Franz Embacher, Universität Wien

Gleichungen, Ungleichungen, Unbekannte, Variable – Auffassungen angehender Lehrkräfte

Mathematische Aufgabenstellungen können im Hinblick auf die mathematischen Objekte, von denen die Rede ist, deren Eigenschaften und Beziehungen und die Frage, was eigentlich gesucht ist, verstanden werden. Sie können aber auch unter einem operationalen Blickwinkel verstanden werden, der sich auf die Handlungen (Lösungsverfahren) bezieht, die zu ihrer Bearbeitung erforderlich sind. Objekt- und Prozessauffassung sind gleichermaßen wichtig. Das Eine schafft die Bedingungen für die Weiterentwicklung des Anderen auf höherer Abstraktionsstufe, nicht nur in der historischen Entwicklung der Mathematik, sondern auch beim individuellen Mathematiklernen. Eine einseitige Betonung des operationalen Zugangs drückt sich oft dadurch aus, dass eine Aufgabenstellung vorschnell eine Handlung auslöst („triggert“), ohne dass die mathematische Fragestellung und die Natur der auftretenden Objekte hinreichend bewusst gemacht werden. Ist heutigen angehenden Lehrkräften dies bewusst, und welche Rolle spielt es in ihrer Konzeption von Mathematikunterricht?

Hintergrund

Angeregt durch die jüngst fertiggestellte Diplomarbeit von Valentin Parzer (2015) und angelehnt an die Literatur der „APOS-Theorie“ (Arnon *et. al.* 2014) sowie eine Untersuchung von Anna Sfard und Liora Linchevski (1994) wurde versucht, im Rahmen einer Erhebung mit 58 Studierenden des Lehramts Mathematik an der Universität Wien Ansätze einer Antwort anhand des Themenbereichs Gleichungen und Ungleichungen zu gewinnen. Die Befragung wurde im Jänner 2015 in zwei Lehrveranstaltungen (einer Vorlesung mit Semesterzahlen: 7 ± 3 und einem Seminar mit Semesterzahlen 8 ± 1) durchgeführt.

Befragung

Die Untersuchung bestand aus 5 Fragen mit offenem Antwortformat.

- In Frage 1 wurde gefragt, ob nach Meinung der Studierenden beim Lösen der Gleichung $x+3=8$ und beim Lösen der Ungleichung $x+3>8$ grundsätzlich unterschiedliche kognitive Anforderungen gefordert sind.
- Frage 2 lautete: Wie helfen Sie einem Schüler der Unterstufe, der die Aufgabenstellung „löse $2x+3=6-x$ “ nicht verstanden hat? Sa-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. WTM-Verlag, Münster, 2016, S. x-y

gen Sie ihm kurz und prägnant, worum es bei dieser Aufgabenstellung geht!

- Frage 3: Analog mit der Aufgabenstellung „löse $2x+3>6-x$ “.
- Frage 4: Analog mit einem Schüler der Oberstufe und der Aufgabenstellung „löse $x^2-5x+6=0$ “.
- Frage 5: Analog mit der Aufgabenstellung „löse $x^2+x+1>0$ “.

Die Fragestellungen zu den Fragen 2 – 5 waren bewusst so gestellt, dass die Befragten frei waren, zu interpretieren, was es bedeutet, dass ein Schüler die Aufgabenstellung „nicht verstanden hat“ und „worum es“ bei ihr „geht“, also etwa, ob Hilfestellung bei der Anwendung eines Lösungsverfahrens gegeben werden soll oder ob es um das Verständnis geht, was die jeweilige (Un-)Gleichung bedeutet bzw. was eigentlich gesucht ist (oder beides).

Die Studierenden hatten 15 Minuten Zeit, die Fragen zu beantworten.

Auswertung

Die Antworten der Studierenden wurden zunächst entsprechend einem binären-Raster (Ja = 1, Nein = 0) hinsichtlich des Vorhandenseins oder Nichtvorhandenseins der folgenden Aspekte ausgewertet:

- Frage 1:
    a. Gibt der/die Befragte an, dass es einen wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
    b. Gibt der/die Befragte an, dass es keinen wesentlichen Unterschied in den kognitiven Anforderungen gibt?
    c. Wird lediglich auf operationale Unterschiede eingegangen?
    d. Wird der Unterschied
        lineare Gleichung: eine Zahl (Unbekannte) gesucht
        lineare Ungleichung: Menge von Zahlen gesucht
       zum Ausdruck gebracht?
    e. Werden Begriffe wie „Unbekannte“, „Platzhalter“ oder „Lösung(en)“ in korrekter Weise verwendet?
- Fragen 2:
    a. Bringt der/die Befragte lediglich operationale Aspekte des Lösungsverfahrens zum Ausdruck, interpretiert also „worum es geht“ in dieser Weise?
    b. Gibt der/die Befragte ausdrücklich an, dass es gilt, eine (zunächst unbekannte) Zahl zu finden?
- Frage 3:
    a. wie Frage 2

b. Analog zu Frage 2: …mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) zu finden und anzugeben?

- Frage 4:
  a. wie Frage 2
  b. Gibt der/die Befragte ausdrücklich an, dass man hier unter Umständen mehrere (maximal 2) Zahlen finden muss?
- Frage 5:
  a. wie Frage 2
  b. Analog zu Frage 4: …dass man hier mehrere (viele) Zahlen (eine Menge von Zahlen) finden und angeben muss?

Dabei ist zu betonen, dass es nicht um eine Überprüfung fachlichen Wissens ging, sondern um die Frage, welche Aspekte die Studierenden von sich aus und in eigenen Worten auf die gestellten Fragen zum Ausdruck brachten.

Zuletzt wurde für jedeN BefragteN ein „Gesamtscore" nach dem Muster

score = 1a – 1b – 1c + 1d + 1e – 2a + 2b – 3a + 3b – 4a + 4b – 5a + 5b + 6

aus den binären Antwortdaten berechnet. Er kann ganzzahlige Werte zwischen 0 und 12 annehmen und stellt einen Versuch dar, die Auffassungen der Studierenden auf einer Skala zwischen objekt- und verstehensorientiert (hoher Score) und verfahrensorientiert (niedriger Score) anzusiedeln.

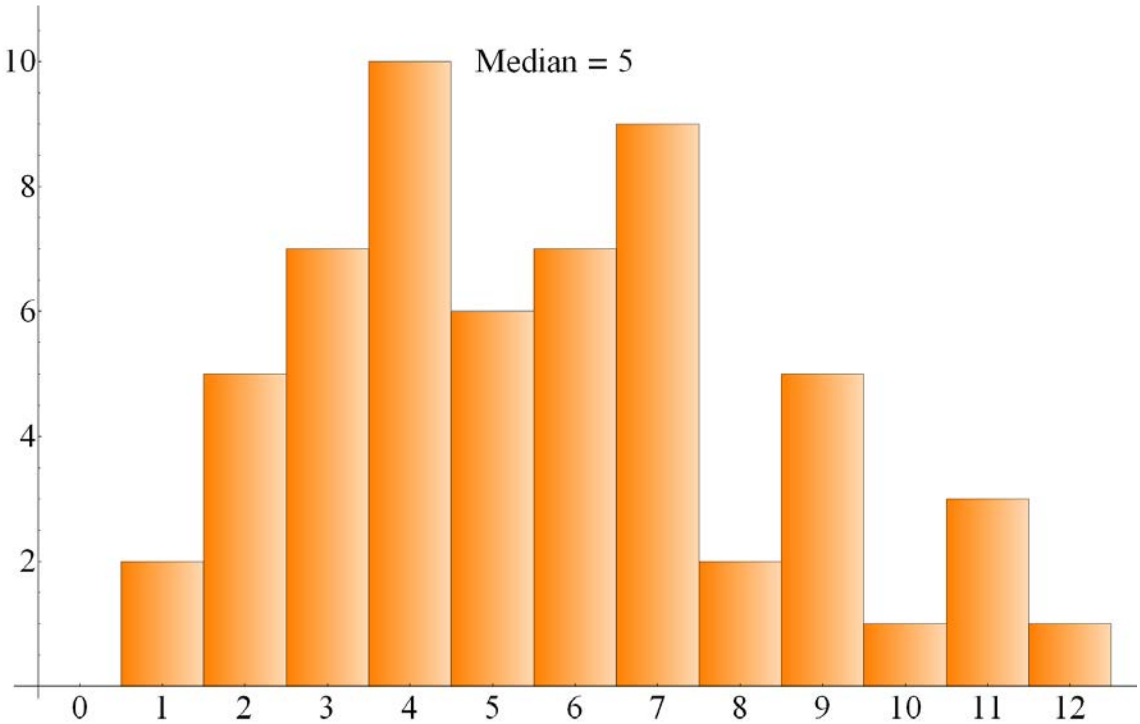

Abbildung 1: Verteilung der Gesamtscores.

Ergebnisse

Generell zeigt sich ein Überhang des verfahrensorientierten Zugangs. Abbildung 1 zeigt die Verteilung der Gesamtscores.

Die Detailauswertung der einzelnen Fragen unterstützt dieses Muster:

- 36% der Befragten äußern in ihrer Antwort zu Frage 1 ohne Einschränkung, dass kein wesentlicher Unterschied in den kognitiven Anforderungen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen besteht.
- Nur 31% der Befragten erwähnen bei Frage 1 den entscheidenden Unterschied beim Lösen einer linearen Gleichung (Zahl gesucht) und einer linearen Ungleichung (Menge von Zahlen gesucht).
- 20% der Befragten gehen bei Frage 1 lediglich auf operationale Unterschiede beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen ein (vor allem auf dem Umgang mit dem Ungleichheitszeichen bei Äquivalenzumformungen).
- Nur 12% der Befragten verwenden bei Frage 1 Begriffe wie „Unbekannte“, „Platzhalter“ oder „Lösung“ in korrekter Weise.
- Bei den Fragen 2 – 5 geben viele Befragte lediglich eine auf ein Lösungsverfahren bezogene Antwort, d.h. sie interpretieren „worum es bei der Aufgabenstellung geht“ in dieser Weise: Frage 2: 41%, Frage 3: 55%, Frage 3:59%, Frage 4: 50%.
- Ein Hinweis, was eigentlich gesucht ist, kommt bei den Fragen 2 – 5 mit folgenden relativen Häufigkeiten vor: Frage 1: 52%, Frage 3: 33%, Frage 4: 26%, Frage 5: 29%.
- Nur 7% geben bei beiden Oberstufenaufgaben (Fragen 4 und 5) einen Hinweis, was eigentlich gesucht ist.

Für weitere Details zur Auswertung siehe Embacher (2016).

Literatur

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., and Weller, K. (2014): *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Embacher, Franz (2016): http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/GDM2016.

Parzer, Valentin (2014): *Die Entwicklung mathematischer Konzeptvorstellungen von rechenbetonten Prozessen zu abstrakten Objekten*, Diplomarbeit an der Universität Wien. Online: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/Diplomarbeiten/DIPLOMARBEIT_Valentin_Parzer.pdf.

Sfard, Anna and Linchevski, Liora (1994): *The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra*. Educational Studies in Mathematics 26, pp. 191-228.