



Matrices de Hadamard et Plans en Blocs Incomplets Équilibrés

Salim Lardjane

► **To cite this version:**

Salim Lardjane. Matrices de Hadamard et Plans en Blocs Incomplets Équilibrés. 2013. <hal-01098551>

HAL Id: hal-01098551

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01098551>

Submitted on 26 Dec 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Matrices de Hadamard et Plans en Blocs Incomplets Equilibrés

Salim Lardjane

LMBA UMR CNRS 6205
Université de Bretagne-Sud

Le but de cet article est de souligner l'importance de la conjecture de Hadamard pour les sciences expérimentales. Pour une présentation et divers développements de cette conjecture, on pourra consulter "La conjecture de Hadamard I" et "La conjecture de Hadamard II" de Shalom Eliahou sur Images des Maths. Rappelons simplement qu'une matrice de Hadamard est une matrice carrée de composantes égales à $+1$ ou -1 dont les lignes sont orthogonales deux à deux.



JACQUES SALOMON HADAMARD (1865-1963)

La conjecture de Hadamard énonce qu'il existe une matrice de Hadamard d'ordre $4n$ pour tout entier strictement positif n .

A présent, parlons un peu de football.

La poule D du championnat d'Europe de football 2012.

La poule *D* de l'Euro 2012 de football était composée des quatre équipes suivantes :

1	Ukraine
2	Suède
3	France
4	Angleterre

Les quatre équipes se sont rencontrées deux à deux au cours de six matchs, chaque équipe jouant trois fois et rencontrant une fois chacune des autres équipes.



TROPHÉE DE L'EURO 2012

Par exemple, les matchs de l'équipe de France ont été les suivants :

Date	Equipes	Heure
Lundi 11 juin 2012	France - Angleterre	18h00
Vendredi 15 juin 2012	Ukraine - France	18h00
Mardi 19 juin 2012	Suède - France	20h45

L'ensemble des matchs de cette poule peut être résumé par le tableau suivant, chaque équipe étant identifiée par son numéro (1- Ukraine, 2- Suède, 3- France, 4- Angleterre) :

Match 1	Match 2	Match 3	Match 4	Match 5	Match 6
3	1	1	2	2	4
4	2	3	4	3	1

Le tableau ainsi obtenu décrit le plan d'affectation des différentes équipes aux différents matchs et constitue un exemple de *plan en blocs incomplets équilibrés*.

Définition des plans BIE.

On appelle *plan en blocs incomplets équilibrés (plan BIE)* de paramètres (v, b, r, k, λ) un couple (X, \mathcal{A}) où X est un ensemble quelconque, \mathcal{A} est un ensemble de sous-ensembles de X et où le paramètre v vérifie $v > k > 0$, les paramètres s'interprétant de la façon suivante :

1. v (ordre) : taille de X ; les éléments de X sont appelés *points*, *variétés* ou *traitements*.
2. b (nombre de blocs) : nombre d'éléments de \mathcal{A} ; les éléments de \mathcal{A} sont appelés *blocs*.
3. r (nombre de réplifications) : le nombre de blocs auquel chaque point appartient.
4. k (taille de bloc) : taille commune des différents blocs.
5. λ (indice) : nombre de blocs auxquels appartient chaque couple de points distincts.

Par exemple, les matchs de la poule D de l'Euro 2012 de football, présentés plus haut, constituent un plan en blocs incomplets équilibrés, de paramètres :

$$v = 4, k = 2, b = 6, r = 3, \lambda = 1$$

Les variétés correspondent aux équipes et les différents blocs aux différents matchs.

Le terme *incomplet* réfère au fait que $k < v$ et le terme équilibré au fait que λ est constant pour les différents couples de variétés.

Les plans BIE sont utilisés en planification des expériences lorsque le nombre total de traitements (v) est supérieur au nombre de traitements qui peuvent être effectués sous des conditions considérées comme suffisamment semblables (k). Ils sont utilisés pour planifier des expériences où les essais

doivent être regroupés en sous-ensembles (blocs) de même taille recevant les différents traitements, de façon à ce que chaque traitement soit effectué le même nombre de fois et chaque couple de traitements apparaisse dans le même nombre de blocs.

En Agriculture, dans le cas des expériences en champ, on entend par bloc un ensemble de parcelles voisines et très semblables les unes aux autres quant aux conditions de croissance et de développement de la végétation.

Afin de caractériser les associations blocs-traitements, on introduit les variables indicatrices n_{tl} prenant la valeur 1 si le traitement t est présent dans le bloc l et 0 sinon. Les n_{tl} peuvent être présentés sous la forme d'une matrice $v \times b$:

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1b} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2b} \\ \vdots & & & \\ n_{v1} & n_{v2} & \cdots & n_{vb} \end{pmatrix}$$

Cette matrice, composée de 0 et de 1 est appelé *matrice d'incidence*. On a de façon immédiate les relations suivantes, valables respectivement pour tous l et t :

$$k = \sum_t n_{tl}, \quad r = \sum_l n_{tl}$$

On note

$$n = \sum_{tl} n_{tl} = bk = rv$$

le nombre total d'observations.

Exemples.

Le tableau ci-après illustre le principe d'un plan en Blocs Complets dans le cas d'une expérience qui fait intervenir sept traitements et quatre blocs.

Chaque traitement peut correspondre à une variété de plante ou à un engrais appliqué à une même variété de plante, par exemple.

Chaque bloc peut correspondre à un champ divisé en 7 parcelles, ces champs étant de fertilités a priori différentes.

Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Bloc 4
3	4	4	6
6	3	5	3
1	5	2	1
2	1	7	5
7	7	3	2
4	2	1	4
5	6	6	7

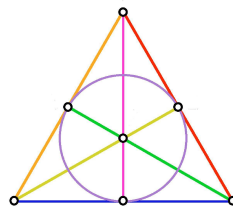
Le tableau ci-après illustre le principe d'un plan BIE de paramètres $v = 7, k = 3, b = 7, r = 4, \lambda = 2$. Ce plan permet de prendre en compte une contrainte limitant le nombre de traitements par bloc à 3.

Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Bloc 4	Bloc 5	Bloc 6	Bloc 7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

La matrice d'incidence correspondante est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce plan BIE peut être représenté par la figure suivante. Celle-ci illustre le lien existant entre plans en blocs et géométrie projective puisqu'on reconnaît là le plan projectif de Fano.



PLAN PROJECTIF DE FANO

Chaque point correspond à un traitement ou variété et chaque droite ou cercle à un bloc. On pourra, à titre d'exercice, numéroter les différents points de façon à ce qu'ils correspondent aux différents traitements.



GINO FANO (1871-1952)

Problème d'existence de plans BIE de paramètres donnés.

On peut démontrer que les paramètres d'un plan BIE vérifient nécessairement [1] :

$$vr = bk$$

et

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1}$$

ainsi que l'inégalité, due à Fisher,

$$v \leq b$$



RONALD AYMER FISHER (1890-1962)

Ainsi, les trois entiers v, k, λ suffisent en fait à caractériser le plan.

Toutefois, l'existence de cinq entiers v, r, b, k, λ tels que

$$v \leq b, \quad vr = bk \quad \text{et} \quad \lambda = r(k-1)/(v-1)$$

ne suffit pas pour assurer l'existence d'un plan d'expérience en BIE. Ainsi, *il n'existe pas* de plan de ce type pour

$$v = 15, k = 5, b = 21, r = 7, \lambda = 2$$

bien que les relations précédentes soient vérifiées [4].

Matrices de Hadamard et construction de plans BIE.

Une matrice de Hadamard est dite *normalisée* si toutes les composantes de sa première ligne et de sa première colonne sont égales à $+1$.

Soit donc H une matrice de Hadamard normalisée d'ordre $4t$. Alors, la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de H est appelée *coeur* de H . Si le coeur est noté A , alors

$$H = \begin{pmatrix} +1 & +1 & \cdots & +1 \\ +1 & & & \\ \vdots & & A & \\ +1 & & & \end{pmatrix}$$

Théorème. *L'existence d'une matrice de Hadamard d'ordre $4t$ équivaut à l'existence de plans BIE de paramètres*

(i) $v = b = 4t - 1, r = k = 2t - 1, \lambda = t - 1$

(ii) $v = v = 4t - 1, r = k = 2t, \lambda = t$

Preuve. Soit H une matrice de Hadamard normalisée d'ordre $4t$ et soit A le coeur de H . Alors $N_1 = (J + A)/2$ et $N_2 = (J - A)/2$ sont les matrices d'incidences de plans en BIE de paramètres (i) et (ii) respectivement, où J désigne une matrice dont toutes les composantes sont égales à 1. Le procédé étant clairement réversible, on en déduit le résultat.

Exemple. Partons de la matrice de Hadamard normalisée

$$H = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

On obtient les matrices d'incidence

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que N_1 correspond à la transposée de la matrice d'incidence associée au plan projectif de Fano et donc au plan BIE de blocs 157, 126, 237, 134, 245, 356, 467.

On peut également déduire du théorème précédent le résultat suivant [3].

Corollaire. *L'existence d'une matrice de Hadamard d'ordre $4t$ implique l'existence de plans en BIE de paramètres :*

- (i) $v = 2t - 1, b = 4t - 2, r = 2t - 2, k = t - 1, \lambda = t - 2$
- (ii) $v = 2t, b = 4t - 2, r = 2t - 1, k = t, \lambda = t - 1$
- (iii) $v = 2t - 1, b = 4t - 2, r = 2t, k = T, \lambda = t$

Notons que la preuve de ce résultat est également constructive [3].

Matrices de Hadamard régulières et plans BIE.

Une matrice de Hadamard est dite *régulière* si les sommes des différentes lignes sont égales à une même constante.

Théorème (G. Szekeres 1969). S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre $4s$, alors il existe une matrice de Hadamard régulière d'ordre $16s^2$.



GEORGES SZEKERES (1911-2005) & ESTHER SZEKERES (1910-2005)

Ce résultat peut être utilisé en conjonction avec le résultat suivant pour établir l'existence de plans BIE.

Théorème. L'existence d'une matrice de Hadamard régulière d'ordre $4n^2$ équivaut à l'existence de plans BIE de paramètres

$$(i) \quad v = b = 4n^2, r = k = 2n^2 - n, \lambda = n^2 - n$$

$$(ii) \quad v = b = 4n^2, r = k = 2n^2 + n, \lambda = n^2 + n$$

Preuve. On voit que $(J - H)/2$ et $(J + H)/2$ sont les matrices d'incidence des plans souhaités et la construction est clairement réversible.

On peut alors déduire du théorème de Szekeres le résultat suivant.

Théorème. S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre $4s$, alors il existe des plans BIE de paramètres :

$$(i) \quad v = b = 16s^2, r = k = 8s^2 - 2s, \lambda = 4s^2 - 2s$$

(ii) $v = b = 16s^2, r = k = 8s^2 + 2s, \lambda = 4s^2 + 2s$

On voit donc que la conjecture de Hadamard est directement pertinente pour l'existence des plans BIE. C'est une autre illustration des applications parfois inattendues aux sciences expérimentales que peuvent avoir des notions mathématiques originellement développées dans un tout autre contexte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Analyse et planification des expériences – Les dispositifs en blocs*, J.-Cl. Bergonzini & C. Duby, Masson 1995.

- [2] *Design Theory, Vol. 1, 2nd ed.*, T. Beth, D. Jungnickel & H. Lenz, Cambridge 1999.

- [3] *Hadamard matrices and their applications*, A. Hedayat & W. D. Wallis, *The Annals of Statistics* 1978, Vol. 6, No. 6, 1184–1238.

- [4] *Principes d'expérimentation – Planification des expériences et analyses de leurs résultats*, P. Danelie, Presses Agronomiques de Gembloux, 2003.