MATHÉMATIQUES

La structure combinatoire du calcul intégral

Kurusch Ebrahimi-Fard[1], Frédéric Patras[2]

Une théorie très générale, algébrique et combinatoire, du calcul intégral, connue aujourd'hui sous le nom de théorie des algèbres de Rota-Baxter, a été développée par P. Cartier, G.C. Rota *et al.* dans les années 1960-1972. La formalisation et les principaux résultats obtenus alors ont surtout porté sur le cas commutatif. L'intérêt pour le cas général, non commutatif, qui inclut (entre de nombreuses autres applications) le calcul intégral et le calcul aux différences pour les algèbres d'opérateurs est ressuscité depuis le début des années 2000. Motivé au départ par la physique théorique, et plus précisément la théorie de la renormalisation (ou comment rendre, de façon cohérente, convergentes des intégrales divergentes), le champ d'application de la théorie non commutative s'est rapidement étendu.

Le lecteur trouvera de bons exposés des fondements de la théorie des algèbres de Rota-Baxter dans [27, 31, 43]. Nous ne chercherons pas à donner ici une présentation exhaustive du sujet ni des références, le domaine s'étant développé considérablement au cours des dix dernières années et ayant de nombreuses ramifications. L'article visera plutôt à offrir un aperçu de progrès récents effectués dans une direction particulière, peut-être la plus significative du point de vue du calcul intégral et différentiel : celle de l'extension au cas non commutatif des résultats fondamentaux de la théorie commutative, comme l'identité de Bohnenblust-Spitzer ou la construction de l'algèbre de Rota-Baxter « standard » (une présentation due à Rota de l'algèbre de Rota-Baxter libre en termes de fonctions symétriques). Après un survol des grands principes de l'algébrisation du calcul intégral, l'article rappelle les origines (physiques et probabilistes) de la théorie et présente divers exemples d'algèbres de Rota-Baxter, issus pour la plupart (mais pas seulement) de l'analyse. La théorie classique (commutative) de Cartier-Rota est ensuite exposée brièvement, en mettant en avant les liens avec la théorie des fonctions symétriques, les algèbres shuffle et quasi-shuffle et l'identité fondamentale (dite identité de Spitzer). La théorie est abordée dans la perspective de son extension au cadre non commutatif ; cette perspective n'est pas toujours la plus naturelle du point de vue commutatif, en particulier du point de vue des formules combinatoires, mais a l'avantage de bien mettre en évidence la logique du passage au non commutatif.

Nous entrons ensuite dans le vif du sujet, avec la théorie non commutative, insistant surtout sur trois idées. D'abord, l'existence d'analogues non commutatifs de la plupart des *constructions* commutatifs fondamentales, illustrée ici par les

1 ICMAT, Madrid, Espagne - UHA, Mulhouse, France.
2 Laboratoire J.-A. Dieudonné, université de Nice, France.

liens étroits entre la structure des algèbres de Rota-Baxter libres et la théorie des fonctions symétriques non commutatives [24]. Ensuite, l'existence d'analogues non commutatifs de la plupart des *résultats* commutatifs fondamentaux. Enfin, le fait que, de la même façon que le calcul tensoriel est « générique » pour la théorie des intégrales itérées de Chen et des algèbres de Lie (en un sens qui peut être rendu rigoureux comme dans [40] : un calcul dans l'algèbre tensorielle est valable universellement pour les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie graduées), le calcul dans les algèbres de Rota-Baxter est, de façon tout à fait analogue, « générique » pour de nombreuses théories : en particulier celle des intégrales itérées et des sommes finies d'opérateurs (où interviennent les analogues non commutatifs des produits shuffle et quasi-shuffle usuels) et celle des dérivations et des algèbres d'opérateurs différentiels (où interviennent les produits pré-Lie).

Concrètement, tout cela signifie qu'il est souvent avantageux de se placer dans ce contexte (c'est du moins notre expérience), pour résoudre les problèmes de la théorie formelle du calcul intégral, du calcul aux différences, des systèmes dynamiques, etc.

1. L'algébrisation du calcul intégral

> « Whereas algebraists have devoted a lot of attention to derivations, the algebraic theory of the indefinite integral has been strongly neglected. The shuffle identities are only the tip of an iceberg of algebra and combinatorics of the indefinite integral operator which remains unexplored ». (G.C. Rota [44])

L'un des tout premiers résultats rencontrés lors de l'enseignement ou l'apprentissage du calcul différentiel et intégral est la formule de dérivation de Leibniz et ses diverses variantes et, dualement, au niveau intégral, la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^t f(x)dx \int_0^t g(x)dx = \int_0^t \Big(\int_0^y f(x)\,dx\, g(y) + f(y) \int_0^y g(x)dx \Big) dy.$$

En posant $R(f)(t) := \int_0^t f(x)dx$, elle se réécrit :

$$R(f)R(g) = R(R(f)g + fR(g)). \tag{1}$$

On dit alors que, en vertu de cette identité, l'opérateur intégral est de Rota-Baxter de poids 0 et que l'algèbre de fonctions sous-jacente (associative mais pas nécessairement commutative) est de Rota-Baxter (toujours de poids 0).

Considérons maintenant les sommes de Riemann associées à un paramètre θ :

$$R_\theta(f)(x) := \sum_{n=0}^{[x/\theta]-1} \theta f(n\theta). \tag{2}$$

L'opérateur R_θ satisfait à la relation :

$$R_\theta(f)R_\theta(g) = R_\theta\big(R_\theta(f)g + fR_\theta(g) + \theta fg\big), \tag{3}$$

analogue de la formule d'intégration par partie (1), avec toutefois un terme correctif $\theta R_\theta(fg)$ qui correspond aux termes diagonaux $(f(n\theta)\cdot g(n\theta))$ du produit

$R_\theta(f)R_\theta(g)$ et disparaît, au moins lorsqu'on travaille avec des fonctions suffisamment régulières, dans la limite $\theta \to 0$. On dit que R_θ est de Rota-Baxter de poids θ.

Signalons au passage puisque nous n'en parlerons plus ensuite ici, que les théories d'intégration associées à des fonctions dont les trajectoires sont peu régulières ou bruitées (intégrales de Young, Itô, Stratonovich...) conduisent à l'étude de phénomènes algébriques et combinatoires (algèbres de shuffle...) très proches de ceux que nous allons considérer. L'étude des chemins rugueux en donne un bon exemple : nous renvoyons à l'exposé classique [34, Chap. 2,3] et, pour un point de vue plus récent à [26].

Le lecteur peut légitimement douter de l'intérêt de baptiser « relations de Rota-Baxter » des relations aussi élémentaires que la formule d'intégration par parties ou sa variante pour les sommes de Riemann. Cet intérêt est en fait double. La théorie des algèbres de Rota-Baxter regroupe d'abord dans un même cadre formel les différentes théories de l'intégration : on aurait pu citer encore dans ce panorama la théorie des q-intégrales de Jackson

$$J[f](t) := \int_0^t f(y)d_qy = (1-q)\sum_{n\geq 0} f(q^nt)q^nt$$

ou l'opérateur de sommation agissant sur les suites $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments d'une algèbre associative $\mathcal{A}$

$$R(f)(n) := \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

Plus important encore : elle permet d'abstraire du calcul intégral une composante algébrique qui, on le verra, est loin de lui être spécifique puisqu'il est bien d'autres exemples d'algèbres de Rota-Baxter que ceux que nous avons donnés dans cette première section, autorisant ainsi des transferts d'idées et de méthodes entre des théories a priori assez différentes.

Pour fixer les idées, illustrons sur deux exemples simples et classiques la manière dont opère le codage par les algèbres de Rota-Baxter. La théorie des algèbres de shuffles d'abord (on parle aussi d'algèbres de battages, mais l'anglicisme « shuffle » a ses lettres de noblesse puisqu'on le trouve déjà chez Schützenberger dans les années 50). Prenons pour A l'algèbre commutative des fonctions continues sur les réels, pour R l'opérateur intégral $\int\limits_0^t$ et notons

$$R^{(n)}(f_1,...,f_n)(t) := R(f_1R(f_2...R(f_n)...))(t)$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}...\int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1)...f(t_n)dt_1...dt_n.$$

L'application de la relation de Rota-Baxter de poids 0 donne

$$R^{(n)}(f_1,...,f_n)R^{(m)}(g_1,...,g_m) = R(f_1[R^{(n-1)}(f_2,...,f_n)R^{(m)}(g_1,...,g_m)]$$

$$+g_1[R^{(n)}(f_1,...,f_n)R^{(m-1)}(g_2,...,g_m)])$$

et une récurrence simple montre finalement que

$$R(f_1R(f_2\cdots R(f_n)\cdots))R(g_1R(g_2\cdots R(g_m)\cdots)) \\ = \sum R(h_1R(h_2\cdots R(h_{n+m})\cdots)), \tag{4}$$

où la somme porte sur tous les shuffles de $f_1,\ldots,f_n$ et $g_1,\ldots,g_m$, c'est-à-dire les suites $h_1,\ldots,h_{m+n}$ formées des f_i et des g_j où l'ordre partiel des f_i et des g_j est respecté (par exemple, $x_1y_1x_2y_2y_3x_3x_4$ ou $x_1x_2y_1y_2x_3x_4y_3$ sont des shuffles de mots $x_1x_2x_3x_4$ et $y_1y_2y_3$, mais pas $x_1x_4x_2y_1y_2x_3y_3$, car x_4 y apparaît à gauche de x_2 et x_3). Ce calcul des shuffles, prototype pour de nombreux calculs plus complexes dans les algèbres de Rota-Baxter, a été axiomatisé dans les années 50 par Eilenberg-MacLane et Schützenberger, nous y reviendrons dans la section suivante.

Donnons maintenant un deuxième exemple, un peu plus récent : les fonctions zêtas et multizêtas (MZVs) et le phénomène baptisé « dimorphie » par J. Ecalle [21] – un phénomène bien décrit dans [29] et au cœur de travaux récents sur les MZVs (voir par exemple [14, 49]). Il s'agit-là d'un exemple naturel où les structures d'algèbres de Rota-Baxter de poids 0 (intégrale de Riemann, produits shuffle) et de poids 1 (opérateur de sommation, produits dits quasi-shuffle [25, 8] sur lesquels nous reviendrons ultérieurement) coexistent. Rappelons que les MZVs sont définis pour $k > 0$ entiers positifs non nuls $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$, $n_1 > 1$, en termes de séries itérées ou, de façon équivalente, par la représentation intégrale de Drinfel'd :

$$\zeta(n_1,\ldots,n_k) := \sum_{m_1>\cdots>m_k>0} \frac{1}{m_1^{n_1}\cdots m_k^{n_k}} \tag{5}$$

$$= \int\cdots\int_{0\leqslant t_w\leqslant\cdots\leqslant t_1\leqslant 1} \frac{dt_1}{\tau_1(t_1)}\cdots\frac{dt_w}{\tau_w(t_w)}, \tag{6}$$

où $\tau_i(u) = 1-u$ si $i \in \{h_1,h_2,\ldots,h_k\}$, $h_j = n_1+n_2+\cdots+n_j$, et $\tau_i(u) = u$ sinon. On dit que k est la longueur et $w := n_1 + \ldots + n_k$ le poids de $\zeta(n_1,\ldots,n_k)$.

Les deux formules pour les produits (1) et (3) ayant des formes sensiblement différentes, ces deux représentations des MZVs vont induire deux formules distinctes pour le produit des multizêtas. Celle associée à la représentation intégrale se déduit de (4) et se comporte additivement en les longueurs, ce qui n'est pas le cas pour la représentation sommatoire. Par exemple,

$$\zeta(p)\zeta(q) = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q),$$

où on reconnaît dans le terme $\zeta(p+q)$ le terme « correctif » typique des algèbres de Rota-Baxter de poids non zéro. D'où des relations non triviales, dites de double mélange, comme

$$\zeta(2)^2 = 4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4),$$

qui s'avèrent jouer un rôle clé dans la théorie.

2. Algèbres de Rota-Baxter

2.1. Origines

Le paragraphe précédent peut laisser penser que le calcul intégral est à l'origine des algèbres de Rota-Baxter. Ce n'est pourtant pas le cas : l'identité de Rota-Baxter et, avec elle, la notion d'algèbre de Rota-Baxter sont d'abord apparues en 1960 dans les travaux de Baxter[3][6] ayant eux-mêmes pour origine un résultat probabiliste obtenu par Spitzer en 1956 [47]. Diverses preuves simples de l'identité de Spitzer avaient été obtenues avant lui, mais Baxter sut faire émerger les structures algébriques et combinatoires sous-jacentes, et son nom leur est resté associé.

Une dizaine d'années plus tard, Rota [41, 42, 43] assit la théorie sur des fondements systématiques en l'adossant à la théorie classique des fonctions symétriques. Rota fut l'un des meilleurs avocats de la combinatoire algébrique, à la fois par ses travaux mathématiques et ses engagements épistémologiques, et cet engagement se retrouve dans le programme affiché en introduction à [41], où l'on reconnaît aussi en filigrane l'esprit structuraliste de l'époque :

> « The spectacular results in the fluctuation theory of sums of independent random variables [...] have gradually led to the realization that the nature of the problem, as well as that of the methods of solution, is algebraic and combinatorial [...]. It is the present purpose to carry this algebraization to the limit : the result we present amounts to a solution of the word problem for Baxter algebras ».

L'autre grand pan de la fondation mathématique de la théorie est dû à Cartier [7] qui, comme Rota, part du « problème des mots » (la construction d'une base de l'algèbre de Rota-Baxter libre), mais suit une approche différente qui le conduit à introduire la notion de produit quasi-shuffle, formalisée récemment par Hoffman dans [25].

Revenons sur la notion d'algèbre de Rota-Baxter : il s'agit donc en général d'une algèbre associative A (disons unitaire et sur un corps k de caractéristique zéro dans ce qui suit), munie d'un opérateur linéaire R vérifiant la relation de Rota-Baxter de poids θ :

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \theta xy). \tag{7}$$

Le terme sur lequel opère R dans le terme droit de l'identité définit un nouveau produit sur A, appelé produit double (de poids θ) et noté $*_\theta$:

$$x *_\theta y := R(x)y + xR(y) + \theta xy, \tag{8}$$

tel que $R(x *_\theta y) = R(x)R(y)$; on vérifie facilement qu'il est aussi associatif et que l'opérateur R vérifie encore la relation de Rota-Baxter en remplaçant le produit habituel de A par le produit double. On verra ultérieurement son utilité.

[3] Il s'agit de Glen Baxter et non de Rodney Baxter – ce dernier étant connu entre autres pour les équations de Yang-Baxter.

Considérons d'abord le cas commutatif de poids 0 et revenons de façon plus abstraite sur les algèbres de shuffles. Le produit double $*_0 = *$ (de poids zéro) se scinde alors en deux composantes (les « demi-shuffles » d'Eilenberg-MacLane et Schützenberger) :

$$f * g = f \uparrow g + f \downarrow g$$

où $f \uparrow g := fR(g)$ et $f \downarrow g := R(f)g$.

Ces produits $\uparrow$ et $\downarrow$ vérifient les relations

$$a \downarrow b = b \uparrow a, \qquad (a \uparrow b) \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c + c \uparrow b), \tag{9}$$

qui donnent une caractérisation axiomatique des algèbres de shuffles, caractérisation obtenue indépendamment dans les années 50 par Eilenberg et MacLane en topologie algébrique et par Schützenberger en théorie de Lie [22, 45]. On pourra s'amuser à vérifier que ces relations suffisent à assurer que le produit défini comme la somme $\uparrow + \downarrow$ est associatif et commutatif [45]. Si la terminologie « algèbres de shuffles », utilisée en théorie de Lie, contrôle, théorie des MZVs..., semble a priori la plus naturelle pour nommer les algèbres satisfaisant aux relations (9), on trouve également dans la littérature celle d'algèbres chronologiques (Kawski [30] – d'autres auteurs, en théorie du contrôle, donnent une signification différente à la notion d'algèbre chronologique) ou encore, en théorie des opérades, celle d'algèbres Zinbiel [33].

En d'autres termes, il existe un foncteur d'oubli des algèbres de Rota-Baxter commutatives de poids 0 vers les algèbres de shuffles, et il se trouve que l'existence d'un tel foncteur explique pour beaucoup l'intérêt mathématique des shuffles ! Ce jeu entre différents niveaux de structures algébriques, que nous avons développé assez longuement dans le cas simple mais représentatif commutatif de poids $\theta = 0$, se déclinerait de beaucoup de manières encore en passant à des poids non nuls ou au cas non commutatif. Nous ne le ferons que très partiellement, en nous limitant à des indications (pour des raisons de place plutôt que de complexité), mais tenions à mettre tout de suite en exergue cette idée : les calculs avec les algèbres de Rota-Baxter sont génériques pour toute une classe de théories (intégrales itérées de fonctions et d'opérateurs – produits shuffles commutatifs et non commutatifs –, opérateurs de sommation – produits quasi-shuffles –, algèbres d'opérateurs différentiels – produits pré-Lie – etc.).

2.2. Les formules de Spitzer

Considérons maintenant le cas de poids non nul. On notera que si R est de poids θ, l'opérateur $\hat{R} := \beta R$, pour $\beta \in k$, est un opérateur de Rota-Baxter de poids $\theta\beta$, ce qui permet de toujours se ramener lorsque $\theta \neq 0$ au poids $\theta = 1$ (ou -1). Les exemples naturels sont nombreux.

– La théorie des fluctuations, qui considère les extremums de suites de variables aléatoires réelles, est amenée à étudier l'opérateur qui agit sur la fonction caractéristique $F(t) := \mathbf{E}[\exp(itX)]$ d'une variable aléatoire X par :

$$R(F)(t) := \mathbf{E}[\exp(itX^+)]$$

où on note $X^+ := \max(0, X)$. L'opérateur R sur l'algèbre de Banach associée (voir e.g. [42, Exemple 7]) est de Rota-Baxter de poids $\theta = -1$, c'est l'exemple « historique » qui a motivé les travaux de Spitzer et Baxter [6, 41, 47].

– Si A est une algèbre associative, mais pas forcément commutative, qui se décompose comme somme directe de deux sous-algèbres (non unitaires), $A = A^+ \oplus A^-$, les deux opérateurs de projection sur A^+ et A^- (parallèlement à l'autre sous-espace) sont de Rota-Baxter de poids $\theta = -1$. L'exemple le plus intéressant à ce jour est probablement la décomposition des séries de Laurent $\mathbf{C}[\varepsilon^{-1}, \varepsilon]]$ en « partie divergente » $\varepsilon^{-1}\mathbf{C}[\varepsilon^{-1}]$ et « partie régulière » $\mathbf{C}[[\varepsilon]]$. Il est sous-jacent à la compréhension moderne de la renormalisation perturbative en théorie quantique des champs [37].

– Du point de vue de l'analyse et des systèmes dynamiques discrets, l'exemple fondamental est celui, déjà rencontré, de l'opérateur de sommation sur les suites d'éléments d'une algèbre associative, $R(f)(n) := \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. Il est inverse à droite de l'opérateur aux différences $\Delta(f)(n) := f(n+1) - f(n)$ et est de Rota-Baxter de poids $\theta = 1$.

Concrètement, l'utilité du formalisme de Rota-Baxter s'exprime bien dans la possibilité donnée de trouver des formules combinatoires universelles pour des problèmes d'analyse, de probabilités, de systèmes dynamiques, etc. L'illustration canonique, que nous choisirons pour exemple, est donnée par les formules de Spitzer.

Revenons encore un moment au cas commutatif. La formule de Spitzer classique calcule la fonction caractéristique des extremums d'un processus discret $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, défini comme suite des sommes partielles d'une suite de variables aléatoires réelles X_n, indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes, on considère la nouvelle suite de variables aléatoires $Y_n := \max(0, S_1, S_2, \ldots, S_n)$. La formule de Spitzer permet d'en ramener le calcul des fonctions caractéristiques à celui des S_n^+, la partie positive des sommes partielles. Dans le langage des algèbres de Rota-Baxter, si l'on note F la fonction caractéristique des X_n :

$$\mathbf{E}[\exp(itY_n)] = R(F \cdot R(F \ldots R(F \cdot R(F)) \ldots)) = R^{(n)}(F),$$

$$\mathbf{E}[\exp(itS_n^+)] = R(F^n),$$

et on a l'identité (valable dans toute algèbre de Rota-Baxter commutative, on la donne pour un poids θ arbitraire) :

$$\log\big(1 + \sum_{n>0} R^{(n)}(F)\big) = R\Big(-\sum_{n>0} \frac{(-1)^n \theta^{n-1} F^n}{n}\Big).$$

En notant $\Omega'_\theta(F)$ l'argument de R dans le terme droit, on voit tout de suite qu'il vaut $\theta^{-1}\log(1+\theta F)$, mais on vérifie aussi facilement qu'il vérifie l'équation :

$$\Omega'_\theta(F) = \frac{g_{\theta\Omega'_\theta(F)}}{e^{g_{\theta\Omega'_\theta(F)}} - 1}(F) = F + \sum_{n>0} \frac{B_n}{n!} g^n_{\theta\Omega'_\theta(F)}(F) \tag{10}$$

où g est l'opérateur de multiplication (à gauche) $g_x(y) := xy$ et où les B_n sont les nombres de Bernoulli (qui apparaissent dans le développement en série de $\frac{x}{e^x - 1}$). On verra plus tard comment cette écriture, en apparence inutilement compliquée, exprime en fait un lien étroit entre la théorie des algèbres de Rota-Baxter non commutatives et le travail de Magnus sur les solutions d'équations différentielles linéaires [36] de 1954, contemporain de celui de Spitzer [47].

La formule de Bohnenblust-Spitzer, qui commence à indiquer la teneur combinatoire de la théorie, est une relation multilinéaire similaire à celle de Spitzer :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} R\big(\cdots R(R(F_{\sigma(1)})F_{\sigma(2)})\cdots\big)F_{\sigma(n)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} \theta^{n-|\pi|} \prod_{\pi_i\in\pi}^{*\theta} \big((b_i-1)! \prod_{j\in\pi_i} F_j\big), \tag{11}$$

où $\mathcal{S}_n$ est le groupe symétrique d'ordre n, $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de $[n]$, $|\pi|$ le nombre de blocs de la partition $\pi\in\mathcal{P}_n$, b_i la taille du i-ème bloc π_i et où l'exposant $*_\theta$ est le produit double (8). Le cas $\theta=0$ est simplement :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} R\big(\cdots R(R(F_{\sigma(1)})F_{\sigma(2)})\cdots\big)F_{\sigma(n)} = \prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_i.$$

En vue de la généralisation ultérieure de cette identité (11) au cas non commutatif, indiquons-en une autre écriture, moins symétrique. Appelons écriture canonique l'écriture de la décomposition en cycle $c_1\cdots c_k$ d'une permutation dans laquelle les cycles sont écrits dans l'ordre croissant de leurs maxima, chaque cycle étant lui-même écrit en commençant par sa valeur maximale : par exemple (32)(541)(6)(87) est une écriture canonique. On note $c_j=(a_{j_0}a_{j_1}\ldots a_{j_{m_j-1}})$ le j-ième cycle dans l'écriture canonique, où m_j est la taille du cycle et $a_{j_0}>a_l$, $j_1\le l\le j_{m_j-1}$. L'identité (11) se réécrit alors :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} R\big(\cdots R(R(F_{\sigma(1)})F_{\sigma(2)})\ldots\big)F_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathcal{D}^\theta_\sigma(F_1,\ldots,F_n), \tag{12}$$

où, pour la permutation σ écrite sous forme canonique $c_1\cdots c_k$, on pose

$$\mathcal{D}^\theta_\sigma(F_1,\ldots,F_n) := \prod_{j=1}^{k}{}^{*\theta} \Big(\big(\prod_{i=1}^{m_j-1} d_{\theta F_{a_{j_i}}}\big)(F_{a_{j_0}})\Big), \tag{13}$$

où d est l'opérateur de multiplication (à droite) $d_x(y):=yx$. Le deuxième produit dans le terme droit dénote la composition des opérateurs de multiplication. Par exemple, pour la permutation $\sigma\in\mathcal{S}_5$ d'écriture canonique (43)(512), on obtient :

$$\mathcal{D}^\theta_\sigma(F_1,\ldots,F_5) = d_{\theta F_3}(F_4) *_\theta (d_{\theta F_2} d_{\theta F_1})(F_5) = \theta^3(F_4F_3) *_\theta (F_5F_1F_2).$$

Le produit étant commutatif, le terme $(\prod_{i=1}^{m_j-1} d_{\theta F_{a_{j_i}}})(F_{a_{j_0}})$ ne dépend pas de l'ordre des a_{j_i}, $i\geqslant 1$, et chaque composante $\mathcal{D}^\theta_\sigma(F_1,\ldots,F_n)$ apparaît affectée de la multiplicité $\prod_{j=1}^{k}(m_j-1)!$ dans le terme droit de (12), d'où découle l'équivalence avec la forme plus compacte (11), écrite en terme de partitions.

2.3. L'approche combinatoire : Cartier et Rota

L'idée qui sous-tend les travaux de Cartier et Rota est de déduire ce type de formules d'un calcul dans l'algèbre de Rota-Baxter libre sur un alphabet X : une formule obtenue dans l'algèbre libre est en effet automatiquement satisfaite dans toute algèbre du type (i.e. de la catégorie) considéré. Leurs deux approches sont, on va le voir, complémentaires.

La construction de Cartier [7] préfigure la notion moderne de quasi-shuffles (voir [28]), très présente actuellement, on l'a vu, dans le développement de la théorie des multizêtas (MZVs) et autres généralisations des fonctions spéciales (voir [8]). Supposons que l'on parte d'un alphabet X ayant une structure de monoïde commutatif dont la loi est notée additivement. Alors que le produit shuffle mélange simplement les mots (suites de lettres de X) en préservant l'ordre partiel des lettres (le mot $x_1x_4x_5x_2x_6x_3$ fait partie du produit shuffle de $x_1x_2x_3$ et $x_4x_5x_6$), le produit quasi-shuffle autorise une opération additionnelle (dans le produit shuffle de deux mots A et B, on s'autorise à former toutes les sommes partielles possibles de deux lettres consécutives pourvu qu'elles appartiennent à deux mots différents). Par exemple, le mot $x_1x_4x_5x_2x_6x_3$ est aussi inclus dans le produit quasi-shuffle de $x_1x_2x_3$ et $x_4x_5x_6$ (dans ce cas on ne fait aucune sommation), mais également les mots $x_1x_4y_1y_2$ ou $z_1x_5x_2y_2$ avec $y_1 := x_5 + x_2$, $y_2 := x_6 + x_3$, $z_1 := x_1 + x_4$. La définition mathématique la plus simple du produit quasi-shuffle, noté ici $*_1$, de deux mots est récursive [25] :

$$x_1W *_1 y_1Y := x_1(W *_1 y_1Y) + y_1(x_1W *_1 Y) + (x_1 + y_1)(W *_1 Y),$$

où x_1 et y_1 sont des lettres de X, W et Y des mots.

Dans le contexte des algèbres de Rota-Baxter, l'idée est la même que pour le cas du poids zéro (le cas des shuffles) ; le produit double de Rota-Baxter (8) se décompose, en poids $\theta = 1$ comme somme de trois termes :

$$x *_1 y = xR(y) + R(x)y + xy,$$

les deux premiers produits correspondent aux « demi-shuffles », tandis que le dernier produit, xy, commutatif et associatif, est simplement le produit dans l'algèbre sous-jacente. Avec la notation $x \uparrow y := xR(y)$ et $x \downarrow y := R(x)y$ et $x \cdot y := xy$, on a :

$$x \downarrow y = y \uparrow x, \qquad (x \uparrow y) \uparrow z = x \uparrow (y \uparrow z + z \uparrow y + y \cdot z). \tag{14}$$

La dernière composante du produit double $*_1$ explique, par rapport au cas des shuffles, la présence de termes additionnels dans les produits quasi-shuffles, comme on le voit immédiatement en bas degrés :

$$R(x)R(y) = [R(xR(y)) + R(yR(x))] + \{R(xy)\},$$

$$\begin{aligned} R(x)R(yR(z)) \;=\; & [R(xR(yR(z))) + R(yR(xR(z))) + R(yR(zR(x)))] \\ & +\{R(xyR(z)) + R(yR(xz))\}, \end{aligned}$$

où, dans les termes droits, la composante provenant des produits shuffles est mise entre crochets et celle provenant du terme additionnel induit par le poids $\theta = 1$ est entre parenthèses.

On notera bien que ces formules ne valent que dans le cas commutatif. Les formules générales pour les produits s'obtiennent par application récursive de la relation (7).

L'approche de Rota [41, 42] est très différente. Elle part de l'observation que, si A est une algèbre commutative, l'algèbre des suites d'éléments de A avec la structure d'algèbre produit est munie d'une structure d'algèbre de Rota-Baxter par l'opération :

$$R(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n, \ldots).$$

En prenant pour A l'algèbre $k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ des polynômes à une infinité de variables, on montre que la sous-algèbre de Rota-Baxter engendrée par la suite $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ est libre. L'intérêt de cette construction est de donner un lien immédiat avec la théorie des fonctions symétriques. En effet, les termes de la formule de Spitzer ($R(x^n)$ et $R^{(n)}(x)$) correspondent respectivement, en théorie des fonctions symétriques, aux sommes de puissances ($\sum_i x_i^n$) et aux fonctions symétriques élémentaires ($\sum_{i_1<\cdots<i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$). La formule de Spitzer se déduit ainsi des formules de Waring, qui expriment les sommes de puissances comme polynômes en les fonctions symétriques élémentaires !

3. La théorie non commutative

La présentation qui a été donnée du cas commutatif nous dispensera largement d'avoir à entrer trop dans les détails du cas non commutatif, et nous allons surtout essayer d'indiquer les ingrédients, techniques et théoriques, qui permettent de passer de l'un à l'autre.

Bien que de multiples raisons théoriques et l'existence d'applications naturelles (à commencer par l'intégration ou le calcul aux différences dans des algèbres d'opérateurs !) justifient qu'on accorde aux algèbres de Rota-Baxter non commutatives la même attention qu'aux algèbres commutatives et bien que quelques résultats importants aient été obtenus assez tôt, il a fallu attendre une période très récente pour que la théorie soit développée sur des bases systématiques.

Un des éléments clé du renouveau est lié aux travaux de Connes et Kreimer [13] et à la théorie de la renormalisation, qui permet de donner un sens à des intégrales qui sont naturellement divergentes en extrayant les divergences de façon cohérente et compatible avec la physique sous-jacente [12, 37]. Le procédé d'extraction, de nature combinatoire, dû à Bogoliubov (et d'autres) est connu de longue date (il s'agit de travaux contemporains à ceux de Spitzer et Magnus) et s'avère être l'instance d'une décomposition générale dans les algèbres de Rota-Baxter non commutatives (appelée décomposition d'Atkinson).

Les sections qui suivent présentent d'abord cette décomposition, l'un des résultats importants pour le cas non commutatif établis à l'époque de fondation de la théorie. Quelques formules de type Spitzer indiquent ensuite comment se fait, de façon générale, le passage au non commutatif, où la notion d'algèbre pré-Lie joue un rôle clé. On évoque ensuite l'analogue non commutatif des constructions de Cartier et Rota, qui montre que les fonctions symétriques non commutatives jouent, pour les algèbres de Rota-Baxter associatives, le rôle que jouaient les fonctions symétriques chez Rota. L'article se conclut par des indications, au travers d'exemples et de renvois bibliographiques, sur les usages possibles des algèbres de Rota-Baxter (les choix effectués reflétant plutôt les goûts et intérêts des auteurs qu'un souci d'exhaustivité).

3.1. La décomposition d'Atkinson

En 1963, Atkinson se penche, en liaison étroite avec les théorèmes de Spitzer, sur les problèmes de factorisation dans les algèbres de Rota-Baxter [4]. Dans une algèbre de Rota-Baxter A de poids θ, notons $\tilde{R}$ l'opérateur $-\theta \mathrm{id}_A - R$. Il vérifie encore la relation de Rota-Baxter de poids θ, mais on a $\tilde{R}(x *_\theta y) = -\tilde{R}(x)\tilde{R}(y)$.

On notera que, si $\theta = 0$, on a $\tilde{R} = -R$. Pour $x \in A$, Atkinson s'intéresse aux solutions des équations :

$$f = 1 + \lambda R(fx), \quad h = 1 + \lambda \tilde{R}(xh).$$

Le paramètre formel λ est introduit pour éviter d'avoir à discuter les problèmes de convergence ou d'inversibilité (on l'introduit parfois également dans les formules de Spitzer). Leur solution est donnée par l'argument du logarithme dans le terme gauche de l'identité de Spitzer pour f (en prenant $F = \lambda x$), et par un développement en série analogue pour h.

En utilisant que $R(a)\tilde{R}(b) = R\big(a\tilde{R}(b)\big) + \tilde{R}\big(R(a)b\big)$, on obtient le résultat clé d'Atkinson, c'est-à-dire l'identité $fh = 1 - \lambda\theta fxh$ dans $A[[\lambda]]$, qui se réécrit :

$$1 + \lambda\theta x = f^{-1}h^{-1}.$$

Le procédé de Bogoliubov est une récursion permettant de calculer h^{-1} et f (appelé le « contreterme » en théorie de la renormalisation) connaissant x dans le cas où R se comporte comme dans le deuxième exemple de la section 2.2 : il est de poids $\theta = -1$, idempotent et vérifie en outre $R(1) = 0$. Omettons le paramètre λ. De l'identité $f(1-x) = h^{-1}$ et de ce que $f - 1$ est dans l'image de R, on déduit d'abord que :

$$f = 1 + R(f) = 1 + R(fx) = 1 + R(f - h^{-1})$$

et, de $R(h^{-1}) = 0$ et $\tilde{R}(f) = 1$, que :

$$h^{-1} = \tilde{R}(h^{-1}) = \tilde{R}(f(1-x)) = 1 - \tilde{R}(fx).$$

Lorsque les éléments considérés ont un développement en série sous-jacent, on vérifie ensuite que les deux équations couplées :

$$h^{-1} = 1 - \tilde{R}(fx), \quad f = 1 + R(fx)$$

se résolvent récursivement degré par degré (en notant avec un indice i le terme de degré i de chaque série, $h_1^{-1} = -\tilde{R}(x_1), f_1 = R(x_1), h_2^{-1} = -\tilde{R}(f_1x_1 + x_2), f_2 = R(f_1x_1 + x_2)$, etc.) ; c'est l'algorithme de Bogoliubov.

3.2. Formules de Spitzer non commutatives

La question se pose alors de mieux comprendre la structure du terme gauche de la formule de Spitzer, c'est-à-dire du logarithme de la solution de l'équation $f = 1 + R(fx)$. On reconnaît donc là, selon l'algèbre et l'opérateur R choisis, le contreterme en théorie quantique des champs, mais aussi, de façon moins exotique, la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dans une algèbre de matrices, ou encore le point fixe d'un système dynamique discret... On peut en particulier s'attendre à ce qu'une « formule de Spitzer non commutative » ait comme cas particulier la solution du problème de Baker-Campbell-Hausdorff (calculer le logarithme de la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre – le cas discret, calculer le logarithme d'un produit d'exponentielles, en est un cas particulier). On va voir que c'est en effet le cas.

L'élément conceptuel clé de la théorie non commutative est peut-être l'existence d'une structure d'algèbre pré-Lie (ou de Vinberg) sous-jacente [1, 9, 10, 38]. Rappelons qu'une algèbre pré-Lie (gauche) est un espace vectoriel muni d'un produit (non associatif) $\rhd$ vérifiant la condition d'associativité faible :

$$(x \rhd y) \rhd z - x \rhd (y \rhd z) = (y \rhd x) \rhd z - y \rhd (x \rhd z).$$

Les algèbres pré-Lie droites sont définies par la relation symétrique. Les algèbres pré-Lie sont Lie admissibles, c'est-à-dire que le crochet $[x, y]_\rhd := x \rhd y - y \rhd x$ satisfait à l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]_\rhd]_\rhd + [y, [z, x]_\rhd]_\rhd + [z, [x, y]_\rhd]_\rhd = 0.$$

L'exemple canonique d'algèbre pré-Lie, plus ou moins implicite déjà dans les travaux de Cayley, est celui des dérivations : on vérifiera par exemple que l'espace vectoriel réel engendré par les dérivations $x^n\partial_x$ est une algèbre pré-Lie si on le munit du produit $(x^n\partial_x) \rhd (x^m\partial_x) := m \cdot x^{n+m-1}\partial_x$.

Toute algèbre de Rota-Baxter hérite de l'opérateur R automatiquement une structure pré-Lie (en fait de deux, une gauche et une droite, nous ne parlerons en détail que de la structure gauche) ; le produit (de poids θ) correspondant est défini par :

$$a \rhd_\theta b := R(a)b - bR(a) - \theta ba, \tag{15}$$

tandis que le produit $a\,_\theta\!\lhd\, b := -b \rhd_\theta a$ est pré-Lie droit. On notera que $[a, b]_{\rhd_\theta} = [a, b]_{*_\theta}$. Pour $\theta = 0$, on a $a \rhd_0 b = [R(a), b] := R(a)b - bR(a)$. Dans le cas commutatif, par contre, la formule dégénère et le produit pré-Lie est, à une constante près, le produit associatif de l'algèbre.

Le rôle clé de cette structure se comprend en revenant à la formule de Bohnenblust-Spitzer dans sa formulation (12), un peu artificielle dans le cas commutatif. Dans le cas $n = 2$, on vérifie facilement que l'identité commutative

$$F_1 *_\theta F_2 - \theta F_2F_1 = R(F_1)F_2 + R(F_2)F_1$$

devient :

$$F_1 *_\theta F_2 + F_2 \rhd_\theta F_1 = R(F_1)F_2 + R(F_2)F_1.$$

Ce mécanisme s'avère fonctionner à tous les ordres. De façon générale, il « suffit » de redéfinir dans (12) l'opérateur $\mathcal{D}^\theta_\sigma$, en substituant dans la définition (13) à l'opérateur $d_{\theta x}$ (produit à droite par θx) l'opérateur $d_{\rhd_\theta x}$ de multiplication à droite associé au produit pré-Lie : $d_{\rhd_\theta x}(y) := y \rhd_\theta x$. Concrètement, pour reprendre l'exemple qui suit la définition (13), on substituera dans la formule de Bohnenblust-Spitzer, à l'expression :

$$\mathcal{D}^\theta_\sigma(F_1, \dots, F_5) = \theta^3(F_4F_3) *_\theta (F_5F_1F_2),$$

l'expression en termes de produits pré-Lie :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\rhd_\theta}_\sigma(F_1, \dots, F_5) &= d_{\rhd_\theta F_3}(F_4) *_\theta (d_{\rhd_\theta F_2} d_{\rhd_\theta F_1})(F_5)\\ &= (F_4 \rhd_\theta F_3) *_\theta ((F_5 \rhd_\theta F_1) \rhd_\theta F_2).\end{aligned}$$

Avec cette redéfinition, l'identité de Bohnenblust-Spitzer (12) vaut encore dans le cas non commutatif [19], et admet même un q-analogue [39].

Pour aborder le problème de Baker-Campbell-Hausdorff généralisé aux algèbres de Rota-Baxter, il convient d'avoir en tête, outre la formule de Spitzer et son écriture (10), la solution de Magnus au problème classique. Dans l'article [36] de 1954, Magnus considère la solution $Y(t)$ de l'équation différentielle (disons matricielle) $Y'(t) = A(t)Y(t)$, $Y(0) = 1$ et montre que son logarithme $\Omega(A)(t) := \log(Y(t))$ est solution de l'équation différentielle :

$$\dot{\Omega}(A)(t) = \frac{ad_{\Omega(A)}}{e^{ad_{\Omega(A)}} - 1}(A)(t),$$

où ad est l'action adjointe $(ad_x(y) = [x, y] = xy - yx)$.

Il se trouve que la même formule vaut encore dans toute algèbre de Rota-Baxter, pourvu que l'on adopte le bon point de vue : celui des algèbres pré-Lie. On remarquera d'abord que, comme $\Omega(A)(0) = 0$ et que l'opérateur d'intégration est de Rota-Baxter de poids zéro :

$$ad_{\Omega(A)}(A) = [\Omega(A), A] = \dot{\Omega}(A) \rhd_0 A = g_{\dot{\Omega}(A)\rhd_0}(A).$$

Cette observation donne la clé de la formule générale qui unifie la formule de Spitzer et la formule de Magnus ; pour une algèbre de Rota-Baxter A de poids θ, si f est une solution de $f = 1 + \lambda R(fx)$ dans $A[[\lambda]]$, l'élément $\Omega'(\lambda x)$ tel que $R(\Omega'(\lambda x)) = \log(f)$ vérifie [20] :

$$\Omega'(\lambda x) = \frac{-g_{\Omega'(\lambda x)\rhd_\theta}}{e^{-g_{\Omega'(\lambda x)\rhd_\theta}} - 1}(\lambda x) = \lambda x + \sum_{n>0} \frac{(-1)^n B_n}{n!} g^n_{\Omega'(\lambda x)\rhd_\theta}(\lambda x),$$

où $g_{x\rhd_\theta}(y) := x \rhd_\theta y$. Cette série est appelée série de Magnus pré-Lie. Elle a une signification intrinsèque pour la théorie des idempotents de Lie et des opérades qui a été mise en évidence dans les travaux de F. Chapoton [11].

3.3. Théorie de Cartier-Rota non commutative

L'analogue non commutatif des formules de Spitzer fait apparaître le rôle clé de la notion d'algèbre pré-Lie, dont on voit bien qu'elle est naturelle dès qu'on cherche à passer du point de vue du poids $\theta = 0$ à un cadre plus général (rappelons que le poids zéro est celui de la théorie classique de l'intégration et du calcul différentiel : le produit pré-Lie se réduit dans ce cas à un crochetage de Lie classique tordu par l'intégrale de Riemann, puisqu'on a alors $a \rhd_0 b = R(a)b - bR(a) =: [R(a), b]$).

Le problème des mots fait apparaître d'autres idées et notions, tout aussi fondamentales. Nous passerons brièvement sur la théorie de Cartier non commutative, intimement liée aux analogues non commutatifs des algèbres shuffles et quasi-shuffles. Elle est en général abordée graphiquement, c'est-à-dire en termes d'arbres [3, 16].

La théorie de Rota non commutative [18, 19] est, elle, surprenamment simple dans sa formulation, puisque, si l'on remplace, dans la construction de Rota l'algèbre des polynômes à une infinité de variables $k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ par son analogue associatif, l'algèbre associative libre (ou algèbre tensorielle) sur les x_i, le résultat fondamental continue de valoir : l'opération $R(y_1, \ldots, y_n, \ldots) := (0, y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + \cdots + y_n, \ldots)$ définit un opérateur de Rota-Baxter et la sous-algèbre de Rota-Baxter engendrée par la suite $X = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ donne une présentation de l'algèbre de Rota-Baxter libre sur les x_i.

Outre que, comme celle de Rota, cette construction résout de façon très économique le problème des mots, elle a le mérite de renvoyer à l'une des idées fondamentales de la combinatoire algébrique moderne, la théorie des fonctions symétriques non commutatives, qui a été développée systématiquement ces quinze dernières années par J.-Y. Thibon et de nombreux collaborateurs (G. Duchamp, F. Hivert, J.-C. Novelli *inter alia*) dans une série d'articles [24, 15].

Concrètement, le calcul du terme gauche de la formule de Spitzer dans le cas commutatif, c'est-à-dire de $R^{(n)}(X) = R(R^{(n-1)}(X)X)$, donne une suite dont les termes sont les fonctions symétriques élémentaires $\sum_{0<i_1<\cdots<i_n<k} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$. Dans le cas non commutatif, la même formule est vraie, mais en variables non commutatives : on se trouve alors dans le contexte de la théorie, due à F. Hivert, des fonctions quasi-symétriques en variables non commutatives. Cette approche a les mêmes avantages que la reconduction aux fonctions symétriques dans le cas commutatif. Elle permet en particulier de transférer aux algèbres de Rota-Baxter tout un ensemble de résultats et techniques sur les algèbres de fonctions symétriques non commutatives (et de variantes, comme les algèbres de descentes de Solomon, fondamentales pour la théorie des algèbres de Lie libres [40]).

3.4. Quelques applications et perspectives

Les applications possibles de la théorie, on s'en doute, sont nombreuses, puisque les structures de Rota-Baxter apparaissent naturellement dès que l'on cherche à abstraire des notions comme celle d'intégrale (ou dualement de dérivation), d'opérateur de sommation, de scindage d'algèbres... Nous nous limiterons à donner deux exemples, un en direction de l'analyse des équations différentielles, l'autre de l'algèbre universelle.

3.4.1. La théorie du contrôle

La théorie du contrôle des équations différentielles a été longtemps associée à la combinatoire des intégrales itérées et sa variante formelle, la combinatoire des mots. Cette partie de la théorie est associée aux travaux de M. Fliess [23], à l'interface de la combinatoire et de l'analyse.

Du point de vue des algèbres de Rota-Baxter, la combinatoire sous-jacente est celle des algèbres de Rota-Baxter de poids zéro, commutatives lorsqu'on travaille en dimension 1, non commutatives dès que l'on a affaire à des algèbres d'opérateurs (rappelons encore une fois que l'intégrale de Riemann est un opérateur de poids zéro). Il n'est donc pas très surprenant que l'on retrouve dans la théorie du contrôle certaines des idées directrices de la théorie moderne, non commutative, des algèbres de Rota-Baxter. De fait, la notion assez protéiforme « d'algèbre chronologique » (ou de calcul chronologique) qui y est utilisée correspond à peu près à la théorie des algèbres de Rota-Baxter de poids zéro. Des remarques analogues vaudraient pour la théorie numérique des équations différentielles.

Les travaux d'A. Agrachev et R. Gamkrelidze en donnent un exemple remarquable [1, 38]. Chez eux, la notion d'algèbre chronologique est à comprendre au sens d'algèbre pré-Lie, dont ils ont développé la théorie systématiquement. La mise en perspective de leurs travaux dans le contexte des algèbres de Rota-Baxter permet de comprendre (par exemple) les liens entre la série de Magnus pré-Lie et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff discrète. On peut en effet montrer en transposant leur construction du groupe des flots formels dans le cadre des algèbres de Rota-Baxter que le produit $l = fh$ de solutions f, h des équations $f = 1 + R(fx)$ et $h = 1 + \lambda R(hy)$, est solution de l'équation $l = 1 + R(lz)$, où :

$$z = x \bullet y := x + e^{-g_{\Omega'(x) \rhd_\theta}} y,$$

avec $\Omega'(x \bullet y) = BCH_{*_\theta}(\Omega'(x), \Omega'(y))$ (où BCH_{*_θ} veut dire que l'on calcule les crochets dans la formule de Baker-Campbell-Hausdorff en utilisant le produit double $*_\theta$). Rappelons que cette dernière calcule $\log(\exp(x)\exp(y))$ en variables non commutatives et est donnée par :

$$BCH(x, y) := x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) + \cdots .$$

3.4.2. Scindages de lois et équations de Yang-Baxter

L'existence d'un opérateur de Rota-Baxter sur une algèbre associative A permet de définir diverses structures algébriques dérivées sur celle-ci. Par simplicité, on se concentrera ici exclusivement sur le cas du poids zéro, mais les remarques qui suivent peuvent être adaptées au cas général.

On a vu que le produit double $*_0$ permet de définir sur une algèbre de Rota-Baxter une nouvelle structure d'algèbre associative. Ce produit se scinde en deux opérations $x \uparrow y := xR(y)$ et $x \downarrow y := R(x)y$ qui, dans le cas commutatif, permettent de définir une structure d'algèbre de shuffles abstraite sur A à la manière d'Eilenberg-MacLane et Schützenberger.

Le cas non commutatif fonctionne de la même manière, et on peut imiter la construction commutative pour définir à partir des relations vérifiées par les demi-shuffles une notion abstraite d'algèbre de shuffles non commutative. L'identité de Rota-Baxter induit en effet encore dans ce cas un système de relations algébriques pour $\downarrow$ et $\uparrow$ [2] :

$$(a \uparrow b) \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c + b \downarrow c) \tag{16}$$

$$a \downarrow (b \uparrow c) = (a \downarrow b) \uparrow c \tag{17}$$

$$a \downarrow (b \downarrow c) = (a \uparrow b + a \downarrow b) \downarrow c. \tag{18}$$

Les espaces munis de deux produits $\downarrow, \uparrow$ satisfaisant à ces relations sont appelés algèbres dendriformes (il vaudrait peut-être mieux parler d'algèbres dendrimorphes, mais l'usage est désormais établi). Si la découverte des relations dendriformes a pu être attribuée à Rota (en liaison avec les propriétés des shuffles plutôt qu'avec les algèbres de Rota-Baxter [32]), il convient de signaler là encore le rôle pionnier d'Eilenberg et MacLane qui, les premiers, ont dégagé les structures algébriques sous-jacentes aux produits shuffles de la topologie algébrique (non commutatifs au niveau des complexes de chaînes) en mettant en évidence le rôle des « half-produits » ou encore la possibilité de déduire l'associativité du produit des trois relations auxquelles ceux-ci satisfont [22, 35].

Une jolie remarque, importante pour l'algèbre universelle, due à M. Aguiar, est que le phénomène de décomposition du produit double que nous venons de décrire n'est pas spécifique au cas associatif [2]. Le même article souligne le lien entre opérateurs de Rota-Baxter de poids zéro et l'équation :

$$r_{13}r_{12} - r_{12}r_{23} + r_{23}r_{12} = 0, \tag{19}$$

analogue associatif de l'équation de Yang-Baxter classique puisque, si, dans une algèbre associative A, $r = \sum u_i \otimes v_i \in A \otimes A$ satisfait à (19), alors l'opérateur $R_r(x) := \sum u_i x v_i$ est de Rota-Baxter de poids zéro (rappelons que r_{12} désigne l'élément $\sum u_i \otimes v_i \otimes 1 \in A \otimes A \otimes A$, avec des conventions analogues pour les autres r_{ij}).

On va voir que les liens entre opérateurs de Rota-Baxter et équation de Yang-Baxter se déclinent sur d'autres modes encore, mais commençons par le comportement des produits $\uparrow$ et $\downarrow$. Pour tout espace vectoriel V muni d'un produit $*$ (une application bilinéaire à valeurs dans V quelconque) on peut définir la notion d'opérateur de Rota-Baxter (de poids 0) R sur V pour le produit $*$ par la relation :

$$R(x) * R(y) = R(R(x) * y + x * R(y)).$$

Lorsque le produit $*$ vérifie des relations (associativité, commutativité, identité de Jacobi, identités définissant les produits pré-Lie ou shuffle...), on s'attend alors à ce que les produits $x \uparrow y = x * R(y)$ et $x \downarrow y = R(x) * y$ héritent de propriétés remarquables. C'est en effet le cas ; nous renvoyons à [17, 5, 48] où ces phénomènes sont étudiés en détail et nous limitons à donner ici l'exemple des algèbres de Lie, qui rentre bien dans le cadre de cet article.

Soit L une algèbre de Lie, munie d'un opérateur de Rota-Baxter R de poids zéro. Il vérifie donc :

$$[R(x), R(y)] = R([R(x), y] + [x, R(y)]), \tag{20}$$

qui n'est autre que l'équation de Yang-Baxter classique, qui assure que le crochet $[x, y]_R := ([R(x), y] + [x, R(y)])$ est un crochet de Lie [46]. Comme cela se produit dans le cas associatif, l'addition des produits $x \uparrow y := [x, R(y)]$ et $x \downarrow y := [R(x), y]$ définit en effet un crochet de Lie « double » $[x, y]_R = x \uparrow y + x \downarrow y$, mais il y a un peu plus : les produits $\uparrow$ et $\downarrow$ sont en effet respectivement pré-Lie droits et gauches et le crochet de Lie double $[\ ,\ ]_R$ se réécrit comme un commutateur :

$$[x, y]_R = x \uparrow y - y \uparrow x.$$

Dans le cas où l'on part d'une algèbre de Rota-Baxter associative A (de poids quelconque), l'algèbre de Lie A_L associée est elle-même de Rota-Baxter (pour le même opérateur R) et on retrouve les phénomènes décrits plus haut dans l'article (existence du produit double, de produits pré-Lie gauches et droits...).

En conclusion, revenons un instant au cas général avec un poids θ arbitraire. On peut alors aller un peu plus loin dans l'étude des équations de Yang-Baxter du point de vue des algèbres de Rota-Baxter. L'équation de Yang-Baxter classique admet en effet une variante qui joue un rôle clé dans les travaux fondateurs de Semenov-Tian-Shansky [46], l'équation de Yang-Baxter modifiée :

$$[B(x), B(y)] = B([B(x), y] + [x, B(y)]) - \theta^2 [x, y]. \tag{21}$$

Cette équation suffit à garantir que le crochet $[x, y]_B := \frac{1}{2}([B(x), y] + [x, B(y)])$ est de Lie.

Dans une algèbre de Rota-Baxter associative A de poids θ, son analogue associatif

$$B(x)B(y) = B(B(x)y + xB(y)) - \theta^2 xy, \tag{22}$$

est vérifié par l'opérateur $B := R - \tilde{R}$ tandis que dans l'algèbre de Lie de Rota-Baxter associée A_L, l'opérateur B satisfait à l'équation de Yang-Baxter modifiée. Dans la terminologie de Semenov-Tian-Shansky, B définit une structure associative double sur A. On remarquera enfin que le produit double de Rota-Baxter (8) se réécrit : $x *_\theta y = \frac{1}{2}(B(x)y + xB(y))$.

4. Références

[1] A. Agrachev, R. Gamkrelidze, *Chronological algebras and nonstationary vector fields*, J. Sov. Math. **17** (1), (1981), 1650-1675.

[2] M. Aguiar, *Pre-Poisson algebras*, Lett. Math. Phys. **54** (4), (2000), 263-277.

[3] M. Aguiar, W. Moreira, *Combinatorics of the free Baxter algebra*, Electronic Journal of Combinatorics **13** (1) R17 (2006).

[4] F. V. Atkinson, *Some aspects of Baxter's functional equation*, J. Math. Anal. Appl. **7**, (1963), 1-30.

[5] C. Bai, O. Bellier, L. Guo, X. Ni, *Splitting of Operations, Manin Products, and Rota-Baxter Operators*, Int. Math. Res. Not., rnr266 (2012).

[6] G. Baxter, *An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity*, Pacific J. Math. **10**, (1960), 731-742.

[7] P. Cartier, *On the structure of free Baxter algebras*, Adv. Math. **9**, (1972), 253-265.

[8] P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes prounipotents*, Séminaire Bourbaki **885**, (2001).

[9] P. Cartier, *Vinberg algebras, Lie groups and combinatorics*, Clay Mathematical Proceedings **11**, (2011), 107-126.

[10] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not. **2001**, (2001), 395-408.

[11] F. Chapoton, *A rooted-trees q-series lifting a one-parameter family of Lie idempotents*, Algebra & Number Theory **3**, n° 6, (2009), 611-636.

[12] J. C. Collins, Renormalization, Cambridge monographs in mathematical physics, Cambridge (1984).

[13] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I:The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Commun. Math. Phys. **210**, (2000), 249-273.

[14] P. Deligne, *Multizêtas, d'après Francis Brown*, Séminaire Bourbaki, Janvier 2012, 64ème annee, 2011-2012, Exp. 1048.

[15] G. Duchamp, F. Hivert, J.-C. Novelli, J-Y. Thibon, *Noncommutative Symmetric Functions VII : Free Quasi-Symmetric Functions Revisited*, Annals of Combinatorics **15**, (2011) 655-673.

[16] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo *Free Rota-Baxter algebras and rooted trees*, Journal of Algebra and Its Applications **7**, (2008), 167-194.

[17] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, *On products and duality of binary, quadratic, regular operads.* Journal of Pure and Applied Algebra **200**, (2005), 293-317.

[18] K. Ebrahimi-Fard, J.M. Gracia-Bondía, F. Patras, *Rota-Baxter algebras and new combinatorial identities*, Lett. Math. Phys. **81**, (2007), 61-75.

[19] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, F. Patras *A noncommutative Bohnenblust-Spitzer identity for Rota-Baxter algebras solves Bogoliubov's counterterm recursion*, Journal of Noncommutative Geometry **3**, (2009), 181-222.

[20] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon *A Magnus- and Fer-type formula in dendriform algebras*, Foundations of Computational Mathematics **9**, (2009), 295-316.

[21] J. Ecalle, *Multizetas, perinomal numbers, arithmetical dimorphy, and ARI/GARI*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.(6), 13 (4), (2004) 683-708.

[22] S. Eilenberg, S. Mac Lane, *On the Groups $H(\pi, n)$*, Annals of Mathematics, Second Series, **58**, n° 1, (1953), 55-106.
[23] M. Fliess, *Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives*, Bulletin de la Société Mathématique de France **109**, (1981), 3-40.
[24] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. **112**, (1995), 218-348.
[25] M. E. Hoffman, *Quasi-Shuffle Products*, Journal of Algebraic Combinatorics **11**, (1), (2000), 49-68.
[26] M. Gubinelli, *Abstract integration, Combinatorics of Trees and Differential Equations*, Combinatorics and Physics, Contemp. Math. **539**, (2011), 135-151.
[27] L. Guo, *Introduction to Rota-Baxter algebra*, International Press (2012).
[28] L. Guo, W. Keigher, *Baxter algebras and shuffle products*, Adv. Math. **150**, (2000), 117-149.
[29] K. Ihara, K. Masanobu, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Mathematica **142** (2), (2006), 307-338.
[30] M. Kawski, *Chronological Algebras and nonlinear Control*, Proc. Asian Conf. Control. Tokyo, 1994.
[31] J. P. S. Kung, G.-C Rota, C. H. Yan, *Combinatorics : The Rota Way*, Cambridge University Press (2009).
[32] J.-L. Loday, *Dialgebras*, in Dialgebras and Related Operads, eds. F. Chapoton et al., Lecture Notes in Mathematics, **1763**, (2001), 7-66.
[33] J.L. Loday, B. Vallette, Algebraic Operads, Springer-Verlag (2012).
[34] T. J. Lyons, M. Caruana, T. Lévy, Differential Equations Driven by Rough Paths, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIV - 2004. Springer, Lecture Notes in Mathematics **1908** (2007).
[35] S. MacLane, *The homology products in K(II, n)*, Proc. Am. Math. Soc. 5(4), (1954), 642-651.
[36] W. Magnus, *On the exponential solution of differential equations for a linear operator*, Commun. Pure Appl. Math. **7**, (1954), 649-673.
[37] D. Manchon, *Quelques aspects combinatoires de la renormalisation*, Gazette des Mathématiciens **119** (janvier 2009), 5-15.
[38] D. Manchon, *A short survey on pre-Lie algebras*, E. Schrödinger Institut Lectures in Math. Phys., « Noncommutative Geometry and Physics : Renormalisation, Motives, Index Theory », Eur. Math. Soc, A. Carey Ed. (2011).
[39] J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon, *A one-parameter family of dendriform identities*, Journal of Combinatorial Theory, series A, **116**, (2009), 864-874.
[40] C. Reutenauer, Free Lie algebras, Oxford University Press (1993).
[41] G.-C. Rota, *Baxter algebras and combinatorial identities. I, II.*, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, (1969), 325-329 ; ibid. **75**, (1969), 330-334.
[42] G.-C. Rota, D. Smith, *Fluctuation theory and Baxter algebras*, Istituto Nazionale di Alta Matematica **IX**, (1972), 179-201.
[43] G.-C. Rota, *Baxter operators, an introduction*, In : « Gian-Carlo Rota on Combinatorics, Introductory papers and commentaries", J. P. S. Kung Ed., Contemp. Mathematicians, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1995.
[44] G.-C. Rota, *Ten mathematics problems I will never solve*, Invited address at the joint meeting of the American Mathematical Society and the Mexican Mathematical Society, Oaxaca, Mexico, Dec. 6, 1997. DMV Mitteilungen Heft **2**, (1998), 45-52.
[45] M. P. Schützenberger, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreil-Jacotin Pisot (Algèbre et théorie des nombres), Paris, Année 1958/59.
[46] M. A. Semenov-Tian-Shansky, *What is a classical r-matrix ?*, Funct. Ana. Appl. **17**, (1983) 259-272.
[47] F. Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **82**, (1956) 323-339.
[48] K. Uchino, *Derived bracket construction and Manin products*, Lett. Math. Phys. **93** (1), (2010), 37-53.
[49] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values ζ(2,..., 2, 3, 2,..., 2)*, Annals of Mathematics **175** (2), (2012), 977-1000.