análisis de x_4:

La alternativa x_4 es preferida por una mayoría a x_2 y a x_1.

Alternativa x_4		
Trayectorias no maximales fallidas	*Trayectorias no maximales*	*Agendas equitativas resultantes*
x_4x_1 porque x_3 gana a x_4 y x_1	x_4x_2	$x_3x_5x_1x_4x_2$ $x_5x_3x_1x_4x_2$

Hay dos posibles trayectorias de Banks no maximales: x_4x_2 y x_4x_1. La primera es una trayectoria en la que x_4 está en la cima porque no hay alternativa que gane a x_4 y a x_2. Por el contrario, en la segunda trayectoria x_4 no está en la cima porque x_3 gana a x_4 y a x_1[18]. Además, x_1 gana al resultado del enfrentamiento entre x_3 y x_5. Por lo tanto las dos agendas Equitativas que dan lugar a x_4 son $(x_3, x_5, x_1, x_4, x_2)$ y $(x_5, x_3, x_1, x_4, x_2)$.

Análisis de x_5:

La alternativa x_5 derrota a x_4 y a x_3.

Alternativa x_5		
Trayectorias no maximales fallidas	*Trayectorias no maximales*	*Agendas equitativas resultantes*
x_5x_3 porque x_2 gana a x_5 y x_3	x_5x_4	No tiene

Así, se forman dos trayectorias de Banks x_5x_4 y x_5x_3. La primera no es derrotada por ninguna alternativa, pero x_2 gana a la segunda (x_2 gana a x_5 y x_3). En la primera trayectoria con x_3 a la izquierda: $x_3x_5x_4$, se podrían formar dos posibles agendas: $(x_1, x_2, x_3, x_5, x_4)$ y $(x_2, x_1, x_3, x_5, x_4)$, pero ninguna obtiene como resultado sincero x_5 porque x_3 no gana al resultado de la comparación entre x_1 y x_2.

Por lo tanto, el conjunto equitativo está formado por las alternativas x_2 y x_4.

[18] Lo mismo le sucede a x_3 con las dos posibles subtrayectorias x_3x_4 y x_3x_1. La primera es derrotada por x_5 y la segunda por x_2.

3.5.3.2. ¿Cuál es la posición de la alternativa equitativa dentro de la agenda Equitativa?

La posición de la alternativa equitativa depende de la existencia o no de un ganador de Condorcet. Si la alternativa equitativa es la primera, la segunda o la última en la agenda, es un ganador de Condorcet. Esto se debe a que si una alternativa es primera (o última) en la agenda y es resultado sincero (o sofisticado) con la enmienda estándar, entonces es el ganador de Condorcet. En este caso, el conjunto Equitativo está formado por un único elemento, el ganador de Condorcet, y todas las agendas son Equitativas.

Si no existe ganador de Condorcet, la alternativa equitativa está centrada y normalmente hacia el final de la agenda: ganará a un conjunto de alternativas y será derrotada por otro. Por ello, cuántas menos alternativas derrote la alternativa equitativa más al final de la agenda se encontrará.

3.5.3.3. Análisis del conjunto Equitativo: relación con los conjuntos de alternativas más conocidos.

Una alternativa del conjunto Equitativo se alcanza, dada una agenda equitativa, con un comportamiento sincero o sofisticado de los votantes; es decir, si se supone un coste de información positivo, **con una agenda Equitativa no es necesario informar** a los votantes de las preferencias del resto porque conseguirían el mismo resultado que votando según sus verdaderas preferencias.

Como debe ser resultado del método de la enmienda estándar con un comportamiento sofisticado pertenece al conjunto de Banks, es decir que, toda alternativa del conjunto equitativo pertenece al conjunto de Banks. Pero, es interesante analizar qué relación existe entre el conjunto *E* y el conjunto *TEQ*.

Proposición 3.10. *Dado un torneo T, una alternativa del conjunto TEQ(T) no tiene por qué pertenecer al conjunto E(T).*

Demostración:

Sea T el torneo siguiente:

$x_1 > x_5$

$x_2 > x_1, x_3, x_5$

$x_3 > x_1, x_4$

$x_4 > x_1, x_2$

$x_5 > x_3, x_4$

$B(T) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $TEQ(T) = \{x_2, x_4, x_5\}$ y $E(T) = \{x_2, x_4\}$

Así pues, x_5 pertenece al conjunto de Banks, pues está en lo alto de la trayectoria $x_5x_3x_4$, y también al conjunto $TEQ(T)$, pero no a $E(T)$. □

Como consecuencia de la Proposición 3.10, una alternativa del conjunto de Banks no tiene por qué pertenecer al conjunto *E*.

Proposición 3.11. *Una alternativa del conjunto E(T) no tiene por qué pertenecer al conjunto TEQ(T).*

Demostración:

Aprovechando el torneo *T* del ejemplo que aparece en Schwartz (1990).

$x_1 > x_2, x_3, x_4$

$x_2 > x_3, x_6, x_9$

$x_3 > x_4, x_5, x_8, x_9$

$x_4 > x_2, x_7, x_9$

$x_5 > x_1, x_2, x_4, x_6, x_8$

$x_6 > x_1, x_3, x_4, x_7, x_9,$

$x_7 > x_1, x_2, x_3, x_5, x_8, x_9$

$x_8 > x_1, x_2, x_4, x_6, x_9$

$x_9 > x_1, x_5$

La matriz de victorias es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1		1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	0		1	0	0	1	0	0	1
x_3	0	0		1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0		0	0	1	0	1
x_5	1	1	0	1		1	0	1	0
x_6	1	0	1	1	0		1	0	1
x_7	1	1	1	0	1	0		1	1
x_8	1	1	0	1	0	1	0		1
x_9	1	0	0	0	1	0	0	0	

B(T) =\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}, $TEQ(T)$=\{x_5, x_6, x_7\} y $E(T)$ =\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}

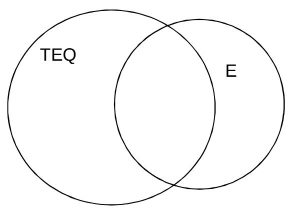
Para la agenda (x_5, x_2, x_7, x_3, x_4, x_8, x_6, x_9, x_1) la alternativa x_8 es la alternativa equitativa y no pertenece al conjunto *TEQ*[19]. □

3.5.4. Definición del nuevo conjunto TEQE.

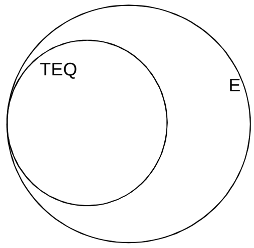
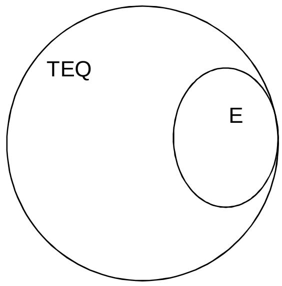
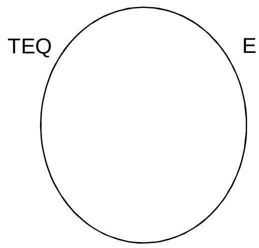
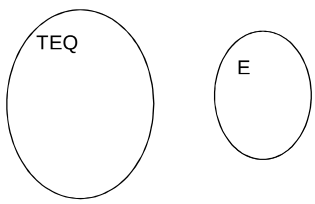
El conjunto *TEQE* se define como intersección entre el conjunto *TEQ* y el conjunto *E*. En esta subsección se demostrará que el conjunto *TEQE* es no vacío para los torneos con un número de alternativas menores o iguales a seis. Finalmente, se realiza una interpretación del conjunto.

Como se ha demostrado con los contraejemplos, el conjunto Equitativo se encuentra localizado dentro de Banks, pudiendo una alternativa del conjunto *TEQ* no pertenecer al conjunto *E* y una alternativa del conjunto *E* no pertenecer al conjunto *TEQ*. Por ello, dentro del conjunto de Banks se encuentran los dos conjuntos objeto de análisis: *TEQ* y *E*. A priori existen cinco posibles relaciones entre *TEQ* y *E*:

Tabla 3.5. *Posibles relaciones entre TEQ y E.*

Caso 1. $TEQ\text{-}E \neq \phi$ $E\text{-}TEQ \neq \phi$ $TEQE \neq \phi$	

[19] Para la alternativa x_2 con la agenda $x_5x_8x_7x_4x_1x_9x_2x_6x_3$, la alternativa x_3 en la agenda $x_1x_2x_6x_7x_5x_3x_8x_4x_9$, y la alternativa x_4 en la agenda $x_3x_8x_6x_5x_1x_9x_4x_7x_2$ sucede lo mismo.

Caso 2. *TEQ* es subconjunto propio de *E* $TEQ\text{-}E=\phi$ $E\text{-}TEQ\neq\phi$	
Caso 3. *E* es subconjunto propio de *TEQ*	
Caso 4. *E=TEQ*	
Caso 5 La intersección *TEQ* y *E* está vacía.	

Estos casos pueden agruparse en dos categorías:

Categoría 1. Dado un torneo T cualquiera, la intersección entre *TEQ*(T) y *E*(T) es no vacía, casos del 1 al 4. Esta es nuestra conjetura.

Categoría 2. Existe algún torneo T tal que la intersección entre *TEQ*(T) y *E*(T) es vacía, caso 5.

Si se demostrara que todos los casos posibles corresponden a la primera categoría, se **podría definir una correspondencia de votación que a cada torneo *T* le asignase el conjunto intersección entre *TEQ*(*T*) y *E*(*T*), que se denominaría *TEQE*(*T*)**. Las alternativas de *TEQE* serían alcanzables, mediante el método de la enmienda estándar, independientemente del comportamiento de los votantes (sincero, sofisticado o cooperativo). Que existiera algún caso en la segunda categoría implicaría que el conjunto *TEQE* es vacío en algunas ocasiones, lo que impediría usarlo para definir una correspondencia de votación (**no se ha encontrado ningún ejemplo de la segunda categoría**).

3.5.5. Resultados del análisis de los torneos no isomórficos

Dado un número de alternativas, los torneos isomórficos son aquellos que tienen similar estructura y obtienen los mismos conjuntos de alternativas finales. Es decir, son equivalentes. Por lo tanto, analizando los torneos no isomórficos puede extraerse información de todos los torneos diferentes para un número de alternativas.

El número de torneos no isomórficos crece exponencialmente con el número de alternativas. Véase Moon (1968). Este análisis se realizará sobre los torneos no isomórficos hasta seis alternativas, aunque se ha realizado un programa de simulación hasta diez alternativas del que no se tienen todos los resultados debido al crecimiento exponencial del número de torneos como muestra la tabla 3.6:

Tabla 3.6. *Número de torneos no isomórficos con y sin ganador de Condorcet.*

Alternativas	*Torneos no isomórficos*	*Torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet*
3	2	1
4	4	2
5	12	8
6	56	44
7	456	400
8	6880	6424
9	191536	184656
10	9733056	9541520

Dentro de los torneos no isomórficos, aquellos que tengan una alternativa ganadora de Condorcet pueden separarse del análisis porque dicha alternativa será el contenido de todos los conjuntos relevantes en este análisis: *Banks*, *TEQ*, *E* y *TEQE*.

Se consideran **todos** los torneos no isomórficos con 3, 4 y 5 alternativas para ilustrar el problema y algunos ejemplos interesantes de los torneos con más alternativas. Para simplificar la notación, se entenderá que las alternativas que se sitúan arriba ganan a todas las que aparecen más abajo, a menos que exista una flecha en contra.

El número que aparece en cada caso es el número de alternativas a las que derrota la alternativa situada en la primera columna (denominado puntuación de *Copeland*). Las alternativas están ordenadas para que aquellas situadas arriba reciban una mayor o igual puntuación que las alternativas situadas más abajo.

Tabla 3.7. *Torneos no isomórficos con tres alternativas:*

	Torneo 1	*Torneo 2*
x_1	2	1
x_2	1	1
x_3	0	1
Banks	x_1	$x_1x_2x_3$
TEQ	x_1	$x_1x_2x_3$
E	x_1	$x_1x_2x_3$[20]

[20] Caso con un ciclo de tres alternativas. También lo son el torneo 3 con 4 alternativas y el torneo 5 con 5 alternativas.

El torneo 1 con tres alternativas es un torneo con ganador de Condorcet (x_1), mientras que el torneo 2 está formado por un ciclo con tres alternativas $x_1>x_2>x_3>x_1$ y las tres forman el conjunto Banks, el *TEQ* y el *E*.

Tabla 3.8. *Torneos no isomórficos con 4 alternativas:*

	Torneo 1	*Torneo 2*	*Torneo 3*	*Torneo 4*
x_1	3	3	2	2
x_2	2	1	2	2
x_3	1	1	2	1
x_4	0	1	0	1
Banks	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_3}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_4}$
TEQ	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_3}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_4}$
E	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1x_2x_3}$	$\boldsymbol{x_1}$

Con cuatro alternativas el torneo 4 es el único que aporta información nueva. Es ciclo de cuatro $x_1>x_2>x_3>x_4>x_1$. El resto de torneos son similares a los torneos con 3 alternativas.

Se puede observar que hay dos torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet. En ambos el conjunto *TEQ* coincide con Banks (con tres alternativas), mientras que en el último el conjunto Equitativo está formado sólo por una alternativa.

A continuación se describen todos los torneos no isomórficos con cinco alternativas:

Tabla 3.9. *Torneos no isomórficos con cinco alternativas con ganador de Condorcet*

	T1	*T2*	*T3*	*T4*
x_1	4	4	4	4
x_2	3	3	2	2
x_3	2	1	2	2
x_4	1	1	2	1
x_5	0	1	0	1
Banks	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$
TEQ	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$
E	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_1}$

Tabla 3.10. *Torneos no isomórficos con cinco alternativas sin ganador de Condorcet (se eliminan las x de los conjuntos de Banks, TEQ y E para ahorrar espacio):*

	T5	*T6*	*T7*	*T8*	*T9*	*T10*	*T11*	*T12*
x_1	3	3	3	3	3	3	3	2
x_2	3	3	3	3	2	2	2	2
x_3	3	2	2	2	2	2	2	2
x_4	1	2	1	1	2	2	2	2
x_5	0	0	1	1	1	1	1	2
Banks	**123**	**124**	**123**	**125**	**12345**	**1234**	**123**	**12345**
TEQ	**123**	**124**	**123**	**125**	**12345**	**124**	**123**	**12345**
E	**123**	**1**	**1**	**1**	**1**	**12**	**12**	**12345**

Con cinco alternativas hay doce torneos no isomórficos, de los cuales ocho no tienen ganador de Condorcet. El conjunto *TEQ* tiene menos alternativas que el conjunto Banks únicamente en el *torneo 10*, mientras que el conjunto Equitativo consigue reducir el conjunto Banks en seis torneos.

El número de torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet que corresponden a cada uno de los casos ilustrados en la tabla 3.5, aparece en la siguiente tabla, para un número de alternativas desde n = 3 hasta n = 6 (no se ha encontrado ningún ejemplo del caso 5, ni siquiera con más de diez alternativas):

Tabla 3.11. *Torneos no isomórficos correspondientes a los casos de la tabla 3.5*

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*	*Caso 4*	*Torneos sin Condorcet*
n=3	0	0	0	1	1
n=4	0	0	1	1	2
n=5	0	0	6	2	8
n=6	0	2	36	6	44

Para todos los torneos hasta 5 alternativas, el conjunto Equitativo es un subconjunto del conjunto *TEQ*, pero para **6 alternativas hay dos torneos en el que *TEQ* es un subconjunto propio de *E* (caso 2)**:

Ejemplo 3.5. *Torneo en el que el conjunto TEQ es subconjunto propio de E.*

Sea el torneo:

$x_1 > x_4$

$x_2 > x_1, x_3$

$x_3 > x_1 x_4 x_5$

$x_4 > x_2 x_5 x_6$

$x_5 > x_1 x_2 x_6$

$x_6 > x_1 x_2 x_3$

El conjunto de Banks es x_3, x_4, x_5, x_6 (y coincide con el conjunto Equitativo) y el conjunto *TEQ* está formado por x_3, x_4, x_6. La alternativa x_5 no forma parte del *TEQ* pero sí del conjunto *E*. La agenda (x_3, x_4, x_2, x_5, x_6, x_1) es una agenda equitativa que obtiene como resultado a x_5.

3.5.5.1. Grado de refinamiento del conjunto E.

Si se toma como referencia el conjunto de Banks, en general, el conjunto *E* es más afinado que el conjunto *TEQ* en los torneos no isomórficos hasta seis alternativas.

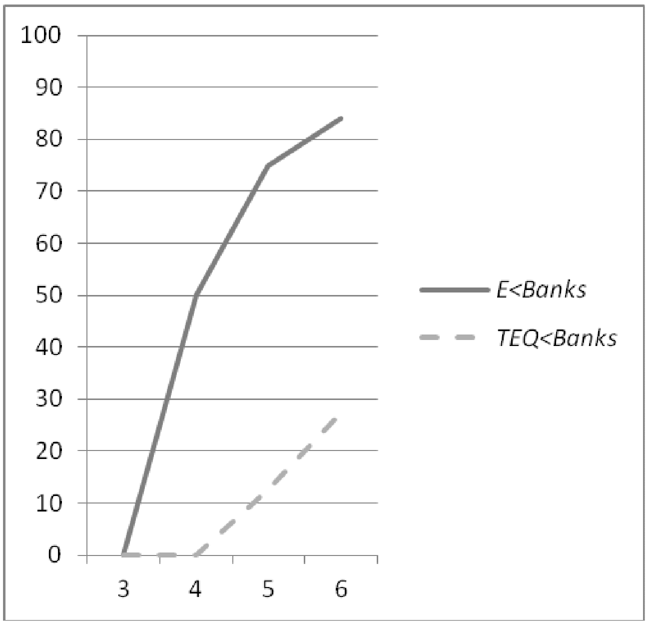
En la siguiente tabla se comparan los torneos no isomórficos en los que los conjuntos *TEQ* y *E* son, ambos, un subconjunto propio del conjunto de Banks (acompañado de los porcentajes sobre los torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet):

Tabla 3.12. *Torneos no isomórficos que relacionan TEQ y E con Banks.*

Alternativas	*TEQ<Banks*	*%*	*E<Banks*	*%*
3	0	0,00	0	0,00
4	0	0,00	1	50,00
5	1	12,50	6	75,00
6	12	27,27	37	84,09

La tendencia es ascendente en los dos conjuntos *TEQ* y *E*, porque según se incrementa el número de alternativas los conjuntos *TEQ* y *E* afinan más. Además el número de torneos no isomórficos en los que el conjunto *E* reduce el conjunto de Banks es un porcentaje mucho más elevado que el conjunto *TEQ*. Puede observarse gráficamente:

Figura 3.1. *Relación entre los conjuntos TEQ, E y Banks.*



Si se toma como referencia el conjunto *TEQ*, entonces el conjunto *E* tiene un número de alternativas más reducido que el conjunto *TEQ* en la mayoría de los torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet:

Tabla 3.13. *Torneos no isomórficos en los que el conjunto E afina más que TEQ*

Alternativas	*E<TEQ*	*%*
3	0	0,00
4	1	50,00
5	6	75,00
6	36	81,82

Esto implica, que el conjunto ***TEQ* refina relativamente poco el conjunto de Banks, en comparación con el conjunto *E***.

3.5.5.2. Grado de refinamiento del conjunto TEQE.

Una pregunta interesante es cuál es el grado de refinamiento del conjunto *TEQE* respecto del Banks y del *TEQ*. El conjunto *TEQE* es el conjunto intersección entre *TEQ* y *E*, por lo que afina más que estos conjuntos:

Tabla 3.14. *Torneos no isomórficos que relacionan los conjuntos TEQE, TEQ y E con Banks.*

Alternativas	*TEQE<Banks*	*%*	*TEQ<Banks*	*%*	*E<Banks*	*%*
3	0	0,00	0	0,00	0	0,00
4	1	50,00	0	0,00	1	50,00
5	6	75,00	1	12,50	6	75,00
6	38	86,36	12	27,27	37	84,09

Además, existen ejemplos en los que *E* (y por lo tanto *TEQE*) está formado por una alternativa (cuando Banks tiene 5), es decir, el grado de refinamiento sobre el conjunto Banks es muy alto.

Ejemplo 3.6. *Torneo en el que el grado de refinamiento del conjunto TEQE es muy alto.*

Sea el torneo:

$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$x_1>x_2,x_3$

$x_2>x_1,x_3,x_5$

$x_3>x_4$

$x_4>x_1,x_2,x_5,x_6$

$x_5>x_1,x_3,x_6$

$x_6>x_1,x_2,x_3$

$B(T)=\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$TEQ(T)=\{x_3, x_4, x_6\}$

$E(T)=\{x_4\}=TEQE(T)$

Cuando no hay ganador de Condorcet, el conjunto *E* (y por lo tanto *TEQE*) puede estar formado por una única alternativa, mientras que ***TEQ* tiene como mínimo tiene tres**.

El conjunto *TEQE* es un conjunto intersección entre *TEQ* y *E*, pero podría preguntarse cuántos torneos no isomórficos tienen un conjunto *TEQE* más reducido que el conjunto *TEQ* o que el conjunto *E*. La respuesta es:

Tabla 3.15. *Torneos no isomórficos que relacionan TEQE con TEQ y E.*

Alternativas	*TEQE<TEQ*	*%*	*TEQE<E*	*%*
4	1	50,00	0	0,00
5	6	75,00	0	0,00
6	36	81,82	2	4,55

Puede comprobarse que el conjunto *TEQE* reduce un número mayor de torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet que el conjunto *TEQ*, en comparación con el conjunto *E*.

Sin embargo, el conjunto *TEQE* puede ser más reducido que el conjunto *TEQ* y el *E*, como se muestra en el ejemplo siguiente, con 8 alternativas, que corresponde al **caso 1**.

Ejemplo 3.7. *Torneo en el que el conjunto TEQE es diferente a TEQ y a E.*
Dada la matriz de victorias:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1		0	0	0	0	0	0	1
x_2	1		0	0	0	0	0	1
x_3	1	1		1	1	0	0	0
x_4	1	1	0		1	0	1	0
x_5	1	1	0	0		1	0	0
x_6	1	1	1	1	0		0	0
x_7	1	1	1	0	1	1		0
x_8	0	0	1	1	1	1	1	

El conjunto de Banks es $B(T)$ = $\{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\}$, con 6 alternativas, $TEQ(T)=\{x_2, x_4, x_6, x_7, x_8\}$, con 5, y $E(T)=\{x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\}$, también con 5, pero el conjunto intersección sólo tiene 4: $TEQE(T)=\{x_4, x_6, x_7, x_8\}$.

La agenda ($x_6, x_7, x_8, x_1, x_3, x_4, x_5, x_2$) es equitativa y el resultado es la alternativa x_3. No se realizan los cálculos de Banks y *TEQ* por ser tediosos. En este ejemplo, las alternativas que forman el conjunto *TEQ* son diferentes a las que forma el conjunto *E*, aunque tienen el mismo número de alternativas, lo que implica que ***TEQE* es más reducido que *TEQ* y que *E***.

También es posible realizar un análisis del **número medio de alternativas** que tiene cada conjunto si no hay ganador de Condorcet:

Tabla 3.16. *Número medio de alternativas del los conjuntos Banks, TEQ, E, TEQE y Copeland.*

Alternativas	*Banks*	*TEQ*	*E*	*TEQE*	*Copeland*
4	3,00	3,00	2,00	2,00	2,50
5	3,63	3,50	2,00	2,00	2,13
6	3,95	3,66	2,23	2,18	1,91

En la última columna aparece el número medio de alternativas de Copeland porque es uno de los conjuntos de alternativas más reducidos, aunque es conocido que con 13 alternativas puede no haber intersección entre Banks y Copeland (véase Hudry, 1999). El conjunto *TEQE* es el más reducido de todos, pero "sin llegar al nivel" de Copeland.

Otro análisis interesante es conocer el **número máximo y mínimo de alternativas** que tiene cada conjunto. Puede observarse que el número máximo y mínimo de alternativas de Banks y *TEQ* es el mismo. Lo mismo sucede con *E* y *TEQE*.

Tabla 3.17. *Número máximo y mínimo de alternativas que tienen los conjuntos Banks, TEQ, E y TEQE.*

	Banks		***TEQ***		***E***		***TEQE***	
Alternativas	*Max*	*min*	*Max*	*min*	*Max*	*min*	*Max*	*min*
4	3	3	3	3	3	1	3	1
5	5	3	5	3	5	1	5	1
6	6	3	6	3	5	1	5	1

La diferencia fundamental es que el número de alternativas del conjunto *E* (o del conjunto *TEQE*) es siempre menor que el número de alternativas del conjunto Banks (e incluso del *TEQ*).

También es útil conocer el **número de los torneos no isomórficos sin ganador de Condorcet que tiene cada conjunto para los valores máximos y mínimos de alternativas**.

Tabla 3.18. *Número de torneos no isomórficos con el número máximo y mínimo de alternativas que tienen los conjuntos Banks, TEQ, E y TEQE.*

		Banks		*TEQ*		*E*		*TEQE*	
Alternativas	*Torneos sin Condorcet*	*Max*	*Min*	*Max*	*min*	*Max*	*min*	*Max*	*min*
4	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	8	2	5	2	6	1	4	1	4
6	44	3	19	3	31	3	13	3	13

La tabla 3.18 debe completarse con la 3.17. En los torneos no isomórficos de 6 alternativas hay 3 torneos (de los 44 torneos no isomórficos totales sin ganador de Condorcet) que tienen un **conjunto de Banks** con el número de alternativas máximo (6 alternativas) y 19 con el número mínimo (3 alternativas).

Llama la atención que 31 de los 44 torneos no isomórficos tengan un conjunto ***TEQ*** con el menor número de alternativas, mientras que ***E* y *TEQE*** tienen sólo 13 torneos, pero el número mínimo de alternativas del conjunto *TEQ* (cuando no existe ganador de Condorcet) es 3, mientras que el conjunto *E* o *TEQE* tienen una alternativa como mínimo.

3.5.6. Interpretación del conjunto TEQE.

El conjunto *TEQE* es el conjunto intersección de *TEQ* y *E*. La interpretación de este refinamiento del *TEQ* es relevante, tanto en la teoría como en la práctica:

- En teoría consigue reducir el conjunto de alternativas *TEQ*.

- En la práctica, si *x* es una alternativa dentro del conjunto *TEQE* entonces existe una agenda que obtiene *x* para todos los comportamientos: sincero, sofisticado y "cooperativo[21]" de los votantes:

  1. Con voto sincero: sin necesitar información de las preferencias del resto de votantes. Sin voto estratégico. Con información de sus preferencias únicamente.
  2. Con voto sofisticado: con información de las preferencias de todos los votantes y votando estratégicamente.
  3. Con voto cooperativo, en el sentido de Schwartz (1990).

Todos ellos coinciden. Por ello, podría decirse que la **agenda *TEQE*quitativa** es una agenda deseable. Si se conocieran dichas agendas, no sería necesario asumir costes de información para realizar un cálculo de voto sofisticado ni los costes de alcanzar un acuerdo cooperativo, pues las agendas que conducen a las alternativas del conjunto *TEQE* se pueden alcanzar con un comportamiento sincero de los votantes, teóricamente.

En conclusión, esta sección ha analizado nuevas cuestiones relacionadas con la formación de la agenda Equitativa, las características de las alternativas equitativas y el conjunto Equitativo con el objetivo de refinar el conjunto *TEQ* mediante el conjunto *TEQE*.

[21] Las comillas se deben a que el resultado del comportamiento cooperativo es independiente de la agenda.

Una alternativa dentro del *TEQE* es resultado de una agenda con un comportamiento sincero y sofisticado de los votantes, pero también es resultado de un voto “cooperativo”. Además, el conjunto *TEQE* es más reducido que los conjuntos alcanzados en el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero (Top-Cycle), con un comportamiento sofisticado (Banks) de los votantes o con un comportamiento cooperativo (*TEQ*).

Todo ello tiene una estrecha relación con la manipulación de los métodos parlamentarios porque el conjunto *TEQE* es un conjunto reducido. Por ello, puede definirse agenda “deseable” como aquella que obtiene una alternativa del *TEQE*.

Se ha iniciado el análisis de la posible existencia del conjunto no vacío *TEQE*. En todos los torneos no isomórficos analizados (hasta seis alternativas) se observa que la conjetura se cumple: **el conjunto *TEQE* no está vacío**. Sería necesario realizar una demostración formal de la existencia del conjunto *TEQE* para cualquier torneo.

3.6. Conclusiones.

En este *Capítulo* se han presentado algunas aportaciones a la literatura desde un punto de vista teórico:

1. Se ha realizado una nueva equivalencia entre dos métodos parlamentarios: el método de la enmienda compatible con un comportamiento sofisticado de los votantes y el método de la enmienda sustituta binaria con un comportamiento sincero. Esto permite evitar dobles análisis, pues ambos métodos cumplen las mismas propiedades y conducen al mismo conjunto de alternativas finales.

2. Se ha definido un nuevo comportamiento de los votantes aplicado al método sucesivo, el comportamiento pesimista que complementa la visión positiva tratada en la literatura.

3. Se han definido nuevas propiedades de Participación, llamadas en “en cualquier comparación”, y se ha evaluado su cumplimiento en los métodos parlamentarios. También se han analizado diversas propiedades relacionadas con la monotonía.

Los métodos parlamentarios analizados con un comportamiento sofisticado de los votantes cumplen la propiedad de **Condorcet**, mientras que si el comportamiento es sincero, sólo el método de la enmienda estándar y de la enmienda sustituta, escogen el ganador de Condorcet, siempre que exista.

Con un comportamiento **sincero de los votantes la propiedad de Pareto no se cumple por ningún método parlamentario**. Sorprende que aparezcan situaciones en un parlamento en las que todos los votantes obtengan un resultado menos deseable votando que no votando. Además, el método sucesivo y el método de la enmienda compatible pueden elegir una alternativa Pareto dominada independientemente de la hipótesis de comportamiento individual (sincero optimista y pesimista, y sofisticado).

En general, los métodos parlamentarios no cumplen las propiedades de Participación (fuertes y débiles) independientemente del comportamiento de los votantes con dos excepciones: el método sucesivo sincero cumple la propiedad de Participación Positiva en su versión optimista y la propiedad de Participación Negativa en su versión pesimista.

Los métodos parlamentarios cumplen las propiedades de monotonía, perdedor de Condorcet y Condorcet (si el comportamiento de los votantes es sofisticado).

4. Se ha deducido el modo de crear una agenda Equitativa. Se ha relacionado el conjunto de alternativas finales obtenidos por el conjunto Equitativo con el resto de conjuntos.

5. Se ha refinado el conjunto de resultados *TEQ* (alcanzado por el método de la enmienda con un comportamiento cooperativo) obteniendo un conjunto *TEQE*, que es el conjunto intersección entre *TEQ* y *E*. Este conjunto puede alcanzarse independientemente del comportamiento (sincero, sofisticado y cooperativo).

6. Se han analizado los torneos no isomórficos hasta seis alternativas comprobando que:

   a) **Una alternativa del conjunto *E* y otra del conjunto *TEQ* pueden no pertenecer al *TEQE*;**

   b) **El conjunto *E* es, en general, más reducido que el conjunto *TEQ* en relación a Banks;**

   c) **El conjunto *TEQE* es más parecido al conjunto *E* que al *TEQ*.**

Hasta este *Capítulo* se han analizado los métodos de votación parlamentarios que se utilizan en la aprobación de un proyecto de ley. En el *Capítulo* 4 se revisará un método de votación para la elección de miembros de un comité en el Congreso de los Diputados.

CAPÍTULO 4. ELECCIÓN DE MIEMBROS PARA FORMAR SUBCOMITÉS.

4.1. Introducción.

En el Parlamento se aplican métodos de votación en dos ámbitos diferentes: para tomar decisiones sobre un proyecto de ley y sus enmiendas; y para elegir un grupo de miembros de un grupo rector de la Cámara. En este capítulo se analiza el segundo ámbito.

Al principio de cada Legislatura en España, aparece una situación de votación parlamentaria muy relevante, por medio de la cual los miembros del Congreso eligen un órgano representativo: la Mesa del Congreso.

La Mesa del Congreso es un órgano rector que tiene (según los artículos 30 y 31 del Reglamento del Congreso de los Diputados) funciones de representación, organiza el trabajo y decide la actuación de la Cámara. La Mesa está formada por un Presidente, cuatro Vicepresidentes y cuatro Secretarios. Según el artículo 37.1 de dicho Reglamento:

> *"En la elección de Presidente, cada Diputado escribirá sólo un nombre en la papeleta. Resultará elegido el que obtenga el voto de la mayoría absoluta de los miembros de la Cámara. Si ninguno obtuviera en primera votación dicha mayoría, se repetirá la elección entre los que hayan alcanzado las dos mayores votaciones y resultará elegido el que obtenga más votos".*

Esta votación no es objeto de estudio en la tesis.

En el artículo 37.2 se describe el modo de votar para elegir a los cuatro Vicepresidentes y a los cuatro Secretarios:

> ***“Los cuatro Vicepresidentes se elegirán simultáneamente. Cada Diputado escribirá sólo un nombre en la papeleta. Resultarán elegidos, por orden sucesivo, los cuatro que obtengan mayor número de votos. En la misma forma serán elegidos los cuatro Secretarios”.***

El proceso de elección de Vicepresidentes y Secretarios puede dividirse en tres etapas: en la primera los grupos parlamentarios presentan sus candidatos. En la segunda etapa, cada Diputado es llamado por lista y deposita un voto secreto, es decir, la votación es nominal y secreta. Finalmente son elegidos los cuatro candidatos que más votos reciban.

El análisis que se realiza a continuación supone que los **puestos son intercambiables**, es decir que no es relevante el orden sino el número de puestos conseguidos. Esto se cumple en la elección de Secretarios, pero en la elección de Vicepresidentes pudiera ser relevante tener en cuenta el orden (sobre todo por las funciones del Primer Vicepresidente en sustituir al Presidente).

El capítulo se organiza del siguiente modo: en primer lugar se tratan los conceptos básicos; en segundo lugar se parte del estudio del método de votación utilizado en la formación de la Mesa del Congreso de los Diputados español (escogen cuatro Secretarios con 350 votantes) y se plantea una situación más general (elección de q miembros con e votantes) realizando una modelización simplificada, basada en algunas hipótesis razonables, una de las cuales se refiere al modo de actuar en caso de empate; en tercer lugar, se analizan las consecuencias de un modo de desempate alternativo, más cercano a la realidad. Finalmente, se realiza un análisis empírico en las votaciones de la Mesa del Congreso, en la Mesa del Senado y en los Parlamentos Autonómicos, para comprobar si se acercan al análisis teórico realizado.

4.2. Conceptos básicos.

Existen dos conceptos nuevos que es necesario definir: el Equilibrio de Nash y la Fórmula o procedimiento de reparto d´Hondt.

4.2.1. Equilibrio de Nash.

Es posible plantear la votación de los Secretarios de la Mesa del Congreso como un juego estático en el que los jugadores son los grupos parlamentarios (con un número determinado de Diputados), después de haber realizado las alianzas de partidos individuales con determinados acuerdos. Para cada jugador es necesario definir un conjunto de acciones o estrategias (modo de repartir los votos de sus Diputados entre los distintos candidatos) posibles, que son las decisiones a tomar en el momento de jugar. Al considerar una estrategia para cada jugador, se da lugar a un perfil de estrategias. Todo ello conduce al resultado de juego con unos pagos para cada jugador según la utilidad que atribuye a dicho resultado, utilidad que dependerá del número de votos obtenidos y de puestos conseguidos.

Un análisis de equilibrio bien conocido en Teoría de Juegos es el Equilibrio de Nash, que se refiere a todo perfil de estrategias que es óptimo para cada uno de los jugadores, dadas las estrategias del resto. De este modo, ningún jugador desearía modificar, unilateralmente, la decisión tomada.

Formalmente, en Pérez *et al.* (2004) se define que "en el juego $G=\{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, donde S_i es el conjunto de estrategias puras (acciones) del jugador i, y u_i es la función de pagos de dicho jugador, el perfil de estrategias puras $(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_i,\ldots,s^*_n)$ es un Equilibrio de Nash si para cada jugador i, $u_i(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_i,\ldots,s^*_n) \geq u_i(s^*_1, s^*_2, \ldots, s_i,\ldots,s^*_n)$ para todo s_i de S_i. Es decir, para cada jugador i, s^*_i es una solución del problema $max\ u_i(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_i,\ldots,s^*_n)$ donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i. O dicho de otro modo, para el jugador i, s^*_i es una respuesta óptima a $s^*_{-i}= (s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_{i-1}, s^*_{i+1},\ldots,s^*_n)$".

Un ejemplo clásico en Teoría de Juegos es el Dilema del Prisionero:

Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en *habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel), que si ambos confiesan, será condenados por el principal pero se les rebajará un poco la pena por confesar (4 años), y finalmente, que si sólo uno confiesa, él se librará de las penas y al otro "se le caerá el pelo" (5 años).*

La representación en forma estratégica es la siguiente, siendo los pagos la diferencia entre 5 y el número de años de cárcel de cada preso:

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Para calcular el Equilibrio de Nash, cada preso se plantea qué hacer suponiendo una estrategia del otro preso. En concreto, si el preso 1 supone que el preso 2 calla entonces ¿qué prefiere el preso 1? Si calla tendría un pago de 4 (1 año de cárcel), mientras que si confiesa tendría un pago de 5 (saldría libre). Si el preso 2 confiesa, entonces el preso 1 tendría un pago de 0 si calla o de 1 si confiesa. El cálculo con el preso 2 es análogo.

De este modo, la estrategia preferida por ambos presos es confesar y ninguno tiene incentivos a desviarse de dicha estrategia. Es decir, la estrategia (confesar, confesar) es un **Equilibrio de Nash** (tendrán que pasar 4 años en la cárcel, a pesar de que si se hubieran puesto de acuerdo en callar podrían haberse quedado sólo 1).

Se podría plantear un ejemplo del método de elección de los miembros de la Mesa para calcular el Equilibrio de Nash, aunque más adelante se definen las hipótesis sobre las reglas del juego y sobre las preferencias. Se trata de elegir 4 Secretarios con 2 grupos parlamentarios o jugadores, *GS* (grupo liderado por el Partido Socialista) y *GP* (grupo liderado por el Partido Popular), con 193 y 146 votos respectivamente, que es una simplificación de la votación de Secretarios del año 2008, donde no se toman en consideración los votos en blanco o nulos que se emitieron. El número total de Diputados es 349. Serán escogidos los cuatro candidatos con un mayor número de votos.

Los votos obtenidos, y los puestos asignados, fueron:

Ejemplo 4.1. *Elección de Secretarios de 2008.*

S. Primero	Barrero López, Jaime Javier (*GS*)	109
S. Segundo	Beloki Guerra, José Ramón (*GV* (*EAJ-PNV*))	84
S. Tercero	Gil Lázaro, Ignacio (*GP*)	77
S. Cuarto	Villalobos Talero, Celia (*GP*)	69
Votos Blanco +nulos		10
Total votos emitidos		349

Supongamos que las acciones de los jugadores son los repartos realizados por los grupos, y los pagos son el número de Secretarios obtenido. El *GS* repartió sus 193 votos en 109 y 84, mientras que el *GP* repartió los 146 votos en 77, 69. Estas acciones conducen al resultado siguiente: de los cuatro Secretarios 2 son para el *GP* y 2 para el *GS*.

Este resultado es un Equilibrio de Nash porque ningún grupo tiene incentivos para modificar el reparto de votos realizado (debido a que, dada la estrategia de un grupo el otro no puede conseguir un puesto adicional).

Si se supone que *GS* mantiene su reparto 109, 84 y el reparto del *GP* hubiera sido 83, 64 entonces, no habría sido Equilibrio de Nash, porque el *GS* podría haber conseguido 3 puestos repartiendo sus 193 votos en 65, 64, 64. Este tipo de equilibrio permite realizar cálculos con anterioridad para conocer el número de puestos a los que puede aspirar cada grupo en función del número de votos que tiene, el número de grupos y el número total de Diputados en la Cámara.

Este resultado alcanzado por el Equilibrio de Nash se relacionará con el reparto de la regla d´Hondt, que se define en la siguiente sección.

4.2.2. Reparto d´Hondt y otras reglas de proporcionalidad.

Existen dos categorías de fórmulas electorales: las fórmulas mayoritarias y las fórmulas distributivas o proporcionales. Las primeras asignan al candidato con el mayor número de votos el escaño o escaños a proveer. En cambio, las reglas distributivas o proporcionales responden al criterio de que la provisión de escaños debe asignase en función de la cantidad de votos conseguidos por cada candidato, y de manera proporcional, en lugar de atribuirlos directamente al que obtiene un mayor número de sufragios[1].

Existen muchas fórmulas distributivas: dos de las más conocidas son la fórmula del resto mayor (o regla de Hamilton) y la fórmula de la media mayor. La regla de Hamilton parte del cálculo de la cuota, esto es, el número de votos totales divididos entre el número de puestos a cubrir. Y, después, distribuye los escaños según la división de votos de cada grupo por la cuota y si hay algún puesto sin cubrir se le otorga a aquellos grupos con los restos mayores.

La regla de Jefferson, también llamada d´Hondt por el profesor belga que la propuso, es una de las variantes de la segunda fórmula. El criterio en el que se basa la segunda fórmula es que el coste medio en votos a pagar por conseguir un escaño sea sensiblemente el mismo para cada grupo. Para ello, cada escaño se asigna sucesivamente al grupo que presenta una media más elevada de votos por escaño.

Formalizando, se denomina situación al par (A, w) donde, A es un k-vector de enteros estrictamente positivos (m_1, m_2, …, m_k) donde m_i es la contribución del agente i, es decir, el número de votos obtenidos por un partido i o la población del estado i, y w es el número (entero) de puestos o escaños a distribuir entre los agentes (partidos o estados). Se supone que $0 < w \leq \sum_{i=1}^{k} m_i$. La regla de asignación genera, para cada situación (A, w), un conjunto de k-vectores denominados vectores de asignación, cada uno formado por el número de puestos asignados a cada agente.

Por ello, es necesario calcular el número de votos (entero o fraccionario) d, llamado divisor, que da derecho a un escaño y, después, el número de puestos que le corresponde a cada grupo. El número d se define exigiendo que $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) = w$.

[1] Véase Vallès y Bosch (1997), y Balinski y Young (2001).

Dada cualquier situación (A, w), ***la regla Jefferson-d´Hondt*** *de (A, w), que conduce al conjunto de asignaciones J-dH(A, w) es:*

Caso a) Si existe el divisor d, tal que $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) = w$:

$$J - dH(A,w) = \left\{ (h_1,h_2,...,h_k) \middle| h_i = INT\left(\frac{m_i}{d}\right) \right\}$$

Caso b) Si no existe divisor, sea d' (*llamado pseudodivisor*) *el máximo número real tal que* $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{m_i}{d'}\right) > w$ *. Entonces:*

$$J - dH(A,w) = \left\{ \begin{array}{l} (h'_1,h'_2,...,h'_k) \left| \sum_{i=1}^{k} h'_i = w, \right. \\ h'_j = INT\left(\frac{m_j}{d'}\right) \; si \; \frac{m_j}{d'} > INT\left(\frac{m_j}{d'}\right) \\ INT\left(\frac{m_j}{d'}\right) - 1 \le h'_j \le INT\left(\frac{m_j}{d'}\right) \; si \; \frac{m_j}{d'} = INT\left(\frac{m_j}{d'}\right) \end{array} \right\}$$

Se denominan situaciones con divisor a las situaciones (A, w) para los que el caso a) se aplica, por lo que no hay empates y la regla J-dH(A, w) es unitaria. Para éstas situaciones el conjunto de divisores $D = \left\{ d \middle| \sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) = w \right\}$ es siempre un intervalo semiabierto (d_{inf}, d_{max}], denominado intervalo de divisores.

Ejemplo 4.2. *La regla de d´Hondt.*

a) Se considera una situación formada por cinco grupos con 42, 28, 10, 10 y 10 miembros respectivamente. Se supone que la asamblea debe elegir un comité formado por 6 puestos.

Para abreviar, la situación (A, q) sería (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (42, 28, 10, 10, 10), con q = 6. Esta es una situación con divisor. Un divisor es, por ejemplo, d=10.5, porque $h_1=INT\left(\frac{m_1}{d}\right)=INT\left(\frac{42}{10.5}\right)=4$, $h_2=INT\left(\frac{m_2}{d}\right)=INT\left(\frac{28}{10.5}\right)=2$, $h_3 = h_4 = h_5 = INT\left(\frac{m_3}{d}\right) = INT\left(\frac{10}{10.5}\right) = 0$, cumpliendo que $\sum_{i=1}^{5} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) = 6$. En este caso d_{inf}=10 y d_{max}=10.5, y la asignación con la regla d´Hondt es J-dH(A, q)={(4, 2, 0, 0, 0)}.

Hay otro modo más sencillo de calcularlo, y que se usa a menudo en la práctica: se divide el número de votos de cada grupo por 1, 2, 3, 4, etc., hasta el número total de puestos a cubrir. A continuación, los cocientes resultantes se ordenan de mayor a menor. Finalmente, se atribuyen los candidatos a los grupos con mayores cocientes.

Tabla de asignación de la regla d´Hondt con 100 votantes distribuidos en cinco grupos, con votos obtenidos o tamaños 42, 28, 10, 10, 10, y con 6 puestos a cubrir (en cursiva y negrita aparecen los cocientes que tienen asignado un puesto):

	Nº Votos =100	*Nº Votos/1*	*Nº Votos/2*	*Nº Votos/3*	*Nº Votos/4*	*Nº Votos/5*	*Nº Votos/6*	*Total q=6*
G_1	42	***42***	***21***	***14***	***10,5***	8,4	7	4
G_2	28	***28***	***14***	9,33	7	5,6	4,66	2
G_3	10	10	5	3.33	2.5	2	1,66	0
G_4	10	10	5	3.33	2.5	2	1,66	0
G_5	10	10	5	3.33	2.5	2	1,66	0

b) La misma distribución de grupos pero con 7 puestos a cubrir, es decir, (42, 28, 10, 10, 10) con *q*=7. En este caso no hay divisor *d* tal que $\sum_{i=1}^{5} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) = 7$ y *d'*=10 es el pseudodivisor (máximo número tal que $\sum_{i=1}^{5} INT\left(\frac{m_i}{d}\right) > 7$). Como $\frac{m_1}{d'} = \frac{42}{10} > INT\left(\frac{m_1}{d'}\right) = 4$, $\frac{m_2}{d'} = \frac{28}{10} > INT\left(\frac{m_2}{d'}\right) = 2$, $\frac{m_3}{d'} = \frac{m_4}{d'} = \frac{m_5}{d'} = \frac{10}{10} = INT\left(\frac{m_3}{d'}\right) = INT\left(\frac{m_4}{d'}\right) = INT\left(\frac{m_5}{d'}\right) = 1$, se tiene que *J-dH*(*A*, *q*)={(4, 2, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 1, 0), (4, 2, 0, 0, 1)}. Existe un triple empate a 10 entre los grupos 3, 4, y 5 para asignar el último puesto.

Una fórmula alternativa a la fórmula de la media mayor es la fórmula del resto mayor, que también se utiliza en distritos plurinominales. Para distribuir los escaños es necesario calcular la cuota o cociente electoral que da derecho a un escaño. Esta cuota resulta de dividir el número total de votos entre el número de puestos a cubrir.

La **regla de Hamilton** es una variante de la fórmula del resto mayor que asigna los escaños según la división del número de votos de cada grupo político entre la cuota, es decir, según los números enteros de dichos cocientes. Si, después de haber realizado este cálculo faltaran puestos por asignar, aquellos grupos con restos mayores recibirían un puesto adicional. Por lo tanto, los escaños pendientes se asignarán a los grupos políticos con la fracción más elevada de la cuota, es decir, los que tienen los restos mayores.

Por ejemplo, 100 votantes repartidos en cuatro grupos con tamaños 51, 32, 9 y 8, y para cubrir 4 puestos. La cuota es 25 (=100/4). Los cocientes de dividir los votos de cada grupo por la cuota son 2,04 (=51/25), 1,28 (=32/25), 0,36 (=9/25) y 0,32 (=8/25), respectivamente. La primera asignación sería 2, 1, 0, 0, que suman tres puestos. Como queda un puesto a cubrir se le asigna al grupo con el mayor resto: es el tercero, cuya parte fraccionaria 0,36 es la mayor, y por tanto su resto será el mayor. Por lo tanto la asignación de la regla de Hamilton final es 2, 1, 1 y 0 respectivamente.

	Nº Votos =100	*Nº Votos/cuota*	*Puestos asignados=3*	*Restos*	*Puestos= 4*
Grupo 1	51	***2,04***	***2***	0,04	2
Grupo 2	32	***1,28***	***1***	0,28	1
Grupo 3	9	0,36	0	***0,36***	1
Grupo 4	8	0,32	0	0,32	0

Este mismo ejemplo con la regla d´Hondt obtendría un resultado diferente:

	Nº Votos =100	*Nº Votos/1*	*Nº Votos/2*	*Nº Votos/3*	*Nº Votos/4*	*Puestos =4*
Grupo 1	51	***51***	***25,5***	***17***	12,75	3
Grupo 2	32	***32***	16	10,66	8	1
Grupo 3	9	9	5	3.33	2.5	0
Grupo 4	8	8	5	3.33	2.5	0

El primer grupo es el mayoritario y es favorecido con la regla d´Hondt al obtener un puesto más que la asignación de puestos con la regla Hamilton.

Las fórmulas distributivas de resto mayor (como la regla de Hamilton) son, en principio, las más favorables a una distribución de escaños que se acerque más fielmente a la distribución de votos entre candidaturas. Al contrario, las fórmulas distributivas de media mayor (como la regla d´Hondt) favorecen, en general, a los grupos mayoritarios. Sin embargo, la aplicación de fórmulas de resto mayor se realiza normalmente con barreras electorales, que impiden la participación en el reparto de escaños a grupos que no superen un determinado volumen de votos.

Una vez definido el Equilibrio de Nash y la regla Jefferson-d´Hondt, se analiza su relación en el método de votación de la Mesa del Congreso.

4.3. Estudio del método de elección de miembros de un comité: *q* puestos iguales.

Este capítulo generaliza el caso más sencillo de los cuatro Secretarios debido a que son fácilmente intercambiables y los grupos parlamentarios tienen como objetivo conseguir el mayor número de miembros sin importar el orden. La literatura a este respecto es escasa pues, aunque Cox (1991) plantea un problema similar, el contexto es diferente. Aquí se seguirá el análisis realizado en Pérez y De la Cruz (2012), pero de un modo más matemático y más general.

4.3.1. Descripción del problema.

En el caso del voto de los cuatro Secretarios dentro de la Mesa, cada miembro del Congreso vota a un candidato y los cuatro candidatos que más votos obtienen son elegidos. La intención de los grupos parlamentarios es conseguir el mayor número de puestos para poder tener la máxima influencia en sus decisiones.

Las preguntas que surgen son varias: ¿cuántos candidatos es previsible que proponga cada grupo? ¿Cómo votará previsiblemente el grupo? ¿Cómo se repartirán, previsiblemente, los grupos a los candidatos elegidos? Para responder a estas preguntas se plantea un modelo simplificado, como un juego estático, del proceso de votación real:

Se supone una Cámara con n Diputados, repartidos en k grupos parlamentarios, con tamaños n_1, n_2,…, n_k, que eligen una comisión de q puestos iguales entre sí. La suma de los tamaños de los grupos coincide con el tamaño total de la Cámara. Es decir, $n_1+ n_2+\ldots+ n_k = n$. En este juego los grupos parlamentarios son los jugadores.

El punto principal que trata de resolverse en el siguiente: si calculamos el Equilibrio de Nash del juego, ¿qué se puede decir de la distribución resultante de los q miembros elegidos del comité entre los grupos (jugadores) y en relación con el tamaño de estos grupos?

Más concretamente, ¿cuál es la distribución final, entre los grupos, de los q puestos de la comisión, en el supuesto de que dichos grupos actúen de acuerdo con un equilibrio de Nash? Se puede concretar aún más, ¿bajo qué condiciones coincidirá en equilibrio, la distribución final de los q puestos entre los grupos parlamentarios con la distribución que correspondería a dichos grupos si se repartieran los *q* puestos en función de sus tamaños y según la fórmula de asignación Jefferson-d´Hondt (*J-d´H*)?

Esto puede considerarse un ejercicio de la Teoría de la Implementación en Votaciones, un campo de investigación con abundante literatura. La pregunta sería ¿bajo qué condiciones el mecanismo de votación descrito implementa la fórmula de reparto *J-d´H*?

4.3.2. Implementación de la fórmula Jefferson-d´Hondt en la formación de una comisión parlamentaria.

Son necesarias algunas hipótesis para analizar el problema, pues permiten precisarlo y simplificarlo: se supone una asamblea con *n* miembros divididos en *k* grupos parlamentarios (formados por uno o varios partidos políticos). Se eligen *q* candidatos, un número que debe ser menor o igual al número total de miembros de la asamblea. Los candidatos son miembros de la Cámara y cada grupo parlamentario propone sus candidatos.

También son necesarias algunas hipótesis sobre las reglas de juegos y las preferencias de los grupos parlamentarios (jugadores):

1) Hipótesis sobre las reglas de juego

***H_1* (*Hipótesis 1*).** *Todos los miembros de un grupo son candidatos suyos, y todos los Diputados votan simultáneamente.*

***H_2* (*Hipótesis 2 versión fuerte: votos fraccionarios permitidos*):** *Cada votante puede fraccionar su voto entre varios candidatos.*
***H_2* (*Hipótesis 2 versión débil: votos fraccionarios no permitidos*):** *Cada votante ha de dar su voto a un solo candidato.*

***H_3* (*Hipótesis 3*).** *Son elegidos los q candidatos más votados. Los empates se resuelven de manera aleatoria uniforme.*

El primer puesto se asignará al candidato más votado. Los puestos que ya han sido asignados quedan excluidos y el proceso continúa hasta que todos los puestos han sido asignados. En caso de empate, el puesto es **aleatoriamente** asignado de manera aleatoria uniforme (cada candidato empatado tiene la misma probabilidad). Esta hipótesis se modificará más adelante.

Aunque todos los votantes son miembros de la asamblea, se supone que existe disciplina de voto completa, según la siguiente hipótesis.

***H_4* (*Hipótesis 4*).** *En cada grupo parlamentario un líder decide el modo de votar de cada miembro del grupo.*

En otras palabras, cada grupo j puede ser considerado como un equipo formado por n_j votantes. Por lo tanto, los jugadores de este juego son k grupos y las posibles acciones del grupo j son la distribución de sus n_j votos entre los n candidatos, permitiendo votos fraccionarios sólo cuando se aplique la versión fuerte de la Hipótesis 2 (***H_2***).

2) Resultados del juego

Se supone que los n miembros de la asamblea están ordenados. Entonces, cualquier acción a_j del grupo j puede ser descrita como un n-vector (a_{j1}, a_{j2},.., a_{jn}) con componentes racionales y no negativos tales que $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} = n_j$ y a_{ji} significa el número de votos que el grupo j da al Diputado (candidato) i.

El n-vector (v_1, v_2,…, v_n) tal que $v_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}$, tal que v_i es el número total de votos obtenidos por el candidato i, especifica los resultados en votos del juego. Cualquier otra información que no aparezca en los resultados, como el nombre de los votantes individuales, es irrelevante para este análisis.

Dado un resultado, es posible calcular, aplicando las hipótesis sobre las reglas de juego dos nuevos resultados. El primero es el k-vector (e_1, e_2,…, e_k) formado por el número esperado de puestos obtenidos por cada grupo. El segundo es el k-vector (r_1, r_2,…, r_k) formado por el número de puestos obtenidos por cada grupo.

Para ilustrar estos conceptos se retoma el **ejemplo 4.2**, utilizado anteriormente para explicar la regla d´Hondt:

En la situación formada por 5 grupos, con vector de tamaños (42, 28, 10, 10, 10), y con q = 6 puestos a cubrir, se supone que los 100 candidatos están ordenados, es decir, los primeros 42 pertenecen al grupo 1, los siguiente 28 al grupo 2 y, así sucesivamente:

- *Con voto fraccionario permitido supongamos las acciones siguientes:*

La acción del grupo 1: $a_1=(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,100})$ es tal que $a_{1,1}=a_{1,2}=a_{1,3}=a_{1,4}=10{,}5$ y $a_{1,h}=0$ para cualquier $h>4$. Es decir, el grupo 1 distribuye homogéneamente sus votos entre sus cuatro primeros candidatos.

La acción del grupo 2: $a_2=(a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,100})$ es tal que $a_{2,43}=a_{2,44}=14$ y $a_{2,h}=0$ para cualquier otro h. El grupo 2 reparte homogéneamente sus votos entre sus dos primeros candidatos.

La acción del grupo 3: $a_3=(a_{3,1}, a_{3,2}, \ldots, a_{3,100})$ es tal que $a_{3,71}=10$ y $a_{3,\mathrm{h}}=0$ para cualquier otro h. La acción del grupo 4: $a_4=(a_{4,1}, a_{4,2}, \ldots, a_{4,100})$ es tal que $a_{4,81}=10$ y $a_{4,\mathrm{h}}=0$ para cualquier otro h. La acción del grupo 5: $a_5=(a_{5,1}, a_{5,2}, \ldots, a_{5,100})$ es tal que $a_{5,91}=10$ y $a_{5,\mathrm{h}}=0$ para cualquier otro h. Es decir, los grupos 3, 4 y 5 otorgan todos sus votos al primero de sus respectivos candidatos.

El resultado del juego, en términos de los votos recibidos, sería un vector con 100 elementos $(v_1, v_2,\ldots, v_{100})=(10.5, 10.5, 10.5, 10.5, 0, \ldots,0, 14, 14, 0, \ldots, 0, 10, 0, \ldots, 0, 10, 0, \ldots, 0, 10, 0,\ldots, 0)$. El resultado, en términos de los puestos esperados, asigna los 6 puestos a los 6 candidatos con un número mayor de puestos, esto es, los dos primeros puestos para el grupo 2 y los 4 restantes para el grupo 1. Así, el resultado esperado es $(e_1, e_2,\ldots, e_5) = (4, 2, 0, 0, 0)$.

- *Con votos fraccionarios no permitidos:*

La única diferencia respecto el apartado anterior es la acción del grupo 1 que ya no puede dividir tan homogéneamente sus votos. Supongamos que diera 11 votos a sus dos primeros candidatos y 10 al tercero y cuarto.

El resultado del juego sería un vector con 100 elementos (v_1, v_2, …, v_{100})=(11, 11, 10, 10, 0, …,0, 14, 14, 0, …, 0, 10, 0, …, 0, 10, 0, …, 0, 10, 0, …, 0). En este caso los dos primeros puestos se asignan al grupo 2 (con 14 votos cada uno) y los 2 segundos al grupo1 (con 11 votos cada uno). Hay empate en 5 candidatos para 2 puestos: dos candidatos del grupo 1 y un candidato de cada uno de los grupos 3, 4 y 5.

Según la regla de desempate de la Hipótesis 3 (H_3), el quinto puesto debería ser asignado aleatoriamente entre el grupo 1, 3, 4 y 5 con probabilidades 2/5, 1/5, 1/5 y 1/5 respectivamente, y el sexto puesto también debería asignarse aleatoriamente después de haber excluido el candidato que ganó el quinto puesto. El resultado esperado de estas asignaciones aleatorias es *EP*(grupo 1) = 0.8, *EP*(grupo 3) = *EP*(grupo 4) = *EP*(grupo 5) = 0.4.

Finalmente, el resultado esperado según la regla de desempate neutral H_3 es (2.8, 2, 0.4, 0.4, 0.4) y el conjunto de resultados posibles es {(4, 2, 0, 0, 0), (3, 2, 1, 0, 0),(3, 2, 0, 1, 0), (2, 2, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 0, 1), (2, 2, 0, 1, 1)}

3) Hipótesis sobre las preferencias.

Un juego bien definido necesita unas hipótesis sobre las preferencias de los jugadores.

***H_5* (*Hipótesis 5*).** *Dados dos resultados O y O', y el correspondiente vector esperado de resultados (e_1, e_2,…, e_k) y (e'_1, e'_2,…, e'_k), si e_j>e'_j, entonces el grupo j prefiere estrictamente O a O'.*

En otras palabras, cada grupo prefiere estrictamente más puestos que menos, independientemente de cualquier otro elemento del resultado de voto. Entonces, el número de puestos obtenidos es más importante que la identidad de los miembros elegidos, la identidad de los votantes de los miembros elegidos, el número total de votos obtenidos, el número de puestos obtenidos por otros partidos, etc.

Dado un resultado (v_1, v_2,…, v_n) se denomina V_j al número total de votos obtenidos por los candidatos del grupo *j*, Entonces $V_j = \sum_i v_i$ dónde *i* es un miembro del partido *j*.

***H_6* (*Hipótesis 6*).** *Si el número de puestos obtenidos es el mismo, cada grupo prefiere estrictamente más votos que menos.*

Esto significa que, si dos resultados $O = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $O' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ conducen al mismo número de puestos esperados para el grupo j, y el número total de votos obtenidos en O por los candidatos del grupo j, V_j, es mayor que el de O', V'_j, entonces el grupo j prefiere estrictamente O a O'.

Esto implica que en el caso de que un grupo j pueda ayudar a otro grupo con el exceso de votos de j (no necesarios para el número de puestos ya conseguidos, pero tampoco suficientes para conseguir un puesto adicional), este grupo preferirá votar a sus propios candidatos.

4) Resultados principales.

Se considera la situación descrita con una asamblea de n miembros organizados en k grupos parlamentarias (tales que cada grupo j tiene n_j votantes) y se desea formar un comité con q candidatos, donde $q<n$. Se supone que las reglas del juego y las preferencias de los grupos satisfacen las hipótesis H_1 a H_6. Se considerarán separadamente ambas versiones de H_2.

La situación conduce, a través de la aplicación de la regla de Jefferson-d´Hondt, a los vectores de asignación. La cuestión es: ¿cuál es la relación entre los vectores de asignación que resultan de aplicar la regla d´Hondt y los resultados de aplicar las reglas de votación del proceso descrito para la Mesa del Congreso? En concreto:

- ¿Cuáles son los vectores de asignación que resultan de jugar un equilibrio de Nash?
- ¿Qué perfiles de acción del juego conducen a los vectores de asignación d´Hondt?

Se demostrará que existe una relación estrecha entre el equilibrio de Nash y las asignaciones d´Hondt.

Denominamos $h_j(v)$ a $INT\left(\frac{n_i}{v}\right)$ para cualquier número real positivo v. Esto puede ser interpretado como el máximo número de candidatos del grupo j que puede recibir al menos v votos de este grupo.

Para las situaciones con divisor, abreviamos $h_j=h_j(d)$ donde d es un divisor, es decir, tal que $\sum_{i=1}^{k} h_i = \sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{n_i}{d}\right) = q$. Sea G cualquier juego consistente con tal situación y preferencias. Los siguientes lemas son válidos para las dos versiones de H_2.

Lema 1. *Para todo grupo j, cualquier acción en que j da algunos votos (enteros o fraccionarios) a candidatos de otros grupos está estrictamente dominada en G.*

Lema 2. *Sea v cualquier número, entero o fraccionario, que satisfaga* $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{n_i}{v}\right) \leq q$.

Si cada grupo vota sólo por sus candidatos, cualquier candidato C que reciba v o más votos es elegido.

La demostración de estos lemas aparece en Pérez y De la Cruz (2012).

4.1) La versión fuerte de la hipótesis H_2 (los votos fraccionarios están permitidos).

Se prueba que, cuando los votos fraccionarios están permitidos y no hay empates, si un resultado es diferente de la asignación de la regla Jefferson-d´Hondt, entonces no es un resultado de un Equilibrio de Nash. En otras palabras, la única asignación soportada por un Equilibrio de Nash es la asignación Jefferson-d´Hondt.

Proposición 4.1. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q), donde A=(n_1,.., n_k) y cumpliendo las hipótesis H_1 a H_6 (votos fraccionarios permitidos):*

a) Si (A, q) es una situación con divisor, para cualquier equilibrio de Nash del juego G, el correspondiente resultado es la única asignación de la regla Jefferson-d´Hondt de esta situación.

b) Si la situación (A, q) no tiene divisor, para todo equilibrio de Nash del juego G:

b1) Si el grupo j no está afectado por empates, de modo que $\frac{n_j}{d'} > INT\left(\frac{n_j}{d'}\right)$, *el resultado esperado y efectivo de puestos para j es el correspondiente para este grupo en el conjunto J-dH(A, q),* $INT\left(\frac{n_j}{d'}\right)$.

b2) Si el grupo j está afectado por empates, de modo que $\frac{n_j}{d'} = INT\left(\frac{n_j}{d'}\right)$*, el número de puestos esperado para j es igual o mayor que el número mínimo de puestos correspondientes para este grupo en el conjunto J-dH(A, q),* $INT\left(\frac{n_j}{d'}\right)-1$*. En cambio, los puestos efectivos para j pueden ser menos que* $INT\left(\frac{n_j}{d'}\right)-1$*.*

Demostración:

La demostración aparece en el Anexo I.

4.2) La versión débil de la hipótesis H_2 (los votos fraccionarios no están permitidos).

Se considera la misma situación que antes y los juegos *G* consistentes con esa situación y preferencias, pero ahora no se permiten votos fraccionarios.

La siguiente proposición es una adaptación de la proposición 4.1. Si existe un divisor entero, entonces los resultados son similares. En cambio, si no existe divisor entero, la asignación d´Hondt no se implementa necesariamente en todo equilibrio de Nash. La razón está en que la imposibilidad de dar votos fraccionarios facilita la aparición de candidatos con el mismo número de votos, teniendo que resolver estos empates según H_3. Pero esta hipótesis incluye una regla de desempate que, siendo aleatoria, neutral y uniforme, no es consistente, en general, con la regla Jefferson-d´Hondt.

Proposición 4.2. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q), donde A=(n_1, …n_k) y cumpliendo las hipótesis H_1 a H_6 (votos fraccionarios no permitidos):*

a) Si existe un divisor entero d tal que* $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{n_i}{d^*}\right) = q$ *para cada equilibrio del juego G, el correspondiente resultado esperado y efectivo es la única asignación de la regla Jefferson-d´Hondt de esta situación.*

b) Si no existe divisor entero d , y denominamos d'* al máximo número entero tal que* $\sum_{i=1}^{k} INT\left(\frac{n_i}{d'^*}\right) > q$ *(llamándolo pseudodivisor entero):*

b1) Para los grupos j que satisfagan $\frac{n_j}{d'^*+1} \geq INT\left(\frac{n_j}{d'^*}\right)$*, en cada equilibrio de Nash los puestos esperados y efectivos para j son los correspondientes para estos grupos en el conjunto J-dH(A, q),* $INT\left(\frac{n_j}{d'^*}\right)$..

b2) Para los otros grupos, hay Equilibrios de Nash en los que los puestos esperados son menos que el número mínimo de puestos correspondientes para estos grupos en el conjunto J-dH(A, q).

b3) Hay situaciones (A, q) en las que, para cualquier Equilibrio de Nash del juego G, el correspondiente resultado esperado y efectivo no pertenece al conjunto J-dH(A, q).

Demostración:
La demostración aparece en el Anexo I

Se continúa con el ejemplo 4.2 para comprobar que con votos enteros, el modo más obvio de votar no es un Equilibrio de Nash ni conduce a la asignación d´Hondt.

Se supone la situación (42, 28, 10, 10, 10) con q=6. Se ha demostrado que el resultado de la regla d´Hondt es (4, 2, 0, 0, 0). En lo que sigue, denotaremos mediante $[x_1, x_2, \ldots, x_t]$ al modo de votar de un grupo consistente en dar x_i votos a su candidato i-ésimo. Se considera el perfil $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, tal que el grupo 1 vota [11, 11, 10, 10], el grupo 2 vota [14, 14], y el resto de los grupos vota [10].

Los dos primeros puestos se asignan al grupo 2 y los 2 segundos al grupo 1. Hay empate en 2 puestos para 5 candidatos distribuidos entre el grupo 1 (dos candidatos), y los grupos 3, 4 y 5 (un candidato cada uno). El resultado esperado es (2.8, 2, 0.4, 0.4, 0.4) según la regla de desempate neutral H_3, que es diferente de la asignación d´Hondt. Esto es porque $\frac{n_2}{d'^*+1} = \frac{28}{11} \geq INT\left(\frac{n_2}{d'^*}\right) = 2$, cumpliéndose la condición de la proposición 4.2, mientras que $\frac{n_1}{d'^*+1} = \frac{42}{11} < INT\left(\frac{42}{10}\right) = 4$.

Además, existe un Equilibrio de Nash para el que el número de puestos esperados por el grupo 1 es menos que 4: el perfil $P' = (a'_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que a'_1 consiste en que el grupo 1 otorga 14 votos a tres de sus candidatos, y las últimas cuatro acciones son las mismas que P. El resultado esperado con el perfil *P'* es (3, 2, 1/3, 1/3, 1/3), diferente de la asignación d´Hondt. No existe desviación unilateral posible para los diferentes grupos. Los posibles resultados finales son (3, 2, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 1, 0) y (3, 2, 0, 0, 1) y ninguno de ellos pertenece a la asignación d´Hondt (4, 2, 0, 0, 0).

4.3.3. Modificación de la hipótesis de resolución de empates.

Ceteris Paribus, la hipótesis 3 podría ser modificada para realizar los desempates según una regla determinista predeterminada y conocida por todos los votantes con anterioridad al proceso de votación:

Hipótesis 3': *Con anterioridad al proceso de votación, un orden estricto* ***OR*** *entre candidatos será fijado para resolver los empates. El primer puesto se asignará a aquel candidato con mayores votos. Los puestos asignados son excluidos y el proceso continúa con los restantes hasta que todos los puestos son asignados. En caso de empate, los puestos son asignados según el orden* ***OR****.*

Apliquemos esta nueva hipótesis a la situación del **ejemplo 4.2 modificada**, con 4 grupos de tamaños (42, 28, 10, 10), que tienen q = 6 puestos a cubrir. Si G_1 da 11 votos a sus candidatos 1º y 2º, y 10 votos a sus candidatos 3º y 4º, G_2 da 11 votos a sus candidatos 1º y 2º, y por último G_3 y G_4 dan sus 10 votos a su primer candidato, el resultado en votos sería:

$$(\underbrace{11, 11, 10, 10, 0,..., 0}_{42},\underbrace{14, 14, 0,..., 0}_{28},\underbrace{10, 0,..., 0}_{10},\underbrace{10, 0,..., 0}_{10}).$$

Aparecería entonces un empate en los puestos quinto y sexto entre cuatro candidatos, dos de G_1, y uno de cada uno de los grupos G_3 y G_4.

Si la regla de desempate fuera ***OR*** = $1\succ 2\succ 3\succ ...89\succ 90$, el resultado sería (4, 2, 0, 0). Con ***OR'*** = $90\succ 89\succ ...2\succ 1$, el resultado sería (2, 2, 1, 1). Para el orden ***OR***'' = $80\succ 79\succ ...2\succ 1\succ 90\succ 89\succ ...\ 82\succ 81$, el resultado sería (3, 2, 1, 0) y para ***OR***'''= $81\succ 82\succ ...89\succ 90\succ 1\succ 2\succ ...\ 79\succ 80$, sería (3, 2, 0, 1).

Esta modificación altera algunas de los conceptos derivados del juego. En particular, ahora ya no hay que distinguir entre resultados esperados y resultados realizados. Además, hace que las proposiciones 4.1 y 4.2 se vean afectadas, de manera que ahora hay una concordancia mayor (perfecta si se permiten votos fraccionarios) entre resultados de equilibrio y asignaciones d'Hondt.

Preparemos los nuevos enunciados. Sea (*A, q*) una situación cualquiera sin divisor entero *d** y sea *d'** su pseudodivisor entero. Llamemos *g* a un número tal que *g* = *d* si existe divisor *d*, y *g* = *d'* si no existe. Obsérvese que *d'** ≤ *g*< *d'**+1. Por último, sea $s_j = INT\left(\frac{n_j}{g}\right)$, que es el número máximo de puestos que corresponden al grupo G_j en la situación (*A, q*).

Los enunciados se muestran a continuación y la demostración aparece en Pérez y De la Cruz (2012):

Proposición 4.1'. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q) donde A= (n_1, …n_k), y se satisfacen las hipótesis H_1, H_2, H_3', H_4, H_5 y H_6 (votos fraccionarios permitidos):*

a) *Si (A, q) tiene un divisor d, para todo Equilibrio de Nash (EN) del juego G, el resultado coincide con la única asignación d´Hondt.*
b) *Si (A, q) no tiene divisor, todo EN del juego G conduce a un resultado dentro del conjunto de asignaciones d´Hondt, y toda asignación en el conjunto d´Hondt se corresponde con algún EN del juego G.*

Proposición 4.2'. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q) donde A= (n_1, …n_k), y se satisfacen las hipótesis H_1, H_2, H_3', H_4, H_5 y H_6 (votos fraccionarios no permitidos):*

a) *Si existe un divisor entero d*, para todo EN del juego G, el resultado coincide con la única asignación d´Hondt.*
b) *Si no existe divisor entero d* y d'* es el pseudodivisor entero:*

   b1) Para cualquier G_j que satisfaga $\frac{n_j}{d'^*+1} \geq INT\left(\frac{n_j}{d'^*}\right)$, *$G_j$ consigue s_j puestos en todo EN.*

   b2) Para cualquier G_j que satisfaga $\frac{n_j}{d'^*+1} < INT\left(\frac{n_j}{d'^*}\right)$:

   - *Si* $(d'^*)^2 > \frac{n_j}{r}$, *G_j consigue en todo EN al menos s_j - r puestos.*
   - *Si* $(d'^*)^2 \leq \frac{n_j}{r}$, *podría existir un EN en el que G_j consigue menos que s_j - r puestos.*

Esto implica que, si se permiten los votos fraccionarios y las preferencias satisfacen las Hipótesis H_1 a H_6 con H_3', el mecanismo de votación implementa completamente la regla Jefferson-d´Hondt en el sentido del Equilibrio de Nash.

Además, si sólo se permiten votos enteros, el mecanismo de votación alcanza una completa implementación de la regla Jefferson-d´Hondt en el sentido del Equilibrio de Nash únicamente para las situaciones con divisor entero, pero alcanza resultados no muy distantes en caso contrario.

En la siguiente sección se propone una regla de desempate alternativa que permite conjeturar un acercamiento mayor entre el Equilibrio de Nash y la asignación d´Hondt.

4.3.4. Un acercamiento a la regla de desempate en la realidad: versión fuerte y versión débil.

Las reglas de desempate descritas en las hipótesis 3 y 3' tienen un buen comportamiento matemático, pero no coinciden con la reglas que se aplican en la práctica parlamentaria. En el Reglamento del Congreso de los Diputados, artículo 37.3, se describe la siguiente regla de desempate dentro de la formación de la Mesa del Congreso:

> *"Si en alguna votación se produjere empate, se celebrarán sucesivas votaciones entre los candidatos igualados en votos hasta que el empate quede dirimido."*

Matemáticamente sería necesario analizar Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos, pero este punto quedará para futuras investigaciones.

Existen, al menos, dos posibles interpretaciones de este apartado:

1. **Versión fuerte**: en caso de empate, la votación se repite por cada puesto empatado, participando en ella sólo los grupos cuyos candidatos empatan al optar por dicho puesto.
2. **Versión débil**: en caso de empate, la votación se repite sobre todos los puestos empatados a la vez, participando en ella igualmente sólo los grupos cuyos candidatos empatan al optar por dichos puestos.

Así pues, en ambos casos se supone que los grupos que no tienen candidatos empatados se abstienen en el voto repetido, y que los puestos a repartir son únicamente aquellos que no se adjudicaron en la fase anterior.

Merece la pena señalar que la regla de desempate descrita no es completa. Por ejemplo, si suponemos una situación con n votos divididos exactamente en dos grupos, y a partes iguales, y un número impar de puestos, ninguna de las versiones (fuerte o débil) de la regla de desempate alcanza un único resultado.

Además, si se supone la versión débil existen casos (con extrema proporcionalidad) en los que tampoco se resuelve el empate. Por ejemplo, con 350 votos distribuidos en dos grupos con 280 y 70 votos (o también con 210, 140) respectivamente, y 4 candidatos, G_1 votaría [70, 70, 70, 70] y G_2 daría sus 70 votos a su candidato. De este modo habría un empate infinito (en la regla d´Hondt y al calcular el equilibrio de Nash).

Parece que la regla de desempate débil es la interpretación más cercana a la realidad del Congreso, por lo que sería necesario modificar la regla para que no existan futuros empates sin resolver en la práctica parlamentaria.

Esta característica obligaría a realizar desempates *ad-hoc*, por lo que estos casos de empates con tanta proporcionalidad no se analizarán.

Continuando con el ejemplo 4.2, analizado anteriormente, se ilustran las dos versiones de desempate real. Se resume la situación con vector de tamaños (42, 28, 10, 10, 10) y con q = 6:

- El resultado de la regla d´Hondt es (4, 2, 0, 0, 0)
- Con votos fraccionarios no permitidos:
  - Resultado del juego:
    $$(\underbrace{11, 11, 10, 10, 0,..., 0}_{42}, \underbrace{14, 14, 0,..., 0}_{28}, \underbrace{10, 0,..., 0}_{10}, \underbrace{10, 0,..., 0}_{10}, \underbrace{10, 0,..., 0}_{10}).$$
  - Los dos primeros puestos se asignan al grupo 2 y los 2 segundos al grupo1. Hay empate en 2 puestos para 5 candidatos distribuidos entre el grupo 1(dos candidatos) y los grupos 3, 4 y 5 (un candidato cada uno).
  - El resultado esperado es (2.8, 2, 0.4, 0.4, 0.4) según la regla de desempate aleatorio neutral H_3.

Partiendo del resultado del juego, el grupo 2 consigue los dos primeros puestos y el 1 los dos siguientes. Si se plantea la resolución del empate con la regla más cercana a la realidad, volverían a votar, optando a 2 puestos, los grupos con candidatos empatados: 1, 3, 4 y 5. Habría que asignar 2 puestos a 4 grupos con votos (42, 10, 10, 10). No se tendría en cuenta el grupo 2 (se supone su abstención).

Según la **versión fuerte de la regla de desempate real**, habría dos votaciones, una por cada puesto. En cada votación el grupo 1 daría sus 42 votos a sus dos candidatos y el resto de grupos 10 votos a su único candidato. En cada votación el grupo 1 ganaría, y obtendría al final los dos puestos. Por lo tanto, el resultado final sería (4, 2, 0, 0, 0).

Según la **versión débil de la regla de desempate real** se votarían todos los candidatos empatados a la vez. Se plantearía así un nuevo juego, optando a 2 puestos, para los grupos 1, 3, 4 y 5, siendo candidatos en este nuevo juego los candidatos previamente empatados. El grupo 1, con dos candidatos empatados, distribuiría sus 42 votos entre 2, asignando 21 votos a cada candidato. El resto de grupos daría todos sus votos a sus respectivos candidatos. El resultado del juego sería $(\underbrace{21,\ 21}_{42},\underbrace{10}_{10},\underbrace{10}_{10},\underbrace{10}_{10})$. Según la versión débil los dos puestos serían asignados a los candidatos del grupo 1. Por lo tanto el resultado final sería (4, 2, 0, 0, 0).

Por lo tanto, con la versión fuerte y débil de la regla de desempate real, el resultado final es (4, 2, 0, 0, 0), que coincide con el resultado de la regla d´Hondt. Sería fácil, además, aunque tedioso, demostrar que esta manera de jugar y de desempatar es un *EN*, y que ningún *EN* conduciría a un resultado final distinto.

Esto puede no ser siempre así, porque en el siguiente ejemplo se prueba que las dos versiones de la regla de desempate real pueden dar resultados diferentes. Se sobreentiende que el modo de jugar es en todo caso *EN*.

Se supone una situación con cuatro grupos y 7 puestos a cubrir. Los votos son 41, 26, 21 y 10 respectivamente. La regla d´Hondt obtiene el vector de asignación (3, 2, 2, 0).

El resultado del juego, si los votos fraccionarios no están permitidos, podría ser el siguiente:

$$(\underbrace{11, 10, 10, 10, 0,..., 0}_{41}, \underbrace{13, 13, 0,..., 0}_{26}, \underbrace{11, 10, 0,..., 0}_{21}, \underbrace{10, 0,..., 0}_{10}),$$

por lo que se asignarían 4 puestos a los grupos G_1, G_2 (obtiene 2) y G_3, y habría un empate en 3 puestos con cinco candidatos (3 del G_1, 1 del G_3 y 1 del G_4). El G_2 se abstiene en la votación que resuelve el empate.

Según la regla de desempate fuerte, el G_1 ganaría los tres puestos con sus 41 votos a sus candidatos en las 3 votaciones, frente a los 21 votos de G_3 y 11 del G_4. Por lo tanto, el resultado final sería (4, 2, 1, 0). Este modo de votar de los grupos es un *EN*, pues es evidente que ningún grupo podría conseguir más puestos desviándose de manera unilateral de su acción).

Según la regla de desempate débil, en la única votación de desempate, el G_1 dividiría sus 41 votos entre 3 candidatos [14, 14, 13], y el G_3 y el G_4 asignarían la totalidad de sus votos, 21 y 10 respectivamente, a su candidato. Por lo tanto, G_3 obtendría un puesto adicional y G_1 los otros 2. El resultado esperado sería (3, 2, 2, 0), exactamente igual que la regla d´Hondt. También en este caso, es fácil demostrar que este modo de votar de los grupos es un *EN*.

Así pues, la versión fuerte del desempate real puede no coincidir con la asignación d´Hondt.

Por ello, es posible realizar la siguiente conjetura: la regla de desempate débil implementa la fórmula Jefferson-d´Hondt en la formación de una comisión parlamentaria.

4.3.5. Análisis exploratorio.

Se han realizado dos exploraciones que permiten analizar (y en su caso apoyar, ya que no demostrar) la conjetura anterior, según la cual con la regla de desempate débil el equilibrio de Nash y la regla d´Hondt coinciden. La primera exploración se ha realizado para el caso particular de dos grupos parlamentarios, tratando de buscar las condiciones idóneas para un contraejemplo de la conjetura y, a pesar de ello, no se ha encontrado. La segunda exploración consiste en observar una situación similar al

Congreso con los siguientes supuestos: dos grupos que suman 350 votos y que se reparten desde dos a diez candidatos.

4.3.5.1. Búsqueda de un contraejemplo.

En la primera exploración se ha tratado de buscar un contraejemplo con dos grupos.; Se supone que el grupo 1 (G_1) tiene más votos que el grupo 2 (G_2). Se utiliza un ejemplo para ilustrar dicha exploración con 155 votos divididos en 103 y 52, respectivamente, con 14 puestos a repartir.

La asignación d´Hondt es (9, 5) y el intervalo de divisores es (10.3, 11.4]. Merece la pena observar que el cociente de los votos 103 entre 52 es mayor que el cociente de los puestos asignados 9 entre 5. Es decir, que el G_1 es perjudicado en la asignación d'Hondt, porque el coste del quinto y último puesto para G_2 es 10.4 (52 entre 5), mientras que el coste del noveno y último puesto para G_1 es 11.4. Si hubiera un puesto más a repartir, sería G_1 el ganador de ese puesto (esta es la situación más relevante).

Si el grupo 1 quisiera conseguir 10 puestos en lugar de 9, entonces podría intentar repartir sus votos del siguiente modo [11, 11, 11, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10], suponiendo que G_2 tratará de conseguir los 5 puestos que le otorga d´Hondt repartiéndolos en [11, 11, 10, 10, 10]. Entonces se asignarían 5 puestos (3 al G_1 y 2 al G_2) y habría un empate a 10 votos entre 7 candidatos de G_1 y 3 de G_2 para 9 puestos.

En la nueva situación (103, 52), con 9 puestos (después de haber asignado 5) a repartir, suponiendo la regla de desempate débil, G_1 repartiría sus votos en [18, 17, 17, 17, 17, 17] y G_2 en [18, 17, 17], consiguiendo 6 puestos el G_1 y 3 el G_2. Si G_1 tratara de conseguir 7 puestos tendría que repartir sus votos en [15, 15, 15, 15, 15, 14, 14] y sólo conseguiría los mismos 6.

El G_1 consigue 3 puestos en la primera votación y 6 en la votación del desempate. El G_2 consigue 2 puestos en la primera votación y 3 en la segunda. Por lo tanto, el resultado final coincide con la regla d´Hondt: (9, 5). Este modo de jugar es un *EN*, ya que ninguno de los dos grupos puede conseguir más desviándose de las acciones descritas.

En este ejemplo el G_1, con 103 votos, tiene casi el doble de votos que $G2$, con 52, y sale perjudicado porque recibe 9 puestos frente a los 5 de G_2. Además, es un ejemplo límite porque si se supusiera que G_1 tiene 104 votos y G_2 tiene los mismos 52, entonces existiría un empate en d´Hondt. La razón es que G_1 tendría exactamente el doble de votos que $G2$ y sería uno de los casos de empate infinito. Si G_1 pasa a tener 105 votos y $G2$ sigue con 52, entonces d´Hondt asigna (10, 4), por lo que G_1 deja de ser perjudicado y pasa a ser beneficiado.

Como se trata de que G_1 sea lo más perjudicado posible, es decir, que d´Hondt le asigne unos puestos pero pueda merecerse alguno más porque su relación de votos con G_2 es lo más favorable posible, no tiene sentido analizar las situaciones en las que G_1 tiene menos de 103 votos porque serán situaciones mejores en términos relativos. Tampoco tiene sentido analizar los casos en los que G_2 tiene más de 52 votos. Así pues, la situación analizada es una situación límite. Los dos lemas siguientes, cuya demostración se omite por ser obvia, expresan esta idea en un contexto más general.

Lema 3. *Dada una situación (A, q), si un grupo j obtiene en equilibrio q_j puestos con n_j votos también los conseguirá* (*o más*) *con un número mayor de votos $n'_j > n_j$.*

Lema 4. *Dada una situación (A, q), si un grupo j no consigue obtener q_j puestos con n_j votos, tampoco los conseguirá con un número menor de votos $n'_j < n_j$.*

Además, nuestra intuición se mantiene si se incrementa el número de grupos o el número de puestos:

El número de grupos no influye en la conjetura debido a que se compararían únicamente dos grupos: el primer grupo es el más perjudicado por la votación, es decir, aquel grupo que más votos le ha costado el último candidato; el segundo grupo es el más beneficiado, aquel que ha conseguido el último puesto asignado. Además, el número de puestos no parece ser relevante porque lo importante son los cocientes entre el número de votos y el número de puestos.

Si se incrementa el número de votos de los grupos proporcionalmente, el divisor d queda multiplicado por ese número. Por ejemplo, en el ejemplo anterior si se multiplica el número de votos de cada grupo por 11 se tienen dos grupos con votos (1133, 572). El intervalo de divisores sería (113.3, 114.4]. Si el G_1 quiere conseguir diez puestos, reparte en [114, 114, 114, 113, 113, 113, 113, 113, 113, 113] y G_2 en [115, 115, 114, 114, 114], por lo que no hay situación de empate, ya que el último candidato del grupo 1 no consigue puesto.

Sin embargo, si se incrementa el número de votos del grupo 1 hasta 1143 manteniendo el número de votos del G_2 en 572, la situación descrita con (103, 52) se repite: el G_1 reparte sus 1143 votos en [115, 115, 115, 114, 114, 114, 114, 114, 114, 114] y G_2 en [115, 115, 114, 114, 114]. Empatan 7 candidatos del G_1 y 3 del G_2 a 114 votos. Si se aplica la regla de desempate débil se vuelven a repartir los mismos votos sobre los candidatos empatados. El G_1 tratará de conseguir 7 puestos repartiendo sus votos en [164, 164, 163, 163, 163, 163, 163], pero el G_2 reparte en [191, 191, 190], evitando que G_1 pueda conseguir el último. Sería posible decir que **son matemáticamente equivalentes, no las situaciones proporcionales, sino las situaciones extremas de dos categorías proporcionales**. Es decir, (103, 52, q=14) es equivalente al caso extremo de (103k, 52k, q=14).

Continuando con el ejemplo inicial (103, 52), G_1 reparte en [11, 11, 11, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10] y G_2 en [11, 11, 10, 10, 10], por lo que G_1 intenta ganar diez puestos cuando d´Hondt sólo le otorga nueve. Pero para que se cumpla esto, G_2 debe perder el quinto puesto y esto no sucede, a pesar de los empates, porque G_1 tiene 7 candidatos que empatan a 10, mientras que G_2 tiene 3 candidatos que empatan a 10. Como el cociente 7/3 es mayor que 103/52, el G_1 no consigue el puesto adicional.

Para que, dados dos grupos, uno de ellos (G_1) consiga un candidato adicional al que le corresponde por su asignación d´Hondt, tiene que perder un candidato el otro grupo (G_2). Pero la intuición es que G_2 se garantiza los puestos otorgados por d´Hondt, a pesar de los empates, porque el cociente entre el número de puestos que empatan para G_1 y el número de puestos que empatan para G_2 es mayor que el cociente entre el número de votos que tiene G_1 y el número de los votos que tiene G_2.

4.3.5.2. Exploración completa de un conjunto de situaciones.

Se ha realizado una exploración completa tratando de simular las situaciones más cercanas a la realidad, con los siguientes parámetros: dos grupos que suman 350 votos y un número de puestos q que oscila entre 3 y 10.

El cálculo realizado consiste en crear dos columnas que sumen 350: la primera representa el número de votos de G_1, parte de 350 y disminuye progresivamente; en la segunda columna, representa G_2, partiendo de 0 e incrementándose progresivamente. Dichas columnas finalizan con el reparto equivalente 175, 175, por ser el resto de situaciones análogas a las calculadas. De este modo, el grupo G_1 siempre será el grupo mayoritario.

Para cada reparto de votos de G_1 y G_2 se calcula la asignación d´Hondt q_1 y q_2 respectivamente, en las columnas tercera y cuarta. Si en lugar de q puestos se tuvieran que elegir q+1, una quinta columna recoge el grupo que se hubiera llevado ese último puesto. Este grupo es el que sale perjudicado relativamente por la asignación d´Hondt.

Los casos límite se podrían encontrar, solamente, en los casos en los que **G_1 es el grupo que sale perjudicado**, porque al ser el grupo mayoritario, podría, en principio, tratar de repartir sus votos en q_1+1 (en lugar de q_1) para conseguir un puesto más del que le otorga la asignación d´Hondt. Sin embargo, sucede que el G_2 se asegura sus q_2 puestos de d´Hondt repartiendo homogéneamente sus votos y G_1 sólo consigue empatar en algunos casos.

Estas situaciones de empate, resueltas con la regla de desempate real en su versión débil, tienen como resultado la asignación d´Hondt para G_1 y G_2. Para ilustrar la exploración se describe el caso de q=5 (las situaciones de empate si G_1 intenta conseguir q_1+1 aparecen en negrita):

Votos		D´Hondt (q = 5)		¿Quién es perjudicado?	Equilibrio de Nash: estrategia de reparto		Reparto si G_1 intentara q_1+1
G_1	G_2	q_1	q_2		G_1	G_2	
350	0	5	0	G_1	70, 70, 70, 70, 70	0	
349	1	5	0	G_1	70, 70, 70, 70, 69	1	
…	…	…					
299	51	5	0	G_2	60, 60, 60, 60, 59	51	
…	…	…					
292	58	Caso no analizado por empate sin decisividad					
291	59	4	1	G_1	73, 73, 73, 72	59	59, 58, 58, 58, 58
…	…	…					
250	100	Caso no analizado por empate sin decisividad					
249	101	4	1	G_2	63, 62, 62, 62	101	
…	…	…					
233	***117***	***3***	***2***	$\boldsymbol{G_1}$	***78, 78, 77***	***59, 58***	***59, 58, 58, 58***
…	…	…					
199	151	3	2	G_2	67, 66, 66	76, 75	
…	…	…					
175	175	Caso no analizado por empate sin decisividad					

Siempre se entenderá que las estrategias de reparto que alcanza un *EN* están de acuerdo a las hipótesis planteadas, aunque en la realidad, pueden existir preferencias sutiles que no se recojan en dichas hipótesis, razón por la cual, pudiera suceder que, la realidad no concuerde siempre con el reparto teórico. Entre estas preferencias sutiles, cabe mencionar que parece normal otorgar un mayor número de votos al primer puesto.

Al describir la tabla anterior puede observarse que al principio G_1 consigue todos los puestos. Según se avanza en la tabla el número de votos que tiene G_2 aumenta hasta que consigue el primer puesto con 59 votos (el caso 292, 58 no se analiza por ser un empate sin decisividad, esto es, no hay regla de desempate anónima y neutral que resuelva la situación, siendo necesario acudir a reglas determinísticas y no neutrales como las de un orden preestablecido).

Las situaciones en las que G_2 es el grupo perjudicado por la asignación d´Hondt no son interesantes porque es el grupo minoritario. En estas situaciones G_2 podría conseguir un puesto más si lo hubiera pero, si G_2 tratara de conseguir un puesto adicional a costa de G_1, como G_1 es el grupo beneficiado y mayoritario, se asegura siempre la asignación d´Hondt.

Por ejemplo, la situación (249, 101) y q=5 puestos a cubrir conduce a la asignación d´Hondt para *G*1 y *G*2 de (4, 1). Si hubiera 6 puestos a cubrir, el sexto lo conseguiría *G*2, y por ello es el grupo perjudicado.

	Nº Votos =325	Nº Votos/1	Nº Votos/2	Nº Votos/3	Nº Votos/4	Nº Votos/5	Nº Votos/6	q=6
G_1	249	***249***	***124,5***	***83***	***62,25***	49,8	41,5	4
G_2	101	***101***	***50,5***	33,66	25,25	20,2	16,83	2

Pero con $q=5$ puestos, si G_2 tratara de dividir sus 101 votos en 51 y 50, no conseguiría ningún puesto adicional, porque G_1 se asegura sus 4 puestos repartiendo en [63, 62, 62, 62].

Si G_1 dividiera entre 5 mediante [50, 50, 50, 50, 49], esta acción no formaría parte de un *EN*, porque G_1 sólo conseguiría 3 puestos, ya que los 49 votos asignados al último candidato se pierden. En esta situación de empate G_2 conseguiría el primer puesto con 51 votos y, en una segunda vuelta, daría sus 101 votos a su segundo candidato, consiguiendo al final 2 puestos.

En las situaciones siguientes G_2 tiene más votos y, por lo tanto, se asegura cada vez con más holgura ese primer puesto, hasta el reparto 233, 117; en esta situación consigue 2 puestos:

La situación (233, 117) y q=5 puestos a cubrir conduce a la asignación d´Hondt para G_1 y G_2 de (3, 2). G_1 es el grupo perjudicado porque si hubiera 6 puestos a cubrir conseguiría ese puesto adicional. Sin embargo, si G_1 trata de conseguir 4 puestos en lugar de los 3 que le asigna d´Hondt tendría que repartir sus votos en [59, 58, 58, 58], pero el G_2 repartiría en [59, 58]. G_1 consigue el primero y G_2 el segundo puesto. Aparece un empate en 4 puestos. Aplicando la regla de desempate, si G_1 sigue tratando de conseguir 4 puestos, volvería a repartir sus votos entre 3 mediante [78, 78, 77], pero G_2 daría todos sus 117 votos a su candidato y se habría garantizado la asignación d´Hondt (2 puestos). Por ello G_1 no puede conseguir el cuarto puesto.

Según se avanza en la tabla, el G_2 consigue el segundo puesto con más holgura hasta la situación proporcional 175, 175, que vuelve a ser un caso de empate sin decisividad.

Este patrón se repite para cualquier q entre 3 y 10, teniendo en cuenta que cuanto mayor sea el valor de q más situaciones de empate aparecerán, justo en los repartos en los que G_2 consigue un puesto adicional, aunque no es necesario que exista dicho empate como sucede en el caso de q=5 presentado para el primer puesto que consigue G_2 (291, 59).

Así pues, en todos los casos explorados (y con los supuestos planteados) se cumple la conjetura descrita anteriormente: *el resultado del Equilibrio de Nash coincide con la asignación d´Hondt con la regla de desempate real en su versión débil*.

4.4. Análisis empírico.

En esta sección se estudia si se vota (aplicando las hipótesis y análisis teórico) de acuerdo con el Equilibrio de Nash (*EN*) en las votaciones realizadas en los diferentes contextos que aplican el método analizado (en las Legislaturas para la formación de la Mesa del Congreso, en la Mesa del Senado y en las Mesas de los Parlamentos Autonómicos). Además, se comprueba si la asignación de puestos coincide o no con la asignación d´Hondt.

Este análisis es *a posteriori*, con datos que permiten deducir cómo se han unido los partidos políticos, habiendo formado los grupos con anterioridad y conociendo cuántos votos han sido en blanco o nulos.

4.4.1. Congreso de los Diputados.

El método de votación analizado se aplica en el Congreso en la formación de dos órganos de representación:

1. En la formación de la Mesa del Congreso, los 350 Congresistas escriben 1 nombre para elegir 4 Vicepresidentes y 4 Secretarios (en votaciones separadas).
2. En la formación de la Mesa de las Comisiones y la formación de la Diputación permanente, los miembros de dichos órganos del Congreso escriben 1 nombre para elegir a 2 Vicepresidentes y 2 Secretarios (en votaciones separadas). Este caso no se presenta por su sencillez debido a que siempre ha habido dos grupos mayoritarios en el Congreso y dichas votaciones se reducirán a que cada grupo tiene un Vicepresidente y un Secretario en todas las comisiones.

Según el artículo 40.1 y el artículo 56.1 del Reglamento del Congreso de los Diputados, las Comisiones y la Diputación Permanente, respectivamente, "*representarán a los Grupos Parlamentarios en proporción a su importancia numérica*".

En el Diario de Sesiones de la Sesión Constitutiva del Congreso de Diputados de cada Legislatura, se refleja la realización de la elección de los miembros de la Mesa. Hasta el momento dicha elección se ha realizado en once ocasiones: la Legislatura Constitutiva de 1977 con características diferentes (2 Vicepresidentes en lugar de 4 y 2 nombres en la papeleta para elegir a los 4 Secretarios) y las diez Legislaturas. El análisis diferencia la votación de los Vicepresidentes y Secretarios por separado, y la elección de los miembros de la Mesa en su conjunto.

1) La votación de los Vicepresidentes y Secretarios por separado

Según el análisis teórico realizado con sus hipótesis es necesario averiguar si las votaciones realizadas fueron Equilibrio de Nash (*EN*) y comparar la asignación de puestos con la asignación d´Hondt. En cuanto al primer aspecto, es posible clasificar los resultados de las elecciones del siguiente modo:

a) Se vota según un *EN*.
b) No se vota según un *EN*.

a) Se vota según un EN (S).

En la mayoría de las ocasiones se vota de acuerdo con un *EN*. Para ilustrar este caso se plantea el ejemplo de las elecciones del año 2004, en el que, al parecer, no hubo pacto con anterioridad a la elección de los miembros de la Mesa. La composición del Congreso fue:

Elecciones de 2004 en el Congreso	
Candidaturas	**escaños**
PSOE	164
PP	**148**
IU	5
CiU	10
ERC	8
EAJ-PNV	7
CC	3
BNG	2
PA	0
CHA	1
EA	1
Na-Bai	1
Total	350

En negrita el grupo minoritario.

Y el reparto en la elección de Vicepresidentes y Secretarios para la formación de la Mesa en 2004 fue (con un voto nulo en cada votación):

Elecciones de 2004					
Votación de Vicepresidentes			**Elección de Secretarios**		
V. Primero	Chacón Piqueras, Carme (*GS*)	125	**S. Primera**	Sainz García, María Jesús (*GP*)	75
V. Segundo	Vilajoana Rovira, Jordi (*GC-CiU*)	77	**S. Segunda**	Villalobos Talero, Celia (*GP*)	72
V. Tercero	Cisneros Laborda, Gabriel (*GP*)	75	**S. Tercero**	Barrero López, Jaime Javier (*GS*)	71
V. Cuarto	Gil Lázaro, Ignacio (*GP*)	72	**S. Cuarta**	Navarro Casillas, Isaura (*GIU-ICV*)	67
			Sin puesto	Marón Beltrán, Carmen (*GS*)	64
		349			349

Las estrategias de voto del *GS* con 202 escaños (disponibles por la coalición de grupos liderada por el grupo socialista, que sumaba dichos escaños) fueron distintas para las dos elecciones, pues en la votación para elegir los Vicepresidentes repartieron su voto en 125, 77, mientras que en el caso de la elección de los Secretarios fueron 71, 67, 64.

El objetivo de la primera estrategia parece ser asegurarse la Primera Vicepresidencia e intentar conseguir la Segunda, mientras que en el segundo caso se intentaba conseguir un tercer secretario. Es decir, observando este modo de votar parece que el orden de los Vicepresidentes es importante para los grupos, mientras que en la votación de los Secretarios lo importante es el número.

Además, como el cociente $\frac{202}{70} = 2,88$, la estrategia del *GS* para la votación de los Secretarios trató de conseguir el tercer puesto y perdieron el orden conseguido en los Vicepresidentes. De todas formas, la votación en Secretarios sí es un *EN* porque, aunque el *GS* trata de conseguir un puesto más de los que le correspondería inicialmente, no pierde ninguno por intentarlo (pues los 147 votos de *GP* repartidos en tres son 49).

La asignación d´Hondt para la votación de Secretarios es (2, 2). Por lo tanto, el resultado obtenido coincide con dicha asignación:

	Nº Votos =349	*Nº Votos/1*	*Nº Votos/2*	*Nº Votos/3*	*Nº Votos/4*	*Puestos = 4*
GS	202	**202**	**101**	67,33	50,5	2
GP	147	**147**	**73,5**	49	36,75	2

También son *EN* las votaciones a Secretarios de los años 2008, 2000, 1996, 1993 y 1977.

b) No se vota según un EN (NH).

Otra posibilidad es que, habiendo un Equilibrio de Nash, no se vote de acuerdo con él, suponiendo que se cumplan las hipótesis teóricas. En la votación de Vicepresidentes de 2004, los dos grupos que se reparten los 349 Diputados (una vez que se ha eliminado un voto nulo) son el Grupo Popular, (*GP*) con 147 votos (repartidos homogéneamente en 75, 72) y el resto de grupos liderados por el Grupo Socialista (*GS*) con 202 votos (repartidos en 125 y 77).

Además, las estrategias podrían no ser adecuadas porque:

a. El *GS* pudo perder la Primera Vicepresidencia, si el *GP* hubiera votado 126, 21 obteniendo el primer y cuarto Vicepresidente.
b. El *GP* podría haber intentado conseguir la Primera Vicepresidencia, sin arriesgarse a obtener sólo una, repartiendo sus votos en 80, 68.
c. Si se supone que importa el orden para el primer Vicepresidente y se considera por igual al resto de miembros, existen varias estrategias que garantizan al *GS* el objetivo: aquellas en que el número de Diputados que vota por un miembro supera el número total de Diputados del *GP* (148). Por ejemplo, la repartición de *GS* en 149, 53 consigue dos miembros independientemente de la estrategia de *GP*[2]. Esta estrategia garantiza la Primera Vicepresidencia, pero no la Segunda.

Pero no se olvide que en el modelo simplificado estudiado arriba se supone irrelevante el orden de los puestos, y se ajusta mejor al caso de los secretarios que al de los vicepresidentes (los cuales tienen una jerarquía más definida).

La asignación d´Hondt para cada grupo es dos escaños y se alcanza en esta situación:

	Nº Votos =349	*Nº Votos/1*	*Nº Votos/2*	*Nº Votos/3*	*Nº Votos/4*	*Puestos =4*
GS	202	**202**	**101**	67,33	50,5	2
GP	147	**147**	**73,5**	49	36,75	2

[2] De esta forma, el número de miembros asignados al primer Vicepresidente es igual al número máximo de escaños del partido minoritario más uno. Ello sucede porque el segundo miembro del PSOE recibe un número de votos superior al cociente del total de escaños del PP entre tres.

Tampoco se votó siguiendo un *EN* cuando lo había en las elecciones a Secretarios de 1989, 1986, 1982 y 1979. Por ejemplo, en las elecciones de 1989:

Elección de Secretarios 1989		
S. Primero	Vargas-Machuca Ortega, Ramón Arturo (*GS*)	120
S. Segundo	Aparicio Pérez, Juan Carlos (*GP*)	100
S. Tercero	Pelayo Duque, María Dolores (*GS*)	61
S. Cuarto	Núñez Casal, José Luis (*GIU-IC*)	44
	Votos en blanco	20
	Votos emitidos	345

Parece ser que existía una división del Congreso en dos grupos: *GS* con 181 votos y *GP* (aliado con otros partidos) con 144 votos. El *GP* repartió sus votos en (100, 44) por lo que *GS* podría haber conseguido tres puestos repartiendo sus 181 votos en (61, 60, 60). Por ello, no es un Equilibrio de Nash, pero si *GP* hubiera repartido más homogéneamente en (72, 72), se hubiera asegurado los dos puestos. Puede decirse que el *GP* arriesgó innecesariamente.

La asignación d´Hondt para cada grupo es de dos escaños y esta situación sí que se alcanza en la práctica:

	Nº Votos =325	Nº Votos/1	Nº Votos/2	Nº Votos/3	Nº Votos/4	Puestos =4
GS	181	**181**	**90,5**	60,33	45,25	2
GP	144	**144**	**72**	48	36	2

Merece la pena plantear la votación de los Secretarios en las elecciones de 1982, por ser el único caso en el que la asignación d´Hondt no coincide con el reparto final de los candidatos. El reparto de escaños y las candidaturas en 1982 fue:

Elecciones de 1982 en el Congreso	
Candidaturas	**escaños**
PSOE	202
AP-PDP	107
UCD	11
PCE	4
CIU	12
CDS	2
EAJ-PNV	8
HB	2
ERC	1
EE	1
Total	350

El reparto de los escaños en la elección de Secretarios fue:

Elección de Secretarios 1982		
S. Primero	Vicente Martín, Ciriaco de (*GS*)	126
S.Segunda	Fernández-España y Fernández-Latorre, María Victoria (*GP*)	104
S.Tercero	Pedregosa Garrido, José Manuel (*GS*)	86
S. Cuarto	Trías de Bés i Serra, Josep María (*GMC*)	26
Sin puesto	García-Moreno Teixeira, Carmela (*GS*)	1
	En blanco	2
	Votos emitidos	345

El *GS* tenía 212 votos que repartió en (126, 86), mientras que el *GP* tenía 130 (que repartió en (104, 26). Esta situación no es un *EN* porque el *GS* podría haber dividido sus votos en (71, 71, 70) y conseguiría 3 puestos en lugar de 2. Es decir, el *GP* consiguió un puesto más del que le correspondía.

Éste es el **único caso en que la asignación d´Hondt no se alcanza** pues a pesar de que la asignación d´Hondt es (3, 1) para el *GS* y *GP* respectivamente, el reparto dio lugar a la asignación (2, 2):

	Nº Votos =342	Nº Votos/1	Nº Votos/2	Nº Votos/3	Nº Votos/4	*q*=4
GS	212	**212**	**106**	**70,66**	53	3
GP	130	**130**	65	43,33	32,5	1

El *GS* con 212 votos (repartió en 126, 86) y el *GP* con 130 votos (en 104, 26), pero el *GS* podría haberse asegurado tres puestos repartiendo sus votos más homogéneamente en (71, 71, 70). Seguramente hubo un pacto para que el grupo de partidos liderado por *GP* tuviera más representación en la Mesa del Congreso que la que le daba la fórmula d´Hondt, es decir, que como el *GS* ya tenía el Presidente y tres Vicepresidentes no necesitaba tener tres Secretarios para obtener la mayoría de la Mesa en su conjunto. Por ello, parece que trató de dejar un puesto adicional para el segundo grupo con mayor fuerza en el Congreso.

Para contrastar la intuición del pacto tuve la ocasión de realizar una entrevista a D. Virgilio Zapatero Gómez[3], que fue miembro de las Cortes Constituyentes, Secretario

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Virgilio_Zapatero

de Estado de 1982 a 1983 y ministro de Relaciones con las Cortes entre 1986 y 1993 con el PSOE. Su contestación fue:

> *"…al Grupo Socialista le correspondía el 75% de los miembros aproximadamente pero no necesitaban tener tanta representación en la Mesa y se regaló un puesto".*

En este caso la elección de miembros de la Mesa estuvo pactada con anterioridad a la votación (este aspecto se tratará en la próxima sub-sección sobre la votación de la Mesa en su conjunto).

En conclusión, la asignación d´Hondt se alcanza en todas las votaciones (de Vicepresidentes y Secretarios) con la excepción de la elección de Secretarios en la Legislatura de 1982.

Como resumen de esta sección se presenta la siguiente tabla (en negrita aparecen los repartos realizados por el grupo mayoritario, G_1:

Elecciones	*2011*	*2008*	*2004*	*2000*	*1996*	*1993*	*1989*	*1986*	*1982*	*1979*	*1977*[4]
Vicepresidentes											
$\boldsymbol{G_1}$	**213**	**194**	**202**	**183**	**181**	**183**	**180**	**190**	**214**	**172**	**165**
$\boldsymbol{G_2}$	110	153	147	157	162	142	147	147	129	139	138
Otros+blanco+ nulos	26	3	1	10	7	25	23	13	7	39	47
Asignación d´Hondt	3,1	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	3,1	2,2	2,2
Votos emitidos	349	350	350	346	347	348	345	344	342	333	346
$\boldsymbol{V_1}$	**116**	**131**	**125**	**141**	**115**	**125**	**124**	**118**	**120**	**138**	**165**
$\boldsymbol{V_2}$	100	77	**77**	124	102	89	98	100	104	108	138
$\boldsymbol{V_3}$	**50**	76	75	**42**	**66**	**58**	**56**	**72**	**62**	**34**	
$\boldsymbol{V_4}$	**47**	**63**	72	33	60	53	28	47	**32**	31	
Otras candidaturas	1+1				1	1+1	21	1+1+1	25+2 +1	17	21
Votos en blanco	33	3		4	3	21	18	4		5	23
Votos nulos	1										
Coincide con *D´H?*	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si

[4] En la elección de Vicepresidentes de la Legislatura Constituyente en 1977 sólo se elegían dos Vicepresidentes.

Elecciones	*2011*	*2008*	*2004*	*2000*	*1996*	*1993*	*1989*	*1986*	*1982*	*1979*	*1977*
Secretarios											[5]
G_1	**185**	**193**	**202**	**182**	**181**	**188**	**181**	**188**	**212**	**171**	**166**
G_2	125	146	147	163	157	141	144	133	120	139	138
Otros	38	11	1	5	12	21	25	29	8	38	46
Asignación d´Hondt	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	3,1	2,2	2,2
Votos emitidos	348	350	350	349	345	348	345	341	345	312	669
S_1	**136**	**109**	75	103	**116**	**126**	**120**	**116**	**126**	**114**	**166**
S_2	63	**84**	72	**100**	87	77	100	93	104	97	**165**
S_3	62	77	**71**	**82**	70	64	**61**	**72**	**86**	**57**	138
S_4	**49**	69	**67**	60	**65**	**62**	44	40	26	42	137
Otras candidaturas	1+1		**64**			18		1+1+7	1	1+1	21+20
Votos en blanco	36	7	1	3	5	1	20	9	2		22
Nulos								2			
Coincide con *D´H*?	si	si	si	si	si	si	si	si	**no**	si	si

En la siguiente tabla se resumen los dos aspectos analizados, "*S*" cuando sí hay *EN* y "*NH*" si hay *EN* pero no se vota siguiendo algún *EN*. Debe observarse que en la elección de Vicepresidentes se ha estudiado según la hipótesis de que el orden no es relevante.

Elecciones	**2011**	**2008**	**2004**	**2000**	**1996**	**1993**	**1989**	**1986**	**1982**	**1979**	**1977**
Vicepresidentes	NH	NH	S	NH	NH	NH	NH	NH	NH	NH	S
Secretarios	S	S	S	S	S	S	NH	NH	NH	NH	S
***D´H* en Vicep?**	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si
***D´H* en Secret?**	si	si	si	si	si	si	si	si	**no**	si	si

El análisis realizado en la elección de los Vicepresidente muestra que las votaciones de la mayoría de las Legislaturas no siguen ningún *EN* aunque exista (a excepción de 1977 y 2004 que sí se votó según un *EN*). Esto implica que es necesario tener en cuenta la elección de los miembros en su conjunto para comprender el modo de votar u otro tipo de elementos.

Uno de ellos puede ser el hecho de que haya acuerdo en la elección de los miembros de la Mesa en su conjunto. Bajo esta hipótesis, podría estudiarse si el análisis teórico realizado para la elección de los Secretarios se cumple en la elección de la Mesa desde un punto de vista global: Presidente, Vicepresidentes y Secretarios.

[5] En la elección de Secretarios de la Legislatura Constituyente en 1977 se escribieron dos nombres en cada papeleta.

2) La elección de los miembros de la Mesa en su conjunto.

Este análisis implica que el grupo mayoritario, G_1, tiene asegurado el Presidente, por lo que le basta con asegurarse cuatro de los ocho puestos (sumando los 4 Vicepresidentes y 4 Secretarios). Es decir, los grupos pueden pactar ocho miembros de la Mesa aunque luego se realicen dos votaciones separadas para Vicepresidentes y Secretarios.

Por ejemplo, el reparto de Diputados por partidos en la décima Legislatura fue:

Elecciones de 2011 en el Congreso	
Candidaturas	**escaños**
PP	186
PSOE	110
CiU	16
IU	11
AMAIUR	7
UPyD	5
PNV	5
ERC	3
BNG	2
CC-NC-PNC	2
COMPROMÍS-Q	1
Total	348

En la votación de Vicepresidentes y Secretarios hubo 349 y 348 votos emitidos respectivamente.

Elecciones de 2011				
Votación de Vicepresidentes			**Votación de Secretarios**	
V. Primera	Votos		**S. Primero**	**Votos**
Villalobos Talero, Celia (*GP*)	116		Gil Lázaro, Ignacio (*GP*)	136
V. Segundo			**S.Segunda**	
Barrero López, Jaime Javier (*GS*)	100		Silva Rego, María del Carmen (*GS*)	63
V. Tercera			**S.Tercera**	
Montserrat Montserrat, Dolors (*GP*)	50		Cunillera Mestres, Teresa (*GS*)	62
V. Cuarto			**S. Cuarto**	
Jané i Guasch, Jordi (*GC-CiU*)	47		Cervera Soto, Santiago (*GP*)	49
Votos nulos	1		En blanco	36
Votos en blanco	33		Jordi Jané (sin puesto)	1
Santiago Cervera (sin puesto)	1		Dolors Montserrat Montserrat(sin puesto)	1
Ignacio Gil Lázaro (sin puesto)	1			

A priori, el Grupo Popular (*GP*) con 186 Diputados aspiraría a 2 puestos en cada una de las dos votaciones de Vicepresidentes y Secretarios, mientras que el Grupo Socialista (*GS*) con 110 sólo optaba a un puesto en cada elección. Por lo tanto, el resultado final dependería de las alianzas o pactos entre el resto de los partidos, muy necesario para realizar el estudio completo.

La información conseguida con anterioridad a la votación permite aventurar que unos días antes de la votación el número de puestos de cada grupo en la Mesa fue pactado. En efecto, según las noticias de días anteriores el *GP* se alió con *CiU* (que tenía 16 Diputados) para tratar de conseguir un Vicepresidente más, de modo que se crea el *GP-CiU* con 202 votos (parece ser que este pacto tiene su contrapartida en la situación del Parlamento Autonómico Catalán).

De todas formas, el *GP* con 202 votos, inicialmente, no aspiraba a 3 puestos pero finalmente los consigue gracias a los votos en blanco. Los cuatro Vicepresidentes obtuvieron 116, 100, 50 y 47 votos. Esto indica, a posteriori, que el PS con 110 votos dio 100 a su segundo Vicepresidente y 10 al cuarto de *CiU* **a cambio** de la votación que se realizaría en Secretarios. Por lo tanto los 47 votos del cuarto Vicepresidente de *CiU* parece que provienen del *GP* (20), *GS* (10) y *CiU* (17).

Pero este pacto *GP-CiU* no se mantuvo en la elección de Secretarios permitiendo al PS conseguir dos Secretarios cuando sólo aspiraba a uno. De hecho, parece que hubo **un pacto global para la elección de la Mesa en su conjunto**, porque *CiU* votó a favor de los candidatos del *GS* en la votación de Secretarios (a cambio de los votos en Vicepresidentes): los votos de los dos Secretarios del *GS* (63 y 62) suman 125, pero el PS sólo tenía 110 votos por lo que los 15 restantes parecen provenir de *CiU*.

Con este modo de votar, el *GP* con una mayoría absoluta en el Congreso de los Diputados, mantiene la misma proporción en la Mesa: 5 de los 9 puestos (el Presidente, 2 Vicepresidentes y 2 Secretarios). El *GS* consiguió 3 puestos en total, cuando sólo aspiraba a 2 y *CiU* (con sólo 16 Diputados) consiguió otro puesto, mientras IU con 11 Diputados se quedó sin representación en la Mesa.

Con este pacto global, las acciones concretas de los grupos parece que no son relevantes, pero puede haber incentivos en algún grupo para **incumplir el pacto**. Por ejemplo, en la elección de Vicepresidentes, el *GS* podría haber dividido sus 110 votos en 55 y 55 consiguiendo dos puestos (y *GP* otros dos). Esto muestra que el modo de votar en la elección de Vicepresidentes no fue de acuerdo a un Equilibrio de Nash. Al no cumplir el pacto, en la elección de Secretarios, *CiU* probablemente no apoyaría a *GS*, pero *GS* se asegura un puesto con sus 110 votos. El *GP* podría dividir sus 186 votos en (62, 62, 62) consiguiendo 3 puestos. En consecuencia, *GS* tendría los mismos 3 puestos que en el pacto y *GP* obtendría 6 puestos, pero *CiU* se quedaría sin representación en el Mesa.

Por otro lado, *CiU* podría apoyar a *GS* creando una alianza que dividiría sus 126 votos (110+16) en 63, 63 consiguiendo 2 Secretarios, siempre que *GP* no hiciera otra alianza. De hecho, esto fue lo que sucedió en la realidad. El *GP* repartió sus 186 votos en 136 y 49 (más un voto erróneo). Por esta razón el modo de votar en Secretarios sí es un *EN*.

Además, suponiendo dichas alianzas, *GP+CiU* en Vicepresidentes y *GS+CiU* en Secretarios, el resultado sí coincide con la asignación d´Hondt, que es (3,1) y (2, 2) respectivamente.

También pregunté a D. Virgilio Zapatero Gómez si se pactan las votaciones: La respuesta fue:

> *"Sí, normalmente es una votación pactada con anterioridad. El grupo mayoritario trata de pactar, primero, con el principal partido de la oposición. Después, el grupo mayoritario y el principal partido de la oposición tratan de incluir al resto de partidos."*

Parece ser que muchas de las votaciones para la elección de los miembros de la Mesa están acordadas con antelación, pero esto no implica que siempre sea así. De hecho, las votaciones de la Mesa del Congreso en el año 2004 son un ejemplo de que no llegaron a un acuerdo. Además, pueden existir incentivos por parte de un grupo a no cumplir los acuerdos debido a que se realizan dos votaciones.

4.4.2. Senado.

En la formación de la Mesa del Senado, los 259 Senadores escriben 1 nombre para elegir 2 Vicepresidentes y 2 nombres para elegir 4 Secretarios, según los artículos 8 y 9 del Reglamento del Senado (es el mismo método que en el Congreso). En el artículo 10 se regulan los casos derivados de escribir más de un nombre en una papeleta:

> *Artículo 10.*
>
> 1. *Cuando una papeleta contuviere más nombres de los necesarios, únicamente se computarán, por su orden, los que correspondan, según la elección de que se trate, y los demás se reputarán no escritos.*
> 2. *La papeleta que contuviere menos nombres de los necesarios será válida.*

Escribir más de un nombre en la papeleta cambiará los resultados descritos, tal como se han modelizado en apartados anteriores. En efecto, se aprecia intuitivamente que aumentar el número de nombres en la papeleta tiene un efecto análogo al de disminuir el número de puestos del comité, lo cual dará lugar a una pérdida progresiva del grado de proporcionalidad alcanzable. En el extremo, si *p* es igual al número de puestos a cubrir, no existe proporcionalidad porque todos los miembros se asignarían al grupo con un mayor número de votos.

El análisis empírico para el Senado carece de interés cuando sólo hay dos grupos políticos que agrupan todos los Senadores porque, si sólo hay dos Vicepresidentes, cada uno de los dos grupos mayoritarios obtiene uno; además, al escribir dos nombres para elegir a cuatro Secretarios, intuitivamente aparece una situación análoga a la votación de Vicepresidentes: cada uno de los grupos mayoritarios obtiene dos Secretarios.

Esto mismo sucede en la votación de la Mesa de las Comisiones y en la Diputación Permanente.

4.4.3. Parlamentos Autonómicos

En la formación de la Mesa de la mayoría de los Parlamentos Autonómicos analizados[6] se aplica el método utilizado en la Mesa de las Comisiones del Congreso de los Diputados, con diferencias en los modos de resolver los empates (repitiendo las votaciones entre los candidatos empatados, resolviendo a favor de la candidatura con más votos a partir de un número repetido de empates, o desempatando a favor del Diputado con mayor edad).

Los únicos Parlamentos Autonómicos que difieren son el Parlamento de Andalucía y la Asamblea de Madrid, que eligen tres Vicepresidentes y tres Secretarios, pero de un modo diferente: en los dos Parlamentos se eligen los tres Vicepresidentes en una votación. Pero para la elección de los tres Secretarios, en Andalucía se realiza igual que para la elección de los Vicepresidentes, mientras que en la Asamblea de Madrid se vota separadamente: primero se eligen dos Secretarios y en otra votación el tercero.

Merece la pena analizar las **diferencias existentes entre votar los tres miembros a la vez y votarlos por separado**. Si se supone un Parlamento con dos grupos políticos, y uno de los grupos tiene más del doble de escaños que el otro, entonces votando por separado dos puestos y luego uno, puede darse el caso de que el grupo con más escaños obtiene tres puestos, mientras que si se votaran los tres puestos a la vez obtendría solamente dos.

Por ejemplo, con un total de 129 escaños (los que tiene la Asamblea de Madrid), si un grupo tiene más de 86 escaños obtiene los tres puestos votando separadamente, mientras que si se votaran los tres puestos a la vez necesitaría tener 97 escaños (más del triple que el segundo grupo con 32 escaños). Es decir, votar separadamente

[6] En el Parlamento de Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Castilla la Mancha, Cataluña, Extremadura, Islas Baleares, Murcia, Navarra, País Vasco y La Rioja. En todos estos casos se eligen 2 Vicepresidentes y 2 Secretarios a excepción de Cataluña que elige 2 Vicepresidentes y 4 Secretarios.

implica que el partido mayoritario está más representado en términos relativos que si se votan los puestos conjuntamente.

Además, estas diferencias aparecieron en la práctica, en las Elecciones Autonómicas de la Asamblea de Madrid de 2011 (IX Legislatura). Los escaños obtenidos por cada candidatura son:

Candidatura	***PP***	***PSOE***	***IU***	***UPyD***	**Total**
Escaños	72	36	13	8	129

En la votación para elegir los tres Vicepresidentes los votos recibidos por cada candidatura fueron:

	PP	***PSOE***	***IU***	***UPyD***	**Total**
Vicepresidentes	66	36	27=6+13+8		129
	1ºVicep	**2ºVicep**	**3ºVicep**		

El Primer Vicepresidente del *PP* obtuvo sólo 66 de los 72 votos que tenía porque se formó una coalición entre *PP*, *IU* y *UPyD* para alcanzar el tercer Vicepresidente. En realidad, si se supone que el orden de todos los Vicepresidentes es relevante, este modo de votar no es óptimo, porque la coalición *PP*, *IU* y *UPyD* podría haber conseguido el segundo Vicepresidente si en lugar de dar 66 votos al primer Vicepresidente, hubiera dado solamente 56. Con el resto de votos del *PP* (72-56=16), sumados a los votos de *IU* y *UPyD* (21=13+8), se obtienen 37 votos, que son suficientes para ganar a los 36 votos del PSOE.

En las dos votaciones para elegir separadamente Secretarios los votos se repartieron el siguiente modo:

	PP	***PSOE***	***IU***	***UPyD***	**Total**
Secretarios (2)	56	36		37	129
	1º Secret			**2º Secret**	
Secretarios (1)	72	36	13	8	129
	3º Secret				

En la primera votación se eligieron dos Secretarios: el primero fue del *PP* (con 56 votos) y el segundo de *UPyD* con 37 votos (16 del *PP* + 13 de *IU* + 8 de *UPyD*). El PP consiguió el tercer Secretario con 72 votos (el resto fueron en blanco). En esta votación se corrige el aspecto señalado en la elección de Vicepresidentes por lo que la votación de los tres Secretarios por separado es un Equilibrio de Nash, dada la alianza de *PP*, *IU* y *UPyD*.

Se observa en este ejemplo que aparece un resultado diferente debido a que se han votado separadamente dos Secretarios primero y uno después. Si la votación de los tres Secretarios hubiera sido simultánea (**como sucede en el Parlamento de Andalucía**), entonces el *PSOE* tendría garantizado 1 miembro. Si los 93 votos de *PP*, *IU* y *UPyD* se hubieran dividido entre tres, hubieran dado 31 votos a cada candidato. Por ello, el *PSOE* con 36 se garantiza uno. De este modo la asignación de los Secretarios habría sido más proporcional.

La asignación d´Hondt hubiera sido (2, 1) para *PP+IU+UPyD* y *PSOE* respectivamente como muestra la tabla:

Alianzas	*Nº Votos*	*Nº Votos/1*	*Nº Votos/2*	*Nº Votos/3*
PP+IU+UPyD	93	**93**	**46,5**	31
PSOE	36	**36**	18	12

Merece la pena señalar que el *PP* tenía justo el doble de Diputados del *PSOE*, por lo que no habría tenido por qué aliarse con otros partidos para conseguir dos puestos en Vicepresidentes y Secretarios. Si el *PP* hubiera dividido sus 72 votos en 2 (dando 36 votos a dos de sus candidatos) hubiera empatado con los 36 votos del *PSOE* y habría que haber acudido a la **regla de desempate** que aparece en el artículo 52 apartado 5 del Reglamento de la Asamblea de Madrid:

> *“Si en alguna de las votaciones a las que se refieren los apartados precedentes se produjese empate, se celebrarán sucesivas votaciones entre los Diputados igualados en votos hasta que el empate quede dirimido. Ello no obstante, si en la cuarta votación persistiera el empate, se considerará elegido el Diputado que forme parte de la candidatura más votada en las elecciones autonómicas.”*

De este modo el *PP* (la candidatura más votada) hubiera conseguido dos Vicepresidentes y el *PSOE* el tercero. Además, en la votación de Secretarios el *PP* hubiera conseguido tres Secretarios. Los dos primeros (en la primera votación) al dividir los 72 votos en 2, empatando con el *PSOE* y el tercero por ser la fuerza política más votada. Por lo tanto, el *PP* tendría seis de los siete puestos en la Mesa sin necesidad de alianza alguna.

4.5. Conclusiones.

En este capítulo se ha analizado la formación de la Mesa del Congreso de los Diputados español, mediante un modelo más general (elección de q miembros con e votantes), obteniendo algunos resultados. Uno de estos resultados demuestra que (en teoría) el Equilibrio de Nash coincide con la asignación d´Hondt si los votos fraccionarios están permitidos y, además, se **conjetura** que dicha coincidencia se cumple con la regla de desempate aplicada en el artículo 37.3 del Reglamento del Congreso en su interpretación débil, si los **votos fraccionarios no están permitidos** (supuesto más cercano a la realidad).

Además, se ha realizado un análisis empírico de las votaciones de la Mesa del Congreso, comprobando que, en general, la asignación d´Hondt se consigue en todas las votaciones, aunque las acciones no sean Equilibrio de Nash debido a que en la práctica existen consideraciones que no se pueden tener en cuenta en las hipótesis teóricas.

También se han revisado las votaciones de la Mesa del Senado y de los Parlamentos Autonómicos reflexionando sobre los elementos relevantes, por ejemplo, la diferencia entre elegir tres Secretarios en dos votaciones separadas (como en la Asamblea de Madrid) y elegirlos en una única votación. El primer caso favorece al grupo mayoritario mientras que el segundo es más proporcional.

Tratar de predecir *a priori* cuál será el resultado de una votación de Vicepresidentes y Secretarios no es tan fácil, porque es necesario conocer el número de grupos (en los días anteriores a la votación se suelen hacer alianzas que reducen el número de grupos), número de votantes de cada grupo, las acciones finalmente realizadas,…, pero en la realidad hay errores (votos a Secretarios en la votación de Vicepresidentes y viceversa), votos nulos y votos en blanco que también modifican el resultado final.

Además, para mejorar dicha predicción es muy útil que la información disponible sea pública y conocida por todos los grupos, pero a veces no es así (la elección de la última Legislatura en la Asamblea de Madrid fue una sorpresa de alianzas) y esto teóricamente no se puede resolver.

ANEXO I. Demostración de las proposiciones 4.1 y 4.2

Proposición 4.1. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q), donde A=(n_1,.., n_k) y cumpliendo las hipótesis H_1 a H_6 (votos fraccionarios permitidos):*

c) *Si (A, q) es una situación con divisor, para cualquier equilibrio de Nash del juego G, el correspondiente resultado es la única asignación de la regla Jefferson-d´Hondt de esta situación.*

d) *Si la situación (A, q) no tiene divisor, para todo equilibrio de Nash del juego G:*

b1) Si el grupo j no está afectado por empates, de modo que $\frac{n_j}{d'} > INT(\frac{n_j}{d'})$*, el resultado esperado y efectivo de puestos para j es el correspondiente para este grupo en el conjunto J-dH(A, q),* $INT(\frac{n_j}{d'})$.

b2) Si el grupo j está afectado por empates, de modo que $\frac{n_j}{d'} = INT(\frac{n_j}{d'})$*, el número de puestos esperado para j es igual o mayor que el número mínimo de puestos correspondientes para este grupo en el conjunto J-dH(A, q),* $INT(\frac{n_j}{d'})-1$*. En cambio, los puestos efectivos para j pueden ser menos que* $INT(\frac{n_j}{d'})-1$.

Demostración:

a) Dada una situación (A, q), donde A= (n_1, …, n_k) y n_j es el número de miembros del grupo j, hay un divisor d tal que $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{INT}(\frac{n_i}{d}) = q$ y la asignación de la regla *J-dH*(A, q) tiene un solo vector, que es (h_1, h_2, …, h_k), donde h_i = $\mathrm{INT}(\frac{n_i}{d})$. Razonando por contradicción, supongamos que el resultado esperado (e_1, e_2, …, e_k) de un perfil de acciones (a_1, a_2, …, a_k) no es el vector de la asignación Jefferson-d´Hondt (h_1, h_2, …,

h_k). Como $\sum_{i=1}^{k} h_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = q$, hay un grupo j tal que $e_j < h_j$. Entonces, el grupo j obtiene menos puestos esperados, como consecuencia del perfil de acciones (a_1, a_2, …, a_k), que aquellos asignados por la regla Jefferson-d´Hondt. Vamos a probar que este perfil no es un Equilibrio de Nash. Según el Lema 1, si la acción de uno de los grupos da algún voto a candidatos de otros grupos, esa acción estaría estrictamente dominada, por lo que el perfil no sería Equilibrio de Nash. Por lo tanto, podemos asumir que todo grupo dará sus votos a los candidatos de su grupo. En tal caso demostremos que la acción a_j no es una respuesta óptima a las otras acciones del perfil (a_1, a_2, …, a_k). Como $\frac{n_j}{h_j} \geq d$, dando $\frac{n_j}{h_j}$ votos a cada uno de sus h_j primeros candidatos, el grupo j se puede asegurar, por el Lema 2, $h_j > e_j$ puestos. Por lo tanto, este perfil no es un Equilibrio de Nash.

***b*)** Supongamos ahora que no existe divisor d que satisfaga $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d}) = q$, denominando d' al máximo número real tal que $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d'}) > q$, es fácil comprobar que $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{x}) < q$ para todo $x > d'$.

b1) Si el grupo j no empata, entonces $\frac{n_j}{d'} > INT(\frac{n_j}{d'})$. Como $\frac{n_j}{d'} > INT(\frac{n_j}{d'})$ implica que existe un $x_j > d'$ tal que $\frac{n_j}{x_j} > INT(\frac{n_j}{d'})$, el grupo j puede dar al menos x_j votos a un número de candidatos, $INT(\frac{n_j}{d'})$, y esto implica, por el Lema 2, que j puede asegurarse, con esa acción, $INT(\frac{n_j}{d'})$ candidatos elegidos, exactamente el número de puestos que le corresponden a j por la regla $J\text{-}dH(A, q)$.

b2) Los grupos i que satisfacen $\frac{n_i}{d'} = INT(\frac{n_i}{d'})$ empatan conjuntamente en la asignación del último candidato de cada uno de ellos. Cuando se deshace el empate y se alcanza la asignación Jefferson-d'Hondt, alguno de estos grupos acabará con

$INT(\frac{n_i}{d'})$ puestos y otros con $INT(\frac{n_i}{d'})$ - 1 puestos. Sea *j* cualquiera de estos grupos.

Ahora, el grupo *j* no puede dar más de *d'* votos a un número de $INT(\frac{n_j}{d'})$ candidatos,

pero supongamos que *j* distribuye sus votos entre $INT(\frac{n_j}{d'})$ - 1 candidatos. En este

caso, como $\frac{n_j}{INT(\frac{n_j}{d'})-1} = \frac{n_j}{\frac{n_j}{d'}-1} > d'$, cada uno de sus candidatos recibe más de *d'*

votos, siendo elegido por el Lema 2. Por lo tanto, en equilibrio, el número de puestos

esperados por *j* son al menos $INT(\frac{n_j}{d'})$ - 1.

Para demostrar que el número de puestos para *j* puede ser menor que $INT(\frac{n_j}{d'})-1$,

se supone una situación con 100 votos repartidos en (50, 25, 25) para asignar 2

puestos. No hay un divisor *d* tal que $\sum_{i=1}^{3} INT(\frac{n_i}{d}) = 2$. En este caso *d'*=25. Como

$\frac{m_1}{d'} = \frac{50}{25} = INT(\frac{m_1}{d'}) = 2,\ \frac{m_2}{d'} = \frac{25}{25} = INT(\frac{m_2}{d'}) = 1,\ \frac{m_3}{d'} = \frac{25}{25} = INT(\frac{m_3}{d'}) = 1,$ todos los grupos están empatados en la asignación de los dos puestos por lo que *J-dH(A, q)*={(2, 0, 0),(1, 1, 0),(1, 0, 1)}.

En este juego, en el que suponemos que las únicas preferencias son H_5 y H_6, el perfil (a_1, a_2, a_3) tal que a_1 otorga 25 votos a sus dos candidatos, y los grupos 2 y 3 dan todos sus votos a sus candidatos, es un equilibrio de Nash. Los resultados del equilibrio de Nash serían (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), con probabilidades 1/6, 1/3, 1/3 y 1/6 respectivamente. Por ello, el número de puestos obtenidos por cada grupo son *EP*(grupo 1) = 1, *EP*(grupo 2) = *EP*(grupo 3) = 1/2. En conclusión, el perfil (a_1, a_2, a_3) es un Equilibrio de Nash y uno de los resultados, con probabilidad 1/6, no pertenece al conjunto *J-dH(A, q).* □

Proposición 4.2. *Sea G el juego obtenido de una situación (A, q), donde A=(n_1, …n_k) y cumpliendo las hipótesis H1 a H6 (votos fraccionarios no permitidos):*

c) *Si existe un divisor entero d* tal que* $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d*}) = q$ *para cada equilibrio del juego G, el correspondiente resultado esperado y efectivo es la única asignación de la regla Jefferson-d´Hondt, J-DH(A, q) de esta situación.*

d) *Si no existe divisor entero d* y denominamos a d'* al máximo número entero tal que* $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d'*}) > q$ *(llamándolo pseudodivisor entero):*

b1) Para los grupos j que satisfagan $\frac{n_j}{d'*+1} \geq INT(\frac{n_j}{d'*})$*, en cada equilibrio de Nash los puestos esperados y efectivos para j son los correspondientes para estos grupos en el conjunto J-dH(A, q),* $INT(\frac{n_j}{d'*})$

b2) Para los otros grupos, hay Equilibrios de Nash en los que los puestos esperados son menos que el número mínimo de puestos correspondientes para estos grupos en el conjunto J-dH(A, q).

b3) Hay situaciones (A, q) en las que, para cualquier Equilibrio de Nash del juego G, el correspondiente resultado esperado y efectivo no pertenece al conjunto J-dH(A, q).

Demostración:

a) Sea una situación (*A*, *q*), donde *A* = (n_1, …, n_k), con un divisor entero *d** tal que $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d*}) = q$. La asignación *J-dH*(*A*, *q*) tiene un sólo vector de asignación, (h_1, h_2, …, h_k), donde h_i = $INT(\frac{n_i}{d*})$. En el juego correspondiente *G*, cada grupo *j* satisface $\frac{n_j}{h_j} \geq d*$ por lo que todo *j* puede dar a cada uno de sus h_j primeros candidatos al menos *d** votos, y esto implica, usando los lemas 1 y 2 y la proposición 1 (a), que en cualquier

Equilibrio de Nash el resultado esperado y real es la única asignación de la regla Jefferson-d´Hondt de esta situación.

b) Ahora suponemos que no hay divisor entero *d**. Sea *d'** el máximo entero tal que $\sum_{i=1}^{k} INT(\frac{n_i}{d'_*}) > q$.

b1) Si el grupo *j* satisface $\frac{n_j}{d'_*+1} \geq INT(\frac{n_j}{d'_*})$, puede dar al menos d'_* + 1 votos a un número de $INT(\frac{n_j}{d'_*})$ candidatos, asegurándose, por el Lema 2, un número de candidatos igual a $INT(\frac{n_j}{d'_*})$, exactamente el número de puestos que corresponde a *j* por la regla *J-dH*(*A*, *q*).

b2) Para probar que el número esperado de puestos en equilibrio, para los grupos *j* que no satisfacen $\frac{n_j}{d'_*+1} \geq INT(\frac{n_j}{d'_*})$, puede ser menor que el número mínimo de puestos correspondientes a aquellos grupos en la regla *J-dH*(*A*, *q*), considérese la situación (*A*, *q*), con cinco grupos, *q* = 6 and (n_1 , n_2, n_3, n_4, n_5) = (42, 28, 10, 10, 10).

Esta situación tiene un divisor *d* = 10.5, por lo que $\sum_{i=1}^{5} INT(\frac{n_i}{d})$ = 6. El intervalo de divisores es (10, 10.5] y la asignación de la regla Jefferson-d'Hondt es (4, 2, 0, 0, 0).

Sea el juego G_0 obtenido de esta situación que satisface las hipótesis H_1 a H_6, de tal modo que al grupo *j* sólo le importa el número de puestos obtenidos y el número total de votos obtenidos.

Si suponemos la versión fuerte de H_2, permitiendo los votos fraccionarios, es fácil comprobar que el modo obvio de votar (el grupo 1 da 10.5 votos a cuatro de sus candidatos, el grupo 2 da 14 votos a dos de sus candidatos y cada uno de los otros grupos da todos los votos a uno de sus candidatos) es un Equilibrio de Nash que conduce a la asignación de la regla d´Hondt.

En cambio, primero demostraremos que si sólo se permiten votos enteros, el modo obvio de votar no es un Equilibrio de Nash de G_0, ni conduce a la asignación d'Hondt.

Sea el perfil de acciones más obvias $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ en las que el grupo 1 da 11 votos a dos de sus candidatos y 10 votos a los otros dos, el grupo 2 da 14 votos a dos de sus candidatos y los otros tres grupos da todos sus votos a uno de sus candidatos. El resultado esperado de P es (2.8, 2, 0.4, 0.4, 0.4), diferente de la asignación d'Hondt (4, 2, 0, 0, 0).

Obsérvese que para el grupo 2, el número de puestos esperados es igual que el número de puestos correspondientes a este grupo según la regla Jefferson-d'Hondt, aunque esto no sucede para el grupo 1. Esto es así porque $\frac{n_2}{d'_* + 1} = \frac{28}{11} \geq INT(\frac{n_2}{d'_*}) =$ 2, cumpliendo la condición de la Proposición 2 (b1), mientras que $\frac{n_1}{d'_* + 1} = \frac{42}{11} < INT(\frac{42}{10}) =$ 4.

Además, demostraremos que hay un Equilibrio de Nash de G_0 para el que el número esperado de puestos del grupo 1 es menor que 4.

Consideremos ahora el nuevo perfil de acciones $P' = (a'_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ donde a'_1 consiste en que el grupo 1 da 14 votos a tres de sus candidatos, y el resto de acciones son las mismas que en P. El perfil P' conduce al resultado esperado (3, 2, 1/3, 1/3, 1/3), también diferente de la asignación d'Hondt. Demostremos finalmente que el perfil P' es un Equilibrio de Nash de G_0. Ninguna desviación unilateral de P' para el grupo 3 conduce a más de 1/3 puestos esperados ni a más de 10 votos. Lo mismo sucede a los grupos 4 y 5. Análogamente, ninguna desviación unilateral en P' del grupo 2 de a_2 conduce a más de 2 puestos esperados ni a más de 28 votos. El grupo 1 tampoco se desviará unilateralmente porque no puede conseguir más de 3 puestos esperados, porque eso requeriría votar por 4 candidatos repartiendo al menos entre dos de sus candidatos 10 o menos votos. Pero esto conduciría a 2.8 puestos esperados, como se ha visto en el perfil P.

b3) Consideremos la situación (A, q), y el juego G_0, descrito en (*b2*). Hemos observado que el único resultado esperado del perfil P' es (3, 2, 1/3, 1/3, 1/3). Los posibles resultados alcanzados son (3, 2, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 1, 0) y (3, 2, 0, 0, 1), y ninguno de ellos pertenece al conjunto $J\text{-}dH(A, q) = \{(4, 2, 0, 0, 0)\}$. Demostraremos que todo equilibrio de Nash de G_0 tiene el mismo resultado esperado y el mismo resultado alcanzado que en *P'*.

Toda acción del perfil *P'* asegura al grupo correspondiente el número de puestos esperados obtenidos en el perfil *P'*. De hecho, el grupo 3 (igual que el grupo 4 y 5) obtiene con la acción a_3 un mínimo de 1/3 puestos esperados, independientemente de las acciones del resto (dado que ningún grupo da votos a otros grupos porque una acción así estaría estrictamente dominada). Esto es así porque ningún grupo tiene incentivos para realizar desviaciones unilaterales: el grupo 1 no podrá dar más de 10 votos a más de 3 candidatos, ni el grupo 2 a más de 2 candidatos, ni el grupo 3 (4 y 5 también) a más de 1 candidato.

En consecuencia, todos los equilibrios de Nash tienen el mismo resultado esperado que *P'*, porque si hubiera un perfil *P''* con diferente número esperado de puestos que *P'*, habría un grupo con menos puestos esperados, y esto implicaría que la acción de este grupo no sería una respuesta óptima a la de los otros grupos, por lo que *P''* no sería un Equilibrio de Nash. Por lo tanto, el número de puestos esperados para cada grupo, para todos los equilibrios de G_0 es el mismo que en *P'*. □

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.

5.1. Introducción.

La Tesis estudia dos contextos de votación en el Parlamento: la votación que se realiza en el proceso de aprobación de un Proyecto de Ley y la elección de un órgano representativo como es la Mesa del Congreso de los Diputados.

Este capítulo se divide en dos secciones: por un lado, se resumen las aportaciones principales de la tesis; y, por otro, se explora el trabajo que queda por hacer.

5.2. Aportaciones principales de la Tesis.

Después del Capítulo primero, que define los conceptos básicos, y el Capítulo segundo, que expone las aportaciones de la literatura relacionadas con el primer contexto de votación analizado, las aportaciones principales de este trabajo se plantean en los Capítulos tercero (las dos primeras) y cuarto (las dos segundas).

Dichas **aportaciones** son:

1. Se amplía el análisis de las propiedades de los métodos parlamentarios relacionadas fundamentalmente con la Participación.

2. Se plantea una posible reducción del conjunto de resultados finales que pueden alcanzarse con un método parlamentario.

3. Se estudia teóricamente un mecanismo de votación que simplifica y generaliza el utilizado en la elección de Vicepresidentes y Secretarios en la Mesa del Congreso de los Diputados en España.

4. Se analiza empíricamente el modo en que se han votado, en las distintas legislatura de la Democracia, los miembros de la Mesa del Congreso.

En primer lugar, se ha definido y demostrado **una nueva equivalencia** entre el método de votación de la enmienda sustituta binaria sincera y el método de la enmienda compatible sofisticada. También se han analizado, en los métodos parlamentarios, las propiedades teóricas conocidas (relacionadas con la Participación y la Monotonía) y otras propuestas de carácter más práctico (rapidez y sencillez) comparando los resultados en función del comportamiento de los votantes.

El método sucesivo y el método de la enmienda compatible (utilizados en los parlamentos europeos) son los más rápidos y sencillos, pero también pueden elegir una alternativa Pareto dominada, independientemente de la hipótesis de comportamiento individual (sincero optimista, sincero pesimista, y sofisticado).

Por otro lado, el comportamiento sofisticado asegura la elección de la alternativa Condorcet, cuando existe, independientemente del método de votación.

A continuación se han definido **nuevas propiedades de Participación** (basándose en que los métodos parlamentarios son secuenciales), permitiendo la participación o abstención en cada una de las etapas (frente a la participación o abstención en todas las etapas). Existen situaciones en las que no aparece la Paradoja de la Abstención en todas las comparaciones, pero surge la Paradoja de la Abstención en alguna comparación.

El resultado es que, en general, los métodos parlamentarios, sufren las paradojas de la Abstención, incluso en sus versiones fuertes. La única excepción es el método sucesivo que, con un comportamiento sincero optimista de los votantes cumple la propiedad de Participación Positiva, y con un comportamiento sincero pesimista cumple la propiedad de Participación Negativa.

Por otro lado, aunque, en general, los métodos parlamentarios cumplen la propiedad de monotonía (independientemente del comportamiento de los votantes), el método de la enmienda compatible sufre la paradoja de preferencias reversibles, la paradoja de las preferencias espejo (y el método de la enmienda estándar con un comportamiento sincero también) y la paradoja de intercambiar la primera por la última alternativa.

En segundo lugar, se ha ampliado el análisis del Conjunto Equitativo (alternativas obtenidas con agendas que, usando el método de la enmienda estándar, conducen al mismo resultado tanto si el comportamiento es sincero como si es sofisticado), estudiando sus características, propiedades y lugar de la alternativa equitativa en la agenda, respondiendo a las preguntas de Reid (1997).

Se ha planteado un proceso de formación de la agenda Equitativa, y definido un nuevo conjunto intersección entre el Conjunto Equitativo y el *TEQ* (resultado del voto cooperativo) denominado el **conjunto *TEQE***: una alternativa del conjunto *TEQE* se puede alcanzar independiente del comportamiento de los votantes: sincero, sofisticado o cooperativo. Así pues, si se conoce la agenda que conduce a una alternativa del conjunto *TEQE*, la manipulación desde el punto de vista del organizador de la agenda será menor.

El resultado obtenido muestra que el conjunto TEQE existe para un número de alternativas igual o inferior seis, aunque también se ha comprobado su existencia en todos los cálculos realizados en algunos torneos para un número superior de alternativas. Esto permite realizar ***la conjetura de que el conjunto TEQE es un conjunto no vacío****. Las conclusiones más importantes de ese aspecto son:*

a) **Una alternativa del conjunto *E* y otra del conjunto *TEQ* pueden no pertenecer al *TEQE*;**

b) **El conjunto *E* es, en general, más reducido que el conjunto *TEQ* en relación a Banks;**

c) **El conjunto *TEQE* es más parecido al conjunto *E* que al *TEQ*.**

En tercer lugar se ha analizado, desde un punto de vista teórico, el modo de **elección de los miembros de la Mesa del Congreso**. Se ha analizado la formación de la Mesa del Congreso de los Diputados español mediante un modelo más general (elección de *q* miembros con *e* votantes) demostrando que, en teoría (es decir, si se cumplen las hipótesis del modelo), la asignación resultante de actuar de acuerdo con un *Equilibrio de Nash coincide con la asignación d´Hondt, si los votos fraccionarios están permitidos*. Ver Pérez y De la Cruz (2012).

Además se **conjetura** que dicha coincidencia se cumple con la regla de desempate aplicada en el artículo 37.3. del Reglamento del Congreso en su interpretación débil, si los **votos fraccionarios no están permitidos** (supuesto más cercano a la realidad).

El análisis realizado es típico de las Ciencias Sociales: una vez planteadas las hipótesis, se ha modelado la votación para la elección de los miembros de la Mesa como un juego, que se realiza en la sesión constitutiva de cada Legislatura obteniendo un resultado: *en la mayoría de las votaciones, el mecanismo de votación implementa la fórmula Jefferson-d´Hondt* y una conjetura: *la regla de desempate débil implementa la fórmula Jefferson-d´Hondt en la formación de una comisión parlamentaria*.

En cuarto lugar se ha realizado un **análisis empírico de las votaciones de la Mesa del Congreso**, comprobando que, *en general, la asignación d´Hondt se consigue en todas las votaciones, aunque las acciones no sean Equilibrio de Nash* debido a que en la práctica existen consideraciones que no se pueden tener en cuenta en las hipótesis teóricas. Lo anterior podría concretarse, de manera intuitiva, diciendo que los grupos no están muy pendientes de los detalles de las acciones concretas, pero sí consiguen la asignación d´Hondt.

También se han revisado las votaciones de la Mesa del Senado y de los Parlamentos Autonómicos reflexionando sobre la diferencia entre elegir tres Secretarios en dos votaciones separadas (como en la Asamblea de Madrid) y elegirlos en una única votación. El primer caso favorece al grupo mayoritario mientras que el segundo es más proporcional.

5.3. Líneas de trabajo futuro.

Existen al menos dos vías de trabajo futuro: por un lado, es posible realizar un análisis de mayor alcance y profundidad, ayudándose cunado se precise de herramientas informáticas, de los conjuntos de alternativas finales; y por otro lado, se puede ampliar el estudio de la elección de miembros en la Mesa del Congreso.

La **primera vía de trabajo futuro** consiste en realizar análisis más generales de las propiedades que cumplen los métodos de votación secuenciales, los métodos binarios como categorías que incluyen a los métodos parlamentarios.

También sería necesario realizar una demostración formal de la existencia del conjunto *TEQE*, para asegurarse que la intersección entre el *TEQ* y el *E* no es vacía para cualquier número de alternativas.

Además, es necesario aprovechar programas informáticos, para obtener más información del conjunto *TEQE*, si bien la demostración de su existencia para cualquier número de alternativas deberá de ser matemática. También se puede aprovechar la información de los torneos no isomórficos en relación con el incumplimiento de las propiedades de Participación (completando totalmente la tabla de la sección 3.5.3).

En cuanto a la **segunda vía de trabajo futuro**, consistente en ampliar el análisis del mecanismo de elección de miembros en la Mesa del Congreso, se podría estudiar un cambio en la fórmula de asignación. Desde un punto de vista **teórico**, Hamilton favorece más a los grupos reducidos frente a d´Hondt que favorece a los grupos más numerosos. Por ello sería útil averiguar la respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué cambio habría que hacer en el Reglamento del Congreso para que se votara según otra regla, como por ejemplo Hamilton? ¿Qué consecuencias tendría? ¿Cómo se organizaría la votación? En definitiva, sería interesante analizar cómo se implementa Hamilton vía Equilibrio de Nash en el Reglamento del Congreso.

Por otro lado, y desde un punto de vista **práctico**, intentar mejorar el análisis para comprender mejor, y tratar de predecir *a priori*, cuál será el resultado de una votación de Vicepresidentes y Secretarios.

Además, se podrían analizar matemáticamente los **Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos,** teniendo en cuenta la regla de desempate que se describe en el artículo 37.3 del Reglamento del Congreso de los Diputados: *“Si en alguna votación se produjere empate, se celebrarán sucesivas votaciones entre los candidatos igualados en votos hasta que el empate quede dirimido.”*

También existe la posibilidad de ampliar el estudio por la vía del **diseño**, esto es, crear un método de elección de miembros a la Mesa del Congreso que pueda cumplir alguna propiedad deseable, por ejemplo, que sea más proporcional, en el sentido de que represente mejor todos los grupos que existen en la Cámara. En este sentido parece claro que existen tres parámetros relevantes que influyen en la proporcionalidad:

1. El número de puestos del comité. Cuanto mayor sea el número de puestos más proporcional será el comité.

2. El número de nombres que se escriben en la papeleta. Cuanto mayor sea el número de nombres escritos en la papeleta menos proporcional será el comité (como sucede en la elección de Secretarios del Senado, que se escriben dos nombres).

3. El número de veces que se vota. Cuanto mayor sea el número de veces que se vota menos proporcional será el comité (como sucede en la elección de Secretarios en la Asamblea de Madrid, que se hace en dos fases primero se vota la elección de dos Secretarios y después se vota un Secretario).

Con todo ello sería posible proponer modificaciones en el Reglamento del Congreso con el objetivo de mejorar la representatividad en el órgano representativo de la Mesa del Congreso. En concreto, se podría incrementar el número de Vicepresidentes o de Secretarios para captar mejor la pluralidad de grupos parlamentarios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, K. A. (1951) *Social choice and individual values.* John Wiley & Sons, Inc.

Banks, J. S. (1985) "Sophisticated voting outcomes and agenda control", *Social Choice and Welfare*, 1, 295-306.

Banks, J. S. (1989) "Equilibrium outcomes and agenda control", *Social Choice and Welfare,* 1, 295-306.

Balinski, M. L. y Young, H. P. (2001) *Fair representation. Meeting the ideal of one man, one vote.* Brookings Institution Press.

Black, D. (1958) *The theory of committees and elections.* Cambridge University Press.

Bjurulf, B. H. y Niemi, R. G. (1981) "Order of voting effects" en Holler (1981) *Power, voting and voting power*. Physica-Verlag.

Corte-Real y Paulo, T. P. (2004) "The voter who wasn't there: Referenda, representation and abstention", *Social Choice and Welfare,* 22, 2, 349-369

Cox, G. W. (1991) "SNTV and d´Hondt are equivalent", *Electoral Studies*¸10, 2, 118-132.

De la Cruz, O., Dueñas, D. y Pérez, J. (2004) "La elección de vicepresidentes y secretarios en la Mesa del Congreso: ¿Existe un modo adecuado de votar?", *Revista de las Cortes Generales,* 62, 199- 212.

Diario de Sesiones de la Sesión Constitutiva del Congreso de Diputados: http://www.congreso.es/portal/page/portal/Congreso/Congreso/Publicaciones/DiaSes/Pleno

Diario de sesiones de la Asamblea de Madrid: http://www.asambleamadrid.es/AsambleaDeMadrid/es/ActividadParlamentaria/Publicaciones/BuscadorPublicaciones/

Farquharson, R. (1969) *Theory of voting.* Yale University Press.

Fernández Riveira, R. M. (2003) *El voto parlamentario.* Centro de Estudios Políticos y Constitucionales (Madrid). Cuadernos y debates.

Fishburn, P. C. (1973) *The theory of social choice*. Princeton University Press.

Fishburn, P. C. (1977) "Condorcet social choice functions", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33, 469-489.

Fishburn, P. C. (1982) "Monotonicity paradoxes in the theory of voting" *Discrete Applied Mathematics,* 4, 119-134.

Fishburn, P. C. y Brams, S. J (1983) “Paradoxes of preferential voting”, *Mathematics Magazine*, 56, 207-214.

Gibbard, A. (1973) “Manipulation of voting schemes; a general result”. *Econometrica*, 41, 587-601.

Goldberg, M. (1966) *Results on the automorphism group of a graph*. M. Sc. Thesis. University of Alberta.

Goldberg, M. and Moon, J. W. (1969) “On the maximum order of the group of a tournament”, *Canadian Mathematical Bulletin*, 9, 563-569.

Hudry, O. (1999) “A smallest tournament for which the Banks set and the Copeland set are disjoint”, *Social Choice and Welfare*, 16, 137-143.

Jimeno, J. L. (2003) *Propiedades de participación en los métodos de agregación de preferencias*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.

McKelvey, R. (1976) “Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control”, *Journal of Economic Theory,* 12, 472-482.

McKelvey, R. y Niemi, R. G. (1978) “A multistage game representation of sophisticated voting for binary procedures”, *Journal of Economic Theory,* 18, 1-22.

Laffond, G., Laslier, J.F. y Le Breton, M. (1995) “Condorcet choice correspondences: A set-theoretical comparison”, *Mathematical Social Sciences,* 30, 23-35.

Laslier, J. F (1997) *Tournament solutions and majority voting*. Springer.

Miller, N. R. (1977) “Graph-theoretical approaches to the theory of voting”, *American Journal of Political Science*, 21, 769-803.

Miller, N. R., Grofman, B. y Feld, S.L. (1990) “The structure of the Banks set”, *Public Choice*, 66, 243-251.

Miller, N. R. (1995) *Committees, agendas, and voting*. Harwood Academic Publishers.

Moon, J. W. (1964) “Tournaments with a given automorphism group”, Canadian Journal of Mathematics, 16, 485-489.

Moulin, H. (1988) “Condorcet´s principle implies the No Show Paradox”, *Journal of Economic Theory*, 45, 53-64.

Nurmi, H. (1987) *Comparing voting systems.* D. Reidel Pub. Co.

Nurmi, H. (1999). *Voting paradoxes and how to deal with them*. Springer-Verlag.

Nurmi, H. (2002). *Voting procedures under uncertainty*. Springer-Verlag.

Nurmi, H. (2004) **“**Monotonicity and its cognates in the theory of choice”, *Public Choice,* 121, 25- 49.

Ordeshook, P. C. (1992) *A political theory primer.* Routledge.

Ordeshook, P. C. y Schwartz (1987) “Agendas and the control of political outcomes”, *American Political Science Review,* 81, 179-199.

Pérez, J. (2001) “The Strong No Show Paradoxes are a common flaw in Condorcet voting correspondences”, *Social Choice and Welfare*, 18, 601-616.

Pérez, J., Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2004) "Teoría de juegos". Prentice Hall.

Pérez, J. y De la Cruz, O. (2012) “Implementation of Jefferson-d’Hondt rule in the formation of a parliamentary committee”, *Social Choice and Welfare* (en segunda revision).

Rasch, B. (1987) “Manipulation and strategic voting in the Norwegian parliament”, *Public Choice*, 52, 57-73.

Rasch, B. (1995) “Parliamentary voting procedures” en *Parliaments and majority rule in Western Europe*. *A publication of the Mannheim Centre for European Social Research (MZES) at the University of Mannheim*. Herbert Döring, Frankfurt/New York: Campus Verlag/St. Martin´s Press.

Rasch, B. (2000) “Parliamentary floor voting procedures and agenda setting in Europe”, *Legislative Studies Quarterly,* 25, 1, 3-23.

Reglamento de la Asamblea de Madrid: http://www.asambleamadrid.es/Resources/Ficheros/DocPortal/DocPortal/Reglamento%20de%20la%20Asamblea%20de%20Madrid.pdf

Reglamento del Congreso de los Diputados: http://www.congreso.es/portal/page/portal/Congreso/Congreso/Hist_Normas/Norm/reglam_congreso.pdf

Reid, K. B. (1997) “Equitable agendas, agendas ensuring identical sincere and sophisticated voting decisions”, *Social Choice and Welfare*, 14, 363-377.

Riker, W. H. (1980) “Implications from the disequilibrium of majority rule for the study of institutions”, *American Political Science Review*, 74, 432-46.

Saari, D.G. y Barney, S. (2003) “Consequences of reversing preferences”. *Mathematical Intelligencer* 25, 4, 17-31.

Satterthwaite, M. A. (1975): “Strategy-Proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions”, *Journal of Economic Theory*, 10, 187-217.

Schofield, N. (1978) “Instability of simple dynamic games”, *Review of Economic Studies,* 45, 575-594.

Schwartz, T. (1990) “Cyclic tournaments and cooperative majority voting: A solution”, *Social Choice and Welfare*, 7, 19-29.

Shepsle, K. A. y Weingast, B. R (1984) “Uncovered sets and sophisticated voting out comes with implications for agenda institutions”, *American Journal of Political Science,* 28, 1, 49-74.

Vallès, J. M. y Bosch, A. (1997) *Sistemas electorales y gobierno representativo.* Ariel Ciencia Política. Barcelona.

Taylor, A. D. y Pacelli, A. M. (2009) *Mathematics and politics, strategy, voting, power and proof.* Springer (2ª ed).