APhEx 9, 2014 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 06/09/2013
Accettato il: 09/12/2013
Redattore: Vera Tripodi

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°9 Gennaio 2014

T E M I

LOGICHE SOTTOSTRUTTURALI

Antonio Ledda

Questo lavoro è un invito allo studio delle logiche sottostrutturali, una famiglia di logiche che generalizzano la logica classica. In primo luogo, discuteremo la formulazione della logica classica à la Gentzen, per poi vedere, passo dopo passo, quali siano le motivazioni che possono spingere a considerare le sue generalizzazioni sottostrutturali.

1. INTRODUZIONE
2. IL CALCOLO **LK**
3. IL RUOLO DELLE REGOLE STRUTTURALI
4. Conclusioni
BIBLIOGRAFIA

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

1. Introduzione

In questo lavoro cercherò di presentare il tema delle logiche sottostrutturali.[1] In particolare, inizieremo con l'introdurre il calcolo dei sequenti per la logica classica, **LK**, introdotto da Gerhard Gentzen negli anni '30 del secolo scorso. Vedremo come questo si sviluppa a partire dagli assiomi attraverso delle regole. Queste regole possono essere raggruppate in due insiemi disgiunti, le *regole operazionali*, che coinvolgono direttamente i connettivi logici, e quelle *strutturali*, che agiscono sulla struttura delle prove. Vedremo, quindi, come queste regole agiscono all'interno del calcolo, e qual è il significato, sia formale sia intuitivo, di ciascuna di esse. Una volta descritto il funzionamento del calcolo ci soffermeremo su ciascuna regola strutturale, cercando di capire quali siano le motivazioni tecniche e quelle pragmatiche, che si agganciano alla struttura del linguaggio naturale e della comunicazione quotidiana, che motivano la presenza della regola all'interno del calcolo. Cercherò quindi di illustrarne i "pro ed i contro" provando a descrivere quali siano le ragioni per limitare, in una possibile generalizzazione di **LK**, l'uso di una specifica regola.

Il livello di approfondimento formale del lavoro sarà minimo. Piuttosto, proverò ad offrire una descrizione soprattutto intuitiva dei concetti formali. La motivazione di questo lavoro, infatti, vuole essere principalmente quella di proporre una introduzione non tecnica al tema. Cercherò di mantenere il discorso il più possibile autocontenuto, fornendo tutte le nozioni necessarie. Nessun prerequisito specifico, perciò, verrà richiesto al letto-

[1] Una precisazione sull'uso delle persone verbali in questo lavoro: la prima persona singolare verrà usata per indicare azioni da riferirsi all'autore. La prima persona plurale verrà utilizzata per riferirsi ad azioni che coinvolgono sia l'autore sia il lettore.

re: per seguire la discussione sarà sufficente possedere un'idea (anche vaga) di cosa sia un calcolo logico. Quando un minimo di formalismo verrà introdotto, cercherò attraverso esempi intuitivi di facilitarne la comprensione. Infine, una lista di riferimenti bibliografici correderà il discorso, così da proporre al lettore che fosse interessato delle fonti per approfondire gli argomenti introdotti.

2. Il calcolo **LK**

Innanzi tutto, credo sia giusto cominciare il nostro discorso dando credito a chi ha coniato il termine *logiche sottostrutturali*: Peter Schroeder-Heister e Kosta Doŝen, che nell'introduzione del loro "Substructural Logics" dell'ormai lontano 1993 scrivono:

> La dicitura di logiche sottostrutturali, che indica quelle logiche che hanno restrizioni sulle regole strutturali, ha fatto la sua prima apparizione pubblica nella conferenza dedicata a queste logiche che abbiamo organizzato nel *Seminar für natürlich-sprachliche Systeme* dell'Università di Tübingen, il 7-8 ottobre 1990. (Schroeder-Heister Doŝen, 1993, Preface, pag. v)

Per capire cosa significa per una logica avere restrizioni sulle regole strutturali, è necessario, in primo luogo, intenderci su che cosa siano queste regole.

La prima apparizione esplicita delle regole strutturali è da far risalire alla tesi di dottorato di Gerhard Gentzen (Szabo, 1969). È in questo lavoro che, per la prima volta, vengono delineate con chiarezza le caratteristiche di queste di regole d'inferenza: sono regole che non coinvolgono alcuno specifico simbolo logico, ma che operano esclusivamente *sulla struttura*, come vedremo, della dimostrazione. Gentzen battezzò tali regole, appunto, *strutturali*. Queste regole d'inferenza rivestono un'importanza tale che, implicitamente, la loro presenza si rileva già negli anni venti del secolo passato nei lavori di Hilbert, così come in Hilbert-Bernays (Hilbert Bernays, 1934, III.§3), e nei lavori di Hertz (Hertz, 1922, 1923b, 1923a, 1929). Questi scritti ebbero certamente una rilevanza nel lavoro di Gentzen, che si formò a Gottinga con i loro autori.

Iniziamo ora a descrivere questo calcolo logico.

Il sistema di calcolo proposizionale di Gentzen per la logica classica, storicamente indicato con **LK**, si basa su un *linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$, le cui formule verranno indicate con $A, B, C, \ldots$, e le cui sequenze finite di formule saranno denotate con lettere greche maiuscole $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \ldots$.

Un *sequente* è una espressione della forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Se Δ è vuoto o consiste di un'unica formula, allora il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è detto a *conclusione singola*; in caso contrario è detto a *conclusione multipla*. Nella formulazione di **LK** i sequenti saranno, usualmente, a conclusione multipla.

Intuitivamente, il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ può essere interpretato in questo modo: dalle premesse in Γ *sono deducibili* le formule in Δ. Ossia, dati $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ e $\Delta = \{B_1, ..., B_m\}$, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è da intendersi come

$$A_1 \text{ e } A_2 e \ldots \text{ e } A_n \text{ implica } B_1 \text{ o } B_2 \text{ o } \ldots \text{ o } B_m. \tag{1}$$

Così, Γ e Δ verranno chiamati *l'antecedente ed il conseguente*, rispettivamente, del sequente.

Certamente, attraverso questa nozione di sequente è possibile formalizzare le consuete forme di inferenza, e.g. il *modus ponens*, che può essere formulato come $A, A \to B \Rightarrow B$. Tuttavia, come a breve vedremo, le regole di inferenza previste nel sistema **LK** sono qualcosa di diverso: possiedono inferenze come premesse, ed inferenze come conclusio-

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

ni. Come notato da K. Doŝen (Schroeder-Heister Doŝen, 1993, pag. 3), è come se le inferenze ordinarie, quali il modus ponens, fossero inferenze di *primo livello*, diversamente da quelle di **LK**, che sono inferenze di *secondo livello*, che conducono, appunto, da inferenze ad altre inferenze.

Il calcolo **LK** parte dagli assiomi e si sviluppa attraverso regole di inferenza. Nello specifico, l'unico assioma di **LK** sarà *l'identità*,

$$A \Rightarrow A.$$

Mentre, per quanto riguarda le regole di inferenza, queste saranno delle coppie o delle terne ordinate di sequenti S_1, S_2, S_3, organizzate in uno dei seguenti modi:

$$\frac{S_1}{S_2} \qquad\qquad \frac{S_1 \qquad S_2}{S_3}$$

I sequenti al di sopra della linea orizzontale sono *le premesse* della regola, mentre il sequente al di sotto della linea orizzontale è la sua conclusione.

Come ora vedremo, le regole di inferenza potranno essere classificate in due famiglie disgiunte; quella delle *regole strutturali*, e quella delle *regole operazionali*:

Tabella 1: **Regole strutturali**

Regole di indebolimento

(SI)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(DI)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Regole di contrazione

(SC)
$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(DC)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Regole di scambio

(SS)
$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Pi}$$

(DS)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Pi}$$

Regola di cesura

(cut)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Tabella 2: **Regole operazionali**

(S¬)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(D¬)
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

(S∧)
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(S∧)
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{B \wedge A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(D∧)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

(S∨)
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(D∨)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

(D∨)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \vee A}$$

(S→)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

(D→)
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

In tutte queste regole, le occorrenze delle sequenze di formule $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma$ sono dette *formule laterali*, mentre le ogni altra occorrenza è chiamata *formula principale*. Una *dimostrazione* in **LK** sarà, quindi, un albero finito, le cui foglie sono assiomi, ed i cui nodi saranno etichettati da sequenti, in maniera tale che ciascun sequente in un nodo sia ottenuto dai sequenti predecessori attraverso una applicazione di una regola di **LK**.

Un sequente sarà, pertanto, dimostrabile se etichetta la radice di una dimostrazione di **LK**. Ora, se $\mathcal{D}_1$ è una dimostrazione e $\mathcal{D}_2$ è un suo sottoalbero, $\mathcal{D}_2$ sarà a sua volta una dimostrazione in **LK**, detta anche una *sottodimostrazione* di $\mathcal{D}_1$.

Vediamo adesso due esempi di dimostrazioni in **LK**.

$$\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B}\,(\mathrm{D}\vee)}{A \Rightarrow A \wedge (A \vee B)}\,(\mathrm{D}\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,(\mathrm{SI}) \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow B \vee C}\,(\mathrm{D}\vee)}{A, B \Rightarrow B \vee C}\,(\mathrm{SI})}{A, B \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{D}\wedge)}{A \wedge B, B \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{S}\wedge)}{A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{S}\wedge)}{A \wedge B \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{SC}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, C \Rightarrow A}\,(\mathrm{SI}) \qquad \dfrac{\dfrac{C \Rightarrow C}{C \Rightarrow B \vee C}\,(\mathrm{D}\vee)}{A, C \Rightarrow B \vee C}\,(\mathrm{SI})}{A, C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{D}\wedge)}{A \wedge C, C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{S}\wedge)}{A \wedge C, A \wedge C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{S}\wedge)}{A \wedge C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{SC})}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Rightarrow A \wedge (B \vee C)}\,(\mathrm{S}\vee)$$

È naturale chiedersi quali siano le differenze tra le regole strutturali e quelle operazionali. In primo luogo, è evidente che tutte le regole operazionali hanno a che fare coi simboli logici. Per la precisione, ci dicono come ogni connettivo può essere introdotto nell'antecedente e nel conseguente di un sequente. Notiamo, inoltre, che queste regole ci dicono solo come introdurre, mai come eliminare simboli logici dai sequenti. Questo in accordo con l'intenzione di Gentzen di costruire **LK** come un calcolo dove tutti i contenuti fossero preservati nell'applicazione di una regola.

Seguendo l'interpretazione in (Paoli, 2002), possiamo pensare le regole operazionali come una maniera di descrivere il significato dei simboli logici.

Il caso delle regole strutturali, tuttavia, è differente. Queste, evidentemente, non specificano in nessun modo il comportamento di alcun simbolo logico. Piuttosto, tali regole agiscono sulla struttura dei sequenti, senza alcun riferimento ai simboli logici. Un fatto è sicuramente notevole: tutte le regole strutturali, con l'esclusione del cut, riflettono la forma delle regole operazionali, senza però che i connettivi logici siano menzionati. Se ci atteniamo all'interpretazione in poc'anzi possiamo vederle come una descrizione a livello metalinguistico delle trasformazioni che le regole operazionali sanciscono a livello linguistico. Tuttavia, le interpretazioni a riguardo sono piuttosto articolate e spesso contrastanti. Cerchiamo quindi di descrivere le regole strutturali interrogandoci sulla loro funzione all'interno del calcolo.

Qual è il ruolo di queste regole strutturali?

La risposta a questa domanda dipende fondamentalmente dal punto di vista assunto sui simboli logici. Ossia, se si ritiene che questi simboli completamente descritti dalle regole operazionali o meno.

Seppure Gentzen non si fosse pronunciato esplicitamente in merito, la filosofia della teoria della dimostrazione ha visto un ampio dibattito in merito, che spazia dalle posizioni che guardano al significato dei simboli logici come meramente operazionale, sino a posizioni decisamente opposte.

Un esempio netto è la posizione di S. Negri e J. von Plato (von Plato Negri, 1996): per loro l'unico ruolo delle regole strutturali concerne lo scarico delle premesse all'interno del calcolo della deduzione naturale.

Vediamo nello specifico un esempio (von Plato Negri, 1996).

Consideriamo la prova del sequente $\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\text{(SI)}}{A \Rightarrow B \rightarrow A}\text{(D}\rightarrow\text{)}}{\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)}\text{(D}\rightarrow\text{)}$$

Questa prova illustra chiaramente il ruolo della regola di indebolimento. La prova si sviluppa da una sottodimostrazione che parte da una premessa della forma $A, \Gamma \Rightarrow A$, che può essere ottenuta grazie a ripetute applicazioni dell'indebolimento a sinistra nell'assioma $A \Rightarrow A$. Infatti, grazie all'indebolimento a sinistra, nella seconda riga della dimostrazione abbiamo ampliato la premessa A introducendo una arbitraria premessa B. Questa nuova formula gioca un ruolo attivo nella dimostrazione, come osserviamo nella terza riga della prova, dove questa premessa viene appunto scaricata. Il ruolo dell'indebolimento, secondo Negri e von Plato, consiste nel fatto che:

> [...] ogni volta che vi è uno scarico di premesse banale in una prova in deduzione naturale, vi è, nella corrispondente derivazione nel calcolo dei sequenti, un'istanza di una regola con una formula attiva introdotta nella derivazione attraverso l'indebolimento (von Plato Negri, 1996, p. 17).

Cosa avverrebbe se nel calcolo fossero ammessi degli assiomi come $A, \Gamma \Rightarrow A$, con Γ una arbitraria sequenza di formule?

Secondo la prospettiva di Negri e von Plato, dunque, non sarebbe più necessario introdurre nel calcolo una regola che riflettesse lo scarico banale delle premesse. Infatti, oltre alla formula A nell'antecedente del sequente, avremmo a disposizione un contesto arbitrario Γ, contenente formule arbitrarie. In questo senso, quindi, il ruolo dell'indebolimento a sinistra diverrebbe superfluo.

Diametralmente opposta è la posizione di Girard, che, estremizzando le idee di Došen, invita a considerare una logica come nient'altro che un insieme di regole strutturali (Girard, 1995). Infatti, i simboli logici esprimono ad un livello inferiore quello che le regole strutturali descrivono ad un livello superiore, attraverso un metalinguaggio che si serve della punteggiatura piuttosto che dei connettivi. Ossia, se vogliamo interpretare un sequente – con conclusione singola– $\Gamma \Rightarrow B$ come l'asserire che vi sia una inferenza dalle premesse Γ alla conclusione B, allora le regole di inferenza consuete possono essere formalizzate schematicamente. Ad esempio, il modus tollens potrà essere schematizzato come

$$\neg B, A \to B \Rightarrow \neg A.$$

Possiamo vedere che il caso delle regole strutturali è differente. Le loro istanze hanno *inferenze* come premesse e conclusioni: non possono quindi essere schematizzate nella medesima maniera.

In questa prospettiva, possiamo pensare che le regole di deduzione ordinarie, quali e.g. il modus tollens, siano *inferenze di primo livello*, esprimibili al livello del sequente stesso, mentre le regole strutturali siano da considerarsi come *inferenze su inferenze*, od *inferenze di secondo livello* (Schroeder-Heister Došen, 1993), non esprimibili al livello del sequente.

3. Il ruolo delle regole strutturali

In questa sezione proverò a descrivere brevemente il ruolo di ciascuna regola strutturale all'interno del calcolo, e a discutere alcuni casi in cui sembra possibile rinunciarvi. Anzitutto, possiamo osservare come le regole strutturali abbiano un effetto profondo sulle regole operazionali e quindi sul comportamento stesso dei connettivi. Vediamo alcuni esempi. Consideriamo e.g. la regole di introduzione della freccia:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Queste sono equivalenti alla coppia di regole (D→)', (S→)'

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \to B \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Infatti, disponendo dello scambio a destra e sinistra otteniamo:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}\,\text{(SS)}}{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}\,\text{(DS)}}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\,\text{(D}\to\text{)'}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\,\text{(DS)}$$

Per l'altra direzione,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}\,\text{(SS)}}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}\,\text{(DS)}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\,\text{(D}\to\text{)}}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\,\text{(DS)}$$

Similmente dimostriamo anche le altre implicazioni.

Ora, se non disponessimo dello scambio a destra e a sinistra, non potremmo ragionare

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

come abbiamo appena fatto. Le regole (D→) e (D→)’ non saranno più equivalenti. Per la stessa ragione le regole (S¬)’ e (D¬)’

non saranno più equivalenti a (S¬) e (D¬), rispettivamente.

Pertanto, se in accordo con Gentzen sono le regole a dare significato ai simboli logici, allora le regole (D→)’e (S→)’, (S¬)’ e (D¬)’ definiscono dei nuovi connettivi (Girard, 1987; Abrusci, 1991), che non sono contemplati in **LK**.

Senz’altro l’adozione *tout court* delle regole strutturali rende l’espressività del sistema **LK** limitata, facendo collassare tutti i possibili connettivi logici su quattro solamente:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow \ .$$

Vi sono anche delle ragioni linguistiche e pragmatiche che potrebbero motivare una rinuncia a parte delle regole strutturali. Si possono trovare casi in cui il linguaggio naturale e la prassi quotidiana violano le condizioni delle regole strutturali: un caso emblematico, come vedremo, sarà quello delle regole di scambio.

Cerchiamo di capire con alcuni esempi.

Pensiamo all’enunciato:

Con 5 euro compri un pacchetto di Camel ed un pacchetto di Marlboro. (2)

Abbiamo due modi di interpretare la congiunzione in questa espressione (Paoli, 2002).

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

Possiamo intendere la "e" come una *congiunzione stretta* (sovente in letteratura è chiamata *congiunzione moltiplicativa* (Casari, 1997)), o altrimenti come *reticolare*.

Nel primo caso intendiamo che *con 5 gli stessi euro* compriamo sia il pacchetto di Camel, sia il pacchetto di Marlboro. Mentre, nel secondo caso, intendiamo che con 5 euro *abbiamo la facoltà di scegliere* tra un pacchetto di Camel, ed un pacchetto di Marlboro, ma, magari, coi medesimi 5 euro non riusciamo a comprare entrambi.

Oppure, pensiamo all'enunciato

Antonio ordina una pizza e la mangia. (3)

In questo caso, siamo portati a considerare la congiunzione "e" come *sequenziale* (Paoli, 2002). Difatti, la intendiamo come: *prima* Antonio ordina una pizza, e poi *successivamente* la mangia. Badiamo bene, anche questa è una congiunzione assai diversa da quella che ci propone **LK**.

Infatti, se in **LK** non v'è alcun problema a commutare i congiunti: $A \wedge B$ è equivalente ad $B \wedge A$, così non è nel caso di una congiunzione sequenziale. Difficilmente potrò mangiare la pizza e poi ordinarla!

Esempi simili possiamo ritrovarli anche per la disgiunzione. Pensiamo alla seguente:

Marco va al mare oppure in montagna. (4)

Certamente, l'interpretazione che diamo di (4) ci dice che Marco andrà *o* al mare, *o* in montagna. Ossia, leggiamo la "o" come esclusiva.

Un altro esempio interessante ce lo presenta Girard in (Girard, 1995). Nel pensiero matematico abbiamo a che fare con delle "verità stabili":

> Se A, ed A implica B, allora B, ed A continua ad essere vero.

Questo funziona bene quando abbiamo a che fare con delle verità permanenti, come in matematica, appunto.

Tuttavia, così non è nella vita reale, dove l'implicazione è effettivamente *causale*. Le condizioni delle premesse vengono modificate dopo il loro utilizzo. Quindi, se A è possedere 5 euro, mentre B è il comprare un pacchetto di sigarette, nella vita comune, una volta che ho utilizzato quei 5 euro ed ho comperato le sigarette, il processo si interrompe: non può essere indefinitamente iterato.

Vediamo, ora, di dettagliare nello specifico alcune delle motivazioni che potrebbero esserci per abbandonare ciascuna delle regole strutturali.

L'INDEBOLIMENTO

> Weakening opens the door for fake dependencies.
>
> *J. Y. Girard*

L'indebolimento permette di trasformare un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in un altro $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, semplicemente estendendo a piacimento le stringhe di formule Γ e Δ.

Questa coppia di trasformazioni ci dice *la relazione di derivabilità è monotòna.* Per aiutare la nostra intuizione, pensiamo ad un caso specifico. Ammettiamo che possiamo dimostrare il sequente $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$.

Utilizzando l'indebolimento, possiamo estendere premesse e conclusioni con formule arbitrarie, così da ottenere il sequente

$$A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+i} \Rightarrow B_1, \ldots, B_m, B_{n+1}, \ldots, B_{m+j}.$$

Questo è coerente con la interpretazione in (1) a pagina 4. Se infatti da A_1 e A_2 e ... e A_n deduciamo B_1 o B_2 o ... o B_m, allora sembra giustificato espandere l'antecedente ed il conseguente con i e j premesse, rispettivamente.

Questa regola è alla base di un principio fondamentale della logica classica, lo *a fortiori*, che ci dice che se qualcosa vale, allora questo continua a valere anche sotto ipotesi arbitrarie.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,(\mathrm{SI})}{A \Rightarrow (B \to A)}\,(\mathrm{D}\!\to)}{\Rightarrow A \to (B \to A)}\,(\mathrm{D}\!\to)$$

Questo principio è molto controverso.

Lo a fortiori, difatti, già da C. I. Lewis nel 1918 veniva considerato come una delle istanze dei paradossi della *implicazione materiale*, per combattere i quali si spinse a costruire il suo famoso sistema di logica modale. All'interno di questo sistema è possibile ottenere una nozione di implicazione più forte rispetto alla nozione classica: la cosiddetta *strict implication* (Lewis, 1932), che permette di evitare questo tipo di paradossi.

La riserva di Lewis viene accolta e rafforzata da J. Anderson e N. Belnap (Anderson Belnap, 1975). Questi, nel 1975, notano come (cfr. (Paoli, 2002, p. 22)) l'a fortiori, visto come implicazione, è "sicuro": qualora A sia vero, allora possiamo inferire A da un'assunzione arbitraria.

Tuttavia, però, non rispecchia il ragionamento deduttivo ordinario.

Difatti, dato A, asserire che questo *segue*, o *deriva* da un'arbitraria ipotesi B è in conflitto con la consueta esperienza che si ha con il ragionamento inferenziale. Affinchè A segua da B abbiamo necessità che A sia in qualche modo *relato* con B: dobbiamo *realmente* essere nella posizione di poter dimostrare A a partire dalla ipotesi B. Però B è scelta arbitrariamente, quindi questo non sarà possibile.

Difatti, se guardiamo alla forma della regola di indebolimento, questa ci dice che se Δ segue da Γ, allora una arbitraria estensione Δ' seguirà da una arbitraria estensione Γ'. Chiaramente, queste estensioni aggiungeranno premesse, e conclusioni, mutuamente irrilevanti.

È possibile accettare questo processo?

Molti autori hanno sostenuto le ragioni di una logica che prestasse attenzione alla mutua rilevanza di premesse e conclusioni all'interno del suo calcolo.

Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ vale, in qualche modo Γ deve essere rilevante per Δ. Si dovrebbe poter avere $\Gamma \Rightarrow \Delta$ senza $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$, in quanto le nuove informazioni in Π, Σ potrebbero non essere *rilevanti* nella deduzione.

Dal 1950, coi lavori di Ackermann (Ackermann, 1956), Moh (Moh, 1950), Church (Church, 1951), e i volumi di Anderson e Belnap (Anderson Belnap, 1975), ed Anderson e Belnap e Dunn (Anderson, Belnap, Dunn, 1992), si sono iniziate a definire esplicitamente le condizioni che dovrebbe possedere una logica che tenga conto della rilevanza: la *relevant logic*.

Nella sua formulazione del 1975, (Anderson Belnap, 1975), questa logica rinuncia a tutte le regole strutturali, eccetto che al cut ed alla regola di contrazione. La letteratura sulle logiche rilevanti è sterminata, a chi fosse interessato segnalerei (Mares, 2004) e (Read, 1998) per un'introduzione filosofica all'argomento, (Restall, 2000) per una introduzione alla relevant logic come logica sottostrutturale, oltre, chiaramente, a (Anderson Belnap, 1975; Anderson et al., 1992).

Un altro motivo per rifiutare la ammissibilità dell'indebolimento (a destra) ce lo forniscono ancora i sostenitori della relevant logic (Paoli, 2002).

Consideriamo la seguente dimostrazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow}\,(\mathrm{L}\neg)}{A, \neg A \Rightarrow B}\,(\mathrm{DI})}{\neg A \Rightarrow A \to B}\,(\mathrm{D}\to)}{\Rightarrow \neg A \to (A \to B)}\,(\mathrm{D}\to)$$

Il principio (classico) che abbiamo dimostrato gode di fama non inferiore allo a fortiori: è lo *ex absurdo quodlibet sequitur*.

Questo principio è accettato da Lewis, che lo dimostra facendo ricorso al sillogismo disgiuntivo: assumiamo A e $\neg A$. Da A deduco $A \vee B$, ora, data la assunzione di $\neg A$, per il sillogismo disgiuntivo posso dedurre B.

Questa forma di ragionamento, secondo un punto di vista "rilevante", non è accettabile, perché, appunto, B è arbitraria.

Analogamente, lo stesso ex absurdo quodlibet sequitur non è giustificabile, e non lo è nemmeno da un punto di vista pragmatico.

Non è infatti parte del ragionamento ordinario derivare qualsiasi conclusione, data una ipotesi inconsistente.

Ragionamenti di questo genere sono tra le motivazioni delle cosiddette *logiche paraconsi-*

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

stenti, logiche queste che ammettono, appunto, estensioni inconsistenti non banali. Anche in questo caso, la letteratura a riguardo è vastissima, un punto di partenza introduttivo possono essere (da Costa, 1974) e (Carnielli, Coniglio, Marcos, 2003).

Un'altra critica alle regole di indebolimento può venire anche da chi sostiene che il ragionamento possa essere *non monotòno*, ossia che la aggiunta di premesse possa influenzare la deduzione.

Pensiamo al seguente esempio:

> Supponiamo che due aerei, A e B, debbano atterrare a Malpensa, e che la torre di controllo abbia notizia da un aereo che questo non è ancora atterrato, senza tuttavia sapere quale dei due sia, a causa di interferenze nelle comunicazioni.
> Se a, b indicano il fatto che A e B, rispettivamente, siano ancora in volo, a questo punto, lo stato di conoscenza delle torre di controllo è $\{a \vee b\}$. Ora, supponiamo che, in un tempo successivo, alla torre di controllo arrivi il segnale che A è atterrato. A questo punto, la torre di controllo aggiorna la propria informazione con $\neg a$. Con questa nuova informazione, lo stato di conoscenza si espande in $\{a \vee b, \neg a\}$. A questo punto, l'unica inferenza razionalmente possibile per la torre di controllo è b: l'aereo B è ancora in volo.

Questo è un esempio classico di *revisione della conoscenza* (*belief revision*): la conoscenza $\{a \vee b\}$ viene aggiornata con una nuova informazione $\neg a$, e questi dati interagiscono, di fatto, tra loro.

Da un punto di vista di questo tipo è, quindi, assai difficile giustificare la presenza di una regola come l'indebolimento, che permetterebbe di incrementare la conoscenza con altre conoscenze arbitrarie.

Per una introduzione alle logiche che tengono in considerazione aspetti del genere di cui sopra, suggerirei tra le varie alternative possibili (Makinson, 1985, 2005).

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

La contrazione

> Contraction is the fingernail of infinity in propositional calculus.
>
> *J. Y. Girard*

Le regole di contrazione sono quelle regole che che permettono di trasformare un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in un altro sequente $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ eliminando le occorrenze ridondanti delle formule in Γ ed in Δ: diverse occorrenze successive di una medesima formula in Γ e Δ sono identificate in una soltanto. Queste regole sanciscono il fatto che *la relazione di derivabilità è idempotente*. Questo, anche intuitivamente, è giustificato dall'osservazione che tutto ciò che possiamo derivare da arbitrarie istanze di una medesima premessa, possiamo anche ottenerlo da una unica istanza di questa. Dualmente, per quanto riguarda il conseguente, se possiamo derivare arbitrarie copie di una medesima formula, possiamo anche ottenerne una sola copia.

Anzitutto, può essere interessante riflettere sul significato delle regole di contrazione.
Uno dei fatti che la regola di contrazione sancisce è che *quello che si possiede lo si possederà sempre*. Come suggerisce Girard, è la *regola dell'infinito*. Per capire questa idea, prendiamo a prestito un suo esempio.
Consideriamo il seguente insieme di formule, che chiamiamo I:

(𝅝) $\forall x \, \neg(x < x)$;

(𝅗𝅥) $\forall x, y \, (x < y \,\&\, y < x \Longrightarrow x = y)$;

(♩) $\forall x, y, z \, (x < y \,\&\, y < z \Longrightarrow x < z)$;

(♪) $\forall x \exists y\,(x < y)$.

I sancisce il fatto che $<$ sia una relazione di ordine stretto. Chiaramente, I non ha modelli finiti. Infatti se $\mathbf{A} = \langle A, <^{\mathbf{A}} \rangle$ fosse un modello finito per I, ci sarebbe un elemento $a \in A$ per cui non ci sarebbe nessun $a' \in A$ tale che $a < a'$, contrariamente ad (♪).

Ora, per ottenere gli infiniti elementi di $\mathbf{A}$, abbiamo applicato I infinite volte. Tuttavia, possediamo un solo I!

È qui che la regola di contrazione entra in gioco: infinitamente non significa *tante volte*, ma *sempre*.

Un'interessante conseguenza della regola di contrazione, insieme ad altre assunzioni, è il *paradosso di Curry* (Curry, 1942). Consideriamo la seguente prova in **LK** del *principio di assorbimento*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{B \Rightarrow B \qquad A \Rightarrow A}{A, A \to B \Rightarrow B}\,(\mathrm{L}\to)}{A \to (A \to B), A, A \Rightarrow B}\,(\mathrm{L}\to)\&(\mathrm{SS})}{A \to (A \to B), A \Rightarrow B}\,(\mathrm{SC})}{(A \to (A \to B)) \Rightarrow (A \to B)}\,(\mathrm{L}\to)$$

Ora, se assumiamo l'assorbimento, unitamente al *principio di comprensione*:

$$x \in \{y : A(y)\} \longleftrightarrow A(x)$$

e consideriamo la collezione $\mathcal{C} = \{x : (x \in x) \to \bot\}$, ove $\bot$ sta ad indicare l'inconsistenza, possiamo ottenere la seguente:

$$(x \in \mathcal{C}) \longleftrightarrow ((x \in x) \to \bot) \qquad \text{(Comprensione)} \qquad (1)$$

$$(\mathcal{C} \in \mathcal{C}) \longleftrightarrow ((\mathcal{C} \in \mathcal{C}) \to \bot) \qquad \text{(Sostituzione)} \qquad (2)$$

Periodico On-line / ISSN 2036-9972

$$(\mathcal{C} \in \mathcal{C}) \longrightarrow ((\mathcal{C} \in \mathcal{C}) \to \bot) \qquad \text{(Def. di } \longleftrightarrow) \tag{3}$$

$$(\mathcal{C} \in \mathcal{C}) \to \bot \qquad \text{(Assorbimento)} \tag{4}$$

$$\mathcal{C} \in \mathcal{C} \quad \text{(Modus Ponens 2, 4)} \tag{5}$$

$$\bot \quad \text{(Modus Ponens 4, 5)} \tag{6}$$

Questo ci dice che una teoria degli insiemi contenente nient'altro che il principio di comprensione e un, apparentemente, innocuo principio di assorbimento si riduce alla trivialità. Riferimenti su questo argomento sono (Restall, 2008; Field, 2008). Tentativi di rifondare la teoria degli insiemi su sistemi logici più deboli si annoverano dagli anni '50 del secolo scorso. Tra questi possiamo ricordare i lavori di Skolem (Skolem, 1960b, 1960a, 1963) e Chang (Chang, 1965).

Questo per quanto riguarda la regola di contrazione a sinistra. Anche la la regola di contrazione a destra, d'altra parte, offre il fianco a valide critiche.

Consideriamo la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}\,(\text{S}\neg)}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\text{D}\vee)}{\Rightarrow A \vee \neg A}\,(\text{DC})$$

La dimostrazione di qui sopra non è nient'altro che una prova dell'assai famoso principio del *terzo escluso*.

Questo, come ben noto, è un principio assai controverso, se non il più controverso della logica classica.

Interessanti obiezioni al terzo escluso provengono dalla prospettiva *intuizionista* (Mints, 2001). Secondo il punto di vista intuizionista, la dimostrazione di una disgiunzione corrisponde ad una dimostrazione, *costruttiva*, di uno almeno dei disgiunti. Pertanto, non può essere giustificata in questa prospettiva la dimostrazione del terzo escluso, che è indipendente dalla effettiva dimostrazione di uno almeno dei due disgiunti (Heyting, 1956; Dragalin, 1988; Dummett, 1975, 1977).

Quella degli intuizionisti, del resto, non è l'unica critica che è stata riservata al terzo escluso. Tale principio, effettivamente, apre le porte alla *bivalenza*: qualsiasi enunciato può assumere solamente due valori di verità: il falso ed il vero. Questa assunzione si dimostra essere, in molti casi, eccessivamente forte. Obiezioni in tal senso si annoverano sin da Aristotele.

Pensiamo ad un'espressione come:

Giuseppe è calvo.

Oppure:

Domani ci sarà una battaglia navale.

Possiamo considerarle vere o false?

Certamente né l'una né l'altra cosa, al contrario di quanto vorrebbe il principio di bivalenza.

Per quanto riguarda il primo enunciato, ci troviamo a dover giudicare la verità o la falsità di un enunciato che contiene un predicato effettivamente *vago*. Difatti, se non v'ha dubbio alcuno che una persona con zero capelli in testa sia certamente calva, e che un'altra con 10^6 capelli non lo sia, i casi intermedi sono decisamente più problematici. Enunciati di questo genere sono istanze di un interessante paradosso: il *paradosso del sorite*, che merita di essere, brevemente, descritto (Sainsbury, 1995; Sainsbury Williamson, 1995).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

1. Un chicco di riso non è un mucchio;

(1) Se un chicco di riso non è un mucchio, allora due chicchi di riso non sono un mucchio;

(2) Se due chicchi di riso non sono un mucchio, allora tre chicchi di riso non sono un mucchio;

⋮

(10^6) Se $10^6 - 1$ chicchi di riso non sono un mucchio, allora 10^6 chicchi di riso non sono un mucchio;

Conclusione: 10^6 chicchi di riso non sono un mucchio.

Questo argomento parte dalla premessa (1), che è certamente valida, e utilizza solamente il modus ponens e la cesura, per arrivare alla difficilmente accettabile conclusione che 10^6 chicchi di riso non siano un mucchio.

Per questo paradosso, assai famoso e discusso, sono state proposte in letteratura svariate soluzioni; il lettore interessato può consultare (Keefe, 2000; Sainsbury, 1995; Sainsbury Williamson, 1995).

Chiaramente, anche all'enunciato che vuole che domani ci sarà una battaglia navale non possiamo attribuire, al momento attuale, un valore di verità che sia o vero falso. Questo ci parla infatti di un avvenimento contingente, sul quale, allo stato attuale della conoscenza, non possiamo pronunciarci.

Proprio riflettendo su questo specifico enunciato J. Łukasiewicz ideò uno dei primi sistemi logici non idempotenti. Questi sistemi, che prevedono al loro interno dei connettivi, appunto, non idempotenti ammettono anche infiniti valori di verità, e sono attualmente assai studiati. Per approfondire questo ambito di ricerca, segnalo le monografie di Gottwald (Gottwald, 2001) e di Hàjek (Hàjek, 1998) per una ampia panoramica sull'argomento, e i lavori di Cignoli, D'Ottaviano e Mundici (Cignoli, d'Ottaviano, Mundici, 2000) e Mundici (Mundici, 2011) per ulteriori dettagli.

Lo scambio

Le regole di scambio, a sinistra e a destra, sono le due regole strutturali che, dato un sequente della forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, ci permettono di trasformarlo in un sequente $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, ove Γ' e Δ' sono ottenuti attraverso una permutazione delle formule in Γ e Δ, rispettivamente. Questa coppia di regole ci dice che *premesse e conclusione nella relazione di derivabilità sono commutative*. Questo è certamente consistente con il ragionamento matematico ed anche con quello ordinario. Intuitivamente, se dalle premesse A_1 e A_2 e ... e A_n deriviamo B_1 o B_2 o ... o B_m allora qualsiasi permutazione (eventualmente con ripetizione) delle formule nell'antecedente ci permetterà di ottenere qualsiasi permutazione (eventualmente con ripetizione) delle formule nel conseguente.

Sono svariate le motivazioni che ci possono essere per rinunciare a questo tipo di regola; vediamone, quindi, alcune.

Una motivazione interessante la fornisce ancora Girard (Girard, 1995). Se pensiamo ad un sistema logico in termini prettamente astratti, la regola di scambio possiede, a prima vista, piena legittimità. Tuttavia, se cambiamo prospettiva e guardiamo ad un sistema logico in termini concreti, alcune evidenze non possono essere trascurate.

Infatti, nella prassi quotidiana, la quantità delle risorse disponibili è senz'altro estremamente rilevante: se con un euro posso comperare un gelato, con due euro potrò comprare un gelato ed una bibita; ma non solo la disponibilità delle risorse è importante. Lo è anche la loro accessibilità.

Pensiamo, ad esempio, ai dati allocati nella memoria di un computer. Una disposizione frammentata dei dati è una delle cause del rallentamento dei tempi di accesso e lettura ai files. Le operazioni di deframmentazione, infatti, sono fatte per porre rimedio a questo tipo di problema: è una ottimizzazione dell'archiviazione dei dati nel disco rigido di un computer, che riduce la frammentazione dei file presenti in memoria.

Attraverso questa operazione i files vengono fisicamente collocati in parti contigue della memoria, riducendo così di molto il tempo di accesso alle informazioni.

Con buona probabilità, tuttavia, la prima proposta di una logica senza la regola di scambio, si deve accreditare a J. Lambek nel 1958 (Lambek, 1958), la cui intenzione era quella di modellare alcuni aspetti della sintassi del linguaggio naturale.

Il *calcolo di Lambek*, introdotto in (Lambek, 1958) col nome di *syntactic calculus*, nasce come una descrizione formale delle strutture sintattiche del linguaggio naturale e si basa sulla teoria dei tipi sintattici introdotta da K. Adjukiewicz. Vediamo brevemente di che si tratta.

I tipi di base sono della forma n, per *nome*, ed s, per *sentenza* o *enunciato*. Hanno tipo n i nomi propri, o qualsiasi espressione possa comparire dove potrebbe comparire un nome proprio all'interno di un enunciato. Su questi tipi operano le trasformazioni di tipo $\rightarrow$

e $\leftarrow$ che permettono di costruire tipi complessi. Una trasformazione $x \rightarrow y$ possiamo intenderla come una espressione che, se applicata ad un oggetto di tipo x porta ad un oggetto di tipo y. Così, possiamo ricorsivamente costruire i nostri nuovi tipi, i.e. se x, y sono tipi, anche $x \rightarrow y$ e $y \leftarrow x$ lo sono.

Esemplificando, l'aggettivo *povero* modifica il nome *Giovanni* da sinistra nella espressione *povero Giovanni*. Avrà pertanto assegnato il tipo $n \leftarrow n$. D'altro canto, il verbo *camminare* modifica il nome *Giovanni* da destra in *Giovanni cammina*. Così avrà assegnato il tipo $n \rightarrow s$.

Partendo quindi dall'espressione di tipo s otteniamo tipi più complessi come

Giovanni	lavora
n	$n \rightarrow s$

(Il povero	Giovanni)	lavora
$n \leftarrow n$	n	$n \rightarrow s$

(Giovanni	lavora)	(e	(Carla	riposa))
n	$n \rightarrow s$	$(s \rightarrow s) \leftarrow s$	n	$n \rightarrow s$

Lambek utilizzò queste idee e studiò un calcolo dei sequenti *á la Gentzen* le cui regole riflettessero le trasformazioni ammissibili sui tipi sintattici, appunto il calcolo di Lambek. Tra le regole di questo sistema non è prevista alcuna regola strutturale, ed in particolare anche le regole di scambio sono omesse. Il motivo di questa scelta è piuttosto evidente anche ad una prima analisi del linguaggio naturale, che il calcolo di Lambek intende, almeno parzialmente, formalizzare.

Consideriamo, quindi, alcune delle configurazioni linguistiche di qui sopra, quali *Povero Giovanni* e *Giovanni cammina*. È chiaro sin da subito che, sebbene queste siano espressioni italiane corrette, così certamente non è per espressioni come *Giovanni povero* e *Cammina Giovanni*. Il linguaggio naturale è fortemente non commutativo. Proprio perciò il sistema logico considerato da Lambek contemplava due tipi di trasformazioni distinte $\rightarrow$ e $\leftarrow$, che agiscono modificando i tipi sintattici, distintamente, a destra ed a sinistra. Infatti, nell'esempio di poc'anzi "povero" modifica il nome "Giovanni" da sinistra, trasformando un nome in un nome. Mentre "lavora" agisce sul nome "Giovanni" da destra, trasformando un nome in enunciato. Conseguentemente appare chiaro il motivo per cui il calcolo di Lambek contenga una congiunzione non commutativa, necessariamente associata ai due connettivi di implicazione.

RINUNCIARE ALLA CESURA

> A sequent calculus without cut-elimination is like a car without engine.
>
> *J. Y. Girard*

Eccoci infine all'ultima, e forse più importante regola strutturale: la cesura. Cerchiamo di capire quale sia il suo significato.

Questa regola, ricordiamo, è della forma

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

In altri termini, ciò equivale a dire che, date le deduzioni $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ e $A, \Pi \Rightarrow \Sigma$, possiamo unirle insieme, attraverso una sostituzione, in una deduzione $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ che ci conduce dalle premesse Γ, Π alle conclusioni Δ, Σ. Come possiamo notare, nel passaggio da premesse a conclusione, la formula principale A viene “tagliata via”.

La cesura formalizza un processo argomentativo molto comune, che trova una sua chiara applicazione, ad esempio, in matematica. La deduzione, o prova, delle conclusioni Δ, Σ è spezzata in una conclusione intermedia: un *lemma* magari più facile da dimostrare. Se dalle assunzioni in Γ dimostriamo Δ ed A, e se, inoltre, dalle assunzioni Π unitamente ad A otteniamo Σ, allora dobbiamo poter ottenere Δ, Σ direttamente dalle ipotesi Γ, Π.

Brevemente: *il processo di dimostrazione è transitivo*.

Le maggiori obiezioni alla validità tout-court della regola di cesura puntano generalmente sulla relazione di *connessione di significato* che le premesse devono avere con le conclusioni.

Se X condivide qualcosa con Y, ed Y a sua volta condivide qualcosa con Z, da questo non possiamo inferire che necessariamente X condivida qualcosa con Z. Queste posizioni le ritroviamo in alcuni lavori di Geach (Geach, 1958), Smiley (Smiley, 1959) ed Epstein (Epstein, 1979).

Malgrado tuttavia questo genere di obiezioni alla regola di cesura, è piuttosto difficile sostenerne in generale la mancanza di validità.

Tuttavia, seppure questa sia ampiamente accettata come tale, la sua presenza all’interno di un sistema logico può essere motivo di qualche “preoccupazione”. La regola di cesura è infatti, tra tutte le regole strutturali, l’unica che fa scomparire una arbitraria formula A dalle premesse alla conclusione. Il cut fa sì che da un passo al passo successivo di una derivazione possa avvenire una perdita *irreversibile* di informazione, data la arbitrarietà di A.

Tuttavia in **LK**, come in altri sistemi sottostrutturali, *la regola di cesura è eliminabile* (*cut elimination*). Tutto ciò che si può dimostrare attraverso la regola di cesura può essere alternativamente dimostrato senza di questa. In altri termini, la regola di cesura è una regola *ammissibile* in **LK** (Lorenzen, 1955).

Un risultato di questo genere per un calcolo dei sequenti apparve a Gentzen talmente rilevante da meritare la dicitura di *Hauptsatz*, *proposizione fondamentale*.

Effettivamente, è di fondamentale importanza, per un sistema logico, che la regola di cesura sia eliminabile: le conseguenze di un risultato di questo genere sono sovente estremamente apprezzabili. Vediamone alcune.

(i) La cut elimination è di importanza fondamentale nella automatizzazione delle derivazioni: senza un risultato di eliminazione delle cesure, difficilmente un computer potrebbe essere in grado di trovare una dimostrazione di un sequente. Il motivo di questo fatto è evidente.

 La ammissibilità del cut permette di standardizzare (in *forma canonica*, appunto) le dimostrazioni. Difatti, la presenza della cesura impedisce, per l'arbitrarietà con cui questa agisce nel "tagliare" parte dell'informazione, di rendere univoca la dimostrazione di un sequente, impedendo, quindi, una soluzione algoritmica al problema della dimostrazione.

(ii) Se il sistema ammette la eliminazione delle cesure, allora con ogni probabilità possiede la *proprietà della sottoformula*: l'insieme della formule nella conclusione conterrà tutte le formule presenti nelle premesse come sottoformule. L'irreversibile perdita di informazione che la regola di cesura comporta è superabile.

(iii) Strettamente correlata coi due punti precedenti è la questione della *decidibilità* di un sistema logico. La cut elimination, infatti, è spesso un ingrediente fondamentale per dimostrare risultati di questo genere: se un sequente è dimostrabile in un calcolo allora esiste un algoritmo che permette di esibirne la prova. Intuitivamente, questo si spiega osservando che, se un calcolo logico ammette la cut elimination, allora, credibilmente, possiede la proprietà della sottoformula. Quindi, non ci sono regole che permettano una perdita di informazione dalla parte superiore a quella inferiore di un sequente. Perciò, se vogliamo controllare se un dato sequente sia dimostrabile nel nostro calcolo, abbiamo a disposizione, all'interno del sequente stesso che stiamo considerando, tutta l'informazione necessaria a ricostruirne la dimostrazione.

(iv) Un risultato di eliminazione delle cesure è inoltre uno strumento molto spesso efficace nella verifica della *consistenza* di un sistema logico (ossia: il sistema non dimostra proposizioni contradditorie). Se infatti un sistema dimostra l'assurdo, ci sarà una dimostrazione di questo priva di cesure. E sarà quindi molto più agevole verificare se questa dimostrazione esista o meno.

È forse opportuno menzionare, a questo punto, alcuni altri classici risultati che si possono ottenere grazie alla cut elimination: il teorema di Craig, il teorema di Beth ed il teorema di Robinson. La loro trattazione esula dalle finalità di questo lavoro. Per chi fosse interessato ad un approfondimento un riferimento è il libro di R. Smullyan (Smullyan, 1968).

Infine, un'importante prospettiva per comprendere l'importanza della eliminazione delle cesure, ci è offerta dall'*isomorfismo di Curry-Howard* (Howard, 1969; Girard, Taylor, Lafont, 1989; Troelstra, 1992; Troelstra van Dalen, 1988; Troelstra Schwichtenberg, 1996), che riassumo brevemente. Restringiamoci ad un calcolo dei sequenti con conclusione singola.

Ciò che è effettivamente rilevante riguardo ad una formula non concerne tanto il fatto che questa sia o meno dimostrabile. Ciò che è veramente rilevante è *come* questa possa essere dimostrata. Così, per distinguere tra prove differenti della medesima formula, sarà utile dare un nome alle prove. In questo modo, è possibile identificare una formula con le sue prove.

All'interno di questa prospettiva, quindi, le inferenze possono essere interpretate come dei *programmi* che permettono di manipolare le dimostrazioni. Perciò, secondo questo punto di vista una possibile interpretazione di un sequente potrà essere la seguente:

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$ è dimostrabile se e solo se vi è una costruzione che trasforma le prove $p_1, \ldots, p_n$ di $A_1, \ldots, A_n$, rispettivamente, in una prova q di B.

Per comprendere l'importanza di questa posizione occorre ripensare al serrato dibattito che coinvolse la comunità matematica all'inizio del secolo XX. Uno dei temi principali concerneva la nozione di dimostrazione: che tipo di ragionamento fosse accettabile come tale.

I cosiddetti *costruttivisti*, come Brower ed Heyting, erano sostenitori del fatto che una dimostrazione di esistenza di un oggetto matematico dovesse appunto costruire tale oggetto. Nel contempo, matematici *classici* come Hilbert erano disposti ad accettare una dimostrazione che, a partire dall'assunzione della non esistenza di un oggetto, portasse a contraddizione. È, tuttavia, un po' ironico ricordare come proprio la dimostrazione di Brower del *Teorema del Punto Fisso*, che vuole che ogni funzione continua sul disco unitario abbia un punto fisso, non è costruttiva!

Ciononostante, per un costruttivista, è indiscutibile che una dimostrazione di esistenza dovesse comunque essere una costruzione, ossia: un *programma*.

Il *lambda calcolo* (Barendregt, 1984; Girard et al., 1989; Révész, 1988; Troelstra, 1992; Troelstra van Dalen, 1988; Troelstra Schwichtenberg, 1996) è una notazione per formalizzare questo tipo di programmi, che può servire inoltre da notazione per dimostrazioni costruttive.[2] Il ponte tra il lambda calcolo e la logica costruttiva è offerto, appunto, dal paradigma delle "prove-come-programmi" ("proofs-as-programs").

Di fatto, il programma costruttivista non ha prevalso nella filosofia matematica, anche se ha attirato le attenzioni di parte della comunità matematica per quasi tutto il secolo scorso. Certamente, le dimostrazioni costruttive offrono svariati motivi di interesse. Queste, rispetto alle prove non costruttive, sono informative: permettono appunto di calcolare le soluzioni ai problemi, piuttosto che certificare solamente l'esistenza di una soluzione. Ciò è importante, per esempio, nello sviluppo di algoritmi efficaci in matematica computazionale, e nei sistemi di dimostrazione automatica.

In virtù di queste osservazioni, per un sistema logico, un teorema di eliminazione delle cesure visto attraverso la prospettiva delle prove-come-programmi assume una rilevanza cruciale. Infatti, per un sistema di calcolo basato sul lambda calcolo tipato di ordine su-

[2]Non potrò soffermarmi in alcun modo su aspetti specifici del lambda calcolo. Riferimenti standard a riguardo sono presenti in bibliografia.

periore (Barendregt, Abramsky, Gabbay, Maibaum, 1992) un teorema di cut elimination, che intuitivamente implica il fatto che tutte le prove del calcolo possano essere ridotte ad una forma standard (o *normale*), corrisponde attraverso l'isomorfismo di Curry-Howard alla *proprietà di normalizzazione forte*.

Ossia, dato un qualsiasi lambda termine T, *ogni sequenza di riduzioni di* T *ha termine*, i.e. non esistono cammini di riduzione infiniti (Klop, 1992). Come si può immaginare, questa proprietà è fondamentale nel sancire l'affidabilità di un sistema di riscrittura: corrisponde al fatto che ogni suo processo ha esito.

Notiamo, infine, come in generale questa proprietà non si possa dimostrare per il lambda calcolo.

Vi sono appunto lambda termini che hanno cammini di riduzione infiniti. Questo è dovuto al fatto che è possibile utilizzare tutte le funzioni come argomenti delle funzioni: anche la stessa funzione può essere utilizzata come argomento (auto-applicazione). È noto infatti che per il lambda calcolo il problema della normalizzazione dei termini è, in generale, indecidibile.

4. Conclusioni

Riguardo a quello che ho scritto in questa introduzione alle logiche sottostrutturali, ho cercato di illustrare, senza pretesa di esaustività, il ruolo all'interno di **LK** delle regole strutturali. Più precisamente, ho descritto il loro uso all'interno del calcolo e alcune delle conseguenze che l'assunzione di ciascuna regola strutturale ha sul calcolo. Inoltre, per ognuna di queste ho illustrato alcuni casi in cui nel linguaggio naturale, o nella prassi quotidiana, è effettivamente possibile rinunciare alle regole strutturali. Semplicemente, talvolta la comunicazione ordinaria o l'esperienza consueta sono in contrasto queste regole.

Riguardo a quello che non ho scritto in questa introduzione, ho preferito evitare di soffermarmi sui dettagli strettamente tecnici delle questioni affrontate, cercando di inquadrarle in un contesto prettamente intuitivo. Questo per rendere la lettura agevole anche al lettore non interessato alle motivazioni di carattere formale. Pure la scelta di non discutere le principali linee di ricerca attuali nell'ambito delle logiche sottostrutturali e della loro descrizione semantico-algebrica deriva, sostanzialmente, da questo proposito. Perciò, non posso che rimandare il lettore che fosse interessato alle monografie, e.g., (Restall, 2000; Paoli, 2002) per una prospettiva generale sulle logiche sottostrutturali, e (Blount Tsinakis, 2003; Cignoli et al., 2000; Galatos, Jipsen, Kowalski, Ono, 2007; Jipsen Tsinakis, 2002) per una discussione semantico-algebrica dell'argomento.

Ringraziamenti

Ringrazio il Ministero Italiano per l'Università e la Ricerca Scientifica (MIUR), per il supporto all'interno del progetto FIRB "Strutture e Dinamiche della Conoscenza e della Cognizione", Cagliari: F21J12000140001.

Ringrazio inoltre i due revisori anonimi, i cui suggerimenti hanno contribuito a migliorare la presentazione di questo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

Abrusci, V. M. (1991). "Phase semantics and sequent calculus for pure noncommutative classical propositional linear logic." *Journal of Symbolic logic, 56*, pp. 1403–1451.

Ackermann, W. (1956). "Begründung einer strengen implikation." *Journal of Symbolic logic, 21*, pp. 113–128.

Anderson, J., Belnap, N. (1975). *Entailment: the logic of relevance and necessity, vol. 1*. Princeton University Press, Princeton.

Anderson, J., Belnap, N., Dunn, M. (1992). *Entailment: the logic of relevance and necessity, vol. 2*. Princeton University Press, Princeton.

Barendregt, H. P. (1984). *The lambda calculus, its syntax and semantics*. North Holland, Amsterdam.

Barendregt, H. P., Abramsky, S., Gabbay, D. M., Maibaum, T. S. E. (1992). *Lambda calculi with types*. Oxford University Press, Oxford.

Blount, K., Tsinakis, C. (2003). "The structure of residuated lattices." *International Journal of Algebra and Computation, 13*, pp. 437–461.

Carnielli, W., Coniglio, M., Marcos, J. (2003). "Logics of formal inconsistency." In *Handbook of philosophical logic, 14,* pp. 1– 93.

Casari, E. (1997). "Conjoining and disjoining on different levels." In *Logic and scientific methods,* Synthese Library Volume 259, pp. 261–288.

Chang, C. C. (1965). "Infinite valued logic as a basis for set theory." In *Logic, methodology and philosophy of science,* North Holland, pp. 93–100.

Church, A. (1951). "The weak theory of implication in kontroliertes denken: Untersuchungen zum logikkalkül und zur logik der einzelwissenschaften." In *Kommissions-Verlag Karl Alber,* pp. 22–37.

Cignoli, R., d'Ottaviano, I. M. L., Mundici, D. (2000). *Algebraic foundations of many-*

valued reasoning. Kluwer, Dordrecht.

Curry, H. (1942). "The inconsistency of certain formal logics." *Journal of Symbolic Logic, 7*, 115–117.

da Costa, N. C. A. (1974). "On the theory of inconsistent formal systems." *Notre Dame Journal of Formal Logic, 15*, 497–510.

Dragalin, A. (1988). *Mathematical intuitionism*. American Mathematical Society.

Dummett, M. (1975). "The philosophical basis of intuitionistic logic." In *Truth and other enigmas,* Duckworth, pp. 215–247.

Dummett, M. (1977). *Elements of intuitionism*. Oxford University Press, Oxford.

Epstein, R. (1979). "Relatedness and implication." *Philosophical Studies, 29*, pp. 149–168.

Field, H. (2008). *Saving truth from paradox*. Oxford University Press, Oxford.

Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H. (2007). *Residuated lattices: An algebraic glimpse at substructural logics*. Elsevier, Amsterdam.

Geach, P. T. (1958). "Entailment." *Proceedings of the Aristotelian Society, 32*, pp. 157–172.

Girard, J. Y. (1987). "Linear logic." *Theoretical Computer Science, 50*, pp. 1–102.

Girard, J. Y. (1995). "Linear logic, its syntax and semantics." In J. Y. Girard (Ed.), *Advances in linear logic,* Cambridge University Press, pp. 1–42.

Girard, J. Y., Taylor, P., Lafont, Y. (1989). *Proofs and types*. Cambridge University Press, Cambridge.

Gottwald, S. (2001). *A treatise on many-valued logics*. Press Publications, South Jordan.

Hàjek, P. (1998). *Metamathematics of fuzzy logic*. Kluwer, Dordrecht.

Hertz, P. (1922). "Über axiomensysteme für beliebige satzsysteme, 1." *Mathematische Annalen, 87*, pp. 246–269.

Hertz, P. (1923a). "Reichen die üblichen syllogistichen regeln für das schleißen in der positiven logik elementarer sätze aus?" *Annalen der Phlosophische Kritik, 7*, pp. 272–277.

Hertz, P. (1923b). "Über axiomensysteme für beliebige satzsysteme, 2." *Mathematische Annalen, 89*, pp. 76–102.

Hertz, P. (1929). "Über axiomensysteme für beliebige satzsysteme." *Mathematische Annalen, 101*, pp. 457–514.

Heyting, A. (1956). *Intuitionism, an introduction*. North Holland, Amsterdam.

Hilbert, D., Bernays, P. (1934). *Grundlagen der mathematik*. Springer, Verlag.

Howard, W. A. (1969). "The formulae-as-types notion of construction." In *To H. B. Curry: Essays on combinatory logic, lambda calculus, and formalism,* Academic Press, pp. 479–490.

Jipsen, P., Tsinakis, C. (2002). "A survey of residuated lattices." In J. Martinez (Ed.), *Ordered algebraic structures* (pp. 19–56). Kluwer, Dordrecht.

Keefe, R. (2000). *Theory of vagueness*. Cambridge University Press, Cambridge.

Klop, J. W. (1992). "Term rewriting systems." In S. Abramsky, D. M. Gabbay, T. S. E. Maibaum (Eds.), *Handbook of logic in computer science* Oxford University Press, pp. 1–116.

Lambek, J. (1958). "The mathematics of sentence structure." *The American*

Mathematical Monthly, 65, pp. 154–170.

Lewis, C. I. (1932). *Symbolic logic*. The Century Company, New York.

Lorenzen, P. (1955). *Einführung in die operative logik und mathematik*. Springer, Verlag.

Makinson, D. (1985). "How to give up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change." *Synthese, 62*, pp. 347–363.

Makinson, D. (2005). *Bridges from classical to nonmonotonic logic*. College Publications, London.

Mares, E. D. (2004). *Relevant logic: A philosophical interpretation*. Cambridge University Press, Cambridge.

Mints, G. (2001). *A short introduction to intuitionistic logic*. Springer, Verlag.

Moh, S. (1950). "The deduction theorems and two new logical systems." *Methodos, 2*, pp. 56–75.

Mundici, D. (2011). *Advanced łukasiewicz calculus and mv-algebras*. Springer, Verlag.

Paoli, F. (2002). *Substructural logics: A primer*. Springer, Verlag.

Read, S. (1998). *Relevant logic*. Blackwell, Oxford.

Restall, G. (2000). *An introduction to substructural logics*. Routledge, London.

Restall, G. (2008). "Curry's revenge: the costs of non-classical solutions to the paradoxes of self-reference." In J. C. Beall (Ed.), *Revenge of the liar: New essays on the paradox*. Oxford University Press, pp. 262–271.

Révész, G. (1988). *Lambda-calculus, combinators and functional programming*. Cambridge University Press, Cambridge.

Sainsbury, R. M. (1995). *Paradoxes*. Cambridge University Press, Cambridge.

Sainsbury, R. M., Williamson, T. (1995). "Sorites." In B. Hale C. Wright (Eds.), *Blackwell companion to the philosophy of language.* Blackwell, Oxford.

Schroeder-Heister, P., Doŝen, K. (1993). *Substructural logics*. Oxford University Press, Oxford.

Skolem, T. (1960a). "Investigations on a comprehension axiom without negation in the defining propositional functions." *Notre Dame Journal of Formal Logic, 1*, pp. 13–22.

Skolem, T. (1960b). "A set theory based on a certain 3-valued logic." *Mathematica Scandinava, 8*, pp. 127–136.

Skolem, T. (1963). "Studies on the axiom of comprehension." *Notre Dame Journal of Formal Logic, 4*, pp. 162–170.

Smiley, T. (1959). "Entailment and deducibility." *Proceedings of the Aristotelian Society, 33*, pp. 233–249.

Smullyan, R. (1968). *First order logic*. Springer, Verlag.

Szabo, E. (1969). *The collected papers of gerhard gentzen*. North Holland, Amsterdam.

Troelstra, A. S. (1992). *Lectures on linear logic*. CSLI Publications, Stanford.

Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H. (1996). *Basic proof theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Troelstra, A. S., van Dalen, D. (1988). *Constructivism in mathematics*. North Holland, Amsterdam.

von Plato, J., Negri, S. (1996). *Structural proof theory*. Cambridge University Press, Cambridge.