



# La décomposition des biais de progrès technique est-elle réalisable avec une fonction production Cobb-Douglas ?

Georges Daw

► **To cite this version:**

Georges Daw. La décomposition des biais de progrès technique est-elle réalisable avec une fonction production Cobb-Douglas ?. Revue Libanaise de Gestion et d'Economie, Elsevier, 2014, LA REVUE GESTION ET ORGANISATION, 6 (1), pp.47-55. <10.1016/j.rgo.2014.05.001>. <halshs-01077366>

**HAL Id: halshs-01077366**

**<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01077366>**

Submitted on 24 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La décomposition des biais de progrès technique est-elle réalisable avec une fonction production Cobb-Douglas ?

Georges Daw<sup>\*</sup>

## Résumé

*L'exercice néoclassique de comptabilité de la croissance économique pour un pays donné aboutit à un diagnostic quantifié des caractéristiques (capital, travail, productivité globale des facteurs) de cette croissance en travaillant avec une fonction de production Cobb-Douglas. En présence de biais de progrès technique (c'est-à-dire de progrès ne bénéficiant pas identiquement à tous les facteurs productifs), cette fonction n'est pas en mesure de fournir séparément la valeur de chaque biais, ce qui peut désorienter la politique économique.*

*Dans cet article, nous fournissons les précisions théoriques et empiriques nécessaires en matière d'économie du progrès technique et précisément sur le sujet des biais de progrès technique. Nous démontrons alors exhaustivement et pédagogiquement pourquoi la fonction Cobb-Douglas ne permet pas une identification séparée de ces biais et est condamnée à les regrouper au sein du résidu de Solow.*

## Is the decomposition of the technical biased progress realizable with a Cobb-Douglas production function?

### Abstract

*The neo-classic exercise of growth economic accounting for a given country leads to a quantified diagnosis of the characteristics (capital, work, total productivity of the factors) of this growth while working with a function of Cobb-Douglas production. In the presence of biased technical progress (i.e. progress not profiting identically with all the productive factors), this function is not able to separately provide the value of each bias, which can disorientate the economic policy.*

*In this paper, we provide theoretical and empirical details necessary in economics of technical progress and precisely on the subject of the technical biased progress. We show then exhaustively and pedagogically why the Cobb-Douglas function does not allow a separate identification of these bias and is condemned to gather them within the Solow residual.*

*Mots Clefs : Fonction Cobb-Douglas, Facteurs de production, Progrès technique, Biais de progrès technique, Résidu de Solow, Parts factorielles, Elasticité de substitution.*

*Codes Jel : D24, E01, E23, O47.*

---

<sup>\*</sup> Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne-Ecole d'Economie de Paris-Centre d'Economie de la Sorbonne.

## 1. Introduction

L'exercice de comptabilité de croissance s'intéresse aux déterminants quantitatifs et qualitatifs de la croissance économique. Le progrès technique est un moteur de la croissance économique qui se manifeste à la fois quantitativement et qualitativement. L'aspect qualitatif est entendu comme la manifestation du progrès technique qui se retrouve dans ce qu'on appelle le "résidu de Solow". Le résidu de Solow encore appelé Productivité Globale des Facteurs (PGF) est cette partie résiduelle<sup>2</sup> de la croissance économique qui n'est pas expliquée par les variations des volumes des intrants productifs. Ce résidu mélange lui-même diverses améliorations qualitatives (les biais de progrès techniques) véhiculées par les différents facteurs physiques de production et qu'il peut être intéressant de démêler car la seule connaissance du résidu de Solow ne saurait être suffisante pour éclairer totalement la politique économique.

A titre d'exemple, Sato & Tamaki, 2009 montrent que de 1960 à 2004 le Japon a enregistré croissance économique supérieure à celle des Etats-Unis (4,65% contre 3,08%) mais en comptant avec une croissance plus faible de sa population active (0,28% contre 1,39%). Cela présuppose que l'économie japonaise a forcément bénéficié d'une croissance de son facteur capital et de son résidu de Solow plus élevé. Mais l'accumulation et la faible croissance démographique peuvent aboutir à une détérioration de la productivité du capital qui se traduit elle-même par une faible contribution ou une contribution négative au résidu de Solow tout en étant positive.

La composition du résidu de Solow étant riche d'informations sur l'origine des améliorations qualitatives des facteurs physiques, la seule connaissance de ce résidu ne suffit donc pas. Lorsqu'on cherche une description fine de la croissance économique, il est utile d'avoir des informations plus détaillées et donc le poids des divers biais dans ce résidu.

L'exercice de comptabilité de la croissance qui utilise une fonction de production de type Cobb-Douglas ne parvient pas à un tel luxe de détails (Diamond & Mc Fadden, 1965).

Nous développons ici minutieusement le cheminement qui permet de constater cette impossibilité.

Pour l'organisation de la présente réflexion, ce travail évoque la problématique théorique et empirique du traitement des biais de progrès technique et fournit des définitions novatrices essentielles pour le raisonnement sur ce sujet à la section 2. A la section 3 nous démontrons clairement pourquoi cette fonction de production ne permet pas de diagnostiquer séparément les biais de progrès technique. La section 4 conclut ce papier et évoque une piste de travail en vue notamment de proposer une fonction dépassant les limites de la Cobb-Douglas et de montrer les étapes qui mènent à ce diagnostic séparé.

---

<sup>2</sup> Mais cette fraction peut-être très considérable. Dans la majorité des pays industrialisés, le ralentissement de la croissance économique observé au sortir des trente glorieuses s'expliquerait pour 2/3 par la baisse de ce résidu.

## 2. Définitions et problématique des biais de progrès technique

### 2.1 Définitions et problématique théorique des biais de progrès technique

#### 2.1.1 Définitions

Le progrès technique qui revêt le sens précis d'une augmentation du produit par unité d'intrants intervient dans une fonction de production comme les autres facteurs de production.

Lorsque ce progrès technique intervient indépendamment de la croissance physique des autres facteurs, il convient de le qualifier d'autonome (progrès incorporé sinon).

Lorsque ce progrès technique autonome affecte identiquement l'ensemble des facteurs de production, on est dans le cas de la neutralité du progrès au sens de Hicks (progrès technique hicksien ou progrès technique iso-factor augmenting).

Lorsque ce progrès technique autonome affecte seulement un seul facteur, par exemple le travail, on est respectivement dans le cas de la neutralité du progrès au sens de Harrod (progrès technique harrodien ou progrès technique labour augmenting). Pour le capital on parle de neutralité du progrès au sens de Solow (progrès technique solovien ou capital augmenting).

Dans la réalité, le progrès technique autonome (qui peut donc mélanger le labour-augmenting et le capital-augmenting) et incorporé coexistent mais ne sont pas séparément chiffrables. Un diagnostic très fin des déterminants de la croissance requiert une séparation claire<sup>3</sup> non seulement entre progrès incorporé et autonome mais aussi entre chaque biais de progrès technique.

#### 2.1.2 Problématique théorique et empirique : Pourquoi est-il nécessaire de diagnostiquer les biais de progrès technique ?

##### **Proposition:**

*En présence de biais de progrès technique, les poids de chaque facteur physique dans la production diffèrent selon que ces biais soient séparément identifiés ou non.*

##### *Preuve :*

Ici on reprend une courte démonstration de Sato & Tamaki, 2009 légèrement retouchée :

On part d'une fonction de production à biais de progrès à la Sato-Beckman-Rose (1968) :

$$Y(t) = F(A(t)K(t), B(t)L(t)) = F(\bar{K}(t), \bar{L}(t))$$

---

<sup>3</sup> Cette séparation déborde le cadre de ce papier et n'est pas réalisable par le truchement de la seule Cobb-Douglas. La détermination du poids du progrès technique incorporé dans la croissance économique suppose de répondre à la question de savoir ce que serait cette croissance en l'absence d'un tel progrès. La connaissance de cette situation fictive exige une modélisation complète de l'économie identifiant clairement les secteurs à l'origine du progrès incorporé. Il devient alors aisé de découvrir le poids du progrès technique incorporé dans la croissance par différence simple entre le modèle avec ce progrès et le modèle privé de ce progrès. Ce n'est donc pas une problématique de fonction de production mais de modélisation de l'économie. Elle n'est pas traitée ici.

où  $A(t)$  et  $B(t)$  sont les biais solowien et harrodien respectivement;  $\bar{K}(t) = A(t)K(t)$  et  $\bar{L}(t) = B(t)L(t)$  sont le capital efficient et le travail efficient.

En différentiant, cette équation par rapport au temps, on a la croissance du produit comme :

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\partial F(t)}{\partial \bar{K}(t)} \frac{\bar{K}(t)}{Y(t)} \left( \frac{\dot{\bar{K}}(t)}{\bar{K}(t)} \right) + \frac{\partial F(t)}{\partial \bar{L}(t)} \frac{\bar{L}(t)}{Y(t)} \left( \frac{\dot{\bar{L}}(t)}{\bar{L}(t)} \right) = \frac{\partial F(t)}{\partial K(t)} \frac{K(t)}{Y(t)} \left( \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \right) + \frac{\partial F(t)}{\partial L(t)} \frac{L(t)}{Y(t)} \left( \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right)$$

où  $\frac{\partial F(t)}{\partial K(t)} \frac{K(t)}{Y(t)} = \alpha(\bar{k}(t))$  est la part du facteur capital dans le produit,

$\frac{\partial F(t)}{\partial L(t)} \frac{L(t)}{Y(t)} = \beta(\bar{k}(t))$  est la part du facteur travail dans le produit.

En outre :  $\alpha(\bar{k}(t)) + \beta(\bar{k}(t)) = 1$  et  $\bar{k}(t) = \frac{\bar{K}(t)}{\bar{L}(t)}$

Compte tenu de ces notations, l'équation précédente peut s'écrire de façon équivalente :

$$[A] \quad \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha(\bar{k}(t)) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \beta(\bar{k}(t)) \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} + \alpha(\bar{k}(t)) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \beta(\bar{k}(t)) \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

En cas de progrès technique iso-factor augmenting :  $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{PGF(t)}{PGF(t)}$  avec PGF la productivité globale des facteurs. Dans ce cas la fonction de production s'écrit:

$$Y(t) = PGF(t)F(K(t), L(t))$$

En différentiant, cette équation par rapport au temps, on a la croissance du produit comme :

$$[B] \quad \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{PGF(t)}{PGF(t)} + \alpha(k(t)) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \beta(k(t)) \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$$

Avec  $\alpha(k(t)) + \beta(k(t)) = 1$  et  $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$

Quel que soit le produit, son évolution donnée par [A] devrait être rigoureusement identique à celle donnée par [B]. L'observation de [A] et [B] montre qu'un seul cas réalise cette égalité: c'est lorsque le progrès technique est iso-factor augmenting. Dans le cas contraire c'est-à-dire si  $\frac{PGF(t)}{PGF(t)} \neq \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  où de  $\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}$ , on voit que  $\alpha(\bar{k}(t)) \neq \alpha(k(t))$  et  $\beta(\bar{k}(t)) \neq \beta(k(t))$  pour que [A] = [B].

**Résultat :**

*Dès lors qu'existent des biais de progrès technique, les parts factorielles du capital et du travail  $\alpha(\bar{k}(t))$  et  $\beta(\bar{k}(t))$  sont évidemment différentes des mêmes parts factorielles sans de biais  $\alpha(k(t))$  et  $\beta(k(t))$ . De même, et c'est le résultat à retenir, en présence de biais de progrès technique, calculer les véritables parts factorielles (c'est-à-dire celles*

*"contaminées" par les biais de progrès technique) à partir de l'équation [B] est fallacieux or c'est ce que se passe quand il est impossible de les séparer. Et il est impossible de les séparer lorsqu'on utilise une fonction de production de type Cobb-Douglas.*

A ce stade et à partir du résultat précédent de Sato,1970 et Sato & Tamaki, 2009, nous apportons un éclairage supplémentaire au sujet d'un certain mode opératoire des calculs de contribution des facteurs de production à la croissance économique.

Pour une certaine pratique rien ne semble poser ce problème de "contamination". En effet, on pourrait penser (à tort) qu'il suffit d'estimer à partir de données de la comptabilité nationale sur le partage du produit global entre capital et travail. Pour cela on calcule des élasticités de production par rapport à ces facteurs. L'élasticité de la production par rapport à un facteur est égale à la part de la rémunération de ce facteur dans la valeur du produit global. Un tel calcul est plus aisé dans le cas du facteur travail (part des coûts salariaux dans la valeur du produit global) mais difficile pour le facteur capital. Cette difficulté amène à postuler des rendements d'échelle constants, hypothèse compatible avec celle de la concurrence pure et parfaite et qui permet, après avoir trouvé l'élasticité de la production par rapport au facteur travail, d'en déduire celle du capital en prenant le complément à l'unité.

Dans ce schéma fidèle au théorème de l'épuisement du produit (ou Théorème de Euler-Wicksteed), les deux élasticités trouvées sont utilisées dans une Cobb-Douglas pour évaluer le produit puis sa croissance. La PGF apparaît comme un résidu ce qui semble cohérent mais c'est juste à ce niveau que se trouve ce qui ne va pas. En effet les deux élasticités trouvées sont déjà "contaminées" puisqu'elles auront été calculées avec le produit global qui lui-même intègre la PGF. En l'absence de biais de progrès technique cette façon de procéder ne poserait pas problème. Le calcul d'une élasticité suppose des facteurs rémunérés à la productivité marginale. La productivité marginale, telle qu'on l'enseigne dans le secondaire puis le supérieur est la variation de la production qui résulte de la variation d'une unité d'un facteur de production, les autres facteurs de production étant maintenus fixes. Maintenir les quantités des autres facteurs fixes n'implique pas que ceux qui sont restés fixes n'impactent pas la valeur de la productivité marginale qui rentre le calcul de l'élasticité. Cet impact provenant de la combinaison productive est cependant de nature qualitative (biais de progrès technique) et son isolement de la productivité marginale, donc de l'élasticité et enfin de la contribution du facteur concerné au produit global n'est pas effectué.

C'est bien pourquoi certaines mesures empiriques effectuées dans le cadre du calcul des contributions des facteurs de production selon le mode opératoire décrit plus haut à la croissance économique ne sont pas une solution au problème de l'identification des biais de progrès technique. Ils sont certes une approximation mais qui est d'autant plus éloignée de la réalité que ces biais sont importants.

## **2.2 La problématique empirique des biais de progrès technique**

L'exercice de comptabilité de la croissance (Solow,1957) raisonne à partir d'une fonction de production de type Cobb-Douglas avec progrès technique autonome hicksien. Le lecteur trouvera une claire description de cet exercice dans Cette, Kocoglu & Mairesse (2005, p. 23).

Cohérente avec le cadre néoclassique de concurrence pure et parfaite à long terme (rendements d'échelle unitaires et rendements marginaux décroissants), elle permet de minimiser les difficultés d'obtention de la part de la rémunération du facteur capital en la calculant comme le complément à l'unité de la part de la rémunération du facteur travail (comme pourraient du reste le permettre d'autres formulations à rendements d'échelle unitaires). Elle est en outre en mesure de reproduire empiriquement de façon satisfaisante les chiffres de la production et de ses déterminants hors biais progrès technique.

Mais cela n'exclut pas de lui adresser deux remarques et deux réponses :

-L'élasticité de substitution entre facteurs qui est unitaire n'est pas une hypothèse de travail immuable (plusieurs travaux<sup>4</sup> aboutissent à une élasticité comprise entre 0,5 et 0,8); Cela fait que cette fonction de production n'est pas tout le temps appropriée pour l'évaluation de la croissance et surtout, cela a été déjà dit, elle suppose aussi un progrès technique autonome hicksien.

Cette remise en cause empirique de la valeur unitaire de l'élasticité bien que très défendable importe pensons-nous davantage dans le questionnement empirique court terme/long terme. Une élasticité toujours exactement égale à l'unité est conforme aux observations empiriques<sup>5</sup> des parts factorielles en France et aux Etats-Unis sur l'ensemble du dernier siècle en dépit de périodes plus ou moins longues au cours desquelles le partage du revenu fut profitable au capital ou au travail, modifications qu'une élasticité variable peut rendre intelligibles.

-La fonction de production utilisée dans l'exercice de comptabilité de la croissance, ne laisse pas de place aux biais de progrès technique et élude donc les changements éventuels dans les évaluations respectives des contributions des facteurs de production à la croissance économique.

Mentionnons toutefois qu'une telle critique est le lot de l'ensemble des formes primales (fonctions de production) et c'est aussi pourquoi la spécification Cobb-Douglas n'est pas plus mauvaise que toutes les autres qui en comportent souvent les inconvénients sans les avantages.

La problématique consiste donc à s'intéresser, au-delà du cas de la Cobb-Douglas, au problème général d'identification des biais de progrès technique non hicksien.

Il faut d'abord savoir que la connaissance brute du résidu de Solow bien qu'instructive n'est pas suffisante pour une analyse des déterminants de la croissance économique qui se voudrait toujours plus raffinée. La PGF est elle-même la résultante de plusieurs mouvements de productivité qui ne sont pas nécessairement tous du même signe. Par exemple, on peut vouloir séparer ce qui dans la productivité du capital ou du travail relève du volume des facteurs et ce qui devrait être attribué aux améliorations qualitatives (les biais de progrès technique). Si cela était rendu possible, nous pourrions en déduire les contributions quantitatives et qualitatives à la croissance.

---

<sup>4</sup> Arrow, 1961; Kendrick & Sato, 1963 ; David & Van De Klundert, 1965; Eisner & Nadiri, 1968; Lucas, 1969; Sato, 1970 et plus récemment Antras, 2001.

<sup>5</sup> Voir Piketty, 2001 et (Pikety & Saez, 2001).



Les variations de productivités des facteurs mélangent ces deux sources. La PGF hicksienne cache une infinité théorique de combinaisons de biais harrodiens et solowiens qui seraient en mesure de la refléter. Au-delà des biais de progrès technique, Perroux, 1967 évoquait au sujet de la PGF : "Ce "reste" ou ce progrès technique non défini est d'un vague consternant".

Comme les chiffres qui suivent l'illustreront, l'évolution du biais solowien pourrait, par exemple être négative et le biais harrodien positif mais compensant le premier de telle sorte que la PGF apparaît positive. Or l'ampleur des différents biais a de fortes implications en matière d'organisation du travail, d'innovation et de politiques de R&D.

La seule PGF cacherait donc un certain nombre d'enseignements utiles aux politiques économiques. La connaissance de l'efficacité de chaque facteur permettrait plus précisément de savoir comment augmenter cette PGF.

A titre d'exemple l'analyse de la croissance japonaise de 1960 à 2004 montre que ce pays a réussi à croître annuellement davantage que les Etats-Unis (4,65% contre 3,08%) mais avec une croissance plus faible de sa population active (0,28% contre 1,39%). Au Japon il est apparu que l'accroissement du capital et de la PGF était à l'origine de cette avance. La PGF aura augmenté annuellement de 2,13% sur cette période contre 1,07 aux Etats-Unis. Au sein de la PGF japonaise, l'efficacité du travail est de 3,86% contre 1,74% aux Etats-Unis. L'efficacité du capital est de -1,61% au Japon contre -0,41% aux Etats-Unis. La contribution à la croissance de la population active au Japon est de 4,3% contre 31,09%, celle du capital de 46,14% contre 33,65 pour les Etats-Unis.

Il apparaît qu'au-delà d'une meilleure combinaison des facteurs de production au Japon illustrée par une plus grande PGF, ce pays qui a certes profité d'une accumulation capitaliste plus grande, a également réussi à compenser sa faible croissance démographique. Il a pu croître davantage grâce donc à une meilleure combinaison des facteurs de production au cœur de laquelle la productivité du travail a augmenté de façon à surcompenser celle du capital (3,86% contre -1,61%) et le différentiel de croissance de la population active favorable aux Etats-Unis ( $1,39 - 0,28 = 1,11 < 3,86 - 1,61 = 2,25$ ) et à une meilleure croissance du capital.

Il découle donc ce qui précède qu'il faut ensuite noter que les biais de progrès technique ont une existence empirique différente de celle de la PGF.

Sato, 1970 et 1996 estime pour les Etats-Unis que sur un demi-siècle aussi bien en moyenne qu'année par année le progrès technique hicksien diffère du biais harrodien qui lui-même diffère du biais solowien. Il trouve que sur la période [1909-1960], la PGF calculée habituellement aura crû annuellement en moyenne 1,6% alors que le biais harrodien serait à environ 2% et le biais solowien à environ 1%.

Sato & Tamaki, 2009 estiment pour les Etats-Unis et le Japon, que sur demi-siècle plus récent, de 1960 à 2004, les PGF ont respectivement crû annuellement de 1,07% et 2,13%. Les biais harrodiens sont estimés respectivement à 1,74% et 3,86% alors que les biais solowiens sont négatifs à -0,41% et -1,61%.



### 3. Mise en contexte de la démonstration d'impossibilité de décomposer les biais avec une fonction Cobb-Douglas et démonstration proprement dite

#### 3.1 Mise en contexte de la démonstration d'impossibilité de décomposer les biais de progrès technique avec une fonction de production Cobb-Douglas

**Proposition :** *L'équation du résidu de Solow avec biais de progrès technique contient deux inconnues.*

**Preuve :**

Nous fournissons ici quelques rappels utiles préalablement à la démonstration. Comme définie précédemment, on part d'une fonction de production avec biais de progrès technique (autonome) vers le facteur capital ( $A(t)$ ) et vers le facteur travail ( $B(t)$ ). Ces deux biais ne sont pas de même ampleur.

Pour les besoins de cette démonstration, on réintroduit l'indice temporel, juste au niveau de la fonction de production puis l'omettrons pour alléger les démonstrations.

$$[a] \quad Y = F[A(t)K_t, B(t)L_t]$$

En utilisant  $\beta(k(t)) = 1 - \alpha(k(t))$  dans l'équation [A], le résidu de Solow en présence de biais différenciés sur les facteurs capital et travail sous son écriture en grandeurs par tête s'écrit comme :

$$[b] \quad \frac{\dot{q}}{q} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \alpha \frac{\dot{A}}{A} + (1 - \alpha) \frac{\dot{B}}{B} \quad \text{où } q = \frac{Y}{L}$$

Nous avons également vérifié au passage que dans l'hypothèse où le progrès technique serait neutre au sens de Hicks, nous aurions:  $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{B}}{B} = \frac{\dot{PGF}}{PGF}$  d'où alors le résidu de Solow usuel :

$$[c] \quad \frac{\dot{PGF}}{PGF} = \frac{\dot{q}}{q} - \alpha \frac{\dot{k}}{k}$$

Lorsque  $\frac{\dot{A}}{A} \neq \frac{\dot{B}}{B}$  comme cela est le cas pour l'équation [b], le résidu de Solow calculé selon l'équation [c] délivre en réalité un résidu égal à la moyenne des biais pondérés par leurs parts factorielles respectives. En effet en réécrivant l'équation [c] comme :

$$[c]' \quad \frac{\dot{q}}{q} = \alpha \frac{\dot{k}_t}{k_t} + \frac{\dot{PGF}}{PGF}$$

En comparant avec [b], on voit bien que [c]' suppose que :  $\frac{\dot{PGF}}{PGF} = \alpha \frac{\dot{A}}{A} + (1 - \alpha) \frac{\dot{B}}{B}$

L'équation [b] contient 2 inconnues  $\left(\frac{\dot{A}}{A} \text{ et } \frac{\dot{B}}{B}\right)$ . Nous pouvons être tentés pour trouver ces inconnues d'adjoindre à [b], l'écriture de la PGF comme moyenne pondérée mais cette équation n'est pas indépendante de [b]. A elle seule, l'équation [b] donnant le résidu de Solow avec biais de progrès technique ne permet donc pas la séparation entre les deux biais.

**Résultat:** L'équation [b] donnant le résidu de Solow en présence de biais de progrès technique contient 2 inconnues  $\left(\frac{\dot{A}}{A} \text{ et } \frac{\dot{B}}{B}\right)$ . Il nous faudrait par conséquent une deuxième équation qui avec [b] permettrait de trouver.

### 3. 2 La démonstration de l'impossibilité de décomposer les biais de progrès technique

**Proposition de Sato [14] :** *Devant le problème précédent des 2 inconnues, Sato, 1970 suggère d'écrire une élasticité de substitution entre facteurs de production modifiés par les biais de progrès technique et de reconsidérer le problème de l'identification des biais avec cette nouveauté.*

Sato souhaite donc contourner le système "une équation ([b]) et deux inconnues  $\left(\frac{\dot{A}}{A} \text{ et } \frac{\dot{B}}{B}\right)$ " afin de voir si l'on peut trouver un autre système d'équation éventuellement déterminé.

Or à ce stade du papier, on a déjà apporté deux informations pouvant éclairer sa proposition

A la section 2.1.2: Nous savons qu'en présence de biais de progrès technique, les parts factorielles sont réellement modifiées, ce qui signifie que leur élasticité de substitution l'est également. Les parts factorielles contiennent les quantités de facteurs physiques que multiplient leurs rémunérations dans le produit.

A la section 2.1.1: Or nous avons précisé que l'existence de biais de progrès technique laissait constantes les quantités de facteurs. Par conséquent, la modification des parts factorielles provient au fond des rémunérations factorielles.

La démonstration que nous proposons va donc suivre les étapes suivantes : Il nous faut d'abord écrire formellement la proposition de Sato, 1970 ensuite l'implication de cette écriture sur les rémunérations factorielles (donc les parts factorielles) et enfin l'obtention du nouveau système d'équations.

**Etape 1** Ecriture d'une élasticité de substitution entre facteurs efficients

Commençons par les notations suivantes :

Capital efficace =  $AK = K'$  et  $r$  = coût marginal du capital

Travail efficace =  $BL = L'$  et  $w$  = coût marginal du travail

Elasticité de substitution entre facteurs efficaces =  $\sigma$

$$\sigma = \frac{\frac{d\left(\frac{K'}{L'}\right)}{\frac{K'}{L'}}}{\frac{d\left(\frac{\partial F/\partial L'}{\partial F/\partial K'}\right)}{\left(\frac{\partial F/\partial L'}{\partial F/\partial K'}\right)}}$$

En tenant compte des notations ci-dessus, des éléments de la formule de définition de l'élasticité de substitution peuvent être réécrits comme :

$$\frac{\partial F}{\partial K'} = \frac{\partial F}{\partial AK} = \frac{1}{A} \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{r}{A} \quad \text{et par analogie} \quad \frac{\partial F}{\partial L'} = \frac{w}{B}$$

L'élasticité de substitution peut donc de manière équivalente s'écrire :

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{AK}{BL}\right)}{\partial \ln\left(\frac{Aw}{Br}\right)} \quad \text{ou encore en notant } k = \frac{K}{L} \text{ et en différenciant par rapport au temps :}$$

$$\sigma = \frac{\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{k}}{k}}{\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{r}}{r}}$$

Cette écriture permet de vérifier au passage que lorsque le progrès technique est neutre au sens de Hicks, on retrouve la forme habituelle de l'élasticité de substitution entre les facteurs travail et capital. Mais en cas de progrès technique biaisé, on voit que l'élasticité de substitution dépend de ces biais. Cela implique que les rémunérations des facteurs n'évoluent pas de la même façon avec l'élasticité selon que celle-ci est écrite avec progrès technique hicksien ou biaisé.

## Étape 2 Evolution des rémunérations factorielles en présence de biais de progrès technique

Reprenons la fonction de production vue précédemment (sans l'indice temporel pour alléger) :

[a]  $Y = F[AK, BL]$

Pour les besoins de la démonstration posons d'abord que:  $c = \frac{B}{A}$  (on a biais de progrès technique dès lors que  $c \neq 1$ ) et  $\frac{Y}{AK} = F\left[1, \frac{BL}{AK}\right] = f\left(\frac{c}{k}\right) = f(cs)$  avec  $s = \frac{1}{k} = \frac{L}{K}$ .

Pour écrire les rémunérations factorielles en présence de progrès technique biaisé lorsque les facteurs sont rémunérés à la productivité marginale, on commence par les écrire sans biais.

Par exemple pour la rémunération du facteur travail on aura :

$w = F'_L = BF'_{BL} = Bf'(cs)$  puis on différencie par rapport au temps le dernier terme :

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} f'(cs) - \frac{B^2 s}{A^2} f''(cs) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{Bs}{A} f''(cs) \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{B^2}{A} f''(cs) \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\dot{w} = \dot{B}f'(cs) - \frac{B^2 s}{A^2} f''(cs) \dot{A} + \frac{Bs}{A} f''(cs) \dot{B} + \frac{B^2}{A} f''(cs) \dot{s} \quad \text{et donc :}$$

$$\dot{w} = \dot{B}f'(cs) + \frac{B^2}{A} f''(cs) \left[ \dot{s} + \frac{s}{B} \dot{B} - \frac{s}{A} \dot{A} \right] \quad \text{d'où enfin :}$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{csf''(cs)}{f'(cs)} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}}{s} \right] = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\frac{B}{A} sf''(cs)}{\frac{w}{B}} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}}{s} \right] = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\frac{B^2}{A} f''(cs) s}{w} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}}{s} \right] \quad \text{d'où :}$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{s \frac{\partial w}{\partial s}}{w} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}}{s} \right]$$

Cette écriture montre tous les éléments qui sont modifiés avec l'apparition de biais de progrès technique sauf l'élasticité de substitution. Il nous faut donc faire apparaître l'élasticité de substitution entre facteurs efficaces :

**Proposition intermédiaire :** *L'élasticité de substitution entre facteurs efficaces peut s'écrire de façon équivalente comme :*

$$\sigma = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L} \frac{\partial Y}{\partial K}}{Y \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L}} = \frac{w r}{Y \frac{\partial w}{\partial K}}$$

Pour le montrer, partons toujours de la fonction de production sans biais de progrès technique (ce changement simplifie la démonstration sans influencer sur son résultat).

$$Y = F(K, L)$$

Les produits marginaux sont dénotés :

$$F'_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \text{ et } F'_L = \frac{\partial Y}{\partial L}$$

Le taux marginal de substitution technique du facteur capital au facteur travail

$$(TMST_{K/L}) = r = -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{F'_L}{F'_K}$$

$r$  (ne pas confondre avec le coût du capital) dépend donc de la combinaison de facteur capital et travail considérée et est en cela fonction de ces deux facteurs.

Pour chaque changement de  $r$  le long d'une *isoquant*,  $d\left(\frac{K}{L}\right)$  représente le changement correspondant dans la combinaison factorielle. Il est donc usuellement possible d'écrire que l'élasticité de substitution entre le capital et le travail est :

$$\sigma = \frac{\left(\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}\right)}{\frac{dr}{r}} = \frac{\frac{L}{K}d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{1}{r}dr} \quad \text{or}$$

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\partial K - K\partial L}{L^2} \quad \text{et} \quad dr = \frac{\partial r}{\partial L}\partial L + \frac{\partial r}{\partial K}\partial K, \text{ or de la définition du } TMST_{K/L} \text{ on a :}$$

$$\partial K = -\frac{F'_L\partial L}{F'_K} = -r\partial L \text{ d'où } dr = -\left(r\frac{\partial r}{\partial K} - \frac{\partial r}{\partial L}\right)\partial L$$

Ce qui en remplaçant dans la formule précédente de l'élasticité donne :

$$\sigma = \frac{\frac{L}{K}\left(\frac{-rL\partial L - K\partial L}{L^2}\right)}{\frac{1}{r}\left(-\left(r\frac{\partial r}{\partial K} - \frac{\partial r}{\partial L}\right)\partial L\right)} = \frac{-\frac{1}{KL}((rL + K)\partial L)}{-\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial r}{\partial K} - \frac{\partial r}{\partial L}\right)\partial L} \quad \text{d'où : } \sigma = \frac{r}{KL} \frac{(rL + K)}{\left(r\frac{\partial r}{\partial K} - \frac{\partial r}{\partial L}\right)}$$

Il reste maintenant à calculer les dérivées du TMST par rapport au capital et au travail en utilisant la définition du  $TMST_{K/L} = r = \frac{F'_L}{F'_K}$  ce qui équivaut par conséquent au calcul de

$\frac{\partial r}{\partial K}$  et  $\frac{\partial r}{\partial L}$  comme :

$$\frac{\partial r}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{F'_L}{F'_K}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{F'_L}{F'_K}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{F'_L}{F'_K} \right) = \frac{F''_{KL} F'_K - F'_L F''_K}{F'^2_K} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{F'_L}{F'_K} \right) = \frac{F''_L F'_K - F'_L F''_{KL}}{F'^2_K}$$

Ce qui en substituant dans la dernière formule de l'élasticité aboutit à :

$$\sigma = \frac{r}{KL} \frac{(rL + K)}{\left( \frac{rF''_{KL} F'_K - rF'_L F''_K - F''_L F'_K + F'_L F''_{KL}}{F'^2_K} \right)}$$

Ce qui en substituant le  $TMST_{K/L} = r = \frac{F'_L}{F'_K}$  aboutit à :

$$\sigma = \frac{\frac{F'_L}{F'_K}}{KL} \frac{\left( \frac{F'_L}{F'_K} L + K \right)}{\left( \frac{\frac{F'_L}{F'_K} F''_{KL} F'_K - \frac{F'_L}{F'_K} F'_L F''_K - F''_L F'_K + F'_L F''_{KL}}{F'^2_K} \right)} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{\frac{F'_L}{F'_K} \left( \frac{F'_L L + F'_K K}{F'_K} \right)}{KL \left( \frac{F'_L F''_{KL} F'_K - F'^2_L F''_K - F''_L F'^2_K + F'_L F''_{KL} F'_K}{F'^3_K} \right)}$$

d'où après simplifications :

$$\sigma = \frac{F'_L F'_K (F'_L L + F'_K K)}{KLE} \quad \text{avec} \quad E = -(F''_L F'^2_K - 2F''_{KL} F'_L F'_K + F''_K F'^2_L)$$

$$\text{on a : } \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -\frac{L}{K} \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = F''_K = -\frac{L}{K} F''_{KL} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -\frac{K}{L} \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = F''_L = -\frac{K}{L} F''_{KL}$$

Ce qui remplacé dans  $E$  donne :

$$E = -\left( -\frac{K}{L} F''_{KL} F'^2_K - 2F''_{KL} F'_L F'_K - \frac{L}{K} F''_{KL} F'^2_L \right) = \frac{F''_{KL}}{KL} (K^2 F'^2_K + 2KLF'_L F'_K + L^2 F'^2_L) \quad \text{d'où :}$$

$$E = \frac{F''_{KL}}{KL} (KF'_K + LF'_L)^2 \quad \text{ce qui reporté dans la formule précédente de l'élasticité donne :}$$

$$\sigma = \frac{F'_L F'_K \left( \frac{LF'_L + KF'_K}{Y \text{ (Euler)}} \right)}{KL \left( \frac{F''_{KL}}{KL} \left( \frac{(KF'_K + LF'_L)^2}{Y^2 \text{ (Euler)}} \right) \right)}$$

d'où enfin que l'élasticité peut alternativement s'écrire :

$$\sigma = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L} \frac{\partial Y}{\partial K}}{Y \frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L}}$$

et par analogie, en présence de biais de progrès technique, nous écrivons :

$$\sigma = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L'} \frac{\partial Y}{\partial K'}}{Y \frac{\partial^2 Y}{\partial K' \partial L'}} = \frac{wr}{Y \frac{\partial w}{\partial K}}$$

Remarque : Les deux élasticités n'ont pas la même valeur.

Nous pouvons maintenant revenir à l'expression de l'évolution de la rémunération du travail :

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{s \frac{\partial w}{\partial s}}{w} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{S}}{S} \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial K} = -\frac{B^2}{AK} sf'''(cs) \Rightarrow Y \frac{\partial w}{\partial K} = -\frac{B^2 Y}{AK} sf'''(cs) \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{B^2}{A} f'''(cs) \quad \text{donc} :$$

$$Y \frac{\partial w}{\partial K} = -s \left( \frac{Y}{K} \right) \frac{\partial w}{\partial s} \quad \text{ce qui permet de réécrire l'élasticité de substitution précédente comme} :$$

$$\sigma = \frac{wr}{-s \left( \frac{Y}{K} \right) \frac{\partial w}{\partial s}} \Rightarrow \frac{s \frac{\partial w}{\partial s}}{w} = \left( -\frac{rK}{\frac{Y}{\alpha}} \frac{1}{\sigma} \right) = -\frac{\alpha}{\sigma}$$

En remplaçant ce résultat dans l'évolution du coût du travail, on obtient :

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\alpha}{\sigma} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{S}}{S} \right]$$

Il nous faut à présent faire la même chose pour la rémunération du capital. A partir de  $w = Bf'(cs)$  et du théorème d'Euler, on peut obtenir l'expression de la rémunération du facteur capital ( $r$ ) :



$w = F'_L = BF'_{BL} = Bf'(cs)$  et d'après le théorème d'Euler, on peut écrire :

$$Y = AKF'_{AK} + BLF'_{BL} \text{ d'où :}$$

$$F'_{AK} = \frac{Y}{AK} - \frac{BL}{AK} F'_{BL} \text{ or (comme pour } w) : r = F'_K = AF'_{AK}, \text{ donc :}$$

$$r = Af(cs) - sBf'(cs)$$

En différentiant par rapport au temps l'expression ci-dessus, de la même façon que pour obtenir  $\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)$ , nous pouvons écrire l'évolution de la rémunération du facteur capital comme :

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\beta}{\sigma} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{s}}{s} \right]$$

Sachant que  $k = \frac{1}{s}$ , réécrivons l'équation [b] qui contenait les deux inconnues :

$$\frac{\dot{q}}{q} = \alpha \frac{\dot{A}}{A} + (1 - \alpha) \frac{\dot{B}}{B} - \alpha \frac{\dot{s}}{s}$$

### Etape 3 Nouveau système d'équations et résultat

A partir de l'équation [b] et des équations d'évolution des rémunérations de facteurs de l'étape 2, il s'agit ici d'en déduire les formes réduites des équations d'évolution des biais de progrès technique.

Pour cela, isolons  $\frac{\dot{A}}{A}$  à partir de [b] :

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{\alpha} \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{s}}{s}$$

Introduisons dans l'équation d'évolution de la rémunération du travail, ce qui donne :

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\alpha}{\sigma} \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\alpha}{\sigma} \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{s}}{s} \right] - \frac{\alpha}{\sigma} \frac{\dot{s}}{s} = \frac{\dot{B}}{B} \left[ 1 - \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma} \right] + \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{q}}{q} \text{ d'où :}$$

$$\frac{\dot{w}}{w} - \frac{1}{\sigma} \frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{B}}{B} \left[ \frac{\sigma - \alpha - \beta}{\sigma} \right] \text{ et sachant que : } \beta = (1 - \alpha)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{\sigma \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{q}}{q}}{\sigma - 1} \quad \text{pour } \sigma \neq 1$$

Par un procédé similaire, c'est-à-dire en isolant  $\frac{\dot{B}}{B}$  à partir de [b] puis en l'introduisant dans l'équation d'évolution de la rémunération du capital, on obtient :

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\sigma \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{s}}{s}}{\sigma - 1} \quad \text{pour } \sigma \neq 1$$

**Résultat :** Le nouveau système issu de la proposition de Sato se compose de deux équations avec trois inconnues:  $\left(\frac{\dot{A}}{A}, \frac{\dot{B}}{B}\right)$  et  $\sigma$ . Il est donc impossible de déterminer séparément les deux inconnues du départ :  $\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$  et  $\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)$  sans connaître la valeur de  $\sigma$ , la nouvelle inconnue.

Cependant même lorsqu'on connaît cette valeur, on voit que les deux inconnues  $\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$  et  $\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)$  ne peuvent pas être calculées séparément avec une Cobb-Douglas ( $\sigma = 1$ ).

L'autre possibilité consiste donc évidemment à travailler avec une fonction de production autre que la Cobb-Douglas. C'est le cas à examiner dans une analyse ultérieure.

Ce point traduit l'impossibilité pour l'exercice de la comptabilité de la croissance qui utilise une Cobb-Douglas de parvenir à chiffrer séparément les biais de progrès technique et le condamne à les enregistrer au titre de la PGF.

## 4. Conclusion

Cette contribution montre de façon théorique et exhaustive l'impossibilité de la fonction Cobb-Douglas de parvenir à séparer les biais de progrès qui ont pourtant une existence empirique. Elle fournit également des rapprochements avec la pratique du calcul des contributions des facteurs de production à la croissance économique. Elle peut également constituer un outil de travail pour les lecteurs intéressés par l'économie du progrès technique.

L'article a commencé par proposer des définitions des biais de progrès technique et souligné l'importance empirique des biais de progrès technique. Le résultat de Sato, 1970 qui souligne qu'en présence de biais de progrès technique, calculer les véritables parts factorielles (c'est-à-dire celles "contaminées" par les biais de progrès technique) à partir de l'équation habituelle du résidu de Solow est fallacieux est rappelé. C'est ce que se passe quand il est impossible de séparer ces biais. Et il est impossible de les séparer lorsqu'on utilise une fonction de production de type Cobb-Douglas.

En prolongement de ce résultat, cet article a proposé un éclairage sur son lien avec la pratique du calcul des contributions des facteurs de production à la croissance.

Il ressort de nos explications que les mesures empiriques effectuées dans le cadre du calcul des contributions des facteurs de production à la croissance économique ne constituent pas une solution au problème de l'identification des biais de progrès technique. Ils sont certes une approximation mais qui fait d'autant plus violence à la réalité que ces biais sont importants.

Ensuite, en partant de l'équation du résidu de Solow qui comportait 2 inconnues (les 2 biais) et en suivant Sato, 1970 et nos définitions des biais de progrès technique qui impliquent que les biais affectent les rémunérations factorielles sans modifier les volumes de facteurs, nous avons conduit en trois étapes une démonstration détaillée inexistante dans la littérature sur le sujet. Cette démonstration aboutit à un système de deux équations (les deux biais et l'élasticité de substitution entre facteurs efficients).

Ce nouveau système traduit l'impossibilité pour l'exercice de la comptabilité de la croissance qui utilise une Cobb-Douglas de parvenir à chiffrer séparément les biais de progrès technique et le condamne à les enregistrer au titre de la PGF. Néanmoins, une des inconnues de ce système, l'élasticité de substitution pourrait être approchée empiriquement de façon assez satisfaisante. En ce cas, il y aurait rejet de la Cobb-Douglas avec ses avantages (notamment la stabilité empirique des parts factorielles dans le revenu).

Dans un travail à venir nous développerons deux points : i) en présence de biais de progrès technique, la fonction Cobb-Douglas n'est plus la seule fonction à assurer la stabilité des parts factorielles dans le revenu, ii) le cheminement suivant lequel une fonction de production autre que la Cobb-Douglas permettant de reproduire la véritable croissance (comme la Cobb-Douglas) dont les déterminants (PGF, biais harrodien et solowien, facteurs capital et travail) sont clairement distingués pour une analyse plus raffinée de la croissance économique.

## Références

- Antras, P. (2001). Is the US Aggregate Production Function Cobb-Douglas ? New Estimates of the Elasticity of Substitution. *MIT Mimeo*.
- Arrow, K. (1961). Capital Labor Substitution and Economic efficiency. *Review of Economics and Statistics*, p. 225-250.
- Cette, G., Kocoglu, Y., & Mairesse, J. (2005). Un siècle de productivité globale des facteurs en France. *Bulletin de la Banque de France*, 139.
- David, P.A., & Van De Klundert, T (1965). Biased Efficiency Growth and Capital Labor Substitution in the US Economy 1899-1960. *American Economic Review*, LV, p. 357-394.
- Diamond, P.A., & McFadden, D. (1965). Identification of the Elasticity of Substitution and the Bias of Technical Change: An Impossibility Theorem. *Berkeley University of California*.
- Eisner, R., & Nadiri, M.I. (1968). Investment Behavior and the Neoclassical Theory. *Review of Economics and Statistics*, p. 369-382.
- Kendrick, J.W., & Sato, R. (1963). Factor Prices, Productivity and Economic Growth. *American Economic Review*, LIII, p. 974-1003.
- Lucas, R.E. (1969). Labor-Capital in the US Manufacturing. In : *The Taxation of Income from Capital*, Edited by Haberger A, Bailey MJ, Washington,DC : The Brookings Institutions, p. 223-274.
- Perroux, F. (1967). Note sur les énoncés successifs de la fonction de production. *Tiers-Monde*, 8-31, p. 679-684.
- Piketty, T. (2001). Income Inequality in France, 1901-1998. *CEPREMAP mimeo*.
- Piketty, T., & Saez, E. (2001) Income Inequality in the United States, 1913-1998. *CEPREMAP and Harvard, mimeo*.
- Rose, H. (1968). The Condition for Factor-Augmenting Technical Change. *The Economic Journal*, 78-312, p. 966-971.
- Sato, R. (1996). Growth Theory and Technical Change. In : *The Selected Essays of Ryuzo Sato, Economists of the Twentieth Century Series*, 1 : Edward Elgar Publishing, Chapter 12.
- Sato, R. (1970). The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function. *International Economic Review*, 11-2, p. 179-208.
- Sato, R., & Beckmann, M.J. (1968). Neutral Inventions and Production Functions. *Review of Economic Studies XXXV (January)*, p. 57-65, Add XXXV (July), p. 366.
- Sato, R., & Tamaki, M. (2009). Quantity or Quality: The Impact of Labour-Saving Innovation on US and Japanese Growth Rates, 1960-2004. *Japanese Economic Review*, 60.
- Solow, R. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *Review of Economics and Statistics*, 39, p. 312-320.
- Solow, R. (1956). A Contribution to the Theory of Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70, p. 65-94.