



# Solutions algébriques pour l'Analyse et le Contrôle des Systèmes Non Linéaires

Alain Glumineau

► **To cite this version:**

Alain Glumineau. Solutions algébriques pour l'Analyse et le Contrôle des Systèmes Non Linéaires. Automatique / Robotique. UNIVERSITE DE NANTES / ECOLE CENTRALE de Nantes, 1992. <tel-01112114>

**HAL Id: tel-01112114**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01112114>**

Submitted on 2 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE NANTES**  
**ECOLE CENTRALE NANTES**

**Solutions Algébriques pour l'Analyse et le Contrôle des  
Systèmes Non Linéaires**

**THESE DE DOCTEUR ès SCIENCES**

**Spécialité: AUTOMATIQUE**

Présentée et soutenue publiquement par:

**Alain GLUMINEAU**

le 25 Novembre 1992.

devant le jury :

Président	<b>P. VAUSSY</b>
Rapporteurs et examinateurs	<b>G. BORNARD</b>
	<b>C. MOOG</b>
	<b>D. NORMAND-CYROT</b>
Examineurs	<b>W. KHALIL</b>
	<b>J.F. LAFAY</b>
Rapporteur et invité	<b>J.W. GRIZZLE</b>

Directeur de Recherche : **C. MOOG**

## AVANT-PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité associée au C.N.R.S.

Je tiens à remercier tout d'abord mon Directeur de thèse C. Moog, Chargé de Recherche au C.N.R.S., avec lequel les heures de travail ponctuées de conjectures pleines d'espoirs, de contre-exemples morbides, de démonstrations à terminer, et puis de temps en temps de résultats, restent malgré tout un très bon souvenir.

Je remercie ensuite Monsieur Pierre Vaussy, Professeur et Directeur de l'E.C.N., qui a volontiers accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement Madame D. Normand-Cyrot et Monsieur G. Bormard, Directeurs de Recherche au C.N.R.S. d'avoir accepté d'être rapporteurs et membres de mon jury.

Messieurs W. Khalil et J.F. Lafay, Professeurs à l'E.C.N., sont vivement remerciés d'avoir accepté d'être membres de mon jury .

Je tiens à remercier particulièrement J.W. Grizzle, Professeur de l'Université du Michigan, d'avoir été rapporteur et qui, malgré Thanksgiving, a accepté mon invitation à participer au jury.

Des remarques éclairées ont permis l'amélioration du mémoire. Je tiens à en remercier les membres du jury ainsi que J. Descusse, Directeur de Recherche au C.N.R.S. , qui a toujours su m'encourager depuis mon arrivée dans l'équipe non linéaire.

Je remercie également M. Di Benedetto, Professeur à l'Université "La Sapienza" de Rome, et T.J. Tam, Professeur à l'Université de Washington, avec lesquels le travail lors de leurs passages à Nantes fut pour moi un très grand enrichissement .

Le dernier chapitre de ce mémoire n'aurait pas pu présenter tant de résultats sans l'aide de Y. Aoustin Maître de Conférences, P. Chedmail Professeur, C. Chevallereau Chargé de Recherche au C.N.R.S., M. Guglielmi Directeur du L.A.N., M. Hamy Maître de Conférences et enfin E. Le Carpentier Maître de Conférences, merci à eux.

**Merci également aux membres du Laboratoire et en particulier à J. P. Elloy qui m'ont permis de travailler dans une ambiance cordiale.**

**Enfin, merci à ma famille et aux amis (même à ceux du bord de mer) qui ont su éviter que ce travail se fasse dans la précipitation.**



**A Géraldine et Mathieu.**

## Sommaire

Introduction	11
Chapitre 1 Rappels	17
1.1 Introduction	17
1.2 Classe des systèmes étudiés	17
1.3 Structure des systèmes non linéaires: rappels	20
1.4 Eléments de géométrie différentielle pour l'automatique non linéaire	21
1.5 Conclusion	21
Chapitre 2 Analyse des Systèmes Non Linéaires	23
2.1 Introduction	25
2.2 Ordres d'essentialité et Algorithme de Structure	25
2.3 Linéarisation partielle	30
2.4 Interacteur Non Linéaire	35
2.5 Conclusion	40
Chapitre 3 Contrôle des Systèmes Non Linéaires	43
3.1 Introduction	45
3.2 Classification des Compensateurs	45
3.3 Ordres essentiels et Découplage	48
3.4 Découplage des Systèmes Non Linéaires sous Bouclage Dynamique Pur.	52
3.5 Problème de Morgan (Découplage Non Régulier)	55
3.6 Equivalence de systèmes non linéaires sous Compensateur Dynamique	60
3.7 Stabilité des Systèmes Découplés	63
3.8 Conclusion	69
Chapitre 4 Applications du Contrôle des Systèmes Non Linéaires	71
4.1 Introduction	73
4.2 Robot flexible	74
4.3 Moteur Synchrone	83
4.4 Véhicule Spatial	93
4.5 Conclusion	101
Conclusion générale	103
Annexe 1. Quelques éléments de mathématiques pour l'Automatique Non Linéaire.	A1.1
Annexe 2. Essential Orders and the Nonlinear Decoupling Problem. Int. J. Control, 1989, vol.50, N°5, pp. 1825-1834.	A2.1

<b>Annexe 3. Nonlinear Morgan's Problem: case of <math>(p+1)</math> inputs and <math>p</math> outputs.</b>	
IEEE Trans. Aut. Contr. , July 1992, vol.37, N°7, pp. 1067-1072.	<b>A3.1</b>
<b>Annexe 4. Input-Output Decoupling and Equivalence of Nonlinear Systems under Pure Dynamic State Feedback, soumis.</b>	<b>A4.1</b>
<b>- Annexe 5. Interconnected Zero Dynamics in Non linear Systems and their Role in Dynamic Non interacting Control with Stability.</b>	
Proc. Genoa Conf. "New Trends in Systems Theory, 9-11 July 1990.	<b>A5.1</b>
<b>Annexe 6. Plane flexible robot modelisation and application to the control of an elastic arm.</b>	
Proc. de la Conf. ICAR'87, Versailles, pp.525-536, 1987.	<b>A6.1</b>
<b>Annexe 7. Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques, à paraître Int. J. Control, 1992.</b>	<b>A7.1</b>
<b>Annexe 8. Online Guidance and Control of a Spacecraft for an aeroassisted orbit transfert</b>	
IFAC Symp. on Aerospace Control , Munich, pp. 147-152, sept. 1992	<b>A8.1</b>
<b>Annexe 9. Applications du calcul formel au contrôle des systèmes non linéaires.</b>	<b>A9.1</b>
<b>Annexe 10. Références Bibliographiques.</b>	<b>A10.1</b>

## **Introduction**



## Introduction

Ce mémoire est une synthèse de travaux récents en Automatique Non Linéaire que nous avons effectués en utilisant un outil commun : l'algèbre linéaire. Cet outil, inédit dans ce cadre il y a une dizaine d'années, est issu de l'approche algébrique différentielle [FLI1], [FLI3], [FLI5]. Nous l'évoquerons de façon tout à fait autonome en suivant [DIB1], [DIB2]. Nous considérerons ici une classe de systèmes non linéaires donnée sous forme standard [ISI2], [NI4]. Cette classe de systèmes n'est pas aussi générale que celle considérée par Fliess [FLI4], et peut être insuffisante pour décrire tous les systèmes physiques [FLI5]. Néanmoins, elle permet des études de cas dans de nombreux champs d'application: contrôle de robot, satellites, machines électriques, ... dont certains sont présentés dans ce mémoire. Nos travaux couvrent un spectre délibérément large, incluant des résultats nouveaux d'analyse jusqu'à diverses applications. Le but affiché est clair: l'ensemble des résultats est obtenu par des calculs algébriques (dérivation, addition et produit par des scalaires) ce qui est représentatif de certaines innovations récentes dans la théorie des systèmes non linéaires. Les outils géométriques plus anciens [ISI1] ne sont cependant pas exclus.

Le mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 1 (associé à l'Annexe 1) présente les outils mathématiques utilisés et rappelle les notions classiques de l'approche structurale des systèmes non linéaires : structure à l'infini par ligne (degré relatifs) ou globale, ... .

Dans les chapitres suivants, des résultats nouveaux sont présentés de manière synthétique. En ce qui concerne les démonstrations, il est fait le plus souvent référence aux publications correspondantes qui sont réunies dans les annexes. Nous essayons de garder le plus possible la terminologie issue du linéaire car les résultats présentés ici sont souvent la "généralisation" de concepts existant en linéaire, même si les démarches sont parfois très différentes.

Le chapitre 2 est consacré à l'Analyse de la Structure des Systèmes Non Linéaires. Les notions nouvelles d'Ordres Essentiels, de linéarisation partielle par bouclage non régulier, et d'Interacteur sont présentées.

Dans le chapitre 3, nous avons réuni des résultats nouveaux concernant le Contrôle des Systèmes Non Linéaires. Le problème du Découplage entrée-sortie est abordé sous

différentes classes de compensateurs: Compensateur Dynamique avec ou sans structure à l'infini, Bouclage Dynamique Pur (nouvelle classe de compensateur) et Bouclage Statique non régulier. Le lien entre ordres d'essentialité et le découplage par compensateur dynamique sera fait. Le Découplage Statique non régulier (problème de Morgan) est résolu pour les systèmes ayant une entrée de plus que de sorties. Ce résultat est également pionnier pour les systèmes linéaires. Ensuite le problème de l'équivalence au sens de Wolovich et Falb est défini et une première solution est apportée. Enfin dans la dernière section de ce chapitre, la stabilité des systèmes découplés est étudiée et les conditions pour l'élimination d'une certaine classe de dynamiques interconnectées éventuellement instables sont données.

Le but du chapitre 4 est de montrer que des solutions algébriques sont directement applicables à la commande des Systèmes Non Linéaires et non d'illustrer les résultats théoriques présentés dans les chapitres précédents en tant que tels. Les résultats obtenus dans ce chapitre infirment des idées opposées, a priori, à l'intérêt pratique de la théorie moderne des systèmes non linéaires. Trois applications du contrôle des systèmes non linéaires sont présentées avec une étude de robustesse. Les processus choisis couvrent un spectre assez large dans le but de montrer l'applicabilité des méthodes modernes de l'automatique. Les trois processus retenus sont: la commande d'un robot flexible avec implantation sur site, le contrôle d'une machine électrique synchrone (modèle retenu dans le groupe de travail "commande de machines électriques" des Groupements de Recherche Automatique et Electrotechnique) et enfin le guidage d'un engin spatial qui fut l'objet d'un contrat avec l'Agence Spatiale Européenne. Pour ces applications, des calculs en langage formel (Reduce et Mathematica) ont été nécessaires, ce qui a été pour nous l'occasion de créer une bibliothèque de procédures de calcul adapté à l'analyse et au contrôle des systèmes non linéaires illustrant de fait l'applicabilité des méthodes algébriques. La robustesse est obtenue en utilisant le plus souvent une technique dite de "modes glissants", i.e. une linéarisation entrée/sortie associée à une commande discontinue stabilisante fondée sur une fonction de Lyapunov.

Dans l'ensemble de ce mémoire, nos travaux sont systématiquement locaux et excluent les points singuliers.







## Chapitre 1 Rappels

### 1.1 Introduction

L'évolution des approches mathématiques utilisées pour l'étude des systèmes non linéaires dans les années 1980-90 a été importante. Dans les années 80, la géométrie différentielle apparaît comme l'outil le mieux adapté pour étendre aux systèmes non linéaires [ISI1] les résultats acquis dans le cadre linéaire par l'approche géométrique [WON2] et elle deviendra un outil de base [ISI4]. Elle a ouvert la voie à la résolution de nombre de problèmes de commande: rejet de perturbations, découplage, poursuite de modèle. Cependant son efficacité s'est principalement limitée aux bouclages statiques (réguliers) et certaines difficultés comme l'existence de distributions de commandabilité dégénérées ont également limité l'application des théorèmes. En effet pour cette classe de distributions, il y a non fermeture pour l'addition. Cette particularité n'existe pas en linéaire. Des notions nouvelles apparaissent en 1985 comme la notion de rang de système, définie par l'approche algébrique différentielle. De manière plus élémentaire, nous adopterons comme dans [DIB2] un formalisme algébrique linéaire fondé sur un espace de différentielles sur un corps de fonctions méromorphes, sans pour cela négliger les autres outils.

### 1.2 Classe des systèmes étudiés

Nous considérons les systèmes non linéaires de la forme:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (1.1.a)$$

$$y = h(x) \quad (1.1.b)$$

où pour simplifier, l'état  $x$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ . La sortie  $y$  appartient à  $\mathbb{R}^p$ .  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ , ... ,  $g_m(x)$  et  $h(x)$  sont des fonctions méromorphes de  $x$ , i.e. appartiennent au corps des fractions  $\mathcal{F}(x)$  de l'anneau intègre des fonctions analytiques de  $x$ .

Comme dans [DIB1], supposons que la fonction entrée  $u(t)$  du système (1.1) soit  $(n-1)$  fois continûment différentiable et notons  $\mathcal{K}$  le corps composé de l'ensemble des fonctions rationnelles en  $(u, \dots, u^{(n-1)})$  avec des coefficients méromorphes en  $x$ . Comme exemple d'un élément de  $\mathcal{K}$  nous pouvons prendre:

$$\eta = \frac{\sin x}{u_1 + x^3 u_2} \quad (1.2)$$

Pour la suite du mémoire, nous utiliserons la notation simplifiée et abusive  $y(x) = y^{(0)}(x) = h(x)$  pour la fonction de sortie.

Alors en reprenant le système (1.1), nous pouvons calculer facilement,

$$\dot{y} = \dot{y}(x, u) = \frac{\partial y}{\partial x} [f(x) + g(x) u] \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= y^{(k+1)}(x, u, \dots, u^{(k)}) \\ &= \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x} [f(x) + g(x) u] + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(i)}} u^{(i+1)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Remarquons que  $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$  ainsi définis ont leurs composantes dans le corps  $\mathcal{K}$ . Plus généralement la notation  $y^{(k)}(x, u, \dots, u^{(k-1)})$  étant définie, alors

$$y^{(k+1)}(x, u, \dots, u^{(k)}) = \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x} [f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i] + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)}$$

Les matrices Jacobiennes  $\frac{\partial(\dot{y}, \dots, y^{(k)})}{\partial(u, \dots, u^{(k-1)})}$  considérées pour la première fois par Nijmeijer [NIJ2] pour  $1 \leq k \leq n$ , sont analogues aux matrices de Toeplitz associées aux systèmes linéaires. Nous considérerons des matrices "étendues" :  $\frac{\partial(\dot{y}, \dots, y^{(k)})}{\partial(x, u, \dots, u^{(k-1)})}$  qui peuvent être introduites par un formalisme d'algèbre linéaire.

Soit  $\mathcal{K}$  le corps défini ci-dessus. Soit  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel (sur  $\mathcal{K}$ ) engendré par  $\{dx, du, \dots, du^{(n-1)}\}$ . Un vecteur quelconque  $\omega$  de  $\mathcal{E}$  s'écrit alors:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} du_j^{(k)}$$

où  $\alpha_i, \beta_{jk}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $0 \leq k \leq n$ ,  $dy_i^{(k)}$  appartient à  $\mathcal{E}$  et nous avons :

$$dy_i^{(k)} = \left( \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial x} \quad \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial u} \quad \dots \quad \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial u^{(n-1)}} \right) \begin{pmatrix} dx \\ du \\ \vdots \\ du^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

où apparaît la matrice Jacobienne

Enfin introduisons la chaîne de sous-espaces  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$  définis par

$$\mathcal{E}_k := \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy, \dots, dy^{(k)}\} \quad (1.6)$$

Dans la suite, le corps des scalaires sera toujours  $\mathcal{K}$  sauf indication contraire. La notion équivalente de filtration a été adoptée dans [ELA1] pour reformaliser l'information fournie par  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$  dans des cas où le système n'est pas nécessairement donné par (1.1).

### Exemple 1.1 Matrice Jacobienne d'un système linéaire

Soit un système linéaire donné sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne associée à ce système est :

$$\frac{\partial(\dot{y}, \dots, y^{(n)})}{\partial(x, u, \dots, u^{(n-1)})} = \begin{pmatrix} CA & CB & (0) & (0) & \dots \\ CA^2 & CAB & CB & (0) & \dots \\ CA^3 & CA^2B & CAB & CB & (0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^n & CA^{n-1}B & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La partie en gras de la matrice Jacobienne est la Matrice de Toeplitz associée à un système linéaire. La répétition diagonale des termes  $CB, CAB, \dots$ , (forme de Toeplitz) est un phénomène lié aux systèmes linéaires, il ne se reproduit pas pour un système non linéaire.

### 1.3 Structure des systèmes non linéaires: rappels

Rappelons la définition de certains entiers invariants qui sont importants pour l'étude de la structure des systèmes non linéaires et que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

#### Définition 1.1 Degré relatif [ISI4] ou ordre du zéro à l'infini par ligne

Le degré relatif de la sortie  $y_i$  ou ordre du zéro à l'infini par ligne est l'ordre  $n_i$  du zéro à l'infini du sous-système constitué par les dynamiques (1.1.a) et la sortie  $y_i = h_i(x)$ , est :

$$n_i := \min \{ k > 0 / dy_i^{(k)} \notin \text{span}(dx) \}$$

et si pour tout  $k > 0$ ,  $dy_i^{(k)} \in \text{span}(dx)$ , on note  $n_i = \infty$ . □

Dans ce mémoire, nous considérerons des  $n_i$  finis, car nous travaillerons avec des systèmes inversibles à droite (déf. 1.3 ci-après).

La définition suivante concerne la structure à l'infini d'un système non linéaire qui est parfois dite algébrique dans la littérature. Définie pour les systèmes linéaires dans [ROS1][PU1][VARI] Commault et Dion furent les premiers à donner une caractérisation géométrique de la structure à l'infini [COM2].

#### Définition 1.2 Ordre de zéro à l'infini [DIB1] [MOO2]

Pour le système (1.1) le nombre  $\sigma_k$  des zéros à l'infini d'ordre inférieur ou égal à  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , est :

$$\sigma_k = \dim \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_{k-1}}. \quad \square$$

Maintenant, introduisons les notations suivantes :

$p_1 = \sup \{ \sigma_k, k \geq 1 \}$  = nombre total de zéros à l'infini

$p_i = p_1 - \sigma_{i-1}$  = nombre de zéros à l'infini, d'ordre plus grand ou égal à  $i$ , pour  $i \geq 2$

et  $n'_j = \text{card} \{ p_i \geq j \}$ . La liste  $\{ n'_j, j \geq 1 \}$  représente alors la liste des ordres des zéros à l'infini.

**Définition 1.3 Inversibilité à droite [FLI2] [DIB2]**

Un système (1.1) est inversible à droite si et seulement si :

$$\dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_{n-1}} = p \quad \square$$

Son rang est égal à  $p$ , toutes les sorties sont indépendantes (elles ne vérifient aucune équation différentielle indépendante de l'entrée). C'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit découplable.

**1.4 Eléments de géométrie différentielle pour l'automatique non linéaire**

Même si ce mémoire est essentiellement consacré à l'apport de l'approche algébrique des systèmes non linéaires, l'approche géométrique différentielle qui est l'extension naturelle de l'approche géométrique de l'automatique des systèmes linéaires permet comme pour ceux-ci, la caractérisation d'un grand nombre de concepts d'Automatique. Pour une revue complète, le livre d'Isidori [ISI4] est la référence devenue classique et on trouvera en Annexe 1 de ce mémoire une revue partielle des éléments de base. Parmi les éléments les plus importants directement liés au travail présenté dans les chapitres suivants, nous utiliserons la caractérisation de certains sous-espaces ou codistributions (c.f. Annexe1) qui admettent une base de différentielles totales exactes ce qui nous est donné par le théorème de Frobenius (Annexe 1 page 10). Nous utiliserons aussi la notion standard de plus grande distribution  $(f, g)$ -invariante involutive contenue dans le noyau de la différentielle de la sortie et celle de distribution de commandabilité (c.f. Annexe 1 ).

**1.5 Conclusion**

Dans ce premier chapitre, nous avons défini, la classe des systèmes non linéaires que nous étudions et qui est apte à décrire les cas pratiques de systèmes évoqués au chapitre 4. Quelques outils et notions de base ont été rappelés. L'algorithme de structure qui fait aussi partie des éléments fondamentaux de l'étude des systèmes non linéaires sera rappelé dans le chapitre suivant sous la forme présentée dans [DIB2] en liaison avec une notion nouvelle: les ordres essentiels.



## **Chapitre 2 Analyse des Systèmes Non Linéaires**





## Chapitre 2 Analyse des Systèmes Non Linéaires

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des notions nouvelles concernant l'analyse de la structure des systèmes non linéaires. Les résultats présentés sont tout d'abord la notion d'ordre d'essentialité et son lien avec l'algorithme d'inversion présenté sous la forme [DIB2], puis un résultat de linéarisation partielle par bouclage non régulier et enfin la définition de la notion d'Interacteur en non linéaire. Ces informations structurelles nous seront utiles pour des développements sur le contrôle des systèmes non linéaires au chapitre 3.

### 2.2 Ordres d'essentialité et Algorithme de Structure

#### 2.2.1 Introduction

A partir de la notion de "ligne essentielle" d'une matrice introduite dans [CRE1] (1971), le concept d'ordre d'essentialité a été défini pour les systèmes linéaires dans [MAL1] (1985) où son rôle dans le problème du découplage a été montré. Dans [COM1] (1986) plusieurs définitions équivalentes ont été données. L'extension de cette notion d'ordre essentiel aux systèmes non linéaires [GLU1] (1989) est présentée ici ainsi que les principales propriétés qui en découlent et qui seront utilisées dans le chapitre sur le contrôle des systèmes non linéaires. Même si nous nous attachons à conserver le vocabulaire, l'extension d'une notion ou d'un résultat du linéaire au non linéaire est rarement triviale; ceci est particulièrement vérifié pour les ordres d'essentialité.

La propriété importante de ces invariants (les ordres d'essentialité) est de définir la plus petite structure à l'infini qu'un système inversible à droite devra avoir dans une forme découplée par bouclage. Dans certains cas de bouclage statique non régulier [HER1], la structure à l'infini atteignable est supérieure à la structure essentielle (qui aurait pu être atteinte par Compensateur dynamique). Pour les systèmes linéaires, ce résultat qui donne l'ordre minimal du compensateur résolvant le problème du découplage est donné par [COM1] à partir de l'analyse de la matrice de Toeplitz. Une analyse identique est insuffisante dans le cas des systèmes non linéaires. Des notions complémentaires présentées dans [DIB2] seront utilisées. Comme dans le cas linéaire, la connaissance des ordres essentiels, de la structure à

l'infini et des associations entre les zéros à l'infini et les ordres essentiels permettra de déterminer le "nombre d'intégrateurs" nécessaire pour obtenir les conditions d'un découplage statique. Ces associations entre les zéros à l'infini et les ordres essentiels nous sont données par l'algorithme de structure.

Des résultats similaires ont été obtenus de façon indépendante dans [XIA1]. Certains de nos travaux sur ce thème ont été complétés ou repris par d'autres auteurs récemment [ELA1], [HUI2], ce qui souligne son rôle dans la théorie moderne du contrôle non linéaire.

### 2.2.2 Les ordres essentiels en non linéaire : définition et propriétés

#### **Définition 2.1 ordres essentiels**

Pour  $i=1, \dots, p$ , l'ordre essentiel  $n_{ie}$  d'une sortie  $y_i$  est défini par :

$$n_{ie} = \min \{ k \geq 1 \mid dy_i^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{ dx, dy, \dots, dy^{(k-1)}, dy_j^{(k)}, dy^{(k+1)}, \dots, dy^{(n)} \} \}.$$

Une telle différentielle  $dy_i^{(k)}$  est dite essentielle dans  $\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\}$ . Si un tel entier  $k$  n'existe pas, on note  $n_{ie} = \infty$ . □

Avec l'hypothèse d'inversibilité à droite, comme pour les  $n_i$ , dans ce mémoire nous considérerons des  $n_{ie}$  finis.

#### **Lemme 2.1 [GLU1]**

Pour les systèmes inversibles à droite (défini au chapitre 1),

$$n_{ie} \text{ est fini et } n_{ie} \leq n'_1, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, p\}.$$

où  $n'_1$  désigne le plus grand ordre de zéro infini. □

Un exemple de calcul est fait ci-après. En conclusion sur la *définition* des ordres essentiels en non linéaire, il faut remarquer qu'elle se calque directement du cas linéaire [COM1], en étant toutefois plus algébrique que matricielle. Les propriétés ne peuvent être tirées directement de la matrice Jacobienne  $\partial(\dot{y}, \dots, y^{(k)})/\partial(u, \dots, u^{(k-1)})$  qui est une extension naturelle de la matrice de Toeplitz associée à un système linéaire. Les résultats obtenus nécessitent de travailler dans le cadre algébrique introduit par [DIB1] qui utilise les différentielles exactes  $dy_i^{(k)}$ .

Des propriétés complémentaires donnant le lien entre les ordres essentiels et le problème de la commande non interactive sont données au chapitre 3.

### 2.2.3 Algorithme de structure et essentialité

L'algorithme de structure ou d'inversion a été introduit en [SIN2] et est rappelé ci-dessous sous la forme donnée dans [DIB2]. Cette écriture de l'algorithme fait apparaître explicitement les ordres des zéros à l'infini et les ordres essentiels [GLU3]. Ce résultat a été mis en valeur dans [HUI1], [HUI2].

#### Algorithme de Structure

##### Etape 1

Calculons  $\dot{y} = \dot{y}(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}}_1(x, u) \\ \dot{\hat{y}}_1(x, \tilde{y}_1) \end{pmatrix}$  où  $\dot{\tilde{y}}_1$  est tel que  $\{dx, d\tilde{y}_1\}$  est une base de

$\mathcal{E}_1 = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy\}$ , les composantes de  $y$  ayant été permutées, si nécessaire.

##### Etape $k$ ( $k \geq 2$ )

De l'étape  $k-1$ , calculons  $\hat{y}_{k-1}^{(k)} = \hat{y}_{k-1}^{(k)}(x, \{\tilde{y}_i^{(j)} / 1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k\}, u)$  qui après une éventuelle

permutation des composantes, peut se décomposer en:

$$\tilde{y}_k^{(k)} = \tilde{y}_k^{(k)}(x, \{\tilde{y}_i^{(j)} / 1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k\}, u) \quad (2.1)$$

$$\hat{y}_k^{(k)} = \hat{y}_k^{(k)}(x, \{\tilde{y}_i^{(j)} / 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k\})$$

où  $\tilde{y}_i^{(j)}$  est tel que  $\{dx, \{d\tilde{y}_i^{(j)} / 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k\}\}$  est une base de  $\mathcal{E}_k = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, d\tilde{y}_1, \dots, d\tilde{y}_k\}$ .  $\square$

Si nous appliquons l'algorithme d'inversion à un système  $\Sigma$  de la forme (1.1), alors:

**Lemme 2.2 [HUI4]**

Si  $\Sigma$  est inversible à droite,

(i)  $n_{1e}$  est le plus grand ordre de dérivation par rapport au temps de la composante de sortie,  $y_1$  apparaissant dans (2.1) pour  $1 \leq k \leq n$ .

(ii) Soit  $\gamma_1$  le plus petit ordre de dérivée par rapport au temps de  $y_1$  apparaissant dans (2.1) pour  $1 \leq k \leq n$ . Alors, la liste  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  égale la liste  $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ .  $\square$

**Exemple 2.1 Algorithme de structure et matrice Jacobienne étendue**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de structure selon [DIB2] :

$\dot{\tilde{y}}_1 = \dot{y}_1 = u_1$  sélectionnée à l'étape 1 car une entrée ( $u_1$ ) apparaît et rend indépendante  $dy_1$  dans  $\text{span}_{\mathcal{K}}\{dx, dy\}$

et  $\hat{\tilde{y}}_1 = \hat{y}_2 = x_3 \dot{y}_1$

d'où  $\ddot{\tilde{y}}_2 = \ddot{\hat{\tilde{y}}}_1 = \ddot{y}_2 = u_2 \dot{y}_1 + x_3 \ddot{y}_1$  sélectionnée à l'étape 2

Finalement l'algorithme de structure sélectionne les deux équations :

$$y^{(n'_2)}_1 = u_1$$

$$y^{(n'_1)}_2 = y^{(n_{2e})}_2 = u_2 \dot{y}_1 + x_3 y^{(n_{1e})}_1$$

et nous avons donc:

$n_{1e} = n_{2e} = 2$  alors que les ordres des zéros à l'infini sont  $n'_1 = 2$ ,  $n'_2 = 1$ .

Pour retrouver ce résultat, nous aurions pu calculer la matrice Jacobienne (étendue)

$$J := \frac{\partial(x, \dot{y}, \ddot{y}, y^{(3)})}{\partial(x, u, \dot{u}, \ddot{u})}$$

en faisant le calcul des dérivées successives des sorties. Soit :

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ x_3 \dot{u}_1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ x_3 \ddot{u}_1 + \dot{u}_1 u_2 \end{pmatrix}$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} \dddot{u}_1 \\ x_3 \dddot{u}_1 + 2\ddot{u}_1 u_2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

et alors pour calculer les ordres essentiels, nous pouvons examiner la Matrice Jacobienne étendue

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{u}_1 & u_2 & u_1 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddot{u}_1 & \dot{u}_2 & 2\dot{u}_1 & 2u_2 & u_1 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux lignes en gras représentent les différentielles essentielles (selon la définition 2.1) ce qui signifie que ces deux lignes sont les premières lignes de la matrice (en partant du haut) ne pouvant pas être obtenues par une combinaison des autres lignes.

Nous utiliserons la notion d'ordre essentiel au chapitre 3 qui concerne le contrôle des systèmes non linéaires, mais d'abord examinons une autre notion de l'analyse structurelle: la linéarisation partielle.

## 2.3 Linéarisation partielle

### 2.3.1 Introduction

Lors de l'étude du découplage, la solution dynamique [DES1] [DES2] modifie la structure du système original en connectant des chaînes d'intégrateurs sur certaines entrées. Ces chaînes sont complètement externes au système. Dans le cas d'une solution statique non régulière, les chaînes nécessaires à la modification de la structure, comme nous le verrons au chapitre 3 devront être issues du système lui-même. La détermination des chaînes disponibles (i.e. incluses dans une partie non observable et commandable du système) peut être faite dans le cas linéaire par la détermination de  $\mathcal{R}^*$ , le plus grand sous-espace de commandabilité contenu dans le noyau de la sortie [DES3]. Dans le cas non linéaire, le concept géométrique équivalent: la plus grande distribution de commandabilité régulière contenue dans le noyau de la sortie (Annexe 1 page A1.18), n'est pas suffisante comme montré dans [GLU3]. Dans le cas non linéaire, de plus il n'y a pas une unique distribution de commandabilité non régulière ou dégénérée maximale contenue dans le noyau de la sortie comme cela est présenté au chapitre 3 section 5 exemple 3.6.

La recherche de chaînes d'intégrateurs non observables, commandables ou non, avec éventuellement d'autres outils d'analyse devient alors nécessaire.

### 2.3.2 Position du problème et algorithmes

Le problème de la linéarisation (partielle) est un problème d'identification de sous-systèmes linéaires (ou de chaînes d'intégrateurs). Si le problème est totalement résolu par Marino [MAR1] dans le cas d'un bouclage statique régulier (transformations usuelles), pour un bouclage statique non régulier cela implique des transformations généralisées. Plus précisément, soit une entrée à laquelle on veut connecter une "chaîne d'intégrateurs". *Sans perdre de généralité, prenons  $u_1$  pour cette entrée.* Essayons de trouver toutes les "chaînes" possibles utilisant l'état  $x$ , mais aussi éventuellement l'entrée  $u_1$  et ses dérivées (voir Figure 2.1.) où  $\psi^{(j)}$  est la dérivée de  $\psi$  d'ordre  $j$ , le long des trajectoires du système pour  $1 \leq j \leq k$ . Nous allons montrer que ces fonctions  $\psi$  sont complètement caractérisées par certaines distributions définies sur la variété d'état. Les chaînes d'intégrateurs de la Figure 2.1 jouent un rôle très important pour le problème du Découplage non régulier comme cela sera montré dans le chapitre 3. De plus, elle s'inclut complètement dans un cadre de travail plus général introduit récemment par Fliess [FLI3], qui est basé sur l'algèbre différentielle : notions d'état généralisé et de bouclage généralisé.



Figure 2.1.

Pour bien définir les notations qui seront quelques fois abusives, rappelons le calcul des dérivées de  $\psi$  le long des trajectoires de l'état.

$$\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(x, u) = \frac{\partial \psi}{\partial x} [f(x) + g(x) u]$$

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k+1)}(x, u, \dots, u^{(k)}) = \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial x} [f(x) + g(x) u] + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial u^{(j)}} u^{(j+1)}, \text{ pour } k \geq 1.$$

Considérons pour cette section le système  $\Sigma$  sans sortie décrit par  $\dot{x} = f(x) + g(x) u$ . Soit  $\mathfrak{G}$  la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $g_1, \dots, g_m$  de  $g$ . Définissons les chaînes de distributions  $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{G}_k$  :

$$\mathfrak{G}_1 = 0$$

$$\mathfrak{G}_2 = \overline{\mathfrak{G}}$$

$$\mathfrak{G}_k = \overline{\mathfrak{G} + \text{ad}_f \mathfrak{G} + \dots + \text{ad}_f^{k-2} \mathfrak{G}} \quad \text{pour } k \geq 2$$

où l'on note  $\overline{\Delta}$  la fermeture involutive de la distribution  $\Delta$  (Annexe 1, page A1.9).

Les sous-systèmes linéarisables de  $\Sigma$  (comme considérés dans [MAR1]), peuvent être construits à partir des distributions  $\mathfrak{G}_k$ , et en cela les  $\mathfrak{G}_k$ , ainsi que la preuve du théorème suivant, peuvent être déduits de [MAR1]. Dans cette référence, Marino détermine des chaînes d'intégrateurs commandables au moyen de certaines séquences de distributions. Le théorème suivant va nous permettre de déterminer des chaînes d'intégrateurs qui ne sont pas nécessairement commandables, en utilisant une seule séquence de distributions. L'exigence de la commandabilité peut être rajoutée (Annexe 3 section 4).



**Théorème 2.1 [GLU3]**

Soit  $\psi$  une fonction méromorphe de  $x$ . Soit  $k > 1$ , alors:

$$d\psi^{(k-1)} \in \text{span} \{ dx \} \quad (2.2)$$

si et seulement si  $d\psi \perp \mathfrak{G}_k$ .

□

Ce théorème caractérise pour un entier  $k$  donné, toutes les fonctions méromorphes  $\psi(x)$  telles que leurs dérivées  $\psi^{(\ell)}$  soient des fonctions dépendantes de  $x$  seulement pour  $1 \leq \ell \leq k-1$ . Si nous considérons  $\psi(x)$  comme une sortie de notre système, son degré relatif est alors plus grand ou égal à  $k$ . Nous allons étendre le résultat du théorème ci-dessus dans le lemme et le théorème suivants où nous caractériserons toutes les fonctions méromorphes  $\psi(x)$  telles que, pour un  $k$  donné, leurs dérivées  $\psi^{(\ell)}$  soient des fonctions dépendantes de  $x, u_1, \dots, u_1^{(\ell-1)}$  seulement, où  $u_1$  est une entrée arbitraire:

$$\psi^{(\ell)} = \psi^{(\ell)}(x, u_1, \dots, u_1^{(\ell-1)}) \text{ pour } 1 \leq \ell \leq k-1$$

Nous pouvons obtenir cette caractérisation par une application immédiate du Théorème 2.1 en considérant un système étendu  $\Sigma_e$ , constitué du système  $\Sigma$  initial avec le rajout de  $s$  intégrateurs sur l'entrée  $u_1$ . Alors  $\Sigma_e$  est défini sur  $M_e = M \times \mathbb{R}^s$ , et est décrit par:

$$\dot{x}_e = f_e(x_e) + g_e(x_e) \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = h(x) \quad \text{où } x_e = (x, u_1, \dots, u_1^{(s-1)}), \quad v_1 = u_1^{(s)}. \quad (2.3)$$

$$\text{avec } f_e(x_e) = \begin{pmatrix} f(x) + u_1 g_1(x) \\ \dots \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ u_1^{(s-1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_e(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & g_2(x) & \dots & g_m(x) \\ \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons par  $\mathfrak{G}_e$  la distribution engendrée par  $g_e$  et définissons la chaîne de distributions

$$\mathfrak{G}_{1e} = 0$$

$$\mathfrak{G}_{2e} = \overline{\mathfrak{G}_e}$$

$$\mathfrak{G}_{ke} = \overline{\mathfrak{G}_e + \text{ad}_{f_e} \mathfrak{G}_e + \dots + \text{ad}_{f_e}^{k-2} \mathfrak{G}_e} \quad \text{pour } k \geq 2$$

Soient  $TM_e^*$  et  $TM^*$  les fibrés cotangents de  $M_e$  et  $M$  respectivement (c.f. Annexe 1 page A1.6). Au moyen d'une insertion canonique,  $TM^*$  peut être considéré localement comme une sous-codistribution de  $TM_e^*$ . Nous pouvons alors établir :

**Lemme 2.3**

Soit  $\psi$  une fonction méromorphe de  $x$ . Soit  $1 < k \leq s$ ,

$$d\psi^{(k-1)} \in \text{span} \{ dx, du_1, \dots, du_1^{(k-2)} \}$$

si et seulement si  $d\psi \in TM^*$  et  $d\psi \perp \mathfrak{G}_{ke}$ . □

*Preuve:* Appliquons le Théorème 2.1 à  $\Sigma_e$ ,  $d\psi \perp \mathfrak{G}_{ke}$  est équivalent à :

$\psi^{(\ell)} = \psi^{(\ell)}(x_e)$  pour  $1 \leq \ell \leq k-1$ . Alors,  $d\psi \in TM^*$  implique  $\psi^{(\ell)} = \psi^{(\ell)}(x, u_1, \dots, u_1^{(\ell-1)})$  pour  $\ell \geq 1$  et nous obtenons le résultat.

La condition donnée par le Lemme 2.3 est facile à tester, mais demande l'usage de champs de vecteurs augmentés à travers la définition de  $\mathfrak{G}_{ke}$ . Le Théorème 2.2 ci-après permettra une caractérisation équivalente mais qui nécessite seulement des champs de vecteurs du système initial.

Notons  $\mathfrak{G}_0$  la distribution engendrée par les champs de vecteur  $g_2, \dots, g_m$ . Définissons  $\text{ad}_{f_{g_1}} \mathfrak{G}_0 := [f, \mathfrak{G}_0] + [g_1, \mathfrak{G}_0]$  et pour  $k \geq 1$ ,  $\text{ad}_{f_{g_1}}^{k+1} \mathfrak{G}_0 := [f, \text{ad}_{f_{g_1}}^k \mathfrak{G}_0] + [g_1, \text{ad}_{f_{g_1}}^k \mathfrak{G}_0]$ .

Considérons la séquence de distributions

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 0 \\ \Gamma_2 &= \overline{\mathfrak{G}_0} \\ \Gamma_k &= \overline{\mathfrak{G}_0 + \text{ad}_{f_{g_1}} \mathfrak{G}_0 + \dots + \text{ad}_{f_{g_1}}^{k-2} \mathfrak{G}_0} \quad \text{pour } k \geq 2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nous pouvons alors établir :

**Théorème 2.2 [GLU3]**

Soit  $\psi$  une fonction méromorphe de  $x$ . Soit  $k > 1$ ,

$$d\psi^{(k-1)} \in \text{span} \{ dx, du_1, \dots, du_1^{(k-2)} \} \quad (2.5)$$

si et seulement si

$$d\psi \perp \Gamma_k. \quad (2.6) \quad \square$$

Soit  $\mu = n - \dim \Gamma_k$ . Nous pouvons alors définir une chaîne de sous-espaces

$$\Omega_k^{(j)} = \text{span}_{\mathcal{K}} \{ d\psi_i^{(j)}, 1 \leq i \leq \mu \} \text{ pour } 0 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq n \quad (2.7)$$

que nous utiliserons au chapitre 3 en même temps que les résultats sur la linéarisation partielle.

**Exemple 2.2**

Reprenons l'exemple 2.1:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

La dynamique n'est pas complètement linéarisable par bouclage statique régulier car  $\dim \text{span} \{ \text{ad}_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m \} = 2 \geq n$  qui est une condition nécessaire pour la linéarisation exacte de l'état.

Pour appliquer le théorème 2.2 calculons :

$$\Gamma_1 = 0$$

$$\Gamma_2 = \overline{\mathcal{G}_0} = \text{span} \{ g_2 \} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et nous avons alors } dx_1 \perp \Gamma_2 \text{ et } dx_2 \perp \Gamma_2$$

$$\Gamma_3 = \overline{\mathcal{G}_0 + \text{ad}_{f, g_1} \mathcal{G}_0} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et nous obtenons } dx_1 \perp \Gamma_3.$$

Nous pouvons en déduire un bouclage statique non régulier linéarisant. En effet  $\dot{x}_1 = u_1$  et  $\dot{x}_2 = x_3 u_1 + u_1 u_2$  d'où une solution statique non régulière donnée par  $u_1 = x_2$  :

$$\dot{x}_1 = u_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3 u_1 = x_3 x_2 = \tilde{x}_3$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_3 x_2 + x_3 \dot{x}_2 = x_2 u_2 + x_3^2 x_2 = \tilde{x}_3 x_2 + x_2 u_2 = v_2 \quad \text{soit} \quad u_2 = -x_3^2 + \frac{v}{x_2}$$

La dernière partie de ce chapitre sur la structure des systèmes non linéaires est l'introduction de la notion d'Interacteur et le lien de celui-ci avec les informations structurelles déjà connues.

## 2.4 Interacteur Non Linéaire

### 2.4.1 Introduction et rappels

En linéaire, la notion d'Interacteur a été introduite par Wolovich et Falb [WOL1], imposée par l'étude de l'équivalence dynamique des systèmes. L'intérêt est de mettre en évidence certaines propriétés structurelles des systèmes linéaires. Morse a montré que l'on pouvait caractériser l'Interacteur grâce à la forme d'Hermite [MOR1], [ICA1]. Récemment [LAF1] il a été montré qu'une permutation des sorties conduisait à un Interacteur réduit par les lignes qui fournit directement la structure à l'infini ainsi que la structure essentielle. Pour les systèmes non linéaires on peut introduire cette notion d'Interacteur en utilisant la notion d'inversion des systèmes, où seule la permutation des sorties est interdite.

### 2.4.2 Interacteur non linéaire

L'algorithme d'Interacteur pour les systèmes non linéaires a été introduite pour la première fois dans [DIB5] (cf Annexe 4 page A4.8), et permet de définir l'Interacteur pour un système de la forme (1.1).

Nous rappelons ici la procédure de calcul basée sur une version modifiée de l'algorithme de structure.

#### Algorithme d'Interacteur

**Etape 1.** Soit  $y_1$  la première composante de  $y$ , écrivons :

$$y_1^{(r_1)} = a_1(x) + b_1(x) u$$

où  $r_1$  est le degré relatif de  $y_1$ .

Etape 2. Considérons le système  $\Sigma_2$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ \begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} u \end{cases} \quad (2.8)$$

Appliquons l'algorithme de structure à (2.8) de façon à obtenir pour un entier  $r_2$  :

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y_1^{(i)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y_1^{(j)}) \end{pmatrix} u$$

avec le rang générique de  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 2$ ,  $i=r_1, \dots, r_1+r_2-1$ ,  $j=r_1, \dots, r_1+r_2-2$

Etape  $k+1$ . Considérons le système  $\Sigma_{k+1}$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ \begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_k^{(r_k)} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y_1^{(i_1)}) \\ \vdots \\ a_k(x, y_{\mu}^{(i_{\mu})}) \\ b_{k+1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y_1^{(j_1)}) \\ \vdots \\ b_k(x, y_{\mu}^{(j_{\mu})}) \\ 0 \end{pmatrix} u \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\mu = 1, \dots, k-1$ ;  $i_{\mu} = r_{\mu}, \dots, r_{\mu}+r_k-1$ ;  $j_{\mu} = r_{\mu}, \dots, r_{\mu}+r_k-2$ .

Appliquons l'algorithme de structure au système  $\Sigma_{k+1}$  de façon à obtenir pour un entier  $r_{k+1}$

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(r_{k+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y_1^{(i_1)}) \\ \vdots \\ a_{k+1}(x, y_{\mu}^{(i_{\mu})}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y_1^{(j_1)}) \\ \vdots \\ b_{k+1}(x, y_{\mu}^{(j_{\mu})}) \end{pmatrix} u$$

où le rang générique de  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k+1} \end{pmatrix}$  égale  $k+1$ .

Pour  $k = 1, \dots, p$  le nombre de sorties, soit

$$\varphi_k(x, u, y_{i_\gamma}^{(\gamma)}, \gamma=1, \dots, k, i_\gamma = r_\gamma, \dots, r_\gamma + r_k - 1) = y_{j_\mu}^{(r_k)} - a_k(x, y_{i_\mu}^{(\mu)}) - b_k(x, y_{i_\mu}^{(\mu)}) u \quad (2.10)$$

où  $\mu = 1, \dots, k-1$ ;  $i_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_k - 1$ ;  $j_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_k - 2$ .  $\square$

Tous les entiers  $r_1, \dots, r_p$  sont finis si le système  $\Sigma$  est inversible à droite. La procédure ci-dessus est alors définie de manière unique puisqu'aucune permutation de sorties n'est possible à aucune étape. A partir des  $\varphi_k$ , nous pouvons définir :

### Définition 2.2 Jacobien de l'Interacteur

$$\text{La matrice Jacobienne } \mathcal{J}(x, u, y_{i=1, \dots, p}^{(j)}, i=1, \dots, p; j=1, \dots, n) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}^{(j)})} \quad (2.11)$$

est appelé le "Jacobien de l'Interacteur" de  $\Sigma$ . Le rang de la matrice  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_{i=1, \dots, p}^{(n_{i_e})})}$

noté  $r^*$  est appelé le "rang à l'infini" par les colonnes de l'Interacteur (pour conserver une appellation issue des systèmes linéaires).  $\square$

### Exemple 2.3 a) Interacteur d'un système linéaire

Examinons un exemple pour mieux comprendre le rôle de l'Interacteur. Calculons le sur l'exemple linéaire proposé par Wolovich et Falb [WOL1].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + u_1 \\ \dot{x}_4 &= -4x_4 + u_2 \\ y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_3 + x_4 \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'algorithme d'inversion qui coïncide dans ce cas avec l'algorithme d'Interacteur (pas de renumérotation des sorties) donne:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -x_1 - 2x_2 + (1 \quad 1) u \\ y_2^{(3)} - y_1^{(3)} + 2y_1^{(2)} &= 3x_1 + 16x_2 - 27x_3 - 64x_4 + (6 \quad 8) u \end{aligned}$$

Posons  $z_1 = \dot{y}_1$  et  $z_2 = y_2^{(3)} - y_1^{(3)} + 2 y_1^{(2)}$

En utilisant la transformée de Laplace, on peut transposer l'algorithme de l'Interacteur dans le domaine de Laplace et on obtient alors les mêmes opérations que celles décrites dans [WOL1], ce qui donne la matrice de transfert de  $\frac{Y(s)}{Z(s)} = I(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^3+2s^2 & s^3 \end{bmatrix}$ . Ce résultat a été établi dans [FUR1] pour les systèmes linéaires.

On peut exprimer l'Interacteur à partir du "Jacobien de l'Interacteur", qui est une matrice à valeurs réelles dans ce cas, par:

$$I(s) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} s & s^2 & s^3 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & s^2 & s^3 & s^4 \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

Il est montré dans le cas linéaire [LAF1], qu'il existe une permutation des composantes de sorties telles que l'Interacteur du système résultant est réduit par les lignes, c'est à dire qui fournit la structure à l'infini comme degrés des éléments de sa diagonale. Différentes permutations des sorties peuvent conduire à des Interacteurs différents. On peut remarquer que l'algorithme de structure original de [SIL1] donne un Interacteur réduit par les lignes:

$$\begin{bmatrix} s^{n'_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & s^{n'_2} & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & s^{n'_p} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où  $n'_1 \leq n'_2 \leq \dots \leq n'_p$ .

Pour les systèmes non linéaires, en utilisant la relation entre l'algorithme d'inversion et les ordres essentiels (rappelée en section 2.2.3), on peut calculer les ordres essentiels  $n_{ie}$  des sorties  $y_i$  à l'aide de l'algorithme d'interacteur par:

$$n_{ie} = \max \left\{ k \mid \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial y_i^{(k)}} \neq 0 \right\}, i=1, \dots, p,$$

où les fonctions  $\varphi_i$  sont définies par l'expression (2.10).

**Exemple 2.3 b) Interacteur d'un système non linéaire**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

L'algorithme d'Interacteur sélectionne :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u_1 \\ y_2^{(3)} = x_3 y_1^{(3)} + 2 x_4 y_1^{(2)} + \dot{y}_1 u_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \varphi_1 = \dot{y}_1 - u_1 \\ \varphi_2 = y_2^{(3)} - x_3 y_1^{(3)} - 2 x_4 y_1^{(2)} - \dot{y}_1 u_2 \end{cases}$$

(ce qui nous donne également les ordres d'essentialité  $(3, 1)$ ).

Le Jacobien de l'Interacteur  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_i^{(j)}, i=1, \dots, p, j=1, \dots, n)}$  est

$$J = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & -2x_4 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Le rang de la matrice  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_i^{(j)}, i=1, \dots, p)}$  est le "rang à l'infini" par les colonnes de

l'Interacteur :

$$r^* = \text{rang de } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -x_3 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Nous allons maintenant examiner des propriétés de l'interacteur qui seront utilisées au chapitre 3 section 3 lors de l'étude de l'équivalence de deux systèmes non linéaires.

Une première propriété de l'Interacteur est qu'il est invariant sous bouclage Statique régulier:

**Proposition 2.1 [DIR5]**

Soit  $\Sigma$  un système de la forme (1.1) carré et inversible à droite, et soit  $Q$  un bouclage statique régulier défini par  $u = \alpha(x) + \beta(x) v$ . Soit  $J$  et  $J^Q$  les Interacteurs de  $\Sigma$  et  $\Sigma \circ Q$  respectivement. Alors,

$$J(x, u, y_i^{(j)}) = J^Q(x, v, y_i^{(j)}) \Big|_{v = -\beta^{-1}(x)(\alpha(x) - u)}$$

□



Une deuxième propriété importante de l'Interacteur est que son "rang à l'infini" par les colonnes est un invariant du système:

**Proposition 2.2 [DIB5]**

Supposons que  $\Sigma$  soit inversible à droite et soit :

$Y = \text{span} \{dx, dy_1, \dots, dy^{(m_i-1)}, i = 1, \dots, p\}$ , alors

$$r^* = p - \dim [Y \cap \text{span}\{du\}]$$

□

Ce résultat montre que  $r^*$  est indépendant de la permutation des sorties donc que  $r^*$  peut être calculé par exemple par l'algorithme d'inversion [SIN2].

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, trois contributions à l'analyse structurelle des systèmes non linéaires ont été présentées. Deux de ces contributions ont leurs équivalents pour les systèmes linéaires. La troisième est un développement de travaux de Marino; ces trois notions vont être utilisées dans le chapitre suivant relatif au contrôle des systèmes non linéaires.

La notion d'ordre essentiel que nous avons définie dans [GLU1] a été reprise depuis par différents auteurs [HUI2], [BON1], et récemment dans [ELA1], une approche non algorithmique est venue compléter ce travail. Signalons enfin que la notion d'essentialité a été développée indépendamment dans [XIA1]. Cette notion d'ordre essentiel, comme dans le cas des systèmes linéaires, est capitale pour la définition d'un compensateur permettant le découplage dynamique minimal comme nous le verrons au chapitre 3.

Le problème de la linéarisation partielle, comme présentée ici, sera un élément de base pour l'étude du problème de Découplage Statique non Régulier au chapitre suivant. Mais en lui même, ce problème s'inscrit dans le cadre de travaux récents d'analyse des systèmes non linéaires [FLI4] et il est en particulier représentatif de l'application de la notion d'état généralisé.

Enfin, la notion d'Interacteur pour les systèmes non linéaires a été introduite. Elle est directement liée à l'algorithme de structure et nous sera utile pour l'étude de l'équivalence de deux systèmes non linéaires comme définie au chapitre suivant.





## **Chapitre 3 Contrôle des Systèmes Non Linéaires**



## Chapitre 3 Contrôle des Systèmes Non Linéaires

### 3.1 Introduction

Des moyens de l'analyse structurelle pour les systèmes non linéaires ont été rappelés au chapitre 1 et présentés au chapitre 2, nous allons maintenant les utiliser pour l'étude d'un certain nombre de problèmes de commande des systèmes non linéaires. Dans une première sous-section et dans un but d'éclaircissement des notations, une revue des différents types de compensateurs sera faite. Nous définirons un nouveau compensateur: le Compensateur Dynamique sans structure à l'infini et un cas particulier de ce type de compensateur: le Bouclage Dynamique Pur [DIB5]. Dans les sections suivantes, nous traiterons ensuite de Découplage sous Compensateur dynamique, Statique, Régulier ou non, de l'Equivalence sous Compensateur Dynamique, et de la Stabilité d'un système découplé.

### 3.2 Classification des Compensateurs

Comme précédemment, nous nous intéresserons aux systèmes  $\Sigma$  de la forme (1.1). Nous avons vu qu'une description de ce type est moins générale que celle proposée en [FLI3] mais est classique dans le cadre de l'étude des systèmes non linéaires [ISI4] et est suffisante pour la description d'un grand nombre d'applications dont certaines seront présentées au chapitre 4.

#### Définition 3.1 Compensateur Dynamique

Un Compensateur Dynamique (DC) pour un système  $\Sigma$  (1.1) est un système avec les entrées  $x, v$ , l'état  $\xi$  et la sortie  $u$  de la forme:

$$DC = \begin{cases} \dot{\xi} = M(\xi, x) + N(\xi, x) v \\ u = F(\xi, x) + G(\xi, x) v \end{cases}$$

où  $\xi$  appartient à un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ ,  $v \in \mathbb{R}^s$ ,  $p \leq s \leq m$ . Les composantes de  $M, N, F, G$  sont des fonctions méromorphes de  $(x, \xi)$ .  $\square$

Le rang  $\rho_c$  du Compensateur Dynamique doit être compris comme le rang du système bouclé ( $\Sigma \circ DC$ ) avec la sortie  $u$  et l'entrée  $v$ , c'est à dire:

$$\rho_c = \dim \text{span} \{ d\xi, dx, d\dot{x}, \dots, dx^{(q)}, du, d\dot{u}, \dots, du^{(q)} \} \\ - \dim \text{span} \{ d\xi, dx, d\dot{x}, \dots, dx^{(q)}, du, d\dot{u}, \dots, du^{(q-1)} \}$$

où les sous-espaces sont calculés sur le corps des fonctions rationnelles en  $v, v^{(1)}, \dots, v^{(n+q)}$  avec des coefficients qui sont des fonctions méromorphes de  $x$  et  $\xi$ .

Un exemple de Compensateur Dynamique est présenté ci-après : exemple 3.3.

### Définition 3.2 Précompensateur

Un Précompensateur (PC) pour le système  $\Sigma$  est un système avec l'entrée  $v$  et la sortie  $u$  de la forme :

$$PC = \begin{cases} \dot{\eta} = M(\eta) + N(\eta) v \\ u = F(\eta) + G(\eta) v \end{cases}$$

où  $\eta$  appartient à un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ ,  $v \in \mathbb{R}^s$ ,  $p \leq s \leq m$ . Les composantes de  $M, N, F, G$  sont des fonctions méromorphes de  $\eta$ . □

### Remarque 3.1

Dans le cas des systèmes linéaires, il existe des matrices de transfert propres  $F(s)$  et  $G(s)$  telles que le Compensateur Dynamique et le Précompensateur puissent être écrits respectivement sous la forme  $u = F(s) x + G(s) v$  et  $u = G(s) v$ .

### Définition 3.3 Compensateur Dynamique sans Structure à l'Infini et Bouclage Dynamique Pur

a) Un Compensateur Dynamique sans Structure à l'Infini (noté sans  $S_\infty$ ) pour un système  $\Sigma$  est un Compensateur Dynamique (DC) dont le rang est égal à celui de la matrice  $G(\xi, x)$ .

b) Un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  Régulier est un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  avec  $v \in \mathbb{R}^m$  et de rang égal à  $m$ .

c) Un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  est un Bouclage dynamique pur si  $du^{(k)} \in \text{span} \{ d\xi, dx, d\dot{x}, \dots, dx^{(k)}, dv^{(k)} \}$ ,  $k \geq 0$  □

**Exemple 3.1** Soit un système  $\Sigma$  de variables d'état  $x_1, x_2, x_3$  et d'entrées  $u_1$  et  $u_2$ ,  
 un compensateur :  $\dot{\xi} = x_1 x_2$   
 $u_1 = \xi x_3$   
 $u_2 = v$  est un bouclage dynamique pur .

### Remarque 3.2

Un Compensateur Dynamique (DC) est alors un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  si et seulement s'il n'a pas de zéro à l'infini. Si dans le cas non linéaire, la notion de *propreté* peut être vue comme l'existence d'une réalisation qui ne comporte aucune dérivée de l'entrée, alors un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  Régulier peut être vu comme un compensateur *bipropre*, (*propre* et d'inverse *propre*).

### Remarque 3.3

Considérons un Compensateur Dynamique (DC), soit  $\eta = \text{col}(\xi, x)$ , et soit  $r$  le rang de  $G$ . On peut alors partitionner  $u$  de façon que  $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$  avec  $\text{rang } G_1(r \times s) = r$ ,  $G_2(\eta) = \alpha(\eta) G_1(\eta)$ ,  $\alpha$  étant une matrice méromorphe de  $\eta$ . Soit  $F_1, F_2$  telle que  $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$  la partition correspondante de  $F$ . Soit  $w$  tel que  $\dim w = m-s$ , alors on peut écrire:

$$u = \begin{bmatrix} F_1(\eta) \\ F_2(\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } u = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(\eta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Le Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  peut se décomposer en un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  régulier en cascade avec une transformation d'entrée non régulière. Examinons maintenant une propriété des Compensateurs Dynamiques sans  $S_\infty$  Réguliers:

### Théorème 3.1 [DIB5]

Pour un système  $\Sigma$  bouclé par un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  Régulier, les Structure à l'infini  $S_\infty$  et Structure essentielle  $S_e$  après bouclage sont identiques aux Structure à l'infini  $S_\infty$  et Structure essentielle  $S_e$  du système avant bouclage.

Réciproquement, supposons que  $\Sigma$  soit carré et inversible; si un compensateur dynamique (DC) laisse  $S_\infty(\Sigma)$  invariant, alors (DC) est un Compensateur Dynamique sans  $S_\infty$  Régulier.  $\square$



### 3.3 Ordres essentiels et Découplage

#### 3.3.1 Introduction et rappels

De manière homogène avec les notations et les notions de base présentées au chapitre 1 et en section 1 de ce chapitre, le problème du découplage par compensation dynamique est posé comme suit:

#### Problème du Découplage:

Trouver si possible un compensateur dynamique de la forme:

$$DC = \begin{cases} \dot{\xi} = M(\xi, x) + N(\zeta, x) v \\ u = F(\xi, x) + G(\xi, x) v \end{cases}$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^q$ ,  $v = (v_1, \dots, v_s)^t$ ,  $p \leq s \leq m$ , tel que

$$dy_i^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{S}'} \{dx, d\xi, dv_1, \dots, dv_i^{(k-1)}\} \text{ pour } i \in \{1, \dots, p\}, k \geq 1. \quad (3.1)$$

et

$$dy_i^{(n+q)} \in \text{span}_{\mathcal{S}'} \{dx, d\xi\} \text{ pour } i \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{S}'$  désigne le corps des fonctions rationnelles en  $v, \dots, v^{(n-1)}$  avec des coefficients qui sont des fonctions méromorphes de  $x$  et de  $\xi$ .  $\square$

L'équation (3.1) représente la non-interaction des nouvelles entrées  $v_1, \dots, v_m$  et (3.2) la condition de commandabilité fonctionnelle de la sortie.

#### 3.3.2 Rôle de la structure essentielle

Nous pouvons maintenant établir l'application majeure des ordres essentiels  $n_{ie}$  (définition 2.1), au problème du découplage dynamique. Le cas statique sera seulement un cas particulier où  $q = 0$ . Remarquons qu'il n'y a pas de condition de régularité du

compensateur et qu'il n'y a pas à notre connaissance de résultat aussi général dans la littérature. Certains de nos résultats ont été reformulés récemment indépendamment de tout algorithme par El Asmi [ELA1].

### Lemme 3.2 [GLUI]

Les ordres  $n_{ie}$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , ne peuvent décroître sous l'action d'un compensateur statique ou dynamique.  $\square$

Ce lemme est utilisé dans la démonstration du théorème suivant ainsi que le lemme 2.1 du Chapitre 2.

### Théorème 3.2 [GLUI]

S'il existe un compensateur (statique ou dynamique) qui découple le système  $\Sigma_0$  de la forme (1.1) alors

$$n_i(\Sigma) \geq n_{ie}(\Sigma_0) \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (3.3)$$

où  $\Sigma$  désigne le système découplé. De plus il existe un système découplé  $\Sigma'$  (éventuellement étendu) calculé à partir de  $\Sigma_0$  tel que

$$n_i(\Sigma') = n_{ie}(\Sigma_0) \quad i \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.4) \quad \square$$

La preuve de ce théorème utilise l'algorithme donné dans [DES1]. A partir de [FLI1], et [DES2], nous savons que si  $\Sigma_0$  peut être découplé, alors il est nécessairement inversible à droite, alors du Lemme 2.1, on peut déduire que tous les entiers auxquels il est fait référence dans les équations (3.3) et (3.4) sont finis. Du Théorème 3.2, deux conclusions peuvent être tirées qui montrent le rôle important des ordres essentiels dans la structure des systèmes bouclés et en particulier dans le cas du découplage. Ces conclusions sont formulées dans les deux corollaires suivants.

**Corollaire 3.1**

Les ordres essentiels  $\{n_{ie}\}_p$  sont invariants sous bouclage statique régulier  
 $u = F(x) + G(x) v$ .  $\square$

La preuve du Corollaire 3.1 peut être déduite à partir du Lemme 3.2 mais c'est en fait une conséquence immédiate du calcul

$$\frac{\partial(x, \dot{y}, \dots, y^{(n)})}{\partial(x, v, \dots, v^{(n-1)})} = \frac{\partial(x, \dot{y}, \dots, y^{(n)})}{\partial(x, u, \dots, u^{(n-1)})} \cdot H$$

où  $H = \frac{\partial(x, u, \dots, u^{(n-1)})}{\partial(x, v, \dots, v^{(n-1)})}$  est une matrice carrée de rang plein.

Une autre conséquence du Théorème 3.2 et de l'égalité des listes  $\{n_i\}_p, \{n'_i\}_p$  [MOO2] est:

**Corollaire 3.2 [GLU1]**

Les trois listes  $\{n_i\}_p, \{n'_i\}_p$  and  $\{n_{ie}\}_p$  sont égales si et seulement si  $\Sigma_0$  peut être découplé avec un bouclage statique régulier sur l'état.  $\square$

La liste  $\{n_{ie}, i=1, \dots, p\}$  représente la plus petite structure qui doit être atteinte pour découpler  $\Sigma$ . La méthode de découplage consiste à accroître la structure à l'infini originelle  $\{n'_i, i=1, \dots, p\}$  pour atteindre la condition (3.2).

**Exemple 3.2**

En appliquant l'algorithme d'inversion, nous avons calculé pour l'exemple 2.1 les structures à l'infini et essentielle, soit:

$$n'_1 = 2, n'_2 = 1 \quad n_{1e} = n_{2e} = 2$$

Cet exemple peut être découplé en modifiant sa structure par l'addition d'un intégrateur sur l'entrée  $u_1$ ; cette opération porte  $n'_2$  à 2 et laisse  $n'_1$  inchangé.

Une interprétation physique, des ordres essentiels donnée en linéaire [COM1] est que les  $n_{ie}$  représente la différence entre la structure à l'infini du système entier  $\Sigma_0$  et le sous-

système  $\Sigma^i$  défini par les dynamiques (1.1.a) et les  $p-1$  sorties  $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_p)$ . Ce résultat se retrouve pour les systèmes non linéaires dans le théorème suivant.

### Théorème 3.3 [GLU1]

Soit un système  $\Sigma_0$  de la forme (1.1) inversible à droite, et notons  $(n_j^i(\Sigma))$  les ordres des zéros à l'infini du système, alors pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  :

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^p n_j^i(\Sigma_0) - \sum_{j=1}^{p-1} n_j^i(\Sigma^i). \quad (3.6)$$

□

### Exemple 3.3 Robot mobile

Soit les équations simplifiées d'un robot mobile:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \cos(x_3) u_2 \\ \sin(x_3) u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{correspondant à la figure ci-dessous:}$$

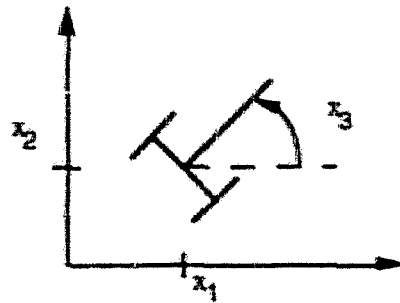


figure 3.1 Robot mobile

avec  $u_1$  la vitesse angulaire au centre de l'essieu et  $u_2$  la vitesse longitudinale dans l'axe du robot. Appliquons l'algorithme de structure:

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \dot{y}_1 = \cos(x_3) u_2 \quad \text{sélectionné à l'étape 1}$$

et 
$$\dot{\tilde{y}}_2 = \dot{y}_2 = \sin(x_3) u_2$$

d'où 
$$\dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2 = \frac{1}{\cos^2(x_3)} u_1 \dot{y}_1 + \tan(x_3) \dot{\tilde{y}}_1 \quad \text{sélectionné à l'étape 2}$$

L'algorithme de structure nous donne les ordres essentiels  $n_{ie} = \{2, 2\}$  et les ordres des zéros à l'infini  $n_j^i = \{1, 2\}$ . Le robot mobile possède donc un défaut de structure de 1

que nous pouvons combler en mettant un intégrateur devant l'entrée  $u_2$ . La mise d'un intégrateur devant  $u_2$  (qui devient alors un état  $z$  dans le système étendu) va "retarder"  $y_2$  dans l'algorithme d'inversion. Pour le système étendu, nous obtenons alors l'inversion:

$$\dot{y}_1 = -z \sin(x_3) u_1 + \cos(x_3) u'_2 \quad \text{avec } u'_2 (= \dot{z}) \text{ est la nouvelle entrée du système}$$

$$\dot{y}_2 = z \cos(x_3) u_1 + \sin(x_3) u'_2$$

Les  $n_1$  sont maintenant égaux aux  $n_{1e}$  respectifs. Un bouclage statique découplant et linéarisant peut alors être calculé en résolvant en  $u_1$  et  $u'_2$  les équations  $\dot{y}_1 = v_1$ ,  $\dot{y}_2 = v_2$  en fonction des nouvelles entrées  $v_1$  et  $v_2$ . Le Compensateur Dynamique complet peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sin(x_3) v_2 + \cos(x_3) v_1 \\ u_1 &= \frac{1}{z} (\cos(x_3) v_2 - \sin(x_3) v_1) \\ u_2 &= z \end{aligned}$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont les nouvelles entrées et le système bouclé a comme équations entrées/sorties:

$$\ddot{y}_1 = v_1, \quad \ddot{y}_2 = v_2$$

Un placement de pôles pour ces deux systèmes linéaires monovariabiles permet alors de choisir les dynamiques de  $y_1$  et  $y_2$ .

On remarquera la singularité en  $z = 0$  qui ne pose pas de problème en suivi de trajectoire mais en pose un à l'arrêt.

### 3.4 Découplage des Systèmes Non Linéaires sous Bouclage Dynamique Pur.

#### 3.4.1 Introduction

La motivation de cette section est de déterminer dans quel cas un Bouclage Dynamique Pur (définition 3.3) peut résoudre le problème du découplage si un Bouclage Statique Régulier ne le peut pas (i.e.  $\{n_i\} \neq \{n_{ie}\}$ ). La notion d'interacteur définie au chapitre 2 section 4 sera utilisée pour exprimer une condition nécessaire et suffisante à la résolution du Découplage au moyen d'un Bouclage Dynamique Pur, régulier ou non. Cette démarche et cette condition sont parfaitement analogues aux travaux de Commault et Dion [DIO1] pour ces systèmes linéaires.

### 3.4.2 Problème du Découplage sous Bouclage Dynamique Pur.

Le problème du découplage a été défini en section 3.3.1; de plus le lien entre les ordres d'essentialité et l'algorithme de structure a été présenté en section 2.2.3 où l'on a noté  $\eta_i$  et  $n_{ie}$  respectivement les plus petits et plus grands ordres de dérivation apparaissant dans les équations sélectionnées par l'algorithme de structure. Notons pour  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\delta_i = n_{ie} - \eta_i$$

Si le système est inversible à droite, les  $\delta_i$  sont finis et la liste  $\{\delta_i, i = 1, \dots, p\}$  représente la "différence" entre la structure essentielle et la structure à l'infini.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante à la solution du problème de Découplage au moyen d'un Bouclage Dynamique Pur. Deux lemmes préliminaires sont donnés ci-dessous car ils ont leur propre intérêt pour l'analyse structurelle des systèmes non linéaires.

#### Lemme 3.3 [DIB5]

Soit un système  $\Sigma$  inversible à droite. Alors il existe  $m-p$  composantes de  $x$ , notées  $x_1, \dots, x_{m-p}$ , telles que

$$\text{span}\{dx_1, \dots, dx_{m-p}\} \oplus \text{span}\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\} = \text{span}\{dx, du, dy, \dots, dy^{(n)}\}. \quad (3.7)$$

□

Le lemme 3.3 donne une notion de sous-système commandable et non observable qui joue le rôle de  $\mathcal{R}^*$  en linéaire, le plus grand sous espace commandable contenu dans le noyau de la sortie.

Rappel: nous avons défini (Déf. 2.2)  $r^*$  le "rang à l'infini" par les colonnes de l'Interacteur qui correspond au nombre de sorties pour lesquelles  $\eta_i = n_{ie}$ .

**Lemme 3.4 [DIB5]**

Soit un système  $\Sigma$  inversible à droite. Soit  $Y = \text{span} \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(n_{j_1}-1)}, i = 1, \dots, p\}$ . Alors il existe  $p - r^*$  composantes de la sortie, notées  $\{y_j, j \in J\}$ , telles que en posant  $\tilde{Y} = \text{span}\{dx, dy_j^{(i)}, j \in J, 1 \leq i \leq n_{j_1}-1\}$ , on ait :

$$Y \cap \text{span} \{du\} = \tilde{Y} \cap \text{span} \{du\}. \quad \square$$

Le lemme 3.4 est instrumental car il permet une sélection convenable des sorties auxquelles on applique l'algorithme d'Interacteur et par là une association convenable des entiers  $\gamma_i$  et  $n_{j_1}$ .

Ces lemmes trouvent particulièrement leur intérêt dans le cas d'un système inversible à droite et possédant éventuellement plus d'entrées que de sorties; ces résultats peuvent être considérés comme des outils pour l'étude du problème de Morgan (présenté en section suivante) et sont utilisés pour le théorème suivant.

**Théorème 3.4 [DIB5]**

Soit un système  $\Sigma$  inversible à droite. Le problème du découplage entrées-sorties a une solution au moyen d'un Bouclage Dynamique Pur si et seulement si :

$$m - p \geq p - r^*,$$

où  $r^*$  est le "rang à l'infini" par les colonnes de l'Interacteur de  $\Sigma$ . De plus le problème du découplage entrées-sorties a une solution au moyen d'un Bouclage Dynamique Pur Régulier si et seulement si il a une solution par Bouclage Statique Régulier.  $\square$

Le théorème 3.4 généralise aux systèmes non linéaires les résultats établis dans le cas des systèmes linéaires pour le problème du Découplage par Bouclage Dynamique Pur Régulier ou non Régulier [DIO1].

**Remarque 3.4**

Cette condition ( $m-p \geq p-r^*$ ) est aussi une condition nécessaire pour le découplage par bouclage statique non régulier sur l'état.

**Exemple 3.4**

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les ordres des zéros à l'infini et les ordres d'essentialité sont respectivement  $(n_1^i, n_2^i) = (3, 1)$  et  $(n_{1e}, n_{2e}) = (3, 3)$ . La condition du théorème 3.4 est satisfaite puisque  $r^* = 1$ . Une solution peut être construite en appliquant la méthode donnée en Annexe 4 page 16 : un Bouclage Dynamique Pur qui rend la matrice de découplage inversible est alors

$$\begin{cases} \dot{\xi} = x_5 \\ u = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v. \end{cases}$$

**3.4.3 Conclusions**

Nous avons utilisé le concept d'Interacteur (ou du moins son "rang à l'infini" par les colonnes) pour les systèmes non linéaires introduit en section 2.4 pour résoudre le problème de Découplage entrée-sortie sous Bouclage Dynamique Pur. C'est une généralisation des résultats du linéaire [DIO1], et une approche pour la solution générale du problème de Morgan i.e. le problème du Découplage par Bouclage Statique non Régulier. Le seul résultat disponible pour ce problème [GLU3] est présenté dans la section suivante.

**3.5 Problème de Morgan (Découplage Non Régulier)****3.5.1 Introduction**

Dans cette section, sauf précision contraire nous considérerons le système  $\Sigma$  où  $m = p+1$ . A notre connaissance, le seul autre résultat dans la littérature sur le problème de découplage statique non régulier est [CHEN1]. Il est cependant plus faible que notre résultat qui contient même une nouvelle contribution pour la solution du problème de Morgan dans le cas des systèmes linéaires, dont la solution est établie pour les systèmes "décalés" [HER1], [MER2], [HER3], [DES3], [DES4] c'est à dire les systèmes avec des sorties ayant même



ordre essentiel. L'exemple donné par Herrera et Lafay [HIER1] montre bien que la condition donnée en [DES3] n'est pas suffisante pour un système non "décalé".

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ 0 \\ x_2+x_8 \\ x_9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$$

Ce système satisfait  $\dim R^* = 3$ , qui est précisément le nombre d'intégrateurs que l'on doit connecter à  $u_1$  pour rendre le système découplable mais en fait il n'y a pas de bouclage statique qui résolve le problème de découplage. Les résultats de cette section sont une application directe des techniques présentées au chapitre 2, section 3. Le problème du découplage (régulier ou non) peut être posé comme suit.

### Problème de Morgan.

Etant donné un système  $\Sigma$ , trouver si possible un compensateur statique  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  tel que pour tout  $x$

$$dy_i^{(n)} \in \text{span}_{\mathcal{K}'}\{dx\} \quad (3.8)$$

$$\text{et } dy_i^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}'}\{dx, dv_1, \dots, dv_i^{(k-1)}\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, 0 \leq k \leq n \quad (3.9)$$

où  $v = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1})$ ,  $v_{p+1}$  peut être vide, et  $\mathcal{K}'$  est le corps des fonctions rationnelles de  $v, \dots, v^{(n-1)}$  avec des coefficients qui sont des fonctions méromorphes de  $x$ .  $\square$

La condition (3.9) représente la condition de non interaction et la condition (3.8) donne la commandabilité de la sortie  $y_i$  (par l'entrée  $v_i$ ). Comme rappelé précédemment (section 3.3) une condition nécessaire pour qu'un système soit découplable par n'importe quel type de compensateur est son inversibilité à droite, aussi nous supposons dans toute cette section que  $\Sigma$  est inversible à droite.

### 3.5.2 Solution du problème de Morgan: cas de $p+1$ entrées

La résolution du problème de découplage utilise de manière intensive les notions de structure à l'infini rappelées au chapitre 1, section 3 et de structure essentielle définie au chapitre 3, section 2. Les deux listes d'invariants correspondantes jouent un rôle crucial dans le problème de découplage comme vu dans ce chapitre : Théorème 3.2 et Corollaire 3.2.

Soit  $\mathcal{E}^i = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy_1, \dots, dy_i^{(n_i-1)}\}$

#### Lemme 3.5 [GLU3]

Un système inversible à droite  $\Sigma$  peut être découplé par un bouclage statique régulier si et seulement si

$$\forall j = 1, \dots, p \quad \mathcal{E}^j \subset \text{span} \{dx\} \quad (3.10)$$

□

La preuve est immédiate à partir de la définition des ordres d'essentialité  $n_{ie}$ . Notons  $n_j$  le degré relatif de la composante de sortie  $y_j$ , alors nous avons:

#### Théorème 3.5 [GLU3]

Il existe un bouclage statique sur l'état qui résout le problème du découplage de  $\Sigma$  si et seulement si

$$(i) \quad \exists i \in \{1, \dots, p\} / \quad \forall j = 1, \dots, p, \quad \mathcal{E}^j \subset \mathcal{E}^i \quad (3.11)$$

$$\text{et (ii)} \quad \Omega_{\delta}^{(i)} \not\subset \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy_1, \dots, dy_p^{(n)}\} \quad (3.12)$$

où  $\delta = \dim(\mathcal{E}^i / \text{span} \{dx\})$  et  $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_k \supset \dots$  est la chaîne de sous-espaces définie par l'expression (2.7) au chapitre 2 section 3 associée à  $v_1 := y_i^{(n_i)}$ . □

La condition (i) exprime la limitation du nombre d'entrées puisqu'il est nécessaire qu'un seul espace  $\mathcal{E}^1$  contienne tous les autres espaces  $\mathcal{E}^j$ . Cette condition peut être également obtenue à partir de la remarque 3.4 où  $m-p=1$ : il est nécessaire que le "rang à l'infini" par les colonnes  $r^*$  soit  $\geq p-1$ . La condition (ii) représente l'existence d'une chaîne d'intégrateurs nécessaire pour découpler par bouclage statique: cette chaîne est commandable dans le sens  $\Omega_0^{(0)} \notin \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx\}$  et non observable au sens de (3.12). L'exemple 3.7 traité ci-après est un exemple d'application du théorème 3.5.

### Remarque 3.5

La définition de  $v_1$  n'est pas unique puisque différents indices  $i$  peuvent satisfaire (3.11); quoi qu'il en soit les conditions du Théorème 3.5 sont équivalentes si différentes entrées  $v_1$  sont considérées.

### Exemple 3.5 [ISI2]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Calculons la structure à l'infini :  $\{n'_1; n'_2\} = \{2; 1\}$ , et la structure essentielle :  $\{n_{1e}; n_{2e}\} = \{2, 2\}$ . En posant  $u_1 = x_4$ , la nouvelle structure à l'infini devient  $\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\} = \{2, 2\}$  et la structure essentielle est inchangée. Le système avec les entrées  $u_2$  et  $u_3$  est alors découplable. Cet exemple représente pleinement les aspects non linéaires du problème puisque  $\mathcal{R}^*$ , la plus grande distribution de commandabilité régulière incluse dans le noyau de la distribution  $dy$  est nulle dans le voisinage d'un point régulier [ISI4] et contrairement au cas linéaire [DES3],  $\mathcal{R}^*$  ne sert pas pour résoudre localement le problème du découplage. Il existe une distribution de commandabilité dégénérée non nulle [ND1] contenue dans  $\ker dy$ , précisément  $\text{span}\{g_2(x)\}$ . Ce concept de distribution de commandabilité dégénérée est difficile à utiliser pour les systèmes non linéaires en général car il n'existe pas toujours un élément maximal unique dans la classe de ces distributions contenues dans  $\ker dy$ . Cela est illustré par l'exemple suivant.

## Exemple 3.6

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \\ x_6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_4 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$$\mathcal{R}_1^+ = \overline{\text{span}\{\text{ad}_{f+g_1}^k g_2, k \geq 0\}} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_6}, \frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{\partial}{\partial x_5} \right\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{R}_2^+ = \overline{\text{span}\{\text{ad}_{f-g_1}^k g_2, k \geq 0\}} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_6}, \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} \right\}$$

sont deux distributions de commandabilité dégénérées contenues dans  $\ker dy$ . Elles sont maximales car on vérifie que toute distribution de commandabilité contenant  $\mathcal{R}_1^+ + \mathcal{R}_2^+$  ne pourra être incluse dans le noyau de la sortie.

## Exemple 3.7

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Sur cet exemple comme calculé en Annexe 3 page 6,  $\mathcal{R}^*$  n'est d'aucune aide pour rendre la structure à l'infini égale à la structure essentielle dans le but de découpler car la dynamique restreinte à  $\mathcal{R}^*$  n'est pas totalement linéarisable. Pour vérifier les conditions du théorème 3.5, calculons:

$\mathcal{E}^1 = \text{span}\{dx, d(x_2 + u_1), d(x_3 + \dot{u}_1)\}$   $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{dx, du_1, d\dot{u}_1\}$  qui vérifient la condition i du théorème (le nombre d'entrées à retarder est 1).

et  $\dim(\mathcal{E}^1 / \text{span}\{dx\}) = 2$  permet de calculer que :

$$\Omega_2^{(2)} = \text{span}\{dx_3, du_2, d\dot{u}_1, d(x_5 \dot{u}_1 + u_1 u_3)\} \not\subset \text{span}_{\mathcal{G}_c}\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\}$$

ce qui satisfait la condition ii)

Une solution au bouclage statique non régulier peut être construit (Annexe 3 page 7). Elle consiste à déterminer une chaîne "généralisée" de deux intégrateurs qui peuvent être représentés par la figure 3.2.

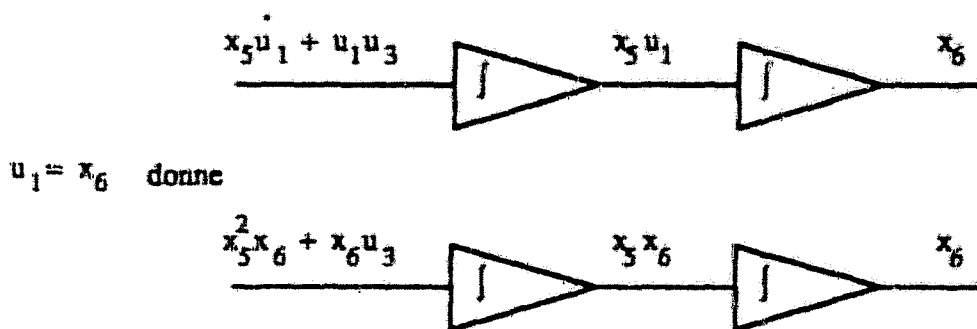


Figure 3.2.

Nous avons étudié ici le découplage statique non régulier en utilisant les résultats d'analyse présentés au chapitre 2, ce qui nous a permis d'établir une condition nécessaire et suffisante constructive dans le cas  $p+1$  entrées. Ceci clôt pour ce chapitre l'étude sur le découplage. Maintenant la notion d'équivalence de deux systèmes non linéaires va être abordée.

### 3.6 Equivalence de systèmes non linéaires sous Compensateur Dynamique

#### 3.6.1 Introduction

Comme dans la section concernant le problème du Découplage sous Bouclage Dynamique, la notion d'Interacteur va être utilisée, ici dans son rôle premier, c'est à dire pour caractériser la notion d'Equivalence de systèmes non linéaires sous Compensation Dynamique (comme cela a été fait pour les systèmes linéaires [WOL1]). L'équivalence dynamique est en fait un cas particulier du problème de poursuite exacte de modèle où les rôles du modèle et du processus sont échangés de manière symétrique.

#### 3.6.2 Position du problème

Une notion d'équivalence dynamique a été étudiée récemment [RUD1] dans un cadre non nécessairement "Kalmanien" où les systèmes n'admettent pas une représentation du type (L.1). Nos résultats sont tout à fait partiels et préliminaires: le problème n'a jamais été étudié auparavant et nos résultats essentiels se limitent à la classe des systèmes linéarisables entrée-sortie. Soit  $L_\infty[0, T]$  la classe des fonctions bornées mesurables sur  $[0, T]$  au sens de Lebesgue.

### Définition 3.4

Soit deux systèmes  $\Sigma^i = (f^i, g^i, h^i)$  de la forme (1.1) pour  $i=1, 2$ , avec l'état  $x^i$  appartenant à un ouvert de  $\mathbb{R}^{n_i}$ , des entrées  $u^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ , des sorties  $y^i \in \mathbb{R}^{p_i}$ . Supposons que  $f^i(0) = 0$  et  $h^i(0) = 0$ . Alors  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  sont dits *équivalents sous compensation dynamique au voisinage de l'origine* (et nous écrirons  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$ ) si il existe des entiers  $q_i$ ,  $i=1, 2$ , des Compensateurs Dynamiques  $DC^i$  pour  $\Sigma^i$ , avec un état  $\xi^i$  appartenant à un ouvert de  $\mathbb{R}^{q_i}$ , ayant l'origine comme point d'équilibre, et  $\epsilon > 0$ , tel qu'il existe  $T > 0$  avec:

$$y^{\Sigma^1 \circ (DC^1)}(t, 0, 0, u^2) - y^{\Sigma^2}(t, 0, u^2) = 0, \text{ pour tout } u^2 \text{ dans } L_\infty[0, T] \text{ satisfaisant } \|u^2\| < \epsilon, \text{ et}$$

$$y^{\Sigma^2 \circ (DC^2)}(t, 0, 0, u^1) - y^{\Sigma^1}(t, 0, u^1) = 0, \text{ pour tout } u^1 \text{ dans } L_\infty[0, T] \text{ satisfaisant } \|u^1\| < \epsilon,$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ . □

Ceci définit une relation d'équivalence. De plus, si  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$ , alors  $\hat{\Sigma}^1 \sim \hat{\Sigma}^2$ , où  $\hat{\Sigma}^1 = \Sigma^1 \circ Q^1$  et  $\hat{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \circ Q^2$ , avec  $Q^1$  et  $Q^2$  étant des Bouclages Statiques Réguliers. Dans le cas de systèmes linéaires  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$ , cette relation d'équivalence correspond à poursuivre le système  $\Sigma^1$  en appliquant à  $\Sigma^2$  un compensateur approprié et vice versa. En fait la définition 3.4 est une version plus forte du problème de poursuite de modèle exacte comme défini dans [DIB3]: ici, le modèle doit pouvoir être poursuivi par le processus, mais de plus la réciproque doit être vraie. En réalité, comme cela est fait dans le cas du problème de poursuite asymptotique de modèle [DIB4], on peut aussi définir l'équivalence asymptotique de deux systèmes non linéaires.

Dans le théorème suivant, nous établirons une relation entre l'équivalence dynamique et l'équivalence sous Compensateur sans  $S_\infty$ . Ceci montrera aussi que l'équivalence dynamique peut être vu comme un cas particulier du problème de poursuite exacte de modèle, où le problème de poursuite exacte doit être obtenu par un Compensateur sans  $S_\infty$  Régulier. Si  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont des systèmes linéaires avec des matrices de transfert  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$ , nous aurons le fait que  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont équivalents, si et seulement si, il existe un compensateur bicausal  $B(s)$  tel que  $W_1(s)B(s) = W_2(s)$  [WOL1]. Dans le théorème suivant nous devons supposer que  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont inversibles à gauche au voisinage de l'origine [DIB4]. Cette hypothèse est certainement satisfaite si  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont inversibles à gauche et que l'origine est un point régulier pour l'algorithme de structure.

Le théorème suivant montre que la notion de Compensateur sans  $S_{\infty}$  est imposée par l'étude de l'équivalence dynamique.

### **Théorème 3.6 [DIB5]**

Soit deux systèmes  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  satisfaisant les hypothèses de la définition 3.4. Supposons que  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  soient inversibles à gauche en zéro. Alors,  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$  si et seulement si  $m_1 = m_2$  et il existe un Compensateur sans  $S_{\infty}$  Régulier (RDCO) pour  $\Sigma^1$  défini localement dans un voisinage de l'origine, ayant comme entrée  $v^2$ , sortie  $u^1$ ,  $M(0,0) = 0$ ,  $F(0,0) = 0$ , et un  $\varepsilon > 0$ , tel qu'il existe  $T > 0$  avec la propriété:

$$y^{\Sigma^1 \circ \text{RDCO}}(t, 0, 0, u^2) - y^{\Sigma^2}(t, 0, u^2) = 0, \text{ pour tout } u^2 \text{ dans } L_{\infty}[0, T] \text{ satisfaisant } \|u^2\| < \varepsilon,$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ . □

La seconde condition où les rôles de  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont échangés est redondante dans l'énoncé du théorème 3.6 dans la mesure où elle découle du fait que le compensateur est inversible.

Une condition nécessaire et suffisante structurelle d'équivalence dynamique pour les systèmes linéarisables entrée/sortie est donnée par le théorème suivant. Bien que partiel ce résultat constitue une généralisation évidente du cas linéaire.

### **Théorème 3.7 [DIB5]**

Soit  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  selon la Définition 3.4, avec  $m_1 = m_2 = p_1 = p_2$ . Supposons que  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  soient inversibles et linéarisables entrée-sortie par un bouclage statique régulier sur l'état en zéro. Alors,  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$  sont dynamiquement équivalents au voisinage de l'origine si et seulement si leurs Interacteurs coïncident.

### 3.6.3 Conclusions

Le problème d'Equivalence Dynamique en non linéaire qui a motivé récemment certains travaux dans la littérature [RUD1] a été considéré ici et résolu pour les systèmes linéarisables entrée-sortie. Le travail présenté en section 3.4 peut être considéré comme une étape vers la généralisation de [WOL1] et complète certains aspects structuraux de l'inversion en non linéaire. Retenons que la notion de propriété n'a pas été considérée dans [RUD1].

### 3.7 Stabilité des Systèmes Décomposés

#### 3.7.1 Introduction et rappels

Le problème du découplage avec stabilité dans le cas linéaire a eu une solution pour un compensateur statique grâce à Gilbert [GIL1] en 1969. L'extension des travaux sur le sujet au cas non linéaire, plus récemment (1988) [ISI3], a établi qu'un bouclage statique régulier qui découple un système  $\Sigma$ , induit un sous-système inobservable et non commandable (défini par une distribution  $P^*$ ) dont les dynamiques (et donc la stabilité interne de  $\Sigma$ ) sont indépendantes du bouclage (statique). Donc si ce sous-système est instable, aucun compensateur statique ne pourra aboutir au découplage avec stabilité.

La distribution  $P^*$  est définie par :  $P^* = \bigcap_{1 \leq i \leq m} P_i^*$  où  $P_i^*$  est la plus grande distribution de commandabilité contenue dans  $\ker dh_i$ .

L'utilisation de Compensateurs Dynamiques permet d'élargir le champ d'application du découplage avec stabilité. Dans le cas linéaire W.M. Wonham et A.S. Morse ont en effet établi (1970) [WON1] que l'utilisation de ce type de compensateur permettait d'aboutir au découplage avec stabilité si ces objectifs de stabilisation et de découplage pouvaient être atteints séparément. Ce résultat signifie que la dynamique définie par  $P^*$  peut être totalement éliminée dans le cas linéaire par l'utilisation d'un Compensateur Dynamique.

Pour les systèmes non linéaires, les contributions marquantes sont dues à Isidori et Grizzle [ISI3], et à Wagner [WAG1]. Les premiers ont montré qu'il existe des systèmes non linéaires qui ne peuvent pas être à la fois stabilisés et découplés alors que l'un ou l'autre de ces objectifs pouvait être atteints séparément. Ceci montre évidemment que l'on ne peut pas totalement généraliser le résultat obtenu en linéaire. Ensuite Wagner [WAG1] a montré par une approche géométrique que similairement au cas statique, un compensateur dynamique (DC) découplant le système peut induire certaines sous-dynamiques minimales inobservables et non commandables définies par une distribution  $\Delta_{mix}$ .

Ces dynamiques inhérentes au système sont telles que :

a) Si les dynamiques de  $\Delta_{mix}$  sont instables il n'y a pas de découplage possible avec stabilité

b)  $\Delta_{mix} \subset P^*$



c)  $\Delta_{mix}$  ne peut être réduite par Compensateur Dynamique

d)  $\Delta_{mix}$  est nulle pour les systèmes linéaires.

Notre contribution est liée à la réduction des dynamiques fixes sous extension dynamique et tout en restant dans un cas particulier, nous montrons que cette réduction des dynamiques est un phénomène intrinsèquement linéaire.

### 3.7.2 Notations et rappels techniques

Si  $\Sigma$  appartient à la classe des systèmes carrés, découplables par compensateur statique, on peut toujours l'écrire sous la forme :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \bar{f}_1(x_1, x_{m+2}) + \bar{g}_1(x_1, x_{m+2}) v_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m = \bar{f}_m(x_m, x_{m+2}) + \bar{g}_m(x_m, x_{m+2}) v_m \\ \dot{x}_{m+1} = \bar{f}_{m+1}(x) + \bar{g}_{m+1}(x) v \\ \dot{x}_{m+2} = \bar{f}_{m+2}(x_{m+2}) \\ y_1 = \bar{h}_1(x_1, x_{m+2}) \\ \vdots \\ y_m = \bar{h}_m(x_m, x_{m+2}) \end{array} \right. \quad \} P^* = \bigcap_i P_i^* \quad (3.13)$$

après l'avoir découplé par un compensateur statique  $u = F(x) + G(x) v$ . Les distributions  $P_i^*$  induites par le compensateur découplant s'écrivent alors:

$$P_1^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \right\}$$

$\vdots$

$$P_m^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \right\}$$

et la distribution  $P^* = \bigcap_i P_i^*$  correspond aux dynamiques de zéros interconnectées comme définis dans le cas linéaire [ICA1], [ICA2]. Elle sera toujours présente dans toute forme canonique découplée par bouclage statique régulier.

Wagner a défini une sous-distribution de  $P^*$  qui est irréductible par compensateur dynamique :  $\Delta_{\text{mix}}$  [WAGI].

A partir de la forme découplée d'un système (3.13) ou encore :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}_1(x) v_1 + \dots + \tilde{g}_m(x) v_m \\ y_i &= h_i(x) \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{C}$  l'idéal de Lie engendré par les champs de vecteurs  $\{[\tilde{g}_i, \text{ad}_T^k \tilde{g}_j] \mid j \neq i; j, i=1, \dots, m; k \geq 0\}$  de l'algèbre de Lie engendrée par  $(T, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m)$ . La distribution  $\Delta_{\text{mix}}$  est définie par :

$$\Delta_{\text{mix}} = \text{span} \{ \tau : \tau \in \mathcal{C} \}$$

Les champs de vecteurs générateurs de  $\Delta_{\text{mix}}$  impliquent au moins deux champs de vecteurs  $\tilde{g}_i$  et  $\tilde{g}_j$  d'indices différents.

Cette dynamique étant irréductible, la stabilité de la dynamique restreinte à  $\Delta_{\text{mix}}$  est donc une condition nécessaire pour le découplage dynamique avec stabilité. La question qui se pose alors naturellement est : la distribution  $\Delta_{\text{mix}}$  est-elle la plus petite distribution  $P^*$  que l'on peut obtenir par compensation dynamique.

Notre contribution dans l'étude de ces dynamiques de zéros interconnectés et de leur réduction par compensateur dynamique se situe tout d'abord dans un cadre restreint où la dimension de cette dynamique est égale à 1. Pour simplifier l'étude, mais sans restriction nouvelle, nous considérerons les systèmes où il n'y a pas de partie non commandable (la dynamique  $x_{m+2}$  dans l'équation (3.13) est vide).

Nous pouvons alors écrire le système découplé par bouclage statique par :

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x_i) u_i \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

$$\dot{z} = Z_1(x, z) + \sum_{i=1}^m Z_{2i}(x, z) u_i \quad (3.15)$$

$$y_i = h_i(x_i) \quad (3.16)$$

Le problème peut alors se formuler : trouver, si possible une extension dynamique

$$\dot{x}_a = F_a(x, z, x_a) + G_a(x, z, x_a) u \quad (3.17)$$

et

$$\dot{x}_{ai} = X_i(x, z, x_{ai}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (3.18)$$

tel que  $(x, x_{a1}, \dots, x_{am})$  définisse un changement de variable local de  $(x, z, x_a)$  et

$$\dot{x}_{ai} = f_{ai}(x_i, x_{ai}) + g_{ai}(x_i, x_{ai}) u_i \quad (3.19)$$

Le système se réduit maintenant en  $p$  sous-systèmes, donné seulement par (3.14) et (3.19) : il n'y a plus de dynamique de zéros interconnectés. Le problème de sa stabilisation n'est plus alors qu'un problème de stabilisation de système mono-entrée mono-sortie.

### Exemple 3.8

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1) u_1 \quad (\dim x_1 = n_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2(x_2) u_2 \quad (\dim x_2 = n_2) \\ \dot{z} &= x_1 z^2 + x_2 z^2 - z \\ y_1 &= x_1 \quad , \quad y_2 = x_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Une solution du problème est:

$$\dot{x}_{a1} = x_1 + x_{a1} \quad (3.21)$$

et

$$x_{a2} = -\frac{1}{z} - x_{a1} \quad (3.22)$$

d'où  $\dot{x}_{a2} = x_2 + x_{a2}$ , ce qui est la "déconnection" attendue : les deux sous-systèmes découplés sont donnés par  $(x_1, x_{a1})$  et  $(x_2, x_{a2})$ .

### Lemme 3.6

Supposons qu'il existe un changement de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_m, \xi)$  pour  $\Sigma$ , tel que

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^m [Z_{1i}(x_i) + Z_{2i}(x_i) u_i] + \lambda \xi \quad (3.23)$$

alors il existe un compensateur dynamique (DC) tel que le système  $\Sigma$  bouclé soit un système découplé sans dynamique de Zéro interconnecté.

□

Preuve : L'extension dynamique

$$\dot{x}_{ai} = Z_{1i}(x_i) + Z_{2i}(x_i) u_i + \lambda x_{ai} \text{ for } i = 1, \dots, m-1 \quad (3.24)$$

et le changement de variables

$$x_{am} = \xi - \sum_{i=1}^{m-1} x_{ai} \quad (3.25)$$

donne

$$\dot{x}_{am} = Z_{1m}(x_m) + Z_{2m}(x_m) u_m + \lambda x_{am} \quad (3.26)$$

Le système étendu défini par les équations (3.14), (3.24), (3.26) and (3.16) satisfait l'objectif poursuivi puisqu'il est réduit à  $m$  sous-systèmes découplés dont l'état est  $(x_i, x_{ai})$  pour  $i=1, \dots, m$ .

Notre contribution est de montrer que, modulo certaines transformations non linéaires la dynamique de zéro interconnecté doit nécessairement pouvoir s'écrire sous la forme (3.23) pour pouvoir être éliminée par compensation dynamique.

### 3.7.4 Une condition nécessaire et suffisante

Dans cette section nous nous restreignons au cas où  $\Sigma$  est un système découplé avec deux entrées, deux sorties et une dynamique de zéro interconnecté de dimension 1:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1) u_1 \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_2) u_2 \quad (3.28)$$

$$\dot{z} = Z_1(x_1, x_2, z) + Z_{21}(x_1, x_2, z) u_1 + Z_{22}(x_1, x_2, z) u_2 \quad (3.29)$$

$$y_1 = h_1(x_1) \quad (3.30)$$

$$y_2 = h_2(x_2) \quad (3.31)$$

La restriction principale dans cette section est la classe des transformations utilisée. Nous recherchons une solution qui consiste en une extension dynamique de la forme

$$\dot{x}_a = F_a(x_1, x_a) + G_a(x_1, x_a) u_1 \quad (3.32)$$

et un changement de variable  $(x_1, x_2, x_{a1}, x_{a2})$  où

$$\begin{aligned} x_{a1} &= x_a \\ \text{et } x_{a2} &= X_2(z, x_a) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Alors nous obtenons:

### **Théorème 3.7 [GLU2]**

Il existe une extension dynamique (3.32) et un changement de variables locales (3.33) telles que

$$\dot{x}_{a2} = f_{a2}(x_2, x_{a2}) + g_{a2}(x_2, x_{a2}) u_2 \quad (3.34)$$

si et seulement si

a) l'équation (3.29) peut s'écrire:

$$\dot{z} = R(z) \left[ Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda \int \frac{1}{R(z)} dz \right] \quad (3.35)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$

ou de manière équivalente

b) il existe  $\xi = \varphi(z)$  telle que  $(x_1, x_2, \xi)$  définit un changement de variables pour  $(x_1, x_2, z)$  et

$$\dot{\xi} = Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda \xi \quad (3.36)$$

□

### **Remarque 3.6**

Le théorème 3.7 donne une condition nécessaire et suffisante d'élimination de la dynamique de zéro interconnecté puisque la partie "P\*" du système étendu  $\Sigma_e$  doit être vide:  $\Sigma_e$  se décompose en deux sous-systèmes dont les états sont  $(x_1, x_{a1})$  et  $(x_2, x_{a2})$ . En reprenant l'exemple 3.8 et la solution trouvée, l'équation (3.21) n'est pas strictement une copie de tout ou partie de l'équation (3.23) et l'équation (3.22) n'est pas une combinaison linéaire de la dynamique de zéro et de l'extension, mais en considérant un changement de variable de  $z$  en  $\xi$  telle que la dynamique de zéro s'écrive:

$$\dot{\xi} = x_1 + x_2 + \xi$$

alors le compensateur initial s'écrit :

$\dot{x}_{a1} = x_1 + x_{a1}$  qui est une copie (d'une partie de la dynamique de zéro interconnectée) et

$$x_{a2} = \xi - x_{a1} .$$

### 3.7.5 Conclusions et remarques

Nous nous sommes intéressés à la notion de dynamiques de zéros interconnectés qui peuvent être éliminées par un choix approprié de compensateur dynamique. Bien que la classe de compensateurs soit limitée, le théorème 3.7 donne une condition nécessaire et suffisante et montre que dans ce cas l'élimination d'une dynamique de zéro interconnecté est un mécanisme intrinsèquement linéaire.

En fait, le théorème 3.7 peut être généralisé assez facilement à un système multi-entrées multi-sorties qui a des dynamiques de zéros interconnectés. Une telle généralisation donnerait une condition pour l'élimination totale de ces dynamiques. Si la condition (3.36) est théorique, la condition équivalente (3.35) est facilement vérifiable.

Plus récemment [BAT2], une condition nécessaire et suffisante a été trouvée pour la classe des systèmes carrés dont le découplage peut être obtenu (sans stabilité) au moyen d'un bouclage statique régulier.

## 3.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des notions nouvelles concernant le contrôle des systèmes non linéaires. Le Découplage par Compensateur Dynamique minimal a été défini à partir des ordres essentiels (donc de l'algorithme de structure). Ensuite, en utilisant une nouvelle classe de compensateurs, nous avons étudié tout d'abord le problème du Découplage, puis celui de l'Équivalence des systèmes non linéaires. La solution du premier de ces deux problèmes peut également être considérée comme une approche pour la solution du problème de Morgan que nous avons résolu ici dans le cas des systèmes possédant une entrée de plus que de sorties. Ce résultat, bien que partiel, est innovateur et conduit à s'intéresser à la notion d'état généralisé pour cette classe de systèmes.

Enfin, l'étude du Découplage avec Stabilité par compensateur Dynamique dans certaines conditions nous a permis d'établir une condition nécessaire et suffisante constructive [GLU2]. La résolution du problème a depuis été complétée par une condition nécessaire et suffisante sans limitation de la classe de transformation dans [BAT2].



## **Chapitre 4 Applications du Contrôle des Systèmes Non Linéaires**





## Chapitre 4 Applications du Contrôle des Systèmes Non Linéaires

### 4.1 Introduction

Comme précisé dans l'introduction générale, le but du chapitre 4 n'est pas d'illustrer les résultats théoriques présentés aux chapitres précédents, mais de montrer que les outils algébriques sont facilement utilisables en pratique; de plus la problématique étudiée est commune avec les chapitres précédents puisque le cœur des commandes non linéaires utilisées est la linéarisation sous bouclage. L'Automatique en général et l'Automatique non linéaire en particulier ont entre autres buts celui de résoudre des problèmes concrets de commande. A ce titre, notre premier résultat (au Laboratoire d'Automatique de Nantes) dans le domaine de la commande non linéaire est relatif au rejet de perturbations avec mesures appliqué à un grand pétrolier amarré en un seul point [MOO1]. Ce cas (ancien :1982) ne sera pas évoqué ici. Il mettait en œuvre des outils géométriques avec le calcul de distributions (f, g)-invariantes alors que ce mémoire est consacré à l'approche algébrique: les applications présentées ci-après n'utilisent que des calculs algébriques pour la synthèse des lois de commande. Le propre de l'Automatique est également de s'appliquer à des domaines très divers. C'est dans cet esprit que sont exposées dans ce chapitre, trois applications de la commande des systèmes non linéaires. Les processus choisis (robot flexible, machine électrique et engin spatial) sont assez représentatifs des systèmes où les équations sont fortement non linéaires et font partie de la classe des systèmes étudiés dans ce mémoire. De plus ces systèmes présentent des particularités qui rendent leur commande difficile : dynamique de Zéros instable, problème de commandabilité, problème de sensibilité vis à vis des paramètres.

La deuxième raison de ces choix est qu'ils ne sont pas simplement des exemples d'école et de nombreux chercheurs travaillent sur ces processus. Le robot souple étudié est un prototype du Laboratoire d'Automatique de Nantes et des essais sur site seront présentés dans ce chapitre. Le contrôle de machines électriques s'inscrit dans une action nationale commune entre le G.R. Automatique et le G.R.E.C.O. Electrotechnique. La machine synchrone étudiée ici, est le modèle retenu dans le cadre de cette action. Les moyens de faire un comparatif des résultats obtenus par différentes techniques de commande se mettent en place actuellement. Enfin la dernière application présentée dans ce mémoire est le contrôle d'un engin spatial qui faisait l'objet d'un contrat avec l'Agence Spatiale Européenne.

Les techniques de commande utilisées sont différentes selon les applications présentées. Dans le cas du véhicule spatial des techniques de poursuite de trajectoires ont été utilisées, ainsi que des techniques de commande par "modes glissants" [SIR1] qui est une *conjonction de commande linéarisante (calculable de manière algébrique) et de commande discontinue stabilisante fondée sur une fonction de Lyapunov*. Cette dernière

propriété est importante pour ce genre d'application où les paramètres (coefficients de portance, ...), les perturbations externes (vent, variation de densité à très haute altitude, ...) sont très mal connues. Pour le robot flexible, la technique de linéarisation par bouclage statique est possible sur certaines sorties, sur d'autres nous avons recours à la commande par "modes glissants" comme présentée ci-dessus. Enfin pour le contrôle du moteur synchrone, des études par linéarisation exacte [LEP1] et commande adaptative [GEO1] étant disponibles sur le modèle retenu, et les commandes électroniques en aval des moteurs (interrupteurs statiques) étant bien adaptées à la commande discontinue, c'est le contrôle par "modes glissants" qui a été mis en oeuvre. Néanmoins, un défaut majeur de cette technique est la possibilité de commutation à haute fréquence de la partie discontinue de la commande, nous avons pour toutes nos applications adouci celle-ci par des techniques issues notamment des travaux de Slotine [SLO1].

## 4.2 Robot flexible

### 4.2.1 Position du problème

Le contrôle des robots est un domaine de recherche très actif. Parallèlement à l'étude du contrôle des robots rigides, l'évolution technologique a permis de réduire la masse des systèmes robotisés et donc d'accroître les contraintes sur les vitesses de déplacement demandées. Ces contraintes induisent de nouveaux problèmes de commande et les performances atteintes par les calculateurs ont permis d'implanter des algorithmes complexes. Les effets dus aux déformations des bras peuvent devenir importants. Des solutions pour amortir la structure de bras légers et rapides ont été développées [HEN1]. Une autre solution pour contrôler ces structures est de déterminer des trajectoires non excitantes pour les déplacements élastiques [SER1]. Il est très difficile de tenir compte des perturbations avec de telles méthodes. Aussi, parallèlement des études sont menées pour l'application des techniques non linéaires au contrôle des robots d'une part avec articulations flexibles [DEL1] et d'autre part avec bras flexibles [CHE2], [AOU1], [DESII], [DESC1]. Sans vouloir être exhaustif plusieurs approches sont possibles pour le choix du modèle: approche modale [SIC1], modèle à éléments finis [SUN1], [CHE1]. C'est de cette dernière approche dont est issu notre modèle.

### 4.2.2 Modèle du robot flexible

Nous présentons ici rapidement le modèle utilisé (voir [CHE3] pour le modèle complet). Les déplacements élastiques de la structure sont définis par rapport à une structure

rigide (virtuelle) de chaque bras. Les équations d'un robot avec  $n_r$  articulations peuvent s'écrire:

$$A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) + G(q) + Kq = L_A \Gamma_A \quad (4.1)$$

où

$A$  est la matrice des inerties,  $B(q,\dot{q})$  sont les forces de Coriolis et centrifuges.

$q = [q_r^T, q_e^T]^T$  est le vecteur des variables rigides et élastiques

on note  $\dim(q_r) = n_r$  et  $\dim(q_e) = n_e$

$\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  sont respectivement les vecteurs vitesse et accélération

$K$  contient les termes de raideur

$G(q)$  contient les termes de gravité qui sont compensés dans le cas de notre robot  $G(q) = 0$

$L_A \Gamma_A$  est le vecteur des forces et couples généralisés (dimension  $n = n_r + n_e$ ),

$\Gamma_A$  est le vecteur des couples des actionneurs (dimension :  $n_r$ ).

Le modèle retenu utilise un élément fini par bras. Nous avons alors trois variables pour un bras  $\theta_i$  angle "rigide" et  $v_{B_i}$  et  $\theta_{B_i}$  les déplacements et rotations élastiques (voir figure 4.1).

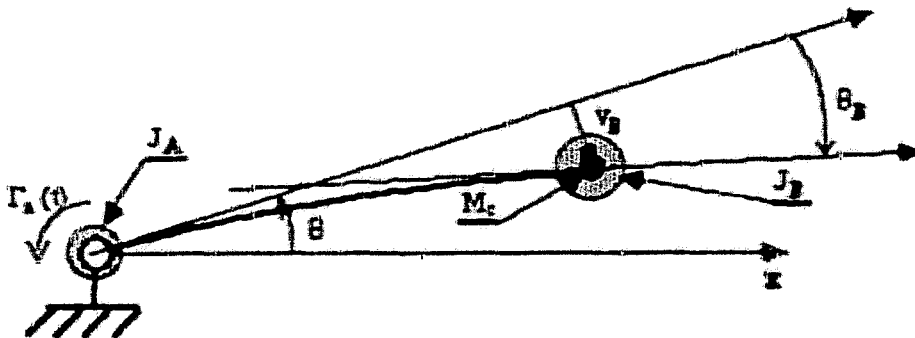


Figure 4.1 : Robot flexible un bras

Pour un bras le vecteur  $q$  représente la variable rigide  $\theta$  et les variables élastiques  $V_B, \theta_B$ :

$$q = [\theta \quad V_B \quad \theta_B]^t$$

L'expression des matrices  $A, B, K$  sont définies dans [CHE4], et pour un robot un bras elles sont:

$$A = \begin{bmatrix} \rho \left[ LI + \frac{SL^3}{3} \right] + m_c L^2 + J_A + J_B & \rho \left[ I + \frac{7}{20} SL^2 \right] + m_c L & -\rho \frac{SL^3}{20} + J_B \\ \rho \left[ I + \frac{7}{20} SL^2 \right] + m_c L & \rho \left[ \frac{6I}{5L} + \frac{13SL}{35} \right] + m_c & -\rho \left[ \frac{1}{10} + \frac{11SL^2}{210} \right] \\ -\rho \frac{SL^3}{20} + J_B & -\rho \left[ \frac{1}{10} + \frac{11SL^2}{210} \right] & \rho \left[ \frac{SL^3}{105} + \frac{2LI}{15} \right] + J_B \end{bmatrix}$$

$$B(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \rho \left[ \frac{26}{35} SL V_B - \frac{11}{105} SL^2 \theta_B + 12 \frac{V_B J_A}{SL} - \frac{10 B}{5} \right] V_B m_c \dot{\theta} \dot{v}_b \\ -\frac{1}{2} \rho \left[ \theta_B \left[ \frac{2SL^3}{105} + \frac{4LI}{15} \right] - V_B \left[ \frac{11}{105} SL^2 + \frac{I}{5} \right] \right] \dot{\theta} \dot{v}_b \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI}{L^3} & -6 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6 \frac{EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

avec

$L=1.005$  longueur du bras (m)

$S=1.629 \cdot 10^{-4}$  section (m<sup>2</sup>)

$M_c=6.79$  masse concentrée en bout de bras (Kg)

$J_A=1.8 \cdot 10^{-3}$  inertie concentrée à l'origine du bras (Kg.m<sup>2</sup>)

$J_B = 4.7 \cdot 10^{-2}$  inertie concentrée à l'extrémité du bras ( $\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ )

$\mu = 6762$  masse volumique ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )

$E I = 6.167$  moment quadratique de la section x module d'Young' ( $\text{Nm}^2$ )

Sur le robot expérimental, les premiers modes de la structure mécanique sont aux fréquences 0.264 Hz et 2.43 Hz.

Les grandeurs mesurées sont  $\dot{\theta}$ ,  $\theta$ , et des jauges de contraintes localisées le long du bras permettent de recalculer (via le modèle) les variables élastiques et leurs dérivées. La trajectoire désirée est une trajectoire polynomiale du cinquième ordre de façon à avoir des conditions initiales et terminales douces, et permet d'avoir les vitesses et accélérations désirées tout au long du déplacement.

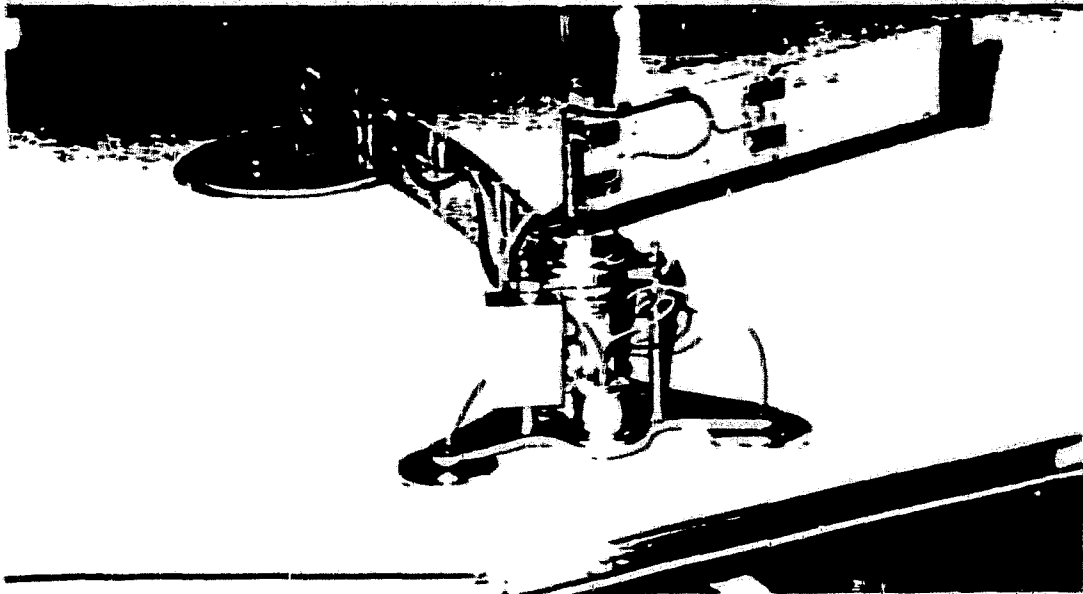


figure 4.2 Robot Flexible du L.A.N

### 4.2.3 Contrôle du robot flexible par des techniques non linéaires

#### a) Linéarisation exacte Entrée/Sortie

Les premiers travaux que nous avons menés pour le contrôle de ce robot ont montré que l'on pouvait utiliser une technique issue des derniers résultats en commande non linéaire pour certaines sorties [CHE2]. La technique consiste à déterminer un compensateur (statique pour notre robot) qui permet une linéarisation entrée-sortie puis à un placement de pôles pour imposer les dynamiques désirées au robot. Les sorties, selon le choix fait, peuvent avoir des degrés relatifs égaux à 2 ou à 3, ce qui signifie l'existence de dynamiques de zéros (le modèle d'état ayant une dimension  $n = 6$ ). Le calcul du bouclage statique permettant la linéarisation exacte de ces différentes sorties a été effectué à l'aide d'un programme que nous avons écrit dans le langage Reduce et qui calcule pour un système général de la forme (1.1) la condition de découplage statique (rang de la matrice de découplage =  $p$ ) et le bouclage nécessaire pour immerger le système non linéaire dans un système linéaire pour lequel on a choisi les valeurs propres (c.f. Annexe 9). L'avantage de cette méthode est le choix de la dynamique (de deuxième ordre) du système bouclé. Dans le travail présenté ci-dessus, le choix des sorties exclut la position de l'extrémité du bout du bras flexible  $L\theta + V_B$ , qui induit après bouclage des dynamiques de zéros instables interdisant un tel compensateur. De plus, nous avons étudié la robustesse de la commande [AOU1] vis à vis de certains paramètres du robot (le module d'Young  $E$ , le moment quadratique de la section du bras  $I$ ) et vis à vis de la méconnaissance du frottement sec. La conclusion est qu'il y a une dissymétrie dans la robustesse, c'est à dire qu'elle n'est pas robuste si le produit  $E.I$  est sous estimé de 1% alors qu'elle l'est s'il y a surestimation (robot réel plus mou que le modèle). Ce problème propre au processus ainsi que le blocage dans l'utilisation de la linéarisation (exacte), nous ont conduit à chercher une technique de commande robuste permettant le contrôle de l'extrémité du bras. Parallèlement, étaient menés des travaux utilisant d'autres techniques de commande (perturbations singulières, commande L.Q.R.). Nous avons ensuite réalisé une campagne d'essais sur site [AOU2] pour comparer l'ensemble des résultats.

#### b) "Modes glissants"

Rappelons maintenant la technique du contrôle par "modes glissants" que nous utilisons. Elle allie le contrôle par linéarisation exacte pour des "sorties" dont le degré relatif est un, et la commande discontinue pour satisfaire une condition de stabilité (Lyapunov). Les qualités de robustesse ont été montrées par de nombreux auteurs comme présenté dans [BUH1] pour les systèmes linéaires et [ELMI], [SLO1], [CAS1], [WII1] pour les systèmes

nonlinéaires. Plus précisément, rappelons maintenant rapidement les principes de base de cette technique:

- Choisir une surface de glissement  $S(x)$ , (qui peut être considérée comme une sortie de degré relatif égal à un, i.e.  $\frac{\partial S(x, u)}{\partial u} \neq 0$ ) telle que si le système satisfait la relation  $S(x)=0$ , il atteindra à l'équilibre le but désiré pour la sortie (avec une dynamique de zéros associée à  $S(x)$  stable).

- Considérer la fonction de Lyapunov  $V(x) = 1/2 S^2(x) \geq 0$  et résoudre en  $u$  l'inéquation  $\dot{V}(x, u) \leq 0$ . (4.2)

On définit ainsi l'entrée  $u$  qui conduit l'état  $x$  du système  $\Sigma$  sur la surface  $S(x)=0$ . L'implémentation et la difficulté pratique correspond à choisir  $S(x)$  définissant une sortie à minimum de phase, sinon les trajectoires d'état correspondant à cette surface seraient instables et qui bien sûr satisfasse les objectifs désirés pour la sortie du système.

Pour résoudre (4.2), la méthode de Fillipov consiste à déterminer l'entrée de commande:

$$u = u_{eq} + u_n$$

où  $u_{eq}$  est la partie analytique de la commande (non linéaire dans notre cas) solution de  $\dot{V}(x, u) = 0$  (u équivalent selon la dénomination utilisée dans [SIR1]). Si l'on pose  $\dot{V}(x, u) = V_1(x) + V_2(x) u$ , alors

$$u_{eq} = - V_1(x)/V_2(x)$$

et pour la partie discontinue de la commande une classe de solution satisfaisant (4.2) donne

$$u_n = - k \text{Sign} ((V_2(x)), k > 0 \quad (4.3)$$

Cette partie de la commande discontinue peut poser des problèmes d'un point de vue pratique, puisque lors du glissement au voisinage de la surface les commutations peuvent atteindre des fréquences élevées inacceptables (ou devant être filtrées sur le site). C'est le cas pour notre robot et nous utiliserons une technique permettant la diminution de la fréquence d'une part et la diminution des amplitudes d'autre part. Ces techniques découlent directement de celle présentée dans [SLO1].



Dans le cas de notre robot, pour contrôler l'extrémité du bras  $L \theta + V_B$ , nous avons choisi une surface  $S(x)$  décrite par l'équation :

$$S(x) = \alpha (\theta - \theta_d) + \beta \dot{V}_B + \dot{\theta} \quad (4.4)$$

où  $\theta_d$  désigne la valeur désirée pour  $\theta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes réelles.

Alors la partie linéarisante de la commande  $u_{eq}$  résolvant l'équation  $\dot{S} = 0$  est :

$$u_{eq} = \frac{(\alpha (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}) - \beta \dot{V}_B) (V_B^2 + 1.65 E-3)}{0.147} - \frac{(7.3 E-3 \theta_B - 1.06 V_B) \dot{\theta}^2 - 2.31 \theta_B + 6.16 V_B}{0.147} \quad (4.5)$$

Pour limiter la fréquence des commutations engendrées lors du glissement au voisinage de la surface, nous avons remplacé dans un premier temps la partie de la commande (4.3) par une commande "adoucie"

$$u_D = -k \text{Signe}(V_2(x)) = -k \text{Signe}(S(x)), \quad k \geq 0, \text{ if } s(x) \notin ]-\epsilon, +\epsilon[, \quad \epsilon = \text{constant}$$

$$u_D = 0, \text{ if } S(x) \in ]-\epsilon, +\epsilon[.$$

Puis pour limiter encore plus l'influence des commutations, nous avons utilisé une fonction continue notée  $\text{Signe}_1$ , pour remplacer la fonction  $\text{Signe}$  :

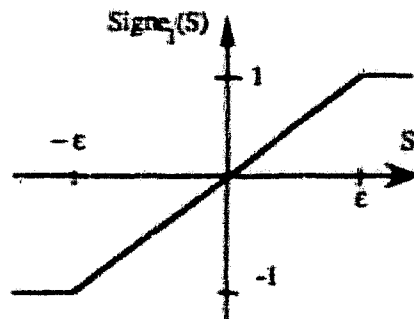


Fig. 4.3 : fonction  $\text{Signe}_1(S)$

La trajectoire désirée est donnée par un polynôme du cinquième ordre :

$$L \theta = YR(t) = 6 \left(\frac{t}{T_m}\right)^5 - 15 \left(\frac{t}{T_m}\right)^4 + 10 \left(\frac{t}{T_m}\right)^3$$

où  $T_m$  est le temps désiré du mouvement total. Avec cette consigne, la vitesse et l'accélération désirées sont nulles en début et fin de mouvement.  $T_m$  est choisi en fonction des vitesses et accélérations admissibles sur le bras.

Les résultats en simulation ont été obtenus avec  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = -2$  et  $\varepsilon = 0.035$  et les résultats expérimentaux avec  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = -2$  and  $\varepsilon = 0.035$ .

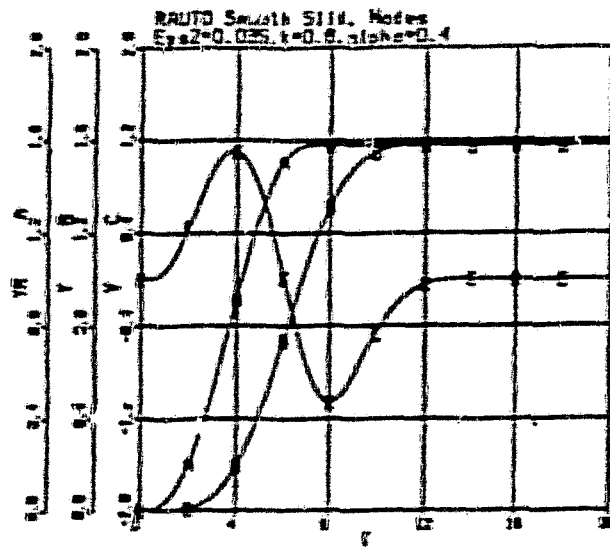


Figure 4.4 : Simulation: A) Réf. polynomiale (5<sup>ème</sup> ordre) de l'extrémité du bras (en m), B) Position de l'extrémité du bras (en m), C) Couple appliqué (Nm) fonctions du temps (s)

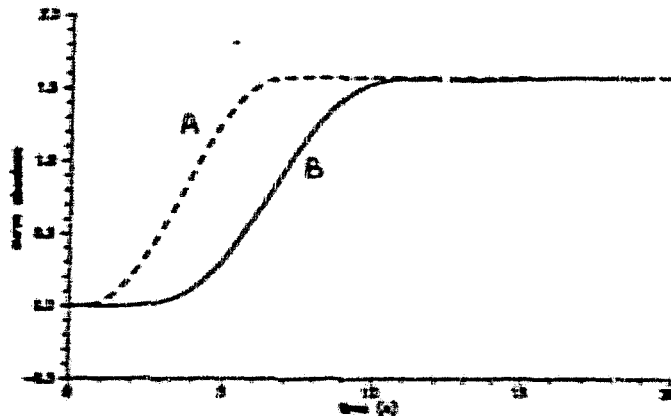


Figure 4.5 : mesures sur site: A) Réf. polynomiale (5<sup>ème</sup> ordre) de l'extrémité du bras (en m), B) Position de l'extrémité du bras (en m) fonctions du temps (en s)

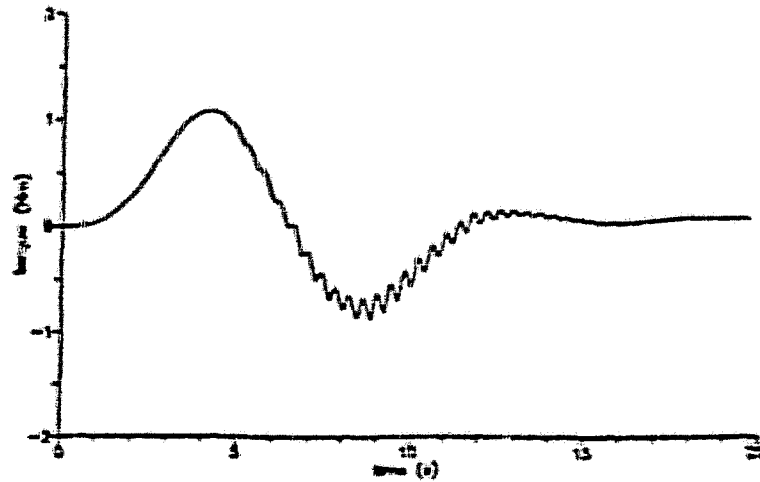


Figure 4.6 : Mesure sur site: Couple (Nm) en fonction du temps (s)

#### 4.2.4 Conclusion sur le contrôle du robot flexible

Les résultats obtenus en simulation par la technique de "modes glissants" ont confirmé la robustesse espérée par rapport aux résultats obtenus par les techniques de linéarisation seule [AOU1]. Néanmoins celle-ci n'est pas à condamner, car les défauts de robustesse mentionnés au début de la section 4.2.3 peuvent être "cachés" en sous-estimant la raideur du modèle ou en ne linéarisant plus les mêmes grandeurs. Une autre solution est possible. essayer de linéariser l'ensemble de l'état du système: des travaux sont en cours à l'aide de langage de calcul formel sur ce sujet.

Les deux méthodes de commande non linéaires présentées ci-dessus, ainsi qu'un certain nombre d'autres méthodes plus "classiques" ont été testées sur site en collaboration avec des membres de l'équipe de robotique du L.A.N. [AOU2]. Les limitations dans les dynamiques acceptables sur le procédé ne nous ont pas permis d'utiliser toute la potentialité de certaines commandes. Néanmoins, nous pouvons dégager des conclusions qui sont résumées dans le tableau ci-dessous:

Type de commande	Inversion de matrice	Sensibilité aux perturbations	Complexité de réglage	Amortissement des variables flexibles
PID	non	oui	*	oui
Linéarisation exacte	oui		*	non
LQR+ Minimi. non linéarités	oui	non	***	oui
Perturbations Singulières	oui (A <sub>11</sub> )	non	**	oui
"Modes glissants"	non	non	*	oui

\* faible complexité

\*\*\* forte complexité

En ce qui concerne le réglage du contrôleur choisi, avec la méthode "Modes Glissants" l'ordre de complexité est identique à celui d'un bouclage linéarisant classique. Le problème du placement de pôles étant remplacé par le choix des paramètres  $\epsilon$  et  $k$  qui permettent le réglage de la vitesse de convergence vers la surface. Nous avons également testé la sensibilité à la variation de la charge (en bout de bras): il n'y a pas de dégradation sensible des performances pour une surcharge en bout de bras allant jusqu'à 500 g. Il n'y a pas de comportement incontrôlé (oscillations entretenues ou longues à s'amortir) pour une surcharge allant jusqu'à 1 kg ce qui est important pour cette structure où la flexibilité est élevée.

La difficulté de mise en oeuvre est classiquement le choix de la sortie n'induisant pas des dynamiques instables comme pour la méthode préconisée ci-dessus ou dans le cas de commande non linéaire classique [DAN1]. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de pondération des états (de coefficients de pente) déterminent la stabilité du système et jouent un rôle important [SLOT1] sur la vitesse de convergence vers la sortie désirée.

### 4.3 Moteur Synchrone

#### 4.3.1 Introduction

Le contrôle des moteurs est un champ d'application très actif grâce notamment à l'évolution des alimentations (électroniques de puissance) et des gains en vitesse des calculateurs. Des recherches sont consacrées à l'application des résultats récents obtenus en théorie du contrôle [LEP1], [GEO1] pour tester leurs performances dynamiques. Le moteur synchrone sans balais auquel nous nous intéressons joue un rôle croissant dans les applications notamment en robotique. Des techniques de linéarisation ont été utilisées dans [LEP1] et une grande partie de la littérature est consacrée au contrôle par modes glissants [BUH1], [HAS1], [SAB1], [SAB2]. Ceci est dû à la robustesse nécessaire pour le contrôle des moteurs dont certains paramètres sont difficiles à déterminer ou sensibles à l'échauffement. Pour les réalisations pratiques, le problème des commutations est souvent indésirable même si dans le cas des moteurs électriques les convertisseurs en amont peuvent admettre des fréquences élevées. La comparaison entre une machine synchrone et un moteur à courant continu ayant la même masse est en défaveur de ce dernier si l'on considère que la puissance dissipée l'est essentiellement au niveau du rotor dont la température s'accroît. Le moteur synchrone à aimant permanent a l'avantage de posséder des caractéristiques intéressantes notamment vis à vis du moteur à courant continu (c.f. annexe 7). C'est ainsi que nous avons choisi ce type de moteur et voulu tester :

(i) différents schémas de commande par "modes glissants" comme présentés en section 4.2 pour limiter le nombre de commutations et comparer les résultats aux techniques déjà testées dans le cadre de la linéarisation exacte par bouçage [LEP1].

(ii) la robustesse vis à vis du flux rotorique pour différents schémas de commande.

#### 4.3.2 Equations du modèle

Le modèle considéré est un modèle standard de moteur sans balais (modèle retenu dans le cadre de l'action "commande de machine" des groupes G.R. AUTO GRECO E.O.T. C'est celui utilisé dans [LEP1].

Notations en utilisant le repère lié au rotor (variables de Park, axes direct d et quadratique q).

$V_d, V_q$  tensions: (axes d et q) (V),

$i_d, i_q$  courants (A),

$\Phi_d, \Phi_q$  flux,

$L_d, L_q$  inductances stator (0.0014 H et 0.0028H),

$R_S$  résistance stator (0.6  $\Omega$ ),

J moment d'inertie (moteur et charge) ( $11 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ ),

p nombre de paire de pôles (4),

$f_v$  coefficient d'amortissement ( $1.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ ),

$\Omega$  vitesse nominale (rad/s),

$\Phi_f$  flux rotor (constant) (0.1194 Wb),

$C_L$  couple de charge (constant) (N.m).

Les équations du modèle sont constituées des équations électriques et mécaniques [LEP1], [HAS1]. Les équations entre les tensions et les flux sont:

$$V_d = R_S i_d - p \Omega \Phi_d + \dot{\Phi}_d \quad (4.6)$$

$$V_q = R_S i_q + p \Omega \Phi_q + \dot{\Phi}_q \quad (4.7)$$

$$\text{with } \Phi_d = L_d i_d + \Phi_f, \quad \Phi_q = L_q i_q \quad (4.8)$$

$$\text{et le couple : } C_m = p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f] i_q \quad (4.9)$$

Les équations mécaniques sont:

$$\dot{\theta} = \Omega$$

$$J \dot{\Omega} = C_m + C_L - f_v \Omega$$

d'où le modèle d'état

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \frac{p}{J} [ (L_d - L_q) i_d + \Phi_f ] i_q - \frac{C_L}{J} - \frac{f_v}{J} \Omega \\ -\frac{R_S}{L_d} i_d + p \frac{L_q}{L_d} \Omega i_q \\ -p \frac{\Phi_f}{L_q} \Omega - p \frac{L_d}{L_q} \Omega i_d - \frac{R_S}{L_q} i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \end{pmatrix}$$

#### 4.3.3 Contrôle par modes glissants de la vitesse.

Le système a deux entrées  $V_d$  et  $V_q$ . L'équation du couple (4.9) montre le rôle joué par la différence des inductances  $(L_d - L_q)$  si le courant  $i_q$  est non nul. Une stratégie possible alors pour éliminer l'influence de ces paramètres sur la vitesse est de contraindre  $i_d$  à zéro (ce qui aura aussi pour effet "secondaire" et bénéfique de minimiser les courants dans les phases du moteur).

Deux surfaces glissantes sont alors choisies en fonction des deux objectifs  $i_d = 0$  et la vitesse égale à la consigne, ce qui est possible car nous disposons de deux entrées indépendantes  $V_d$  et  $V_q$ . Notons  $x$  l'état du système,  $V$  (pour  $V_d$  ou  $V_q$ ) et  $S(x)$  la surface glissante de degré relatif un comme présenté au paragraphe 4.2.3, alors la commande s'écrit:

$$V = V_{eq} + V_n \quad (4.10)$$

où  $V_{eq}$  est la solution de  $\dot{S}(x, V) = 0$  et  $V_n$  satisfait la condition d'attraction vers la surface d'équation  $S(x) = 0$ .

Le problème global est décomposé en deux sous-problèmes qui sont traités séparément. Cela est possible car  $i_d$  est contraint à zéro et restera négligeable dans tous les cas traités ci-dessous. Une méthode simple de commande par modes glissants est suffisante pour

contrôler le courant  $i_d$ . Pour contrôler la vitesse  $\Omega$ , des schémas plus sophistiqués seront utilisés.

### Contrôle du courant direct ( $i_d$ ).

La référence du courant direct  $i_{d,ref}$  est zéro et la surface choisie est

$$S_1 = -i_d$$

$$\text{d'où } \dot{S}_1 = \frac{R_s}{L_d} i_d - p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_q - \frac{V_d}{L_d}$$

$$\text{et donc } V_{d,eq} = R_s i_d + p \Omega L_d i_q$$

Avec  $V_d = V_{d,eq} + V_{d,n}$  la condition de glissement  $S_1 \dot{S}_1 < 0$  implique

$$\frac{-V_{d,n}}{L_d} S_1 < 0$$

et alors

$$V_d = V_{d,eq} + K_d \text{Signe}(S_1) \quad (4.11)$$

où  $K_d$  est un réel constant positif.

### Contrôle de la vitesse

Soit  $\Omega_{ref}$  la référence constante de vitesse.

$S_v = \Omega_{ref} - \Omega$  n'est pas une surface appropriée pour définir la commande car son degré relatif n'est pas égal à un (c.f. section 4.2.3). En prenant  $S_v = K_v e_v + \dot{e}_v$  avec  $e_v = \Omega_{ref} - \Omega$  et avec  $K_v$  un réel constant positif donne

$$\dot{S}_v = -K_v \dot{\Omega} + \frac{d}{dt} \left( \frac{-f_r \Omega}{J} + \frac{p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f]}{J} i_q - \frac{C_L}{J} \right)$$

d'où

$$V_{q,eq} = \frac{J L_q}{p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f]} \left( \frac{f}{J} - K_v \right) \dot{\Omega} + p \Omega \Phi_f + p \Omega L_d i_d + R_s i_q$$

En posant  $V_q = V_{q,eq} + V_{q,n}$  la condition d'attraction  $S_j \dot{S}_j < 0$  implique

$$-\frac{V_{q,n} p [ (L_d - L_q) i_d + \Phi_f ]}{J L_q} < 0$$

et alors

$$V_q = V_{q,eq} + V_n$$

$$\text{avec } V_n = K_q \text{ Signe}(S_v) \quad (4.12)$$

où  $K_q$  un réel constant positif.

Comme présenté pour le contrôle du robot souple et en début de cette section la partie discontinue de la commande induit des commutations indésirables lorsque les dynamiques du système sont au voisinage de la surface. Pour éviter ces effets nous avons étudié trois différentes méthodes pour calculer le terme discontinu  $V_n$  (4.12).

#### Méthode 1 :

Une solution classique consiste à introduire une zone où la fonction Signe est remplacée par  $\text{Signe}_1$  dans l'équation (4.12) comme montré sur la figure 4.7. Ce domaine est caractérisé par  $\epsilon$ .

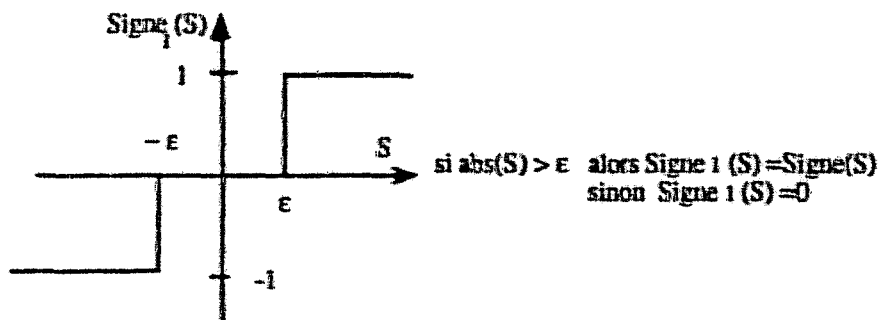


fig. 4.7 : fonction  $\text{Signe}_1$

Cette solution peut être vue dans le plan de phase  $(\dot{e}, e)$  comme une zone où seulement la partie  $v_{eq}$  est appliquée (si  $-\epsilon < s < \epsilon$ ) (voir fig. 4.8). Rappelons que  $e$  est l'erreur sur la vitesse.



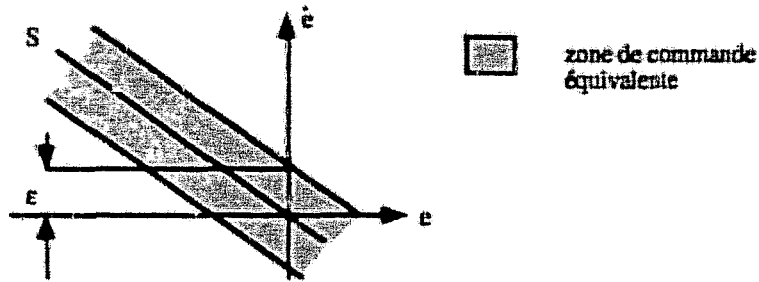


fig. 4.8 : Zones du contrôle discontinu dans le plan de phase

Le choix de  $\epsilon$  est évidemment lié à la précision désirée sur la vitesse et évite des commutations intempestives dues par exemple à l'implantation numérique de l'algorithme ou à des bruits sur site.

*Méthode 2 :*

En couplant la première solution à celle proposée dans [SLO1], on utilise une autre fonction nommée  $\text{Signe}_2$ , pour remplacer la fonction  $\text{Signe}$  initiale:

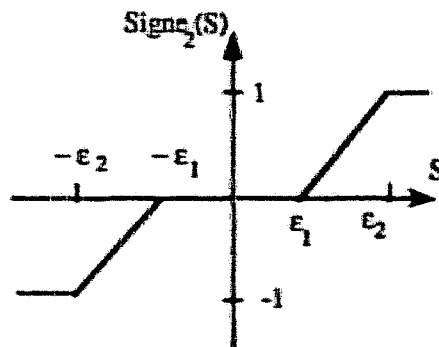


Fig. 4.9 : Fonction  $\text{Signe}_2$

Comme précédemment, ce contrôle peut être considéré dans le plan de phase ( $e, \dot{e}$ ):

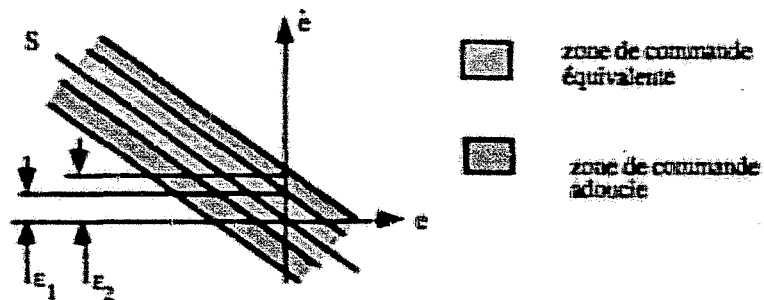


fig. 4.10 : Zones de commande dans le plan de phase

*Méthode 3* : Nous introduisons ici une modification de la commande dite par secteurs glissants. Plus précisément dans  $V_n$ , la fonction *Signe* est remplacée par *Signe<sub>2</sub>* (équation 4.12), où  $\epsilon_2 = \max \{ \epsilon_{2min}, \epsilon(s) \}$ . La fonction  $\epsilon(s)$  est proportionnelle à  $|e|$  :

$$\epsilon(s) = K_s |e|$$

Ceci est illustré dans le plan de phase  $(\dot{e}, e)$  par la Fig. 4.11.

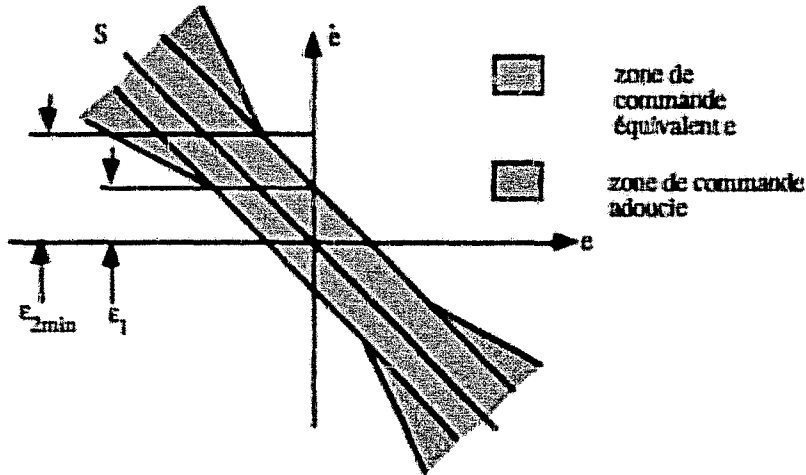


fig. 4.11 : Zones du contrôle par secteurs dans le plan de phase

#### 4.3.4 Résultats de simulation sur la robustesse

Nous avons testé la robustesse des techniques présentées ci-avant vis à vis du flux du rotor. Des variations de  $\pm 10\%$  sur le flux du rotor ont été considérées.

*Méthode 1* : modes glissants classiques,  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\epsilon = 1$

Fig. 4.12 montre la réponse en vitesse pour les différentes valeurs de flux ( $\Phi_f$ ,  $0.9\Phi_f$ ,  $1.1\Phi_f$ ). Les réponses sont lentes superposées, et les performances sont équivalentes. Néanmoins la situation n'est pas acceptable du point de vue des entrées. Bien que les tensions en entrée soit continues dans le cas nominal, la propriété recherchée de robustesse est obtenue au prix de commutations violentes pour les deux cas, voir fig. 4.13 et fig. 4.14.

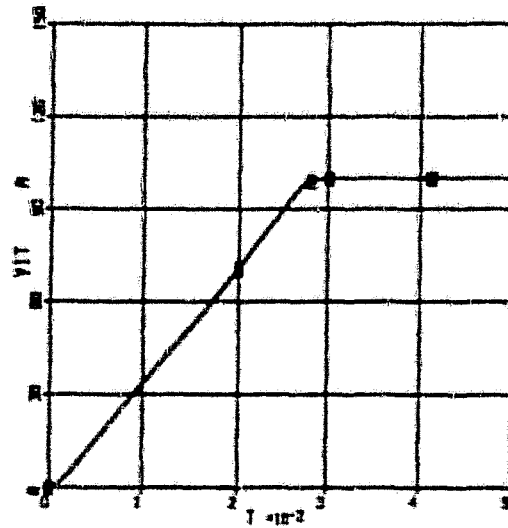


fig. 4.12 : Modes glissants : Réponse de la vitesse (rad/s) en fonction du temps (s)  
 A : + 10% de déviation du flux du rotor B : flux nominal , C : - 10% de déviation

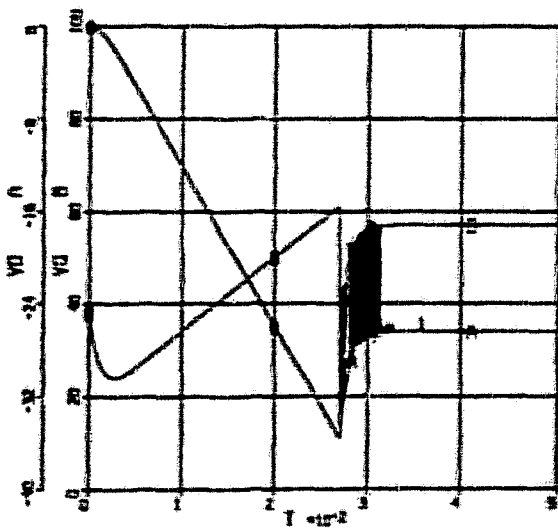


fig. 4.13 : Modes glissants : tensions  
 dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s)  
 avec -10% de déviation du flux du rotor.

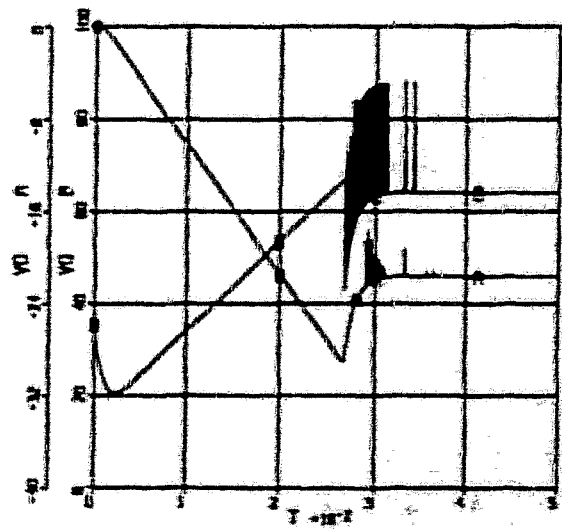


Fig. 4.14 : Modes glissants : tensions  
 dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s)  
 avec 10% de déviation du flux du rotor.

Méthode 2 : Modes glissants adoucis,  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 10$

Les commutations en entrée sont réduites (Fig. 4.16 et Fig. 4.17), la précision sur la vitesse en régime permanent reste identique à la méthode classique. Le temps de montée seulement est sensible aux déviations du flux du rotor comme montré en figure 4.15.

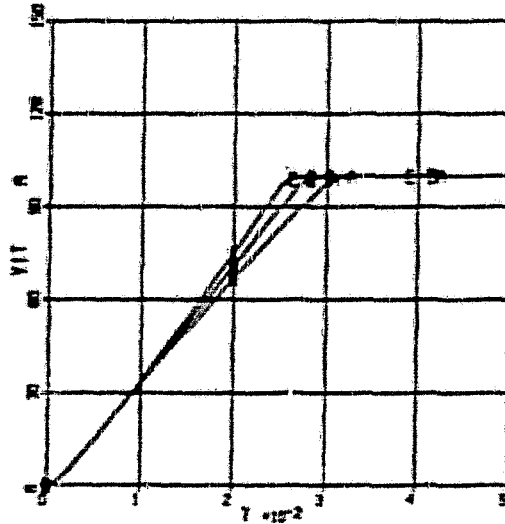


fig. 4.15 : Modes glissants adoucis : Réponse de la vitesse (rad/s) en fonction du temps (s)  
A : + 10% de déviation du flux du rotor B : flux nominal , C : - 10% de déviation

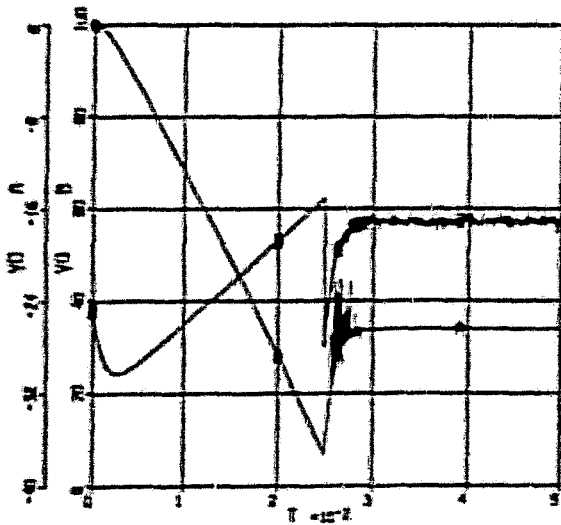


fig. 4.16 : Modes glissants doux: tensions dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s) avec -10% de déviation du flux du rotor.

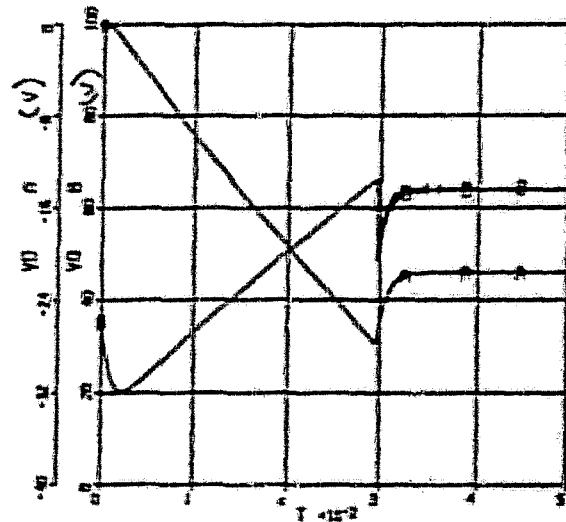


Fig. 4.17 : Modes glissants doux : tensions dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s) avec 10% de déviation du flux du rotor.

**Méthode 3 : Secteurs glissants,  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_{2min} = 1$ ,  $K_S = 100$ .**  
 Cette méthode donne un bon compromis entre le comportement de l'entrée et la réponse de la sortie. Les commutations sur l'entrée sont très réduites (Fig. 4.19 et Fig. 4.20) et comparables à celles obtenues avec la méthode 2. Le régime transitoire est amélioré (Fig.4.18).

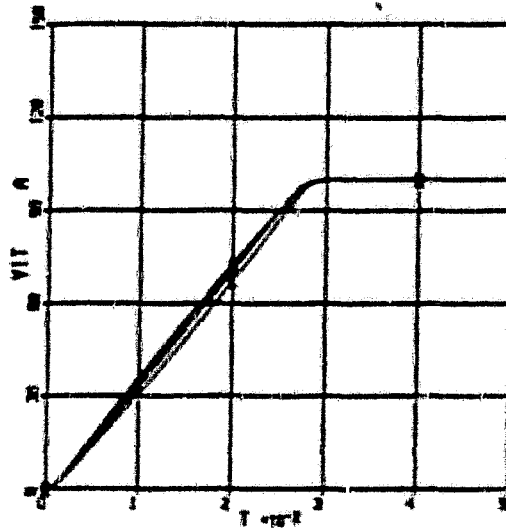


Fig. 4.18 : Secteurs glissants : Réponse de la vitesse (rad/s) en fonction du temps (s)  
 A : + 10% de déviation du flux du rotor B : flux nominal, C : - 10% de déviation

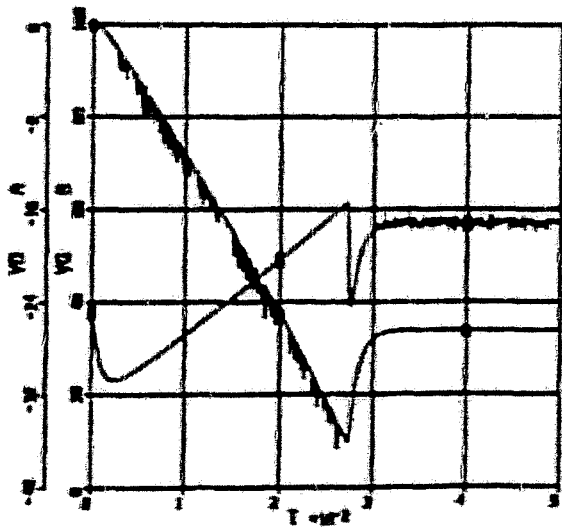


fig. 4.19 : Secteurs glissants : tensions dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s) avec -10% de déviation du flux du rotor.

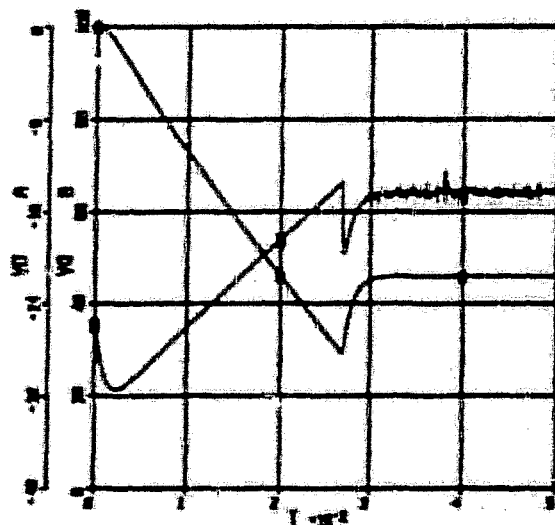


Fig. 4.20 : Secteurs glissants : tensions dir. (A) et quad. (B) (volt) = f (temps en s) avec 10% de déviation du flux du rotor.

### 4.3.5 Conclusions

Le contrôle en vitesse par "modes glissants" avec trois types de commande discontinue a été étudié. Si les qualités de la méthode 1 (standard) assure une bonne robustesse par rapport aux variations des paramètres (fig. 4.12), la partie "équivalente" n'assurant plus dans ce cas la linéarisation exacte (i.e. l'équilibre sur la surface), des commutations apparaissent (fig.4.13 et 4.14). Un bon compromis entre les qualités de la réponse transitoire et une minimisation des commutations a été trouvé par les méthodes appelées "adoucies" et "par secteurs". Des résultats similaires ont été obtenus pour le contrôle en position. Les qualités de "douceur" dans la commande, de vitesse de réponse et de robustesse obtenues avec la méthode présentée permettent d'envisager de façon très optimiste une implantation sur site (groupe de travail GR EOT/AUTO).

## 4.4 Véhicule Spatial

### 4.4.1 Introduction

La commande d'un véhicule spatial lors d'un vol atmosphérique a été pour nous l'objet d'un contrat avec l'Agence Spatiale Européenne [ACR1], [ACR2]. Le but recherché est d'utiliser les caractéristiques aérodynamiques de l'engin lors d'un vol atmosphérique dans le but d'éviter une consommation de carburant (passage d'une orbite haute à une orbite basse voir figure 4.21). Une grande variation des paramètres et des perturbations sont les caractéristiques d'une telle application. Le problème se décompose en un contrôle du mouvement du centre de gravité de l'engin d'une part et des mouvements autour de ce point d'autre part. Pour ceux-ci, une linéarisation au premier ordre autour de l'angle d'incidence nominal et des techniques de commande adaptative ont été utilisées. Pour le contrôle du centre de gravité (problème dit du Guidage), nous avons effectué la mise en œuvre de différentes méthodes de commande:

- + la poursuite de trajectoire
- + la commande par "modes glissants" (linéarisation + commande discontinue)
- + des méthodes avec simplifications de modèles par la théorie des perturbations singulières, expansions asymptotiques.

Pour les deux premières méthodes, qui font parties des méthodes déterministes non linéaires nous arrivons à montrer des qualités de robustesse supérieures à des techniques connues dans la littérature telles que la commande prédictive [ALBI]. Les méthodes issues de

la théorie de la commande non linéaire moderne ont montré aussi leurs supériorité au niveau du temps de calcul ce qui est très important pour cette application, étant donné la vitesse de déplacement de l'engin.

#### 4.4.2 Position du problème et modèle

Nous ne présentons ici que la partie liée à la commande non linéaire, i.e. le contrôle du centre de gravité. Le transfert d'une orbite haute vers une orbite basse nécessite une perte de vitesse qu'il est plus économique (en carburant) d'obtenir par un passage à travers l'atmosphère sans toutefois provoquer d'échauffement excessif comme illustré en figure 4.21.

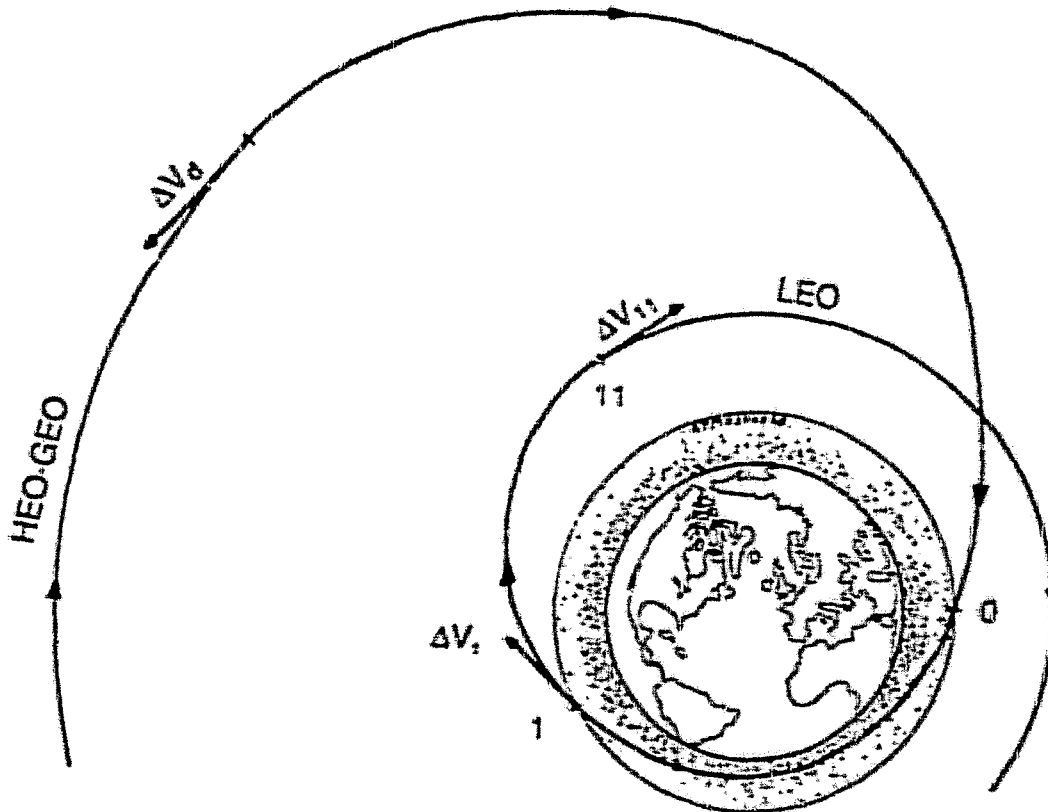


Figure 4.21

Les caractéristiques de l'engin sont données en Annexe 8 et les équations du centre de gravité sont:

$$\dot{r} = V \sin \gamma$$

$$\dot{\delta} = V \cos \gamma \sin \chi / r$$

$$\dot{\tau} = V \cos \gamma \cos \chi / (r \cos \delta)$$

$$\dot{V} = \frac{\text{Drag}}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma + \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\text{Lift} \cos \sigma}{mV} + \left[ \frac{V}{r} - \frac{\mu}{r^2 V} \right] \cos \gamma + 2 \omega \cos \delta \cos \chi + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \sin \chi)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{\text{Lift} \sin \sigma}{mV \cos \gamma} - \frac{V}{r} \cos \gamma \cos \chi \tan \delta - 2\omega (\sin \delta - \tan \gamma \cos \delta \sin \chi) - \frac{\omega^2 r}{V \cos \gamma} \sin \delta \cos \delta \cos \chi$$

avec Drag = - Pdyn Sref CD

Lift = - Pdyn Sref CL

r = distance par rapport au centre de la terre

d = latitude

t = longitude

V = vitesse de l'engin

g = angle de pente aérodynamique

c = angle d'azimut aérodynamique

s = angle de gite = entrée pour la partie "guidage"

r = densité atmosphérique (US 76 Standard)

Pdyn = rV<sup>2</sup>/2 = pression aérodynamique

w = vitesse angulaire de la terre = 0.729 10<sup>-4</sup> rad/s.

m = constante de gravitation = 0.3986 10<sup>15</sup> m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup>

Sref = surface de référence = 12 m<sup>2</sup>

CD, CL = coefficients de portance et traînée



$m$  = masse de l'engin = 1408.6 kg

Seul l'angle  $\sigma$  est disponible comme entrée pour contrôler la position du centre de gravité (l'angle d'attaque  $\alpha$  étant maintenu constant) ce qui revient à pouvoir orienter l'effort dû à la portance de l'engin

#### 4.4.3 Problème du guidage

Pour résoudre le problème de guidage, un minimum d'analyse du système est nécessaire en particulier sur le point crucial de commandabilité du système ou plus précisément d'atteignabilité. Pour notre engin ayant des limitations sur l'entrée et les conditions initiales étant fixées, seulement une partie de l'espace est atteignable, comme le montrent les courbes données en Annexe 8. Une conclusion est qu'aucune commande aussi robuste soit telle ne pourra contrôler le système si un écart des conditions initiales est trop important. D'autre part le système est principalement contrôlable dans les couches basses de l'atmosphère alors que dans les hautes il est insensible à la commande. On peut en déduire que l'entrée du système évoluera entre deux limites qui correspondent à la portance dirigée vers le bas ou vers le haut et ceci avec plus ou moins d'influence selon la zone de l'atmosphère où se situe l'engin.

L'objectif de la mission est de ressortir de l'atmosphère à une vitesse donnée tout en restant dans un plan orbital de référence. Pour cela l'une des techniques utilisées est directement issue de la théorie des systèmes non linéaires: la poursuite de trajectoire. Une trajectoire de référence est choisie pour ses qualités:

- limiter les saturations dans la commande
- ne pas imposer de contraintes temporelles à l'engin lors de la trajectoire puisque seules les conditions finales sont importantes.

Par exemple, pour poursuivre une trajectoire de référence en altitude  $r_{ref}$ , il nous faut contrôler  $y = r - r_{ref}$ .

Le calcul des dérivées de  $y$  fait apparaître l'entrée avec un degré relatif 2

$$\dot{y} = \dot{r} - \dot{r}_{ref}(t) = V \sin \gamma - \dot{r}_{ref}(t)$$

$$\ddot{y} = \dot{V} \sin \gamma + V \dot{\gamma} \cos \gamma - \ddot{r}_{ref}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \gamma \left( -\frac{P_{dyn} S_{ref} C_D}{m} - \frac{\mu}{r^2} \left[ \frac{r}{V} \dot{\gamma} + \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi) \right] \right) \\
&+ V \cos \gamma \left\{ \frac{P_{dyn} S_{ref} C_L \cos \sigma}{mV} + \left[ \frac{V}{r} - \frac{\mu}{r^2 V} \right] \cos \gamma + 2 \omega \cos \delta \cos \chi \right. \\
&\left. + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \sin \chi) \right\} - \ddot{r}_{ref}(t).
\end{aligned}$$

Alors la résolution de l'équation suivante permet d'imposer les dynamiques de l'écart

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y + 2 \xi \omega_n \dot{y} = 0$$

La poursuite de trajectoire aura alors une solution si il y a commandabilité dans la zone où se trouve l'engin et l'écart aura la dynamique d'un système linéaire libre du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement  $\xi$  et une pulsation naturelle  $\omega_n$ .

Pour cela la commande  $\sigma_c$  doit satisfaire :

$$\begin{aligned}
\cos \sigma_c = & - \left[ \frac{V}{r} - \frac{m}{r^2 V} \right] \cos \gamma + 2 \omega \cos \delta \cos \chi + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \sin \chi) \\
& + \frac{1}{V \cos \gamma} \left( -\omega_n^2 y - 2 \xi \omega_n \dot{y} + \ddot{r}_{ref}(t) - \sin \gamma \left[ -\frac{P_{dyn} S_{ref} C_D}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma \right. \right. \\
& \left. \left. + \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi) \right] \right)
\end{aligned}$$

Cette technique peut s'appliquer à une autre référence que l'altitude (pression aérodynamique, énergie, ...). La position par rapport au plan orbital est obtenu par le choix du signe de  $\sigma_c$  comme dans [GAM1].

Finalement la commande est donnée par:

$$\sigma_c = \text{sign}(\sigma_c) \arccos(\cos(\sigma_c))$$

Si l'on considère le système complet (dynamiques du centre de masse d'attitude), la commande  $\sigma_c$  est en fait une consigne pour la partie qui contrôle l'attitude de l'engin. Les dynamiques autour du centre de gravité ainsi que celles des propulseurs interviennent donc entre l'angle de gite  $\sigma_c$  calculé et l'angle réel de l'engin.

#### 4.4.4 résultats

Les résultats obtenus peuvent être visualisés par des courbes montrant la trajectoire (altitude) (A) suivi par l'engin et la commande calculée par la loi de poursuite (B) ainsi que l'angle réel (C), fig. 4.22 avec la commande complète: Guidage + Contrôle de l'attitude. La poursuite de trajectoire est déterminée pour que la dynamique linéaire de l'écart ait un coefficient d'amortissement  $\xi$  de 1.5 et une pulsation naturelle  $\omega_n$  de 0.1 rd/s.

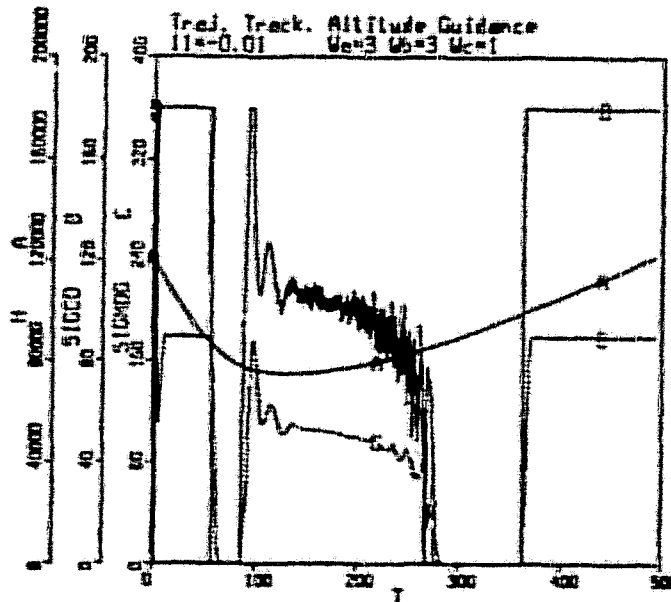


Figure 4.22 - Réponse du système complet : (A) altitude (m), (B) angle de gite désiré (deg), (C) angle de gite réel (deg) en fonction du temps (s)

Le but recherché étant de sortir de l'atmosphère à une vitesse désirée, c'est l'écart  $\Delta V$  par rapport à cette vitesse que nous avons visualisé pour étudier la sensibilité vis à vis des conditions initiales sur l'angle de réentrée dans l'atmosphère d'une part (fig. 4.23) et la

robustesse vis à vis d'une déviation de la densité atmosphérique en % d'autre part (fig. 4.24).

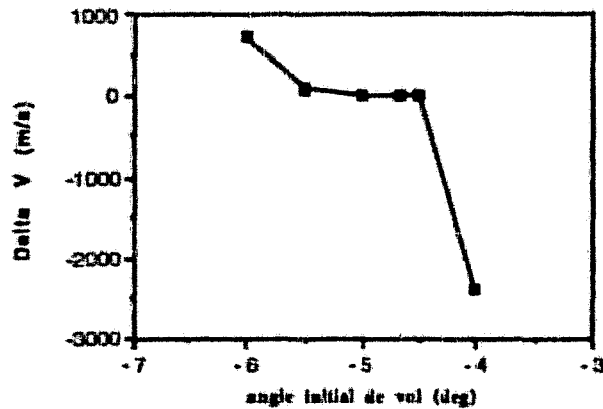


Figure 4.23 Sensibilité de la commande à l'angle de réentrée  $\gamma_0$

On retrouve ici le fait que pour une condition initiale de  $-4$  degrés le système devient incontrôlable ce qui est différent de la non robustesse de la commande

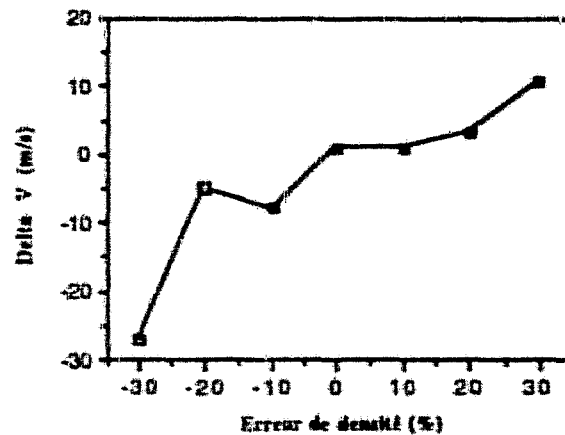


Figure 4.24 Robustesse de la commande vis à vis de la densité atmosphérique

Le "coût" du transfert d'orbite étant de plusieurs milliers de m/s lors des poussées pour quitter l'orbite initiale et pour rentrer dans l'orbite finale, les écarts  $\Delta v$  obtenus ici sont négligeables.

Les résultats obtenus par la poursuite de trajectoire et les "modes glissants" ont été comparés à d'autres techniques de commande: perturbations singulières, "expansions asymptotiques", "prédicteur-correcteur" et Commande Optimale pour tester les qualités de robustesse mais aussi pour tenir compte de la consommation des propulseurs et du temps de calcul nécessaire pour chaque loi. De plus la décomposition du système en deux dynamiques lente et rapide (i.e méthode des perturbations singulières) est possible mais dépendante dans notre cas de la zone de l'espace où cette décomposition est faite. A l'aide d'un programme de calcul formel, nous avons montré que plusieurs décompositions sont nécessaires le long d'une trajectoire de référence. Pour simplifier cette approche, nous avons retenu une seule décomposition: celle qui correspond à la zone où le système est le plus commandable. La décomposition retenue est originale par rapport aux solutions publiées à ce jour. Sur ce système réduit, il est alors possible d'appliquer une technique de Poursuite de Trajectoire comme celle précédemment présentée; les résultats obtenus sont assez proches de ceux obtenus précédemment avec un gain sur le temps de calcul nécessaire, ce qui peut être décisif sur ce genre d'application (ou utilisé en système de secours).

Nous ne présentons ici qu'un aperçu des résultats sur l'étude de la sensibilité par rapport aux variations des paramètres du modèle et de l'environnement (densité, coefficients aérodynamiques, masse, ...).

Type de Commande	Trajectoire de référence	Qualité de robustesse
Poursuite de trajectoire	Altitude	+++
Poursuite de trajectoire	Energie	--
Poursuite de trajectoire	Densité	--
Poursuite de trajectoire	Pression Dynamique	--
Modes glissants	Altitude	++
Modes glissants	Densité	-
Modes glissants	Trainée	-
Perturbations singulières	Energie	-
Perturbations singulières	Altitude	+
Dévelop. Asymptotiques	Altitude	---
Predicteur-Correcteur	non	+

Les méthodes de poursuite de trajectoire et de "modes glissants" avec une référence en altitude donnent les meilleurs résultats. Il n'est pas fait mention dans ce tableau des résultats obtenus par Commande optimale car nous n'avons pas participé directement à l'élaboration de cette commande. Néanmoins son temps de calcul est pénalisant, car pour une trajectoire durant environ 700 secondes, elle nécessite 2500 secondes de calcul sur IBM RISC 6000 alors que 7 secondes suffissent pour les méthodes présentées dans le tableau ci-dessus.

#### 4.5 Conclusion

Trois exemples d'application de la commande des systèmes non linéaires ont été présentés. La première application (le robot souple) nous a permis de confronter les techniques non linéaires aux problèmes de dynamiques de zéros instables (et aux problèmes d'expérimentation !). La deuxième application est celle du contrôle d'une machine synchrone en utilisant le modèle retenu dans le cadre d'une action G.R. AUTO/GRECO E.O.T. (et qui va pouvoir être testé sur le Simulateur Pilote retenu dans ce cadre). En complément aux travaux de commande non linéaire déjà amorcés [LEP1], nous avons proposé une alternative robuste. Enfin, le contrôle d'un engin spatial dans le cadre d'un contrat E.S.A. a permis de montrer les qualités de la commande non linéaire vis à vis d'autres types de commande moins déterministes sur un processus où les phénomènes sont hautement non linéaires. Pour deux de ces applications, des langages de calcul formel ont été utilisés: REDUCE et MATHEMATICA (c.f. Annexe 9).



## Conclusion générale

Dans ce mémoire, une synthèse de nos différents travaux sur l'Analyse et le Contrôle des systèmes non linéaires a été faite. L'approche algébrique a été privilégiée ainsi que le lien avec des solutions algorithmiques permettant souvent à l'ingénieur une application immédiate des résultats.

Nous avons introduit des notions nouvelles permettant l'Analyse des Systèmes Non Linéaires: ordres essentiels, linéarisation partielle par bouclage non régulier et notion d'Interacteur. Ces notions ont leur intérêt intrinsèque et ont été utilisées pour l'étude de la Commande des Systèmes Non Linéaires. Ceci nous a permis de donner des solutions complètes à certains problèmes (Découplage sous Compensateur Dynamique minimal, sous Bouclage Dynamique Pur) ou partielles (Problème de Morgan, Equivalence sous Compensateur Dynamique, Stabilité des systèmes Découplés). L'extension de certains de nos travaux aux cas des systèmes discrets a pu être faite grâce à une généralisation des méthodes algébriques préconisées dans ce mémoire [GRI1]. La notion d'ordres essentiels en particulier est retrouvée dans [KOT1] avec la spécificité des systèmes en temps discret.

Nous avons conclu par des applications représentatives du contrôle des systèmes non linéaires. Elles montrent l'applicabilité des méthodes récentes de l'Automatique non linéaire même si dans certains cas, l'utilisation du calcul formel est nécessaire (bien qu'elle ne soit pas toujours très souple).

Ce mémoire s'inscrit dans l'évolution récente de l'Automatique non linéaire et à ce titre, il ne clôt pas l'ensemble des problèmes étudiés. Il appelle en particulier une suite pour la résolution complète des problèmes de Morgan et de l'Equivalence Dynamique. Les travaux que nous avons menés sur l'Interacteur et le Découplage par Bouclage Dynamique Pur, donnent une solution partielle au problème de Morgan. Il est à noter que ce problème est en fait plus un problème de connaissance structurelle des systèmes non linéaires qu'un problème de commande (la solution par Compensateur Dynamique est connue, comme dans le cas linéaire).

Enfin la robustesse que nous avons trouvée dans les exemples présentés ici demande à être étudiée. Plus précisément, la prise en compte de termes d'ordre plus ou moins élevé dans



les équations des modèles peut donner des degrés relatifs différents. Dans ce cas, les gains de la commande peuvent devenir exagérément élevés ou donner des commandes pas ou peu robustes. Cette situation a été rencontrée de manière flagrante dans le cas de l'engin spatial et justifierait une étude future pour finaliser l'objectif de robustesse dans les lois de commande. La prise en compte des valeurs numériques serait alors déterminante dans l'élaboration de ces lois.

## **ANNEXES**

**Annexe 1. Quelques éléments de mathématiques pour  
l'Automatique Non Linéaire.**

## Quelques éléments de mathématiques pour l'Automatique Non Linéaire.

### A.1.1 Fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$

#### Fonction analytique sur $\mathbb{R}$

Une fonction numérique d'une variable réelle est dite analytique si elle est développable en série de Taylor au voisinage de chaque point.

Exemples:

- i) Toute fonction polynomiale est analytique.
- ii) Toute fonction rationnelle est analytique sur son domaine de définition.
- iii) La fonction  $f(x) = \exp(-1/x^2)$  est définie en  $x = 0$  mais n'est pas analytique en l'origine.  $f$  est infiniment dérivable et toutes ses dérivées s'annulent en 0.

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction analytique d'une variable réelle, alors on a l'une des deux propriétés suivantes

- i) soit  $f$  est égale à la fonction nulle
- ii) soit les zéros de  $f$  sont des points isolés.

On définit de manière analogue les fonctions analytiques de plusieurs variables réelles et la Propriété ci-dessus se généralise par le fait que soit une fonction analytique de plusieurs variables réelles est nulle, soit l'intérieur de l'ensemble de ses zéros est vide. En d'autres termes, l'anneau des fonctions analytiques ne possède pas de diviseur de zéro ; l'anneau est un anneau intègre. Il s'agit là de la propriété essentielle utilisée pour l'étude d'une classe de systèmes non linéaires raisonnable. A partir d'un anneau intègre il est toujours possible de construire un corps, le corps des fractions.

#### Fonction méromorphe

Une fonction est dite méromorphe si elle s'écrit sous la forme d'un quotient de deux fonctions analytiques.

Exemples :

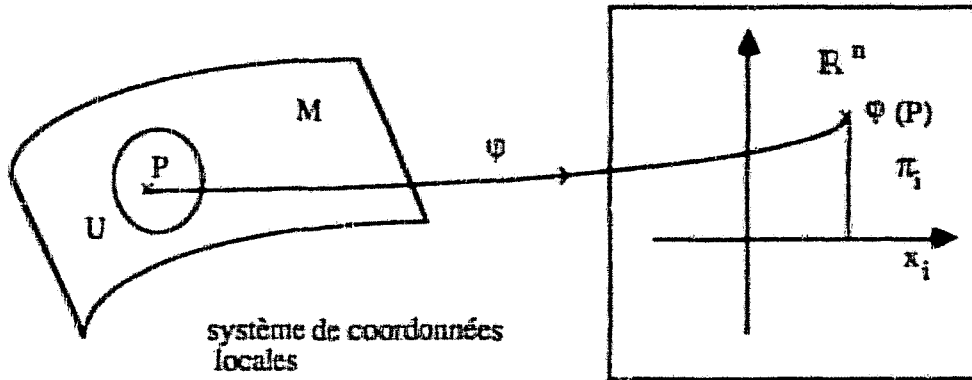
- i) Toute fonction rationnelle est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{R}$ .
- ii)  $\operatorname{tg}(x)$  est une fonction méromorphe.

**A.1.2. Coordonnées locales, dérivées et différentielles .**

- Coordonnées locales

Soit  $M$  variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ . En tout point de la variété il existe un voisinage  $U$  et un système de coordonnées  $\varphi$  qui permet de passer de ce voisinage dans  $\mathbb{R}^n$ , et qui fournit les coordonnées locales de tout point de ce voisinage :

$$x_i(P) := \pi_i \circ \varphi (P)$$



- Vecteurs tangents ou dérivations en un point

Soit  $M$  variété  $C^\infty$  et soit  $P$  appartenant à  $M$ . Un vecteur tangent à  $M$  en  $P$  est une dérivation  $D_P$  associant à toute fonction  $f$ ,  $C^\infty$  sur un voisinage de  $P$ , un nombre dérivé en  $P$  noté  $X_P(f)$ :  $D_P: C^\infty(P) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow X_P(f)$$

L'espace tangent en  $P$  à  $M$ , noté  $T_P(M)$  est l'ensemble des dérivations en  $P$ .

Soit  $(U, \varphi)$  système de coordonnées locales en  $P$ . L'application linéaire tangente  $\varphi_*$  associe à tout vecteur tangent à la variété au point  $P$ , un vecteur tangent à  $\mathbb{R}^n$  en  $\varphi(P)$ .

$$\varphi_* : T_P(M) \longrightarrow T_{\varphi(P)}(\mathbb{R}^n)$$

L'espace tangent au point  $\varphi(P)$  à  $\mathbb{R}^n$  admet pour base les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)$  en ce point .

L'espace tangent  $T_P(M)$  admet pour base les  $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P))$ . La fonction  $\pi_i \circ \varphi$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $P$  et la composante de  $D_P$  sur  $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P))$  est  $D_P(\pi_i \circ \varphi)$ .

- Champs de vecteurs ou champs de dérivations

Un champ  $X$ ,  $C^\infty$  sur  $M$ , associe à chaque point  $P$  de  $M$  une dérivation  $X_P$  en  $P$  telle que si  $(U, \varphi)$  est un système de coordonnées locales en  $P$ , alors les fonctions de  $U$  dans  $\mathbb{R}$

$$Q \longrightarrow X_Q(\pi_i \circ \varphi) \quad \text{sont } C^\infty \text{ sur } U.$$

$$T(M) = \{\text{champs } C^\infty \text{ sur } M\}$$

- Fonction dérivée selon un champ de dérivations

Si  $X$  est un champ  $C^\infty$  sur  $M$  et  $f$  une fonction  $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , alors en chaque point  $P$  de  $M$ ,  $X_P$  est une dérivation en  $P$  qui à  $f$  associe le nombre dérivé  $X_P(f)$ . La fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $P$  associe  $X_P(f)$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $M$  appelée **fonction dérivée de  $f$  selon le champ  $X$** . Nous la noterons  $Xf$ :

$$\lambda f(P) = X_P(f)$$

- Covecteurs ou différentielles en un point

$$T_P^*(M) = \{\text{formes linéaires sur } T_P(M)\}$$

$$\omega_P \in T_P^*(M) \quad \sigma_P: T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_P \longrightarrow \langle \omega_P, D_P \rangle$$

- Différentielle en un point d'une fonction  $C^\infty$

La **différentielle** d'une fonction en un point associe à chaque dérivation en ce point, le résultat de cette dérivation sur la dite fonction.

$$g \in C^\infty(M)$$

$$dg_P: T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle dg_P, D_P \rangle = D_P(g)$$

La base de  $T_P^*(M)$ , duale de la base de  $T_P(M)$  constituée des  $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P))$  est la base formée par les  $d(\pi_j \circ \varphi)_P$  car :

$$\langle d(\pi_j \circ \varphi)_P, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)) \rangle = [\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P))](\pi_j \circ \varphi) = \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \varphi(P) = \delta_{ij}$$

Et pour tout  $\omega_P \in T_P^*(M)$  sa composante sur  $d(\pi_j \circ \varphi)_P$  est  $\langle \omega_P, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)) \rangle$

- Relation entre application linéaire tangente et différentielle en un point

$$g \in C^\infty(M) \quad dg_P: T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle dg_P, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)) \rangle = \frac{\partial (g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \varphi(P)$$

$$g_* P: T_P(M) \longrightarrow T_{g(P)}(\mathbb{R}) \quad (\text{base } \frac{d}{dt} g(P))$$

$$g_* P(\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P))) = [\frac{\partial (g \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \varphi(P)] \frac{d}{dt} g(P) = \langle dg_P, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)) \rangle \frac{d}{dt} g(P)$$

- Champs de covecteurs ou formes différentielles

Un champ de covecteurs  $\omega$ ,  $C^\infty$  sur  $M$ , associe à chaque point  $P$  de  $M$  une forme différentielle  $\omega_P$  sur  $T_P(M)$  de façon que si  $(U, \varphi)$  est un système de coordonnées locales en  $P$ , alors les fonctions  $Q \longrightarrow \langle \omega_Q, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(Q)) \rangle$  sont  $C^\infty$  sur  $U$ .

$$T^*(M) = \{ \text{champs de covecteurs } C^\infty \text{ sur } M \}$$

Pour  $g \in C^\infty(M)$ ,  $dg : P \longrightarrow dg_P$  est un champ de covecteurs appelé différentielle de  $g$  ( tous les champs de covecteurs ne sont pas de cette forme: ceux-ci sont appelés différentielles totales exactes)

**A.1.3. Distributions et codistributions.**- Distribution  $\Delta$ 

Une distribution  $\Delta$ ,  $C^\infty$  sur une variété  $M$ , associe à tout point  $P$  de celle-ci un sous-espace vectoriel  $\Delta_P$  de l'espace vectoriel tangent  $T_P(M)$ , de façon que sur  $U$ , un voisinage de  $P$  on dispose d'une famille de champs de vecteurs  $C^\infty$  fournissant en chaque point  $Q$  de ce voisinage une suite génératrice de  $\Delta_Q$ .

$$P \longrightarrow \Delta_P \text{ sous-espace de } T_P(M)$$

$$U \longrightarrow (D_1, D_2, \dots, D_m) \text{ champs } C^\infty \text{ sur } U$$

$$\text{tels que } \forall Q \in U, \Delta_Q = \text{esp}(D_{1Q}, \dots, D_{mQ})$$

Si pour tout point  $Q \in U$ ,  $(D_{1Q}, \dots, D_{mQ})$  est une base de  $\Delta_Q$  alors on dit que les champs  $(D_1, D_2, \dots, D_m)$  constituent une base locale de  $\Delta$  sur  $U$ .

A chaque fois que ce sera suffisamment clair, on omettra de répéter que les distributions considérées sont  $C^\infty$ .

On dit qu'un champ de vecteurs  $X$  appartient à une distribution  $\Delta$ , si pour tout point  $P$  de  $M$ , on a  $X_P \in \Delta_P$ .

Etant donnée une famille  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  de champs  $C^\infty$  sur la variété  $M$ , on note  $\text{sp}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  la distribution  $\Delta$ ,  $C^\infty$  sur  $M$ , définie point à point :

$$\Delta_P = \text{esp}(g_{1,P}, g_{2,P}, \dots, g_{m,P}).$$

Propriété: si  $\Delta$  est une distribution  $C^\infty$  et si  $D_P$  est une dérivation en  $P$  appartenant à  $\Delta_P$ , alors il existe un champ  $C^\infty$   $X$  appartenant à  $\Delta$  tel que  $X_P = D_P$ .

- Codistribution  $\Omega$ 

Une codistribution  $\Omega$ ,  $C^\infty$  sur une variété  $M$ , associe à tout point  $P$  de celle-ci un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $T_P^*(M)$  dual de l'espace tangent à  $M$  en  $P$ , de façon

que sur un voisinage de  $P$  on dispose d'une famille de champs de covecteurs  $C^\infty$  fournissant en chaque point une famille génératrice.

$$P \longrightarrow \Omega_P \text{ sous-espace de } T_P^*(M)$$

$$U \longrightarrow (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \text{ champs de covecteurs sur } U$$

$$\text{tels que } \forall Q \in U, \Omega_Q = \text{esp} (\omega_{1Q}, \dots, \omega_{mQ})$$

Etant donné une famille  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$  de champs  $C^\infty$  sur la variété  $M$ , on note  $\text{sp}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  la codistribution  $\Omega, C^\infty$  sur  $M$ , définie point à point :

$$\Omega_P = \text{sp} \{ \omega_{1P}, \omega_{2P}, \dots, \omega_{mP} \}.$$

#### - Annulateur en un point

Soit  $E_P$  s.e.v. de  $T_P(M)$ , alors on note:

$$E_P^\perp = \{ \omega_P \in T_P^*(M) \mid \forall D_P \in E_P, \langle \omega_P, D_P \rangle = 0 \}$$

Soit  $F_P$  s.e.v. de  $T_P(M)$ , alors on note:

$$\begin{aligned} F_P^\perp &= \{ D_P \in T_P(M) \mid \forall \omega_P \in F_P, \langle \omega_P, D_P \rangle = 0 \} \\ &= \bigcap_{\omega_P \in F_P} \text{Ker } \omega_P \end{aligned}$$

Si  $E$  est une distribution  $C^\infty$ , alors la codistribution  $E: P \longrightarrow E_P$  n'est pas a priori une codistribution  $C^\infty$ , cependant tout point régulier de  $E$  est un point régulier de  $E^\perp$  et admet un voisinage sur lequel  $E^\perp$  est une codistribution  $C^\infty$  (lemma 3.10 p.23 ISI4).

#### - Relations algébriques ponctuelles

$$(E_P)^\perp = E_P^\perp$$

$$\dim(E_P) + \dim(E_P^\perp) = n$$

$$E_P \supseteq E'_P \iff E_P^\perp \supseteq E'^\perp_P$$

$$(E_P \cap E'_P)^\perp = E_P^\perp + E'^\perp_P$$

$$\left( \begin{matrix} E_P \\ E'_P \end{matrix} \right)^\perp = E_P^\perp \cap E'^\perp_P \quad \text{et les relations duales pour les codistributions.}$$

#### A.1.4. Géométrie différentielle des systèmes non linéaires.

Nous nous intéresserons aux systèmes non linéaires d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

avec:

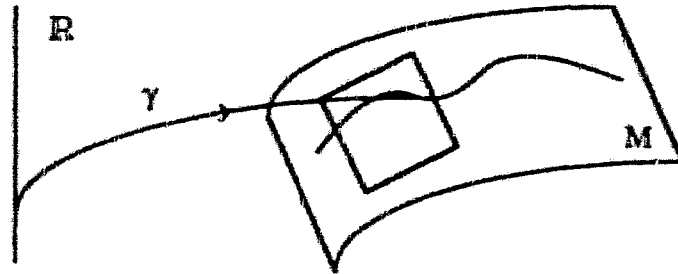


$M$  variété  $C^\infty$  de dimension  $n$

$f, g_1, \dots, g_m$  champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $h$  application  $C^\infty$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^p$

$u_1, \dots, u_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est l'entrée du système

$y = h \circ \gamma : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$  est la sortie.



$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$  trajectoire de l'état, c'est la fonction qui à l'instant  $t$  associe  $\gamma(t)$  sur  $M$ .

$\gamma_*$  : application linéaire tangente qui associe au vecteur tangent  $\frac{d}{dt}(t_0)$  à  $\mathbb{R}$  en  $t_0$ , le vecteur tangent  $\gamma_*\left(\frac{d}{dt}(t_0)\right)$  à la trajectoire au point  $\gamma(t_0)$ .

$$\text{La condition: } \gamma_*\left(\frac{d}{dt}(t_0)\right) = f_{\gamma(t_0)} + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) \cdot g_{j,\gamma(t_0)} \quad (\text{A.1.2})$$

exprime que dans  $T_{\gamma(t_0)}(M)$  le vecteur tangent en  $\gamma(t_0)$  à la trajectoire  $\gamma$ , est une certaine combinaison linéaire des valeurs en  $\gamma(t_0)$  des champs  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Soit  $(U, \varphi)$  un système de coordonnées locales au voisinage du point  $\gamma(t_0)$ . L'application linéaire tangente  $\varphi_*$  au point  $\gamma(t_0)$ , permet de transposer cette condition dans l'espace tangent en  $\varphi_*\gamma(t_0)$  à  $\mathbb{R}^n$  :

$$\varphi_*\left(\gamma_*\left(\frac{d}{dt}(t_0)\right)\right) = \varphi_*(f_{\gamma(t_0)}) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) \varphi_*(g_{j,\gamma(t_0)})$$

où cette nouvelle condition se décompose dans la base  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_*\gamma(t_0)$  en un système d'équations différentielles:

$$\frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) \cdot g_{j,i}(\gamma(t_0)) \quad (\text{A.1.3})$$

où  $f_i(\gamma(t_0))$  désigne la composante de  $\varphi_*(f_{\gamma(t_0)})$  sur  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_*\gamma(t_0)$

et  $g_{j,i}(\gamma(t_0))$  désigne la composante de  $\varphi_*(g_{j,\gamma(t_0)})$  sur  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_*\gamma(t_0)$

En notant  $\pi_i$  la fonction composée  $\pi_i \circ \varphi \circ \gamma$  on retrouverait la forme usuelle des équations d'état.

**A.1.5. De l'influence du choix du système de coordonnées locales sur la forme du système d'équations différentielles. Premier critère de choix: accessibilité locale.**

S'il existe un entier  $d$  et un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  tel que les décompositions modulo  $\varphi_*$  des champs  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  aient sur  $U$  les propriétés suivantes:

pour  $d+1 \leq i \leq n$ :

1) la composante de  $\varphi_*(f_p)$  sur  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)$  ne dépend que de:

$$\pi_{d+1} \circ \varphi(P), \dots, \pi_n \circ \varphi(P) \quad (\text{A.1.4})$$

2) la composante de  $\varphi_*(g_{j,p})$  sur  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)$  est nulle, (A.1.5)

alors la décomposition de la condition (A.1.2) modulo ce système de coordonnées locales donne un système d'équations différentielles simplifié (A.1.3) (par rapport à (A.1.3)):

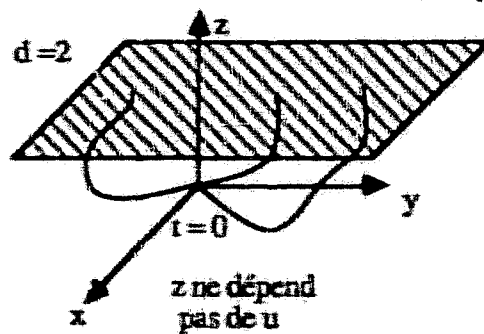
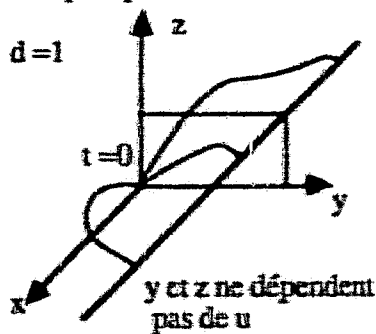
$$\text{pour } 1 \leq i \leq d \quad \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{ij}(\gamma(t_0)) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\text{et pour } d+1 \leq i \leq n \quad \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

- interprétation géométrique

Donc, si l'on reste dans le voisinage  $U$ , il y a dans ce système de coordonnées des composantes  $x_{d+1}$  à  $x_n$  qui "ne dépendent pas de l'entrée  $u$ ".

exemples pour  $n = 3$  et trois valeurs de  $u$  différentes.



On voit sur ces exemples que ceci permet de déterminer un lieu où se trouvent obligatoirement, quelle que soit l'entrée, tous les points accessibles en un temps donné à partir d'un point donné. C'est pourquoi on parle d'accessibilité locale.

Le rôle des systèmes de coordonnées locales  $\varphi$  peut être interprété comme suit: le nombre de composantes de l'état apparaissant indépendantes de l'entrée dépend du choix du repère, ou si l'on veut, de l'angle sous lequel on regarde le système; et le point de vue idéal est celui pour lequel ce nombre est maximal (c'est à dire minimal).

C'est pourquoi on va chercher comment trouver, s'il existe, en tout point P de la variété, un système de coordonnées locales dans lequel les champs se décomposent comme ci-dessus. Et avec d aussi petit que possible.

A ce niveau, intervient la notion de distribution.

#### A.1.6. De la référence aux distributions dans le choix des systèmes de coordonnées locales.

Etant donnés deux champs de vecteurs  $C^\infty$  X et Y, on obtient un nouveau champ  $C^\infty$  noté  $[X, Y]$  et appelé "crochet de Lie de X et Y", en définissant comme suit la dérivation correspondante au point P:

$$[X, Y]_P(f) = X_P(Yf) - Y_P(Xf)$$

On notera également :

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g(x)](x) \quad \text{pour } k > 1 \quad \text{avec } \text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

- quelques propriétés du crochet de Lie [ISI4]

i) bilinéarité:  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

ii) anti-commutativité:

$$[f, g] = -[g, f]$$

iii) identité de Jacobi

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

- règles de calcul du crochet de Lie avec

$\alpha, \beta, \lambda$  fonctions à valeur réelles, f, g champs de vecteurs,  $\omega$  covecteur

i)  $L_{\alpha f} \lambda(x) = (L_f \lambda(x)) \alpha(x)$

ii)  $[\alpha f, \beta g](x) = \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x)$

iii)  $L_{[f, g]} \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x)$

iv)  $L_{\alpha f} \beta \omega(x) = \alpha(x) \beta(x) (L_f \omega(x)) + \beta(x) \langle \omega(x), f(x) \rangle d\alpha(x) + (L_f \beta(x)) \alpha(x) \omega(x)$

v)  $L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x)$

vi)  $L_f \langle \omega, g \rangle(x) = \langle L_f \omega(x), g(x) \rangle + \langle \omega(x), [f, g](x) \rangle$

On dit qu'une distribution  $\Delta$  est involutive si pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs appartenant à  $\Delta$ , le crochet  $[X, Y]$  appartient à  $\Delta$ .

Une distribution  $\Delta$  est dite invariante par rapport à un champ  $f$  si pour tout champ  $X$  appartenant à  $\Delta$ , le crochet de Lie  $[X, f]$  appartient aussi à  $\Delta$ .

Etant donné un champs  $C^\infty f$ , et une distribution  $C^\infty \Delta$ , on note  $[f, \Delta]$  la distribution  $C^\infty$  engendrée par les champs  $[f, X]$  pour tout champ  $X \in C^\infty$  appartenant à  $\Delta$ .

Théorème de Frobenius ( [SI4], chap. 1 th. 3.3 )

Si une distribution  $\Delta$  est non singulière, de dimension  $d$ , et involutive alors en tout point il existe un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  dont les champs

$$\varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_d} \right) \text{ forment une base locale de } \Delta \text{ sur } U.$$

On dit alors que le système de coordonnées  $(U, \varphi)$  redresse la distribution  $\Delta$ .

-Application à l'accessibilité locale ( [SI4], chap. 1, Prop. 5.4 )

Si une distribution  $\Delta$  est non singulière de dimension  $d$ , involutive, invariante par rapport au champ de vecteurs  $f$ , et contient les champs  $g_1, \dots, g_m$  alors en chaque point  $P$  le système  $(U, \varphi)$  qui redresse cette distribution aura les propriétés (A.1.4) et (A.1.5) ci-dessus.

Compte tenu de ce que nous avons dit précédemment on cherchera parmi ces distributions à en déterminer une de dimension minimale.

**A.1.7. Distributions d'accessibilité forte  $\mathcal{P}$ .**

$$\mathcal{P} = \langle f, g_1, g_2, \dots, g_m \mid \text{sp} \{ g_1, g_2, \dots, g_m \} \rangle$$

C'est la plus petite distribution contenant les champs  $g_1, g_2, \dots, g_m$  et invariante par rapport aux champs  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ .

Si  $\mathcal{P}$  est non singulière alors:

1-  $\mathcal{P}$  est involutive et sa dimension  $d$  est la plus petite possible pour une distribution remplissant les conditions recherchées au paragraphe précédent.

2-  $\mathcal{P}$  est constructible à partir de  $\Delta = \text{sp} \{ g_1, g_2, \dots, g_m \}$

par l'algorithme:  $\Delta_0 = \Delta$

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + [f, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^m [g_i, \Delta_{k-1}]$$

(arrêt pour  $\Delta_k = \Delta_{k-1}$ )

3- En tout point de  $M$  où  $\dim \mathcal{P}$  est constante, on dispose d'un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  "redressant"  $\mathcal{P}$  et donc tel que:

3.1 les champs  $\varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$  constituent une base locale de

$\mathcal{P}$ .

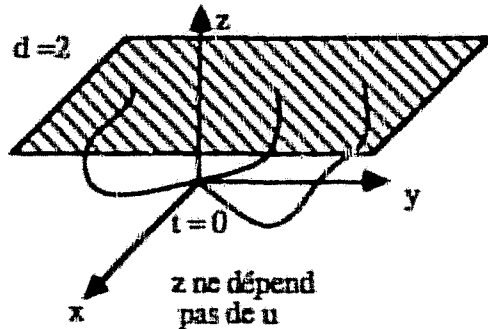
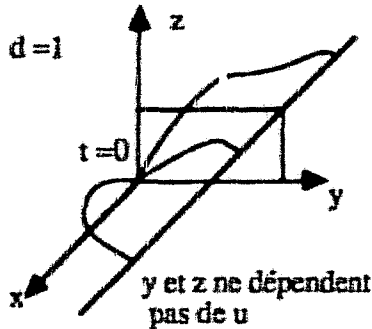
3.2 en particulier au voisinage d'un point  $\gamma(t_0)$ , dans ce système de coordonnées locales les équations d'état s'écrivent (c.f. 4.3) :

pour  $1 \leq i \leq d$  : 
$$\frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\gamma(t_0))$$

pour  $i > d$  : 
$$\frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \pi_{d+2} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

4- rappel de l'interprétation géométrique:

exemples pour  $n = 3$  et trois valeurs de  $u$  différentes.



**A.1.8. Distribution d'accessibilité faible  $\mathcal{R}$ .**

$$\mathcal{R} = \langle f, g_1, g_2, \dots, g_m \mid sp\{f, g_1, g_2, \dots, g_m\} \rangle$$

C'est la plus petite distribution contenant les champs  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  et invariante par rapport à eux.

relations entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{P}$

1-  $\mathcal{P} + sp\{f\} \subseteq \mathcal{R}$

2- En tout point  $P$  régulier de  $\mathcal{P} + sp\{f\}$  on a :  $(\mathcal{P} + sp\{f\})_P = \mathcal{R}_P$

Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$  sont non singulières alors:

1- Elles sont involutives et pour  $\dim \mathcal{P} = d$ , on a  $\dim \mathcal{R} = d$  ou  $d+1$

2- Par application du théorème de Frobenius, on obtient en tout point de  $M$  un système de coordonnées locales tel que (cas  $d+1$ ):

2.1- les champs  $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_d})$  constituent une base locale de  $\mathcal{P}$  et les champs  $\varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_1}), \dots, \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_d}), \varphi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x_{d+1}})$  constituent une base locale de  $\mathcal{R}$ .

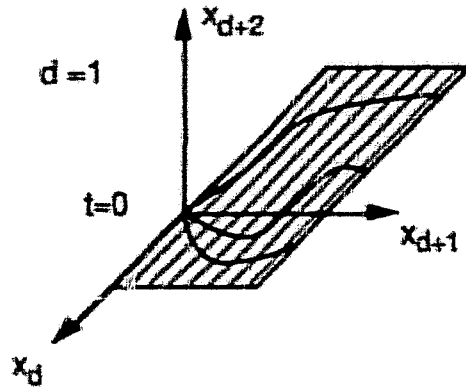
2.2- dans ce système de coordonnées locales au voisinage du point  $\gamma(t_0)$  les équations d'état s'écrivent:

pour  $1 \leq i \leq d$  : 
$$\frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\gamma(t_0))$$

pour  $i = d+1$  : 
$$\frac{d\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_{d+1}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \pi_{d+2} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

pour  $i > d - 1$ :  $\frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = 0$

3 - Interprétation géométrique:  
exemples de trajectoires en dimension  $n=3$



à partir d'un même point initial, pendant un même temps, mais pour des entrées différentes: toutes les trajectoires sont contenues dans le plan horizontal, lui même divisé en droites. Ces droites contiennent chacune tous les points accessibles à un même instant".

**A.1.9. le rôle du noyau de la sortie: introduction à l'observabilité locale.**

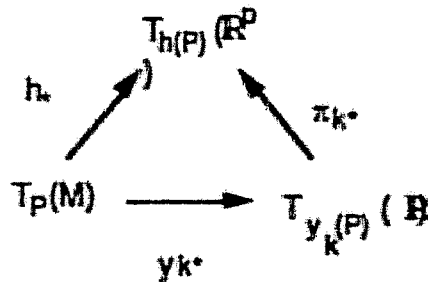
- Noyau de la sortie  $h : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$

On appelle noyau de la sortie en un point  $P$  de  $M$ , le noyau de son application linéaire tangente en  $P$ .

$\text{Ker } h_*$  où :  $h_* : T_P(M) \longrightarrow T_{h(P)}(\mathbb{R}^p)$

- Relation avec les noyaux des composantes

On note  $y_k = \pi_k \circ h : M \longrightarrow \mathbb{R}$  la  $k^{\text{ème}}$  composante de  $h$  ( $1 \leq k \leq p$ ). Considérons les applications linéaires tangentes:



$\text{Ker } h_* = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } y_{k*}$

- relation avec les noyaux des différentielles

Si l'on note  $dy_k$  la différentielle au point  $P$  de la fonction  $y_k$ , on a

$$y_{k*} : T_P(M) \longrightarrow T_{y_k(P)}(\mathbb{R}) \text{ et } dy_k : T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

et on a la relation  $\text{Ker } y_{k*} = \text{Ker } dy_k$  entre sous-espace de  $T_P(M)$ , d'où:

$$\text{Ker } h_* = \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } dy_k$$

d'où l'abus de notation :  $\text{Ker } dh = \text{Ker } h_*$ .

- Distribution : on note aussi  $\text{Ker } h_*$  ou  $\text{Ker } dh$  la distribution (à priori pas  $C^\infty$ ) sur  $M$  qui à tout point  $P$  de  $M$  associe le noyau  $\text{Ker } h_*$  de l'application tangente en  $P$ .

- Annulateur du noyau de la sortie

$$\text{esp } (dy_k)^\perp = \text{Ker } dy_k$$

$$\begin{aligned} (\text{Ker } h_*)^\perp &= \left( \bigcap_{k=1}^p \text{Ker } dy_k \right)^\perp = \text{esp}(dy_1) + \text{esp}(dy_2) + \dots + \text{esp}(dy_p) \\ &= \text{esp}(dy_1, dy_2, \dots, dy_p) \end{aligned}$$

nouvel abus de notation:  $\text{sp}(dh) = \text{sp}\{dy_1, dy_2, \dots, dy_p\}$

- Observabilité locale

Si un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  est tel qu'en tout point  $P$  de  $U$  les  $d$  premiers vecteurs de base de  $T_Q(M)$ , à savoir

$$\varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(P) \right), \dots, \varphi_*^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_d} \varphi(P) \right)$$

appartiennent tous à  $\text{Ker } h_*$ , alors les applications linéaires tangentes en  $P$  aux composantes  $y_k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) de la sortie s'annulent toutes sur ces vecteurs:

$$y_{k*} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P) \right) = 0 \quad (1 \leq i \leq d)$$

$$\text{or } y_{k*} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P) \right) = \left[ \frac{\partial y_k \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \varphi(P) \right] \frac{d}{dt} y_k(P)$$

$$\text{donc } \frac{\partial y_k \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} \varphi(P) = 0 \quad (1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq d, P \in U)$$

Il en résulte que l'application  $h \circ \varphi^{-1}$ :

$$\varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ ne dépend que de } (x_{d+1}, x_{d+2}, \dots, x_n).$$

Ceci permet d'écrire le long de toute trajectoire  $\gamma$  contenue dans  $U$ ,  $Y = h \circ \gamma(t_0)$  sous la forme:

$$Y = h \circ \gamma(t_0) = h \circ \varphi^{-1}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

La sortie ne dépend directement que des  $n-d$  dernières composantes de l'état. Mais à quelles conditions celles-ci sont-elles indépendantes des précédentes?

**A.1.10. De l'influence du choix du système de coordonnées locales sur la forme du système d'équation différentielles. Deuxième critère de choix: observabilité locale.**

S'il existe un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  tel que en tout point  $P$  de  $U$  les  $d$  premiers vecteurs de base de  $T_P(M)$

$$\varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varphi(P), \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \varphi(P), \dots, \varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right) \varphi(P)$$

appartiennent tous à  $\text{Ker } h_*$  et tel que les décompositions modulo  $\varphi_*$  des champs  $f, g_1, \dots, g_m$  aient sur  $U$  les propriétés suivantes: pour  $d+1 \leq i \leq n$  les composantes de  $\varphi_*(f_P), \varphi_*(g_{1,P}), \dots, \varphi_*(g_{m,P})$  sur  $\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(P)$  ne dépendent que de

$$\pi_{d+1} \circ \varphi(P), \dots, \pi_n \circ \varphi(P)$$

Alors la décomposition du système non linéaire proposé, modulo ce système de coordonnées locales s'écrit:

$$\text{pour } 1 \leq i \leq d: \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\gamma(t_0))$$

(A.1.7)

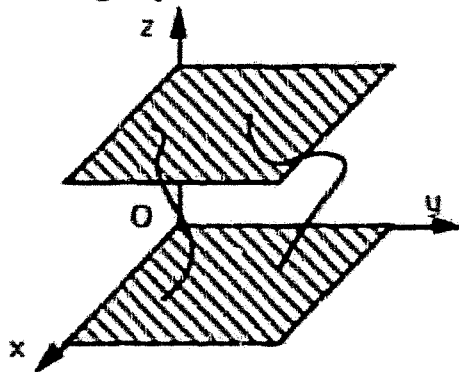
$$\text{pour } d+1 \leq i \leq n: \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

$$y(t_0) = h \circ \varphi^{-1}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

#### Interprétation géométrique

Tant qu'on ne sort pas de  $U$ , il y a dans ce système de coordonnées, des composantes de l'état (à savoir  $x_1, x_2, \dots, x_d$ ) qui n'influencent ni les autres composantes de l'état, ni la sortie: on dit qu'elles ne sont pas observables.

Exemple de trajectoires en dimension  $n=3$  avec  $d=2$ : toutes les trajectoires partant au même instant du plan  $Oxy$ , avec la même entrée passent au même instant par le même plan horizontal et sont impossibles à distinguer par la sortie:





Le choix du repère pouvant mettre en évidence un plus ou moins grand nombre de composantes inobservables de l'état, le meilleur choix de repère est celui qui en met en évidence le plus possible (d maximum).

#### A.1.11. De la référence aux distributions contenues dans le noyau de la sortie pour le choix d'un système de coordonnées locales.

Si une distribution non singulière de dimension  $d$  et involutive est invariante par rapport aux champs  $f_1, g_1, g_2, \dots, g_m$ , et est contenue point par point dans le noyau de la sortie, alors en chaque point  $P$  de  $M$ , le système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  qui redresse cette distribution donne pour le système non linéaire la décomposition ci-dessus.

On cherchera donc si parmi ces distributions on peut en trouver une de dimension maximale et pour cela on va utiliser les notions suivantes:

##### - Dérivée de Lie d'une différentielle selon un champ de vecteurs

Soit  $\omega : P \longrightarrow \omega_P$  un champ de covecteurs,  $C^\infty$  sur  $M$

soit  $D : P \longrightarrow D_P$  un champ de vecteurs,  $C^\infty$  sur  $M$  alors la fonction notée

$$\langle \omega, D \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow \langle \omega_P, D_P \rangle$$

est une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ .

On appelle dérivée de Lie de la différentielle  $\omega$  selon le champ  $D$  le nouveau champ de covecteurs  $D\omega$  défini comme suit :

$$D\omega : P \longrightarrow (D\omega)_P$$

où pour définir la valeur de la différentielle en  $P$   $(D\omega)_P$  sur un vecteur  $X_P \in T_P(M)$  on considère un champ  $C^\infty$   $X$  passant par  $X_P$  et on pose:

$$\langle (D\omega)_P, X_P \rangle = D_P \langle \omega, X \rangle - \langle \omega_P, [D, X]_P \rangle$$

##### - Codistribution invariante par rapport à un champ de vecteurs

$\Omega$  codistribution  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $D$  champ  $C^\infty$  de vecteurs sur  $M$ .

On dira que  $\Omega$  est invariante par rapport à  $D$  si et seulement si pour tout champ  $C^\infty$  de covecteurs  $\omega$  appartenant à  $\Omega$ , le champ  $D\omega$  appartient aussi à  $\Omega$ .

##### - Invariance et dualité

Si  $\Delta$  est une distribution  $C^\infty$  et invariante par rapport au champ  $D$ , alors la codistribution  $\Delta^\perp$  est invariante par rapport à  $D$ . Si  $\Omega$  est une codistribution  $C^\infty$  et invariante par rapport à  $D$ , alors  $\Omega^\perp$  est une distribution invariante par rapport à  $D$ .

Si  $\Delta$  et  $\Delta^\perp$  sont  $C^\infty$  alors:

$\Delta$  invariante par rapport à  $D \iff \Delta^\perp$  invariante par rapport à  $D$ .

Si  $\Omega$  et  $\Omega^\perp$  sont  $C^\infty$  alors:

$\Omega$  invariante par rapport à  $D \iff \Omega^\perp$  invariante par rapport à  $D$ .

### A.1.12. Distribution d'observabilité locale.

On note  $\langle f, g_1, g_2, \dots, g_m \mid \text{sp}(dh) \rangle$  la plus petite codistribution contenant la codistribution  $\text{sp}(dh)$  et invariante par rapport aux champs  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$ .

1- C'est une codistribution  $C^\infty$  comme  $\text{sp}(dh)$ .

2- Si cette codistribution est non singulière

alors la distribution  $\langle f, g_1, g_2, \dots, g_m \mid \text{sp}(dh) \rangle^\perp$  est  $C^\infty$ , non singulière et involutive; elle est la plus grande distribution involutive, invariante par rapport aux champs  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  et contenue dans  $\text{Ker } h_*$ .

3- Algorithme

$$\Omega_0 = \text{sp}(dh)$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + f \Omega + \sum_{j=1}^m g_j \Omega$$

$$\text{ou } f \Omega = \text{sp}_{\omega \in \Omega} (f\omega), \quad g_j \Omega = \text{sp}_{\omega \in \Omega} (g_j \omega)$$

si  $\Omega_{n-1}$  est non singulière alors  $\Omega_{n-1} = \langle f, g_1, g_2, \dots, g_m \mid \text{sp}(dh) \rangle$

4- Alors il existe un système de coordonnées locales  $(U, \varphi)$  tel que la décomposition du système non linéaire s'écrit:

$$\text{pour } 1 \leq i \leq d: \quad \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\gamma(t_0)) + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\gamma(t_0))$$

$$\text{pour } d+1 \leq i \leq n: \quad \frac{d\pi_i \circ \varphi \circ \gamma}{dt}(t_0) = f_i(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0)) \\ + \sum_{j=1}^m u_j(t_0) g_{j,i}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

$$y(t_0) = h \circ \varphi^{-1}(\pi_{d+1} \circ \varphi \circ \gamma(t_0), \dots, \pi_n \circ \varphi \circ \gamma(t_0))$$

5- Interprétation géométrique

Voir figure paragraphe A.1.10

### A.1.13 Bouclage Statique : quelques propriétés géométriques

#### Définition

Une distribution involutive  $\Delta$  est  $(f, g)$ -invariante localement si dans un voisinage de chaque point  $P$  de  $M$ :

il existe un Bouclage Statique:  $u = \alpha(x) + \beta(x) v$  avec  $\beta$  régulière :

$$[f + g\alpha, \Delta] \subset \Delta$$

$$[g\beta, \Delta] \subset \Delta$$

nota1. Il existe une distribution  $(f, g)$ -invariante maximale contenue dans une distribution donnée.

nota2. si  $\beta$  est non régulière on peut définir des distributions localement  $(f, g)$ -invariantes dégénérées. Il y a non fermeture pour l'addition et donc pas de distribution maximale.

Notons  $\mathfrak{G}$  la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $g_1, \dots, g_m$  alors l'algorithme de calcul de la plus grande distribution  $(f, g)$ -invariante involutive contenue dans  $\ker dh$  [ISI4]

Algorithme du calcul de  $V^*$  la plus grande distribution  $(f, g)$ -invariante involutive contenue dans  $\ker dh$

$$V_0 = TM$$

$$V_{k+1} = \ker dh \cap \{ X \in TM / [f, X] \in V_k + \mathfrak{G} \text{ et } [g, X] \in V_k + \mathfrak{G} \}$$

alors  $V^*$  est la fermeture involutive de la limite  $(\lim_{k \rightarrow \infty} V_k)$  de l'algorithme.

Algorithme du calcul de  $R^*$  la plus grande distribution de commandabilité régulière  $R^*$  contenue dans  $\ker dh$ .

- calculer  $V^*$

- calculer  $\alpha$  et  $\beta$  rendant  $V^*$  invariante

-  $R^* =$  fermeture involutive de  $\{ \text{ad}^k_{f+g\alpha} (\mathfrak{G} \cap V^*), \text{ad}^k_{g\beta} (\mathfrak{G} \cap V^*), k \in \mathbb{N} \}$

#### Remarque

Il n'existe pas d'élément maximal unique dans la classe des distributions de commandabilité non régulières contenues dans  $\ker dh$  (c.f. exemple 3.6).

Exemple [HIR1]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier [MOO1] que  $V^* = R^* = 0$  tandis que  $\mathcal{R} = \{ \partial/\partial x_3 \}$

$$= \text{fermeture involutive ( ad } \begin{pmatrix} k \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} )$$

est une distribution de commandabilité dégénérée contenue dans le noyau de la sortie.

**Annexe 2. Essential Orders and the Nonlinear Decoupling Problem**

Annexe 2. Essential Orders and the Nonlinear Decoupling Problem  
A. Glumineau & C.H. Moog, INT. J. CONTROL, 1989, vol. 50, NO.5, pp.1825-1834

## Essential orders and the non-linear decoupling problem

A. GLUMINEAU<sup>+</sup> and C. H. MOOG<sup>+</sup>

The concept of essential orders has recently been introduced into linear system theory and has been shown to be useful in the solution of static and dynamic decoupling problems (Commault *et al.* 1986, De Luca *et al.* 1985). This paper presents a non-trivial extension to the class of non-linear affine systems of some of these definitions and results. It is shown that these invariant integers give the minimal order for a regular dynamic compensator that decouples a right-invertible system.

### 1. Introduction and notation

Although many important contributions have been given to the decoupling problem during the last 20 years, its most general case has been solved only recently for linear time-invariant systems by Descusse *et al.* (1988): the solutions which are sought are possibly *singular* state feedbacks. This latter result has been obtained within the so-called structural approach using the notion of structure at infinity and thanks to the concept of *essential structure* (Commault *et al.* 1986).

In the non-linear setting, non-interacting control has been studied by Freund (1975), Sinha (1977) and Isidori *et al.* (1981), for example. Dynamic solutions were recently investigated by Fliess (1985), Descusse and Moog (1985), and Nijmeijer and Respondek (1986). Such solutions have been applied to a robot arm with elastic joints by De Luca *et al.* (1985). It would be interesting to know in that example the structural property of the system that necessitates four integrators on one input channel and two integrators on a second one. The main goal of this paper is to find this property by extending the definition of essential orders and showing that they represent the *smallest* (in a sense that will be defined later) structure at infinity that is reachable by a compensator that can decouple a right-invertible non-linear system. Some results are valid for general compensators—static or dynamic—regular or not.

This property is called the *minimal order* of a compensator that is a solution to the decoupling problem. This result is known from Commault *et al.* (1986) for linear systems from the analysis of the Toeplitz matrix. However, their analysis is not directly acceptable in the non-linear setting. A proposal by Di Benedetto *et al.* (1988, 1989) is recalled and used below, and Theorem 1 (in § 2) focuses upon the application of the essential orders to the decoupling problem.

Some preliminaries are given by Glumineau and Moog (1988), and related results on the concept of *essentiality* for non-linear systems have been established recently by Xia and Gao (1988).

---

Received 9 January 1989.

<sup>+</sup>Laboratoire d'Automatique de Nantes—Unité Associée au Centre National de la Recherche Scientifique, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1 rue de la Nave, 44172 Nantes, Cedex 03, France

The framework for our work is as follows. Consider a non-linear system of the form:

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i \tag{1}$$

$$y = C(x) \tag{2}$$

where the state  $x$  belongs to  $\mathbb{R}^n$ ; the output  $y$  belongs to  $\mathbb{R}^p$ ; and the components of  $A(x)$ ,  $B_1(x)$ , ...,  $B_m(x)$  and  $C(x)$  are meromorphic functions of  $x$ , i.e. they belong to the fraction field of the integral domain consisting of analytic functions of  $x$ .

As did Di Benedetto *et al.* (1988), suppose that the input function  $u(t)$  to the system (1) is  $N$ -times continuously-differentiable. Then by Taylor's theorem,

$$u(t) = \sum_{k=0}^N u^{(k)} \frac{(t-t_0)^k}{k!} + R_N(t-t_0)$$

where  $t_0$  is some initial point in time.  $u^{(0)} := u(t_0)$ ,

$$u^{(k-1)} = \frac{d}{dt} u^{(k)}(t) |_{t=t_0}$$

and  $R_N$  is a remainder term. Then  $u, \dot{u}, \dots, u^{(N-1)}$  are independent variables. In the rest of the paper, we use the simplified abuse of notation  $y(x) = y^{(0)}(x) = C(x)$  for the output function; more generally, the notation  $y^{(k)}(x, u, \dots, u^{(k-1)})$  is then defined as

$$y^{(k-1)}(x, u, \dots, u^{(k-1)}) = \frac{\partial^{k-1} y}{\partial x} \left( A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i \right) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial^j y}{\partial u^{(j)}} u^{(j)}$$

A way of considering the jacobian matrices

$$\frac{\partial(y, \dots, y^{(k)})}{\partial(u, \dots, u^{(k-1)})} \quad \text{for } 1 \leq k \leq n$$

which are the non-linear equivalents of the Toeplitz matrices associated with a linear system, is as follows.

Let  $\mathcal{X}$  denote the field consisting of the set of rational functions of  $(u, \dots, u^{(N-1)})$  with coefficients meromorphic in  $x$ .

Let  $\mathcal{E}$  denote the vector space (over  $\mathcal{X}$ ) spanned by  $\{dx, du, \dots, du^{(N-1)}\}$ . A general vector  $\omega$  in  $\mathcal{E}$  is then written as

$$\omega = \sum_{i=1}^n \left( x_i dx_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{ij}^k du_i^{(k)} \right)$$

where  $x_i, \beta_{ij}^k$  belong to  $\mathcal{X}$ .

$p$  denotes the set  $\{1, \dots, p\}$ . For  $i \in p$  and  $0 \leq k \leq n$ ,  $dy_i^{(k)}$  belongs to  $\mathcal{E}$  one has

$$dy_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial x} & \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial u} & \frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial u^{(N-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ du \\ \vdots \\ du^{(N-1)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Introduce the chain of subspaces  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$  by

$$\mathcal{E}_k = \text{span} \{dx, d\dot{y}, \dots, d^k y^{(k)}\} \quad (4)$$

To end this introductory section, recall the definition of some invariant integers that are of interest for our purpose. The characteristic number, i.e. the (similar) order  $n_i$ , of the zero at infinity of the subsystem consisting of the dynamics (1) and the output  $y_i = C_i(x)$  is:

$$n_i = \min \{k > 0 \mid d^k y_i^{(k)} \notin \text{span} \{dx\}\}$$

If, for any  $k > 0$ ,  $d^k y_i^{(k)} \in \text{span} \{dx\}$ , then  $n_i = \infty$ .

For the system (1), (2) the number  $\sigma_k$  of zeros at infinity of order less than or equal to  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , is (Di Benedetto *et al.* 1989)

$$\sigma_k = \dim \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_{k-1}}$$

One can introduce the following notation:  $p_i = \sup \{\sigma_k, k \geq 1\}$  is the total number of zeros at infinity;  $p_i = p_i - \sigma_{i-1}$  is the number of zeros at infinity, of order greater than or equal to  $i$ , for  $i \geq 2$ ; and  $n_j = \text{card} \{p_i \geq j\}$ . The list  $\{n_j, j \geq 1\}$  represents the list of orders of zeros at infinity.

## 2. Essential orders

Starting from the notion of 'essential row' introduced by Cremer (1971), the concept of essential order has been defined for linear systems (by Commault *et al.* 1986). Let us now extend this definition to the class of non-linear systems (1), (2).

### Definition

For  $i \in p$ , the essential order  $n_{ie}$  of the output  $y_i$  is defined by

$$n_{ie} = \min \left\{ k \geq 1 \mid d^k y_i^{(k)} \notin \text{span} \{dx, d\dot{y}, \dots, d^{k-1} y^{(k-1)}, d^k y_{j \neq i}^{(k)}, d^{k+1} y^{(k+1)}, \dots, d^{n_i} y^{(n_i)}\} \right\}$$

A differential  $d^k y_i^{(k)}$  as above is said to be essential in  $\{dx, d\dot{y}, \dots, d^{n_i} y^{(n_i)}\}$ . If such a  $k$  does not exist, one sets  $n_{ie} = \infty$ .

To be homogeneous with the framework of § 1, the dynamic state-feedback decoupling problem can be stated as follows.

Find, if possible, a dynamic compensator

$$\dot{z} = M(x, z) + N(x, z)r$$

$$u = F(x, z) + G(x, z)r$$

where  $\dim z = n_c$ ,  $r = (r_1, \dots, r_s)^T$ ,  $p \leq s \leq m$ , such that

$$d^k y_i^{(k)} \in \text{span} \{dx, dz, dr, \dots, dr^{(k-1)}\} \quad \text{for } i \in p, k \geq 1 \quad (5)$$

and

$$d^{n_i} y_i^{(n_i)} \notin \text{span} \{dx, dz\} \quad \text{for } i \in p \quad (6)$$



where  $\mathcal{X}$  denotes the field consisting of the rational functions in  $s, \dots, s^{n-1}$  with coefficients which are meromorphic functions of  $x$ .

Equation (5) represents the non-interaction of the new inputs  $v_1, \dots, v_m$  and (6) represents the output controllability condition. We are now able to state the major application of the  $n_{i\alpha}$  given in the Definition to the dynamic decoupling problem. The static case will just be the special case where  $n_i = 0$ . Note that no regularity assumption is made on the compensator and, to the best of our knowledge, no result is available in the literature for such a general situation.

#### Theorem 1

If there exists a compensator (static or dynamic) that decouples the system (1), (2),  $\Sigma_0$ , then

$$n_i(\Sigma) \geq n_{i\alpha}(\Sigma_0) \quad i \in p \quad (7)$$

where  $\Sigma$  denotes the decoupled system.

Moreover there exists a (possibly extended) decoupled system  $\Sigma'$  deduced from  $\Sigma_0$  such that

$$n_i(\Sigma') = n_{i\alpha}(\Sigma_0) \quad i \in p \quad (8)$$

Before proving Theorem 1, let us establish a couple of lemmas. From our notation,  $n_i$  denotes the largest order of the zeros at infinity.

#### Lemma 1

For right-invertible systems (Fliess 1986),  $n_{i\alpha}$  is finite and  $n_{i\alpha} \leq n_i$ , for every  $i \in p$ .

The proof of Lemma 1 is given in the Appendix. From Fliess (1985) and Descusse and Moog (1985), we know that if  $\Sigma_0$  can be decoupled, it is necessarily right-invertible, then from Lemma 1, all the integers involved in (7) and (8) are finite.

#### Lemma 2

The essential orders  $n_{i\alpha}$ ,  $i \in p$ , cannot decrease under the action of a static or dynamic compensator.

#### Proof

Assume that  $d_j^{k\alpha}$  is not essential for the original system (1), (2),  $i \in p$  and  $0 \leq k \leq n$ . Then there exist meromorphic coefficients,  $x_j$  ( $x, u, \dots, u^{n-1}$ )  $\in \mathcal{X}$ ,  $j \in n(p+1)$  that are not all zero, such that:

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{r}_1^{k\alpha}}{\tilde{r}_1} & \frac{\tilde{r}_2^{k\alpha}}{\tilde{r}_2} & \dots & \frac{\tilde{r}_j^{k\alpha}}{\tilde{r}_j} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [x_1 \quad \dots \quad x_j] \begin{bmatrix} \tilde{r}_1(x, u, \dots, u^{n-1}) \\ \tilde{r}_2(x, u, \dots, u^{n-1}) \\ \dots \\ \tilde{r}_j(x, u, \dots, u^{n-1}) \end{bmatrix}$$

where  $l = n(p+1)$  and the coefficient relative to

$$\frac{\tilde{r}_j^{k\alpha}}{\tilde{r}_j(x, u, \dots, u^{n-1})}$$

is zero. For the extended system, i.e. the closed-loop system consisting of the original

system (1), (2) and the dynamic compensator, one obtains

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\hat{c}_i^{j^{k_1}}}{\hat{c}_i(x, z, v, \dots, t^{j^{k_1}-1})} \right] &= \left[ \frac{\hat{c}_i^{j^{k_1}}}{\hat{c}_i(x, u, \dots, u^{j^{k_1}-1})} \right] \left[ \frac{\hat{c}_i(x, u, \dots, u^{j^{k_1}-1})}{\hat{c}_i(x, z, v, \dots, t^{j^{k_1}-1})} \right] \\ &= [x_1, \dots, x_r] \left[ \frac{\hat{c}_i(x, \hat{y}, \dots, \hat{y}^{j^{k_1}})}{\hat{c}_i(x, u, \dots, u^{j^{k_1}-1})} \right] \left[ \frac{\hat{c}_i(x, u, \dots, u^{j^{k_1}-1})}{\hat{c}_i(x, z, v, \dots, t^{j^{k_1}-1})} \right] \end{aligned}$$

So

$$\left[ \frac{\hat{c}_i^{j^{k_1}}}{\hat{c}_i(x, z, v, \dots, t^{j^{k_1}-1})} \right] = [x_1 \dots x_r] \left[ \frac{\hat{c}_i(x, \hat{y}, \dots, \hat{y}^{j^{k_1}})}{\hat{c}_i(x, z, v, \dots, t^{j^{k_1}-1})} \right]$$

The latter shows that  $d_j^{k_1}$  is not essential for the extended system. □

*Proof of Theorem 1*

To prove (7), note that for any decoupled system  $\Sigma$ , one has

$$\{n_i(\Sigma)\}_p = \{n_{ie}(\Sigma)\}_p$$

From Lemma 2, we have that under a dynamic compensator, the  $n_{ie}$  cannot decrease for  $i \in p$ . Thus for  $\Sigma$ , the relation (7) is always true. □

To establish (8), it suffices to prove that the algorithm of Descusse and Moog (1987) does not change the essential order  $n_{ie}$ ,  $i \in p$ . Let us first recall the algorithm.

*Step 1*

Compute  $n_i$ , for  $i \in p$  and the decoupling matrix  $B^*$ . If  $\text{rank } B^* = p$ , stop.

*Step 2*

If  $\text{rank } B^* = r < p$ , define a square meromorphic and non-singular matrix  $G_0(x)$  such that the  $m - r$  last columns of  $B_1^* = B^*(x)G_0(x)$  are identically zero. Without loss of generality, we can assume that the block of the first  $r$  rows and the first  $r$  columns of  $B_1^*$  form an  $r \times r$  non-singular diagonal matrix.

$$B_1^* = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) & 0 \\ \left( \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{array} \right) & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

*Step 3*

Among the  $r$  non-zero columns of  $B_1^*$  we have  $q$  columns, (say the first  $q$  columns, without loss of generality) with two or more non-zero elements. Now put an integrator in series with the  $q$  corresponding input terminals and the new system is written:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \hat{u}_i \end{bmatrix}_{-q} = \begin{bmatrix} A(x) + \sum_{j=q}^r u_j \hat{B}_j(x) \\ \hline 0 \end{bmatrix}_{-q} + \begin{bmatrix} \sum_{j=q}^r u_j \hat{B}_j(x) \\ \hline r_i \end{bmatrix}_{-q} \tag{10}$$

where  $\hat{B} = B(x)G_0(x)$ ,  $\hat{q} = m - q$ . Call the system (10), (2)  $\Sigma_1$ .

*Step 4*

Go to Step 1 and resume the procedure with  $\Sigma_1$  instead of  $\Sigma_0$ .

This algorithm 'converges' after a finite number  $k$  of iterations, towards an extended system  $\Sigma_k$  which is decouplable with static state feedback.

For the system  $\Sigma_0$  one has:

$$dy_1^{n_1+1} \notin \text{span} \{dx, dy, \dots, dy^{n_1+1}, dy_{j \neq 1}^{n_1+1}, \dots, dy^{n_1}\} \quad (11)$$

Note that from the form of  $B_1^*$  in (9), one has

$$n_i < n_{ie} \quad \text{for } 1 \leq i \leq q \text{ and for } p-r+1 \leq i \leq p$$

Suppose that one sets only one integrator in front of the first input channel  $u_1$ : assume that the essential order of  $y_1$  has increased for  $\Sigma' = \Sigma_1$ . Then

$$dy_1^{n_1+1} \in \text{span} \{dx, du_1, dy, \dots, dy^{n_1+1}, dy_{j \neq 1}^{n_1+1}, \dots, dy^{n_1}\} \quad (12)$$

But

$$\text{span} \{dx, du_1\} = \text{span} \{dx, dy_1^{n_1+1}\}$$

and thus

$$dy_1^{n_1+1} \in \text{span} \{dx, dy_1^{n_1+1}, dy, \dots, dy^{n_1+1}, dy_{j \neq 1}^{n_1+1}, \dots, dy^{n_1}\} \quad (13)$$

The relations (11) and (13) yield a contradiction when combined with

$$n_1 < n_{1e}$$

This proof can be repeated for each of the  $q$  input components  $u_1, \dots, u_q$  and proves that the structure of the decoupled system at infinity is nothing but the essential structure of the initial system  $\Sigma_0$ . This was the claimed result.  $\square$

Before concluding this section, note that it is possible to deduce some interesting structural properties from the above results.

*Corollary 1*

The essential orders  $\{n_{ie}\}_p$  are invariant under regular static state feedback  $u = F(v) - G(x)v$  (i.e.  $G(x)$  is non-singular).

*Proof*

The proof of Corollary 1 can be deduced from the proof of Lemma 2 but it is an immediate consequence of the chain rule

$$\frac{\partial(x, \dot{y}, \dots, y^{(n)})}{\partial(x, \dot{v}, \dots, v^{(n-1)})} = \frac{\partial(x, \dot{y}, \dots, y^{(n)})}{\partial(x, u, \dots, u^{(n-1)})} \cdot H$$

where

$$H = \frac{\partial(x, u, \dots, u^{(n-1)})}{\partial(x, \dot{v}, \dots, v^{(n-1)})}$$

is a square full-rank matrix.  $\square$

Another conclusion from Theorem 1 is Corollary 2

**Corollary 2**

The three lists  $\{n_i\}_p$ ,  $\{n_i^*\}_p$ , and  $\{n_{ie}\}_p$  are equal if and only if  $\Sigma_0$  can be decoupled with a regular static-state feedback.

Next, we give a result underlining the physical meaning of the essential orders. First, the orders of the zeros at infinity can best be understood for discrete-time systems, since they represent nothing but the delay existing between the input and the output. This analogy still holds for continuous-time systems. Then,  $n_{ie}$  represents the difference between the structure at infinity of the overall system  $\Sigma_0$  and subsystem  $\Sigma^1$  defined by the dynamics (1) and the  $p-1$  outputs  $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_p)$ . More precisely, one can state this as Theorem 2.

**Theorem 2**

Assume that the system (1), (2) is right-invertible and let  $\{n_j(\Sigma)\}_p$  denote the orders of the zeros at infinity of the system  $\Sigma$ ; then for  $i \in p$ , one has

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^p n_j(\Sigma_0) - \sum_{j=1}^{p-1} n_j(\Sigma^1) \quad (14)$$

**Proof**

Let  $\mathcal{X}$  denote the field consisting of the set of rational functions of  $(u, \dots, u^{(n)})$  with coefficients meromorphic in  $x$ , and

$$\delta_k = \text{span} \{dx, \dots, dy^{(k)}\}, \quad \text{for } 0 \leq k \leq n-1$$

From Di Benedetto *et al.* (1989) we know that

$$\dim \text{span } \delta_k = \dim \text{span } \delta_k^* \quad \text{for } 0 \leq k \leq n$$

The essential orders are thus unchanged when replacing  $\mathcal{X}$  by  $\mathcal{X}^*$  in the Definition. Call  $\delta_0^* \subset \delta_1^* \subset \dots \subset \delta_n^*$  the chain associated with system  $\Sigma^*$ .

Let

$$k_0 = \min \{k \geq 1 \mid dy_1^{(k)} \notin \delta_n^*\} \quad (15)$$

Hence, from Di Benedetto *et al.* (1989), one has the decomposition

$$\delta_n^* \ominus \text{span} \{dy_1^{(k_0)}\} \ominus \dots \ominus \text{span} \{dy_1^{(n)}\}$$

and from (15)

$$\delta_n^* \ominus \text{span} \{dy_1^{(k_0)}\} \ominus \dots \ominus \text{span} \{dy_1^{(n)}\} = \delta_n \quad (16)$$

thus

$$k_0 = n_{ie}$$

So,

$$\dim \delta_n^* = \dim \delta_n^* - (n - n_{ie} + 1) \quad (17)$$

In a similar vein,

$$\dim \delta_{n-1}^* = \dim \delta_{n-1}^* - (n - n_{ie} - 2) \quad (18)$$

Compute

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j(\Sigma_0) &= 1 \left( \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} \right) + 2 \left( \dim \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} - \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} \right) + \dots \\ &\quad + (n+1) \left( \dim \frac{\mathcal{E}_{n-1}}{\mathcal{E}_n} - \dim \frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_{n-1}} \right) \\ &= \dim \mathcal{E}_0 - (n+2) \dim \mathcal{E}_n + (n+1) \dim \mathcal{E}_{n-1} \end{aligned}$$

(17), (18) yield

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r-1} n_j(\Sigma^1) &= \dim \mathcal{E}_0 - (n+2)(\dim \mathcal{E}_n - (n - n_{ix} + 1)) \\ &\quad + (n+1)(\dim \mathcal{E}_n - (n - n_{ix} + 2)) \end{aligned}$$

and the result (14) follows. =

Example

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Compute

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ x_2 u_2 \end{bmatrix} \\ \ddot{y} &= \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ x_2 \dot{u}_1 + u_1 \dot{u}_2 \end{bmatrix} \\ y^{(2)} &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ x_2 \ddot{u}_1 + 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 + u_1 \ddot{u}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For computing the essential orders, inspect the jacobian matrix

$$J = \frac{\partial(x, \dot{y}, \ddot{y}, y^{(2)})}{\partial(x, u, \dot{u}, \ddot{u})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{u}_1 & u_2 & u_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{u}_1 & \dot{u}_2 & 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 & u_1 \ddot{u}_2 & u_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

The bold rows of  $J$  represent essential differentials (in the sense of the Definition) and yield

$$n_{1z} = n_{2z} = 2$$

whereas the orders of zeros at infinity are  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ . This example can be decoupling by adding one integrator in front of the first input channel and this operation brings  $n_2$  to two and leaves  $n_1$  unchanged.

### 3. Conclusion

This paper has been devoted to the generalization of the notion of essential orders to the class of non-linear affine systems. Their definition and problem setting are deduced directly from the linear situation (Commault *et al.* 1986). However, the consideration of the jacobian matrices of  $(f_1, \dots, f^{(k)})$  with respect to  $(u_1, \dots, u^{(k-1)})$  that are one natural equivalent of the linear Toeplitz matrices, leads to serious drawbacks. The solution in Theorem 1 was obtained through the linear algebraic setting introduced by Di Benedetto *et al.* (1988, 1989), which involves the exact differentials  $dy_i^{(k)}$ . That solution embodies a non-trivial extension of Commault *et al.* (1986).

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors thank Jacques Descusse, Jessy W. Grizzle and Jean Perraud for helpful discussions.

#### Appendix

##### Proof of Lemma 1

From Di Benedetto *et al.* (1989, Theorem 2.3) one can deduce that if  $\{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(k-1)}, \dots, dy_k^{(k-1)}\}$  is a basis for  $\mathcal{E}_{k-1}$ , for  $k \geq 2$ , then there exists a vector  $\tilde{y}_k$  consisting of some components of  $y$  such that  $\{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(k-1)}, \dots, dy_k^{(k-1)}, d\tilde{y}_k\}$  is a basis for  $\mathcal{E}_k$ . So,

$$\begin{aligned} \text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p)}\} &= \text{span } \{dx, dy_i^{(p)} \text{ with } 1 \leq i \leq n_1, i \leq j \leq n_1\} \\ &= \text{span } \{dx, dy_i^{(p)} \text{ with } 1 \leq i \leq n_1 - 1, i \leq j \leq n_1 - 1\} \\ &\quad \oplus \text{span } \{dy_{n_1}^{(p)} \text{ with } 1 \leq i \leq n_1, n_1 \leq j \leq n_1\} \end{aligned}$$

In a similar vein, one has

$$\text{span } \{dx, dy_i^{(p)} \text{ with } 1 \leq i \leq n_1 - 1, i \leq j \leq n_1 - 1\} = \text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p-1)}\}$$

and the right-invertibility assumption yields

$$\text{span } \{dy_i^{(p)} \text{ with } 1 \leq i \leq n_1, n_1 \leq j \leq n_1\} = \text{span } \{dy_1^{(p)}, \dots, dy_1^{(p-1)}\}$$

and

$$\text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p-1)}\} = \text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p-1)}\} \oplus \text{span } \{dy_1^{(p-1)}, \dots, dy_1^{(p-1)}\}$$

Then for any  $i \in p$

$$\begin{aligned} \dim [\text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p-1)}\} \oplus \{dy_1^{(p-1)}, dy_1^{(p-1)}, \dots, dy_1^{(p-1)}\}] \\ < \dim \text{span } \{dx, dy_1, \dots, dy_1^{(p)}\} \end{aligned}$$

Thus,  $n_u < n_1$ .

## REFERENCES

- COMMALLET, C., DESCUSSE, J., DIDON, J. M., LAFAY, J. F. and MALABRE, M., 1986. About new decoupling invariants: the essential orders. *International Journal of Control*, **44**, 689-700.
- CREMER, M., 1971. A precompensator of minimal order for decoupling a linear multivariable system. *International Journal of Control*, **14**, 1089-1103.
- DE LUCA, A., ISIDORI, A., and NICOLO, F., 1985. Control of robot arm with elastic joints via non-linear dynamic feedback. *Proceedings of the 24th I.E.E.E. Conference on Decision and Control*, pp. 1671-1679.
- DESCUSSE, J., LAFAY, J. F., and MALABRE, M., 1988. Solution to Morgan Problem. *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **33**, 732-739.
- DESCUSSE, J. and MOOG, C. H., 1985. Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine non-linear systems. *International Journal of Control*, **42**, 1387-1398; 1987. Dynamic decoupling for right-invertible non-linear systems. *Systems and Control Letters*, **8**, 345-349.
- DI BENEDETTO, M. D., GRIZZLE, J. W., and MOOG, C. H., 1988. A unified notion of rank for a non-linear system. *Proceedings of the 27th I.E.E.E. Conference on Decision and Control*, Austin, Texas, pp. 926-931; 1989. Rank invariants of non-linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **27**, 658-672.
- FLIESS, M., 1985. A new approach to the non-interacting control problem in non-linear systems theory. *Proceedings of the 23rd Allerton Conference*, Monticello, Illinois, pp. 123-129; 1986. A note on the invertibility of non-linear input-output differential systems. *Systems and Control Letters*, **8**, 147-151.
- FREUND, E., 1975. The structure of decoupled non-linear systems. *International Journal of Control*, **21**, 443-450.
- GLUMINEAU, A., and MOOG, C. H., 1988. Essential orders for nonlinear systems. Laboratoire d'Automatique de Nantes, Technical Report, July 1988.
- ISIDORI, A., KRENER, A. J., GORI-GIORGI, C., and MONACO, S., 1981. Non-linear decoupling via feedback: a differential geometric approach. *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **26**, 331-345.
- NUMERER, H., and RESPONDEK, W., 1986. Decoupling via dynamic compensation for non-linear control systems. *Proceedings of the 25th I.E.E.E. Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, Vol. 1, pp. 192-197.
- SINHA, P. K., 1977. State feedback decoupling of non-linear systems. *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, **22**, 487-489.
- XIA, X. H., and GAO, W. B., 1988. New invariants—essential ranks of nonlinear systems. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Technical Report.





**Annexe 3. Nonlinear Morgan's Problem: case of  $(p+1)$  inputs and  $p$  outputs**

## Nonlinear Morgan's Problem: Case of $(p+1)$ Inputs and $p$ Outputs

A. Gheminean and C. H. Moog

**Abstract**—Noninvertible static gain feedback solutions of the new by now decoupling problem are investigated for the class of nonlinear systems having one more input component than output components. The analysis involves a combination of geometric and algebraic tools, but notably avoids the use of regular or degenerate controllability distributions (as opposed to the main tools used to date for the class of linear systems). The main idea of this note is to find within the system a chain of integrators that may be attached to one of the inputs in order to appropriately modify the system's structure at hand.

### 1. INTRODUCTION AND NOTATION

The decoupling problem in the control of linear systems has been extensively studied, and the reader is referred to [5] for an extensive bibliography. The first contribution for nonlinear systems is due to Freund [10], where he used a nonlinear version of the decoupling matrix to characterize those square (same number of inputs as outputs) nonlinear systems that can be decoupled with an invertible static state feedback of the form  $u = \omega(x) + \beta(x)z$ ,  $\det \beta(x) \neq 0$ . A great deal of additional structural information about the decoupling feedbacks and the resulting closed-loop system was provided by the differential geometric analysis [13], [17], [18], and [25], for example. The study of dynamic state feedback solutions was carried out in [6] and [26], using again "invertible" compensators [8], [21].

The main focus of this note is to initiate an investigation of nonregular static state feedback (i.e., the matrix  $\beta(x)$  is not invertible) solutions to the decoupling problem for nonlinear systems: right-invertibility of the closed-loop system will of course be imposed to avoid trivial solutions. Solutions of this nature may exist for systems having more inputs than outputs when regular (i.e., invertible) static state feedback solutions do not exist again, the reader is referred to [5] for many results on linear systems. A practical reason for seeking nonregular static state feedback solutions is to avoid the addition of extra dynamics. A special class of nonregular static state feedbacks for "decoupling problem has been investigated in [27],  $u = \beta(x)z$  or  $x_1 = a^*$ , where  $\beta(x)$  is now

necessary of full rank. Here, a necessary and sufficient condition for the existence of a general static state feedback solution (which may be nonregular) will be given for analytic systems possessing  $(p+1)$ -inputs and  $p$ -outputs. In general, the key to solving a decoupling problem lies in modifying the system's relative degrees and/or structure at infinity in order to achieve an equality between these two lists of integers [22], which is in part a necessary and sufficient condition for achieving decoupling via regular static state feedback.

Basically, this equality is achieved by cascading controllable strings of integrators with the original system. In the case of dynamic decoupling, these controllable strings of integrators may be fully external to the original system. In contrast, for solving the static state feedback decoupling problem, one has to find strings of integrators which are internal to the original system (they lie in a controllable and nonobservable part of the system [4], [37], nonregular feedbacks provide additional freedom in modifying the system's relative degrees and structure at infinity).

At this point, let us state how our result compares to the results known for special classes of linear systems (systems with two outputs [4] or the so-called "affined systems" [3]). The solution in [5] is stated in terms of  $R^n$ , the largest controllability subspaces decoupled using the kernel of the output map. The given system is maximal controllable and nonobservable part that may be achieved via feedback). For nonlinear systems, our problem does not directly reduce to a classical geometric analysis of the system. As a matter of fact, no regular or degenerate controllability distribution is directly involved in this note. Indeed, it will be shown that in general there does not exist a unique maximal degenerate controllability distribution contained in the kernel of the output, making the application of this tool problematic. The rest of our analysis involves the following: given a scalar input channel, say  $z_j$ , which has to be extended, find all possible strings of integrators involving the same  $x$  and also possibly the output  $z_j$ , and its derivatives (see Fig. 1 where  $f^{(j)}$  denotes the  $j$ th order derivative of  $f$  along trajectories of the system, for  $1 \leq j \leq k$ ). We show that the functions  $f^{(j)}$  are fully characterized by certain distributions defined on the state manifold. The strings of integrators in Fig. 1 are shown to be an efficient tool for solving our problem. Moreover, they fit nicely within a more general framework recently introduced by Fliess [9], which is based on differential algebra.

The next section is devoted to the structural analysis of right-invertible systems used for solving the decoupling problem. The preliminary problem, described above, of finding chains of integrators within the system is solved in Section III. Here, no assumption on the number of inputs will be made. In fact, we consider a noninvertible system with no outputs and the result of the section may independent interest for systems analysis since it may be viewed as an extension of the partial linearization problem. In Section IV, we tackle the so-called Morgan's problem, that is the static state feedbacks now by now decoupling problem. Only in this part of the note will we assume that the number of inputs equals the number of outputs plus one.

The results in Section IV are new even for linear systems since the result in [5] is only valid for shifted systems (i.e., systems such that all essential orders coincided) and not for general linear systems (indeed, an example due to Horowitz and Lohdy<sup>1</sup> shows that the condition given in [5] is not sufficient for decoupling).

<sup>1</sup> Personal communication.

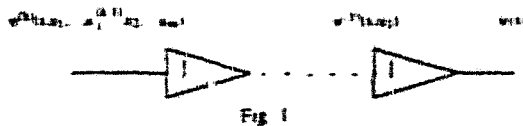


Fig. 1

Example 1:

$$\ddot{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ 0 \\ x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

This system satisfies  $\dim R^* = 3$ , which is precisely the number of integrators that must be added to  $u$ , in order to achieve decouplability, but there is no static state feedback solving the input-output decoupling problem. The reader may check that the condition of Theorem 6 in Section IV is not satisfied.

II. STRUCTURAL PROPERTIES OF RIGHT-INVERTIBLE SYSTEMS

Consider a nonlinear system described by

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & (1) \\ y = h(x) & (2) \end{cases}$$

where the state  $x$  belongs to an open subset  $M$  of  $\mathbb{R}^n$ , the input  $u$  belongs to  $U = \mathbb{R}^m$ , and the output  $y$  belongs to  $\mathbb{R}^p$ . The entries of  $f(x)$ ,  $g(x)$ , and  $h(x)$  are analytic functions of  $x$ . The columns of  $g(x)$  are denoted  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  and we assume that  $\text{rank } g(x) = m$ . Furthermore, we denote by  $\mathcal{S}$  the distribution spanned by the vector fields  $g_1, \dots, g_m$ .  $TM$  denotes the tangent bundle of  $M$ .

Let us briefly recall the concepts of structure at infinity [2], [22] and essential structure [11]. Given  $k, 1 \leq k \leq n$ ,

$$\dim(\text{span}_x \{dx, dy^{(1)}, \dots, dy^{(k+1)}\}) \\ \text{span}_x \{dx, dy^{(1)}, \dots, dy^{(k+1)}\}$$

is the number of zero at infinity of order less than or equal to  $k$ . A right-invertible system has exactly  $p$  zeros at infinity; then let  $n_1^* \geq n_2^* \geq \dots \geq n_p^*$  denote the list of the orders of the zeros at infinity of system  $\Sigma$ . Another list of invariants of the system is the list of essential orders  $\{n_{1e}, \dots, n_{pe}\}$ . Once again, right-invertibility yields the existence of  $p$  finite essential orders. The essential order  $n_{je}$  is associated to the output component  $y_j$ ,

$$n_{je} = \min \{k \geq 1 \mid dy_j^{(k)} \in \text{span}_x \{dx, dy_1^{(1)}, \dots, dy_{j-1}^{(k)}, \dots, dy_j^{(k-1)}\}\}$$

These two lists of invariant integers can be derived from the structure algorithm.

A. Structure Algorithm

Step 1: Calculate

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x, u) \\ y_2(x, \dot{y}_1) \end{pmatrix}$$

where  $\{dx, d\dot{y}_1\}$  is a basis of  $\mathcal{E}_1 = \text{span}_x \{dx, dy\}$ , where the components of  $y$  have been permuted, if necessary.

Step  $k$  ( $k \geq 2$ ): From step  $k-1$ , calculate  $\tilde{y}_k^* = y_k(x, \{\tilde{y}_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k-1\}, u)$  which, after possibly

a permutation of components, can be decomposed into

$$\tilde{y}_k^* = \tilde{y}_k^{(1)}(x, \{\tilde{y}_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k\}, u) \\ \tilde{y}_k^{(2)} = \tilde{y}_k^{(2)}(x, \{\tilde{y}_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k\}) \quad (3)$$

where  $\{dx, d\tilde{y}_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k\}$  is a basis of  $\mathcal{E}_k = \text{span}_x \{dx, dy_1, \dots, dy_j^{(k)}\}$ .

From [14, lemma 2.5] one has (see also [26]) the following

Lemma 1: Assume  $\Sigma$  is right-invertible:

- i)  $n_{j\ell}$  is the highest order time-derivative of the output component  $y_j$  appearing in (3) for  $1 \leq k \leq n$ .
- ii) Let  $\gamma_j$  be the lowest order time-derivative of  $y_j$  appearing in (3) for  $1 \leq k \leq n$ . Then, the list  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  equals the list  $\{n_1, \dots, n_p\}$ .

III. PARTIAL LINEARIZATION

Throughout the note,  $\phi$  denotes a state dependent analytic function and  $\phi^{(k)}$  its  $k$ th order derivative along trajectories of (1); they are computed in the usual way and one gets, somewhat abusing notation:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(1)}(x, u) = (\partial\phi/\partial x)\{f(x) + g(x)u\} \\ \phi^{(k+1)} = \phi^{(k+1)}(x, u, \dots, u^{(k)}) \\ = (\partial\phi^{(k)}/\partial x)\{f(x) + g(x)u\} \\ + \sum_{j=0}^{k-1} (\partial\phi^{(k)}/\partial u^{(j)})u^{(j+1)} \quad \text{for } k \geq 1.$$

Throughout the remainder of this section, we consider the system without outputs described by (1). Define the chain of distributions  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \dots \subset \mathcal{S}_k$ ,

$$\mathcal{S}_1 = 0 \\ \mathcal{S}_2 = \bar{\mathcal{S}}$$

$$\mathcal{S}_k = \bar{\mathcal{S}} + d\bar{\mathcal{S}}_k + \dots + dd_k^{(k-2)}\bar{\mathcal{S}} \quad \text{for } k \geq 2$$

where  $\bar{\mathcal{S}}$  denotes the involutive closure of a distribution  $\mathcal{A}$ .

The linearizable subsystems of (1), as considered in [20], can be constructed from the distributions  $\mathcal{S}_k$ , and in this sense the construction of the distributions  $\mathcal{S}_k$ , as well as the proof of the following theorem, can be derived from [20]. In the linear reference, Marino determines controllable strings of integrators by means of certain sequences of distributions. The following theorem will allow us to also determine strings of integrators which are not necessarily controllable, but use only a single sequence of distributions. The requirement of controllability will be added later in Section IV.

Theorem 2: Let  $\phi$  be an analytic function of  $x$ . Given  $k > 1$ , one has

$$(\partial\phi^{(k)}/\partial u^{(j)}) = 0 \quad \text{for } 0 \leq j \leq \ell-1 \text{ and } 1 \leq \ell \leq k-1 \quad (4)$$

if and only if  $d\phi \perp \mathcal{S}_k$ .

We give a straightforward and independent proof of Theorem 2 since it will be instrumental in the rest of this section.

Proof of Theorem 2: The proof is done by induction. For  $k=2$ , one has

$$(\partial\phi^{(2)}/\partial u) = 0 = d\phi \perp \bar{\mathcal{S}}$$

Assume  $k \geq 3$ .

(Induction Assumption: For  $k-1$ )

$$\{(\partial\phi^{(k-1)}/\partial u^{(j)}) = 0 \quad \text{for } 0 \leq j \leq \ell-1 \text{ and } 1 \leq \ell \leq k-2\} \\ = d\phi \perp \mathcal{S}_{k-1} \quad (5)$$

Show that, if (5) holds and if

$$(\partial\phi^{(k-1)}/\partial u^{(j)}) = 0 \quad \text{for } 0 \leq j \leq k-2 \quad (6)$$

then

$$d\psi \perp \mathcal{F}_k \quad (7)$$

Compute, using (5),  $\psi^{i+1} = L_f^{i+1}\psi + \sum_{j=1}^m (L_{g_j} L_f^{i+2}\psi)u_j$ , and from standard calculus (Leibnitz rule)

$$\begin{aligned} L_{ad}^{k-2} \mathcal{L}_k \psi &= (-1)^{k-2} L_x L_f^{k-2} \psi \\ &+ \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1+i_2=k-2}} (-1)^{i_1} \binom{k-2}{i_1} L_x L_x L_f^{i_1} \psi \\ &= (-1)^{k-2} L_x L_f^{k-2} \psi \end{aligned}$$

since  $i_2 < k-2$ , and from (5) the terms of the form  $L_x^{i_2-2} L_x L_f^{i_1} \psi$  are zero for  $i_2 < k-2$ . Now (6) yields  $L_{ad}^{k-2} \mathcal{L}_k \psi = 0$ , thus  $d\psi \perp (ad_f^{k-2} \mathcal{F})$  for any  $i = 1, \dots, m$  where  $\mathcal{F}_i$  denotes the distribution spanned by the vector field  $g_i$ . Finally,

$$\begin{aligned} d\psi \perp \sum_{i=1}^m \mathcal{F}_i + \dots + (ad_f^{k-2} \mathcal{F}) \\ d\psi \perp (\mathcal{F} + ad_f \mathcal{F} + \dots + ad_f^{k-2} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

and since the covector  $d\psi$  is an exact differential, one gets  $d\psi \perp \mathcal{F} + ad_f \mathcal{F} + \dots + ad_f^{k-2} \mathcal{F}$ . The converse (7) = (6) is obvious and Theorem 2 is proved.  $\square$

We now turn to a result needed in the solution of the degenerate decoupling problem that will be studied in Section IV. Theorem 2 characterizes, for a given  $k$ , all the analytic functions  $\psi(x)$  such that the derivatives  $\psi^{i'}$  are only  $x$  dependent functions for  $1 \leq i' \leq k-1$ . In other words, if  $\psi(x)$  is viewed as an output function, its relative degree is then greater or equal to  $k$ . Lemma 3 and Theorem 4 that follow will provide a result which is close to that of Theorem 2. They characterize all the analytic functions  $\psi(x)$  such that, for a given  $k$ , the derivatives  $\psi^{i'}$  are functions of  $x, u_1, \dots, u_1^{i'-1}$  only

$$\psi^{i'} = \psi^{i'}(x, u_1, \dots, u_1^{i'-1}) \quad \text{for } 1 \leq i' \leq k-1$$

We can achieve this characterization by an immediate application of Theorem 2 by considering an extended system  $\Sigma_e$  which consists of system  $\Sigma$  with the addition of  $r$  integrators in front of  $u_1$ . Then  $\Sigma_e$  is defined on  $M_e = M \times \mathbb{R}^r$  and is described by

$$\dot{x}_e = f_e(x_e) + g_e(x_e) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$y = h(x)$$

$$\begin{aligned} f_e(x_e) &= \begin{pmatrix} f(x) + u_1 g_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_1^{r-2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ g_e(x_e) &= \begin{pmatrix} 0 & g_1(x) & \dots & g_m(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

where  $x_e = (x, u_1, \dots, u_1^{r-1})$ ,  $u_1 = u_1^r$

Denote by  $\mathcal{F}_e$  the distribution spanned by  $g_e$ , and define the

chain of distributions

$$\mathcal{F}_{1e} = 0$$

$$\mathcal{F}_{2e} = \overline{\mathcal{F}_e}$$

$$\mathcal{F}_{ke} = \overline{\mathcal{F}_e + ad_{f_e} \mathcal{F}_e + \dots + ad_{f_e}^{k-2} \mathcal{F}_e} \quad \text{for } k \geq 2.$$

Let  $TM_e^*$  and  $TM^*$  be the cotangent bundles of  $M_e$  and  $M$ , respectively. By means of the canonical injection,  $TM^*$  can be considered as a subdistribution of  $TM_e^*$ . One establishes the following.

**Lemma 3:** Let  $\psi$  be an analytic function of  $x$ . Given  $1 < k \leq r$

$$(\partial x^{i'} \partial u_1^{j'}) = 0$$

$$\text{for } 1 \leq i' \leq k-1, 0 \leq j' \leq i'-1 \text{ and } 2 \leq i' \leq m$$

if and only if  $d\psi \in TM^*$  and  $d\psi \perp \mathcal{F}_{ke}$

**Proof:** Apply Theorem 1 to  $\Sigma_e$ , so  $d\psi \perp \mathcal{F}_{ke}$  is equivalent to  $\psi^{i'} = \psi^{i'}(x_e)$  for  $1 \leq i' \leq k-1$ . Then,  $d\psi \in TM^*$  implies  $\psi^{i'} = \psi^{i'}(x, u_1, \dots, u_1^{i'-1})$  for  $i' \geq 1$  and the result follows.  $\square$

The condition given by Lemma 3 is easy to check, but involves the use of augmented vector fields through the definition of  $\mathcal{F}_{ke}$ . Theorem 4 will display an equivalent characterization that involves only the vector fields of the given system  $\Sigma$ .

Denote  $\mathcal{F}_0$  the distribution spanned by the vector fields  $g_1, \dots, g_m$ . Define

$$ad_{f_e} \mathcal{F}_0 = [f, \mathcal{F}_0] + [g_1, \mathcal{F}_0]$$

and for  $k \geq 1$ ,  $ad_{f_e}^{k+1} \mathcal{F}_0 = [f, ad_{f_e}^k \mathcal{F}_0] + [g_1, ad_{f_e}^k \mathcal{F}_0]$ . Consider the sequence of distributions

$$\Gamma_1 = 0$$

$$\Gamma_2 = \overline{\mathcal{F}_0}$$

$$\Gamma_k = \overline{\mathcal{F}_0 + ad_{f_e} \mathcal{F}_0 + \dots + ad_{f_e}^{k-2} \mathcal{F}_0} \quad \text{for } k \geq 2. \quad (9)$$

One establishes the following.

**Theorem 4:** Let  $\psi$  be an analytic function of  $x$ . Given  $k > 1$ ,

$$(\partial x^{i'} \partial u_1^{j'}) = 0$$

$$\text{for } 1 \leq i' \leq k-1, 0 \leq j' \leq i'-1 \text{ and } 2 \leq i' \leq m \quad (10)$$

if and only if

$$d\psi \perp \Gamma_k \quad (11)$$

**Proof:** The proof is done by induction on  $k$ . The statement is obvious for  $k=2$ . To verify the proof for a general  $k$ , it is useful to detail the case  $k=3$ .

Compute, using the fact that  $d\psi \perp \overline{\mathcal{F}_0}$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}(x, u_1) = L_f \psi(x) + L_{g_1} \psi(x) u_1$$

and

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= L_f^2 \psi(x) + L_{g_1} L_f \psi(x) u_1 + L_f L_{g_1} \psi(x) u_1 \\ &+ L_{g_1}^2 \psi(x) u_1^2 + L_{g_1} \dot{\psi}(x) u_1 \\ &+ \sum_{j=2}^m [L_x L_f \psi(x) + L_x L_{g_j} \psi(x) u_j] u_j \end{aligned}$$

The condition (10) yields  $L_{g_1} L_f \psi = 0$  and  $L_{g_j} L_{g_1} \psi = 0$  for any  $j$ ,  $2 \leq j \leq m$ . Using the standard Leibnitz rule, as in the proof of Theorem 2, one gets  $d\psi \perp [f, \mathcal{F}_0]$  and  $d\psi \perp [g_1, \mathcal{F}_0]$  for any  $j$ ,  $2 \leq j \leq m$ . All conditions taken together yield  $d\psi \perp \Gamma_3$ .

For the general step  $k$ , there is no additional technical difficulty. Assume that the statement is true for  $k-1$  and let us prove it for  $k+1$ .

**Notation:** Let  $\psi^{i'} = \psi^{i'}(x, u_1, \dots, u_1^{i'-1})$  for  $1 \leq i' \leq k$

From the induction assumption

$$d\psi \in \mathcal{G}_0 + \alpha d_{j_1} \mathcal{G}_0 + \dots + \alpha d_{j_{k-1}}^{j_1 \dots j_{k-1}} \mathcal{G}_0$$

Then  $\psi^{(k)}$  is a polynomial function of  $u_2, \dots, u_m$  of degree 1. Given  $j, 2 \leq j \leq m$ , the coefficient of  $u_j$  in this polynomial is again a polynomial function of  $u_2, \dots, u_{j-1}$  whose coefficients read [19]  $L_{x_1} L_{j_1} L_{j_2} \dots L_{j_{k-1}}^{j_1 \dots j_{k-1}} \psi(x)$  for some suitable integers  $j_1, \dots, j_{k-1}$ . Using Leibnitz' rule, the latter can be written as a combination of terms, all of which read

$$L_{j_1}^{j_1} L_{j_2}^{j_2} \dots L_{j_{k-1}}^{j_{k-1}} L_x \psi(x) \quad (12)$$

where  $X$  is a suitable vector field in  $\mathcal{G}_0 + \dots + \alpha d_{j_1}^{j_1} \mathcal{G}_0$ . More precisely, except for the terms  $L_{x_1} L_{j_1} \dots L_{j_{k-1}}^{j_1 \dots j_{k-1}} \psi, 0 \leq l \leq k-1$ , all the terms (12) are zero from the induction assumption.

At this point, applied for  $k+1$ , (10) yields  $L_{x_1} L_{j_1} \dots L_{j_k}^{j_1 \dots j_k} \psi = 0$ , for  $0 \leq l \leq k-1$  which reduces to  $d\psi \perp \alpha d_{j_1}^{j_1} \mathcal{G}_0$  for  $j = 2, \dots, m$ . Finally, all conditions taken together yield  $d\psi \perp \Gamma_{k+1}$ .

The sufficiency of (11) is obvious.  $\square$

For a given  $h, 1 \leq h \leq n$ , let  $x^0 \in M$  be such that  $\Gamma_h$  has constant dimension ( $n-h$ ) in a neighborhood of  $x^0$ , thus there locally exists a family of analytic functions of  $x$ , say  $\psi_1(x), \dots, \psi_h(x)$ , such that  $(d\psi_1, \dots, d\psi_h)$  is a basis of  $\Gamma_h^\perp$ . Let  $N$  be an open simply connected submanifold of  $M$  such that every  $x \in N$  is a regular point for  $\Gamma_h$ , for any  $h, 1 \leq h \leq n$ . At this point, we may view  $\psi_i^{(l)}, 1 \leq i \leq h$ , as an analytic function  $\psi_i^{(l)}: M \times T^{n-1}U \rightarrow \mathbb{R}$  (where  $T^{n-1}U$  is the  $(n-1)$ st order tangent bundle of  $U$  [12]), or as a rational function of the components of  $u, \dots, u^{(n-1)}$  with coefficients analytic in  $x$ . Following [2], let  $\mathcal{F}_h$  be the field of rational functions of the components of  $u, \dots, u^{(n-1)}$  with meromorphic coefficients in  $x$  and set  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_h$ . Let  $\mathcal{E}$  denote the formal vector space over  $\mathcal{F}$  spanned by  $\{dx, du, \dots, du^{(n-1)}\}$  where  $dx$  stands for  $(dx_1, \dots, dx_n)$ ,  $du$  stands for  $(du_1, \dots, du_m)$ , etc.,  $\dots, du^{(l)}$  is a vector of  $\mathcal{E}$ , for  $1 \leq l \leq n$  and  $0 \leq j \leq n$ . Let  $\Omega_h^j = \text{span}_{\mathcal{F}} \{d\psi_i^{(l)}, 1 \leq i \leq h\}$

$$\text{for } 0 \leq j \leq n \text{ and } 1 \leq h \leq n \quad (13)$$

which is a subspace of  $\mathcal{E}$

IV. APPLICATION TO STATIC STATE FEEDBACK DECOUPLING (P + 1) INPUTS AND P OUTPUTS

In this section, we consider the input-output system  $\Sigma$  where  $m = p + 1$ . To the best of our knowledge, no result is available in the literature on general (nonregular) feedback decoupling for nonlinear systems. In the linear setting, the problem is not fully solved either. Our result even contains a new contribution towards the solution of the linear version of Morgan's problem.

The goal is to give a straightforward application of the techniques given in Section III. The decoupling (or noninteracting control) problem can be stated as follows.

A. Problem Statement: (Morgan's Problem)

Given system  $\Sigma$ , find if possible, an open subset  $\mathcal{T}$  of  $M$  and a feedback  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  such that

$$dy_i^{n_i} \in \text{span}_{\mathcal{F}} \{dx\} \quad (14)$$

and

$$dy_i^{k+1} \in \text{span}_{\mathcal{F}} \{dx, du_1, \dots, du_{i-1}^{(k)}\}$$

$$\text{for } 1 \leq i \leq p, 0 \leq k \leq n_i \quad (15)$$

for any  $x \in \mathcal{T}$  where  $v = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1})$ ,  $v_{p+1}$  is possibly empty, and  $\mathcal{F}$  is the field of rational functions of  $u, \dots, u^{(n-1)}$  with coefficients which are meromorphic functions of  $x$ .

The condition (15) represents the noninteraction condition and (14) yields the controllability of the output  $y_i$  (throughout the input  $v_i$ ). A necessary condition for a system to be decouplable via any kind of feedback is its right-invertibility. So, we shall assume throughout this section that system  $\Sigma$  is right-invertible.

To solve the decoupling problem, extensive use will be made of the structure at infinity and the essential structure. These two lists of invariant integers play a crucial role in the decoupling problem since the following statements hold [11].

- The system  $\Sigma$  can be decoupled by regular static state feedback if and only if

$$\{n'_i, i = 1, \dots, p\} = \{n_{i\infty}, i = 1, \dots, p\} \quad (16)$$

or, equivalently, if and only if  $\gamma_i = n_{i\infty}$  for  $1 \leq i \leq p$ .

- Moreover, any feedback transformation that decouples system  $\Sigma$  is such that the (new) structure at infinity of the decoupled system, say  $\{\bar{n}_i, i = 1, \dots, p\}$  satisfies

$$\bar{n}_{k(i)} \geq n_{i\infty} \quad \text{for } i = 1, \dots, p \quad (17)$$

where  $k(1), \dots, k(p)$  is a suitable renumbering of the indexes. In this sense,  $\{n_{i\infty}, i = 1, \dots, p\}$  denotes the "smallest" structure at infinity which has to be matched for decoupling  $\Sigma$ . The goal of the solution that will be provided here is to increase the original structure at infinity  $\{n'_i, i = 1, \dots, p\}$  to match condition (16).

$$\text{Let } \mathcal{E}' = \text{span}_{\mathcal{F}} \{dx, dy_1, \dots, dy_p^{n_i-1}\}.$$

Lemma 5: A right-invertible system  $\Sigma$  can be decoupled via regular static state feedback if and only if

$$v_j = 1, \dots, p \quad \mathcal{E}' \subset \text{span}\{dx\} \quad (18)$$

Proof: Follows from the definition of  $n_{i\infty}$ .

Denote  $\alpha_j$  the relative degree of the output component  $y_j$ , then one has the following.

Theorem 6: There exists a static state feedback which solves the decoupling problem of  $\Sigma$  if and only if

$$i) \quad \exists i \in \{1, \dots, p\} \forall j = 1, \dots, p, \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}' \quad (19)$$

and

$$ii) \quad \Omega_i^{\delta} \subset \text{span}_{\mathcal{F}} \{dx, dy_1, \dots, dy_p^{n_i}\} \quad (20)$$

where  $\delta = \dim(\mathcal{E}'/\text{span}\{dx\}) + 1$  and  $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_p \supset \dots$  is the chain of subspaces (13) associated to  $v_i = y_i^{n_i}$ .

Remark: Concerning conditions i) and ii) of Theorem 6, some explanations are in order. Condition i) is related to the limitation in the number of inputs. Condition ii) represents the existence of a string of integrators needed for decoupling by static state feedback: this string is controllable in the sense  $\Omega_i^{\delta} \subset \text{span}_{\mathcal{F}} \{dx\}$  and unobservable in the sense  $\Omega_i^{\delta} \subset \text{span}_{\mathcal{F}} \{dy_1, dy_2, \dots, dy_p^{n_i}\}$ .

Proof of Theorem 6: Let  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  be a regular static state feedback such that the first component  $v_1$  of  $v$  satisfies  $v_1 = y_1^{n_1}$ .

Sufficiency: The condition (19) yields

$$\forall j = 1, \dots, p, \forall k \leq n_j - 1, dy_j^{k+1} = \sum_{r=1}^n c_r dx_r + \sum_{r=1}^{n_j-1} c_{r+1} dy_r^{k+1}$$

where  $c_r$  and  $c_{r+1}$  are suitable meromorphic functions. Abusing the notation, it is possible to write, at least locally,

$$y_j^{n_j-k} = y_j^{n_j-k-1} (x, y_1^{n_1}, 1 \leq s \leq n_{j-1})$$

Thus

$$y_j^{k+1} = y_j^{k+1}(x, y_1^{n_1}, u, 1 \leq i \leq n_{j-1}) \quad \text{for any } j = 1, \dots, p \quad (21)$$

Consider the equation (20) for  $j = 1, \dots, p$ ,  $j \neq i$  together with

$$y_i^{n_i, j} = y_i^{n_i, j}(x, u). \quad (22)$$

A result analogous to that of Lemma 1 holds for (21) and (22); one deduces  $\delta = n_{i^*} - n_i$ , and

$$y_i^{n_i, j} = v_1^{(i)}. \quad (23)$$

From (21) there exists  $\psi(x)$  such that  $d\psi \perp \Gamma_2$  and

$$d\psi^{(i)} \in \text{span}_p \{dx, dy, \dots, dy^{(n_i)}\}. \quad (24)$$

From the definition of the essential orders, one has

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} \begin{bmatrix} y_1^{n_1, i} \\ \vdots \\ y_{i-1}^{n_{i-1}, i} \\ y_{i+1}^{n_{i+1}, i} \\ \vdots \\ y_p^{n_p, i} \end{bmatrix} = p - 1. \quad (25)$$

From (24) and (25)

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} \begin{bmatrix} y_1^{n_1, i} \\ \vdots \\ y_{i-1}^{n_{i-1}, i} \\ \psi^{(i)} \\ y_{i+1}^{n_{i+1}, i} \\ \vdots \\ y_p^{n_p, i} \end{bmatrix} = p. \quad (26)$$

Denote  $\bar{y}_i^{n_i, i}$  the function obtained from  $y_i^{n_i, i}(x, u_1, \dots, u_i^{n_i, i-1}, u_2, \dots, u_{p-1})$  when  $\psi^{(i)}$  has been substituted for  $u_i^{(i)}$  for  $j \neq i$  and  $0 \leq k \leq n_i - 1$ .

Equations (23), (24), and (26) yield

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{n_1, i} \\ \vdots \\ \bar{y}_i^{n_i, i} \\ \vdots \\ \bar{y}_p^{n_p, i} \end{bmatrix} = p. \quad (27)$$

This last equation, (27), is nothing but the full row rank property of the new decoupling matrix. The resulting system with  $p$  inputs can thus be decoupled via regular static state feedback.

Necessity: i) By contradiction. Let  $i \in \{1, \dots, p\}$  such that  $\dim \mathcal{L}^i \geq \dim \mathcal{L}^j$  for any  $j = 1, \dots, p$ . Consider the regular static state feedback  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  so that  $y_i^{n_i, j} = v_j$ . Assume that (19) is not true, then there exists  $j \neq i$  such that  $\mathcal{L}^j \not\subseteq \mathcal{L}^i$ . Let  $s = \min \{k \geq 1 \mid dy^{(k)} \notin \mathcal{L}^i\}$ . Hence

$$\frac{\partial y_j^{n_j}}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} \neq 0. \quad (28)$$

Let  $v = \alpha(x) + \beta(x)w$  be a static state feedback which decouples  $\Sigma$ . Compute

$$0 = \frac{\partial y_j^{n_j}}{\partial w} = \frac{\partial y_j^{n_j}}{\partial (u_1, \dots, u_i^{n_i, i-1}, u_2, \dots, u_{p-1})} \frac{\partial (u_1, \dots, u_i^{n_i, i-1}, u_2, \dots, u_{p-1})}{\partial w}$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial y_j^{n_j}}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (0) \\ b(x) \end{bmatrix}$$

where necessarily  $b(x) = \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}$  and  $b(x)$  is a square and invertible matrix. Hence

$$\frac{\partial y_j^{n_j}}{\partial (u_2, \dots, u_{p-1})} \cdot b(x) = 0$$

which contradicts (28).

ii) Consider the static state feedback  $v = \alpha(x) + \beta(x)w$  which decouples  $\Sigma$ . Then necessarily the structure at infinity  $\{\bar{n}_j, 1 \leq j \leq p\}$  of the closed-loop system  $\bar{\Sigma}$  satisfies  $\bar{n}_j \geq n_{j^*}$  [11], then  $s_j = n_j(x)$ ,  $\bar{v}_1 = \bar{v}_1(x), \dots, v_1^{(n_1, i-1)} = v_1^{(n_1, i-1)}(x, w)$  and  $\bar{n}_j - n_j \geq \delta$ . Thus,  $d\bar{v}_1^{(n_1, i-1)} \in \Gamma_2$  and since  $\bar{\Sigma}$  is decoupled  $(d\bar{v}_1^{(n_1, i-1)}) \notin \text{span}_p \{dx, dy, \dots, dy^{(n_i)}\}$  which proves (21).

Remark: The definition of  $v_1$  is not unique since different indexes  $i$  may satisfy (19); however the resulting conditions of Theorem 6 are equivalent if different inputs  $v_i$  are considered.

Example 2 [16]:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Calculate the structure at infinity  $(n_1^*, n_2^*) = (2, 1)$  and the essential structure  $(n_{1^*}, n_{2^*}) = (2, 2)$ . Set  $u_1 = x_3$  and the new structure at infinity becomes  $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = (2, 2)$  and the essential structure is unchanged. The system with inputs  $u_2$  and  $u_3$  is thus decouplable. This example is fully representative of the nonlinear aspects of the problem since the largest regular local controllability distribution  $\mathcal{D}^*$  contained in the  $\ker dy$  distribution is zero in a neighborhood of a regular point [15] and in contrast to the linear case [5],  $\mathcal{D}^*$  does not help to solve locally the decoupling problem. There exists a nonzero degenerate controllability distribution [14] contained in  $\ker dy$ , namely  $\text{span}\{g_{21}, x_1\}$ . The concept of degenerate controllability distribution is difficult to handle for general nonlinear systems as is shown next.

There does not always exist a unique maximal element in the class of degenerate controllability distributions contained in  $\ker dy$  as shown by Example 3.

Example 3:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

The reader may check that  $\mathcal{D}_1^* = \text{span}\{ad_{j=1}^k, k \geq 0\} = \text{span}\{\partial/\partial x_2, -\partial/\partial x_3, \partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_3\}$  and  $\mathcal{D}_2^* = \text{span}\{ad_{j=2}^k, k \geq 0\} = \text{span}\{\partial/\partial x_1, -\partial/\partial x_3, \partial/\partial x_2 + \partial/\partial x_3\}$  are two maximal degenerate controllability distributions contained in  $\ker dy$ .

Example 4:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

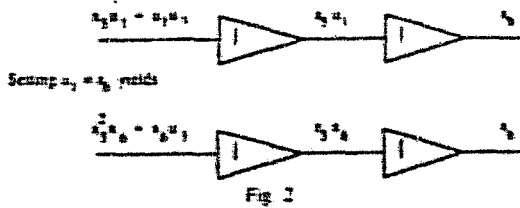


Fig. 2

One computes  $\{n_1^1, n_2^1\} = \{3, 1\}$ ,  $\{n_{12}^1, n_{22}^1\} = \{3, 3\}$ ,  $\mathcal{L}^1 = \text{span}\{dx, d(x_2 + u_1)\}$ ,  $\mathcal{L}^2 = \text{span}\{dx, du_1\}$ . Thus,  $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^2$  and  $\delta = \dim(\mathcal{L}^2 / \text{span}\{dx\}) + 1 = 2$ . The distribution  $\mathcal{F}^*$  has dimension 7 but the subsystem displayed by the  $\mathcal{F}^*$  decomposition is not fully linearizable by regular static state feedback, so  $\mathcal{F}^*$  is of no help for carrying the infinite structure to the essential structure and thus for decoupling.

A solution to the nonregular static state feedback decoupling problem for Example 4 can be constructed applying the method given above. Compute  $\beta_2 = u_1$ , thus  $u_1$  stands for  $v_1$ .

$$\Gamma_2 = \overline{\beta_0}$$

A basis for  $\Gamma_2^+$  is  $\{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}$ . Calculate

$$\Omega_2^{\mathcal{L}^2} = \text{span} \{ dx_1, dx_2, dx_3, d(x_4 u_1 + u_1 u_1) \}$$

one has

$$d(x_4 u_1 + u_1 u_1) \in \text{span} \{ dx_1, dy^{(1)}, \dots, dy^{(6)} \}$$

Set  $u_1 = x_4$  which yields the new decoupling matrix

$$B^*(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_4 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}$$

which has full row rank, and the system can afterwards be decoupled using a regular static state feedback.

The method consists in determining a string of two integrators which can be represented by Fig. 2.

V CONCLUSION

In this note, noninteracting control of nonlinear systems was achieved using general static state feedback. It has been performed within a linear algebraic approach initiated in [2], [11], and [14]. It appears as a geometric issue to define enlarged linearized subsystems obtained via nonregular feedback and which are instrumental in the solution of Morgan's problem. The necessary and sufficient condition given in Theorem 6 is constructive.

A main point which concludes can be summarized as follows. There may exist a string of integrators of length  $\delta$  involving  $x, u_1$ , and time-derivatives of  $u_1$ , but the latter may now split into the sum of elementary strings, one of which is of length  $\delta$  and involves only the state  $x$ : this point of view is also helpful for general linear systems. It appears that the approach of the note is consistent with the notion of generalized state space transformations and the differential algebraic approach developed by Fliess [9]. Such a generalizing setting helps to remove certain obstruction to the decoupling problem.

ACKNOWLEDGMENTS

A. Herrera and J. F. Lafay are heartily acknowledged for their helpful discussions.

REFERENCES

[1] S. El Aouni and M. Fliess, "Formules d'inversion," in Proc. Col-

loque Internationale sur l'Analyse des Systemes Dynamiques Controlés Lyon, France July 3-6 1990

[2] M. D. Di Benedetto, J. W. Grizzle, and C. H. Moog, "Rank invariants of nonlinear systems," *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 27, pp. 658-672, 1989.

[3] J. Descusse, "On the structure algorithm, degenerate controlled invariant distributions and the block decoupling problem," in Proc. NOLCOS 89, IFAC Conf., Capri, 1989.

[4] J. Descusse, J. F. Lafay, and M. Malabre, "A necessary and sufficient condition for decoupling by state feedback linear systems with 2 outputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, pp. 914-918, 1985.

[5] ———, "Solution to Morgan's problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 732-739, 1988.

[6] J. Descusse and C. H. Moog, "Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 42, pp. 1307-1398, 1985.

[7] M. Fliess, "A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 8, pp. 147-151, 1986.

[8] ———, "Automatique et corps différentiel," *Forum Mathematicum*, vol. 1, pp. 227-238, 1989.

[9] ———, "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 994-1001, 1990.

[10] E. Freund, "The structure of decoupled nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 21, pp. 443-450, 1975.

[11] A. Glumineau and C. H. Moog, "The essential orders and nonlinear decoupling," *Int. J. Contr.*, vol. 50, pp. 1825-1834, 1989.

[12] M. Golubitsky and V. Guillemin, "Stable mappings and their singularities," (Graduate Texts in Mathematics, No. 14), Berlin: Springer Verlag, 1973.

[13] I. J. Ha and E. G. Gilbert, "A complete characterization of decoupling control laws for a general class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, pp. 823-830, 1986.

[14] H. J. C. Nijmeijer, H. Nijmeijer, and L. L. M. Van Der Wegen, "Dynamic disturbance decoupling for nonlinear systems," Univ. Twente, Memo 535 Dec 1989.

[15] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989.

[16] A. Isidori, "Control of nonlinear systems via dynamic state-feedback," in *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory* (Proc. Conf. Paris, 1985), M. Fliess and M. Hazewinkel, Eds. Dordrecht: Reidel, 1986.

[17] A. Isidori and J. W. Grizzle, "Fixed modes and nonlinear noninteracting control with stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 907-914, 1988.

[18] A. Isidori, A. J. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco, "Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-36, pp. 331-345, 1991.

[19] F. Lamabhi-Lagarigue and P. E. Crouch, "A formula for iterated derivatives along trajectories of nonlinear systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 1-7, 1987.

[20] R. Marino, "On the largest feedback linearizable subsystem," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 6, pp. 343-351, 1986.

[21] C. H. Moog, "Note on the left-invertibility of nonlinear systems," MTNS 87, Phoenix, in *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, C. I. Byrnes, C. F. Martin, and R. E. Sacks, Eds. Amsterdam: The Netherlands: North Holland, 1988, pp. 469-474.

[22] C. H. Moog, "Nonlinear decoupling and structure at infinity," *Math. Contr. Signals Syst.*, vol. 1, pp. 257-268, 1988.

[23] B. S. Morgan, Jr., "The synthesis of linear multivariable systems by state feedback," *Proc. J.A.C.C.*, vol. 64, pp. 468-472, 1964.

[24] H. Nijmeijer, "Controllability distributions for nonlinear control systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 2, pp. 127-129, 1982.

[25] H. Nijmeijer and J. M. Schumacher, "The regular local noninteracting control problem for nonlinear control systems," *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 24, pp. 1242-1245, 1986.

[26] S. N. Singh, "Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, pp. 1237-1239, 1980.

[27] T. J. Tarn and W. Zhan, "Input-output decoupling and linearization via restricted static state feedback," IFAC Congress, Tallin, Aug. 1990.

**Annexe 4. Input-Output Decoupling and Equivalence of Nonlinear Systems under Pure Dynamic State Feedback**

---

Annexe 4 . Input-Output Decoupling and Equivalence of Nonlinear Systems under Pure Dynamic State Feedback M.D. Di Benedetto, A. Glumicic and C.H. Moog, IEEE Trans. Aut. Contr. preprints



## Input-Output Decoupling and Equivalence of Nonlinear Systems under Pure Dynamic State Feedback

M.D. Di Benedetto<sup>1</sup>, A. Glumineau<sup>2</sup> and C.H. Moog<sup>2</sup>

**Abstract:** *In this paper, the nonlinear input-output decoupling and the equivalence problems are investigated via a dynamic compensation law which has no zeros at infinity. In analogy to the case of linear systems, this kind of compensation is referred to as a pure dynamic state feedback. The concept of a nonlinear interactor is introduced and a necessary and sufficient condition for the solvability of the input-output decoupling problem via pure dynamic state feedback is established in terms of the interactor. Moreover, for square invertible systems, decoupling by regular static state feedback is proven to be equivalent to decoupling via regular pure dynamic state feedback. Finally, in the case of invertible input-output linearizable systems, the interactor is shown to characterize nonlinear equivalence.*

**Keywords:** Nonlinear control, dynamic feedback, input-output decoupling, structure algorithm, interactor, dynamic equivalence.

### 1. Introduction

Input-output decoupling and equivalence are important synthesis problems in control theory (a partial list of important contributions is [1, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 27, 29, 30, 31, 35, 36, 37]).

---

<sup>1</sup> Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Informatica e Sistemistica, Via Eudossiana, 18, 00184, Roma (Italy). Work performed while a Visiting Professor at the Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire d'Automatique, with the support of the C.N.R.S.

<sup>2</sup> Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité de Recherche Associée au C.N.R.S., 1, rue de la Noë, 44072 Nantes Cédex 03, France.

For linear systems, there is a well-established theory of decoupling via regular static state feedback (e.g. [9]) and dynamic compensation (e.g. [29]). For the case of nonlinear systems, the input-output decoupling problem (also called noninteracting control) has been the object of many contributions (e.g. [8, 10, 11, 14, 23, 24, 30, 31]). Input-output decoupling via regular static state feedback was fully solved in the row by row case in [24], while a solution to block decoupling was proposed in [31]. The additional requirement of internal stability was taken into account in [14] and [23]. The first results on nonlinear decoupling by means of dynamic compensation appeared in [8], [10], [30]. In this framework, the conceptual notion of rank of a nonlinear system, introduced in [10], [11], as well as the related notions of left- and right-invertibility were instrumental. Dynamic input-output decoupling with internal stability was dealt with in [1], [36].

Equivalence - the problem of compensating a first system so that its output exactly coincides with that of a second given system, and viceversa - is completely characterized, for linear systems, by the so-called interactor [37]. For nonlinear systems, conditions under which equivalence can be established are not known.

In this paper, we present necessary and sufficient conditions for the solvability of these two problems in terms of structural invariants.

We show that, if a square nonlinear system cannot be decoupled by regular static state feedback, nothing more can be obtained by using a dynamic compensator, called pure dynamic state feedback, which has no zeros at infinity. This result holds for linear systems [16]. One could then ask the question whether this still holds in the case of nonsquare systems. For linear systems, this problem was studied in [6], where a necessary and sufficient condition was given in terms of the column rank at infinity of the interactor [37]. To derive a similar result for nonlinear systems, we introduce the concept of a nonlinear interactor that reduces to the classical interactor of [37] when applied to linear systems. We show that the nonlinear input-output decoupling problem via pure dynamic state feedback is solvable if, and only if, the difference between the number of inputs and outputs is greater than an integer which is an invariant of the system and can be computed on the basis of the interactor. These results may open the path towards the solution of the input-output decoupling problem via nonregular static state feedback.

The interactor completely characterizes the so-called dynamic equivalence of two linear systems, that is the possibility of matching a given transfer matrix using a bicausal compensation. We investigate this relationship in the case of nonlinear systems. Nonlinear dynamic equivalence is precisely formulated. We show that dynamic equivalence is a special case of the exact model

matching problem [2], [3]. It is then proven that the interactor completely characterizes dynamic equivalence of invertible input-output linearizable nonlinear systems.

The paper is organized as follows. In Section 2, a new kind of dynamic compensator is defined, which has no zeros at infinity. In analogy to the linear terminology [16], this type of compensation will be called a *pure dynamic state feedback*. Then, in Section 3, we propose a definition and a simple procedure, based on the structure algorithm [33], [34], for the determination of the interactor of general nonlinear systems; a structural interpretation of the linear interactor is obtained as a byproduct. In Section 4, the input-output decoupling problem by pure dynamic state feedback is considered and solved at a generic point of the state space. A necessary and sufficient condition for the solvability of input-output decoupling by means of a possibly nonregular pure dynamic state feedback is given. This condition is expressed in terms of the so-called *column rank at infinity* of the interactor and generalizes the linear result of [6]. Moreover, it is shown that the decoupling problem is solvable via regular pure dynamic state feedback if, and only if, it is solvable via regular static state feedback. In Section 5, we define nonlinear dynamic equivalence and we show that two nonlinear invertible input-output linearizable systems are equivalent if, and only if, their interactors coincide. Concluding remarks are offered in Section 6.

## 2. A classification of nonlinear dynamic compensators

Throughout this paper, we will deal with systems described by differential equations of the form  $\Sigma$  which are nonlinear in the state and affine in the input,

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

where the state  $x$  belongs to  $X$ , an open subset of  $\mathbb{R}^n$ , the input  $u$  belongs to  $\mathbb{R}^m$  and the output  $y$  belongs to  $\mathbb{R}^p$  ( $p \leq m$ ). The entries of  $f(x)$ ,  $g(x)$  and  $h(x)$  are meromorphic functions of  $x$ . The columns of  $g(x)$  and the rows of  $h(x)$  are denoted, respectively, by  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , and  $h_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, p$ . The output of  $\Sigma$ , corresponding to input  $u$  and initial state  $x$  will be denoted by  $y^\Sigma(t, x, u)$ .

A state space description of this kind may not be adequate and one may consider more general descriptions as proposed in [12]. We restrict ourselves to systems of the form (2.1) which are standard in nonlinear control [22] and are found in many important applications like in control of robots, satellites, etc. The definitions proposed in the chosen framework can be extended to general non-affine nonlinear systems.

Following [4], let  $\mathcal{K}_j$  be the field of rational functions of the components of  $u, \dots, u^{(j-1)}$  with meromorphic coefficients in  $x$  and set  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n$ . Let  $\mathcal{E}$  denote the formal vector space over  $\mathcal{K}$  spanned by  $\{dx, du, \dots, du^{(n-1)}\}$  where  $dx$  stands for  $(dx_1, \dots, dx_n)$ ,  $du$  stands for  $(du_1, \dots, du_m)$ , etc. If  $M$  is a matrix whose elements belong to  $\mathcal{K}$ , the rank of  $M$  over  $\mathcal{K}$  will be denoted by  $\text{rank}_{\mathcal{K}} M$ , or simply by  $\text{rank } M$ , if there is no need to highlight the field over which the rank is computed. In what follows, it is assumed that  $\text{rank}_{\mathcal{K}} g(x) = m$ . Define the nested sequence of subspaces of  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$  by  $\mathcal{E}_0 = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx\}$ ,  $\mathcal{E}_k = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy, \dots, dy^{(k)}\}$  for  $k = 1, \dots, n$  and the associated list of dimensions  $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n$  by

$$\sigma_k = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_k - \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_{k-1}$$

The structure at infinity of  $\Sigma$ , denoted  $S_{\infty}(\Sigma)$ , is given by the list  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ , where  $\sigma_k$  is the number of zeros at infinity of order less than, or equal to,  $k$  for  $k \geq 1$  [27]. The total number of zeros at infinity,  $\sigma_n := \rho = \dim \mathcal{E}_n - \dim \mathcal{E}_{n-1}$  is the *rank* [11] of system (2.1). The system is said to be right-invertible (resp. left-invertible) if  $\rho = p$  (resp.  $\rho = m$ ). Define  $p_1 = \rho$  and  $p_i = \rho - \sigma_{i-1}$ , for  $i \geq 2$ , the number of zeros at infinity of order greater or equal to  $i$ . Let  $n'_i := \text{card} \{p_k \geq i\}$ . The list  $\{n'_1 \geq n'_2 \geq \dots \geq n'_p\}$  denotes the list of the *orders* of the zeros at infinity of system (2.1). Another list of invariants of the system consists of its essential structure, denoted  $S_e(\Sigma) = \{n_{1e}, \dots, n_{pe}\}$ . The essential order  $n_{ie}$  [15] is associated to the  $i$ -th output component  $y_i$  as follows:

$$n_{ie} = \min \{k \geq 1 / dy_{(k),i} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, dy^{(1)}, \dots, dy_{(k),j \neq i}, \dots, dy^{(n)}\}\}$$

and right-invertibility yields the existence of  $p$  finite essential orders. The two structures  $S_{\infty}(\Sigma)$  and  $S_e(\Sigma)$  can be derived from the inversion algorithm of [34] (see Section A.1 in the Appendix). Let the lowest and highest derivative order of  $y_i$  appearing in (A.1), for  $1 \leq k \leq n$ , be  $\gamma^{1i}$  and  $\gamma^{2i}$  respectively. Then, it is established in [19] that

(i)  $n_{ie}$  equals  $\gamma^{2i}$ ,

and (ii) the list  $\{n'^1, \dots, n'^p\}$  equals the list  $\{\gamma^{11}, \dots, \gamma^{1p}\}$ .

Most solutions to nonlinear control synthesis problems are based on dynamic compensators defined according to the following definition.

**Definition 2.1.** (a) A *dynamic (state) feedback compensator* for  $\Sigma$  is a system (DC) with inputs  $x, v$  and output  $u$  of the form

$$\text{DC} = \begin{cases} \dot{\xi} = M(\xi, x) + N(\xi, x) v \\ u = F(\xi, x) + G(\xi, x) v, \end{cases} \quad (2.2)$$

where  $\xi$  belongs to an open subset of  $\mathbb{R}^q$ ,  $v \in \mathbb{R}^s$ ,  $p \leq s \leq m$ . The entries of  $M, N, F, G$  are meromorphic functions of  $(x, \xi)$ .

(b) A *precompensator* for  $\Sigma$  is a system (PC), with input  $v$  and output  $u$ , of the form

$$PC = \begin{cases} \dot{\eta} = M(\eta) + N(\eta) v \\ u = F(\eta) + G(\eta) v \end{cases} \quad (2.3)$$

where  $\eta$  belongs to an open subset of  $\mathbb{R}^q$ ,  $v \in \mathbb{R}^s$ ,  $p \leq s \leq m$ . The entries of  $M$ ,  $N$ ,  $F$ ,  $G$  are meromorphic functions of  $\eta$ .  $\square$

A precompensation is a special case of a dynamic (state) feedback compensator. On the other hand, the cascade composition of  $\Sigma$  and of a dynamic state feedback, denoted  $\Sigma \circ$  (DC), can be written as a precompensator of the form (2.3), by setting  $\eta = \text{col}(\xi, x)$ . The rank  $\rho_c$  of the dynamic feedback compensator (2.2) is to be understood as the rank of (2.2) composed with the dynamics of  $\Sigma$ , i.e.

$$\rho_c = \dim \text{span}\{dx, d\xi, du, \dots, du^{(n+q)}\} - \dim \text{span}\{dx, d\xi, du, \dots, du^{(n+q-1)}\}$$

where the span is computed over the field of rational functions in  $u, u^{(1)}, \dots, u^{(n+q)}$  with coefficients which are meromorphic functions of  $x$  and  $\xi$ . Note that, in the case of linear systems, there exist proper transfer function matrices  $F(s)$  and  $G(s)$  such that a dynamic state feedback and a precompensator can be written in the form  $u = F(s)x + G(s)v$  and  $u = G(s)v$ , respectively.

**Definition 2.2.** (a) A *pure dynamic (state) feedback compensator* (DF) for  $\Sigma$  is a dynamic (state) feedback whose rank equals the rank of the matrix  $G(\xi, x)$ .

(b) A *regular pure dynamic (state) feedback compensator* (RDF) is a pure dynamic state feedback with  $v \in \mathbb{R}^m$  and rank equal to  $m$ .  $\square$

**Remark 2.3.** A dynamic (state) feedback is then a pure dynamic (state) feedback if, and only if, it has no zeros at infinity. If, in a nonlinear setting, the notion of properness is thought as the existence of a realization which does not involve any derivative of the input, then a regular pure dynamic state feedback can be viewed as a *biproper* compensator, in the sense that it is proper and admits a proper inverse. In the case of linear systems, a regular pure dynamic state feedback is defined as  $u = F(s)x + Gv$ , where  $F(s)$  is a proper transfer function matrix and  $G$  is a square and nonsingular constant matrix [17], and for strictly proper linear systems having null static kernel, it is equivalent to a biproper (or bicausal) compensation.  $\square$

**Remark 2.4.** Consider a pure dynamic state feedback (DF), see  $\eta = \text{col}(\xi, x)$ , and let the rank of  $G$  be  $r \leq s$ . Without loss of generality, one can partition  $u$  in such a way that  $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$ , where  $G_1$  ( $r \times s$ ) has rank  $r$ ,  $G_2(\eta) = \alpha(\eta) G_1(\eta)$ , and  $\alpha$  is a meromorphic function of  $\eta$ . Let  $F = [F_1, F_2]$  be the corresponding partition of  $F$ . Let  $w$  be such that  $\dim w = m - s$ , then one can write

$$u = [F_1(\eta), F_2(\eta)] + \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}.$$

Thus 
$$u = [F_1, F_2] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(\eta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Hence, as it is for linear systems [6], the pure dynamic state feedback (DF) can be viewed as the composition of a regular pure dynamic state feedback and of a nonregular input transformation, represented by a nonsquare singular matrix

$$G'(\xi, x) = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = M'(\xi, x) + N'(\xi, x) G'(\xi, x) v \\ u = F'(\xi, x) + P(\xi, x) G'(\xi, x) v \end{cases}$$

where  $P(\xi, x)$  has full rank  $m$ . From this property and Remark 2.3, one deduces that if  $\Sigma$  and (DF) are linear systems, a pure dynamic state feedback (DF) can be written in the form  $u = F(s) x + G v$ , where  $G$  is a constant matrix.  $\square$

We will show next that a regular pure dynamic state feedback leaves the structure at infinity and the essential structure of the controlled system invariant. If one recalls that a static state feedback (SF) is defined by  $u = \alpha(x) + \beta(x) v$ ,  $\Sigma$  controlled by a regular pure dynamic state feedback can be written as :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ M(\xi, x) - N(\xi, x) G^{-1}(\xi, x) F(\xi, x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \\ N(\xi, x) G^{-1}(\xi, x) \end{pmatrix} u$$

$$y = h(x)$$

where  $u = F(\xi, x) + G(\xi, x) v$ , with  $v \in \mathbb{R}^m$  and  $\text{rank } G(\xi, x) = m$ . Consequently, again as in the case of linear systems [16], a regular pure dynamic feedback can be viewed as a regular static feedback which operates on a "larger" state realization of system  $\Sigma$ . As a consequence, a regular pure dynamic feedback does not modify the system's structure at infinity and essential structure. The converse is also true, whenever the system is square and invertible, as established in the following theorem.

**Theorem 2.5.** A regular pure dynamic state feedback (RDF) is such that, if  $\Sigma \circ \text{RDF}$  denotes the cascade composition of  $\Sigma$  with (RDF),  $S_\infty(\Sigma \circ \text{RDF}) = S_\infty(\Sigma)$  and  $S_c(\Sigma \circ \text{RDF}) = S_c(\Sigma)$ . Conversely, assume that  $\Sigma$  is square and invertible. Then, if a dynamic state feedback compensator (DC) for  $\Sigma$  leaves  $S_\infty(\Sigma)$  invariant, (DC) is a regular pure dynamic state feedback.

*Proof.* See Section A.2 in the Appendix.  $\square$

### 3. The concept of a nonlinear interactor

In the case of linear systems, the interactor is related to the Hermite form of the transfer matrix; in particular, for the square case, it is the inverse of the Hermite form. For nonlinear systems, the concept of interactor is related to the inversion of the given system. In this section, the concept of a nonlinear interactor is introduced. The interactor algorithm - an alternate way of inverting a general nonlinear system - is first proposed and used to define the interactor for a system of the form (2.1). Some structural properties of the nonlinear interactor are then illustrated.

Define the following procedure, which is a modification of the version of the structure algorithm [34] given in [4].

#### Interactor algorithm

Step 1. Let  $y_1$  be the first component of  $y$  and write:

$$y^{(r_1)}_1 = a_1(x) + b_1(x) u$$

where  $r_1$  is the relative degree of  $y_1$ .

Step 2. Consider the system  $\Sigma_2$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ \begin{pmatrix} y^{(r_1)}_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

Apply the inversion algorithm of [4] to  $\Sigma_2$  in such a way that one gets, for an appropriate integer  $r_2$ ,

$$\begin{pmatrix} y^{(r_1)}_1 \\ y^{(r_2)}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y^{(r_1)}_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y^{(r_1)}_1) \end{pmatrix} u$$

with rank  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 2$ ;  $i=r_1, \dots, r_1+r_2-1$ ;  $j=r_1, \dots, r_1+r_2-2$ .

Step  $k+1$ . Consider the system  $\Sigma_{k+1}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u \\ \begin{pmatrix} y^{(r_1)}_1 \\ y^{(r_2)}_2 \\ \vdots \\ y^{(r_k)}_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y^{(r_1)}_1) \\ \vdots \\ a_k(x, y^{(r_\mu)}_\mu) \\ h_{k+1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y^{(r_1)}_1) \\ \vdots \\ b_k(x, y^{(r_\mu)}_\mu) \\ 0 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

where  $\mu = 1, \dots, k-1$ ;  $i_\mu=r_\mu, \dots, r_\mu+r_k-1$ ;  $j_\mu=r_\mu, \dots, r_\mu+r_k-2$ . Apply the structure algorithm to  $\Sigma_{k+1}$  in such a way that one gets, for some appropriate integer  $r_{k+1}$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(r_{k+1})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x, y_1^{(i_1)}) \\ \vdots \\ a_{k+1}(x, y_\mu^{(i_\mu)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x, y_1^{(j_1)}) \\ \vdots \\ b_{k+1}(x, y_\mu^{(j_\mu)}) \end{pmatrix} u \quad (3.1)$$

where  $\mu = 1, \dots, k$ ;  $i_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_{k+1} - 1$ ;  $j_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_{k+1} - 2$ ; and  $\text{rank} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = k+1$ .  $\square$

Set

$$\varphi_k(x; u, y_v^{(i_v)}, v = 1, \dots, k; i_v = r_v, \dots, r_v + r_k - 1) = y_k^{(r_k)} - a_k(x, y_\mu^{(i_\mu)}) - b_k(x, y_\mu^{(j_\mu)}) u \quad (3.2)$$

where  $\mu = 1, \dots, k-1$ ;  $i_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_k - 1$ ;  $j_\mu = r_\mu, \dots, r_\mu + r_k - 2$ .

If  $\Sigma$  is right-invertible, each step of the above procedure can be carried out, in a unique way, since no permutation of the outputs is allowed at any step and only the last output can be differentiated in inverting  $\Sigma_k$ .

**Definition 3.1.** The Jacobian matrix

$$g(x, u, y_i^{(j)}; i=1, \dots, p, j=1, \dots, n) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_i^{(j)}; i=1, \dots, p, j=1, \dots, n)} \quad (3.3)$$

is called the *interactor* of  $\Sigma$ . The rank of the matrix  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_i^{(j)}; i=1, \dots, p)}$ , denoted  $r^*$ , is called the *column rank at infinity* of the interactor.  $\square$

**Remark 3.2.** To better understand the previous definition, let us carry out the interactor algorithm on a linear example (from [37]):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + u_1 \\ \dot{x}_4 &= -4x_4 + u_2 \\ y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_3 + x_4 \end{aligned}$$

The inversion algorithm, which in this case coincides with the interactor algorithm, yields

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -x_1 - 2x_2 + (1 \ 1) u \\ y_2^{(3)} - y_1^{(3)} + 2y_1^{(2)} &= 3x_1 + 16x_2 - 27x_3 - 64x_4 + (6 \ 8) u \end{aligned}$$



Set  $z_1 = \dot{y}_1$  and  $z_2 = y_2^{(3)} - y_1^{(3)} + 2y_1^{(2)}$ .

Instead of performing the operations associated with each step of the interactor algorithm in the time domain, it is possible to rewrite them in the domain of the Laplace transforms. One then obtains exactly the same operations described in [37] to construct the interactor, which is nothing but the transfer function matrix from  $(y_1, \dots, y_p)$  to  $(z_1, \dots, z_p)$ :

$I(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^3 + 2s^2 & s^3 \end{bmatrix}$ . This result for linear systems was established in [13]. Clearly,  $I(s)$  can be rewritten in terms of the jacobian matrix (3.3), which in this case is real-valued, in the form

$$I(s) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} s & s^2 & s^3 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & s^2 & s^3 & s^4 \end{bmatrix}^T$$

It is shown in [26] that there exists a permutation  $\Pi$  of the output components such that the interactor of the resulting system is row reduced; in that case, the infinite zero orders of the system coincide with the powers of the monomials on the diagonal of the interactor. Different permutations of the outputs can lead to different row reduced interactors. As a matter of fact, one can see that the original structure algorithm of [33] yields a row reduced interactor as :

$$\begin{bmatrix} s^{n'_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & s^{n'_2} & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & s^{n'_p} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

where  $n'_1 \leq n'_2 \leq \dots \leq n'_p$ .

For general nonlinear systems; using the relation between the essential structure and the inversion algorithm established in [19] and recalled in Section 2, one obtains that the essential orders can be computed by means of the interactor algorithm:

$$n_{ie} = \max \left\{ k \mid \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(y_i^{(k)})} \neq 0 \right\}, i=1, \dots, p,$$

where the functions  $\varphi_i$  are defined in (3.2).  $\square$

A first property of the interactor is that it is invariant under regular static state feedback as specified below.

**Proposition 3.3.** Let  $\Sigma$  be a square and invertible nonlinear system of the form (2.1) and let  $Q$  be a regular static state feedback, defined by  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ . Let  $\mathcal{J}$  and  $\mathcal{J}^Q$  be the interactors of  $\Sigma$  and  $\Sigma \circ Q$  respectively. Then,

$$\mathcal{J}(x, u, y_i^{(j)}) = \mathcal{J}^Q(x, v, y_i^{(j)}) \Big|_{v = -\beta^{-1}(x)(\alpha(x) - u)}$$

*Proof.* See Section A.3 in the Appendix.  $\square$

A second important property of the interactor is that its column rank at infinity is an invariant of the system, as shown by the following result.

**Proposition 3.4.** Assume that  $\Sigma$  is right-invertible. Let  $Y = \text{span} \{dx, dy_1, \dots, dy_i^{(n_{ie}-1)}, i = 1, \dots, p\}$ . Then

$$r^* = p - \dim [Y \cap \text{span}\{du\}]$$

*Proof.* The equations  $\phi_k = 0$  of the interactor algorithm, for  $1 \leq k \leq p$ , can be written as

$$\phi_1(x, y_i^{(j)}) + \phi_2(x, y_i^{(j)}) y_i^{(n_{ie})} + \phi_3(x, y_i^{(j)}) u = 0 \quad (3.4)$$

where  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n_{ie}-1$  and  $\text{rank } \phi_2 = r^*$ . Then, there exists a  $p \times p$  invertible matrix  $V(x, y_i^{(j)})$  such that

$$V \phi_1 + V \phi_3 u = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(n_{1e})} \\ \vdots \\ y_p^{(n_{pe})} \end{bmatrix}$$

where  $M$  denotes a  $r^* \times p$  matrix of full row rank. Hence,

$$\dim [Y + \text{span}\{d(M \begin{bmatrix} y_1^{(n_{1e})} \\ \vdots \\ y_p^{(n_{pe})} \end{bmatrix})\}] = \dim [Y + \text{span}\{d(V\phi_3 u)\}] = \dim [Y + \text{span}\{\phi_3 du\}]$$

and

$$r^* = \dim [\text{span}\{\phi_3 du\}] - \dim [Y \cap \text{span}\{\phi_3 du\}] = p - \dim [Y \cap \text{span}\{\phi_3 du\}]$$

From ([4], proof of Theorem 2.3), one gets

$$\text{span}\{\phi_3 du\} = \text{span}\{du\} \cap \text{span}\{dx, dy_i^{(k)}, 1 \leq k \leq n\},$$

Finally, taking the intersection of both sides of last equation with  $Y$ , one obtains

$$Y \cap \text{span}\{\phi_3 du\} = Y \cap \text{span}\{du\}$$

and the result follows.  $\square$

The previous proposition shows that  $r^*$  is independent of the choices made at each step of the interactor algorithm, and, more generally, that  $r^*$  can be computed using, for example, the inversion algorithm of [34].

Assumptions will be needed under which the nonlinear interactor is a constant matrix when dealing with the dynamic equivalence problem. These assumptions will be introduced hereafter and put into relation with input-output linearizability by static state feedback.

**Interactor Algorithm Hypotheses (at  $x^0$ ):** Given a point  $x^0$ , assume that, at each step  $k$  of the interactor algorithm, there exists an open neighborhood  $U_k \subset U_{k-1}$  of  $x^0$ , such that, for each  $x \in U_k$ ,

$$H_{k1}: \varphi_k(x, u, y_1^{(j)}; i=1, \dots, k; j=r_i, \dots, r_i+r_k-1) = y_k^{(r_k)} + P_k(z_1, \dots, z_{k-1}) - a_k(x) - b_k(x)u$$

where the variables  $z_1, \dots, z_k, \dots$  are defined by induction as:  $z_1 = y_1^{(r_1)}, \dots, z_k = y_k^{(r_k)} + P_k(z_1, \dots, z_{k-1})$  and  $P_k$  is a linear differential polynomial over  $\mathbb{R}$  in  $z_1, \dots, z_{k-1}$ .

$$H_{k2}: \text{the rank of } \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_k(x) \end{pmatrix} \text{ is equal to the rank of } \begin{pmatrix} b_1(x^0) \\ \vdots \\ b_k(x^0) \end{pmatrix}.$$

Under the hypotheses  $H_{k1}$ , there exists an open neighborhood  $U$  of  $x^0$  such that, for  $x \in U$ , the interactor (3.3) is real-valued, so that one can write

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ y_p^{(n)} \end{pmatrix}$$

or, by Laplace transforming,

$$z(s) = I(s) y(s). \quad (3.5)$$

so that the interactor can be represented by the transfer function matrix  $I(s)$  from  $(z_1, \dots, z_p)$  to  $(y_1, \dots, y_p)$ . These hypotheses mean that, at each step of the inversion of system  $\Sigma_k$ ,  $2 \leq k \leq p$ , the rank over  $\mathcal{K}$  of the matrices which appear as multiplying the input  $u$  equals the dimension of the  $\mathbb{R}$ -vector space spanned by the rows of these matrices, for all  $x$  in a suitable open neighborhood of  $x^0$ . As a matter of fact, the hypotheses  $H_k$  turn out to be equivalent to the necessary and sufficient conditions, given in [25], for input-output linearization at  $x^0$  by means of regular static state feedback, as shown in the following proposition. Our result will also show that the interactor algorithm represents an alternative to [25] for obtaining input-output linearization.

**Proposition 3.5.** Let  $\Sigma$  be a square and right-invertible nonlinear system of the form (2.1).  $\Sigma$  satisfies the interactor hypotheses at  $x^0$  if, and only if,  $\Sigma$  is input-output linearizable at  $x^0$  by regular static state feedback.

*Proof. (Necessity)* By definition,

$$z(s) = I(s) y(s)$$

where  $I(s)$  is of the form

$$I(s) = \begin{bmatrix} s^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & \dots & s^{r_p} \end{bmatrix}$$

and is therefore invertible. Define the regular static state feedback

$$v = - \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_p(x) \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_p(x) \end{pmatrix} - u \right] \quad (3.6)$$

which is well-defined around  $x^0$  because of the interactor algorithm hypotheses. Then, by (3.1) written for  $k+1 = p$ ,

$$y(s) = I^{-1}(s) v(s)$$

and  $\Sigma$  is input-output linearized at  $x^0$  by the regular static state feedback (3.6).

(Sufficiency) If  $\Sigma$  is input-output linearizable, then the linearized system  $\Sigma_0 Q$ , where  $Q$  is a static state feedback of the form  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  and  $\text{rank } \beta(x^0) = m$ , satisfies the hypotheses of the interactor algorithm. From the proof of Theorem 2.5 (Section A.2) it is seen that, if  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ ,  $k=1, \dots,$

$p$ , denote the matrices in (3.1) for  $\Sigma_0 Q$ ,  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \beta^{-1}(x)$  are the corresponding matrices for  $\Sigma$ . Then, if

hypothesis  $H_{k2}$  holds for  $\Sigma_0 Q$ , it also holds for  $\Sigma$ . We now show that, if  $H_{k1}$  holds for  $\Sigma$ , it also holds for  $\Sigma_0 Q$ . Let  $b(x)$  be a  $\ell \times q$  meromorphic matrix such that  $\text{rank } b(x) = \text{rank } b(x^0)$ , in some neighborhood  $U$  of  $x^0$ . Define  $\mathbb{R}$ -rank  $b(x)$  as the dimension of the  $\mathbb{R}$ -vector space spanned by the rows of  $b(x)$  in  $U$ . Assume that

$$\text{rank}_{\mathcal{K}} b(x) = \mathbb{R}\text{-rank } b(x).$$

Then,

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathcal{K}} b(x) \beta(x) &= \text{rank}_{\mathcal{K}} b(x) \\ &= \mathbb{R}\text{-rank } b(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Write  $r := \text{rank } b(x)$  and let  $V$  be a matrix over  $\mathbb{R}$  of rank  $\ell - r$  such that

$$V b(x) = 0$$

Then

$$V b(x) \beta(x) = 0$$

and, by (3.7),

$$\text{rank}_{\mathcal{K}} b(x) \beta(x) = \mathbb{R}\text{-rank } b(x) \beta(x).$$

This kind of argument applied at each step of the inversion of the system  $\Sigma_k$  yields the result.  $\square$

#### 4. Input-output decoupling via pure dynamic state feedback.

The existence of a solution to the input-output decoupling problem via dynamic state feedback compensation was fully characterized in [8], [10], [30]. In particular, in [8] it is proven that the input-output decoupling problem is solvable via a dynamic state feedback compensator if, and only if,  $\Sigma$  is right-invertible. In this section, the class of control laws wherein a solution to the input-output decoupling problem is sought is restricted to the class of *pure* dynamic state feedback. It will then be shown that this problem is solvable if, and only if, the difference between the number of inputs and outputs is greater than the difference between the number of outputs and the column rank at infinity of the interactor.

The problem can be formally stated as follows.

**Input-output decoupling problem, via pure dynamic state feedback.** Given a nonlinear system  $\Sigma$  of the form (2.1), find an open subset  $U$  of  $\mathbb{R}^n$ , an integer  $q$ , an open subset  $V$  of  $\mathbb{R}^q$ , and a pure dynamic state feedback for  $\Sigma$  such that

$$dy_i^{(k)} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, d\xi, dv_1, \dots, dv_i^{(k-1)}\}, \quad i = 1, \dots, p; 1 \leq k \leq n+q$$

and

$$dy_i^{(n+q)} \in \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx, d\xi\}.$$

for any  $(x, \xi) \in U \times V$ , where  $\mathcal{K}$  is the field of rational functions of  $v, \dots, v^{(n+q-1)}$  with coefficients which are meromorphic functions of  $(x, \xi)$ .  $\square$

For a better understanding of the proof of our result, it is useful to recall how a dynamic decoupling compensator can be constructed by means of the inversion algorithm of [34]. Let the lowest and the highest derivative order of  $y_i$  appearing in (A.1), for  $1 \leq k \leq n$ , be  $\gamma^{li}$ , and  $\gamma^{2i}$  respectively. Define, for  $k = 1, \dots, p$ ,

$$\delta_i = \gamma^{2i} - \gamma^{li}$$

If  $\Sigma$  is right-invertible, the  $\delta_i$ 's are finite and the list  $\{\delta_i, i = 1, \dots, p\}$  represents the *difference* between the essential structure and the structure at infinity. Following [35] and [20], a decoupling compensator for  $\Sigma$  is as follows:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_i = A_i \zeta_i + B_i v_i \\ u = \begin{pmatrix} \Phi_1(\zeta; x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p \Phi_{2i}(\zeta; x) v_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=p+1}^m \Phi_{3i}(\zeta; x) v_i \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.1)$$

where  $\zeta_i$  belongs to  $\mathbb{R}^{\delta_i}$  and  $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}$ ;  $B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$\Phi_1, \Phi_{21}, \dots, \Phi_{2p}, \Phi_{3,p+1}, \dots, \Phi_{3m}$  follow from the inversion algorithm by solving (A.1) in  $u$ , for  $k = n-1$ . Straightforward calculations show that  $\Sigma$  controlled by (4.1) exhibits a linear input-output behavior of the form

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad \text{for } i = 1, \dots, p.$$

The proof of the main theorem of this section will use this construction as well as the following two lemmas to derive a *pure* dynamic state feedback compensator which decouples the system.

**Lemma 4.1.** Assume that  $\Sigma$  is right-invertible. Then there exist  $m-p$  components of  $x$ , say  $x_1, \dots, x_{m-p}$  such that

$$\text{span}\{dx_1, \dots, dx_{m-p}\} \oplus \text{span}\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\} = \text{span}\{dx, du, dy, \dots, dy^{(n)}\} \quad (4.2)$$

*Proof.* One has

$$\dim \text{span}\{dx, du, dy\} - \dim \text{span}\{dx, dy\} = m - \text{card}\{i=1, \dots, p \mid n_i = 1\}$$

and, more generally,

$$\dim \text{span}\{dx, du, dy, \dots, dy^{(k)}\} - \dim \text{span}\{dx, dy, \dots, dy^{(k)}\} = m - \text{card}\{i=1, \dots, p \mid n_i \leq k\}.$$

Since  $\Sigma$  is right-invertible by assumption, it follows that

$$\dim \text{span}\{dx, du, dy, \dots, dy^{(n)}\} - \dim \text{span}\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\} = m - p.$$

Since it is assumed that the rank of  $g(x)$  is  $m$ , one has

$$\dim \text{span}\{dx, dx, dy, \dots, dy^{(n)}\} - \dim \text{span}\{dx, dy, \dots, dy^{(n)}\} = m - p.$$

Thus, there exists  $(m-p)$  components of  $x$ , say  $x_1, \dots, x_{m-p}$ , such that (4.2) holds.  $\square$

**Lemma 4.2.** Assume that  $\Sigma$  is right-invertible. Let  $Y = \text{span}\{dx, dy_i, \dots, dy_i^{(n_i-1)}, i = 1, \dots, p\}$ . Then there exist  $p-r^*$  output components, say  $\{y_j, j \in J\}$ , such that, by setting  $\bar{Y} = \text{span}\{dx, dy_j^{(i)}, j \in J, 1 \leq i \leq n_j-1\}$ ,

$$Y \cap \text{span} \{du\} = \bar{Y} \cap \text{span} \{du\}. \quad (4.3)$$

*Proof:* Set  $\mu = p - r^*$  and, for  $1 \leq i \leq p$ ,  $Y_i = \text{span} \{dx, dy_1^{(j)}; j \leq n_{ie}-1\}$ . Assume that, for all  $i = 1, \dots, p$ , the relative degree of the  $i$ -th output  $y_i$  equals  $n_{ie}$ . Then,  $Y = \text{span}\{dx\}$ , and  $\mu = 0$ . Hence, if  $\mu \geq 1$ , there exists a component of the output, say w.l.o.g.  $y_1$ , such that  $Y_1 \cap \text{span} \{du\} \neq 0$ . Now, let  $y_i \in \{y_2, \dots, y_p\}$ . Let  $r_1 = \min\{k \mid dy_1^{(k)} \in Y_1\}$ . Assume that, for  $i = 2, \dots, p$ ,  $r_1 = n_{ie}$ . Then,  $Y_i$  is contained in  $Y_1$  and  $Y = Y_1$ . Thus  $\mu = 1$ . Hence, if  $\mu \geq 2$ , there exists a component of the output, say w.l.o.g.  $y_2$ , such that,  $dy_2^{(r_2)} \in Y_1$ ,  $r_2 < n_{2e}$  and  $dy_2^{(r_2)} \in Y_1 + \text{span}\{du\}$ , so that

$$y_2^{(r_2)} = \psi_2(x, u, y_1^{(j)}; j \leq n_{1e}-1)$$

Iterating this reasoning, one shows that, after renumbering the outputs,

$$y_i^{(r_i)} = \psi_i(x, u, y_j^{(k)}; j = 1, \dots, \mu-1; k \leq n_{je}-1)$$

for  $i = 1, \dots, \mu$ , where  $r_i = \min\{k \mid dy_i^{(k)} \in Y_1 + \dots + Y_{i-1}\} < n_{ie}$ .  $\square$

The following result gives a necessary and sufficient condition for the solvability of the input-output decoupling problem via pure dynamic state feedback in terms of the column rank at infinity of the interactor.

**Theorem 4.3.** Assume that  $\Sigma$  is right-invertible. The input-output decoupling problem is solvable via pure dynamic state feedback if, and only if,

$$m - p \geq p - r^*, \quad (4.4)$$

where  $r^*$  is the column rank at infinity of the interactor of  $\Sigma$ . Moreover, the input-output decoupling problem is solvable via regular pure dynamic state feedback if, and only if, it is solvable via regular static state feedback.

*Proof.* Set  $\mu = p - r^*$ . From Proposition 3.4,  $\mu = \dim [Y \cap \text{span} \{du\}]$ . Renumber the output components, if necessary, so that the set  $J$ , as defined in the proof of Lemma 4.2, is  $J = \{1, \dots, \mu\}$ . Set  $I = \{\mu+1, \dots, p\}$ .

(Sufficiency) Apply the interactor algorithm to this new output vector. Then, from Lemma 4.2, it follows that, for  $i \in J$ :

$$y_i^{(r_i)} = \psi_i(x, u, y_j^{(k)}; j = 1, \dots, \mu-1, k \leq n_{je}-1)$$

and  $r_i < n_{ie}$ . Moreover, if, for  $i \in I$ ,  $r_i$  were less than the essential order  $n_{ie}$ ,  $dy_i^{(r_i)}$  would not belong to  $\bar{Y}$  and the equality (4.3) would be contradicted. Thus,  $r_i = n_{ie}$ , for all  $i \in I$ . Let  $\delta_i = n_{ie} - r_i$ , for  $i = 1, \dots, p$ . A dynamic state feedback can be derived from the compensator (4.1) as follows. For  $1 \leq i \leq p$ , if  $\delta_i > 1$ , define the  $(\delta_i - 1)$ -dimensional vector  $\xi_i$  such that

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A_i \xi_i + B_i x_i \\ u = \begin{pmatrix} \Psi_1(\xi; x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i \in I} \Psi_{2i}(\xi; x) v_i + \sum_{i \in J} \Psi_{2i}(\xi; x) \dot{x}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=p+1}^m \Psi_{3i}(\xi; x) v_i \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.5)$$

where the pair  $(A_i; B_i)$  is in companion form of suitable dimension, the  $\mu$   $x_i$ 's are chosen among  $(x_1, \dots, x_{m-p})$  given in Lemma 4.1 and  $\Psi_1, \Psi_{21}, \dots, \Psi_{2p}, \Psi_{3;p+1}, \dots, \Psi_{3m}$  are derived from  $\Phi_1, \Phi_{21}, \dots, \Phi_{2p}, \Phi_{3;p+1}, \dots, \Phi_{3m}$  in (4.1) respectively, by substituting  $\zeta_{ij}$  with  $\xi_{ij}$ ,  $\zeta_{i\delta_i}$  with  $x_i$  for  $i=1, \dots, p$  and  $j=1, \dots, \delta_i-1$  and  $v_i$  with  $\dot{x}_i$ , for  $i \in J$ . Since no input appears in the state dynamics of (4.5), the compensator (4.5) is a pure dynamic state feedback. Moreover, w.l.o.g., by Lemma 4.1,  $v_{p+1}, \dots, v_m$  can be defined such that  $\dot{x}_i = v_{p+1}$  for  $i=1, \dots, m-p$ . Then (4.5) becomes

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A_i \xi_i + B_i x_i \\ u = \Psi_1(\xi; x) + \sum_{i=1}^p \Psi_{2i}(\xi; x) v_i + \sum_{i=p+1}^m \Psi_{3i}(\xi; x) v_i \end{cases} \quad (4.6)$$

The system  $\Sigma$  controlled by (4.6) exhibits the following linear decoupled input-output behavior:

$$y_i^{(n_{ie})} = v_i \text{ for } i = 1, \dots, p.$$

(Necessity) Apply the interactor algorithm to the new output vector obtained by permuting the components of  $y$ . One has

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = \varphi_1(x, y_i^{(j)}) + \varphi_2(x, y_i^{(j)}) u \quad (4.7)$$

where  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n_{ie}$ ,  $r_i < n_{ie}$  for  $i \in J$ ,  $r_i = n_{ie}$  for  $i \in I$ , and  $\varphi_2$  has full row rank. Assume that  $\Sigma$  is decoupled by a pure dynamic state feedback of the form

$$\begin{cases} \dot{\xi} = M(\xi, x) + N(\xi, x) v \\ u = F(\xi; x) + G(\xi; x) v \end{cases} \quad (4.8)$$

By substituting  $u = F(\xi; x) + G(\xi; x) v$  in (4.7),

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = \varphi_1(x, y_i^{(j)}) + \varphi_2(x, y_i^{(j)}) [F(\xi; x) + G(\xi; x) v]$$



Compute

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1+1)} \\ \vdots \\ y_\mu^{(r_\mu+1)} \\ y_{\mu+1}^{(r_{\mu+1})} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{bmatrix} = * + \begin{bmatrix} * \\ \varphi_{22} \ G \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \varphi_{21} \ G \\ 0 \end{bmatrix} \dot{v}$$

where  $\varphi_2 = \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix}$  and  $\dim \varphi_{21} = \mu \times m$ . By definition;

$$r_i + 1 \leq n_{iE}; \text{ for } i = 1, \dots, \mu.$$

Moreover, since (4.8) decouples the system, the derivatives of the output  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, \mu$ , up to order  $n_{iE}$ , do not contain derivatives of  $v$ . Hence

$$\varphi_{21} G = 0$$

Consequently,

$$\text{rank } \varphi_2 G = \text{rank } G - \dim (\ker \varphi_2 \cap \text{Im } G) \leq p - \mu$$

and

$$\text{rank } G \leq p - \mu + \dim (\ker \varphi_2 \cap \text{Im } G) \leq p - \mu + \dim (\ker \varphi_2)$$

From the right-invertibility of  $\Sigma$ ,  $\varphi_2$  is right-invertible and

$$\text{rank } G \leq p - \mu + m - p \leq m - \mu \quad (4.9)$$

Since (4.8) has no zero at infinity, its rank is equal to  $\text{rank } G$ . Moreover, the rank of the compensated plant is less than or equal to the rank of the compensator. Hence,

$$\text{rank } G \geq p \quad (4.10)$$

Finally, (4.9) and (4.10) yield  $m-p \geq \mu$ .

For the second part of the theorem, the sufficiency is obvious. For the necessity, note that if the input-output decoupling problem is solvable via regular pure dynamic state feedback, then  $\text{rank } G = m$  in equation (4.9) and therefore  $\mu = 0$ , or, equivalently,  $r^* = p$ . Then, apply the interactor algorithm to  $\Sigma$ . For the first output, one has that  $r_1$  coincides with the relative degree of the first output and that  $r_1 = n_{1E}$  otherwise  $r^* < p$ . Since  $r^*$  is invariant under permutation of the outputs, it is true that, for all  $i = 1, \dots, p$ , the relative degree of the  $i$ -th output coincides with its essential order. Then, from [15], the input-output decoupling problem is solvable by regular static state feedback.  $\square$

Theorem 4.3 generalizes to nonlinear systems the results on regular and non regular pure dynamic state feedback decoupling, established for linear systems in [6], [16]. From the proof of

the sufficiency, it is seen that whenever  $\delta_i \leq 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$  and if (4.4) is satisfied, there always exists a *static* state feedback which decouples system  $\Sigma$ .

### Example

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

The orders of the zeros at infinity and the essential structure are  $(n_1^*, n_2^*) = (3, 1)$  and  $(n_{1e}, n_{2e}) = (3, 3)$ . The condition (4.4) is satisfied since  $r^* = 1$ . A solution can be constructed by applying the method given above: a dynamic state feedback which renders the decoupling matrix invertible is

$$\begin{cases} \dot{\xi} = x_5 \\ u = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v. \quad \square \end{cases}$$

## 5. Equivalence of nonlinear systems under dynamic state feedback

In this section, we show that, as for linear systems, the notion of interactor is the key not only for solving the input-output decoupling problem via pure dynamic state feedback but also for characterizing equivalence of nonlinear systems under dynamic compensation. We first show that dynamic equivalence is a special case of the exact model matching problem [2], [3], where the compensator to be found is a regular pure dynamic state feedback. Then, we establish that two input-output linearizable systems are dynamically equivalent if, and only if, their interactors coincide. These results extend to the nonlinear setting the definition of dynamic equivalence and its characterization in terms of the interactor given in [37]. A different notion of dynamic equivalence has recently been considered in [32], in a differential algebraic framework, where the properness of the compensators is not required.

**Definition 5.1.** Let two systems  $\Sigma^i = (f^i, g^i, h^i)$  of the form (2.1) be given, for  $i=1, 2$ , with state  $x^i$  belonging to an open subset of  $\mathbb{R}^{n_i}$ , inputs  $u^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ , outputs  $y^i \in \mathbb{R}^{p_i}$ . Assume that  $f^i(0) = 0$  and  $h^i(0) = 0$ . Then  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are said to be *dynamically equivalent from zero* (and we write  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$ ) if there exist integers  $q_i$ ,  $i=1, 2$ , dynamic state feedbacks  $DC^i$  for  $\Sigma^i$ , of the form (2.2),

with state  $\xi^i$  belonging to open subsets of  $\mathbb{R}^{q_i}$ , having the origin as equilibria, and an  $\epsilon > 0$ , such that there exists  $T > 0$  with the property that

$$y^{\Sigma^1 \circ (DC^1)}(t, 0, 0, u^2) - y^{\Sigma^2}(t, 0, u^2) = 0, \text{ for all } u^2 \text{ in } L_\infty[0, T] \text{ satisfying } \|u^2\| < \epsilon,$$

and

$$y^{\Sigma^2 \circ (DC^2)}(t, 0, 0, u^1) - y^{\Sigma^1}(t, 0, u^1) = 0, \text{ for all } u^1 \text{ in } L_\infty[0, T] \text{ satisfying } \|u^1\| < \epsilon,$$

for all  $0 \leq t \leq T$ .  $\square$

The above is an equivalence relation. Moreover, if  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$ , then  $\hat{\Sigma}^1 \sim \hat{\Sigma}^2$ , where  $\hat{\Sigma}^1 = \Sigma^1 \circ Q^1$  and  $\hat{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \circ Q^2$ , with  $Q^1$  and  $Q^2$  be any regular static state feedbacks. In the case of linear  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$ , this equivalence relation corresponds to matching the transfer matrix of  $\Sigma^1$  by appropriately compensating  $\Sigma^2$  and viceversa, i.e. to dynamic equivalence as defined in [37]. Definition 5.1 is, in fact, a stronger version of the exact model matching problem as defined in [3]: here, the model is asked to be matchable by the plant but, in addition, the plant is asked to be matchable by the model. Clearly, as it is done for the model matching problem, one could also define asymptotic equivalence of two nonlinear systems and, using the results of [3], show that if two systems are asymptotically equivalent, then they also are dynamically equivalent from zero.

In the following theorem, we establish a relation between dynamic equivalence and equivalence under regular pure dynamic feedback. This will also show that dynamic equivalence is a special case of the exact model matching problem, where exact model matching is required by means of a pure dynamic state feedback compensation. If  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  were linear systems with transfer matrices  $W_1(s)$  and  $W_2(s)$ , this would correspond to the fact that  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are equivalent if, and only if, there exists a bicausal compensator  $B(s)$  such that  $W_1(s)B(s) = W_2(s)$  [37]. In the following theorem, we need to assume that  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are left-invertible at zero [3]; this hypothesis is certainly satisfied if  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are left-invertible and the origin is a regular point for the inversion algorithm.

**Theorem 5.2.** Let two systems  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  be as in Definition 5.1. Suppose that  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are left-invertible at zero. Then,  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$  if, and only if,  $m_1 = m_2$  and there exist an integer  $q$ , a regular pure dynamic state feedback (RDF) for  $\Sigma^1$  of the form (2.2), locally defined in a neighborhood of the origin, having input  $u^2$ , output  $u^1$ ,  $M(0,0) = 0$ ,  $F(0, 0) = 0$ , and an  $\epsilon > 0$ , such that there exists  $T > 0$  with the property that

$$y^{\Sigma^1 \circ \text{RDF}}(t, 0, 0, u^2) - y^{\Sigma^2}(t, 0, u^2) = 0, \text{ for all } u^2 \text{ in } L_\infty[0, T] \text{ satisfying } \|u^2\| < \epsilon,$$

for all  $0 \leq t \leq T$ .

*Proof.* Sufficiency is immediate, hence we only prove necessity. From Definition 4.1,  $\Sigma^2 \circ DC^2$  has the same input-output behavior from zero as  $\Sigma^1$ , and  $\Sigma^1 \circ DC^1$  has the same input-output

behavior from zero as  $\Sigma^1$ . Hence,  $\Sigma^2 \circ DC^2 \circ DC^1$  has the same input-output behavior from zero as  $\Sigma^2$ . More precisely, there exist  $\epsilon > 0$  and  $T > 0$  such that  $\Sigma^2$  initialized at zero has the same output as

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^2 = f^2(x^2) + g^2(x^2) v \\ \dot{x}^1 = \Gamma^1(x^1) + g^1(x^1)[F^1(\xi^1; x^1) + G^1(\xi^1; x^1)] u^2 \\ \dot{\xi}^1 = M^1(\xi^1; x^1) + N^1(\xi^1; x^1) u^2 \\ \xi^2 = M^2(\xi^2; x^2) + N^2(\xi^2; x^2) F^1(\xi^1; x^1) + N^2(\xi^2; x^2) G^1(\xi^1; x^1) u^2 \\ v = F^2(\xi^2; x^2) + G^2(\xi^2; x^2) F^1(\xi^1; x^1) + G^2(\xi^2; x^2) G^1(\xi^1; x^1) u^2 \\ y^2 = h^2(x^2) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

initialized at zero, for all  $u^2$  in  $L_\infty[0, T]$  satisfying  $\|u^2\| < \epsilon$  and for all  $0 \leq t \leq T$ . Since  $\Sigma^2$  is left-invertible at zero by hypothesis, then from the fact that the outputs of  $\Sigma^2$  and of (5.1) coincide, one deduces that  $v(t) = u^2(t)$ , for all  $0 \leq t \leq T$ . Then, from the expression of  $v$  in (5.1),  $G^2(\xi^2(t), x^2(t))G^1(\xi^1(t), x^1(t)) = I$ , for all  $0 \leq t \leq T$ . In particular,  $G^2(0, 0)G^1(0, 0) = I$ . Therefore,  $\text{rank } G^2(0, 0) = m_2$  and  $\text{rank } G^1(0, 0) = m_2$ . This means that  $m_2 \leq m_1$ . By repeating the same kind of reasoning for  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^1 \circ DC^1 \circ DC^2$ , one can conclude that  $\text{rank } G^2(0, 0) = \text{rank } G^1(0, 0) = m_1$ , so that, necessarily,  $m_1 = m_2$ . Moreover, again from the expression of  $v$  in (5.1),  $F^2(\xi^2(t), x^2(t)) + G^2(\xi^2(t), x^2(t))F^1(\xi^1(t), x^1(t)) = 0$  and, for the reciprocal reasoning,  $F^1(\xi^1(t), x^1(t)) + G^1(\xi^1(t), x^1(t))F^2(\xi^2(t), x^2(t)) = 0$ , for all  $0 \leq t \leq T$ . From this, one deduces that  $F^1(0, 0) = 0$  and  $F^2(0, 0) = 0$ . From the fact that  $DC^1$  and  $DC^2$  have the origin as equilibria, we also have that  $M^1(0, 0) = M^2(0, 0) = 0$ . Therefore  $DC^1$  and  $DC^2$  are regular pure dynamic state feedbacks, locally defined around the origin, and the result follows.  $\square$

The proof of the above theorem shows that if two systems  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are equivalent under dynamic state feedback, then there exist regular pure dynamic feedbacks  $RDF^1$  and  $RDF^2$  such that the input output behavior from the origin of  $\Sigma^1$  controlled by  $RDF^1$  coincides with that of  $\Sigma^2$ , and, viceversa, the input output behavior from the origin of  $\Sigma^2$  controlled by  $RDF^2$  coincides with that of  $\Sigma^1$ . This property is now used to characterize dynamic equivalence in terms of the interactor.

**Theorem 5.3.** Let  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  be as in Definition 5.1, with  $m_1 = m_2 = p_1 = p_2$ . Assume  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are invertible and input-output linearizable by regular static state feedback at zero. Then,  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are dynamically equivalent from zero if, and only if, their interactors coincide.

*Proof. (Sufficiency)* Since  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are input-output linearizable by regular static state feedback at zero, the origin is a regular point for the inversion algorithm. Then,  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  are invertible at zero. Hence, Theorem 5.2 can be applied and it is enough to consider dynamic equivalence under regular pure dynamic feedback.

$$\text{Let } \Sigma^1 = \begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(x^1) + g^1(x^1) u^1 \\ y^1 = h^1(x^1) \end{cases} \quad \text{and } \Sigma^2 = \begin{cases} \dot{x}^2 = f^2(x^2) + g^2(x^2) u^2 \\ y^2 = h^2(x^2) \end{cases}$$

Consider the different steps of the interactor algorithm applied to the extended system  $\Sigma^1 - \Sigma^2$  defined as

$$\Sigma^1 - \Sigma^2 = \begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(x^1) + g^1(x^1) u^1 \\ \dot{x}^2 = f^2(x^2) + g^2(x^2) u^2 \\ y^E = h^1(x^1) - h^2(x^2) \end{cases}$$

The superscript indicates the system and the subscript the step of the algorithm. Since  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  have the same interactor, by hypothesis; the same list of integers  $r_1; r_2; \dots, r_p$  is associated to both systems.

At Step 1,

$$y_1^{1(r_1)} - y_1^{2(r_1)} = a_1^1(x^1) - a_1^2(x^2) + b_1^1(x^1) u^1 - b_1^2(x^2) u^2$$

At Step 2,

$$y_2^{1(r_2)} + P_2^1(z_1^1) - y_2^{2(r_2)} - P_2^2(z_1^2) = a_2^1(x^1) - a_2^2(x^2) + b_2^1(x^1) u^1 - b_2^2(x^2) u^2$$

with  $\text{rank} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{pmatrix} = 2$ ;  $\text{rank} \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} = 2$ , where, by assumption, the ranks can be computed either over  $\mathcal{K}$  or over  $\mathbb{R}$ .

At Step  $k+1$ ,

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{1(r_{k+1})} + P_{k+1}^1(z_1^1, \dots, z_k^1) - y_{k+1}^{2(r_{k+1})} - P_{k+1}^2(z_1^2, \dots, z_k^2) \\ = a_{k+1}^1(x^1) - a_{k+1}^2(x^2) + b_{k+1}^1(x^1) u^1 - b_{k+1}^2(x^2) u^2 \end{aligned}$$

with rank  $\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_{k+1}^1 \end{pmatrix} = k+1$ ; rank  $\begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_{k+1}^2 \end{pmatrix} = k+1$ . Since, by assumption,  $\Sigma^2$  is right-invertible and

satisfies the interactor algorithm hypotheses at zero, rank  $\begin{pmatrix} b_1^1(0) \\ b_2^1(0) \\ \vdots \\ b_p^1(0) \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_p^2 \end{pmatrix} = m$ .

Then, we may define a dynamic state feedback of the form (2.2)

$$(RDF)_2 = \begin{cases} \dot{\xi} = f^1(\xi) + g^1(\xi) u^1 \\ u^2 = \begin{pmatrix} b_1^2(x^2) \\ \vdots \\ b_p^2(x^2) \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} a_1^1(\xi) - a_1^2(x^2) \\ \vdots \\ a_p^1(\xi) - a_p^2(x^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^1(\xi) \\ \vdots \\ b_p^1(\xi) \end{bmatrix} u^1 \right\} \end{cases}$$

where  $M(0,0) = 0$  (because  $b^i(0) = 0$  and  $f^i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ),  $F(0,0) = 0$  (because the origin is an equilibrium of  $\Sigma^1$ ), and rank  $G(0, 0) = m$ . Hence,  $(RDF)_2$  is a regular pure dynamic state feedback, locally defined around the origin. By applying such a compensator to  $\Sigma^2$ , since  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  have the same interactor by assumption, one has

$$\begin{aligned} y_1^1(t_1) - y_1^2(t_1) &= 0 \\ y_2^1(t_2) - y_2^2(t_2) + Q_2(y_1^1(t_1) - y_1^2(t_1)) &= 0 \\ &\vdots \\ y_k^1(t_k) - y_k^2(t_k) + Q_k(y_1^1(t_1) - y_1^2(t_1), \dots, y_{k-1}^1(t_{k-1}) - y_{k-1}^2(t_{k-1})) &= 0 \end{aligned}$$

where the  $Q_i$  are linear differential polynomials over  $\mathbb{R}$ . This shows that  $y^{\Sigma^2 \circ (RDF)_2}(t; 0, 0, u^1) - y^{\Sigma^1}(t, 0, u^1) = 0$ , for  $0 \leq t \leq T$ , for some appropriate  $T$ . Similar arguments show that there exists a compensator  $(RDF)_1$ , satisfying the same properties as  $(RDF)_2$ , such that  $y^{\Sigma^1 \circ (RDF)_1}(t, 0, 0, u^2) - y^{\Sigma^2}(t, 0, u^2) = 0$ .

(Necessity) Let  $\hat{\Sigma}^1 = \Sigma^1 \circ Q^1$  and  $\hat{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \circ Q^2$ , denote the input-output linearized systems, where  $Q^1$  and  $Q^2$  are any regular static state feedbacks. If  $\Sigma^1 \sim \Sigma^2$ , then  $\hat{\Sigma}^1 \sim \hat{\Sigma}^2$ . Then, there exists a bicausal transfer matrix  $B(s)$  such that  $W_1(s)B(s) = W_2(s)$ , where  $W_1(s)$  and  $W_2(s)$  denote, respectively, the transfer matrices of  $\hat{\Sigma}^1$  and  $\hat{\Sigma}^2$ , initialized at zero. Hence, by [37],  $\hat{\Sigma}^1$  and  $\hat{\Sigma}^2$

have the same interactor. By Proposition 3.3, since these interactors are real-valued, they also coincide with the interactors of  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  which, as a consequence, have the same interactor.  $\square$

## 6. Conclusions

The concept of an interactor for a general nonlinear system has been introduced and proven to be useful in characterizing the solvability of two synthesis problems: input-output decoupling and equivalence under pure dynamic state feedback. The input-output decoupling problem via pure dynamic state feedback compensation has been fully solved in Section 4. The results obtained generalize those of [6], [16] and are a first step towards the solution of the input-output decoupling problem via nonregular static state feedback. The problem of nonlinear dynamic equivalence, that is recently receiving attention in the literature (see e.g. [32]), has been considered in Section 5 and solved for invertible input-output linearizable nonlinear systems. These results are a first step towards a generalization of [37] and provide additional insight into some structural aspects of nonlinear inversion.

**Acknowledgments.** The authors wish to thank Jessy Grizzle for his comments on the first version of the manuscript.

## References

- [1] S. Battilotti, "A sufficient condition for nonlinear noninteracting control with stability via dynamic state-feedback for nonlinear affine systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.36, pp.1033-1045, 1991.
- [2] M.D. Di Benedetto, "Nonlinear strong model matching", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, pp. 1351-1354, 1990.
- [3] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle, "Asymptotic and exact model matching for nonlinear systems", Report No. CGR-91-4, University of Michigan, Ann Arbor, September 1991.
- [4] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle and C.H. Moog, "Rank invariants of nonlinear systems", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 27, pp. 658-672, 1989.
- [5] M.D. Di Benedetto and A. Isidori, "The matching of nonlinear models via dynamic state feedback", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 18, pp. 420-436, 1986.
- [6] J.M. Dion and C. Commault, "The minimal delay decoupling problem: feedback implementation with stability", *SIAM J. Contr. Opt.*, 26, pp.66-82, 1988.

- [7] J. Descusse, J.F. Lafay and M. Malabre, "Solution to Morgan's problem", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-33, pp.732-739, 1988.
- [8] J. Descusse and C.H. Moog, "Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems", *Int. J. Control*, vol. 42, pp. 1387-1398, 1985.
- [9] P.F.Falb and W.A.Wolowich, "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol.AC-12, pp. 651-669, 1967.
- [10] M. Fliess, "A new approach to the noninteracting control problem in nonlinear systems theory", *Proc. 23rd Allerton Conf.*, Monticello, IL (Oct. 1985), pp. 123-129.
- [11] M. Fliess, "A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems", *Systems & Control Letters*, vol.8, pp. 147-151, 1986.
- [12] M. Fliess, "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 35, pp. 994-1001, 1990.
- [13] K. Furuta and S. Kan'yama, "State feedback and inverse system", *Int. J. Control*, vol. 25, pp. 229-241, 1977.
- [14] J.W. Grizzle and A. Isidori, "Block noninteracting control with stability via static state feedback", *Math. Control Signals and Systems*, vol.2, pp.315-341, 1989.
- [15] A. Glumineau and C.H. Moog, "The essential orders and nonlinear decoupling", *Int. J. Control*, vol. 50, pp. 1825-1834, 1989.
- [16] M.L.J. Hautus and M. Heymann, "Linear feedback decoupling - transfer function analysis", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-28, pp.823-832, 1983.
- [17] J. Hammer and M. Heymann, "Causal factorization and linear feedback", *SIAM J. Contr. Opt.*, 19(4), pp. 445-468, 1981.
- [18] H.J.C. Huijberts, "A nonregular solution of the nonlinear dynamic disturbance decoupling problem with an application to a complete solution of the nonlinear model matching problem", University of Twente, Memo N° 862, May 1990.
- [19] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer and L.L.M. Van Der Wegen, "Dynamic disturbance decoupling for nonlinear systems", *SIAM J. Contr. Opt.*, to appear, 1992.
- [20] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer and L.L.M. Van Der Wegen, "Dynamic disturbance decoupling for nonlinear systems: the square and noninvertible case", *Controlled dynamical*



systems, B.Bonnard, B.Bride, J.P.Gauthier, J.Kupka (eds.), Birkhauser, Boston, pp.243-252, 1991.

[21] A. Isidori, "Nonlinear feedback, structure at infinity and the input-output linearization problem", *Lect. Notes Control & Inf. Sci.*, Springer Verlag, vol. 58, A.V. Balakrishnan & M. Thoma, eds., pp. 473-493, 1984.

[22] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 2nd Ed., Springer Verlag, Comm. & Contr. Eng. Series, 1989.

[23] A. Isidori and J.W. Grizzle, "Fixed modes and nonlinear noninteracting control with stability", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-33, pp. 907-914, 1988.

[24] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco, "Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-26, pp.331-345, 1981.

[25] A. Isidori and A. Ruberti, "On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems", *Syst. Contr. Lett.*, vol. 4, pp. 17-22, 1984.

[26] J.F. Lafay, P. Zagalak, A. Herrera and S. Icart, "Structural results about the interactor", *Proc. 29th CDC-IEEE*, Honolulu, pp.1048-1049, 1990.

[27] C.H. Moog, "Nonlinear decoupling and structure at infinity", *Math. Contr. Signals Systems*, vol. 1, pp. 257-268, 1988.

[28] C.H. Moog, A.M. Perdon and G. Conte, "Model matching and factorization for nonlinear systems : a structural approach", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 29, pp.769-785, 1991.

[29] A.S.Morse and W.M.Wonham, "Status of noninteracting control", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-16, pp. 568-581, 1973.

[30] H. Nijmeijer and W. Respondek, "Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-33, pp.1065-1070, 1988.

[31] H. Nijmeijer and J.M. Schumacher, "The regular local noninteracting control problem for nonlinear control systems", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 24, pp. 1232-1245, 1986.

[32] J. Rudolph, "Poursuite de modèle: une approche par l'algèbre différentielle", Thèse de l'Université, Paris-Sud, 1991.

- [33] L.M. Silverman, "Inversion of Multivariable Linear Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-14, pp.270-276, 1969.
- [34] S.N. Singh, "A Modified Algorithm for Invertibility in Nonlinear Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-26, pp.595-598, 1981.
- [35] S.N. Singh, "Generalized decoupled-control synthesis for invertible nonlinear systems", *IEE Proc.*, vol. 128, Part D, pp.157-161, 1981.
- [36] K. Wagner, "Nonlinear noninteraction with stability by dynamic state feedback", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 29, pp. 609-622, 1991.
- [37] W.A. Wolovich and P.L. Falb, "Invariants and canonical forms under dynamic compensation", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 14, pp. 996-1008, 1976.

## APPENDIX

## A.1 Inversion algorithm

In this section, the inversion algorithm of [34] is recalled in the version proposed in [4]. Let  $\Sigma$  be a system of the form (2.1).

**Step 1.** By differentiating the output  $y$

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x) u] =: a_1(x) + b_1(x) u$$

Define  $B_1(x) := b_1(x)$ ; and  $s_1 := \text{rank } B_1(x)$ , where the rank is taken over the field of meromorphic functions of  $x$ . Permute, if necessary, the components of the output so that the first  $s_1$  rows of

$B_1(x)$  are linearly independent. Decompose  $y$ , as

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1(x) \\ \hat{a}_1(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{b}_1(x) \\ \hat{b}_1(x) \end{pmatrix} u \quad \text{where } \dot{\bar{y}}_1 \text{ consists}$$

of the first  $s_1$  rows of  $\dot{y}$ . Since the last rows of  $B_1(x)$  are linearly dependent upon the first  $s_1$  rows; there exists a matrix  $M_1(x)$  whose elements are meromorphic functions of  $x$ ; such that  $\hat{b}_1(x) = M_1(x) \bar{b}_1(x)$ . Then; one can write

$$\dot{\bar{y}}_1 = \bar{a}_1(x) + \bar{b}_1(x) u$$

$$\dot{\hat{y}}_1 = \psi_1(x, \dot{\bar{y}}_1),$$

where the last equation is affine in  $\dot{\bar{y}}_1$ . Finally, set  $\bar{B}_1(x) := \bar{b}_1(x)$ .

**Step k+1.** Suppose that, at steps 1 to  $k$ ,  $\dot{\bar{y}}_1, \dots, \dot{\bar{y}}_k, \dot{\hat{y}}_k^{(k)}$  have been defined so that

$$\dot{\bar{y}}_1 = \bar{a}_1(x) + \bar{b}_1(x) u$$

$$\vdots$$

$$\dot{\bar{y}}_k^{(k)} = \bar{a}_k(x, \{\dot{\bar{y}}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k-1, i \leq j \leq k\}) +$$

$$+ \bar{b}_k(x, \{\dot{\bar{y}}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k-1, i \leq j \leq k-1\}) u$$

$$\dot{\hat{y}}_k^{(k)} = \psi_k(x, \{\dot{\bar{y}}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}).$$

Then;  $\dot{\bar{y}}_1, \dots, \bar{y}_k^{(k)}, \hat{y}_k^{(k)}$  are rational functions of  $\bar{y}_i^{(j)}$  with coefficients in the field of meromorphic functions of  $x$ . Suppose also that the matrix  $\bar{B}_k := [\bar{b}_1^T, \dots, \bar{b}_k^T]^T$  has full rank equal to  $s_k$ . Then calculate

$$\begin{aligned} \hat{y}_k^{(k+1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_k [f(x) + g(x)u] + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{y}_i^{(j)}} \bar{y}_i^{(j+1)} \\ &= \hat{a}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) \\ &\quad + \hat{b}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) u. \end{aligned}$$

Define  $B_{k+1} := [\bar{B}_k^T, \hat{b}_{k+1}^T]^T$  and  $s_{k+1} := \text{rank } B_{k+1}$ , where the rank is taken with respect to the field of rational functions of  $\{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k-1, i \leq j \leq k\}$  with coefficients in the field of meromorphic functions of  $x$ . Permute, if necessary; the components of  $\hat{y}_k^{(k+1)}$  so that the first  $s_{k+1}$  rows of  $B_{k+1}$  are linearly independent. Decompose  $\hat{y}_k^{(k+1)}_{2 \leq}$

$$\begin{aligned} \hat{y}_k^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} \bar{y}_{k+1}^{(k+1)} \\ \hat{y}_{k+1}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) \\ \hat{a}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \bar{b}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) \\ \hat{b}_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

where  $\bar{y}_{k+1}^{(k+1)}$  consists of the first  $(s_{k+1} - s_k)$  rows. Since the last rows of  $B_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\})$  are linearly dependent upon the first  $s_{k+1}$  rows; there exists a matrix  $M_{k+1}(x, \{\bar{y}_i^{(j)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\})$  whose elements are rational functions of  $\bar{y}_i^{(j)}$ ;  $1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k$ ; with meromorphic coefficients in  $x$ , such that  $\hat{b}_{k+1}(x) = M_{k+1}(x) \bar{b}_{k+1}(x)$ . Then, one can write

$$\dot{\bar{y}}_1 = \bar{a}_1(x) + \bar{b}_1(x) u$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \bar{y}_{k+1}^{(k+1)} &= \bar{a}_{k+1} (x, \{\bar{y}_i^{(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) + \\ & + \bar{b}_{k+1} (x, \{\bar{y}_i^{(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) u \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{y}_{k+1}^{(k+1)} = \Psi_{k+1} (x, \{\bar{y}_i^{(0)} \mid 1 \leq i \leq k+1, i \leq j \leq k+1\});$$

Finally, set  $\bar{B}_{k+1} := [\bar{B}_k^T, \dots, \bar{b}_{k+1}^T]^T$ . End of step  $k+1$ .  $\square$

## A.2 Proof of Theorem 2.5

Consider a regular pure dynamic state feedback (RDF), described by (2.2), where the matrix  $G$  is square and invertible. Apply to  $\Sigma \circ \text{RDF}$  the regular static state feedback

$$v = -G^{-1}(\xi, x) F(\xi, x) + G^{-1}(\xi, x) u$$

Then, if one recalls that the structure at infinity and the essential structure are invariant under regular static state feedback, the result follows.

Conversely, let (DC) be a dynamic state feedback of the form (2.2) with  $s = m$ . The compensated system  $\Sigma \circ \text{DC}$  is described by equations of the form

$$\dot{x} = f(x) + g(x) [F(\xi, x) + G(\xi, x) v]$$

$$\dot{\xi} = M(\xi, x) + N(\xi, x)v$$

$$y^c = h(x)$$

We apply to  $\Sigma \circ \text{DC}$  the inversion algorithm as described in Section A.1. The resulting quantities  $B_k^c, \Psi_k^c$ , etc. for this system will be denoted with a superscript  $c$ . At step 1, one has

$$\dot{y}^c = a_1^c(x, \xi) + b_1^c(x, \xi)v$$

where

$$b_1^c(x, \xi) = b_1(x) G(\xi, x) \quad (\text{A.2})$$

and  $\text{rank } b_1^c(\xi, x) = s_1 = \text{rank } b_1(x)$  by hypothesis. Define  $B_1^c(x, \xi) = b_1^c(x, \xi)$ . There exists a permutation of the outputs and a partition  $y^c = (\bar{y}_1^c, \hat{y}_1^c)$  such that

$$\dot{y}^c = \begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_1^c \\ \dot{\hat{y}}_1^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1^c(x, \xi) \\ \hat{a}_1^c(x, \xi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{b}_1(x) \\ \hat{b}_1(x) \end{pmatrix} G(\xi, x) v$$

where  $\text{rank } \bar{b}_1(x) = s_1$ . Therefore,  $\dot{\hat{y}}_1^c$  can be expressed as

$$\dot{\hat{y}}_1^c = M_1(x) \dot{\bar{y}}_1^c - M_1(x) \bar{a}_1^c(x, \xi) + \hat{a}_1^c(x, \xi)$$

But

$$\bar{a}_1^c(x, \xi) = L_{f+gF} \bar{y}_1, \quad \hat{a}_1^c(x, \xi) = L_{f+gF} \hat{y}_1,$$

and since  $L_g \hat{y}_1 = M_1(x) L_g \bar{y}_1$ , one has

$$\hat{a}_1^c(x, \xi) - M_1(x) \bar{a}_1^c(x, \xi) = \hat{a}_1(x) - M_1(x) \bar{a}_1(x)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_1^c &= M_1(x) \dot{\bar{y}}_1^c - M_1(x) \bar{a}_1(x) + \hat{a}_1(x) \\ &= \psi_1^c(x, \dot{\bar{y}}_1^c) \end{aligned} \tag{A.3}$$

where  $\psi_1^c = \psi_1$ . Set  $B_1^c(x, \xi) = b_1(x) \cdot G(\xi, x)$ . We now prove by recursion that, at each step  $k$ ,

$$B_k^c(x, \xi, \{y_i^c \text{ }^{(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) = B_k(x, \{y_i^c \text{ }^{(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) G(\xi, x) \tag{A.4}$$

and

$$\Psi_k^c = \Psi_k \quad (A.5)$$

This is true for  $k = 1$  (see (A.2), (A.3)). Assume it is true for  $k$ . Then, at step  $k+1$ , we compute

$$\hat{y}_k^{c(k+1)} = \hat{a}_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) + b_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) v$$

where

$$\begin{aligned} b_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)}\}) &= [L_{\xi} \Psi_k^c(x, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\})] G(\xi, x) \\ &= b_{k+1}(x, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) G(\xi, x) \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\text{Set } B_{k+1}^c = [B_k^c, b_{k+1}^c]^T.$$

By (A.6), (A.4) holds for  $k+1$ . Moreover, since the generic ranks of  $B_{k+1}^c$  and  $B_{k+1}$  are equal by hypothesis, one can write

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1}^{c(k+1)} &= \hat{a}_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k+1\}) + \hat{b}_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)} \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) v \\ &= \hat{a}_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)}\}) + M_{k+1}(x, \{y_i^{c(0)}\}) [y_{k+1}^{c(k+1)} - \hat{a}_{k+1}^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)}\})] \end{aligned}$$

But, since  $(L_{\xi} \hat{\Psi}_k) F = M_{k+1} (L_{\xi} \tilde{\Psi}_k) F$ ,

$$\hat{a}_{k+1}^c - M_{k+1} \hat{a}_{k+1}^c = L_{\xi} \hat{\Psi}_k - M_{k+1} L_{\xi} \tilde{\Psi}_k$$

Hence;

$$\hat{y}_{k+1}^{c(k+1)} = \hat{a}_{k+1}^c - M_{k+1} \hat{a}_{k+1}^c + M_{k+1} y_{k+1}^{c(k+1)} = \Psi_{k+1}^c(x, \{y_i^{c(0)}\})$$

and  $\Psi_{k+1}^c = \Psi_{k+1}$ , so that (A.5) holds for  $k+1$ .

By hypothesis,  $\Sigma$  is square and invertible so that  $\Sigma \circ DC$  remains square and invertible because (DC) is square and does not modify the structure at infinity. Hence  $B_n^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)}\})$  is square and invertible. By (A.4),  $B_n^c(x, \xi, \{y_i^{c(0)}\}) = B_n(x, \{y_i^{c(0)}\}) G(\xi, x)$ . Hence, the generic rank of  $G$  is  $m$  and the result follows.  $\square$

### A.3. Proof of Proposition 3.3

The same notations as in the proof of Theorem 2.5 are used; a superscript  $c$  indicates the quantities corresponding to the controlled system  $\Sigma \circ Q$ . A regular static state feedback  $Q$  of the form  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  can be viewed as a regular pure dynamic state feedback of the form (2.2) with  $q = 0$ . Then, from the proof of Theorem 2.5, at each step  $k$  of the inversion algorithm, (A.4) and (A.5) hold, i.e.

$$B_k^c(x, \{\tilde{y}_i^c \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) = B_k(x, \{\tilde{y}_i^c \mid 1 \leq i \leq k, i \leq j \leq k\}) \beta(x)$$

and

$$\Psi_k^c = \Psi_k \tag{A.7}$$

Now, note that each step of the interactor algorithm consists of an inversion which can be performed in a unique way, since no permutation of the outputs is allowed. Then, from (A.7),

$$\Phi_k^c = \Phi_k \Big|_{u = \alpha(x) + \beta(x)v} \quad \text{where } \Phi_k \text{'s are}$$

the functions defined in (3.2), and the result follows.  $\square$





**Annexe 5. Interconnected Zero Dynamics in Non linear Systems  
and their Role in Dynamic Non interacting Control with Stability**

---

Annexe 5 . A. Glumineau and C.H. Moog and T.J. Tarn, *Proc. Genoa Conf. 'New Trends in Systems Theory'*, 9-11 July 1990, Birkhäuser, pp. 316-323, ISBN 0-8176-3548-3, ISBN 3-7643-3548-3, 1991.

## Interconnected Zero Dynamics in Nonlinear Systems and their Role in Dynamic Noninteracting Control with Stability<sup>1</sup>

A. Glumineau<sup>2</sup>, C. H. Moog<sup>2</sup> and T. J. Tam<sup>3</sup>

*Abstract : One discusses the problem of reducing the fixed dynamics in decoupled systems. One shows that a dynamic compensator is able to cancel only those dynamics which have a certain linearity property.*

### I. Introduction

When solving the noninteracting control problem, some dynamics may be fixed, i.e. they will exist as a part of the unobservable dynamics using any decoupling static state feedback solution. This is the case for linear systems as well as for nonlinear systems (see [1], [2] and references therein). In the linear situation these fixed dynamics are associated to the so-called *interconnection zeros* of the system [1]. That terminology is used in this paper for nonlinear systems as well. Recently, Isidori and Grizzle fully identified these fixed dynamics and showed that, in opposition to the linear case [5], they could not always be removed by using dynamic state feedback control [2]. Wagner gave a necessary condition for such a fixed dynamics to be removable by dynamic state feedback [4].

We contribute in this paper to the problem of removing a one-dimensional interconnection zero dynamics via dynamic feedback. First we give a sufficient condition for the solvability of the problem. Then we show that the latter is also necessary at least for a two inputs-two outputs system and considering a special class of change of coordinates.

Given a decoupled system  $\Sigma$  as

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x_i) u_i \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\dot{z} = Z_1(x, z) + \sum_{i=1}^m Z_{2i}(x, z) u_i \quad (2)$$

$$y_i = h_i(x_i) \quad (3)$$

where  $x_i$  belongs to  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $z$ ,  $y_i$ , and  $u_i$  belong to  $\mathbb{R}$ , for  $i = 1, \dots, m$ . Assume that the unobservable part of  $\Sigma$  is reduced to  $P^* = \bigcap_{1 \leq i \leq m} P_i^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \right\}$  where  $P_i^*$  is the maximal regular

controllability distribution contained in  $\ker dh_i$ . The problem under interest may be stated as follows.

Find, if possible, a dynamic extension

$$\dot{x}_2 = F_2(x, z, x_2) + G_2(x, z, x_2) u \quad (4)$$

and

$$\dot{x}_{2i} = X_i(x, z, x_2) \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (5)$$

such that  $(x, x_{21}, \dots, x_{2m})$  defines locally a change of variables of  $(x, z, x_2)$  and

<sup>1</sup> Work performed while the third author was visiting the laboratoire d'Automatique de Nantes with the support of C.N.R.S.

<sup>2</sup> Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité Associée au C.N.R.S., E.N.S.M., 1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03, FRANCE.

<sup>3</sup> Washington University, P.O. Box 1040, Saint Louis, MI 63130, U.S.A.

$$\dot{x}_{2i} = f_{2i}(x_1, x_{2i}) + E_{2i}(x_1, x_{2i}) u_i \quad (6)$$

**Remark** The extended system reduces now into  $p$  subsystems given by (1) and (6) only : there is no more interconnection zero dynamics. The problem of its stabilization is now a problem of SISO systems stabilization.

## 2. A sufficient condition.

Motivated by some examples in the literature [2], [4], one may derive a sufficient condition for the solvability of the problem under interest.

### Lemma 1

Assume there exists a local change of coordinates  $(x_1, \dots, x_m, \xi)$  for  $\Sigma$ , such that

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^m [Z_{1i}(x_i) + Z_{2i}(x_i) u_i] + \lambda \xi \quad (7)$$

then there exists a dynamic state feedback (4) which transforms system  $\Sigma$  into a decoupled system with no interconnected zero dynamics.

**Proof :**

The dynamic extension

$$\dot{x}_{2i} = Z_{1i}(x_i) + Z_{2i}(x_i) u_i + \lambda x_{2i} \quad \text{for } i = 1, \dots, m-1 \quad (8)$$

and the change of variable

$$x_{2m} = \xi - \sum_{i=1}^{m-1} x_{2i} \quad (9)$$

yield

$$\dot{x}_{2m} = Z_{1m}(x_m) + Z_{2m}(x_m) u_m + \lambda x_{2m} \quad (10)$$

The extended system defined by equations (1), (8), (10) and (3) satisfies the claim since it reduces to the set of  $m$  subsystems whose state is  $(x_i, x_{2i})$  for  $i=1, \dots, m$ .  $\square$

## 3. Main result : a necessary and sufficient condition.

In this section, we restrict our attention to the special case where  $\Sigma$  is a two inputs-two outputs decoupled system with one interconnected zero dynamics :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1) u_1 \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_2) u_2 \quad (12)$$

$$\dot{z} = Z_1(x_1, x_2, z) + Z_{21}(x_1, x_2, z) u_1 + Z_{22}(x_1, x_2, z) u_2 \quad (13)$$

$$y_1 = h_1(x_1) \quad (14)$$

$$y_2 = h_2(x_2) \quad (15)$$

The main restriction in this section is on the class of transformations which is used. We seek a solution which consists in a dynamic extension as

$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) + G_2(x_1, x_2) u_1 \quad (16)$$

and a change of variable  $(x_1, x_2, x_{21}, x_{22})$  where

$$x_{21} = x_2 \quad (17)$$

and

$$x_{22} = X_2(z, x_2)$$

Then the following holds.

Theorem 2

There exist a dynamic extension (16) and a local change of variable (17) such that

$$\dot{x}_{a2} = f_{a2}(x_2, x_{a2}) + g_{a2}(x_2, x_{a2}) u_2 \quad (18)$$

if and only if

a) equation (13) reads

$$\dot{z} = R(z) \left[ Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda \int \frac{1}{R(z)} dz \right] \quad (19)$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}$

or, equivalently

b) there exists  $\xi = \varphi(z)$  such that  $(x_1, x_2, \xi)$  defines a change of variables for  $(x_1, x_2, z)$

and

$$\dot{\xi} = Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda \xi \quad (20)$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Remark 3

As quoted in the introductory section, Theorem 1 gives a NSC since the  $P^*$  part of the extended system  $\Sigma_c$  is requested to be empty:  $\Sigma_c$  splits into two decoupled subsystems whose states are  $(x_1, x_{a1})$  and  $(x_2, x_{a2})$ .

Proof of theorem 2.

First prove that (a) and (b) are equivalent.

(b)  $\Rightarrow$  (a)

With the abusive notation  $\xi = \xi(z)$ ,  $\partial \xi / \partial z$  being non zero, and together with (20),

one obtains

$$\dot{z} = [ Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda \xi(z) ] \frac{1}{\partial \xi / \partial z}$$

$$\text{Let } R(z) = \frac{1}{\partial \xi / \partial z}$$

$$\text{then } \xi(z) = \int \frac{1}{R(z)} dz$$

which yields (19).

(a)  $\Rightarrow$  (b)

Let  $\xi(z) = \int \frac{1}{R(z)} dz$  and the result follows.

Sufficiency of (b)

Define the dynamic extension

$$\dot{x}_{a1} = Z'_{11}(x_1) + Z'_{21}(x_1) u_1 + \lambda x_{a1}$$

and the transformation

$$x_{a2} = \xi - x_{a1}$$

Hence  $(x_1, x_2, x_{a1}, x_{a2})$  is a change of variables for  $(x_1, x_2, x_{a1}, \xi)$  and

$$\dot{x}_{a2} = Z'_{12}(x_2) + Z'_{22}(x_2) u_2 + \lambda x_{a2}$$

which yields the desired form for  $\Sigma_c$ .

Necessity of (b)

The necessity is proved gradually through the proofs of a couple of Lemmas.

Lemma 3 essentially tells that there is no product involving a variable of subsystem 1 and a variable of subsystem 2, as  $x_1 x_2$ , in the RHS of (13). This is strongly related to Wagner's result [4].

Lemma 3

If there exists a dynamic extension (16) such that the extended system  $\Sigma_e$ , given by (11-16), has no interconnection zero dynamics, then (13) reads

$$\dot{z} = Z_{11}(x_1, z) + Z_{12}(x_2, z) + Z_{21}(x_1, z) u_1 + Z_{22}(x_2, z) u_2$$

Lemma 4

If there exists a dynamic extension (16) such that the extended system  $\Sigma_e$  has no interconnection zero dynamics, then (13) reads

$$\dot{z} = [ Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + Q(z) ] R(z)$$

and (16) reads

$$\dot{x}_2 = [ Z'_{11}(x_1) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Q_2(x_2) ] R_2(x_2)$$

The proof of Lemma 3 is given in Appendix A and the proof of Lemma 4 can be found in Appendix B. The proof of the necessity of (b) is then completed in Appendix C.

**4. Concluding Remarks**

In this paper we were interested in the notion of interconnected zero dynamics which could be canceled by a proper choice of a dynamic compensator. Although the class of such compensators has been limited, Theorem 2 gives a NSC which shows that a cancellation of the interconnected zero dynamics may occur if and only if it is intrinsically *linear* and displays a *separation* between the variables of the different decoupled subsystems.

Actually Theorem 2 can be generalized in a straightforward manner to a MIMO system that has a vector interconnected zero dynamics; such a generalization then yields a condition for the cancellation of the overall interconnected zero dynamics. Now the open problems are mainly:

- to find a condition for a general class of transformations,
- and in the multivariable case, to identify the subdynamics of the interconnected zero dynamics which can be canceled by dynamic compensation.

**Acknowledgement :** The authors wish to thank Sylvie Icart for helpful discussions.

## Appendix A - Proof of Lemma 3

From (13), (16) and (17), compute

$$\begin{aligned} \dot{x}_{22} &= \frac{\partial x_{22}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= \frac{\partial x_{22}}{\partial z} [ Z_1(x_1, x_2, z) + Z_{21}(x_1, x_2, z) u_1 + Z_{22}(x_1, x_2, z) u_2 ] \\ &\quad + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} [ F_2(x_1, x_2) + G_2(x_1, x_2) u_1 ] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Since

$$\dot{x}_{22} = f_{22}(x_2, x_{22}(z, x_2)) + g_{22}(x_2, x_{22}(z, x_2)) u_2$$

the  $u_1$  term vanishes in (A.1) and consequently

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z} [ Z_{21}(x_1, x_2, z) ] + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} [ G_2(x_1, x_2) ] = 0 \quad (\text{A.2})$$

Since the latter does not depend on  $x_2$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial x_{22}}{\partial z} Z_{21}(x_1, x_2, z) \right] &= 0 \\ \text{or} \quad \frac{\partial x_{22}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_2} Z_{21}(x_1, x_2, z) &= 0 \end{aligned}$$

Since  $\frac{\partial x_{22}}{\partial z}$  is nonzero, it follows

$$\frac{\partial}{\partial x_2} Z_{21}(x_1, x_2, z) = 0$$

and, with an abuse of notation, one has

$$Z_{21} = Z_{21}(x_1, z)$$

Now (A.1) reads

$$\dot{x}_{22} = \frac{\partial x_{22}}{\partial z} [ Z_1(x_1, x_2, z) + Z_{22}(x_1, x_2, z) u_2 ] + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} [ F_2(x_1, x_2) ]$$

Since the RHS of (A.1) can not depend on  $x_1$ , we get

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z} \left[ \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, z) + \frac{\partial Z_{22}}{\partial x_1}(x_1, x_2, z) u_2 \right] + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$$

and then

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z} \left[ \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, z) \right] + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{A.3})$$

and

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z} \frac{\partial Z_{22}}{\partial x_1}(x_1, x_2, z) = 0 \quad (\text{A.4})$$

(A.4) implies

$$Z_{22} = Z_{22}(x_2, z)$$

and (A.3) yields

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, z) = 0$$

thus

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}(x_1, z)$$

and then

$$Z_1 = Z_{11}(x_1, z) + Z_{12}(x_2, z)$$

This ends the proof of Lemma 3 and

$$\dot{x}_{a2} = \frac{\partial x_{a2}}{\partial z} [Z_{11}(x_1, z) + Z_{12}(x_2, z) + Z_{22}(x_2, z) u_2] + \frac{\partial x_{a2}}{\partial x_a} [F_a(x_1, x_a)] \quad (A.5)$$

□

### Appendix B - Proof of Lemma 4

From Lemma 3, equation (A.3) reads

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x_{a2}}{\partial z}(z, x_a) \frac{\partial Z_{11}}{\partial x_1}(x_1, z) + \frac{\partial x_{a2}}{\partial x_a}(z, x_a) \frac{\partial F_a}{\partial x_1}(x_1, x_a) = 0 \\ \text{or equivalently} & \quad \left\langle dx_{a2}, \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_{11}}{\partial x_1}(x_1, z) \\ \frac{\partial F_a}{\partial x_1}(x_1, x_a) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (B.1)$$

Since  $x_{a2}$  does not depend on  $x_1$  in (17), we can write

$$\frac{\partial Z_{11}}{\partial x_1}(x_1, z) = Z''_{11}(x_1) R(z)$$

and

$$\frac{\partial F_a}{\partial x_1}(x_1, x_a) = Z''_{11}(x_1) R_a(x_a)$$

Thus

$$Z_{11}(x_1, z) = Z'_{11}(x_1) R(z) + \gamma(z) \quad (B.2)$$

and

$$F_a(x_1, x_a) = Z'_{11}(x_1) R_a(x_a) + \delta(x_a) \quad (B.3)$$

From (B.1) one has either  $\langle dx_{a2}, \begin{pmatrix} R(z) \\ R_a(x_a) \end{pmatrix} \rangle = 0$  or  $Z''_{11} = 0$ . Let us consider the first case and define

$$\omega = \int \frac{1}{R(z)} dz - \int \frac{1}{R_a(x_a)} dx_a \quad (B.4)$$

then

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} R(z) \\ R_a(x_a) \end{pmatrix} \right\}^\perp = \text{span} (d\omega)$$

which yields

$$x_{a2} = x_{a2}(\omega(z, x_a)) \quad (B.5)$$

Now

$$\dot{x}_{a2} = \frac{\partial x_{a2}}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \omega}{\partial x_a} \dot{x}_a \right)$$

From (A.5), (B.2), (B.3) and (B.4) one gets

$$\begin{aligned} \dot{x}_{a2} &= \frac{\partial x_{a2}}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{R(z)} (Z'_{11}(x_1) R(z) + \gamma(z) + Z_{12}(x_2, z) + Z_{22}(x_2, z) u_2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{R_a(x_a)} (Z'_{11}(x_1) R_a(x_a) + \delta(x_a)) \right] \\ &= \frac{\partial x_{a2}}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{R(z)} (Z_{12}(x_2, z) + \gamma(z)) - \frac{\delta(x_a)}{R_a(x_a)} + \frac{Z_{22}(x_2, z)}{R(z)} u_2 \right] \end{aligned}$$

Using (18) one obtains

$$\dot{x}_{a2}(x_2, x_{a2}) = \frac{\partial x_{a2}}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{R(z)} (Z_{12}(x_2, z) + \gamma(z)) - \frac{\delta(x_a)}{R_a(x_a)} \right] \quad (B.6)$$



and

$$E_{22}(x_2, x_2) = \frac{\partial x_{22}}{\partial \omega} \frac{Z_{22}(x_2, z)}{R(z)} \quad (\text{B.7})$$

Let 
$$\varphi(x_2, \omega) := \frac{E_{22}(x_2, \omega)}{\partial x_{22} / \partial \omega} = \frac{Z_{22}(x_2, z)}{R(z)}$$

thus 
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0$$

and 
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0$$

Consequently 
$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{Z_{22}(x_2, z)}{R(z)} = 0$$
 and  $Z_{22} = Z'_{22}(x_2) R(z)$ .

In a similar vein, differentiate (B.6) w.r.t  $x_2$ , and obtain:

$$\frac{\frac{\partial E_{12}(x_2, \omega)}{\partial x_2}}{\frac{\partial x_{12}}{\partial \omega}} = \frac{1}{R(z)} \frac{\partial Z_{12}}{\partial x_2}(x_2, z)$$

which does not depend on  $x_2$  and consequently

$$\frac{\partial Z_{12}}{\partial x_2} = Z'_{12}(x_2) R(z)$$

thus

$$Z_{12} = Z'_{12}(x_2) R(z) + r(z)$$

Now (A.2) becomes

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{R(z)} Z_{21}(x_1, z) - \frac{1}{R_2(x_2)} G_2(x_1, x_2) \right] = 0$$

thus

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{R_2(x_2)}{R(z)} Z_{21}(x_1, z)$$

which yields

$$Z_{21}(x_1, z) = Z'_{21}(x_1) R(z)$$

and consequently

$$G_2(x_1, x_2) = Z'_{21}(x_1) R_2(x_2)$$

In the case where  $Z'_{11}$  is zero, the study reduces to

$$\dot{z} = \gamma(z) + Z_{21}(x_1, z) u_1 + Z_{22}(x_2, z) u_2$$

$$\dot{x}_2 = \delta(x_2) + G_2(x_1, x_2) u_1$$

Starting from

$$\frac{\partial x_{22}}{\partial z}(z, x_2) \frac{\partial Z_{21}}{\partial x_1}(x_1, z) u_1 + \frac{\partial x_{22}}{\partial x_2}(z, x_2) \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) u_1 = 0$$

one gets either  $\langle dx_{22}, \begin{pmatrix} R(z) \\ R_2(x_2) \end{pmatrix} \rangle = 0$  or  $\dot{z} = \gamma(z)$ . The latter contradicts our basic assumption

$P^* = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ , then the proof of Lemma 4 follows the previous lines.  $\square$

## Appendix C - Proof of the necessity of (b) in theorem 2

From lemma 4, one has

$$\frac{\dot{z}}{R(z)} = Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + Q(z)$$

$$\text{Let } \xi = \int \frac{1}{R(z)} dz$$

$$\text{then } \dot{\xi} = Z'_{11}(x_1) + Z'_{12}(x_2) + Z'_{21}(x_1) u_1 + Z'_{22}(x_2) u_2 + p(\xi)$$

In a similar vein let

$$\xi_a = \int \frac{1}{R_a(x_a)} dx_a$$

and then

$$\dot{\xi}_a = Z'_{11}(x_1) + Z'_{21}(x_1) u_1 + p_a(\xi_a)$$

one gets  $\omega = \xi - \xi_a$

$$\text{and } \dot{\omega} = Z'_{12}(x_2) + Z'_{22}(x_2) u_2 + p(\xi) - p_a(\xi_a)$$

From (18) and (B.5), there necessarily exists a function F such that

$$p(\xi) - p_a(\xi_a) = F(\xi - \xi_a)$$

Thus

$$dF = \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi - \frac{dp_a(\xi_a)}{d\xi_a} d\xi_a$$

$$\in \text{span} \{ d\xi - d\xi_a \}$$

consequently

$$\frac{dp(\xi)}{d\xi} = \frac{dp_a(\xi_a)}{d\xi_a}$$

$$= \lambda \in \mathbb{R}$$

and the result follows. □

## References

- [1] S. Icart, J.F. Lafay and M. Malabre, A Unified Stability of the Fixed Modes of Systems Decoupled via Regular Static State Feedback, *this volume*, 1990.
- [2] A. Isidori and J.W. Grizzle, Fixed Modes and Nonlinear Control with Stability, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, 33, 1988, pp. 907-914.
- [3] T. Koussioris, A Frequency Domain Approach to the Block Decoupling Problem II : Pole Assignment while Block Decoupling a Minimal System by State Feedback and a Constant Non Singular Input Transformation and the Observability of the Block Decoupled System, *Int. J. Contr.*, 32, 1980, pp. 443-464.
- [4] K. Wagner, On Nonlinear Noninteraction with Stability, *Proc. 28th CDC, Tampa, 1989*, pp.1994-1999.
- [5] W.M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 2nd ed., Springer Verlag, Berlin, 1979.

**Annexe 6. Plane flexible robot modelisation and application to  
the control of an elastic arm**

---

Annexe 6. P. Chedmail, A. Glumineau and J.C. Bardaux, "Plane flexible modelisation and application to the control of an elastic arm", Proc. ICAR'87, Versailles, France, pp.525-536, 1987.

PLANE FLEXIBLE ROBOT MODELISATION AND  
APPLICATION TO THE CONTROL OF AN ELASTIC ARM

CHEDMAIL P., GLUMINEAU A. and BARDIAUX J.C.

L.A.N. (U.A. 523 du C.N.R.S.) and L.M.T., E.N.S.M. Nantes  
1, rue de la Noë, Nantes 44072, FRANCE  
Tel: 40 37 16 00

ABSTRACT

The object of this paper is to present a model of plane flexible robot and an application to the control of a flexible arm. The techniques used in dynamic control of rigid robots are not efficient. Therefore we use nonlinear control theory of static state feedback; we show that it correctly works in this case. This computation is very difficult to perform by hand, and so we have developed a general software using a symbolic programming language -REDUCE-. Finally the simulations show that the control laws we obtain are realistic and compatible with the technical constraints on the actuators, the structure and the process control computer.

## INTRODUCTION

The control of robots which move faster and faster, needs to be able to take into account the dynamic behaviour of their mechanical structure. Usually the dynamic modelisation of robots has been performed considering the links as rigid bodies (see [17], [20]). This approach is not efficient when the elastic modes of the structure are excited. This is the case when the robot stiffness (the structural or the transmission stiffness) is low versus its other parameters.

Different works have been done about the modelisation of robots taking into account the elastic behaviour of the structure. The infinite number of elastic degrees of freedom is commonly reduced to a finite one using either the modal approach [24], [4] or the finite element approach [21], [14], [1], [3]. A third one has been proposed by [7]: he introduces fictitious joints and springs; the stiffness is identified on the real structure. Concerning the finite element method, there are different representations: Updated Lagrangian [1], or Total Lagrangian. This last one may refer the elastic degrees of freedom of the links to the rigid configuration of the whole robot [14] or to the rigid one of the considered link. That is the way we have used. The detail of this modelisation has been described in [6] and its experimental validation has been performed in [5]. We first recall in this paper the structure of the model in the case of one flexible link.

The second part of this paper concerns the control of a flexible link using the described modelisation. Recent developments in nonlinear control theory are mainly due to the use of differential geometry. Certain distributions are used in order to treat the nonlinear decoupling problem [15], [16]. Claude, Fliess and Isidori [8] present a direct and feedback immersion of a nonlinear system in a linear system.

In many applications these results are used: control of a ship moored to a single point [18], [9], control of rigid robot arms [22], [2]. Recent works deal with the control of robot arms with elastic joints by feedback decoupling [13], [12]. In the latter, dynamic feedback is used. A dynamic compensator algorithm is presented in [11]. We describe here an application of these techniques to the control of a flexible arm.

Finally, we give simulation results concerning the behaviour of one flexible link with the control laws we have obtained.

## MODELLISATION OF PLANE FLEXIBLE ROBOTS

We consider a plane structure of a robot with  $n_1$  rotational joints and  $n_2$  links which are supposed to be elastic (see Fig. 1). The elastic displacements are small and the rigid ones may be large. The elastic displacements are referred to the rigid configuration of the link (see Fig. 2). The links are supposed to be beams.

Let us consider for each link ( $i$ ) the following parameters:

$\theta_1$  is the rotation of the origin section  $A_1$  -that is the rigid degree of freedom-,

$v_{B_i}$  and  $\theta_{B_i}$  are the displacement and the rotation of section  $B_i$  -they represent the elastic degrees of freedom (see Fig. 3)-.

Each link is discretized with one pure plane flexion finite element. The Lagrange's multipliers technique will enable us to discretize with several elements. We use Hermite's interpolation functions  $N(x)$  [23]. The plane deflection is

$$v_i(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B_i} \\ \theta_{B_i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

where  $N_1(x) = 3x^2/l_i^2 - 2x^3/l_i^3$  and  $N_2(x) = -x^2/l_i + x^3/l_i^2$ .

Point  $M_i$  coordinates are (where  $M_i$  is a point of a cross section -abscissa  $x$ - of link  $i$ ) :

$$\Lambda_i M_i = xu_i + yv_i + zz_i \quad (\text{in the undeformed configuration}),$$

and in the deformed configuration :

$$\Lambda_i M_{di} = (x - y \frac{\partial v}{\partial x})u_i + (y + v(x))v_i + zz_i \quad (2)$$

Let us note  $q$  the global vector of the degrees of freedom :

$$q^T = [\theta_1, v_{B1}, \theta_{B1}, \dots, \theta_i, v_{Bi}, \theta_{Bi}, \dots, \theta_{nl}, v_{Bnl}, \theta_{Bnl}]$$

then

$$OM_{di} = \sum_{j=1}^{i-1} (l_j u_j + v_{Bj} v_j) + \Lambda_i M_{di}$$

The virtual displacement corresponding to a variation  $\delta q$  is

$$\delta OM_{di} = \sum_{j=1}^{i-1} (l_j \delta \theta_j v_j + \delta v_{Bj} v_j - v_{Bj} \delta \theta_j u_j) + \delta \Lambda_i M_{di} \quad (3)$$

where  $\delta \Lambda_i M_{di}$  is linear in  $\delta \theta_j, \delta v_{Bj}, \delta \theta_{Bj}$ .

The virtual work principle expresses the dynamic equilibrium of the whole structure :

$$\delta T_a = \delta T_{IF} + \delta T_{EF}, \quad \forall \delta q \quad (4)$$

where  $\delta T_a$  is the virtual work of the acceleration quantities associated to  $\delta q$ ,

$\delta T_{IF}$  is the virtual work of the internal forces,

$\delta T_{EF}$  is the virtual work of the external forces.

It has been demonstrated that Eq. (4) implies that

$$A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + Kq = GAM \quad (5)$$

where  $A, B, C$  have been described in [6]; these matrices correspond to  $\delta T_a$ .

$K$  corresponds to the deformation of the beams,

$GAM$  corresponds to the actuators torques and the constant friction torques in the joints :

$$GAM^T = [T_1 - T_2, 0, -T_2, \dots, T_{i-1} - T_i, 0, -T_i, \dots, T_{nl}, 0, 0]$$

where

$$T_i = T_{ai} + T_{fri}$$

$T_{ai}$  is the torque of the actuator (i),

$T_{fri}$  is the constant friction torque of joint (i) ( $T_{fri}$  sign is the opposite of  $(\theta_i - \theta_{i-1} - \theta_{Bi-1})$  sign).

In the case of a modelisation with several finite elements on each link, we can express a relation between the degrees of freedom of the elements  $k$  and  $k+1$  considering a rigid joint between  $k$  and  $k+1$  (see Fig. 2)

$$\theta_{k+1} - \theta_k - \theta_{Bk} = \alpha_k \quad (\text{constant}) \quad (6)$$

We get a similar relation with all the other elements and finally it results a set of linear relations

$$Lq = M$$

where  $M$  is the constant  $(1,1)$  vector (with the  $\alpha_k$ ) and  $L$  is a constant  $(1,3n)$  matrix corresponding to Eq. 6. If we introduce the  $n$  Lagrange's multipliers  $\lambda_k$ , Eq. (4) becomes

$$\begin{aligned} \Lambda \ddot{q} + B \dot{q} \dot{q} + C \dot{q}^2 + Kq &= GAM + L^T \lambda \\ Lq &= M \end{aligned} \quad (7)$$

This modelisation has been validated, on an experimental device, in the cases of one and two axes. The simulation of the model with an open controlled loop gives results with an error which is lower than 10% on the variables  $q$  (see [5]).

In the case of a flexible link,  $n_1=1$  and the matrices  $\Lambda$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  and  $GAM$  are reduced to the following ones :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mu(1+S\frac{l^3}{8})+J_A+J_B+m_c l^2 & \mu(1+7S\frac{l^2}{20})+m_c l & -\mu S\frac{l^2}{20}+J_B \\ \mu(1+7S\frac{l^2}{20})+m_c l & \mu(\frac{6l}{5l}+13\frac{Sl}{35}) & -\mu(\frac{l}{10}+11\frac{Sl^2}{210}) \\ -\mu\frac{Sl^3}{20}+J_B & -\mu(\frac{l}{10}+11\frac{Sl^2}{210}) & \mu(\frac{2l}{15}+\frac{Sl^3}{105})+J_B \end{bmatrix}$$

$$B = 0$$

$$C : C_{ij} = 0, \quad \text{for } (i,j) \text{ different of } (2,1) \text{ and } (3,1).$$

$$C_{21} = -m_c v_B + \mu(-\frac{6l}{5l}+13\frac{Sl}{35})v_B + (\frac{l}{10}+11\frac{Sl^2}{210})\theta_B$$

$$C_{31} = \mu(\frac{l}{10}+11\frac{Sl^2}{210})v_B - (\frac{2l}{15}+\frac{Sl^3}{105})\theta_B$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\text{GAM} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} \theta \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad \dot{q}\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \dot{v}_n \\ 0 \ 0 \\ \dot{\theta}_n \dot{v}_n \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{v}_n^2 \\ \dot{\theta}_n^2 \end{bmatrix}$$

where  $l$  is the length of the link,  
 $S$  is the cross section,  
 $I$  is the quadratic momentum of the cross section,  
 $\mu$  is the volumic mass,  
 $E$  is the Young's modulus,  
 $m_c$  is the concentrated mass on B the extremity of the link,  
 $J_A$  and  $J_B$  are the concentrated inertia on the origin A and the extremity B of the link,  
 $T = T_a$  is the torque of the armator; the friction torque  $T_f$  is supposed to be equal to  $\Omega$ .

NOTA : a/ the terms smaller than these of the first order in  $v_B$  and  $\theta_B$  are not considered.

b/ the measurement of  $v_B$  and  $\theta_B$  is obtained via the measurement of the strain of the link and the finite element model (equation (1)).

### CONTROL OF A FLEXIBLE PLANE LINK

The purpose of this section is to use the static state feedback techniques to control an elastic robot arm.

#### Notation and Exact linearization via static state feedback

Full details may be found in [15], [16], [19], [11].

We consider a nonlinear system described by differential equations of the type

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{A}(x) + \sum_{i \in m} \mathcal{D}_i(x) u_i = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) U \\ y &= \mathcal{C}(x) \end{aligned} \quad (5)$$

where the state  $x$  belongs to a  $n_x$ -dimensional analytic manifold  $M$ ,  $u_i$  belongs to  $\mathbb{R}$ , the field of real numbers. The vector fields  $\mathcal{A}(x)$ ,  $\{\mathcal{D}_i(x)\}_{i \in m}$  are analytic vector fields on  $M$ , and  $\mathcal{C} : M \rightarrow N$  is an analytic submersion from  $M$  to a  $p$ -dimensional analytic manifold  $N$ ;

$$\mathcal{B}(x) := \text{matrix} (\mathcal{D}_1(x), \dots, \mathcal{D}_m(x)).$$

$V^*$ ,  $V_i^*$  denote respectively the supremal locally controlled invariant distributions contained in  $\ker d\mathcal{C}$  and  $\ker d\mathcal{C}_i$ ,  $i \in p$ .  $\mathcal{C}_i(x)$  denotes the  $i$ th component of  $\mathcal{C}(x)$ . Let  $n_i$  denote the largest integer so that for all  $j < n_i$ ,

$$L_{\mathcal{A}} L_{\mathcal{A}}^{j-1} \mathcal{C}_i(x) = 0$$

where  $L_{\mathcal{A}} \mathcal{C}_i(x)$  denotes the derivative of  $\mathcal{C}_i(x)$  in the direction  $\mathcal{A}(x)$ .



We have [16]:

$$V_i^* = \cap_{j \in n} \ker dL_{A_i}^{-1} C_i, \quad i \in p$$

There exists a static state feedback so that the Morgan problem is locally solvable (ie the row by row decoupling) if and only if

$$\text{rank } \mathfrak{B}^* = p \quad (9)$$

with

$$\mathfrak{B}^* = \begin{bmatrix} L_n L_A^{n1-1} C_1 \\ \vdots \\ L_p L_A^{np-1} C_p \end{bmatrix}$$

when (9) does not hold, one may look for dynamic solutions as in [11].

The linearization control law applied is :

$$U = f(x) + g(x)v$$

with  $v$  being the new input.

#### Exact Linearization of an elastic robot arm

The application of this non linear control theory needs many computations : the model previously presented may be rewritten like equation (8), and we need to compute the  $n_i$ ,  $\mathfrak{B}^*$  and the linearization control law if  $\text{rank } \mathfrak{B}^* = p$ . The complexity of computations requires a symbolic manipulation system. We have written a program for model Decoupling and Exact Linearization described by equation like (8). The system used for carrying out algebraic operations was REDUCE.

For one arm, the model previously presented may be rewritten:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -A^{-1} (B \ddot{q} + C \dot{q}^2 + K q) \\ \ddots \\ x_{n-1} \\ \ddots \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{-1}(1,1) \\ A^{-1}(2,1) \\ A^{-1}(3,1) \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = C(x)$$

(one arm case :  $n_s = 6$ )

The linearization of the model for several outputs is possible. The closed-loop system with initial

The linearization of the model for several outputs is possible. The closed-loop system with initial states  $(x_1(0), \dots, x_n(0))$  has the same behaviour as the system :

$$\frac{d^{n1} \eta}{dt^{n1}} - \dots - \lambda_1 \frac{d\eta}{dt} - \lambda_0 \eta = g v$$

(10)

with  $\lambda_0, \dots, \lambda_1, \lambda_0, g$  parameters of the closed-loop system.

In appendix the results of the linearization control law for several outputs are given : the immersion is possible with static state feedback. For all the outputs the system (elastic robot arm) is immersed into second order linear system :

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} - \lambda_1 \frac{d\eta}{dt} - \lambda_0 \eta = g v \quad (11)$$

with  $\lambda_1 = -2\zeta\omega$ , and  $\lambda_0 = -\omega^2$ .

These results were expected since it is classical for a system with one input /one output.

## SIMULATION AND RESULTS

### Description of the data

We have simulated the behaviour of the structure considering two different control laws on the following variables:

$\eta$  = the angular position  $\theta$  of the origin of the link,

$v_B$  = the elastic displacement,  $v_B$

The simulation is performed using a fifth order Runge Kutta's algorithm.

Finally we consider the following data (which approximately correspond to those of the experimental device we have developed in our laboratory) :

$$\begin{array}{lll} E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, & \mu = 7860 \text{ Kg/m}^3, & T_{fr} = 0 \\ l = 1.005 \text{ m}, & S = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, & I = 2.313 \cdot 10^{-11} \\ m_c = 5.928 \text{ Kg}, & J_A = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2, & J_B = 4.742 \cdot 10^{-2} \text{ Kg.m}^2. \end{array}$$

### Results and comments

The results of the simulations are presented on the Figures 5 and 6. They concern the controlled variables, the computed torque T and the other state variables.

The Figure 5 is related to the control law of  $\theta$  with  $g v = 1 \text{ rd}$ ,  $\omega = 0.5554 \text{ rad/s}$  and  $\zeta = 0.707$ . The

Figure 6 is related to  $v_B$  with  $g v = 0.1 \text{ m}$ ,  $\omega = 2.2215 \text{ rad/s}$  and  $\zeta = 0.707$ .

In the two cases the computed control law gives good results : they are coherent with the theory. The behaviour of the process is that of a second order previously described in the Equation (11).

On figure 5 (see [5] on 0), the elastic variables  $-v_B$  and  $\theta_B$  have oscillations which correspond to the first mode of the mechanical structure. They are compensated by the computed torque.

The control of the elastic variable  $v_B$  (see figures 6) is obtained with a quasi constant acceleration of the variable  $\theta$ . The corresponding non-controlled elastic variable ( $\theta_B$  on Figure 6) has oscillations. They correspond to the second mode of the mechanical structure supposed to be embedded (see [5]).

## CONCLUSION

We have proposed a model to describe the behaviour of plane flexible robots with rotational joints using a finite elements discretization of the links.

We have computed control laws by the application of an exact linearization method to an elastic robot arm (since linear approximation is not suitable in this case). This result was expected since it is classical for a system with one input one output.

The methods used (nonlinear control theory, general program in REDUCE language system) will permit to deal with the problem of several elastic robot arms with static or dynamic state feedback.

Finally we have presented results concerning the simulation of the model with the obtained control laws. In the different cases, the computed control law gives results which are coherent with the theory. The behaviour of the process is that of a second order system. The variables do not exceed the limits of the model. Consequently the next step in our study will be the application of the proposed method on our experimental robot. The computed torques are compatible with the actuators we use; and the computation time of the control law is compatible with our process (IP1000/A900 computer).

## REFERENCES

- [1] Barraco, A., Cuny and Ishiomi (1984). Accounting for member deformations in the determination of the dynamic behaviour of robot type structures. Fenomech '84, 3rd International Conference on Finite Elements in Non Linear Mechanics.
- [2] Bejczy A. K., T. J. Tarn and Y. L. Chen (1985). Robot arm dynamic control by computer. IEEE International Conference on Robotics and Automation, St. Louis, Missouri, March 25-28 U.S.A.
- [3] Book, W. J. (1984). Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. The International Journal of Robotics Research, vol. 3, n° 3, 87-101.
- [4] Canon, H. Jr and E. Schmitz (1984). Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. The International Journal of Robotics Research, 3, 62-75.
- [5] Chedmail P. and J.C. Bardiau. (1986). Experimental validation of a plane flexible robot modelling. Proceedings of the IFAC Symposium on Theory of Robots, Vienna, December, 1986.
- [6] Chedmail P. and G. Michel (1985). Modélisation of plane flexible robots. 15th ISIR, Tokyo, Japan.
- [7] Chretien, J.P., M. Delpech and A. Iouhadi (1985). Modelling and simulation of distributed flexibility in a spaceborne manipulator. 10th IFAC Symposium on Automatic Control in Space.
- [8] Claude D., M. Fliess and A. Isidori (1983). Direct and Feedback Immersion of a Nonlinear System in a Linear System. C. R. Académie des Sciences Paris, t. 296 (31 Janvier)
- [9] Claude D., A. Glumacau and C. H. Moog (1985). Nonlinear decoupling and immersion techniques applied to a Single Point Mooring of a tanker. 24th Conf. Dec. Control, December, San Luisobale, U.S.A.
- [10] Claude D., (1986). Découplage des systèmes non linéaires, Séries génératrices non

- commutatives et Algèbre de Lie SIAM J. Control Opt. 24, 5, pp 562-578.
- [11] Descusse J. and C. H. Moog, (1987) to appear, Dynamic decoupling for Right-invertible Nonlinear Systems, Syst. Contr. Lett.
- [12] De Luca A., A. Isidori and F. Nicolò, (1985), Control of robot arm with elastic joints via nonlinear dynamic feedback, 24th Conf. Dec. Control., December, Fort Lauderdale, U.S.A.
- [13] De Simone and F. Nicolò, (1985), On the control of elastic robots by feedback decoupling, 24th Conf. Dec. Control., December, Fort Lauderdale, U.S.A.
- [14] Geradin, M., G. Robert and C. Bernardin (1983), Dynamic modelling of manipulators with flexible members, Liege, Mai 1983.
- [15] Hirschorn R. M., (1981), (A,B)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems, SIAM J. Control Opt., vol. 19, pp. 1-19
- [16] Isidori A., A. J. Krener, C. Gori-giorgi and S. Monaco, (1981), Nonlinear decoupling via feedback : a differential geometric approach, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 26, pp. 331-345
- [17] Khalil, W. (1986), Minimization of the computational cost of the dynamic models of robots, Séminaire C.N.R.S. Outils mathématiques pour la modélisation et la commande des robots, 297-321.
- [18] Moog C. H. and A. Ghumineau, (1982), Le problème du rejet de perturbations mesurables dans les systèmes nonlinéaires. Applications à l'amarrage en un seul point des grands pétroliers, Colloque C.N.R.S. R.C.P. 567, Belle-Ile, France
- [19] Nijmeijer H. (1982), Controllability distributions for nonlinear systems, Syst. Contr. Letters 2, 127-129.
- [20] Renaud, M. (1986), Iterative analytical computation of the dynamic model of a robot manipulator, Rapport de recherche LAAS, Toulouse, France.
- [21] Sunada, W. and S. Dubowsky, (1980), The application of finite elements methods to the dynamic analysis of flexible spatial and co-planar linkage systems, A.S.M.E. emereks, 1980.
- [22] Tarn T. J., Bejczy A. K., A. Isidori and Y. Chen (1984), Nonlinear feedback in robot arm control, 23th Conf. Dec. Control, December, Las Vegas, U.S.A.
- [23] Touzet, G. and G. Dhait, Une présentation de la méthode des éléments finis, Mahine Editeur, France.
- [24] Truckenbrodt, A. (1981), Modelling and control of flexible manipulator structures, Proc. of 4th International CISM-IFTOMM Symposium in Zaborow.

## APPENDIX

Exact Linearization by nonlinear static feedback : control laws computed with our symbolic program (system language is REDUCE)

a)  $y = x_4$ ,  $n_1 = 2$ ,  $\text{rank } \mathcal{D}^* = 1$

$$f = 0.01281 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 4.6203 x_1^2 x_3 + 501.166 x_1^2 x_2 + 1210.51 x_3 + 3182.51 x_2)$$

$$g = 0.01281 g$$

b)  $y = x_2$ ,  $n_1 = 2$ ,  $\text{rank } \mathcal{D}^* = 1$

$$f = -0.0126872 (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + 4.673557 x_1^2 x_4 - 507.043 x_1^2 x_3 - 1223.55 x_4 + 3218.427 x_2)$$

$$g = -0.0126872 g$$

c)  $y = x_4$ ,  $n_1 = 2$ ,  $\text{rank } \mathcal{D}^* = 1$

$$f = -0.01511587 (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + 3.71502 x_1^2 x_4 - 424.737 x_1^2 x_3 - 635.9643 x_4 + 2118.606 x_2)$$

$$g = -0.01511587 g$$

d)  $y = 1.005 x_4 + x_2$ ,  $n_1 = 2$ ,  $\text{rank } \mathcal{D}^* = 1$

$$f = -2.707956 ((1.005 x_1 + x_2) \lambda_1 + (1.005 x_2 + x_1) \lambda_2 + 0.03045 x_1^2 x_4)$$

$$- 3.370849 x_1^2 x_2 - 6.98754 x_2 + 19.6948 x_3)$$

$$g = -2.707986 g$$

$$c) y = x_1 + x_2,$$

$$n_1 = 2, \text{ rank } \mathcal{D}^* = 1$$

$$f = 0.0840031 ( (x_1 + x_2) \lambda_1 + (x_2 + x_3) \lambda_2 - 0.9052762 x_1^2 x_2 - 76.42919 x_1^2 x_3$$

$$- 574.5458 x_2 + 1064.21 x_3$$

$$g = 0.0840031 g$$

FIGURES

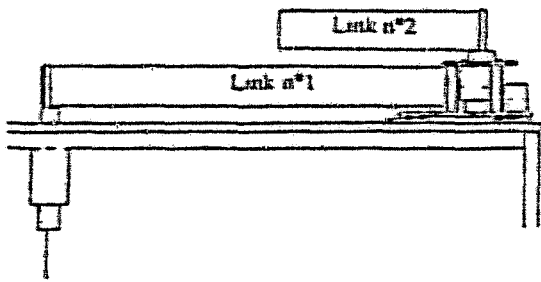


Figure 1

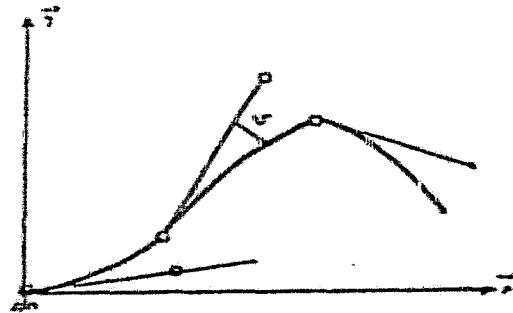


Figure 2

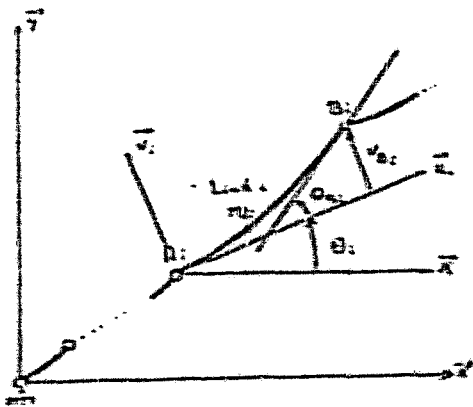


Figure 3

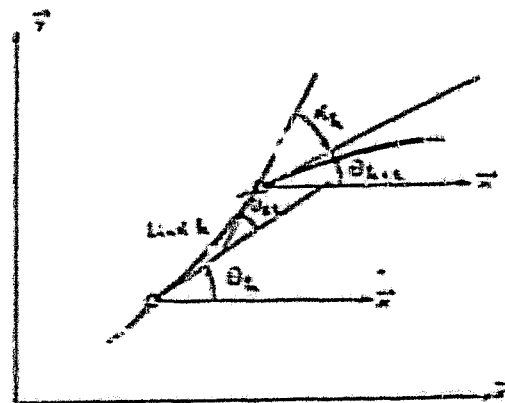


Figure 4

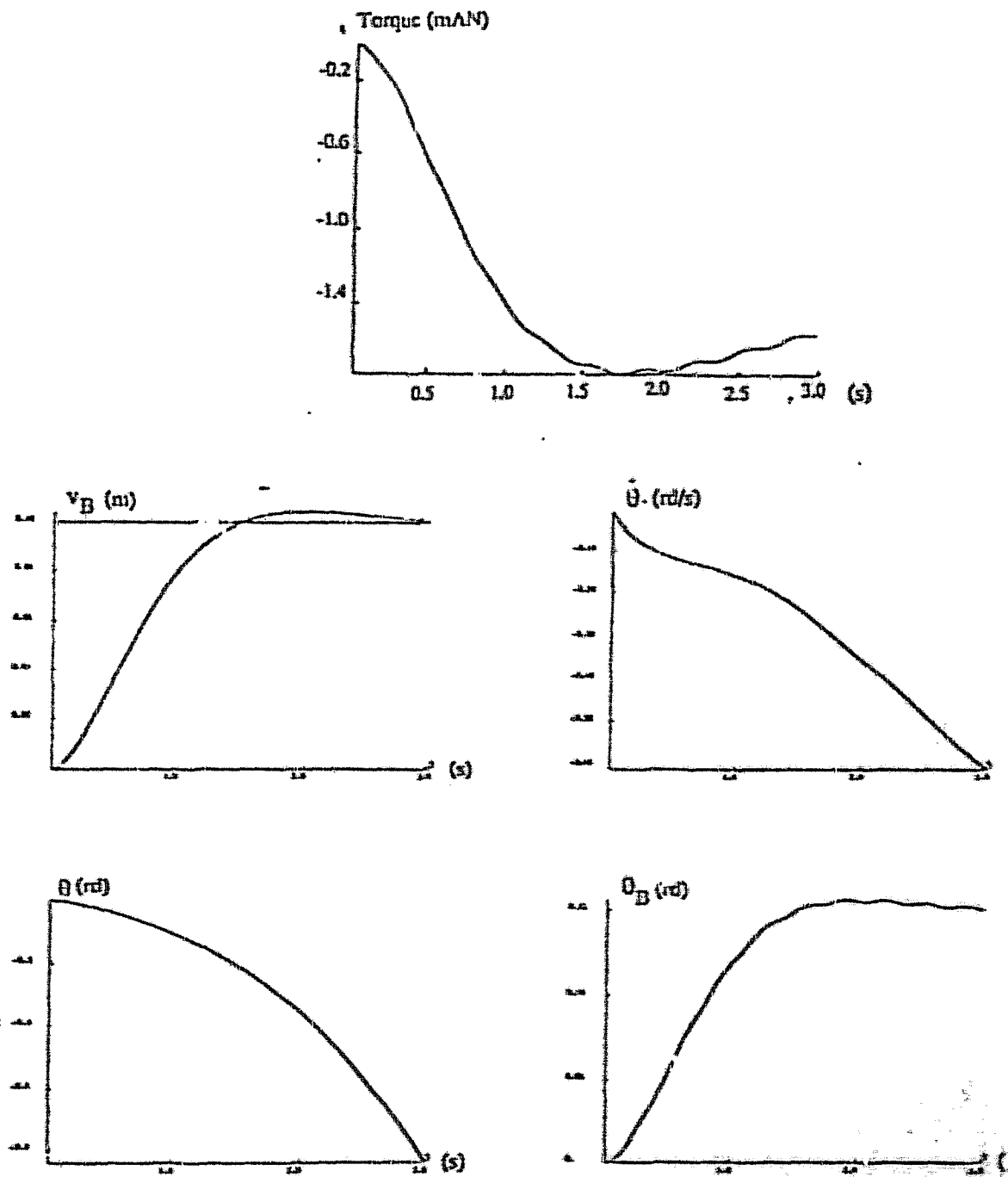


FIGURE 6  
Control of  $v_D$  (elastic deflection of the link)

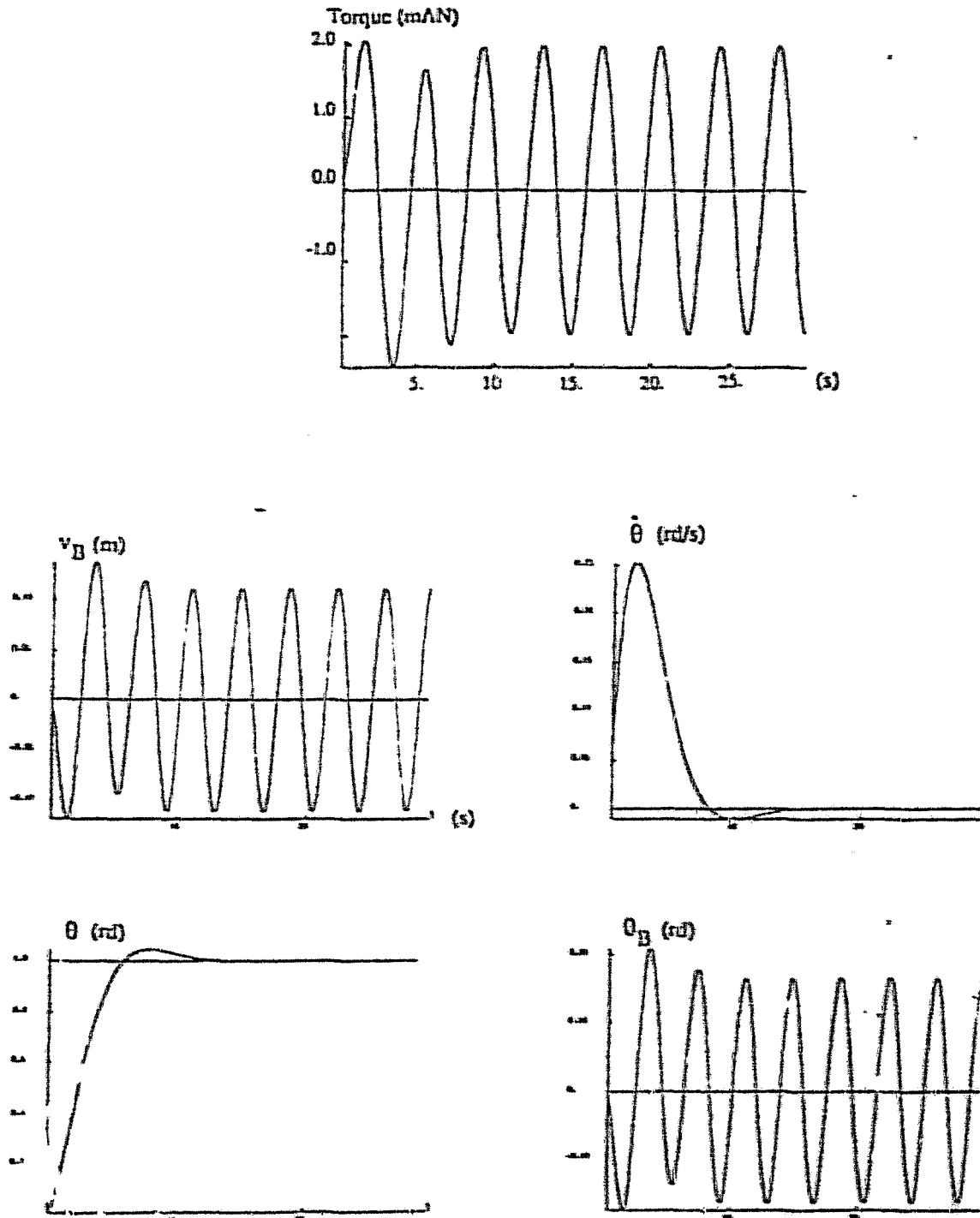


FIGURE 5  
Control of  $\theta$  (rotation of the origin of the link)

**Annexe 7. Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques.**

---

**Annexe 7. A. Glumineau, M. Hamy, C. Lanier and C.H. Moog, "Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques. (à paraître Int. J. Control) 1992**



**Robust Control of a Brushless Servo Motor  
via Sliding Modes Techniques.**

A. Glumineau, M. Hamy, C. Lanier and C.H. Moog

*The robust control of a synchronous machine via sliding mode techniques is tackled in some detail. Various recent schemes are studied and operated to derive control solutions which are technically feasible.*

**1. Introduction**

The control of electrical motors is a very active applied research area (Bühler, 1986), (Hasimoto *et al.*, 1988), (Pillay and Krishnan, 1989). Major research activity has recently been devoted to apply the latest theoretical developments (Le Pioufle *et al.*, 1990) and to improve the dynamic performances. The brushless servo motor plays an increasing rôle in many application areas, in robotics e.g.. Nonlinear control techniques as feedback linearization were used in (Le Pioufle *et al.*, 1990) and quite a large amount of literature is concerned by sliding modes control (Bühler, 1986), (Hasimoto *et al.*, 1988), (Sabanovic and Bilalovic, 1989), (Sabanovic and Izosimov, 1981). This situation is due to the fact that the

---

The authors are with the Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité Associée au CNRS 823, Ecole Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03, France.

This work has been suggested and the data of the model have been supplied by the CNRS Comité "GRECO Electrotechnique/Automatique".

---

Annexe 7. A. Glumineau, M. Hamy, C. Lanier and C.H. Moog. "Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques. preprints, 1992

latter is quite appealing since it was design for robustness considerations. In practical applications the standard sliding modes induce some undesirable chattering in the control. However, in the situation of electrical motors, the converter hardware can admit some high frequency commutations whereas other areas as mechanical systems do not allow such constraints.

Comparing a synchronous machine with a DC motor having the same mass, the latter has the disadvantage that the energy loss takes essentially part at the rotor whose temperature increases. The permanent magnet synchronous motor drive has following interesting features:

- a 30% higher power-mass ratio,
- the heating loss occurs only at the stator so that the heat can be easily dissipated towards the external area. The heating of the rotor is limited to the convection effects, its temperature stays low so that this motor perfectly suits for direct drive schemes which may be used for machining,
- the brushless rotor containing only magnets requires less maintainance,
- the maximal velocity can be very high,
- the inertia momentum of the rotor is very low since it is either a long-shaped cylinder in the case of high angular velocity motors or a thin disk in the case of torque motors,
- the brushless motor is fully closed, water and/or airtight and this makes it a good candidate for applications like robotics and aerospace actuators.

The motivation in this paper is twofold:

- (i) to survey in some detail various schemes which are proposed in the frame of sliding mode control techniques. Some remarks and comparison with nonlinear control theory are included.
- (ii) to improve the previous control schemes in regard with the robustness properties, with respect to the rotor flux.

## 2. Systems description and mathematical model

The model of the brushless DC motor considered herein is a standard model in the rotor frame and is given in (Le Pioufle *et al.*, 1990). The numerical data are as follows.

Notations using the rotor reference frame (Park variables, direct d et quadratic q axis).

$V_d, V_q$  d and q voltage (V)

$i_d, i_q$  d and q currents (A)

$\Phi_d, \Phi_q$  d and q flux

$L_d, L_q$  Stator d and q inductances (0.0014 H and 0.0028H)

$R_S$  Stator resistance (0.6  $\Omega$ )

$J$  Moment of inertia (load and motor) ( $11 \cdot 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>)

$p$  number of pole pairs (4)

$f_v$  viscous damping coefficient ( $1.4 \cdot 10^{-3}$  kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)

$\Omega$  Rotor speed nominal (rad/s)

$\Phi_f$  Rotor flux (constant) (0.1194 Wb)

$C_L$  Load torque (constant) (Nm)

The model equations consist in the electric and mechanical equations (Le Pioufle *et al.*), (Hasimoto *et al.*). The relationships between the voltages and the fluxes are :

$$V_d = R_S i_d - p \Omega \Phi_d + \dot{\Phi}_d \quad (1)$$

$$V_q = R_S i_q + p \Omega \Phi_d + \dot{\Phi}_q \quad (2)$$

$$\text{with } \Phi_d = L_d i_d + \Phi_f, \quad \Phi_q = L_q i_q \quad (3)$$

$$\text{and the electric torque: } C_m = p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f] i_q \quad (4)$$

The mechanical equations are :

$$\dot{\theta} = \Omega$$

$$J \dot{\Omega} = C_m + C_L - f_v \Omega$$

The state space model is derived as :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ \frac{p}{J} [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f] i_q - \frac{C_L}{J} - \frac{f_v}{J} \Omega \\ -\frac{R_S}{L_d} i_d + p \frac{L_q}{L_d} \Omega i_q \\ -p \frac{\Phi_f}{L_q} \Omega - p \frac{L_d}{L_q} \Omega i_d - \frac{R_S}{L_q} i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \end{pmatrix}$$

### 3. Sliding modes control of the velocity.

The system has two inputs  $V_d$  and  $V_q$ . The equation of the torque (4) shows that the difference of the inductances  $(L_d - L_q)$  plays a role on the system only if the current  $i_d$  is nonzero. Thus, a possible strategy to control the position or speed of the Brushless Servo Motor via sliding modes, consists in constraining  $i_d$  to be zero. Moreover, this strategy fulfills the constraints on the phase currents.

Two sliding surfaces are chosen so that the two goals can be simultaneously achieved. This is possible, since two independent inputs are available,  $V_d$  and  $V_q$ .

Let  $x$  denote the state of the system,  $V$  denotes either  $V_d$  or  $V_q$  and  $S(x)$  is the sliding surface ; the sliding mode control can be achieved if there exists a control law such that the condition  $S \dot{S} < 0$  (De Carlo *et al.*, 1988). A possible solution is given by :

$$V = V_{eq} + V_n \quad (5)$$

where  $V_{eq}$  is the solution of  $\dot{S}(x, V) = 0$ .  $V_{eq}$  will be the control which is applied whenever  $S(x) = 0$  and is the so-called equivalent control in standard terminology (Sira-Ramirez, 1988).  $V_n$  fulfills the condition for the state trajectories to be attracted towards the surface  $S(x) = 0$ .

The global control problem is split into two subproblems which are solved independently. This is possible since  $i_d$  will be constraint to zero and will remain small in any situation studied below. A most elementary sliding mode technique is satisfactory to control the current  $i_d$ . This is designed in Section 3.1. To control the velocity  $\Omega$ , much more sophisticated schemes will be necessary and are going to be developed in Section 3.2.

### 3.1 Direct current control law ( $i_d$ ).

The reference of the direct current, say  $i_{d,ref}$ , is zero. Thus, a suitable sliding surface is :

$$S_i = -i_d$$

we compute 
$$\dot{S}_i = \frac{R_S}{L_d} i_d - p \Omega \frac{L_q}{L_d} i_q - \frac{V_d}{L_d}$$

and then 
$$V_{deq} = R_S i_d + p \Omega L_d i_q$$

With  $V_d = V_{deq} + V_{dn}$  the sliding mode condition  $S_i \dot{S}_i < 0$  implies

$$\frac{-V_{dn}}{L_d} S_i < 0$$

and then

$$V_d = V_{deq} + K_d \text{sign}(S_i) \quad (6)$$

where  $K_d$  is a positive constant real.

### 3.2 Velocity control law.

Let  $\Omega_{ref}$  denote the constant reference of the rotation speed.

$S_v = \Omega_{ref} - \Omega$  is not appropriate for the definition of the sliding surface since the input does not explicitly appear in  $\dot{S}$ . Redefine  $S_v = K_v e_v + \dot{e}_v$  with  $e_v = \Omega_{ref} - \Omega$  and with  $K_v$  a positive constant real yields

$$\dot{S}_v = -K_v \dot{\Omega} + \frac{d}{dt} \left( -\frac{f_v \Omega}{J} + \frac{p \{ (L_d - L_q) i_d + \Phi_f \}}{J} i_q - \frac{C_L}{J} \right)$$

hence

$$V_{q,eq} = \frac{J L_q}{p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f]} \left( \frac{f}{J} - K_v \right) \dot{\Omega} + p \Omega \Phi_f + p \Omega L_d i_d + R_s i_q$$

Let  $V_q = V_{q,eq} + V_{q,n}$  the condition  $S_i \dot{S}_i < 0$  implies

$$-\frac{V_{q,n} p [(L_d - L_q) i_d + \Phi_f]}{J L_q} < 0$$

and then

$$V_q = V_{q,eq} + K_q \text{sign}(S_v) \quad (7)$$

where  $K_q$  is a positive constant real.

As recalled in the introduction, the standard sliding modes technique induces some undesirable chattering in the control. These high frequency commutations are created when the state trajectory of the system is close to the sliding surface and then the value of sign function changes often.

To avoid these effects, we will study three alternative methods for designing the  $V_n$  term of the control (5).

*Method 1 :*

A classical solution consists to introduce a domain where the sign function is replaced by  $\text{Sign}_1$  in eqs. (6) and (7) as shown in Fig. 1. This area is defined by the value of  $\epsilon$ .

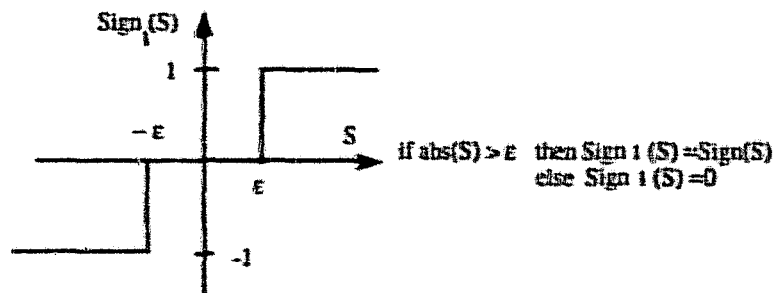


Fig. 1 : Shape of the  $\text{Sign}_1$  function

This solution can be viewed in the phase plane ( $\dot{e}$ ,  $e$ ) as an area where only the equivalent control law is applied (if  $-\epsilon < s < \epsilon$ ). This is shown on Fig. 2. Recall that  $e$  denotes the velocity error.

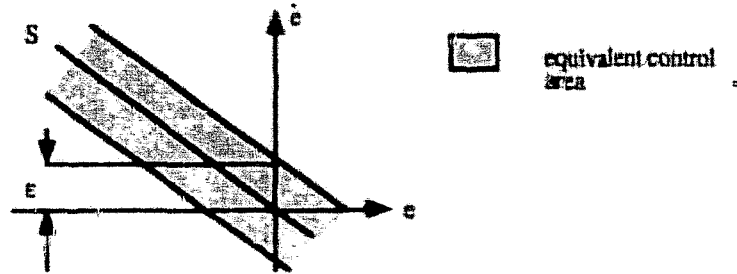


Fig. 2 : Phase plane control area for Sliding Modes

Method 2 :

As done in (Slotine, 1985) we use an other smooth function , say  $\text{Sign}_2$ , to replace the sign function :

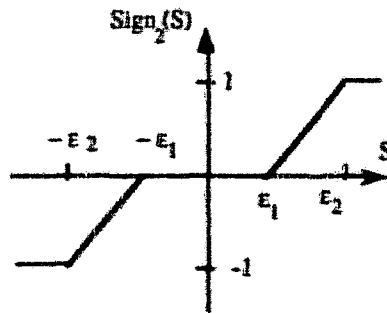


Fig. 3 : Shape of the  $\text{Sign}_2$  function

As above, the control can be regarded in the phase plane ( $\dot{e}$ ,  $e$ ) with this method as :

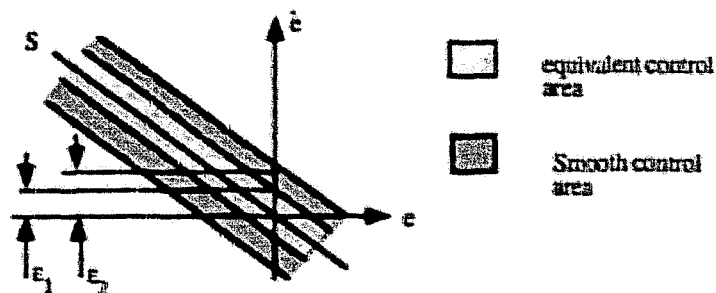


Fig. 4 : Phase plane control area for Smooth Sliding Modes

*Method 3* : A modification of the notion of sliding sectors is introduced. More precisely, in  $V_D$ , the sign function is replaced by  $\text{Sign}_2$  (eqs. (6) and (7)), where  $\epsilon_2 = \max \{ \epsilon_{2\min}, \epsilon(s) \}$ . The function  $\epsilon(s)$  is proportional to  $|e|$  :

$$\epsilon(s) = K_\epsilon |e|$$

This is illustrated in the phase plane  $(\dot{e}, e)$  by Fig. 5.

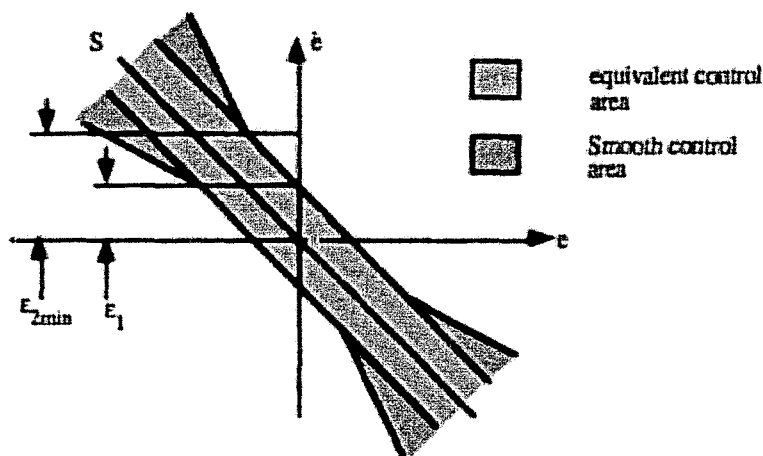


Fig. 5 : Phase plane control area for Sliding Sectors

#### 4. Simulation results on robustness

*Velocity Control & Robustness study with respect to the rotor flux.*

The robustness is now studied and the three control methods are compared. In the sensitivity analysis to the rotor flux, deviations of  $\pm 10\%$  are considered.

*Method 1* : Sliding modes,  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\epsilon = 1$

Fig. 6 displays the velocity response for the three cases of flux ( $\Phi_f$ ,  $0.9\Phi_f$ ,  $1.1\Phi_f$ ). The responses are almost superposed and the performance of the control is unchanged. This situation is however not acceptable from the input behaviour. Although the input voltages are smooth for the nominal case, the nice robustness properties induce severe chattering for the two other cases under interest, see Fig. 7 and Fig. 8.



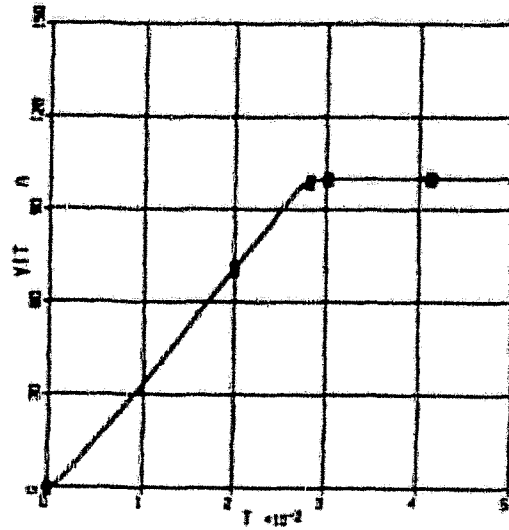


Fig. 6 : Sliding Modes : Velocity response  
 A : + 10% deviation of the rotor flux  
 B : nominal rotor flux, C : - 10% deviation

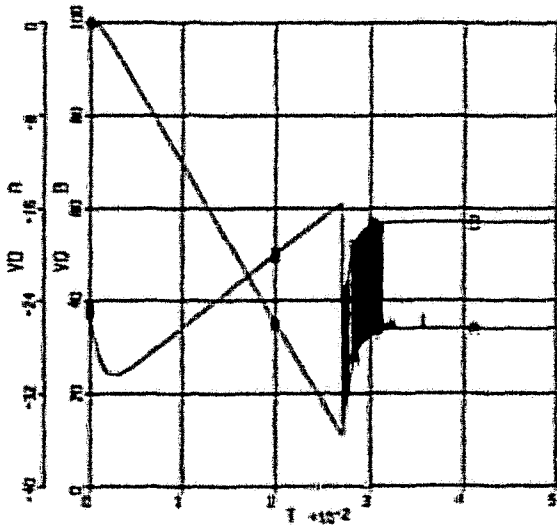


Fig. 7 : Sliding Modes : direct (A) and quadratic (B) voltages, with -10% deviation on the rotor flux

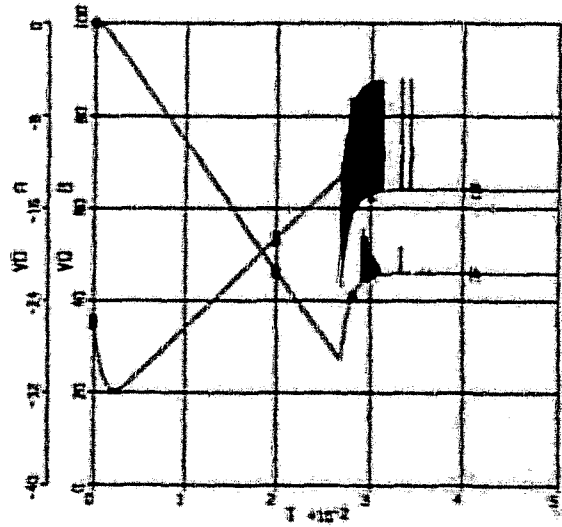


Fig. 8 : Sliding Modes : direct (A) and quadratic (B) voltages, with +10% deviation on the rotor flux

Method 2 : Smooth Sliding modes,  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 10$

The input chattering is reduced (Fig. 10 and Fig. 11), the accuracy of the steady state velocity remains unchanged accordingly to Method 1. The setting time only is sensitive to the rotor flux, as shown by Fig. 9, since the transient response behaves as an intrinsic error integrator.

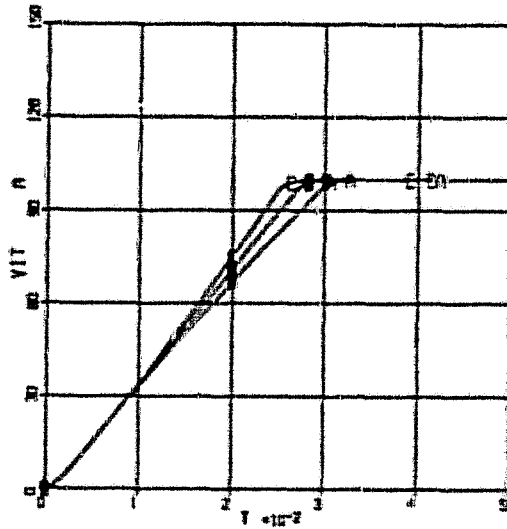


Fig. 9 : Smooth Sliding Modes : Velocity response  
 A : + 10% deviation of the rotor flux  
 B : nominal rotor flux, C : - 10% deviation

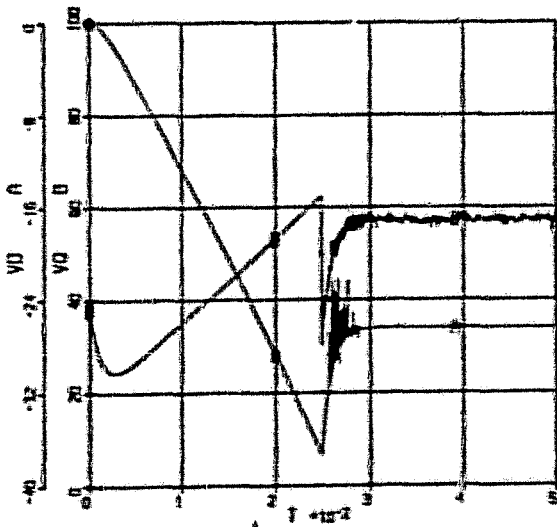


Fig. 10 : Smooth Sliding Modes : direct (A) and quadratic (B) voltages, with -10% deviation on the rotor flux

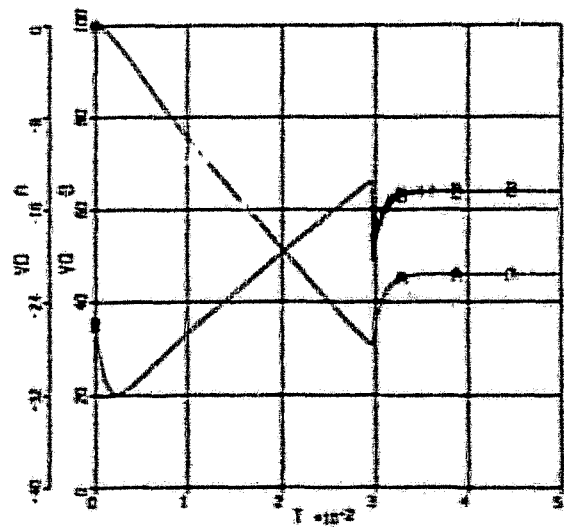


Fig. 11 : Smooth Sliding Modes : direct (A) and quadratic (B) voltages, with +10% deviation on the rotor flux

Method 3 : Sliding sectors.  $K_v = 1000$ ,  $K_q = 24$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_{2min} = 1$ ,  $K_S = 100$

This Method gives a nice compromise between the input behaviour and the output response. The input chattering is acceptable (Fig. 13 and Fig. 14) and comparable to the chattering obtained through Method 2. The transient response is improved (Fig.12).

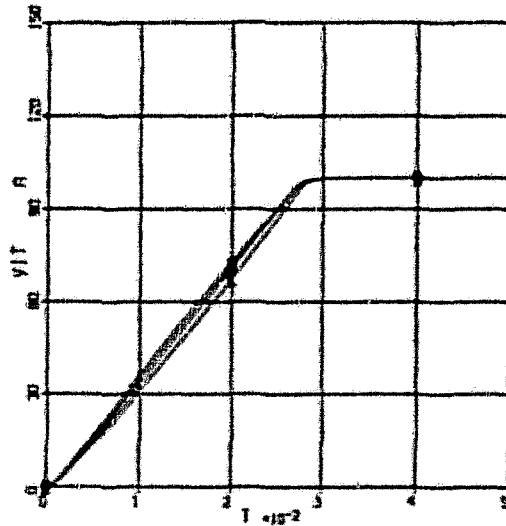


Fig. 12 : Sliding Sectors : Velocity response  
 A : + 10% deviation of the rotor flux  
 B : nominal rotor flux. C : - 10% deviation

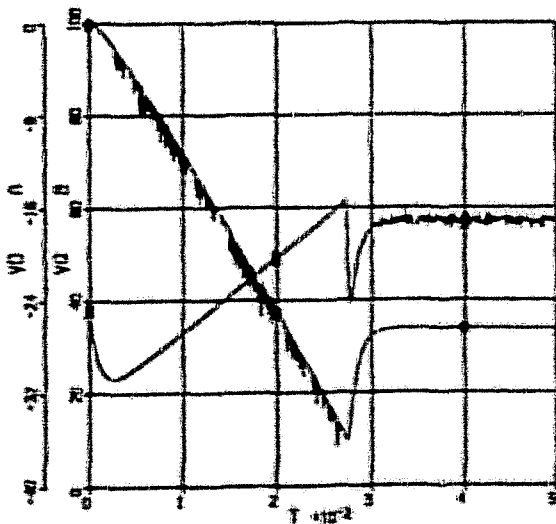


Fig.13 : Sliding Sectors : direct (A) and quadratic (B) voltages, with -10% deviation on the rotor flux

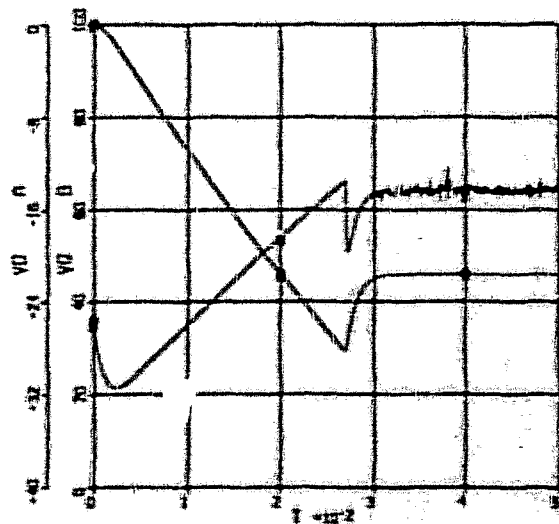


Fig. 14 : Sliding Sectors : direct (A) and quadratic (B) voltages, with +10% deviation on the rotor flux

## 5. Conclusion

When performing the control of the position of the motor axis by analogous techniques, similar results are obtained, thus they are not displayed herein. As a matter of fact, sliding modes techniques were designed for providing a robust control scheme and in this sense, they are appealing for the control of a synchronous machine as considered in the paper. It was shown that some modifications, adapted to the special case study, will render feasible such control law. It should be highlighted that the modification operated around the origin in the so-called sliding sectors frame is new and necessary for obtaining an acceptable behaviour of our control system design.

## References

- Bühler, H., 1986, *Réglage par modes de glissements* (Lausanne : Presses Polytechniques Romandes).
- De Carlo, R., Zak, S. and Matthews, G., 1988, Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial. *Proc. IEEE*, **76**, 212-231.
- DeSantis, R. M., 1989, An adaptive PI/sliding mode controller for a speed drive. *J. Dynamic Syst. Measurement and Control*, **111**, 409-415.
- Hasimoto, H., Yamamoto, H., Yanagisawa, S., and Harashima, F., 1988, Brushless servo motor control using variable structure approach. *IEEE Trans. on Indus. Applications*, **24**, 160-170.
- Isidori, A., 1989, *Nonlinear Control Systems*, 2nd Ed., Comm. & Contr. Eng. Series (Berlin : Springer Verlag).
- Le Pioufle, B., Georgiou, G., and Louis, J. P., 1990, Application des commandes non linéaires pour la régulation en vitesse ou en position de la machine synchrone autopilotée. *Revue Phys. Appl.*, **25**, 517-526.
- Pillay, P., and Krishnan, R., 1989, Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives, part I: the permanent-magnet synchronous motor drive. *IEEE Trans. on Indus. Applications*, **25**, 265-273.

- Pillay, P., and Krishnan, R., 1989, Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives, part II; the brushless DC motor drive. *IEEE Trans. on Indus.Applications* , **25**, 274-279.
- Sabanovic, A., and Bilalovic, F., 1989, Sliding mode control of AC drives. *IEEE Trans. on Indus Applications*, **25**, 70-75.
- Sabanovic, A., and Izosimov, D. B., 1981, Application of sliding modes to induction motor control. *IEEE Trans. on Indus.Applications* , **17**, 41-49.
- Sira-Ramirez, H., 1988, Differential geometric methods in variable structure control. *Int.J. Control*, **48**, 1359-1390.
- Slotine, J.J.E., 1985, The robust control of robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **4**, 49-64.
- Yeung, K. S., and Chen, Y. P., 1988, A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems. *IEEE Trans. Aut. Control.*, **32**, 200-206.
- Yeung, K. S., and Chen, Y. P., 1990, Sliding-mode controller design of a single-link flexible manipulator under gravity. *Int. J. Control.*, **52**, 101-117.
- Zhang, J., and Barton, T.H., 1990, A fast variable structure current controller for an induction machine drive. *IEEE Trans. on Indus.Applications*, **26**, 415-419.

**Annexe 8. Online Guidance and Control of a Spacecraft for an  
aeroassisted orbit transfert**

---

Annexe 8. J.C. Albert, A. Glumineau, M. Gugliemi, E. Le Carpentier et C.H. Moog. "Online Guidance and Control of a Spacecraft for an aeroassisted orbit transfer", 12<sup>th</sup> IFAC Symposium, Aerospace Control'92, Munich, pp.147-152, 1992.

## ONLINE GUIDANCE AND CONTROL OF A SPACECRAFT FOR AN AEROASSISTED ORBIT TRANSFER

J.C. Albert<sup>1</sup>, A. Glumineau<sup>2</sup>, M. Guglielmi<sup>2</sup>, E. Le Carpentier<sup>2</sup> and C.H. Moog<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>) ACRI S.A., Villantopols N° 10, 473 Route des Dolines, Sophia-Antipolis, 06560 Valbonne, France.

(<sup>2</sup>) Laboratoire d'Automatique de Nantes, Unité Associée au C.N.R.S., Ecole Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03, France.

**Abstract:** The atmospheric flight of a spacecraft is considered when an aeroassisted orbit change maneuver is performed. Both guidance and control problems are solved and make respectively use of nonlinear control theory and classical adaptive control schemes. The originality of the work lies in the consideration of the overall guidance and control problem. A second point which is worth to be noticed is that focus is set on computational time. Whereas gain scheduling is known to be compatible with limited computing power, the main stream in literature consists in implementing some optimizing routines when the guidance problem is tackled. This scheme is dramatically time consuming and is deliberately skipped in the paper. It is replaced by a trajectory tracking guidance policy issued from modern nonlinear control theory. The guidance and control solution is shown to be quite unresponsive to atmospheric density deviations which constitute major unknown parameters in the higher layers of the atmosphere.

**Keywords:** spacecraft, guidance, control, nonlinear control systems, adaptive control, robustness.

### INTRODUCTION

The paper relates a global study on the so-called aeroassisted orbit transfer mission. In order to bring a spacecraft from a high orbit to low orbit, it is necessary to decrease its velocity. Instead of using only the thrusters, one uses the atmosphere which provides a natural braking. For this issue, a de-orbit impulse occurs so that the vehicle follows a trajectory crossing the atmosphere. The atmospheric flight is the center of the problem which is solved in this paper. Some exit conditions have to be fulfilled so that the vehicle reaches the low orbit with a suitable velocity. A re-orbit impulse is then given. The three phases of the mission are illustrated on Figure 1.

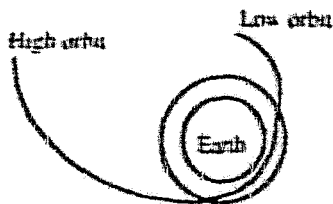


Figure 1

### MODEL EQUATIONS

The spacecraft is supposed to be axisymmetric and the data for its model are taken from an AFE 1-7 vehicle (Miele et al., 1989 a, b) (Gamble et al., 1988). Thus, the aerodynamic forces on the vehicle are limited to the drag and lift.

#### MOTION OF THE CENTER OF MASS

$$r = V \sin \gamma$$

$$\dot{r} = V \cos \gamma \sin \chi + r$$

$$\dot{\chi} = V \cos \gamma \cos \chi + r \cos \delta$$

$$\dot{V} = \frac{D_{max}}{m} - \frac{u}{r} \sin \gamma + \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{Lift \cos \alpha}{mV} - \left( \frac{V}{r} + \frac{u}{r^2} \right) \cos \gamma + 2 \omega \cos \delta \cos \chi + \frac{\omega^2 r}{V} (\sin \delta \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta \sin \chi)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{Lift \sin \alpha}{mV \cos \gamma} - \frac{V}{r} \cos \gamma \cos \chi \tan \delta - 2 \omega \sin \delta \tan \gamma \cos \delta \sin \chi - \frac{\omega^2 r}{V \cos \gamma} \sin \delta \cos \delta \sin \chi$$

Drag =  $\cdot P_{dyn} S_{ref} C_D$   
 Lift =  $\cdot P_{dyn} S_{ref} C_L$

Nomenclature :

- r = distance from the center of the earth
- $\delta$  = latitude
- $\tau$  = longitude
- V = velocity of the vehicle
- $\gamma$  = flight path angle
- $\chi$  = heading angle

$\sigma$  = bank angle = guidance input

- $\rho$  = atmospheric density (US 76 Standard)
- $P_{dyn} = \rho V^2/2$  = aerodynamic pressure
- $\omega = \text{angular velocity of earth} = 0.729 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$
- $\mu = \text{gravitational constant} = 3.986 \cdot 10^{15} \text{ m}^3/\text{s}^2$
- $S_{ref}$  = reference area =  $12 \text{ m}^2$
- $C_D, C_L$  = Drag & Lift coefficients
- m = mass of the AFE =  $1408.6 \text{ kg}$

ATTITUDE EQUATIONS

$$I_{xx} \dot{\omega}_p = (I_{yy} - I_{zz}) \omega_q \omega_r - L + T_x$$

$$I_{yy} \dot{\omega}_q = (I_{zz} - I_{xx}) \omega_p \omega_r - M + T_y$$

$$I_{zz} \dot{\omega}_r = (I_{xx} - I_{yy}) \omega_p \omega_q - N + T_z$$

$$\alpha = \omega_q \cdot (\omega_p \cos \alpha + \omega_r \sin \alpha) \tan \beta$$

$$- [\delta \cos \chi \sin \gamma - \chi \cos \gamma$$

$$- (\omega + \tau) (\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \chi \sin \gamma) \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma \cos \beta}$$

$$- [(\omega + \tau) \cos \delta \cos \chi - \delta \sin \chi \cdot \gamma] \frac{\cos \sigma}{\cos \beta}$$

$$\beta = \omega_p \sin \alpha - \omega_r \cos \alpha$$

$$- [\delta \cos \chi \sin \gamma - \chi \cos \gamma$$

$$- (\omega + \tau) (\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \chi \sin \gamma) \cos \sigma$$

$$- [(\omega + \tau) \cos \delta \cos \chi - \delta \sin \chi - \gamma] \sin \sigma$$

$$\sigma = -\omega_p \cos \alpha - \omega_r \sin \alpha \cos \beta - (\alpha - \omega_q) \tan \beta$$

$$- \delta \cos \chi \cos \gamma - \chi \sin \gamma$$

$$- (\omega + \tau) (\cos \delta \sin \chi \cos \gamma + \sin \delta \sin \gamma)$$

Nomenclature

- $[\omega_p, \omega_q, \omega_r]$  = rotation of the body with respect to inertial frame expressed in body frame.
- $[L, M, N]$  = aerodynamic torque (in the center of mass) expressed in body frame.
- $[T_x, T_y, T_z]$  = torque of the thrusters forces expressed in body frame control inputs
- $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  = inertial moments in body frame.

- $\alpha$  = attack angle.
- $\beta$  = sideslip angle.
- $\sigma$  = bank angle.

We suppose that for attitude time-scale the motion of the center of mass is almost galilean, so that  $\omega=0, \delta=0, \tau=0, \chi=0, \gamma=0$  Then

$$\alpha = \omega_q \cdot (\omega_p \cos \alpha + \omega_r \sin \alpha) \tan \beta$$

$$\beta = \omega_p \sin \alpha - \omega_r \cos \alpha$$

$$\sigma = -(\omega_p \cos \alpha + \omega_r \sin \alpha) \frac{1}{\cos \beta}$$

With the axisymmetry hypothesis, L, M and N depend on four coefficients  $C_{mq}^a, C_{m\dot{\alpha}}^a, C_D^a$  and  $C_L^a$  (tabulated with respect to V and the total attack angle  $\alpha_T = \arccos(\cos \alpha \cos \beta)$ , but which depend only on  $\alpha_T$  for  $V > 10 \text{ mach}$ ), in the following way with  $(x_{cm}, 0, z_{cm})$  the coordinates of the center of mass in body frame, we have:

$$L = -P_{dyn} S_{ref} \dot{\alpha}_T \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_T}$$

$$M = P_{dyn} S_{ref} [(\dot{z}_{cm}(\alpha_T) - \frac{L_{ref} C_{mq}^a}{V} \dot{\alpha}_T) \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha_T} + \dot{z}_{cm}(\alpha_T)]$$

$$N = -P_{dyn} S_{ref} [\dot{x}_{cm}(\alpha_T) + \frac{L_{ref} C_{m\dot{\alpha}}^a}{V} \dot{\alpha}_T] \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_T}$$

where

$$\dot{z}_{cm}(\alpha_T) = L_{ref} C_{mq}^a(\alpha_T)$$

$$+ x_{cm} (\sin \alpha_T C_D^a(\alpha_T) + \cos \alpha_T C_L^a(\alpha_T))$$

$$\dot{x}_{cm}(\alpha_T) = z_{cm} (\sin \alpha_T C_D^a(\alpha_T) + \cos \alpha_T C_L^a(\alpha_T))$$

$$\dot{z}_{cm}(\alpha_T) = z_{cm} (\cos \alpha_T C_D^a(\alpha_T) - \sin \alpha_T C_L^a(\alpha_T))$$

PROBLEM STATEMENT

To control the motion of the center of mass, we use here a single input, the bank angle  $\sigma$  and the angle of attack  $\alpha$  is supposed to be constant, equal to a nominal value. The desired function  $\sigma(t)$  solution to the guidance problem is a command for the attitude control problem as well as the constant value of  $\alpha$ . Figure 2 displays the standard cascade decomposition for this global problem

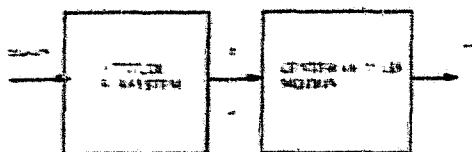


Figure 2

GUIDANCE

To solve the guidance problem, it is first necessary to give a minimal analysis of the system and the crucial points concerning the controllability of the system. It is well known in nonlinear system theory that when the so-called strong accessibility condition is fulfilled, one can not necessarily reach any final point. This is just the case for the problem of our interest. It is important to realize what reachable trajectories look like, independently from any guidance law. This is done next, with a short discussion on one single initial state, the flight path angle  $\gamma_0$ . The reachable area is shown as the area which lies between the two limiting trajectories, (A) corresponding to full lift up ( $\sigma = 0^\circ$ ) and the second limit (B) corresponding to full lift down ( $\sigma = 180^\circ$ ).



Reachable trajectories - Altitude (m) - 10000, 8000, 6000, 4000, 2000, 0

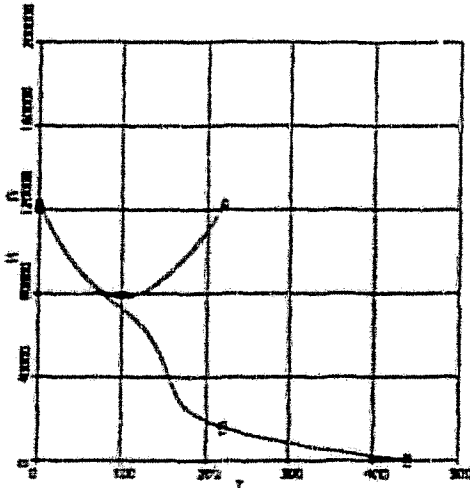


Figure 3 - Reachable trajectories for  $\gamma_0 = -1.57^\circ$  (nominal value)

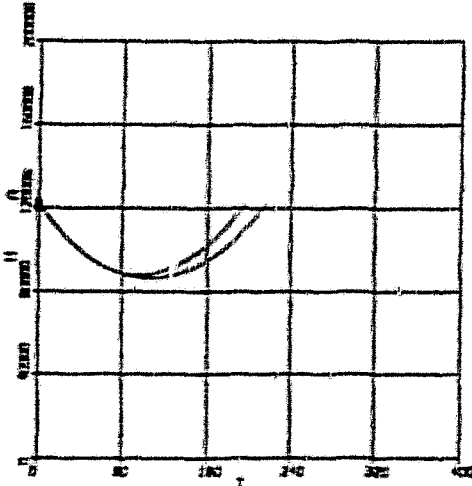


Figure 4 - Reachable trajectories for  $\gamma_0 = -4^\circ$

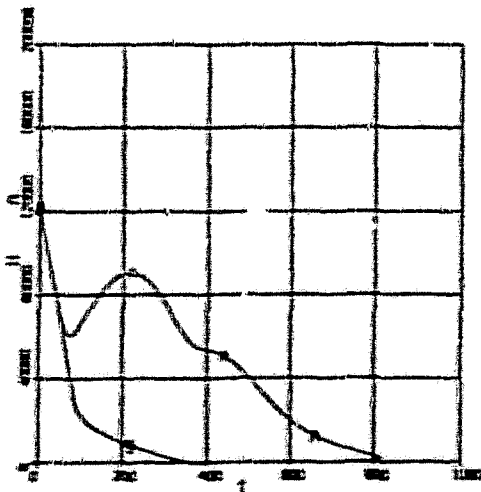


Figure 5 - Reachable trajectories for  $\gamma_0 = -7^\circ$

An easy conclusion is that any "robust" guidance scheme won't be able to cope with initial state deviations as considered above, just for some reachability conditions.

It is easy to check that the system is mainly controllable in the lower layers of the atmosphere while in the higher layers the vehicle is almost insensitive to the aerodynamic forces. So in this ill conditioned situation, the guidance scheme which follows will just saturate the bank angle in the two limits which correspond to either full lift up (entry phase) or full lift down (exit phase).

TRAJECTORY TRACKING

When the altitude is constrained to follow a given reference altitude, the system output is defined as  $y = r - r_{ref}(t)$ .

Compute the consecutive time derivatives as

$$\dot{y} = \dot{r} - \dot{r}_{ref}(t) = V \sin \gamma - \dot{r}_{ref}(t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{V} \sin \gamma + V \dot{\gamma} \cos \gamma - \ddot{r}_{ref}(t) \\ &= \sin \gamma \left[ \frac{-P_{dyn} S_{ref} C_D}{m} - \frac{g}{r^2} \sin \gamma \right] \\ &\quad - \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi) \\ &\quad - V \cos \gamma \frac{P_{dyn} S_{ref} C_L \cos \sigma}{mV} \\ &\quad - \left[ \frac{\dot{V}}{r} - \frac{g}{r^2 V} \right] \cos \gamma - 2 \omega \cos \delta \cos \chi \\ &\quad - \frac{\omega^2 r}{V} \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \sin \chi) \\ &\quad - \ddot{r}_{ref}(t) \end{aligned}$$

Solve the following equation in  $\cos \sigma$ :

$$\cos \sigma = -\omega_n^2 y - 2 \zeta \omega_n \dot{y} - \ddot{r}_{ref}(t)$$

Consequently, if the absolute value of the RHS of next equation is less than 1, the trajectory tracking problem is solvable and the error is the response of a linear second order system with damping  $\zeta$  and natural pulsation  $\omega_n$ . The command bank angle  $\sigma_c$  is such that:

$$\begin{aligned} \cos \sigma_c &= -\left[ \frac{\dot{V}}{r} - \frac{g}{r^2 V} \right] \cos \gamma - 2 \omega \cos \delta \cos \chi \\ &\quad - \frac{\omega^2 r}{V} \cos \delta (\cos \gamma \cos \delta + \sin \gamma \sin \delta \sin \chi) \\ &\quad - \frac{1}{V \cos \gamma} \left( -\omega_n^2 y - 2 \zeta \omega_n \dot{y} - \ddot{r}_{ref}(t) \right) \\ &\quad - \sin \gamma \left[ \frac{-P_{dyn} S_{ref} C_D}{m} - \frac{g}{r^2} \sin \gamma \right] \\ &\quad - \omega^2 r \cos \delta (\sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta \sin \chi) \end{aligned}$$

In the higher layers of the atmosphere, the RHS of the above is outside the bounds -1 and +1, so the command bank angle will just be saturated by  $\cos \sigma_c = \pm 1$  and won't solve the tracking equation. The guidance law has to satisfy dramatic robustness conditions which are very crucial, specially since the atmospheric density is poorly modeled for the high

altitudes under interest. A nice solution has been implemented which consists in modifying slightly the above guidance law. Instead of tracking a reference altitude w.r.t. time, one tracks a reference altitude given as a function of the vehicle's energy  $E = (V^2/2) \cdot (g_0/r)$ .

Note that it is possible to implement a tracking guidance law w.r.t. a reference energy or a reference drag. Such solutions seem to have the advantage to reflect the physical response of the vehicle to the real aerodynamic forces, the tracking of a reference altitude being essentially a geometric concept. In fact, some new problems arise which render such schemes difficult to implement. Whenever the tracking equation has no exact solution, i.e.  $\cos \alpha_c$  is saturated, then it is necessary to switch to a decision to an elementary question: apply full lift up or full lift down? This question is easy to answer in the case of an error in altitude. Considering an error in drag e.g., it is much more involved since one has to consider a function of two variables, the altitude and the velocity, which yield two antinomic decisions depending on which variable is considered.

Lateral guidance.

The sign of the commanded bank angle is determined by the lateral guidance. It follows the lines in (Gamble et al., 1988).

The philosophy of its lateral guidance is to bank in the direction of the desired orbital plane, in order to minimize the wedge angle. If the wedge angle is null, then both the velocity and position vector errors are nullified, and the actual and desired orbital planes are aligned.

Finally, the commanded bank angle is given by  $\alpha_c = \text{sign}(\alpha_e) \cdot \arccos(\cos \alpha_e)$ .

ATTITUDE CONTROL - GAIN SCHEDULING

Linearized model.

The previous attitude model is linearized for  $(\alpha, \beta, \omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\sigma)$  around  $(\alpha_n, 0, 0, 0, 0)$ , where  $\alpha_n$  is the nominal value of  $\alpha$ . We obtain:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_\alpha \\ \dot{\beta} &= \omega_\beta + \sin \alpha_n \cdot \omega_\sigma \cos \alpha_n \\ \dot{\sigma} &= -\omega_\sigma \cos \alpha_n - \omega_\beta \sin \alpha_n \end{aligned}$$

$$\omega_\alpha = \frac{T_A}{I_{xx}} - \frac{L}{I_{xx}}$$

$$\omega_\beta = \frac{T_B}{I_{yy}} - \frac{M}{I_{yy}}$$

$$\omega_\sigma = \frac{T_\sigma}{I_{zz}} - \frac{N}{I_{zz}}$$

$$L = -P_{dyn} S_{ref} \frac{\alpha - \alpha_n}{\sin \alpha_n} \beta$$

$$M = P_{dyn} S_{ref} \left( \frac{\alpha - \alpha_n}{\sin \alpha_n} \omega_\sigma + \frac{L_{ref} C_D^2}{\gamma} \omega_\alpha \right) - \omega_\sigma \cos \alpha_n + \omega_\beta \sin \alpha_n$$

$$N = -P_{dyn} S_{ref} \frac{\alpha - \alpha_n}{\sin \alpha_n} \beta$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(\alpha_n) &= L_{ref} C_{ms}^2(\alpha_n) \\ &\quad - z_{cm} (\sin \alpha_n C_D^2(\alpha_n) + \cos \alpha_n C_L^2(\alpha_n)) \\ \dot{z}_2(\alpha_n) &= z_{cm} (\sin \alpha_n C_D^2(\alpha_n) + \cos \alpha_n C_L^2(\alpha_n)) \\ \dot{z}_3(\alpha_n) &= z_{cm} (\cos \alpha_n C_D^2(\alpha_n) - \sin \alpha_n C_L^2(\alpha_n)) \\ \dot{z}_4(\alpha_n) &= \frac{d^2 z_1}{dt^2}(\alpha_n) \end{aligned}$$

Then, the equations of  $\alpha, \beta, \sigma$  are 2<sup>nd</sup> order ones, whose damping coefficient can be shown to be nearly zero. Furthermore, if the spacecraft is well-balanced, i.e.  $\dot{z}_1(\alpha_n) + \dot{z}_3(\alpha_n) = 0$ , then the equations reduce to:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_{0\alpha}^2 (\alpha - \alpha_n) &= T_\alpha \\ \ddot{\beta} + \omega_{0\beta}^2 \beta &= T_\beta \\ \ddot{\sigma} &= T_\sigma \end{aligned}$$

with  $\begin{cases} \omega_{0\alpha}^2 = P_{dyn} S_{ref} \frac{z_2 + \alpha_n - z_3 \sin \alpha_n}{I_{xx}} \\ \omega_{0\beta}^2 = P_{dyn} S_{ref} \left( \frac{z_2 + \alpha_n}{I_{xx}} - \frac{z_3 \sin \alpha_n}{I_{zz} \cos \alpha_n} \right) \end{cases}$

and  $\begin{cases} T_\alpha = \frac{T_A}{I_{xx}} \\ T_\beta = \frac{\sin \alpha_n}{I_{yy}} T_A - \frac{\cos \alpha_n}{I_{yy}} T_\sigma \\ T_\sigma = -\frac{\cos \alpha_n}{I_{xx}} T_A + \frac{\sin \alpha_n}{I_{zz}} T_B \end{cases}$

PID regulator.

To regulate  $\alpha$  we propose the following PID regulator, which depends on 3 parameters:  $\omega_{0\alpha}$ ,  $\delta_{0\alpha}$  and  $\lambda_{0\alpha}$ .

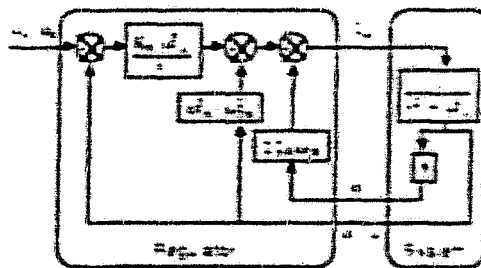


Figure 6

The control  $T_\alpha$  is:

$$\begin{aligned} T_\alpha(s) &= K_\alpha \omega_{0\alpha}^2 \int_0^s (\alpha_n - \alpha) \tau \cdot \tau \cdot \tau \cdot d\tau \\ &\quad + \omega_{0\alpha}^2 \omega_{0\alpha}^2 (\alpha_n - \alpha) + \omega_{0\alpha}^2 \delta_{0\alpha} \dot{\alpha} \end{aligned}$$

If the control is sampled with period  $\Delta$ , the control law becomes:

$$T_{\alpha}(k\Delta) = K_{\alpha} \omega_{1\alpha}^{-1} \Delta \sum_{i=0}^k (\alpha_i(\Delta) - \alpha(i\Delta)) + (\omega_{1\alpha}^2 - \omega_{0\alpha}^2) (\alpha_n - \alpha(k\Delta)) - \zeta_{\alpha}^2 \omega_{1\alpha} \alpha(k\Delta)$$

Then, the transfer function between the setpoint  $\alpha_s$  and  $\alpha$  is:

$$\frac{K_{\alpha}}{(\frac{s}{\omega_{1\alpha}})^2 + 2 \zeta_{\alpha} (\frac{s}{\omega_{1\alpha}}) + (\frac{s}{\omega_{1\alpha}}) - K_{\alpha}}$$

which is independent of the physical system. For the output,  $\omega_1$  is nothing but a time scale factor, which has to be set so that the physical constraints are respected.

In our case,  $\alpha$  and  $\beta$  are regulated (so the setpoints are the nominal values:  $\alpha_s = \alpha_n$ ,  $\beta_s = 0$ ), and the setpoint  $\sigma_s$  is the command bank angle  $\sigma_c$  given by the guidance law. Then, at time  $k\Delta$ , the three regulators are:

$$T_{\alpha} = K_{\alpha} \omega_{1\alpha}^{-1} \Delta \sum_{i=0}^k (\alpha_n - \alpha(i\Delta)) + (\omega_{1\alpha}^2 - \omega_{0\alpha}^2) (\alpha_n - \alpha) - \zeta_{\alpha}^2 \omega_{1\alpha} \alpha$$

$$T_{\beta} = K_{\beta} \omega_{1\beta}^{-1} \Delta \sum_{i=0}^k \beta(i\Delta) + (\omega_{1\beta}^2 - \omega_{0\beta}^2) \beta - \zeta_{\beta}^2 \omega_{1\beta} \beta$$

$$T_{\sigma} = K_{\sigma} \omega_{1\sigma}^{-1} \Delta \sum_{i=0}^k (\sigma_c(i\Delta) - \sigma(i\Delta)) + \omega_{1\sigma}^2 \sigma - \zeta_{\sigma}^2 \omega_{1\sigma} \sigma$$

We obtain an adaptive regulator for  $\alpha$  and  $\beta$ , since the proportional coefficient depends on  $\omega_{n\alpha}$  (or  $\omega_{n\beta}$ ) which depends on the aerodynamic pressure  $P_{dyn}$ . Then, the moments  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  can be computed:

$$T_x = I_{xx} \sin \alpha_n T_{\beta} - \cos \alpha_n T_{\sigma}$$

$$T_y = I_{yy} T_{\alpha}$$

$$T_z = -I_{zz} (\cos \alpha_n T_{\beta} - \sin \alpha_n T_{\sigma})$$

The algorithm of the gain-scheduling regulation becomes:

Control at time  $k\Delta$ :

measure of  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_q$ ,  $\omega_r$ ,  $P_{dyn}$

$$\dot{\alpha} = \omega_p - \omega_p \cos \alpha + \omega_r \sin \alpha + \zeta_{\alpha} \beta$$

$$\dot{\beta} = \omega_q \sin \alpha - \omega_r \cos \alpha$$

$$\dot{\sigma} = -\omega_p \cos \alpha - \omega_r \sin \alpha + \frac{1}{\cos \beta}$$

Calculus of  $\omega_{n\alpha}^2$ ,  $\omega_{n\beta}^2$

Calculus of  $T_{\alpha}$ ,  $T_{\beta}$ ,  $T_{\sigma}$

Calculus of  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$

**SIMULATION RESULTS**

Figure 7 displays the altitude trajectory (A), the command bank angle (B) and the real bank angle (C), when the cascaded system (control + guidance

see Fig 2) is considered. The trajectory guidance scheme was tuned so that the feedback linearized second order system has damping  $\zeta = 1.5$  and a natural pulsation  $\omega_n = 0.1$  rd/s. The gain scheduling control is tuned to respect the physical constraints ( $\dot{\sigma} < 20$  deg/s,  $\sigma < 5$  deg/s<sup>2</sup>): we choose  $K_{\alpha} = K_{\beta} = K_{\sigma} = 0.25$ ,  $\zeta_{\alpha} = \zeta_{\beta} = \zeta_{\sigma} = 0.7$ ,  $\omega_{1\alpha} = \omega_{1\beta} = 3$ ,  $\omega_{1\sigma} = 1$ . Figure 8 displays the angle of attack (A) and the sideslip angle (B).

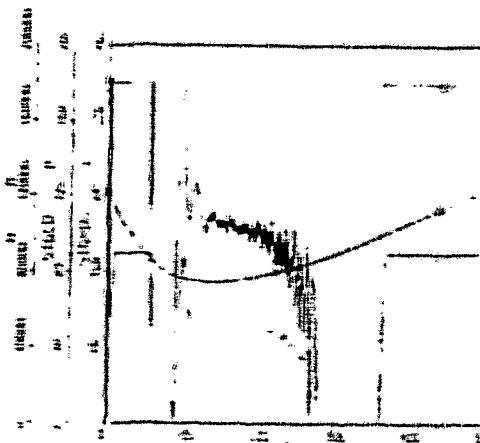


Figure 7 - Overall system : (A) altitude (m), (B) command bank angle (deg), (C) real bank angle (deg)

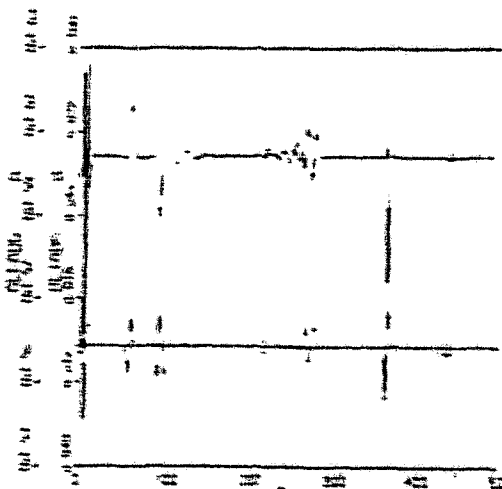


Figure 8 - Overall system : (A) angle of attack (deg), (B) sideslip angle (deg)

To examine the robustness of the guidance scheme, one measures its quality by Delta V, the difference between the atmospheric exit velocity value and the desired exit condition. The value of Delta V is displayed next when some deviations on  $\alpha$  or on  $\beta$  are considered.

## SENSITIVITY TO THE INITIAL PATH ANGLE

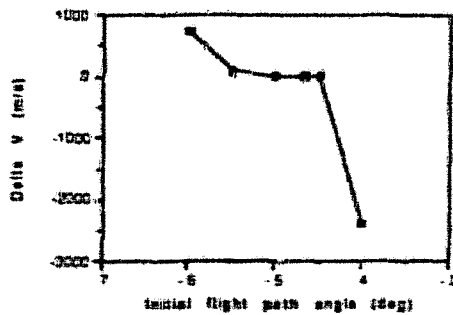


Figure 9

It is worth to remind the controllability analysis of the system which shows, e.g., that the initial condition  $-4$ . deg for the flight path angle will yield an uncontrollable system. This phenomenon should be distinguished from a notion of robustness.

## ROBUSTNESS W.R.T. DENSITY DEVIATIONS

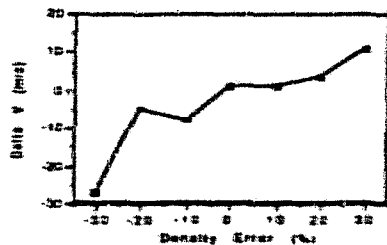


Figure 10

The total orbit transfer "cost" several thousands m/s de-orbit and re-orbit impulses, so the above small values for Delta V are totally negligible.

## CONCLUSION

In this paper, only one single guidance and control policy was explained. The motivation was to highlight the issues provided by some very simple (in the computational sense) schemes. Although there is no online re-actualization of the various

tuning parameters, particularly for the guidance problem, one has the benefit of some good robustness properties which are shown to be quite the best one can expect, considering the severe controllability conditions of the system.

Alternative methods for both problems will be developed in a forthcoming work.

ACKNOWLEDGMENT: This work was performed under ESA Contract N° 9359/91/NL/JG (SC).

## REFERENCES

- Miele, A., T. Wang, W.Y. Lee and Z.G. Zhao (1989 a). Optimal trajectories for the aeroassisted flight experiment. Part 3. Formulation, results and analysis. *Aero-Astronautics Report N° 242*, Rice University.
- Miele, A., T. Wang, W.Y. Lee, H. Wang and G.D. Wu (1989 b). Optimal trajectories for the aeroassisted flight experiment. Part 4. Data, tables and graphs. *Aero-Astronautics Report N° 243*, Rice University.
- Gamble, J.D., C.J. Cerimele, T.E. Moore and J. Higgins (1988). Atmospheric guidance concepts for an aeroassist flight experiment. *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 36, pp. 45-71.
- Mishoe, D. and L. Speyer (1986). Optimal control of aeroassisted plane change maneuver using feedback expansions. *Proc. AIAA Conf., AIAA Paper 86-2136*, pp. 259-271.
- Calise, A.J. and G.H. Bac (1987). Optimal heading change with minimum energy loss for a hypersonic gliding vehicle. *Proc. AIAA Conf., AIAA Paper 87-2568*, pp. 417-421.
- Van Buren, M.A. and K.D. Mease. Aerospace plane guidance using geometric control theory. *Proc. AIAA Conf.*, pp. 1829-1838.
- Van Buren, M.A. and K.D. Mease (1991). A geometric approach to regulator and tracker design for an aerospace plane. *Proc. AIAA Conf., Orlando, 1991*.

**Annexe 9. Applications du calcul formel au contrôle des systèmes  
non linéaires.**

```

% LOGICIEL DE COMMANDE DE SYSTEMES NONLINEAIRES ; 0000010
% DECOUPLAGE STATIQUE " " IMMERSION DANS ; 0000011
% UN SYSTEME LINEAIRE ; 0000012
% PROGRAMME PRINCIPAL ; 0000013
% ; 0000020
% LECTURE DES DONNEES DANS LE FICHIER DDS ; 0000021
IN DDS ; 0000030
IN DIFLIE ; 0000030
% ; 0000030
% APPEL DE LA PROCEDURE DE CALCUL DES DEGRES RELATIFS (NI), DE ; 0000011
% LA MATRICE DE DECOUPLAGE ESTAR, DE SON RANG ; 0000012
IN DS1 ; 0000010
% ; 0000016
% APPEL DE LA PROCEDURE DE CALCUL DE LOI DE COMMANDE ; 0000016
% DECOUPLANTE ET D IMMERSION DANS UN SYSTEME LINEAIRE ; 0000016
IF RAN=P THEN IN DS2 ; 0000017
ON OUTPUT ; 0000010
END ; 0000110

```

```

OFF ECHO;
% PROCEDURE DE CALCUL DES DEGRES RELATIFS, DE LA MATRICE ;
% DE DECOUPLAGE ET DE SON RANG ;
% ;
ARRAY A(N',C(IP),X(N),NI(IP),AX(N),Z(IP);
MATRIX BSTAR(P,M),MXF(N,1),MV(M,1);
FOR I:=1:N DO <<A(I):=MA(I,1);X(I):=MX(I,1);>>;
FOR I:=1:P DO C(I):=MC(I,1);
FOR IM:=1:M DO MV(IM,1):=V(IM);
% ;
% RECHERCHE DES NI ;
% ;
FOR IP:=1:P DO
  <<
  % CALCUL DES L.B.I.L;
  IM:=0;
  REPEAT <<
  IM:=IM+1;
  FOR IIN:=1:N DO AX(IIN):=B(IIN,IM);
  INTER:=DIFLIE(AX,C(IP),N,1);
  >>
  UNTIL (IM=M) OR (INTER NEQ 0);
  WRITE INTER;
% ;
  IF INTER NEQ 0 THEN NI(IP):=1
  ELSE BEGIN
    PUIS:=0;
    REPEAT
      <<
      PUIS:=PUIS+1;
      IM:=0;
      REPEAT
        <<
        IM:=IM+1;
        LAC:=DIFLIE(A,C(IP),N,PUIS);
        FOR IIN:=1:N DO AX(IIN):=B(IIN,IM);
        INTER:=DIFLIE(AX,LAC,N,1);
        >>
        UNTIL (IM=M) OR (INTER NEQ 0);
        IF INTER NEQ 0 THEN NI(IP):=PUIS+1;
        >>
      UNTIL INTER NEQ 0;
    END;
    WRITE "NI(",IP,") =",NI(IP);
  >>;
WRITE "CALCUL DU BSTAR";
% CALCUL DE BSTAR(X);
% ;
% ;
% ;
FOR IP:=1:P DO
  FOR IM:=1:M DO
    BEGIN
      LAC:=DIFLIE(A,C(IP),N,NI(IP)-1);
      FOR IIN:=1:N DO AX(IIN):=B(IIN,IM);
      BSTAR(IP,IM):=DIFLIE(AX,LAC,N,1);
    % ;
      WRITE "BSTAR(",IP,",",IM,")=",BSTAR(IP,IM);
    END;
OFF ECHO;
% ;
% CALCUL DU RANG DE BSTAR;
MATRIX RBSTAR(P,M);
OFF OUTPUT;
RBSTAR:=BSTAR;
00000010
00000011
00000012
00000013
00000020
00000030
00000040
00000050
00000060
00000160
00000170
00000180
00000190
00000200
00000210
00000220
00000230
00000240
00000250
00000260
00000280
00000290
00000300
00000310
00000320
00000330
00000340
00000350
00000360
00000370
00000380
00000390
00000400
00000410
00000420
00000430
00000440
00000450
00000460
00000470
00000480
00000490
00000500
00000510
00000520
00000525
00000530
00000540
00000550
00000560
00000570
00000580
00000590
00000600
00000630
00000640
00000650
00000660
00000665
00000670
00000680
00000690
00000695
00000698
00000699
00000700

```

# A9.4

```
IN RANGMAT;                                00000690
ON OUTPUT;                                  00000695
RAN:=RANGMAT();                             00000700
IF RAN=P THEN WRITE "DECOUPLAGE STATIQUE POSSIBLE" 00000720
      ELSE WRITE "DECOUPLAGE STATIQUE IMPOSSIBLE"; 00000730
WRITE "FIN DSI";                             00000740
ON ECHO;                                      00000750
;END;                                         00000760
```



```

% PROCEDURE CALCULANT LA LOI DE COMMANDE DECOUPLANT LE SYSTEME ; 00000010
% ET EVENTUELLEMENT UNE LOI D'IMMERSION DANS UN SYSTEME LINEAIRE ; 00000011
% DONT LES PARAMETRES SERONT SPECIFIES PAR L'UTILISATEUR. ; 00000012
% ; 00000013
WRITE "DEBUT DECOUPLAGE"; ; 00000014
IF CHC; ; 00000015
MAXNI:=0; ; 00000016
FOR IP:=1:P DO IF NI(IP)>MAXNI THEN MAXNI:=NI(IP); ; 00000017
WRITE "MAXNI =",MAXNI; ; 00000018
WRITE "DETERMINANT DE BSTAR :",DET(BSTAR); ; 00000019
ARRAY XTILD(P,MAXNI),XTILDP(P,MAXNI),GGO(P); ; 00000020
MATRIX F(M,1),DELTAO(P,1),DELTAI(P,M),MG(M,M),INVBSTAR(M,P); ; 00000021
FOR IP:=1:P DO GGO(IP):=0; ; 00000022
FOR IP:=1:P DO DELTAO(IP,1):=GGO(IP)-DEFIE(A,C(IP),N,NI(IP)); ; 00000023
OFF OUTPUT; ; 00000024
% FOR IP:=1:P DO WRITE "DELTAO(",IP,",1) =",DELTAO(IP,1); ; 00000025
%PAUSE; ; 00000026
INVBSTAR:=1/BSTAR; ; 00000027
ON OUTPUT; ; 00000028
%PAUSE; ; 00000029
F:=INVBSTAR*DELTAO; ; 00000030
OFF OUTPUT; ; 00000031
FOR IL:=1:P DO FOR IC:=1:M DO IF IL=IC THEN DELTAI(IL,IC):=G(IL,IL) ; 00000032
ELSE DELTAI(IL,IC):=0; ; 00000033
% FOR IL:=1:M DO WRITE "GAMA1(",IL,",",IL,") =",GAMA1(IL,IL); ; 00000034
ON OUTPUT; ; 00000035
MG:=INVBSTAR*DELTAI; ; 00000036
WRITE "IMMERSION DANS UN SYSTEME LINEAIRE (O/N) ?"; ; 00000037
PAUSE; ; 00000038
WRITE "DEBUT IMMERSION DANS UN SYSTEME LINEAIRE"; ; 00000039
FOR IP:=1:P DO GGO(IP):=FOR INI:=1:NI(IP) ; 00000040
SUM LAM(IP,INI)*DEFIE(A,C(IP),N,INI-1); ; 00000041
FOR IP:=1:P DO DELTAO(IP,1):=GGO(IP)-DEFIE(A,C(IP),N,NI(IP)); ; 00000042
OFF OUTPUT; ; 00000043
% FOR IP:=1:P DO WRITE "DELTAO(",IP,",1) =",DELTAO(IP,1); ; 00000044
INVBSTAR:=1/BSTAR; ; 00000045
ON OUTPUT; ; 00000046
F:=INVBSTAR*DELTAO; ; 00000047
OFF OUTPUT; ; 00000048
FOR IL:=1:P DO FOR IC:=1:M DO IF IL=IC THEN DELTAI(IL,IC):=G(IL,IL) ; 00000049
ELSE DELTAI(IL,IC):=0; ; 00000050
% FOR IL:=1:M DO WRITE "GAMA1(",IL,",",IL,") =",GAMA1(IL,IL); ; 00000051
ON OUTPUT; ; 00000052
MG:=INVBSTAR*DELTAI; ; 00000053
OFF OUTPUT; ; 00000054
DIMXTILD:=P + FOR IP:=1:P SUM (NI(IP)-1); ; 00000055
FOR IP:=1:P DO FOR I:=1:NI(IP) DO XTILD(IP,I):=DEFIE(A,C(IP),N,I-1); ; 00000056
FOR IP:=1:P DO FOR I:=1:NI(IP) DO ; 00000057
WRITE "XTILD(",IP,",",I,")=",XTILD(IP,I); ; 00000058
FOR IP:=1:P DO FOR I:=1:NI(IP)-1 DO XTILDP(IP,I):=XTILD(IP,I+1); ; 00000059
FOR IP:=1:P DO XTILDP(IP,NI(IP)):=GGO(IP) ; 00000060
- FOR I:=1:M SUM V(I)*DELTAI(IP,I); ; 00000061
FOR IP:=1:P DO WRITE "XTILDP(",IP,",",NI(IP),")=",XTILDP(IP,NI(IP)); ; 00000062
FOR IP:=1:P DO Z(IP):=XTILD(IP,1); ; 00000063
FOR IP:=1:P DO WRITE "Z(",IP,") =",Z(IP); ; 00000064
WRITE "LE SYSTEME EST LAMERNE DANS LE SYSTEME LINEAIRE"; ; 00000065
FOR IP:=1:P DO FOR I:=1:NI(IP)-1 DO ; 00000066
WRITE "XTILDP(",IP,",",I,")= XTILD(",IP,",",I+1,")"; ; 00000067
FOR IP:=1:P DO BEGIN ; 00000068
WRITE "XTILDP(",IP,",",NI(IP),")="; ; 00000069
FOR INI:=1:NI(IP) DO WRITE "+LAM(",IP,",",INI,")*XTILD(" ; 00000070
,IP,",",INI,")"; ; 00000071
FOR I:=1:M DO WRITE "+ V(",I,")*",DELTAI(IP,I); ; 00000072

```

## A9.6

```

END;
FOR IP:=1:P DO WRITE "Z(",IP,")= XTILD(",XP,",1)";
WRITE "AVEC L APPLICATION T DE R**",N," SUR R**",DIMXTILD," DE";
FOR I:=1:N DO WRITE X(I);
WRITE "SUR ";FOR IP:=1:P DO FOR I:=1:NI(IP) DO
    WRITE XTILD(IP,I);
WRITE " ";
WRITE " LE SYSTEME BOUCLE DEVIENT:";
FOR IP:=1:P DO <<IF NI(IP)=2 THEN << WRITE
"XTILDPP(",IP,",1)-LAM(",IP,",2)*XTILDP(",IP,",1)-LAM(",IP,",1)*XTILD(",
IP,",1
)= G(",IP,")*V(",IP,")";
WRITE "AVEC XTILD(",IP,",1) =",XTILD(IP,1);
WRITE "ET LAM(",IP,",1)--RN**2 LAM(",IP,",2)--2*DEXTILD*RN ",IP,")
-K*RN**2";
WRITE " ";
>>
>>
WRITE "ECRIURE COMPLETE DU SYSTEME BOUCLE (Y/N)?";
PAUSE;
MXP:=MA+B*F+B*MS*MV;
FOR I:=1:N DO WRITE "XP(",I,") =",MXP(I,1);
ON ECHO;
;END;
0000058C
0000059C
0000060C
0000061C
0000062C
0000063C
0000064C
0000065C
0000066C
0000067C
0000068C
0000069C
0000069C
0000069C
0000070C
0000071C
0000071C
0000073C
0000074C
0000075C
0000076C
0000077C
0000078C

```

**Annexe 10. Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

- [ALB1] J.C. Albert, A. Glumineau, M. Gugliemi, E. Le Carpentier et C.H. Moog, "Online Guidance and Control of a Spacecraft for an aeroassisted orbit transfer", IFAC, Symposium on Aerospace Control, Munich/Ottobrunn, 7-11 sept. 1992.
- [ACR1] ACRI S.A., A. Glumineau, M. Gugliemi et C.H. Moog, "Guidance, Navigation and Control for Moderate Lift/Drag Reentry - Mathematical description of guidance techniques", WP 3000, Contrat ESA N°9359/91/NL/JG(SC), Mai 1991.
- [ACR2] ACRI S.A., A. Glumineau, M. Gugliemi, E. Le Carpentier et C.H. Moog "Guidance, Navigation and Control for Moderate Lift/Drag Reentry- Final Report" Contrat ESA N°9359/91/NL/JG(SC), Juin 92.
- [AOU1] Y. Aoustin, P. Chedmail, et A. Glumineau, "Some simulations results on the robustness of a flexible arm nonlinear control law", Proc. of 17<sup>th</sup> IASTED International Symposium of Simulation and Modelling, Lugano, pp.278-280, 19-22 Juin 1989 et Int. Jour. of Mod. & Simu., vol. 12, n° 1, pp.1-7, 1992.
- [AOU2] Y. Aoustin, C. Chevallereau, A. Glumineau et C.H. Moog, "Control policies for the end-point control of a single flexible robotic arm", rapport interne L.A.N. E.C.N. n° 92.12 et soumis 1992.
- [BAT1] S. Battilotti, "A sufficient condition for nonlinear noninteracting control with stability via Dynamic State feedback", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 36, n° 9, pp. 1033-1045, 1991.
- [BAT2] S. Battilotti et W.P. Dayawansa, "Noninteracting control with stability for a class of nonlinear systems", *System Control Letters*, vol 17, pp. 327-338, 1991.
- [BON1] B. Bonnard, G. Bornard, J.P. Gauthier, "L'Automatique non Linéaire expliquée par des études de cas", Ecole d'été d'Automatique de Grenoble, INPG, ENSIEG, CNRS, 2-6 Sept. 1991.
- [BUH1] H. Bühler, "Réglage par modes de glissements", Lausanne : Presses Polytechniques Romandes, 1986.
- [CAS1] R. Castro, J. Alvarez, "Robust linear Model Matching with internal stability for Non Linear Systems using Sliding Mode Control", Proc. 27th C.D.C. IEEE , Austin, Texas, 7-9 Dec., 1988.
- [CHE1] P. Chedmail et G. Michel, "Modélisation of Plane Flexible Robots", Proc. 15th ISIR, Tokyo, Japan, pp. 1083-1090, 1985.
- [CHE2] P. Chedmail, A. Glumineau and J.C. Bardiaux, "Plane flexible modelisation and application to the control of an elastic arm", Proc. de la Conf. ICAR'87, Versailles, France, pp. 525-526, 1987.

- [CHE3] P. Chedmail, "Synthèse de robots et de site robotisés - Modélisation de robots souples", Thèse de docteur d'état, ENSM, Université de Nantes, 1980.
- [CHE4] Chedmail, P., Y. Aoustin and C. Chevallereau (1991). "Modelling and control of flexible robots". *Int. J. Numerical Methods in Eng.*, vol. 32, pp. 1595-1619, 1991.
- [CHEN1] D. Cheng, C.F. Martin, T.J. Tarn, "On Morgan problem for a class of nonlinear systems", Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Control, Networks and Signal Processing, Proc. of the International Symposium M.T.N.S-91, pp.301-306, 1991.
- [COM1] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay, et M. Malabre, "About new decoupling invariants: the essential orders", *International Journal of Control*, vol. 44, pp. 689-700, 1986.
- [COM2] C. Commault, J.M. Dion, "Structure at infinity of Linear multivariable Systemes: a Geometric approach, Proc. 2th CDC IEEE, San Diego, pp. 112-117, 1988.
- [CRE1] M. Cremer, "A precompensator of minimal order for decoupling a linear multivariable system", *International Journal of Control*, vol 14, pp. 1089-1103., 1971.
- [DAN1] B. D'Andrea, L. Praly, "Finite nonlinear zeros for decouplable systems", *System Control Letters*, vol.10, pp.103-109, 1987.
- [DEL1] A. De Luca, A. Isidori and F. Nicolo, "Control of robot arm with elastic joints via nonlinear dynamic feedback", Proc. 24th Conf. Dec. Control., Fort Lauderdale, U.S.A, pp.1671-1679, 1985.
- [DES1] J. Descusse, et C.H. Moog, "Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Non-Linear Systems", *International Journal of Control*, vol.42, pp.1387-1398, 1985.
- [DES2] J. Descusse, et C.H. Moog, "Dynamic decoupling for right-invertible non-linear systems", *Systems Control Letters*, vol.8, pp.345-349, 1987.
- [DES3] J. Descusse, J.F. Lafay, et M. Malabre, "Solution to Morgan Problem", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 33, pp.732-739, 1988.
- [DES4] J. Descusse, "Block Noninteracting Control with (Non) Regular Static State Feedback: A Complete Solution", *Automatica*, Vol. 27, N° 5, pp. 883-886, 1991.
- [DESI1] De Simone et F. Nicolo, "On the control of elastic robots by feedback decoupling", Proc. 24th C.D.C. IEEE, *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 1, n°2, pp. 64-69, 1986.
- [DESC1] De Schutter, J., H. Van Brussels, M. Adams, A. Froment and J.L. Faillot, "Control of flexible robots using generalized non-linear decoupling", Proc. SYROCO, Karlsruhe, RFA, 98.1-98.6., 1988.

- [DIB1] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle, et C.H. Moog, "A unified notion of rank for a non-linear system", *Proc. 27th CDC IEEE*, Austin, pp. 926-931, 1988.
- [DIB2] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle and C.H. Moog, "Rank invariants of nonlinear systems", *S.I.A.M. J. Contr. Opt.*, vol. 27, pp. 658-672, pp. 1-7, 1989.
- [DIB3] M.D. Di Benedetto, "Nonlinear strong model matching", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. 35, pp. 1351-1354, 1990.
- [DIB4] M.D. Di Benedetto, J.W. Grizzle, "Asymptotic and exact model matching for nonlinear systems", Report No. CGR-91-4, University of Michigan, Ann Arbor, September 1991.
- [DIB5] M.D. Di Benedetto, A. Glumineau and C.H. Moog, "Input-Output Decoupling and Equivalence of Nonlinear Systems under Pure Dynamic State Feedback", preprint, 1992.
- [DIB6] M.D. Di Benedetto, A. Glumineau and C.H. Moog, "Découplage entrée-sortie de systèmes non linéaires par retour d'état dynamique pur", à paraître *C.R.A.S., Série I*, 307, 1992,
- [DIO1] J.M. Dion and C. Commault, "The minimal delay decoupling problem: feedback implementation with stability", *SIAm J. Contr. Opt.*, vol. 26, n°1, pp.66-82, 1988.
- [ELA1] S. El Asmi, "Autour de l'inversion des systèmes entrée-sortie et du concept d'essentialité: une approche algébrique", Thèse de Docteur en Automatique, Université Paris-Sud, 1992.
- [ELM1] H. Elmali N. Olgac, "Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technique", *Automatica*, vol.28, n° 1, pp. 145-151, 1992.
- [FLI1] M. Fliess, "A new approach to the non-interacting control problem in non-linear systems theory", *Proc. 23rd Allerton Conf.*, Monticello, IL, pp. 123-129, 1985.
- [FLI2] M. Fliess, "A note on the invertibility on non-linear input-output differential systems", *Systems & Control Letters*, vol 8, pp. 147-151, 1986.
- [FLI3] M. Fliess, "Automatique et corps différentiels", *Forum Math.*, vol.1, pp. 227-228, 1989.
- [FLI4] M. Fliess, "Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. 35, pp. 994-1001, 1990.
- [FLI5] M. Fliess, J. Lévine, P Rouchon, "A Simplified approach of crane control via a generalized state-space model", *Proc. 30th C.D.C. IEEE*, Brighton pp. 736-741, 1991.
- [FJR1] K. Furuta and S. Kamiyama, "State feedback and inverse system", *Int. J. Control*, vol. 25, pp. 229-241, 1977.

- [GAM1] J.D. Gamble, C.J. Cerimele, T.E. Moore and J. Higgins, "Atmospheric guidance concepts for an aeroassist flight experiment", *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 36, pp. 45-71, 1988.
- [GEO1] G. Georgiou, A. Chelouah, S. Monaco, et D. Normand-Cyrot, "Nonlinear multirate adaptive control of a synchronous motor", soumis à 31<sup>th</sup> I.E.E.E C.D.C. et à *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, février 92.
- [GIL1] E.G. Gilbert, "The decoupling of multivariable systems by state feedback", *S.I.A.M. J. Contr.*, pp.50-63, 1969.
- [GLU1] A. Glumineau and C.H. Moog, "The essential orders and nonlinear decoupling", *Int. J. Control*, vol. 50, pp. 1825-1834, 1989.
- [GLU2] A. Glumineau and C.H. Moog and T.J. Tarn, "Interconnected Zero Dynamics in Nonlinear Systems and their Role in Dynamic Noninteracting Control with Stability", *Proc. Genoa Conf. 'New Trends in Systems Theory'*, 9-11 July 1990, Birkhäuser, pp. 316-323, ISBN 0-8176-3548-3, ISBN 3-7643-3548-3, 1991.
- [GLU3] A. Glumineau and C.H. Moog, "Nonlinear Morgan's Problem : Case of  $(p+1)$  Inputs and  $p$  Outputs", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, vol. 37, pp. 1067-1072, n° 7, July 1992.
- [GLU4] A. Glumineau, M. Hamy, C. Lanier and C.H. Moog, "Robust Control of a Brushless Servo Motor via Sliding Modes Techniques", à paraître *Int. J. Control*, 1992.
- [GOL1] M. Golubitsky et V. Guillemin, "Stable mappings and their singularities", *Graduate texts in Mathematics*, N° 14, Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [GRI1] J.W. Grizzle, "A linear algebraic framework for the analysis of discrete-time nonlinear system", Report of the Dept. of Electrical Eng. and Comp. Sci. Univ. of Michigan, 1991 et à paraître dans *SIAM*.
- [HAM1] J. Hammer et M. Heymann, "Causal factorization and linear feedback", *SIAM J. Contr. Opt.*, 19(4), pp. 445-468, 1981.
- [HAMY] M. Hamy, "Cours d'électrotechnique et d'électronique de Puissance", Ecole Centrale de Nantes, 1992.
- [HAS1] H. Hasimoto, H. Yamamoto, S., Yanagisawa, et F. Harashima, "Brushless servo motor control using variable structure approach", *IEEE Trans. on Indus. Applications*, vol. 24, pp.160-170, 1988.
- [HAU1] M.L.J. Hautus and M. Heymann, "Linear feedback decoupling - transfer function analysis", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-28, n°8, pp. 823-832, 1983.

- [HEN1] M.P.Hennessey, J.A. Priebe, P.C. Huang and R.J. Grommes, "Design of a light weight robotic arm and controller; Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, pp. 779-785., 1987.
- [HER1] A. N. Herrera Hernandez, Communication personnelle, Septembre 1990.
- [HER2] A. N. Herrera Hernandez, "Sur le découplage des systèmes linéaires par des lois statiques non régulières", Thèse de doctorat en Automatique, L.A.N., Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, 26 Septembre 1991.
- [HER3] A. N. Herrera Hernandez, J.F. Lafay, "The Morgan's Problem is still Open", 31<sup>ème</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, Dec. 92.
- [HIR1] R.M. Hirschorn, "Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 24, pp. 855-865, 1979.
- [HUI1] H.J.C. Huijberts, "A nonregular solution of the nonlinear dynamic disturbance decoupling problem with an application to a complete solution of the nonlinear model matching problem", *S.I.A.M. J. Contr. Opt.*, Vol. 30, n° 2, pp. 350-366, 1992.
- [HUI2] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer and L.L.M. Van Der Wegen, "Dynamic Disturbance decoupling for nonlinear systems", *S.I.A.M. J. Contr. Opt.*, Vol. 30, n° 2, pp. 336-349, 1992.
- [HUI3] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer and L.L.M. Van Der Wegen, "Dynamic Disturbance decoupling for nonlinear systems: the square and noninvertible case", *Controlled dynamical systems*, B.Bonnard, B.Bride, J.P.Gauthier, L.Kupka (eds.), Birkhauser, Boston, pp.243-252, 1991.
- [HUI4] H.J.C. Huijberts, H. Nijmeijer and L.L.M. Van Der Wegen, "Minimality of Dynamic Input-Output decoupling of nonlinear systems", *Systems & Control Letters*, vol. 18, pp. 435-443, 1992.
- [ICA1] S. Icart, "Etude du découplage ligne par ligne avec stabilité: le cas des systèmes linéaires", *Thèse de Doctorat en Automatique*, Laboratoire d'Automatique de Nantes, E.N.S.M (E.C.N), 1990.
- [ICA2] S. Icart, J.F. Lafay and M. Malabre, "A Unified Study of the Fixed Modes of Systems Decoupled via Regular Static State Feedback", *Proc. Genoa Conf. New Trends in Systems Theory*, Birkhäuser, pp. 425-432, ISBN 0-8176-3548-3, ISBN 3-7643-3548-3, 9-11 July 1990.
- [ISH1] A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori Giorgi, S. Monaco, "Nonlinear decoupling via feedback: a differential approach, *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. 26, pp. 331-345, 1981.

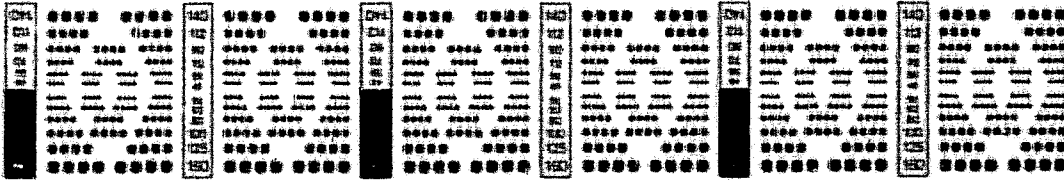


- [ISI2] A. Isidori, "Control of Nonlinear Systems via Dynamic State-Feedback", in Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, Proc. Conf. Paris, 1985, M. Fliess and M. Hazewinkel, eds., Reidel, Dordrecht, 1986.
- [ISI3] A. Isidori and J.W. Grizzle, "Fixed Modes and Nonlinear Control with Stability", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol 33, pp. 907-914, 1988.
- [ISI4] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", 2nd Ed., Springer Verlag, Comm. & Contr. Eng. Series, 1989.
- [KOT1] Ü. Kotta, "Essential orders for discrete-time nonlinear systems", soumis à Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math, 1991.
- [KOU1] T. Koussiouris, "A Frequency Domain Approach to the Block Decoupling Problem II : Pole Assignment while Block Decoupling a Minimal System by State Feedback and a Constant Non Singular Input Transformation and the Observability of the Block Decoupled System", *Int. J. Contr.*, vol. 32, pp. 443-464, 1980.
- [LAF1] J.F. Lafay, P. Zagalak, A. Herrera and S. Icart, "Structural Results about the Interactor", *Proc. 29th CDC-IEEE*, Honolulu, pp. 1048-1049, 1990.
- [LEP1] B. Le Pioufle, Georgiou, G., et Louis, J. P., Application des commandes non linéaires pour la régulation en vitesse ou en position de la machine synchrone autopilotée. *Revue Phys. Appl.*, vol. 25, pp. 517-526, 1990.
- [MAL1] M. Malabre, "Sur le rôle de la structure à l'infini et des sous espaces presque invariants dans la résolution de problèmes de commande. Thèse de doctorat ès Sciences, Université de Nantes, 1985.
- [MAR1] R. Marino, "On the largest feedback linearizable subsystem", *Systems & Control Letters*, vol. 6, pp. 345-351, 1986.
- [MOO1] C. H. Moog, A. Glumineau, "Le problème du rejet des perturbations mesurables dans les systèmes non linéaires. Application à l'amarrage en un seul point des grands pétroliers". Colloque National CNRS, Belle-Ile, 1982 et "Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Systèmes et le Traitement du Signal", Editions du C.N.R.S., vol. 3, pp. 689-698, 1983.
- [MOO2] C.H. Moog, "Inversion, Découplage, Poursuite de Modèle des Systèmes Non Linéaires", Thèse de Docteur ès Sciences de l'Université de Nantes, 1987.
- [MOO3] C.H. Moog, "Non linear decoupling and structure at infinity", *Math. Control Signals Systems*, vol.1, pp. 257-268, 1988.
- [MOR1] A.S. Morse, "Parametrization for multivariable adaptative control", Proceedings 20th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 970-972, 1981
- [NIJ1] H. Nijmeijer, "Controllability distributions for nonlinear control systems", *Systems & Control Letters*, vol. 2, n° 2, pp. 122-129, 1982.

- [NIJ2] H. Nijmeijer, "Invertibility of Affine Nonlinear Control Systems: a geometric approach", *Systems & Control Letters*, vol. 2, n° 3, pp. 163-168, 1982.
- [NIJ3] H. Nijmeijer and J.M. Schumacher, "Zeros at infinity for Affine nonlinear systems", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. 30, pp. 566-573, 1985.
- [NIJ4] H. Nijmeijer et A.J. Van der Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer Verlag, ISBN 0-387-97234-X, 1990.
- [PHI1] A.G. Phillipov, "Equations différentielles à second membre discontinu", *Journal de Mathématiques*, Tome 51, n° 1, 1960.
- [PUG1] A.C. Pugh, P.A. Ratcliffe, "On the Zeros and Poles of Rational Matrix", *Int. J. Contr.*, vol.30, pp.213-226, 1979.
- [SIL1] L.M. Silverman, "Inversion of Multivariable Linear Systems", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. AC-14, pp. 270-276, 1969.
- [ROS1] H.H. Rosenbrock, "State space and multivariable theory", Nelson, Londres, 1970.
- [RUD1] J. Rudolph, "Poursuite de modèle: une approche par l'algèbre différentielle", Thèse de l'Université, Paris-Sud, 1991.
- [SER1] A.M. Serna et E. Bayo, "Trajectory planning for flexible manipulators", *Proc. IEEE Conf on Robotics and Automation*, pp. 910-915, 1990.
- [SAB1] A. Sabanovic, et D.B. Izosimov, "Application of sliding modes to induction motor control", *IEEE Trans. on Indus.Applications*, vol. 17, pp. 41-49, 1981.
- [SAB2] A. Sabanovic, et F. Bilalovic, "Sliding mode control of AC drives", *IEEE Trans. on Indus.Applications*, vol. 25, pp. 70-75, 1989.
- [SIC1] B. Siciliano et W.J. Book, "A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators", *International Journal of Robotics Research*, vol.7, pp.79-90, 1988.
- [SIN1] S.N. Singh, "Decoupling of invertible nonlinear systems with state feedback and precompensation", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. AC-25, pp.1237-1239, 1980.
- [SIN2] S.N. Singh, "A Modified Algorithm for Invertibility in Nonlinear Systems", *I.E.E.E. Trans. Aut. Contr.*, vol. AC-26, pp. 595-598, 1981.
- [SIN3] S.N. Singh, "Generalized Decoupled Control synthesis for invertible nonlinear systems", *I.E.E.E. Proc*, vol. 128, Part D, pp. 157-161, 1981.
- [SIR1] H. Sira-Ramirez, "Differential geometric methods in variable structure control", *Int.J. Control*, vol. 48, pp. 1359-1390, 1988.
- [SLO1] J.J.E Slotine, "The robust control of robot manipulators", *Int. J. Robotics Research*, vol. 4, pp. 49-64, 1985.

- [SUN1] W. Sunada et S. Dubowsky, "The application of finite element methods to the dynamic analysis of flexible spatial and co-planar linkage systems", *Journ. Mech. Design*, vol.103, pp. 643-651, 1983.
- [VAR1] A.L.G. Vardoulakis, "On Infinite Zeros", *Int. J. Contr.*, vol.32, pp.849-866, 1980.
- [VER1] J.P. Verhnes, "Contribution à l'étude des systèmes de commande à structure variable", Thèse de docteur 3ème Cycle en Automatique, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1971.
- [WAG1] K. Wagner, "On Nonlinear Noninteraction with Stability", Proc. 28th CDC IEEE, Tampa, pp. 1994-1999, 1989.
- [WAG2] K. Wagner, "Nonlinear noninteraction with stability by dynamic state feedback", *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 29, pp. 609-622, 1991.
- [WIJ1] S.W. Wijesoma, R.J. Richards, "Robust trajectory following of robots using computed torque structure with VSS", *Int. J. Contr.*, vol.52, n°4, pp. 935-962, 1980.
- [WOL1] W.A. Wolovich and P.L. Falb, "Invariants and canonical forms under dynamic compensation", *S.I.A.M. J. Contr. Opt.*, vol. 14, pp. 996-1008, 1976.
- [WON1] W.M. Wonham, A.S. Morse, "Decoupling and pole assignment in linear multivariable control : A Geometric Approach", *S.I.A.M. J. Contr.*, vol. 8, pp. 1-18, 1970.
- [WON2] W.M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 2nd ed., Springer Verlag, Berlin, 1979.
- [XIA1] X.H. Xia, W.B. Gao, "New invariants-essential ranks of nonlinear system", Technical report, Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, 1988.

# FIN



1997  
graphicom

MIRE ISO N° 1  
NF Z 43-007

AFNOR  
Cedex 7 - 93080 PARIS-LA DÉFENSE