



# Calcul de la perméabilité à l'échelle du VER d'un milieu fibreux non saturé par une approche éléments finis monolithique

Grégory Puaux, Luisa Silva, Patrice Laure, Michel Vincent

## ► To cite this version:

Grégory Puaux, Luisa Silva, Patrice Laure, Michel Vincent. Calcul de la perméabilité à l'échelle du VER d'un milieu fibreux non saturé par une approche éléments finis monolithique. Association Française de Mécanique. CFM'09 - XIXème Congrès Français de mécanique, Aug 2009, Marseille, France. CFM, 6 p., 2009. <hal-00509321>

**HAL Id: hal-00509321**

**<https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-00509321>**

Submitted on 26 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul de la perméabilité à l'échelle du VER d'un milieu fibreux par une approche éléments finis monolithique

G. PUAUX<sup>a</sup>, L. SILVA<sup>a</sup>, P. LAURE<sup>b</sup>, M. VINCENT<sup>a</sup>

a. Centre de Mise en Forme des Matériaux, École des Mines de Paris  
rue Claude Daunesse, F-06904 SOPHIA-ANTIPOLIS  
b. Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR 6621 CNRS - Université de Nice  
F-06108 Nice cedex 2

## Résumé :

La perméabilité d'un renfort tissé, utilisé dans les procédés LCM, est un paramètre significatif pour modéliser leur imprégnation. Une approche monolithique pour la résolution numérique d'écoulements multiphasiques (phase fluide, phase solide) est proposée et appliquée aux écoulements à l'échelle de la fibre, utilisant une méthode d'éléments finis stabilisés, grâce à laquelle nous calculons la perméabilité du VER.

## Abstract :

Permeability is a first order parameter in modeling impregnation of fiber reinforcements used in Liquid Composite Molding process. We use a stabilised finite element method with a multidomain approach for numerical computation of multiphase flow at fiber scale, and to compute permeability of the REV.

**Mots clés :** RTM, renfort tissé, perméabilité, Darcy, VER, Elements finis multidomains

## 1 Introduction

Le procédé RTM (Resin Transfer Molding) est un procédé d'injection d'une résine thermodurcissable dans un renfort fibreux (mat ou tissu de verre, carbone, etc.) placé à l'intérieur d'un moule. Un des problèmes lié au procédé est l'apparition, sur la pièce finale, d'une porosité due à une mauvaise imprégnation du renfort par la résine. La simulation numérique est beaucoup utilisée pour optimiser ce procédé de fabrication [1]. Cependant, si la formation de zones sèches est bien prédite par les outils numériques actuels, il n'en est pas de même pour la formation des micro-vides qui ont un effet important sur la qualité du matériau final. L'une des difficultés liées à ce procédé est la nature multi-échelle du milieu sur lequel on travaille (Fig. 1). En effet, le renfort est un tissage

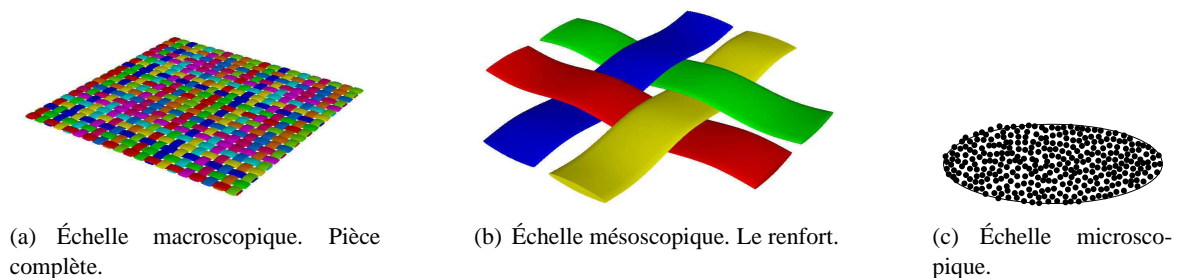


FIG. 1 – Les trois échelles dans le cas de renforts tissés.

de mèches, composées elles-mêmes de fibres. Les échelles de tailles peuvent être très différentes, puisque une pièce peut être de plusieurs mètres de long, une fibre peut avoir un diamètre d'une dizaine de micromètres, et une mèche peut contenir jusqu'à plusieurs milliers de fibres. Dans les outils numériques actuels, les simulations se font à l'échelle macroscopique, en considérant la cavité du moule contenant le renfort comme un milieu homogène poreux. On résoudra dans ce cas une loi de type Brinkman ou Darcy[2]. A l'échelle des fibres (échelle microscopique), on les considère comme imperméables. L'écoulement autour des fibres est dans ce cas régi par les équations de Stokes. A l'échelle mésoscopique, l'écoulement entre les mèches sera un écoulement de Stokes, tandis que dans les mèches, considérées comme perméables, l'écoulement suivra la loi de Darcy. Il est donc nécessaire de coupler ces deux équations pour calculer l'écoulement à cette échelle.

Un des paramètres importants pour ces simulations est la perméabilité du milieu renforcé. Nous simulerons donc l'écoulement à l'échelle microscopique, afin de déterminer la valeur de la perméabilité des mèches. Ensuite, cette perméabilité sera utilisée à l'échelle mésoscopique, pour l'écoulement à l'intérieur des mèches. De manière générale, les calculs à l'échelle microscopique considèrent un arrangement régulier des filaments, comme par exemple, un arrangement carré ou triangulaire. Et souvent, dans ce cas, le maillage est créé uniquement dans la partie fluide [3, 4, 5, 6, 7]. La méthode que nous avons utilisé pour simuler l'écoulement entre les fibres est une approche multidomaines : le domaine complet est maillé et l'iso-valeur zéro d'une fonction distance à l'interface fibre/fluide permet de la représenter. Ensuite, nous résolvons les équations de la mécanique des fluides dans *tout* le domaine, la partie solide étant comprise. Il est donc nécessaire de rajouter, dans les équations à résoudre, une contrainte imposant un mouvement de type corps rigide.

Dans un premier temps, nous rapellons les équations du problème et les notions de volume élémentaire représentatif (VER). Nous développerons ensuite l'approche monolithique et la résolution par éléments finis de ce problème sur un VER. Enfin, nous donnerons les résultats de calculs de perméabilité en fonction du type de maillage, et du choix du VER.

## 2 Équations du problème

### 2.1 Navier-Stokes/Stokes

Le polymère injecté est considéré comme un fluide Newtonien incompressible. Les vitesses d'écoulement étant faibles, on pourra négliger les termes d'inertie, et ainsi utiliser les équations de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma = \rho f \\ \nabla \cdot v = 0 \\ \sigma = 2\eta\epsilon(v) - p\mathbb{I} \\ \epsilon(v) = \frac{1}{2} [\nabla v + (\nabla v)^t] \end{cases} \quad (1)$$

où  $v$  est la vitesse,  $\rho$  la densité du fluide,  $p$  la pression,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $f$  les termes de force volumiques,  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\epsilon$  le tenseur des vitesses de déformation.

### 2.2 Darcy/Brinkman

Les lois de Darcy et de Brinkman permettent de modéliser l'écoulement dans un milieu poreux comme un écoulement dans un milieu homogène continu équivalent. Ces lois d'écoulement macroscopique sont obtenues à partir des lois microscopiques (Navier-Stokes) par une méthode de prise de moyenne volumique [8, 9, 10].

Dans la suite, nous supposons que le squelette solide est statique et non déformable, que le fluide est Newtonien, que sa masse volumique est constante, et que le milieu est saturé. L'équation de continuité macroscopique, en supposant que la vitesse à la surface des pores est nulle, s'écrit :

$$\nabla \cdot \langle v \rangle = 0 \quad (2)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est la moyenne volumique. L'équation de conservation de la quantité de mouvement macroscopique est obtenue en moyennant l'équation du mouvement (1) [10]. Si on néglige les termes d'inertie, on obtient l'équation de Brinkman :

$$-\Phi \nabla \langle p \rangle^f + \eta \Delta \langle v \rangle - \frac{\Phi \eta}{K} \langle v \rangle = 0 \quad (3)$$

où  $\Phi$  est la porosité,  $K$  la perméabilité et  $\langle \cdot \rangle^f$  est la moyenne sur le volume de fluide.

L'équation de Darcy est la plus utilisée pour les écoulements dans les milieux poreux. Elle est obtenue en faisant les mêmes hypothèses que pour l'équation de Brinkman, en supposant que l'effet de la viscosité sur l'écoulement est négligeable par rapport à la résistance imposée par le squelette lui-même. L'équation de Darcy s'écrit donc :

$$\langle v \rangle = -\frac{1}{\eta} K \cdot \nabla \langle p \rangle^f \quad (4)$$

Dans [11], les auteurs montrent que dans le cas non saturé, la perméabilité devient  $K(S)$ , où  $S$  est la saturation du milieu. Les effets de la capillarité, qui peuvent intervenir à l'échelle microscopique sont donc pris en compte aux échelles macroscopique et mésoscopique par une modification de la valeur de la perméabilité.

## 2.3 La notion de VER

Afin de calculer la perméabilité, nous effectuons un calcul à l'échelle microscopique. Bien évidemment, nous ne modélisons qu'une partie du domaine complet, que nous prendrons comme un volume élémentaire. C'est le choix de ce volume que nous étudions ici, afin qu'il soit représentatif du domaine complet. C'est également sur ce VER que sont moyennées les lois microscopiques pour obtenir les lois macroscopiques de type Darcy. Plusieurs paramètres déterminent le choix du VER. Dans le cas d'un arrangement régulier, il faut représenter au moins un motif de l'arrangement, c'est à dire que le VER doit être périodique. Différents VER sont donnés figure 2(a). Il faut également réfléchir à la taille du VER. En effet, le motif minimal peut-il représenter correctement le domaine global ? Il est évident que dans le cas d'une disposition aléatoire des fibres, il faut prendre un VER relativement grand pour homogénéiser le milieu. Nous vérifions plus loin que dans le cas d'un arrangement régulier (Fig. 2(b)), la taille du VER n'est pas importante pour la précision des résultats, si on modélise correctement les conditions limites. La figure 2(c) illustre le problème. On montrera que choisir un domaine plus grand que le VER donnera de meilleurs résultats.

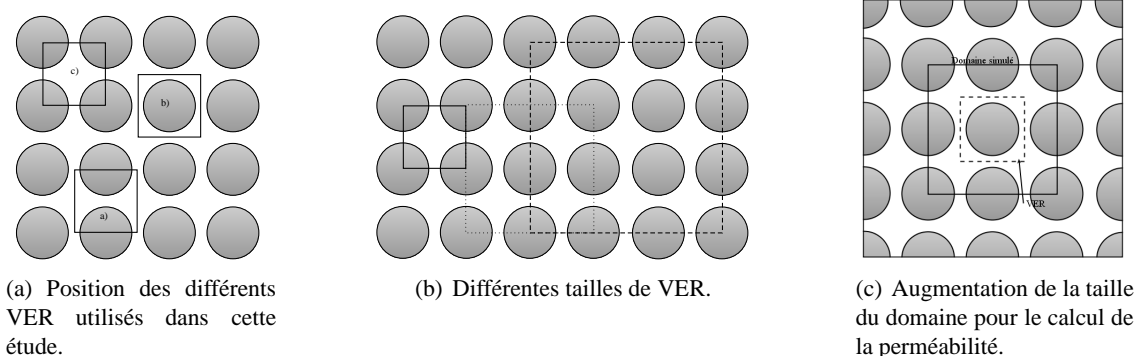
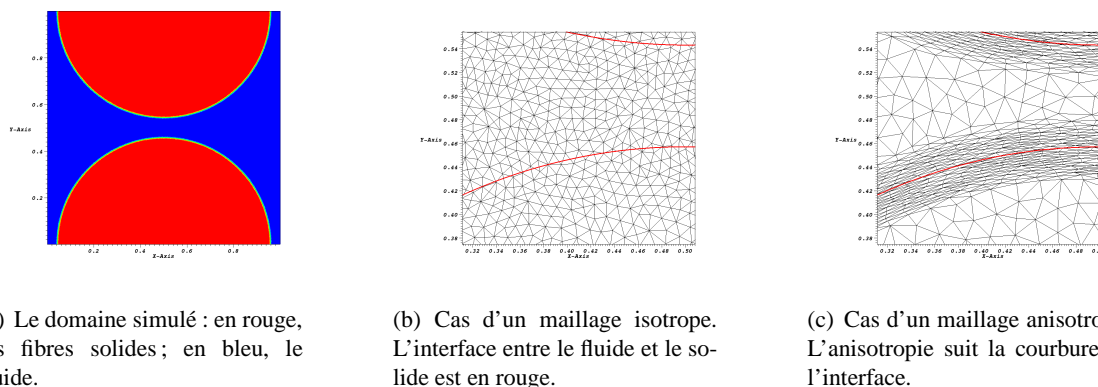


FIG. 2 – Les différents motifs, position et tailles de VER pour un arrangement régulier.

## 3 Approche monolithique pour la résolution par éléments finis

Nous trouvons dans le cas d'un problème multidomaines[12], en présence de plusieurs phases, fluides immiscibles et solides. Nous avons choisi une approche monolithique des calculs éléments finis pour résoudre ce type de problème. Le principe est de travailler sur un maillage qui englobe toutes les composantes de l'écoulement multi-matériaux (Fig. 3). Les interfaces entre les différents domaines ne sont connues qu'implicitement à travers une fonction distance  $\alpha$  à ces interfaces définies par l'iso-valeur nulle.



(a) Le domaine simulé : en rouge, les fibres solides ; en bleu, le fluide.

(b) Cas d'un maillage isotrope. L'interface entre le fluide et le solide est en rouge.

(c) Cas d'un maillage anisotrope. L'anisotropie suit la courbure de l'interface.

FIG. 3 – Représentation du domaine de calcul. Le maillage est global et n'appuie aucune des interfaces contenues dans le domaine.

### La formulation éléments finis

On cherche à résoudre le problème variationnel suivant sur le domaine  $\Omega$  :

trouver  $(u, p)$  tel que  $\forall (w, q) \in (\mathcal{H}_0^1(\Omega))^d \times \mathcal{L}^2(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot w d\Omega + \int_{\Omega} \rho (u \cdot \nabla) u \cdot w d\Omega + \int_{\Omega} p \nabla \cdot w d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta \epsilon(u) : \epsilon(w) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f \cdot w d\Omega \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u d\Omega = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où la fonction test  $w$  appartient à  $(\mathcal{H}_0^1(\Omega))^d$ , qui est un sous-espace de  $(\mathcal{H}^1(\Omega))^d$  pour lequel la fonction s'annule sur les bords où une condition de Dirichlet est imposée,  $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega), \nabla f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$ , la fonction test  $q$  appartient à l'espace des fonctions de carré sommable  $\mathcal{L}^2(\Omega) = \{f, \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty\}$ , et  $d$  est la dimension de l'espace. Les propriétés du matériau (densité et viscosité) sont définies sur tout le domaine de calcul par la loi de mélange (section 3). La prise en compte de la rigidité de la partie solide se fait par une méthode de pénalisation, par exemple en imposant  $\eta_{solide} = 10^3 \eta_{fluide}$  [13]. La résolution du problème se fait en utilisant une formulation éléments finis stabilisée utilisant le mini-élément P1+/P1.

### Lois de mélange

Les propriétés des fluides, comme la viscosité et la densité, sont données sur tout le domaine. Nous devons donc *mélanger* ces différentes grandeurs en introduisant une fonction de mélange linéaire :

$$\mathbb{I}_e(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha(x) > e \\ \frac{\alpha}{e} & \text{si } 0 < |\alpha(x)| < e \\ 0 & \text{si } \alpha < -e \end{cases} \quad (6)$$

où  $e$  est la demi-épaisseur de la zone de mélange, de part et d'autre de l'interface. Cette épaisseur va dépendre de la taille de maille au voisinage de l'interface.

### Calcul de la perméabilité

Pour le calcul de perméabilité, nous utiliserons la loi de Darcy(4). Nous aurons donc :

$$K = \eta \frac{\langle v \rangle}{\langle \nabla p \rangle^f} \quad (7)$$

Nous traduirons cela numériquement par :

$$K = \eta \frac{\int_{\Omega} v d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbb{I}_f \nabla p d\Omega} \quad (8)$$

où  $\mathbb{I}_f$  est la fonction caractéristique du fluide (valant 1 dans le fluide et 0 ailleurs) qui peut-être régularisée en prenant  $\mathbb{I}_f = \mathbb{I}_e$ , où  $\mathbb{I}_e$  est donné en (6). Ces calculs de perméabilité seront comparés avec les résultats donnés par la relation de Gebart[4] qui donne la perméabilité transverse pour un arrangement de fibres cylindriques unidirectionnelles :

$$K = C_1 \left( \sqrt{\frac{V_{f_{max}}}{V_f}} - 1 \right)^{5/2} R^2 \quad (9)$$

où  $R$  est le rayon des fibres,  $V_f$  la fraction de fibres,  $V_{f_{max}} = \frac{\pi}{4}$  la fraction de fibres maximum (c'est à dire lorsque les fibres se touchent) pour un arrangement carré et  $C_1 = \frac{16}{9\pi\sqrt{2}}$  pour un arrangement carré.

## 4 Résultats numériques

Nous commençons par donner les paramètres utilisés pour nos calculs. La pression est imposée par un gradient de pression de gauche à droite pour contraindre l'écoulement. On impose que la vitesse sortante des plans supérieur et inférieur est nulle. On libère la vitesse tangentielle correspondante. Pour les fibres, on impose une vitesse nulle hors de la zone de mélange (condition de Dirichlet).

### 4.1 Type de maillage

Nous avons illustré figure 3 deux types de maillages utilisés pour représenter l'interface. Nous étudions donc la sensibilité du calcul de perméabilité au maillage. Ce que nous montre cette étude (Fig. 4), c'est que pour une précision similaire, le calcul utilisant un maillage anisotrope demande un nombre d'éléments plus faible que dans le cas isotrope (le nombre d'éléments est divisé par un facteur 10). Dans les deux cas, l'écart entre la perméabilité calculée et la valeur analytique est de au mieux 7%.

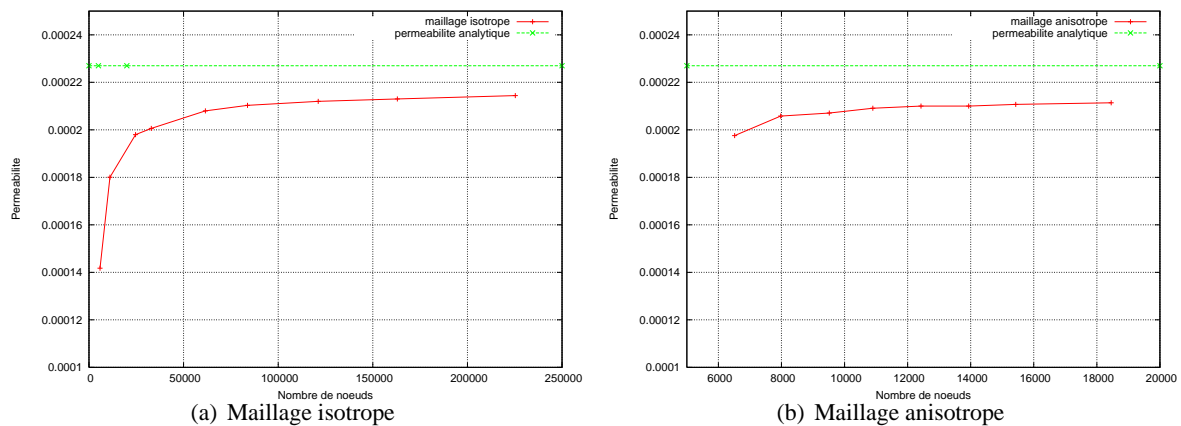


FIG. 4 – Sensibilité au maillage

## 4.2 Détermination de la taille du VER

Nous nous plaçons dans le cas d'un arrangement régulier de fibres, tel que donné figure 2(b). Pour ces géométries, nous faisons le calcul de perméabilité. Les écarts entre la valeur théorique et le calcul classique de perméabilité est d'environ 9% dans chacun des cas. Nous pouvons en déduire que la taille du VER a peu d'importance au niveau du calcul de perméabilité. Cela nous permet d'utiliser un VER plus petit, et demandant donc moins de puissance de calcul.

## 4.3 Détermination du motif

Dans le cas de l'arrangement régulier tel que donné figure 2(a), la perméabilité est la même dans les deux directions principales. Dans le cas de calculs monodomaines, le choix du motif n'influe pas sur le résultat du calcul de perméabilité. Cependant, dans le cas de calculs multidomaines monolithiques, le choix est important. En effet, si on calcule les deux perméabilités transverses, on trouve un écart de 17% entre elle dans le cas du motif a), tandis que l'écart est de 1.7% et 5.7% pour les motifs b) et c) respectivement. Cet écart peut s'expliquer par la nécessité de conserver une zone de mélange d'une certaine épaisseur pour les propriétés physiques des matériaux. Ainsi, ces zones de mélange peuvent avoir une influence non négligeable sur le calcul près des conditions limites. Cela peut également expliquer pourquoi l'écart est beaucoup plus faible dans le cas b), où les conditions limites ne sont pas appliqués sur une partie des zones de mélange, que dans le cas c).

## 4.4 Les effets de bord

Afin de vérifier les effets de bords sur le calcul de perméabilité, nous allons calculer l'écoulement dans un domaine plus grand que le VER (fig. 2(c)) (c'est à dire contenant 9 fibres ou 25 fibres, alors que le VER n'en contient qu'une). Les conditions aux limites appliquées seront les mêmes que pour les cas précédents. Les résultats seront comparés aux calculs de perméabilité sur un domaine de la taille du VER. Pour un maillage suffisamment fin, l'écart entre un domaine de la taille du VER et un domaine plus grand ne dépasse pas les 5%. Cela reste faible devant l'augmentation du coût de calcul (le nombre de nœuds est environ 4 fois plus grand). On peut donc en conclure que pour un arrangement régulier, il n'est pas forcément nécessaire d'agrandir les dimensions du domaine de calcul face aux dimensions du VER.

Pour analyser l'effet d'une petite perturbation (déplacement vertical) dans la position de la fibre centrale, nous procéderons à la même étude que la précédente, pour une perturbation de 0.01 et pour une perturbation de 0.1 (correspondant respectivement à 2% et à 20% du rayon de la fibre). Dans le cas de la perturbation de 0.01, l'écart entre le VER et le volume contenant 25 fibres (respectivement 9 fibres) est de 8% (resp. 10%), tandis que dans le cas de la perturbation de 0.1, les écarts passent respectivement à 15% et 14%. Lorsqu'on compare les résultats entre les volumes de 9 et 25 fibres, on remarque que les écarts sont de moins de 2%. Le choix de la taille du domaine de calcul est donc important lorsque l'arrangement n'est pas régulier. Il serait intéressant d'étudier le cas d'arrangements aléatoires de fibres, et de lier la taille du domaine de calcul avec un paramètre géométrique de l'arrangement. Cela demanderait cependant une population de fibres beaucoup plus importante.

## 5 Conclusion

La simulation des écoulements dans le procédé RTM nécessite de connaître la perméabilité du renfort utilisé. Sa prédiction grâce aux outils numériques permet une économie conséquente en temps et en matériau. L'utilisation

d'une méthode multidomaine permet d'utiliser des géométries plus complexes et permettra de coupler fluide et solide pour tenir compte des déformations des fibres, en faisant l'économie de méthodes de remaillage. Cela permettra de déterminer facilement la perméabilité en fonction de la déformation du renfort fibreux.

Nous avons montré, dans cette étude, que dans le cas d'une méthode multidomaine, pour un arrangement régulier de fibres, la taille du VER avait relativement peu d'importance. Ce n'est cependant pas le cas lorsque l'arrangement est perturbé. Nous avons également montré que du fait de la présence d'une zone de mélange des propriétés du fluide, dans le cas de méthodes multidomaines, le motif devait être choisi de manière adéquate. Dans le cas d'un milieu dont la géométrie est symétrique selon deux axes principaux, par exemple, il est plus judicieux de choisir un VER qui a les mêmes propriétés. Enfin, une bonne représentation de l'interface est nécessaire, ce qui est rendu possible par un outil de remaillage anisotrope efficace.

La perméabilité peut varier fortement en fonction de la saturation du milieu [11]. Pour prédire la formation de micro-vides dans la pièce finale, il est donc nécessaire de calculer la perméabilité dans le cas d'un domaine non saturé. La prise en compte du front d'écoulement dans ce cas nécessitera de tenir compte des effets de tension de surface, qui peuvent augmenter de manière conséquente la perméabilité d'un milieu poreux.

## Remerciements

Ce travail s'inscrit dans le projet LCM3M (Liquid Composite Molding Micro Meso Macro) avec le soutien financier de l'Agence Nationale de la Recherche que nous remercions.

## Références

- [1] Ngo N. and Tamma K. Computational developments for simulation based design : Multi-scale physics and flow/thermal/cure/stress modeling, analysis, and validation for advanced manufacturing of composites with complex microstructures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(1-2), 3–206, 2003.
- [2] Bear J. *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier, 1972.
- [3] Song Y. and Youn J. R. Asymptotic expansion homogenization of permeability tensor for plain woven fabrics. *Composites : Part A*, 37, 2080–2087, 2006.
- [4] Gebart B. R. Permeability of unidirectional reinforcements for rtm. *Journal of Composite Materials*, 26(8), 1100–1133, 1992.
- [5] Hoareau C. Injection sur renfort : Etude du remplissage de moule et détermination théorique de la perméabilité des tissus. PhD thesis, ENSMP, 1994.
- [6] Nordlund M. and Lundström T. S. Numerical study of the local permeability of noncrimp fabrics. *Journal of Composite Materials*, 39(10), 929–947, 2005.
- [7] Torres Carot R. Estimación de la permeabilidad 3D de los refuerzos tejidos en la fabricación de piezas en materiales compuestos mediante Moldeo por Transferencia de Resina. PhD thesis, Universidad Politecnica de Valencia, 2004.
- [8] Whitaker S. *The Method of Volume Averaging*, volume 13 of *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [9] Pillai K. M. Governing equations for unsaturated flow through woven fiber mats. part 1. isothermal flows. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 33(7), 1007–1019, July 2002.
- [10] Tucker III C. L. and Dessenberger R. B. *Flow and Rheology in Polymer Composites Manufacturing*, chapter Governing Equations for Flow and Heat Transfer in Stationary Fiber Beds (Chapter 8). Elsevier Science Publisher, 1992.
- [11] Bréard J., Henzel Y., Trochu F., and Gauvin R. Analysis of dynamics flows through porous media. part 1 : Comparison between saturated and unsaturated flows in fibrous reinforcements. *Polymer Composites*, 24(3), 391–408, June 2003.
- [12] Coupez T., Dignonnet H., Laure P., Silva L., and Valette R. Interaction fluide-structure : modélisation et simulation numérique (Traité MIM, série matériaux et métallurgie), chapter Chapitre 3. Calculs éléments finis multidomaines : applications aux problèmes multiphasiques. Lavoisier, 2009.
- [13] Laure P., Beaume G., Basset O., Silva L., and Coupez T. Numerical methods for solid particles in particulate flow simulations. *European J. Comp. Mechanics*, 16, 365–383, 2007.