Supersymétrie et Dimensions Supplémentaires

Philippe Brax

à Oliver

Supersymétrie et Dimensions Supplémentaires

Philippe Brax*

Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPhT Unité de recherche associée au CNRS CEA/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette cédex, France

Ce mémoire présente divers aspects de la physique des dimensions supplémentaires et leurs liens avec la supersymétrie. L'accent a été mis sur la brisure de supersymétrie dans les modèles de branes et le rôle que les configurations non-BPS jouent dans ce contexte. Après un rappel sur les constructions de branes issues de la théorie des cordes, une courte introduction à la théorie de Horava-Witten est donnée sous l'angle des membranes ouvertes. Une présentation des branes non-BPS en supergravité à dix dimensions est ensuite effectuée. Dans ces deux cas les dimensions supplémentaires ne sont pas compactifiées. La seconde partie de ce mémoire traite des modèles à cinq dimensions. Une étude des branes non-BPS dans le modèle de Randall-Sundrum met en exergue deux types de configurations non-supersymétriques, les branes non-parallèles et le cas où la chiralité des fermions est différentes sur les bords de l'espace-temps. Dans le cadre de la théorie de Horava-Witten à cinq dimensions on considère le cas où l'une des branes est de tension violant la borne BPS, conduisant à des configurations non-statiques. Enfin on consacre une partie à la supersymétrie singulière où des champs scalaires vivent entre les branes. Là aussi nous présentons des configurations non-BPS qui sont dépendantes du temps. Ceci nous conduit à une brève étude de la cosmologie branaire avec champs scalaires.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

Depuis la description d'objets étendus appelés branes par Polchinski [1], la gamme des possibles extensions du modèle standard de la physique des particules s'est considérablement élargie. Une propriété majeure de ces objets concerne le spectre des états de masse nulle portés par les cordes ouvertes dont les extrémités sont attachées aux branes. Ces cordes portent des degrés de liberté de jauge, leurs excitations de masse nulle sont associées à des champs de jauge sur le volume d'univers des branes. Ainsi l'on obtient des modèles de théorie de jauge plongées dans une ou plusieurs dimensions supplémentaires. Ces modèles ont permis de considérer des extensions du modèle standard a partir de constructions branaires[2].

Une unification complète des forces fondamentales nécessite d'introduire la gravité dans ce cadre. Un paradigme fécond surgit aussi de la physique des branes. En effet, si les champs de jauge sont liés au volume d'univers des branes, la gravité se propage à la fois dans les dimensions supplémentaires et sur les branes. Ceci apparait clairement dans la théorie de Horava-Witten [3, 4] où l'espace-temps possède onze dimensions dont une compacte, un intervalle bordé par deux hyperplans portant chacun une théorie de jauge E_8. La gravité se propage entre les deux hyperplans. Après compactification de onze à cinq dimensions sur une variété de Calabi-Yau, le modèle se réduit à une théorie à une dimension supplémentaire[5]. Les deux hyperplans bordant l'intervalle cinq dimensionnel sont communément appelés branes visible et cachée. L'intérieur de l'intervalle [1]est le lieu de propagation de la gravité et de nombreux champs scalaires, les modules, reflètant la géométrie de la variété de Calabi-Yau[6].

Partant de ce cadre, Randall et Sundrum [7] ont proposés un modèle phénoménologique capturant l'essentiel de la description offerte par les branes. Ce modèle se compose de deux branes séparées par une dimension supplémentaire. La physique du modèle standard est placée sur la brane extrémité droite de l'intervalle; brane ayant la particularité de porter une tension négative. Dans l'intérieur est placée une constante cosmologique négative de façon à ce que l'espace devienne une portion de l'espace Anti- de Sitter à cinq dimensions. Le long de l'intérieur le facteur d'échelle de la géometrie décroit permettant une réduction exponentielle de l'échelle d'énergie du modèle standard par rapport à l'échelle de Planck. Ce mécanisme permet de suggérer une solution au problème de hiérarchie du modèle standard.

Dans une extension de ce travail, Randall et Sundrum [8] ont montré que vu de la brane de tension positive, la fonction d'onde du graviton décroit exponentiellement. Ceci conduit à la localisation de la gravité sur la

*Electronic address: `brax@spht.saclay.cea.fr`

[1] Le mot "bulk" sera traduit par intérieur dans la suite.

brane. Ainsi la gravité apparait naturellement quadri-dimensionnelle malgré son origine extra-dimensionnelle.

Les modèles de brane ont aussi des applications intéressantes en cosmologie[9–11]. Dans ce cas la brane visible porte la matière ordinaire et influence la géométrie de l'espace-temps cinq dimensionnel tout entier. Des modifications aux équations de Friedmann apparaissent et donnent lieu à des effets qui pourraient modifier les caractéristiques de l'inflation[12]. Une autre application concerne le problème crucial de la constante cosmologique[13]. Une idée séduisante consiste à utiliser la densité d'énergie portée par la brane visible pour courber la cinquième dimension laissant ainsi un univers quadri-dimensionnel plat, donc sans constante cosmologique[14].

Jusqu'à présent la supersymétrie n'a pas été mentionnée. Pourtant elle joue un role fondamentale dans la construction des branes à partir de la théorie des cordes. Récemment des branes non-supersymétriques ont été considerées par Sen [15]. Elles sont obtenues à partir de paires brane-antibrane qui brisent toutes les supersymétries. Dans ce cas un tachyon vient signaler une instabilité conduisant à l'annihilation des ces branes, où à leurs désintégration vers des configurations supersymétriques. L'absence de supersymétrie dans les constructions branaires conduit à la présence de forces inter-branes qui donnent lieu à un mouvement puis à une désintégration. Au contraire les situations supersymétriques conduisent à la présence de modules tels que la distance inter-brane signalant l'absence de force entre les branes. Ces configurations sont dites BPS comme celles observées pour la première fois dans les systèmes à plusieurs monopoles magnétiques.

Dans les modèles phénoménologiques de type Randall-Sundrum (RS), il a été remarqué que les tensions des deux branes et la constante cosmologique de l'intérieur sont finement ajustées[11]. En fait cet ajustement trouve son explication dans le fait que ces modèles admettent une supersymétrisation naturelle [16, 17]. Une description générale des modèles de supergravité à cinq dimensions avec bords (pour les multiplets vectoriels) est maintenant connue [18]. De même les branes non-supersymétriques du modèles de RS supersymétrique ont été décrites[19], ainsi que la brisure de supersymétrie à la Fabinger-Horava[20]. Dans ce mémoire nous aborderons quelques aspects de la brisure de supersymétrie branaire.

Dans la section II nous décrirons la dynamique des membranes de la M-théorie à onze dimensions. Ces configurations sont les extensions naturelle des constructions avec cordes ouvertes en théorie des cordes. En particulier les bords auxquels se rattachent les membranes ouvertes sont l'analogue à onze dimensions des branes de la théorie des cordes. Cette discussion nous permettra d'introduire la théorie de Horava-Witten qui est déterminante pour les modèles de dimensions supplémentaires. La section III sera consacrée aux branes non-supersymétriques à dix dimensions, ainsi qu'a l'instabilité tachyonique qui en résulte. Dans la section IV nous nous intéresserons aux modèles à cinq dimensions avec supersymétrie. Nous présenterons des résultats concernant des modèles branaires avec champs scalaires dans l'intérieur. Nous considèrerons le cas où la supersymétrie est brisée sur la brane visible. Ceci a des conséquences cosmologiques que nous détaillerons. Nous présenterons aussi une étude des modifications de la gravité à basse énergie dans ces modèles.

Dans tout ce mémoire le thème récurrent sera l'étude de la supersymétrie et de sa brisure dans des modèles avec dimensions supplémentaires. Ce thème est sans doute promis à un avenir riche menant à une description adéquate de la physique au delà du modèle standard.

II. BRANES À ONZE DIMENSIONS

Il existe deux formulations permettant une description des branes issues de la théorie des cordes. L'une d'elle consiste à étudier les cordes ouvertes et leurs propriétés. Une autre approche consiste à décrire les branes comme solutions classiques des équations de la supergravité. Dans le cas supersymétrique, le passage de l'une à l'autre description est rendu possible par la propriété BPS des branes considérées[21]. La description par le spectre des cordes ouvertes étant valable à couplage de corde faible alors que la supergravité offre une description de basse énergie à couplage fort. En effet la tension des branes dépend de l'inverse du couplage des cordes. Différents aspects de ces types de descriptions seront developpés dans la section III.

A. Branes et M-Théorie

Commençons par une revue rapide des propriétés des branes que nous utiliserons par la suite[6]. En théorie des cordes perturbatives de type IIA ou IIB, correspondant à basse énergie aux supergravités à trente deux charges de supersymétrie à dix dimensions, il existe dans le spectre des états de masse nulle des formes C_{p+1} antisymétriques en $(p+1)$ indices. Plus précisément on a

$$\text{type IIA}: \ p = 0, 2, 4, 6, 8, \ \text{type IIB}: p = -1, 1, 3, 5, 7, 9. \tag{1}$$

La théorie des cordes perturbative en la constante de couplage des cordes g_s, définie comme une série perturbative ordonnée par le genre des diagrammes perturbatifs, n'admet pas d'objets chargés par rapport à ces formes. C'est à dire des objets ayant un couplage directe

$$\int_{Dp} C_{p+1}. \tag{2}$$

Ces objets chargés apparaissent naturellement dans l'étude des conditions aux bords des cordes ouvertes. En effet on peut considèrer les conditions de bord

$$\partial_\sigma X^a = 0, \ a = 0, \ldots p, \ \partial_t X^a = 0, \ a = p+1, \ldots 9 \tag{3}$$

avec (t,σ) les coordonnées de la surface d'univers de la corde ouverte correspondant ainsi à des conditions de Neumann et Dirichlet. Les conditions de Dirichlet fixent

$$X^a = X_0^a, \; a = p+1, \dots 9 \tag{4}$$

où X_0 un vecteur constant spécifiant la position des cordes ouvertes comme attachées à un hyperplan $(p+1)$ dimensionnel. Ces hyperplans, définis comme lieu où les cordes ouvertes sont attachées, sont les D-branes de la théorie des cordes.

Les D-branes ont aussi la propriété d'être des états BPS de la théorie, c'est à dire qu'elles préservent une moitié des supersymmétries de la théorie des cordes. Les supersymétries préservées par les D-branes satisfont à

$$Q + \Gamma^{(p)} \tilde{Q} \tag{5}$$

où Q et $\tilde{Q}$ sont les supersymétries des secteurs gauche et droit de la corde et

$$\Gamma^{(p)} = \prod_{i=p+1}^{9} \Gamma^i \tag{6}$$

est le produit des matrices gamma dans les directions perpendiculaires à la brane. Ainsi une $D3$ brane de la théorie de type IIB possèdent seize supersymétries, c'est à dire $N = 4$ en quatre dimensions. Le spectre des états de masse nulle sur une Dp brane correspond à la réduction dimensionnelle de la théorie de super-Yang-Mills à dix dimensions (A^a, χ^α) avec $a = 0 \dots 9$ et $\alpha = 1 \dots 16$. Ainsi pour une $D3$ brane, le spectre devient celui de $N = 4$ Super-Yang-Mills comprenant trois champs scalaires complexes et quatre fermions de Weyl. On comprend facilement que les trois champs complexes sont issus des six translations brisées par la brane et caractérisent le mouvement transverse de la brane. Lorsque n branes viennent coincider le groupe de jauge est augmenté de $U(1)$ à $U(n)$ dont le $U(1)$ diagonal est associé à la translation globale des branes.

On peut considèrer des configurations de branes qui brisent toutes les supersymétries. C'est le cas des configurations à deux branes qui ne sont pas parallèles mais possèdent un angle entre elles. Un cas particulier crucial concerne les pairs brane anti-brane que l'on peut voir comme deux branes tournées d'un angle π. On verra que ces configurations réapparaissent aussi à cinq dimensions dans les modèles de supergravité avec bords.

Les branes étant des états non-perturbatifs, leur tension est inversement proportionnelle à la constante des cordes

$$T_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_s \alpha'^{\;(p+1)/2}}. \tag{7}$$

Ce comportement de la tension en $1/g_s$ est à contraster avec la tension d'une corde fondamentale qui ne dépend pas de g_s et de celle des objets solitoniques telle que la cinq-brane de Neveu-Schwarz qui se comporte en $1/g_s^2$.

L'ensemble des branes de la théorie des cordes à dix dimensions peut être déduit de l'hypothétique M-Théorie à onze dimensions. En effet, on peut réduire dimensionnellement la théorie de basse énergie de la M-Théorie, la supergravité à onze dimensions [23] et ses solitons, et obtenir ainsi les branes à partir de la membrane et de la cinq-brane à onze dimensions. Malheureusement l'absence d'une connaissance détaillée de la M-Théorie à onze dimensions empêche un traitement similaire à celui que l'on connait à dix dimensions. Néanmoins on peut utiliser une approche de type théorie effective et décrire les fluctuations des degrés de liberté des membranes et cinq-branes par une action de type Nambu-Gotto. Deux problèmes apparaissent à onze dimensions. D'une part la membrane ne définit par une théorie dont on sait traiter la quantification. De plus la cinq brane possède sur son volume d'univers une deux forme qui est auto-duale. Il est particulièrement difficile d'écrire une action pour de tels objets.

Il existe une analogie entre les cordes ouvertes attachées à des branes à dix dimensions et les membranes ouvertes attachées à des bords de l'espace-temps dans la théorie de Horava-Witten. Rappelons tout d'abord que le régime de couplage fort de la théorie de type IIA est la M-Théorie compactifiée sur un cercle de rayon

$$R_{11} = g_s \alpha'^{\;1/2}. \tag{8}$$

La théorie hétérotique de groupe de jauge $E_8 \times E_8$ admet également une description de couplage fort qui met en jeu une onzième dimension compactifiée sur un orbifold S^1/Z_2 où l'action de Z_2 envoit $x_{11} \to -x_{11}$ admettant ainsi deux points fixes à l'origine des coordonnèes et πR_{11}. Ces deux hyperplans portent chacun une théorie de super-Yang-Mills de groupe de jauge E_8. De plus ils modifient l'équation de Bianchi pour la quatre forme G de la supergravité à onze dimensions, correspondant à une charge magnétique. L'action sur un des bords pour sa partie bosonique devient

$$S_B = -\frac{1}{4\lambda^2} \int d^{10}x \sqrt{-g_{10}} F_i^2, \; i = 1, 2 \tag{9}$$

où le couplage de jauge vaut

$$\lambda = 2\pi (4\pi\kappa_{11})^{2/3} \tag{10}$$

en fonction de la constante gravitationnelle κ_{11}. De plus l'action de Z_2 sur les gravitinos à onze dimensions est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_a(-x_{11}) &= \Gamma^{11} \psi_a(x_{11}), \; a = 0 \dots 9 \\ \psi_{11}(-x_{11}) &= -\Gamma_{11} \psi_{11}(x_{11}). \end{aligned} \tag{11}$$

Ce choix conduit à ce qu'au points fixes les gravitinos soient chiraux et de même chiralité. En fait il a été remarqué par Fabinger et Horava que l'on peut tout aussi bien construire une autre version de la théorie hétérotique à couplage fort qui admet des gravitinos de chiralités opposées aux deux bords

$$\psi_a(0) = \Gamma^{11}\psi_a(0),\ \psi_a(\pi R_{11}) = -\Gamma^{11}\psi_a(\pi R_{11}). \quad (12)$$

Notons que cette configuration est l'analogue à onze dimensions des configurations de type brane anti-brane. La supersymétrie est complètement brisée ici aussi.

On peut se demander si l'analogie entre les configurations de branes parallèles, en théorie des cordes, jointes par des cordes ouvertes peut être étendue à onze dimensions. En fait, c'est le cas comme on va le voir[24]. Ici les cordes ouvertes deviennent les membranes ouvertes et les bords de Horava-Witten les hyperplans sur lesquels les membranes s'attachent. De plus le groupe de jauge apparait naturellement du à seize fermions vivant sur le bord de la membrane et venant compenser l'anomalie due aux fermions chiraux sur le bord de la membrane.

Dans la suite de cette section nous allons considèrer les défauts topologiques ouverts à onze dimensions.

B. Supergravité à onze dimensions et défauts topologiques

Il existe une supergravité unique à onze dimensions caractérisée, pour ses bosons, par le graviton g_{ab} et une trois-forme C_{abc}, dont le Lagrangian prend la forme[23]

$$S_{11} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int d^{11}x\sqrt{-g}(R - \frac{1}{2}|G|^2) - \frac{1}{12\kappa_{11}^2}\int C\wedge G\wedge G \quad (13)$$

avec

$$G = dC. \quad (14)$$

La trois-forme C permet d'envisager un couplage direct de la supergravité à un objet étendu de dimension trois

$$\int_{M_3} C \quad (15)$$

c'est à dire à une membrane M_3. De même la forme duale C_6 definie par

$$dC_6 = *_{11}G \quad (16)$$

où $*_{11}$ est la dualité de Hodge faisant passer une p-forme en une $(9-p)$-forme, permet de considérer un couplage

$$\int_{M_6} C_6 \quad (17)$$

à une cinq-brane M_6.

La membrane est l'objet fondamental que nous allons considérer dans la suite.

C. Membranes ouvertes

Dans un travail avec J. Mourad nous nous sommes intéressés au cas d'une membrane ouverte plongée dans un espace plat à onze dimensions[24]. Ces membranes sont explicitement supersymétriques et décrites géométriquement en terme de super-espace. Celui-ci se caractérise par onze coordonnées bosoniques $X^a, a = 1\dots 11$ et par trente deux coordonnées fermioniques $\theta^\alpha,\ \alpha = 1\dots 32$ correspondant à un spineur de Majorana $\theta = C\bar\theta^T$, C étant la matrice de conjugaison de charge et $\bar\theta = \theta^\dagger\Gamma^0$. Le super-espace a une géometrie définie par le repère mobile

$$E^a = dZ^a - id\bar\theta\Gamma^a\theta,\ E^\alpha = d\theta^\alpha. \quad (18)$$

Plonger une membrane dans le super-espace consiste à se donner une paramétrisation $Z^a(\xi^i)$, $\theta^\alpha(\xi^i)$ en fonction de trois coordonnées bosoniques ξ^i, le tout étant régi par une action

$$S = -T_3[\int_{\Sigma_3}\sqrt{-\tilde g} + \int_{\Sigma_3}\tilde C + \int_{\partial\Sigma_3}\tilde B]. \quad (19)$$

Nous avons appelé T_3 la tension de la membrane. L'action dépend de la métrique induite

$$\tilde g_{ij} = \eta_{ab}\tilde E_i^a\tilde E_j^b \quad (20)$$

où $\tilde E_i^a d\xi^i$ est la restriction de E^a[2] sur le volume d'univers Σ_3 de la membrane. Notons la presence d'un couplage au bord du volume d'univers de la membrane. Comme de plus la supergravité à onze dimensions ne possède pas dans son spectre de deux-forme B, cela suggère que ce couplage intervient du fait de la présence de défauts topologiques dont le spectre admet une deux-forme.

Un ingrédient essentiel pour la consistence de la description de la membrane est l'existence d'une kappa-symétrie sur le volume d'univers de la membrane[22]. Ceci permet de couper le nombre de degrés de liberté fermioniques par deux. La kappa-symétrie peut se formuler avec l'aide du champ de vecteur

$$\kappa = \Delta^\alpha(Z)E_\alpha. \quad (21)$$

La variation kappa est égale à la dérivée de Lie définie par κ. Le paramètre Δ^α doit satisfaire

$$\tilde\Delta = \tilde\Gamma\tilde\Delta \quad (22)$$

où

$$*_3\tilde\Gamma = \frac{1}{3!}E^a\tilde E^b E^c\Gamma_{abc} \quad (23)$$

[2] Les quantités portant un tilde sont toutes induites sur la membrane.

et $*_3$ est la dualité de Hodge sur le volume d'univers. L'action de la membrane ouverte est kappa-invariante pourvu que

$$G = i(\Gamma_{ab})_{\alpha\beta} E^{\alpha} E^{\beta} E^{a} E^{b} \tag{24}$$

défini par $G = dC$ vérifie

$$H|_M = 0 \tag{25}$$

avec $H = C + dB$. On a identifié M avec une sous-variété du super-espace où le bord de la membrane est attaché. On en déduit que

$$G|_M = 0 \tag{26}$$

Cette relation peut être satisfaite en restreignant les spineurs vivant sur M

$$\Gamma\theta = \theta \tag{27}$$

et la matrice Γ est définie par

$$\Gamma = \pm \prod_{i=0}^{d-1} \Gamma^i \tag{28}$$

lorsque la variété M a pour équation $X^a = 0$, $a = d, \ldots 10$. Les spineurs vivant sur M sont des spineurs chiraux, contrairement aux spineurs de l'intérieur. Nous utiliserons cette remarque pour établir la consistence quantique de la théorie.

La condition précédente impose que

$$d = 2, 6, 10. \tag{29}$$

Ainsi nous trouvons que les membranes ouvertes de la M-Théorie peuvent s'attacher à des variétés correspondant à des cordes, des cinq-branes et des hyperplans à dix dimensions. Cette condition restreint aussi le type de supersymétrie conservée, chaque membrane avec bord ne préserve qu'une moitié des supersymétries initiales. Ceci traduit la propriété BPS des membranes.

Intéressons nous au cas $d = 10$, alors la condition sur les spineurs devient

$$\Gamma^{11}\theta = \pm\theta \tag{30}$$

représentant des spineurs chiraux dans la **16** ou la $\bar{\mathbf{16}}$ de $SO(1,9)$. Ceci est particuliérement intéressant lorsque l'espace-temps possède deux bords comme dans la théorie de Horava-Witten. Dans ce cas, on peut choisir les spineurs de bord de même chiralité. La configuration préserve seize supersymétries. On peut aussi choisir des chiralités opposées. La configuration brise toute les supersymétries à la Fabinger-Horava. Ceci est l'analogue des configurations brane-antibrane de la théorie des cordes. Nous reviendrons sur ce mécanisme en dimension cinq.

D. La théorie de Horava-Witten

Nous venons de voir que les membranes de la M-Théorie peuvent s'attacher à des hyperplans dix dimensionnels. Ces hyperplans ne sont rien d'autre que les bords de l'espace-temps de la théorie de Horava-Witten. Cette théorie, limite de couplage fort de la théorie des cordes hétérotique, possède un intérieur onze dimensionnel bordé par deux hyperplans portant une théorie de jauge de groupe de jauge E_8.

Nous allons voir que ce cadre a une justification provenant de l'étude des membranes à bords[24]. Considérons des membranes cylindriques de topologie $\Sigma_2 \times I$ où Σ_2 est une surface bidimensionnelle fermée et $I = [0, \pi]$ plongées dans l'espace temps à deux bords $R^{1,9} \times [0, l]$. Les membranes peuvent soit s'attacher sur le même bord ou sur deux bords différents.

L'action des membranes pour ces configurations se réduit à la forme de Polyakov

$$S = -T_3[\frac{1}{2}\int_{\Sigma_3} (\sqrt{-g}(g^{ij}\tilde{g}_{ij} + \tilde{C}) + \int_{\Sigma_2, \xi^3=\pi} \tilde{B} - \int_{\Sigma_2, \xi^3=0} \tilde{B}] \tag{31}$$

où g est une métrique auxiliaire. Ne retenant que les modes indépendants de ξ dans un développement de type Kaluza-Klein, l'action des membranes à bord devient celle de la corde hétérotique dans sa version de Green-Schwarz[25]. On identifie

$$lT_3 = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{32}$$

et la deux-forme de la théorie hétérotique

$$B' = \frac{1}{l}(B(x^{11} = l) - B(x^{11} = 0)) + i_{E_{11}} C \tag{33}$$

où $i_{E_{11}}$ est la contraction avec le champ de vecteur E_{11}. Ici les deux bords de la membrane sont aux extrémités opposées de la onzième dimension.

Revenons maintenant sur le fait que les spineurs portés par les hyperplans sont chiraux. Ceci implique que les spineurs sur le bord des membranes sont chiraux. Maintenant la présence de fermions chiraux en dimension paire implique une anomalie de reparamétrisation donnée par

$$\delta S = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_2, \xi^3=\pi} X_2^1 + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_2, \xi^3=0} X_2^1 \tag{34}$$

avec

$$dX_3 = -\frac{1}{6\pi}\mathrm{tr}(\mathcal{R}^2) \tag{35}$$

et la variation sous reparametrisation

$$\delta X_3 = dX_2^1 \tag{36}$$

Ici $\mathcal{R}$ est la courbure du bord de la membrane. Ceci correspond à un déficit de charge centrale sur chacun des deux bords $c = -8$. Pour compenser ce défaut de charge centrale on introduit seize fermions ψ de Majorana-Weyl sur chacun des bords. Ces fermions engendrent une algèbre de courant de type E_8. Cette algèbre de courant donne une justification supplémentaire de la présence d'une théorie de jauge E_8 sur chacun des bords de l'espace-temps.

Nous pouvons maintenant considérer le couplage de ces fermions vivant sur les deux bords de la membrane avec un champ de jauge vivant sur chacun des bords de l'espace-temps. Ce couplage intervient dans l'action des fermions bi-dimensionnels ψ

$$\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2}\sqrt{-g}\psi^T(\partial_- + \tilde{A}_-)\psi. \qquad (37)$$

Le champ de jauge $\tilde{A}_-$ est la restriction du champ de jauge A_μ sur le bord de la membrane. Il appartient à la représentation **120** antisymétrique de $SO(16) \subset E_8$ dans la décomposition $\mathbf{248} = \mathbf{120} + \mathbf{128}$.

Nous nous plaçons maintenant dans un fond courbe avec champ de jauge sur le bord. La kappa-symétrie développe une anomalie analogue de celle obtenue pour la corde hétérotique et qui est portée par les bords de la membrane[26]

$$\delta_\kappa S = -\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma_2} i_\kappa\tilde{\omega} \qquad (38)$$

avec

$$\omega = \omega_{3YM} - \omega_{3L} \qquad (39)$$

et

$$d\omega = \mathrm{tr}(F^2) - \mathrm{tr}(R^2). \qquad (40)$$

Nous avons appelé F la deux-forme totale associée aux champs de jauges sur les bords de l'espace temps et R la deux-forme de courbure de l'espace temps. Chaque bord porte la forme $F_{1,2}$ de façon à ce que $\mathrm{tr}(F^2) = \mathrm{tr}(F_1^2) + \mathrm{tr}(F_2^2)$.

Cette anomalie peut être compenser par modification du couplage de la membrane au bord. Posons

$$\omega_i = \omega_{3YM\ i} - \frac{1}{2}\omega_{3L},\ i = 1,2 \qquad (41)$$

sur chacun des deux bords de l'espace-temps, et redéfinissons

$$\begin{aligned} H' &= H + \frac{1}{8\pi T_3}\omega_1,\ x^{11} = l \\ H' &= H - \frac{1}{8\pi T_3}\omega_2,\ x^{11} = 0 \end{aligned} \qquad (42)$$

Utilisant la contrainte $dH' = 0$ sur le bord on en déduit que

$$G|_{x^{11}=l} = \frac{1}{8\pi T_3}(\mathrm{tr}(F_1^2) - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(R^2))) \qquad (43)$$

Ce résultat obtenu dans [24] exprime la condition de bord de Horava-Witten et le fait que les hyperplans bordant l'espace-temps sont des sources pour la quatre-forme de la supergravité à onze dimensions. Comme on le voit la prise en compte de membranes à bord en onze dimensions conduit naturellement à la théorie de Horava-Witten. Dans la section IV nous nous attacherons à décrire quelques propriétés de cette théorie compactifiée sur une variété de Calabi-Yau.

III. BRANES ET SUPERGRAVITÉ À DIX DIMENSIONS

Dans cette section nous allons nous intéresser aux branes vues comme des objets étendues dans un espace dix dimensionnel. Lorsque les configurations sont BPS, celles-ci sont la limite de large couplage des D-branes des théories de cordes IIA et IIB. Nous allons tout d'abord rappeler la structure des solutions BPS ainsi que certaines de leurs propriétés puis nous introduirons la notion de brane non-BPS que nous avons caractérisées avec G. Mandal et Y. Oz[27]. Ces branes ne satisfont plus la relation entre la masse et la charge qui est caractéristique des configurations préservant une moitié des supersymétries. De plus, de part l'existence de singularités nues, c'est à dire que l'on ne peut cacher derrière un horizon, le théoréme de Birkhoff ne s'applique pas. Ainsi il apparait que les solutions non-BPS sont paramétrisées par une famille continue dépendant d'un module c_1 dont l'interprétation physique en terme de condensation de tachyon sera précisée.

A. Branes BPS

Considérons la limite de basse énergie des théories de cordes de type IIA ou IIB. Cette limite est bien décrite par les supergravités de type IIA et IIB en dix dimensions. Ces théories ont une action bosonique qui peut s'écrire dans le repère d'Einstein

$$S = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}(R - \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial^M\phi - \frac{1}{2\ n!}e^{a\phi}F_n^2) \qquad (44)$$

avec

$$a = \frac{(5-n)}{2} \qquad (45)$$

L'action décrit le couplage de la gravitation avec le dilaton et une $(p+1)$-forme C_{p+1}. Suivant la dimensionalité les branes sont couplées magnétiquement ou électriquement. Lorsque l'on considére une p-brane, les charges sont définies comme suit. Pour $p = 0,1,2$, la charge est électrique et le champ de Ramond-Ramond est identifié à $F_{p+2} = dC_{p+1}$. Pour les branes magnétiques on identifie C_{p+1} avec un couplage magnétique $F_{8-p} =$

$e^{(p-3)\phi/2} *_{10} dC_{p+1}$. Dans le cas $p = 3$, le champ est auto-dual avec $F_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(dC_4 + *_{10}dC_4)$.

Une p-brane est caractérisée par les symétries qu'elle préserve. D'une part les symétries globales sont

$$ISO(p,1) \times SO(9-p) \tag{46}$$

correspondant à la symétrie de Poincaré sur le volume d'univers et l'invariance par rotation dans les dimensions supplémentaires. D'autre part on impose l'existence de la supersymétrie, sous la forme de spineurs de Killing. Nous reviendrons sur les spineurs de Killing dans les exemples cinq dimensionnels. Ici nous nous contentons de donner le résultat

$$ds^2 = f^{(p-7)/8} dx^\mu dx_\nu + f^{(p+1)/8}(dr^2 + r^2 d\Omega^2_{8-p}) \tag{47}$$

avec

$$f = 1 + \frac{\mu_0}{r^{7-p}}. \tag{48}$$

dans le repère d'Einstein. De même la $(p+1)$-forme satisfait

$$C_{0\ldots p} = -\eta\frac{1}{2}(f^{-1} - 1) \tag{49}$$

où $\eta = \pm$ définit la charge de la brane. Le dilaton admet la forme

$$e^\phi = f^{(3-p)/4} \tag{50}$$

Seule la trois-brane est non-singulière. La supersymétrie de ces configurations peut se lire sur l'égalité entre la masse et la charge

$$M_{ADM} = Q. \tag{51}$$

La brisure de supersymétrie que nous allons décrire au paragraphe suivant implique que la borne BPS n'est plus saturée. Ceci aura pour conséquence l'apparition d'une instabilité tachyonique.

B. Branes non-BPS

La théorie des cordes de type IIA admet des branes de dimensions $p = 0, 2, 4, 6, 8$ quand la type IIB admet $p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$. Récemment Sen [15] a construit des branes non-supersymétriques pour la théorie IIA de dimensions $p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$ et $p = 0, 2, 4, 6, 8$ pour la théorie IIB. Ces branes sont obtenues à la limite de coincidence pour des paires de brane-antibranes. Chaque brane préservant une moitié de supersymétrie, mais ces supersymétries étant incompatibles, la supersymétrie est complètement brisée. De plus le spectre des cordes ouvertes admet un état tachyonique complexe pour les paires brane-antibrane et réél pour les branes non-BPS. Ce tachyon signale la présence d'une instabilité. En effet la force exercée sur les branes devient non-nulle lorsque la supersymétrie est brisée.

Cette instabilité donne lieu à la condensation du tachyon qui roule le long d'un potentiel avant d'atteindre un minimum tel que

$$V_0 + \tilde{T}_P = 0 \tag{52}$$

pour les branes non-BPS où $\tilde{T}_p$ est la tension des branes non-BPS reliée à la tension des branes BPS par $\tilde{T}_p = \sqrt{2}T_p$. Malheureusement il n'existe pas de description complète de la condensation. Bien que celle-ci ait pour origine le secteur des cordes ouvertes, il est probable que la dualité ouvert-fermé entre amplitudes de cordes permette une description qualitative de la condensation par le secteur fermé.

Cette approche nous amène à considérer des solutions plus générales que les solutions BPS obtenues dans [27, 28]. Celles-ci possèdent un paramètre supplémentaire c_1. Paramétrisant

$$ds^2 = e^{2A(r)} dx^\mu dx_\mu + e^{2B(r)}(dr^2 + r^2 d\Omega^2_{8-p}) \tag{53}$$

et

$$C_{p+1} = e^{\Lambda(r)} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^p \tag{54}$$

on obtient les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{(7-p)(3-p)c_1}{64}h(r) - \frac{7-p}{16}\ln[\cosh(kh) - c_2\sinh(kh)] \\
B(r) &= \frac{1}{7-p}\ln(f_- f_+) + \frac{(p-3)(p+1)c_1}{64}h + \frac{p+1}{16}\ln[\cosh(kh) - c_2\sinh(kh)] \\
\phi(r) &= \frac{(7-p)(p+1)c_1}{16}h(r) - \frac{3-p}{4}\ln[\cosh(kh) - c_2\sinh(kh)] \\
e^{\Lambda(r)} &= -\eta(c_2^2 - 1)^{1/2}\frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh) - c_2\sinh(kh)}.
\end{aligned} \tag{55}$$

On a défini

$$f_\pm = 1 \pm \frac{\mu}{r^{7-p}} \tag{56}$$

et $\mu = r_0^{7-p}$ ainsi que

$$\begin{aligned}
h(r) &= \ln(\frac{f_-(r)}{f_+(r)}) \\
k &= \sqrt{\frac{2(8-p)}{7-p} - \frac{(p+1)(7-p)}{16}c_1^2}
\end{aligned} \tag{57}$$

Le paramètre r_0 donne l'échelle typique de la solution, c_2 est directement relié à la charge de la solution. Ce serait tout si le théorème de Birkhoff s'appliquait. Ici il y a une singularité nue quand $r = r_0$. On trouve un autre paramètre c_1 que nous allons discuter[3].

Considérons la masse ADM de la solution définie par le potentiel Newtonien

$$g_{00} = -1 + \frac{2\kappa_{10-p}^2 M_{ADM}}{(8-p)\omega_{8-p}r^{7-p}} + \ldots \tag{58}$$

avec $\kappa_{10-p}^2 = \kappa_{10}^2/V_p$ où l'on a compactifié les dimensions spatiales de la solution sur un tore de volume V_p. On obtient

$$M_{ADM} = N_p r_0^{7-p}[\frac{3-p}{2}c_1 + 2c_2 k] \tag{59}$$

avec

$$N_p = \frac{(8-p)(7-p)\omega_{8-p}V_p}{16\kappa_{10}^2} \tag{60}$$

et $\omega_p = 2\pi^{(p+1)/2}/\Gamma((p+1)/2)$. De même la charge est donnée par

$$Q = \int_{S^{8-p}} F_{p+2} \tag{61}$$

qui vaut

$$Q = 2\eta N_p r_0^{7-p} k\sqrt{c_2^2 - 1}. \tag{62}$$

La différence de masse ($\eta = 1$)

$$M_{ADM} - Q = N_p r_0^{7-p}(\frac{(3-p)}{2}c_1 + 2k(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 1})) \tag{63}$$

mesure la brisure de supersymétrie.

C. Condensation de tachyon

Les branes BPS sont un cas particulier des branes non-BPS que nous venons de décrire. Il est intéressant de considérer la limite BPS des branes non-BPS. Remarquons tout d'abord que c_1 ne peut etre plus grand que

$$c_{max} = \sqrt{\frac{32(8-p)}{(p+1)(7-p)^2}} \tag{64}$$

correspondant à $k = 0$. Dans un voisinage de ce paramètre défini par

$$\begin{aligned}
r_0^{7-p} &= \epsilon^{1/2}\bar{r}_0^{7-p} \\
k &= \epsilon^{1/2}\bar{k} \\
c_2 &= \frac{\bar{c}_2}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{65}$$

avec $\epsilon \to 0$, la solution se réduit à la solution BPS avec

$$\mu_0 = 2\bar{c}_2\bar{k}\bar{r}_0^{7-p}. \tag{66}$$

Ainsi il existe une infinité de chemins menant aux branes BPS. De plus on passe des branes non-BPS aux branes BPS le long d'un chemin de l'espace des paramètres.

Notons un cas particulier intéressant. Lorsque $c_2^2 = 1$, les solutions sont neutres. Dans ce cas la brane non-BPS se désintègre dans le vide, l'espace de Minkowski. Ceci est obtenu en faisant tendre k vers zéro mais en maintenant la valeur de c_2 fixe. Ceci est bien différent du cas chargé où c_2 varie pendant la désintégration.

[3] Ceci est vrai pour $p \neq -1$, dans ce cas la solution admet une extension à onze dimensions qui n'est autre que la métrique de Schwarzschild[27].

Ayant décrit les branes non-BPS par des solutions statiques, nous ne pouvons espérer une description dynamique de la condensation de tachyon. Au mieux nous pouvons espérer suivre la désintégration comme un chemin dans l'espace des paramètres des solutions. C'est ce que nous allons faire.

Commençons par le point de départ $T = 0$ de la désintégration lorsque que le potentiel $V(T)$ du tachyon T s'annule, c'est à dire que l'énergie de liaison de la brane non-BPS s'annule. Celle-ci peut être évaluée en comparant le potentiel d'interaction entre d'une part une brane BPS et la brane non-BPS, d'autre part une brane BPS et une paire brane-antibrane coincidente. L'énergie de liaison devient[27]

$$E_B = N_p r_0^{7-p} \frac{3-p}{2} c_1 \equiv 0 \tag{67}$$

donc[4]

$$c_1 = 0 \tag{68}$$

correspond à la valeur du tachyon $T = 0$ Nous pouvons ainsi identifié l'intervalle $c_1 \in [0, c_{max}]$ avec la variation du tachyon entre le sommet du potentiel tachyonique à $T = 0$ et son minimum.

Bien sur ce résultat est très cru, néanmoins on voit que la supergravité permet de paramétriser qualitativement le comportement de branes non-BPS de la théorie des cordes.

D. Force inter-brane

Nous avons plusieurs fois mentionné le fait que des branes placées dans une situation non-BPS subissent une force qui déstabilise la configuration. Ici nous allons illustrer ce fait par un calcul explicite[29] lorsque la distance inter-brane est grande devant l'échelle des cordes. Dans ce régime, on peut évaluer le potentiel d'interaction par un calcul de supergravité. En effet, l'interaction entre branes peut être vue comme provenant de l'échange de modes de cordes ouvertes attachées aux deux branes extrémités. Le calcul à l'ordre d'une boucle pour les cordes ouvertes est lié par dualité ouvert-fermé à un calcul à l'ordre des arbres pour la corde fermée. Maintenant pour des branes très éloignées la contributions dominante provient des modes de masse nulle, c'est à dire des modes de supergravité.

Considérons maintenant le cas d'une brane placée dans le voisinage d'une brane non-BPS. Le potentiel d'interaction peut se calculer en évaluant l'action de la brane dans le fond créé par la brane non-BPS. L'action effective d'une brane est l'action de Dirac-Born-Infeld

$$S_{brane} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi}\sqrt{-\gamma} - T_p \int C_{p+1}. \tag{69}$$

Ici $\xi^a,\ a = 0 \dots p$ est une paramétrisation de la brane, ϕ le dilaton sur la brane et

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^a} \tag{70}$$

est la métrique induite sur la brane. On se place dans le cas où le mouvement de la brane est paramétré par les coordonnées

$$\xi^{\underline{a}} = X^{\underline{a}},\ \underline{a} = 0 \dots p \tag{71}$$

et donc $X^{\overline{a}} = X^{\overline{a}}(\xi^{\underline{a}}), \overline{a} = p+1 \dots 10$. Pour simplifier l'écriture nous nous intéressons à r uniquement et au cas des trois-branes. On obtient alors

$$S_{brane} = -T_3 \int d^4\xi (\frac{1}{2} Z(r)(\partial r)^2 - V(r)) \tag{72}$$

l'action d'un champ scalaire r pour un modèle sigma-non-linéaire

$$Z(r) = T_3 e^{2A+2B} \tag{73}$$

de potentiel

$$V(r) = T_3(e^{4A} - e^{\Lambda}). \tag{74}$$

Dans le cas supersymétrique de deux branes BPS ce potentiel s'annule confirmant ainsi l'absence de force entre branes BPS. Dans le cas de l'interaction d'une brane BPS et d'une brane non-BPS le potentiel est non-nul. Considérons le cas où la brane non-BPS est neutre on trouve alors[29]

$$V(r) = T_3(1 - \frac{2kr_0^4}{r^4}) \tag{75}$$

impliquant une force en $1/r^5$ entre ces branes. Notons que lors de la désintégration de la brane non-BPS neutre en le vide représenté par l'espace de Minkowski, le paramètre k tend vers zéro impliquant que l'intensité de l'interaction est d'autant plus faible que la brane non-BPS est proche de devenir BPS. Enfin signalons le réél intérêt phénoménologique de ce type de potentiels. En effet, on peut imaginer que l'inflation cosmologique a pour origine une phase primordiale où le rôle de l'inflation est joué par la distance entre branes r.

IV. MODÈLES À CINQ DIMENSIONS

Nous avons présenté la construction de branes à dix et onze dimensions. Pour obtenir des modèles de physique des particules et de cosmologie réalistes on se doit de compactifier certaines de ces dimensions pour atteindre

[4] Nous extrapolons le résultat au cas $p = 3$ bien que le résultat soit indépendant de c_1 pour les trois-branes.

nos quatre dimensions d'espace-temps. Traditionnellement en corde hétérotique, la compactification de dix vers quatre dimensions se fait sur une variété de Calabi-Yau, ou sa version dégénérée sous la forme d'orbifolds. Ceci permet de préserver une des supersymétries à quatre dimensions. La théorie de Horava-Witten permet d'élargir ce cadre et de considérer des modèles à cinq dimensions, après compactification sur une variété de Calabi-Yau, comprenant deux bords quadri-dimensionnels[5]. Le modèle de Randall-Sundrum est le plus simple exemple de ce type[7]. Ici nous allons considérer des modèles cinq-dimensionnels possédant $N = 2$, c'est à dire huit supersymétries dans l'intérieur[16–18]. Puis nous utiliserons divers mécanismes pour briser la supersymétrie. Enfin ceci nous amènera à considérer certains modèles cosmologiques.

A. Supersymétriser le modèle de Randall-Sundrum

Le modèle de Randall-Sundrum est défini sur une orbifold $R^{1,3} \times S^1/Z_2$ correspondant à une dimension supplémentaire sous la forme d'un intervalle de taille πR. Dans l'intérieur se propage la gravité. Sur le bord, aucun champ de matière ne vit. Une tension est affectée à chacune des deux branes composant les deux bords de l'espace-temps. Le Lagrangien devient

$$S = \frac{1}{2\kappa_5^2}\int d^5x(R + 12k^2) - \frac{6}{\kappa_5^2}\int d^5xk(\delta_0 - \delta_{\pi R}) \quad (76)$$

avec $\Lambda = -12k^2$ pour constante cosmologique et les tensions $\lambda_\pm = \pm 6k$. Notons que les tensions et la constante cosmologique sont reliées par

$$\Lambda = -3\lambda_\pm^2. \quad (77)$$

Cette ajustement fin est imposé pour obtenir des solutions statiques et conformément plates des équations du mouvement

$$ds^2 = dx_5^2 + a^2(x_5)dx^\mu dx_\mu \quad (78)$$

sous la forme de

$$a(x_5) = e^{-kx_5}. \quad (79)$$

Il est à noter que les conditions aux bords imposées par la présence des deux branes extrémité sont automatiquement satisfaites, quelles que soient les positions des deux branes, c'est à dire que la distance inter-brane n'est pas fixe. C'est un module appelé radion. Les contraintes physiques sur la présence d'un tel champ scalaire à basse énergie émane essentiellement des contraintes sur les théories tenseur-scalaire en gravité. Nous reviendrons sur celles-ci plus avant dans notre discussion.

Plaçons maintenant de la matière sur la brane de tension négative. La décroissance du facteur d'échelle a le long de la cinquième dimension induit une suppression exponentielle de l'échelle d'énergie sur la deuxième brane par rapport à l'échelle d'énergie de la première brane. En l'absence d'un modèle réaliste de stabilisation pour le radion, cette suggestion pour justifier deux échelles disparates comme l'échelle électrofaible et la masse de Planck manque de fondement. Néanmoins ceci offre un paradigme commode et une alternative aux modèles usuels de compactification.

Revenons à la discussion de l'ajustement fin des paramètres du modèle. Celui-ci peut être justifié par la supersymétrie. La supersymétrie que nous allons utiliser sera déduite de la supergravité à cinq dimensions[30]. Celle-ci possède huit supersymétries, ou $N = 2$ en termes quadri-dimensionnels. En particulier le graviton possède deux partenaires, les gravitinos, eux-mêmes associés au graviphoton. Le multiplet gravitationnel comprend un vielbein e_a^m, deux gravitinos ψ_a^A et un graviphoton A_a avec $a = 1\ldots 5$ et $A = 1, 2$. Les spineurs sont Majorana-symplectiques c'est à dire que $\psi^A = (\psi^C)^A$ avec $(\psi^C)^A = (C\Gamma^0)^{-1}\epsilon^{AB}(\psi^B)^*$. On définit le conjugué par $\bar\psi = \psi^T C$. La symétrie Z_2 agit sur les champs bosoniques. Les champs pairs sont (e_μ^m, e_5^5, A_5) où $\mu = 1\ldots 4$. Les champs impairs sont e_5^i, e_μ^5, A_μ où $i = 1,\ldots 4$.

L'action sur les gravitinos est plus subtil et dépend d'une matrice arbitraire $\mathcal{Q}_B^A$ qui peut se réexprimer en fonction des matrices de Pauli $\mathcal{Q} = Q.\sigma$ avec $Q^2 = 1$. On a ainsi les conditions [19]

$$\psi_\mu^A(-x_5) = \Gamma_5\mathcal{Q}_B^A\psi_\mu^B(x_5),\ \psi_5^A(-x_5) = -\Gamma_5\mathcal{Q}_B^A\psi_5^B(x_5). \quad (80)$$

De la même façon autour du deuxième point fixe l'action peut se définir par

$$\psi_\mu^A(\pi R - x_5) = \alpha\Gamma_5\mathcal{Q}_B^A\psi_\mu^B(\pi R + x_5),\ \psi_\mu^A(\pi R - x_5) = -\alpha\Gamma_5\mathcal{Q}_B^A\psi_\mu^B(x_5 + \pi R). \quad (81)$$

Nous considèrerons deux cas $\alpha = \pm 1$[19]. Quand $\alpha = 1$ nous trouverons le modèle de Randall-Sundrum supersymétrique. Quand $\alpha = -1$, la supersymétrie sera brisée par retournement de chiralité entre les deux bords de l'espace-temps. Ceci conduira à une instabilité gravitationnel que nous analyserons en détail.

La supergravité menant au modèle de Randall-Sundrum est jaugé. Ceci veut dire que l'un des sous-groupes $U(1)_R \subset SU(2)$ de la symétrie globale agissant sur les gravitinos devient locale. Dans ce cas le graviphoton permet de définir une dérivée covariante dépendant d'un prépotential $\mathcal{P}^A_B$.

$$D_a\psi^A_b \to D_a\psi^A_b - 2g\mathcal{P}^A_B A_a\psi^B_b \quad (82)$$

avec D_a la dérivée covariante contenant la connection de spin. L'invariance du Lagrangien de supergravité jaugé est possible pourvu que

$$g\mathcal{P} = g_1\epsilon(x_5)\mathcal{R} + g_2\mathcal{S}. \quad (83)$$

La fonction $\epsilon(x_5)$ est impaire et vaut un dans l'intérieur. De plus en posant $\mathcal{R} = R.i\sigma$ et $\mathcal{S} = S.i\sigma$ on obtient

$$\mathcal{R} = \sqrt{R^2}i\mathcal{Q},\ \mathcal{S} = (Q \wedge U).i\sigma \quad (84)$$

pour un vecteur U arbitraire. Le fait de jauger la symétrie R conduit à l'apparition d'un potentiel dans l'intérieur

$$V = \frac{8}{3}\mathrm{tr}(\mathcal{P}^2) \quad (85)$$

correspondant à une constante cosmologique

$$\Lambda = -\frac{16}{3}(g_1^2R^2 + g_2S^2). \quad (86)$$

Notons que nous avons obtenu naturellement une constante cosmologique négative dans l'intérieur.

Pour l'instant nous n'avons pas considéré les deux bords de l'espace-temps. Ceux-ci sont nécessaires pour préserver la supersymétrie. En effet la présence de la fonction $\epsilon(x_5)$ dans le prépotentiel induit une discontinuité dans la variation supersymétrique du terme cinétique des gravitinos

$$\frac{1}{2\kappa_5^2}\int d^5x\sqrt{-g}\bar{\psi_a}^A\gamma^{abc}D_b\psi_{Ac} \quad (87)$$

lorsque

$$-i\frac{\sqrt{2}}{3}\gamma_a g\mathcal{P}^A_B\epsilon^B \subset \delta\psi^A_a \quad (88)$$

qui induit une variation du Lagrangien

$$\delta\mathcal{L} = -2i\sqrt{2}g_1(\delta_0 - \delta_{\pi R})e_4\mathcal{R}^A_B\bar{\psi}_{\mu A}\gamma^\mu\gamma^5\epsilon^B. \quad (89)$$

On peut maintenant utiliser les conditions aux bords pour les fermions que l'on déduit de l'action de la symétrie Z_2 sur les gravitinos

$$\begin{aligned}\gamma_5\mathcal{R}^A_B\epsilon^B(0) &= i\sqrt{R^2}\epsilon^A(0)\\ \gamma_5\mathcal{R}^A_B\epsilon^B(\pi R) &= i\alpha\sqrt{R^2}\epsilon^A(\pi R)\end{aligned} \quad (90)$$

Il est important de noter que ces conditions de bord sont cruciales et déterminent la forme de l'action portée par les deux branes aux extrémités de l'intervalle formant la cinquième dimension. En particulier, le choix du signe α détermine le signe de la tension de la seconde brane. Lorsque le signe est + la tension de la seconde brane est négative alors qu'elle devient positive lorsque $\alpha = -1$. En effet on peu compenser la variation du Lagrangien

$$\delta\mathcal{L} = 2\sqrt{2}g_1\sqrt{R^2}e_4\bar{\psi}_{\mu A}\gamma^\mu\epsilon^A(\delta_0 - \alpha\delta_{\pi R}) \quad (91)$$

en introduisant un Lagrangien sur le bord

$$\mathcal{L}_T = -4\sqrt{2}g_1\sqrt{R^2}e_4(\delta_0 - \alpha\delta_{\pi R}) \quad (92)$$

Ceci correspond à l'action pour la gravité seulement[19]

$$S = \frac{1}{\kappa_5^2}\left(\int d^5x\sqrt{-g_5}\left(\frac{1}{2}R + 6k^2\right) - 6\int d^4x\sqrt{-g_4}kT(\delta_0 - \alpha\delta_{\pi R})\right). \quad (93)$$

On reconnait l'action du modèle de Randall-Sundrum lorsque $\alpha = 1$ et $S = 0$. Dans les autres cas on identifie

$$k = \sqrt{\frac{8}{9}(g_1^2R^2 + g_2^2S^2)} \quad (94)$$

et le facteur

$$T = \frac{g_1\sqrt{R^2}}{\sqrt{g_1^2R^2 + g_2^2S^2}}. \quad (95)$$

L'ajustement fin de Randall-Sundrum correspond à $S = 0$. Les configurations classiques associées sont des portions de AdS_5 bordées par des branes plates.

Il est à noter que le Lagrangien est invariant sous la supersymétrie $N = 2$ déduite de la supergravité à cinq dimensions. Néanmoins, dés que $S \neq 0$ ou $\alpha = -1$, la supersymétrie est spontanément brisée par le vide, c'est à dire les configurations classiques qui sont solutions des équations du mouvement. Pour voir ceci, on peut considérer les spineurs de Killing. Une configuration classique préserve une partie des supersymétries pourvu que

$$\delta\psi^A_a = 0 \quad (96)$$

admette des solutions $\epsilon^A(x_5)$ non-triviales. On montre que ceci n'est vrai que si $S = 0$ et $\alpha = 1$. Considérons le cas $S = 0$ directement. Un calcul similaire à celui pour $S \neq 0$ sera présenté plus loin. Il est commode d'introduire les opérateurs de projection

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2}(1\delta^A_B \pm \gamma_5 \mathcal{Q}^A_B) \tag{97}$$

qui séparent les spineurs ϵ en deux composantes

$$\epsilon_\pm = \Pi_\pm \epsilon. \tag{98}$$

Les conditions aux bords sur les spineurs sont spécifiées par les opérateurs

$$W_0 = 1\delta^A_B - \gamma_5 \mathcal{Q}^A_B,\ W_{\pi R} = 1\delta^A_B - \alpha\gamma_5 \mathcal{Q}^A_B \tag{99}$$

de façon à ce que les spineurs satisfassent

$$W^B_{0A}\epsilon^A(0) = 0,\ W^B_{\pi R\ A}\epsilon^A(\pi R) = 0. \tag{100}$$

Si $\alpha = 1$, on a $W_0 = W_{\pi R}$, ce qui implique qu'une seule condition au bord restreint le type de supersymétrie. Si $\alpha = -1$ et en utilisant le fait que $W_0\epsilon_+ = 0$ et $W_{\pi R}\epsilon_- = 0$ on trouve que les deux bords projettent sur deux chiralités différentes. Ces deux conditions se trouvent incompatibles avec la condition des spineurs de Killing. En effet, l'équation des spineurs de Killing s'écrit

$$\frac{a'}{a}\gamma_5\epsilon^A + \frac{2\sqrt{2}}{3}g_1\epsilon(x_5)\sqrt{R^2}\mathcal{Q}^A_B\epsilon^B = 0. \tag{101}$$

Appliquons l'opérateur Π_+ à cette équation. On obtient l'alternative suivante

$$\frac{a'}{a} + \frac{2\sqrt{2}}{3}g_1\epsilon(x_5)\sqrt{R^2} = 0 \text{ ou } \epsilon_+ = 0 \tag{102}$$

La première relation implique que le facteur d'échelle admet des discontinuités

$$[\frac{a'}{a}]_0 = -2k,\ [\frac{a'}{a}]_{\pi R} = 2k \tag{103}$$

quand les equations du mouvement imposent que

$$[\frac{a'}{a}]_{\pi R} = -2k. \tag{104}$$

Ceci implique que

$$\epsilon_+ = 0. \tag{105}$$

De même en utilisant Π_- on trouve que

$$\epsilon_- = 0. \tag{106}$$

Lorsque $\alpha = +1$, on obtient que ϵ_+ n'est pas contraint, donc une moitié des supersymetries initiales est préservée. C'est la condition BPS pour les branes supersymétriques. Lorsque $\alpha = -1$, les deux branes sont supersymétriques mais la configuration est de type brane-antibrane qui brise toutes les supersymétries.

B. Branes et rotation de branes

Le cas où $S \neq 0$ mérite qu'on le détaille car il offre un nouveau mécanisme de brisure de supersymétrie. Nous allons voir que les configurations solutions des équations du mouvement sont telles que les deux bords sont inclinés. C'est l'équivalent à cinq dimensions des branes avec angles de la théorie des cordes[19].

Le cas $S \neq 0$ diffère du cas $S = 0$ par l'apparition du facteur $T < 1$ dans l'action des deux branes. En conséquence les équations du mouvement dans l'intérieur ne sont pas modifiées. Nous allons montrer que l'on peut déformer les solutions obtenues dans l'intérieur pour accomoder les conditions de bord modifiées par le facteur T. Pour ce faire il est commode de passer dans la jauge conforme où la métrique devient

$$ds^2 = a^2_{BPS}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^{nu} + dy^2) \tag{107}$$

avec

$$a_{BPS} = \frac{1}{ky}. \tag{108}$$

Ce n'est rien d'autre qu'une réécriture de la métrique de AdS_5. Dans cette jauge les equations de bord sont données par

$$\frac{\partial_n a}{a^2}|_{bord} = -kT \tag{109}$$

où ∂_n est la dérivée normale, ici $\partial_n = \partial_y$. Il est utile d'agir avec une rotation sur les coordonnées de l'intérieur. C'est à dire que

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= \frac{x^i - h^i y}{\sqrt{1+h^2}} \\ \tilde{y} &= \frac{y + h^i x_i}{\sqrt{1+h^2}} \end{aligned} \tag{110}$$

avec $h = \sqrt{h.h}$. Dans ce système de coordonnées la métrique devient

$$ds^2 = a^2_{BPS}(\frac{\tilde{y} - h^i\tilde{x}_i}{\sqrt{1+h^2}})(\eta_{\mu\nu}d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu + d\tilde{y}^2). \tag{111}$$

Nous allons voir que cette métrique est solution des équations de bord. En effet, posons

$$a(\tilde{x}^i, \tilde{y}) = a^2_{BPS}(\frac{\tilde{y} - h^i\tilde{x}_i}{\sqrt{1+h^2}}). \tag{112}$$

La condition de bord avec $\partial_n = \partial_{\tilde{y}}$ devient ici

$$\frac{\partial_{\tilde{y}} a}{a^2}|_{bord} = -\frac{k}{\sqrt{1+h^2}} \equiv -kT \tag{113}$$

qui est satisfaite pourvu que

$$\sqrt{1+h^2}T = 1 \tag{114}$$

Ceci fixe la norme du vecteur h^i mais ne fixe pas sa direction. On obtient donc une famille de solutions.

Il est possible de rétablir les coordonnées initiales à l'intérieur au prix d'une rotation des deux branes extrémités. Dans le cas où h^i pointe dans la direction x^3. Dans ce cas l'angle de rotation des deux branes est donné par

$$\tan\theta = \pm \frac{g_2\sqrt{S^2}}{g_1\sqrt{R^2}} \tag{115}$$

Ainsi nous trouvons que l'angle de rotation des branes est directement relié à S. Il est une mesure de la brisure de supersymétrie.

C. Brisure de supersymétrie et retournement de chiralité

Ici nous posons $S = 0$ mais prenons $\alpha = -1$ impliquant que la supersymétrie est complètement brisée. Nous allons montrer que cette absence de supersymétrie conduit à déstabiliser les branes et induire un mouvement. De plus, nous allons voir que la géometrie de l'intérieur, bien qu'isométrique à AdS_5 admet une structure globale différente. En particulier, il existe un horizon entre les branes empéchant tout contact causal entre les deux branes de tensions égales et positives.

Considérons l'espace hyperbolique donné dans une moitié de l'espace temps par la métrique[31]

$$ds^2 = -(\frac{r^2}{l^2} - 1)dt^2 + \frac{1}{\frac{r^2}{l^2} - 1}dr^2 + r^2 d\Sigma^2 \tag{116}$$

où $d\Sigma$ est la metrique d'un espace hyperbolique compact. Les deux portions d'espace-temps sont connectés par un pont de Einstein-Rosen situé à $r = l$ de topologie Σ. Cette variété est non-singulière. Le pont de Einstein-Rosen est un horizon que nous examinerons plus avant.

On peut placer chacune des deux branes dans un des demi-espaces de chaque coté de l'horizon. L'équation du mouvement de la brane est obtenu par les conditions de jonction de Israel. Considérons la normale n à la brane que l'on normalise par $n^2 = 1$. Il est utile dans tous les modèles de branes de s'intéresser à la courbure extrinsèque de la brane vue comme une sous-variété de l'espace-temps

$$K_{ab} = h_a^c h_b^d D_c n_d \tag{117}$$

où

$$h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b \tag{118}$$

est la métrique induite sur la brane. Dans le cas d'un système de coordonnées normal Gaussien où la métrique prend la forme

$$ds^2 = dz^2 + g_{ij}dx^i dx^j \tag{119}$$

on a

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\partial_z g_{ij}. \tag{120}$$

Les équations de jonction d'Israel donnent

$$[K_{ab} - h_{ab}K] = T_{ab} \tag{121}$$

où $[A]$ est le saut de A au travers de la brane et T_{ab} le tenseur d'énergie impulsion sur la brane. Ici le tenseur d'énergie impulsion de la brane est proportionnel à la métrique induite et l'on obtient[47]

$$(\frac{r^2}{l^2} - 1 + \dot{r}^2)^{1/2} = \frac{r}{l} \tag{122}$$

en fonction du temps propre sur la brane τ défini par

$$-(\frac{r^2}{l^2} - 1)\dot{t}^2 + \frac{1}{\frac{r^2}{l^2} - 1}\dot{r}^2 = -1. \tag{123}$$

On obtient alors

$$r(\tau) = \pm\tau + r_0. \tag{124}$$

La brane converge vers l'horizon ou s'en éloigne. Au cas où elle converge, ceci prend un temps fini en temps propre mais un temps infini pour un observateur à l'infini. Si nous nous plaçons dans les coordonnées du cône de lumière

$$ds^2 = -(\text{cotanh}^2\frac{u}{l} - 1)(dt^2 - du^2) + l^2\text{cotanh}^2\frac{u}{l}d\Sigma^2 \tag{125}$$

la brane suit une trajectoire telle que

$$\frac{du}{dt} = \pm\frac{l}{r} \tag{126}$$

atteignant la vitesse de la lumière à l'horizon.

On peut se demander comment un observateur sur la brane se rend compte de la brisure de supersymétrie induite par la brane cachée derrière l'horizon? En fait, l'horizon est un horizon de Rindler avec une température de

$$T = \frac{1}{2\pi l}. \tag{127}$$

Cette température est aussi reliée à la température vue par un observateur sur la brane. Ceci peut se montrer en comparant le vide de l'intérieur à celui de la brane. On trouve que le vide de l'intérieur correspond à un bain thermique de particules, ici les gravitons. Ainsi la brisure de supersymétrie par retournement de chiralité se reflète-t-elle en une brisure branaire de supersymétrie due à une température non-nulle sur la brane. Ce mécanisme de brisure fait l'objet d'une étude en cours.

D. Théorie de Horava-Witten

Nous allons maintenant commencer notre étude des modèles à cinq dimensions possèdant des champs scalaires dans l'intérieur. Pour ce faire, nous allons utiliser le modèle de Horava-Witten compactifié sur une variété de Calabi-Yau comme premier exemple[5].

Bien que la supergravité à onze dimensions avec bord ne soit pas complètement construite, il est possible de décrire le résultat de la compactification en terme de supergravité $N = 2$ à cinq dimensions. En particulier la compactification sur une variété de nombres de Hodge $h^{1,1}$ et $h^{2,1}$ conduit à une supergravité avec $h^{1,1} - 1$ multiplets vectoriels et $h^{2,1} + 1$ hypermultiplets. Il existe toujours un hypermultiplet dont un des quatre champ scalaires rééls est le volume $\mathcal{V}$ de la variété de Calabi-Yau. Ce multiplet est appelé le multiplet universel. Dans la suite nous ne nous préoccuperons que des multiplets vectoriels et de l'hypermultiplet universel.

Après compactification, les deux hyperplans de Horava-Witten deviennent les deux bords de l'espace-temps. Notons que comme dans le modèle de Randall-Sundrum, la cinquième dimension est un orbifold, c'est à dire un intervalle ici. Une nouveauté consiste à introduire des cinq-branes dans l'intérieur qui après compactification sur une surface bidimensionnelle Σ de la variété de compactification deviennent des hyperplans parallèles aux bords de l'espace-temps. On définit la classe fondamentale des cinq-branes M_5 par

$$\int_{M_5} f = \int_{M_{11}} f \wedge \delta_{M_5} \tag{128}$$

où M_{11} est l'espace-temps à onze dimensions. La configuration satisfait

$$\delta_{M_5} = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_0^i} dx_5 \wedge \delta_{\Sigma_i}. \tag{129}$$

Les différentes composantes connexes de la surface

$$\Sigma = \cup_{i=1}^{N} \Sigma_i \tag{130}$$

sont placées à $x_5 = x_0^i$ le long de la cinquième dimension. Bien sur, lorsque la configuration est BPS en un sens que l'on précisera, la force exercée sur chacune des cinq-branes s'annule. Les positions deviennent des modules de la théorie.

Revenons maintenant sur le fait que la configuration est compact dans sept de ses dimensions. En particulier nous devons tenir compte du fait que dans un espace compact la charge totale doit s'annuler. Ici les différents objets, les deux bords et les cinq-branes sont chargés magnétiquement conduisant à l'équation de Bianchi

$$dG = 4\sqrt{2}(\frac{\kappa_{11}^2}{4\pi})^{2/3}[\delta_{M_5} - \delta_0 dx_5 \wedge J_1 - \delta_{\pi R} dx_5 \wedge J_2]. \tag{131}$$

On a dénoté les courants de bord

$$J_i = \frac{1}{16\pi^2}(\mathrm{tr}(F_i \wedge F_i) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(R \wedge R)). \tag{132}$$

On reconnait là les contributions à G que l'on avait identifiées à partir de la théorie des membranes ouvertes. Dans la suite nous considérerons que $F_2 = 0$ sur le second bord de l'espace-temps. Utilisant le fait que

$$\int dG = 0 \tag{133}$$

on trouve la condition topologique

$$\delta_\Sigma = \frac{1}{16\pi^2}(\mathrm{tr}(F^1 \wedge F^1) + \mathrm{tr}(F^2 \wedge F^2) - \mathrm{tr}(R \wedge R)). \tag{134}$$

La géométrie algébrique nous apprend que les deuxièmes classes de Chern des fibrés de jauge et de l'espace tangent à la variété de Calabi-Yau

$$\begin{aligned} c_2(V^i) &= \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{tr}(F^i \wedge F^i) \\ c_2(TM_{11}) &= \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{tr}(R \wedge R) \end{aligned} \tag{135}$$

sont des classes algébriques et entières lorsque les fibrés de jauge sont holomorphes et la variété de Calabi-Yau. C'est le cas lorsque la compactification ne brise pas la supersymétrie et que le choix de la théorie de jauge est supersymétrique également. On peut développer les deux classes de Chern comme somme à coefficients entiers de classes fondamentales de surfaces de Riemann (donc holomorphes). Ceci permet d'obtenir, une fois la donnée des fibrés de jauge et de la variété de Calabi-Yau,

$$\delta_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{\Sigma_i} \tag{136}$$

où les a_i sont des entiers. Le cas BPS que nous avons présenté jusqu'à présent apparait lorsque tous les

$$a_i \geq 0. \tag{137}$$

Pour simplifier la présentation on peut considérer que toutes les surfaces de Riemann ont une multiplicité $a_i = 1$.

Décrivons maintenant la théorie dans le cas BPS. Les champs de basse énergie sont obtenues à partir des déformations de la forme de Kahler

$$\omega = t^I \omega_I \tag{138}$$

où les ω_I forment une base de $H^{1,1}$. Le champ identifié avec le volume de compactification est donné par

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\int_{CY} \omega \wedge \omega \wedge \omega. \tag{139}$$

On définit les champs

$$X^I = \mathcal{V}^{-1/3} t^I \tag{140}$$

de façon à ce que

$$C_{IJK} X^I X^J X^K = 6. \tag{141}$$

Ceci définit $h^{1,1} - 1$ champs scalaires qui appartiennent à des multiplets vectoriels. La forme d'intersection

$$C_{IJK} = \int_{CY} \omega_I \wedge \omega_J \wedge \omega_K \tag{142}$$

permet de caractériser le modèle. Ici elle permet de calculer la métrique du modèle sigma non-linéaire qui régit la dynamique des champs scalaires

$$G_{IJ} = -\frac{1}{2} C_{IJK} X^K + \frac{1}{8} (C_{ILM} X^L X^M)(C_{JPQ} X^P X^Q) \tag{143}$$

Le Lagrangien de l'intérieur devient alors dans le repère de Einstein $ds_E^2 = \mathcal{V}^{2/3} ds_{str}^2$[5]

$$S = -\frac{1}{2\kappa_{11}^2} \int d^5x \sqrt{-g_E^{(5)}} (R + G_{IJ} \partial_\mu X^I \partial^\mu X^J - \frac{1}{2\mathcal{V}^2} (\partial \mathcal{V})^2 - \frac{1}{2\mathcal{V}^2} \alpha_I^i \alpha_J^i G^{IJ}). \tag{144}$$

Cette action contient un terme de potentiel qui dépend des charges magnétiques portées par les différentes branes. On identifie d'abord une base de quatre-cycles C_I duaux des deux-formes ω_I. Les charges sont alors

$$\alpha_I^i = \sqrt{2} \epsilon_S \int_{C_I} \sum_{j=0}^{i} \delta_{\Sigma_j}. \tag{145}$$

On a posé $\delta_{\Sigma_0} = -J^1$. Chaque brane porte une charge $[\alpha_I^i] = \alpha_I^i - \alpha_I^{i-1}$. L'action sur le bord gauche de l'intervalle est donnée par

$$S_0 = \frac{\sqrt{2}}{\kappa_5^2} \int d^4x \sqrt{-g_E^{(4)}} \frac{\alpha_I^0 X^I}{\mathcal{V}} \tag{146}$$

et celles de cinq-branes

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_5^2} \int d^4x \sqrt{-g_E^{(4)}} \frac{[\alpha_I^i] X^I}{\mathcal{V}}. \tag{147}$$

Notons le fait que l'action sur le bord de l'espace-temps possède un facteur deux supplémentaire par rapport à l'action des cinq-branes, ceci est compatible avec la symétrie Z_2. Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions classiques des équations du mouvement.

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme d'équations différentielles du premier ordre. C'est une des caractéristiques des configurations supersymétriques. Nous verrons que cela provient des équations sur les spineurs de Killing lorsque nous détaillerons la structure de la supergravité singulière. Posant

$$ds^2 = e^{2A} dx^2 + dx_5^2, \tag{148}$$

celles-ci s'écrivent[32]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dx_5} &= \sqrt{2} (\alpha^i . X) \\ \frac{dA}{dx_5} &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{(\alpha^i . X)}{\mathcal{V}} \\ \frac{dX_I}{dx_5} &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathcal{V}} (\alpha_I^i - \frac{2}{3} (\alpha^i . X) X_I) \end{aligned} \tag{149}$$

dans l'intervalle entre la i-éme et la (i+1)-éme brane. Les conditions de bord sont

$$\begin{aligned} [\frac{d\mathcal{V}}{dx_5}]_{x_0^i} &= \sqrt{2} ([\alpha^i] . X) \\ [\frac{dA}{dx_5}]_{x_0^i} &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{([\alpha^i] . X)}{\mathcal{V}} |_{x_0^i} \\ [\frac{dX_I}{dx_5}]_{x_0^i} &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathcal{V}} ([\alpha_I^i] - \frac{2}{3} ([\alpha^i] . X) X_I) |_{x_0^i} \end{aligned} \tag{150}$$

pour les cinq-branes et

$$\begin{aligned} [\frac{d\mathcal{V}}{dx_5}]_0 &= \sqrt{2} (\alpha^0 . X) |_0 \\ [\frac{dA}{dx_5}]_0 &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{(\alpha^i . X)}{\mathcal{V}} |_0 \\ [\frac{dX_I}{dx_5}]_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathcal{V}} (\alpha_I^i - \frac{2}{3} (\alpha^i . X) X_I) |_0 \end{aligned} \tag{151}$$

à l'origine. Il est évident sur ces expressions que les conditions de bord sont automatiquement satisfaites par les solutions des équations BPS.

Les solutions peuvent être obtenues de façon implicite par les contraintes

$$C_{IJK}t^Jt^K = 2\sqrt{2}\mathcal{V}^{1/3}\alpha_I^i y + D_I \tag{152}$$

où D_I est une constante d'integration et $dy = \mathcal{V}^{-2/3}dx_5$. Cette équation détermine t^I. Le volume est alors donné par

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}C_{IJK}t^It^Jt^K \tag{153}$$

et la métrique[5]

$$ds^2 = \mathcal{V}^{1/3}dx^2 + \mathcal{V}^{4/3}dy^2. \tag{154}$$

Nous voyons que les conditions de bord ne conduisent à aucune restriction sur la position des cinq-branes.

Considérons maintenant le cas non-BPS quand la supersymétrie est brisée topologiquement[32]. Revenons pour cela à la détermination de la surface Σ. Il est un cas où la surface déterminée par l'annulation de la charge magnétique totale ne permet pas de saturer une borne BPS. Supposons que les entiers a_i ne sont pas tous positifs. Une classe de ce type est dite non-effective. On peut la décomposer en une différence de deux classes effectives

$$\delta_\Sigma = [A] - [B] \tag{155}$$

correspondant à une cinq-brane enroulée autour de la surface de Riemann A et une anti-cinq-brane enroulée autour de la surface de Riemann B. Supposons que A et B sont séparées le long de la cinquième dimension. Comme on l'a vu dans le cas du modèle de Randall-Sundrum supersymétrique, cela conduit à une instabilité et à la collision entre la brane et l'antibrane ou la collision de l'anti-brane avec un des bords.

Plaçons nous dans le cas où la brane et l'anti-brane coincident. De ce fait elles forment l'analogue d'une brane non-BPS[5]. Cette brane peut en principe se désintégrer vers une configuration BPS. Ceci suivrait le même chemin que la désintégration d'une brane non-BPS en théorie des cordes. En effet, on peut restaurer la supersymétrie en déformant la variété de Calabi-Yau de façon à ce que la classe de Σ redevienne effective. Cela implique que certains modules décrivant la géométrie de la variété de compactification prennent une vev. Ne pouvant décrire ce phénomène de manière explicite nous allons montrer qu'un autre problème tout aussi sérieux survient. En effet l'attraction de la partie anti-brane de la brane non-BPS vers les bords conduit à un mouvement rapide de celle-ci[32].

[5] Il est possible qu'un traitement du spectre des états de la membrane ouverte joignant la brane à l'anti-brane présente un tachyon. On peut aussi se demander si la symétrie Z_2 ne projette pas cette état hors du spectre des états.

Lorsque la classe de Σ est effective et que Σ est une surface de Riemann, elle a aussi la propriété d'être calibrée[33]. C'est à dire qu'elle minimise son volume dans sa classe d'homologie, celui-ci coincidant alors avec sa charge. Lorsque la classe n'est plus effective, la surface Σ n'est plus complexe. Son volume est plus grand que ce qu'il serait si elle était encore holomorphe, c'est à dire sa charge. Comme la tension de la brane est proportionnelle à son volume on voit que la borne BPS reliant la tension (le volume) à la charge n'est plus saturée. En désignant par $T > 1$ le rapport entre la tension et la charge on trouve que l'action de bord devient

$$S_B = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_5^2}\int d^4x\sqrt{-g_E^{(4)}}\frac{[\alpha_I]X^I}{\mathcal{V}}T. \tag{156}$$

Bien sur T est en général une fonction compliquée de la géométrie. Nous allons supposer dans la suite que T est constant. Ceci ne modifie que les conditions de bord sur la cinq-brane. En utilisant la même technique que pour les branes avec angle on peut construire la solution satisfaisant aux nouvelles conditions de bord[32]

$$\begin{aligned}
[\partial_n\mathcal{V}]_{x_0} &= \sqrt{2}T([\alpha^i].X)|_{x_0} \\
[\partial_n A]_{x_0} &= \frac{T}{3\sqrt{2}}\frac{([\alpha^i].X)}{\mathcal{V}}|_{x_0} \\
[\partial_n X_I]_{x_0} &= \frac{T}{\sqrt{2}\mathcal{V}}([\alpha_I^i] - \frac{2}{3}([\alpha^i].X)X_I)|_{x_0}
\end{aligned} \tag{157}$$

En coordonnées conformes

$$ds^2 = e^{2A(u,\eta)}(du^2 + dx^idx_i - d\eta^2) \tag{158}$$

où η est le temps conforme, les solutions sont données par

$$\begin{aligned}
A(u,\eta) &= A(u+h\eta, \frac{\alpha_I^i}{\sqrt{1-h^2}}) \\
\mathcal{V}(u,\eta) &= \mathcal{V}(u+h\eta, \frac{\alpha_I^i}{\sqrt{1-h^2}}) \\
X_I(u,\eta) &= X_I(u+h\eta, \frac{\alpha_I^i}{\sqrt{1-h^2}})
\end{aligned} \tag{159}$$

dans chacun des deux intervalles $i = 0, 1$. Contrairement aux cas des rotations la solution a été obtenue grâce à un boost de Lorentz de paramètre h défini par

$$T\sqrt{1-h^2} = 1 \tag{160}$$

Revenant aux coordonnées initiales, l'intérieur redevient statique mais la brane non-BPS est mobile vers l'un ou l'autre des deux bords. En un temps fini, il y a collision de la brane non-BPS avec l'un des bords. On peut noter l'analogie avec le modèle ekpyrotique en cosmologie. Ici après la collision il est probable qu'une transition de petit-instanton[34] nous ramène à une situation supersymétrique et statique.

V. SUPERGRAVITÉ SINGULIÈRE

Nous avons présenté dans la section 4 le cas du modèle de Randall-Sundrum supersymétrique et de la théorie de Horava-Witten. Dans le premier cas la supersymétrisation est explicite, quant au second cas, elle s'appuie sur la M-Théorie à onze dimensions. Ici nous allons justifier ces deux approches dans un cadre purement cinq-dimensionnel où la supersymétrie est explicite[18].

A. Supersymétrie et multiplets vectoriels

La construction de la supersymétrie singulière a été effectuée pour les multiplets vectoriels de la supersymétrie $N = 2$. Le contenu en champ est donné par e_a^m, le vielbien, ψ_a^A les gravitinos, A^I les champs de vecteur, λ^{Ax} les jauginos et ϕ^x les champs scalaires. Les indices correspondent à $A = 1, 2$, un indice de $SU(2)$ pour les gravitinos et les jauginos, $I = 1, \dots n+1$ pour les champs vectoriels, $x = 1, \dots n$ pour les champs scalaires et les jauginos. On reconnait le role que $h^{1,1} = n+1$ jouait pour la théorie de Horava-Witten. Cependant il est à noter qu'aucun hypermultiplet n'est pris en compte ici. Les champs scalaires sont solutions de

$$C_{IJK} h^I h^J h^K = 1 \tag{161}$$

où le tenseur symétrique C_{IJK} est arbitraire. Ceci conduit à n champs scalaires ϕ^x. On définit la métrique

$$G_{IJ} = -2C_{IJK} h^K + 3h_I h_J \tag{162}$$

avec $h_I = C_{IJK} h^J h^K$. Sur la cubique définissant les champs scalaires on a la métrique induite

$$g_{ij} = 2G_{IJ} \frac{\partial h^I}{\partial \phi^i} \frac{\partial h^J}{\partial \phi^j}. \tag{163}$$

Ceci permet d'obtenir le Lagrangien pour les champs scalaires et la gravité

$$S = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R - \frac{3}{4}(g_{ij}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j + V)). \tag{164}$$

Cette action est une partie du Lagrangien de supergravité à cinq dimensions dans l'intérieur. Une fois la cubique donnée un autre ingrédient permet de définir le modèle de supergravité, les termes de Fayet-Iliopoulos qui indiquent la façon dont on a jaugé un seul groupe $U(1)$

$$A_a = A_a^I V_I \tag{165}$$

Notons que nous sommes dans le même cadre que la supersymétrisation de Randall-Sundrum, un seul groupe $U(1)$ est jaugé.

Dans le cas de Randall-Sundrum, nous avions trouvé un lien entre le prépotentiel qui permet de jauger les transformations $U(1)$ et la parité des fermions. Ce lien existe ici aussi. En effet la parité agit comme

$$\begin{aligned} \psi_\mu^A(-x_5) &= i\gamma_5 \mathcal{Q}_B^A \psi_\mu^B(x_5) \\ \psi_5^A(-x_5) &= -i\gamma_5 \mathcal{Q}_B^A \psi_5^B(x_5) \end{aligned} \tag{166}$$

sur les gravitinos et par

$$\lambda^A(-x_5) = -i\gamma_5 \mathcal{Q}_B^A \lambda^B(x_5) \tag{167}$$

qui correspond à une modification de la dérivée covariante

$$D_a \ \to D_a + gA_a^I V_I \mathcal{Q}_B^A. \tag{168}$$

La donnée de termes de Fayet-Iliopoulos permet de définir un superpotentiel

$$W = 4\sqrt{\frac{2}{3}} g h^I V_I \tag{169}$$

dont le rôle sera crucial par la suite. Notons qu'il est une combinaison linéaire des solutions de la cubique. Comme d'habitude l'introduction d'une symétrie de jauge à cinq dimensions induit un terme de potentiel dans le Lagrangien

$$V = W_i W^i - W^2 \tag{170}$$

dépendant de la dérivee W_i et du superpotentiel W. En l'absence de champs scalaires le superpotentiel est constant et donne lieu à une constante cosmologique négative dans l'intérieur.

Dans le cas de Randall-Sundrum, la supersymétrisation intervient après l'introduction d'un couplage de jauge impair sous la parité. Ici on se permet de promouvoir la constante de couplage g en un champ $G(x)$ singulet sous la supersymétrie. Ceci induit une variation non-triviale de l'action proportionnelle à $\partial_a G$. Cette variation est compensée par la variation d'une quatre-forme $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ grâce à un terme supplémentaire dans l'action

$$S_A = \frac{2}{4!\kappa_5^2} \int d^5x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\tau G. \tag{171}$$

Sans terme de bord la solution sur la couche de masse des equations du mouvement donne $G = g$ et nous obtenons la supergravité à cinq dimensions. Nous pouvons aussi mettre une action sur le bord

$$S_B = -\frac{1}{\kappa_5^2} \int d^5x (\delta_0 - \delta_{\pi R})(\frac{3}{2}\sqrt{-g_4}W + \frac{2g}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\mu\nu\rho\sigma}). \tag{172}$$

Notons que le premier terme correspond à une tension variable proportionnelle au superpotentiel, le second est le couplage habituel de la quatre-forme au bord. La somme des charges sous la quatre-forme est zéro comme il se doit en espace compact. Cette action est invariante sous la supersymétrie grâce au choix des conditions de bord pour les fermions. On peut réduire l'action en cherchant les solutions des équations du mouvement pour G. Comme attendu on trouve que G est impair

$$G(x_5) = g\epsilon(x_5). \tag{173}$$

Ceci conduit à une simplification de l'action de bord

$$S_B = -\frac{3}{2\kappa_5^2}\int d^5x(\delta_0 - \delta_{\pi R})W \tag{174}$$

On reconnait là une tension variable sur le bord.

Analysons maintenant les conditions aux bords déduites de l'action de bord. Les conditions aux bords pour le champ scalaire sont des conditions de Neumann

$$\partial_n\phi^x|_{0,\pi R} = \frac{\partial W}{\partial\phi_x}|_{0,\pi R} \tag{175}$$

avec ∂_n la dérivée normale à la brane. Dans les coordonnées Gaussiennes normales

$$ds^2 = dx_5^2 + a^2(x_5)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^{nu} \tag{176}$$

on a $\partial_n = \partial_{x_5}$. De même les equations de bord pour le facteur d'échelle deviennent

$$\partial_n \ln(a)|_{0,\pi R} = -\frac{W}{4}|_{0,\pi R}. \tag{177}$$

Nous verrons que ces conditions de bord sont intimement liées aux équations BPS de la théorie.

On peut noter l'analogie formelle avec la théorie de Horava-Witten à volume fixe $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$. Ainsi le superpotentiel est proportionnel à

$$W \sim \alpha_I X^I \tag{178}$$

et les termes de Fayet-Iliopoulos

$$V_I \sim \alpha_I \tag{179}$$

avec $X^I \sim h^I$ Dans la prochaine section nous verrons comment le cas de Randall-Sundrum peut aussi être obtenu à partir de la supergravité singulière.

B. Conditions BPS

Nous allons nous intéresser ici aux configurations qui préservent la supersymétrie. Celles-ci peuvent être analysées comme nous l'avons fait dans le cas Randall-Sundrum. En effet, les équations des spineurs de Killing permettent de mettre les équations du mouvement sous la forme d'équations différentielles du premier ordre[35].

Nous avons deux types de spineurs, les gravitinos et les jauginos. Le vide, préservant l'invariance de Lorentz, est caractérisé par le fait que la variation supersymétrique de ces spineurs s'annule. On en déduit deux équations pour le spineur ϵ paramétrisant les variations supersymétriques. Des jauginos $\delta_\epsilon\lambda_A^x = 0$, nous obtenons la relation

$$i\gamma^a\partial\phi^x\epsilon_A + W^{,x}\mathcal{Q}_{AB}\epsilon^B = 0 \tag{180}$$

et de même pour les gravitinos $\delta\psi_a^A = 0$ nous avons

$$D_a\epsilon_A + \frac{i}{8}\gamma_a W\mathcal{Q}_{AB}\epsilon^B = 0. \tag{181}$$

Ces équations permettent de déterminer les supersymétries préservées par la présence de deux bords. Pour ce faire définissons le vecteur p_a tel que

$$\partial_a\phi^x = p_a\partial_{x_5}\phi^x \tag{182}$$

et la matrice

$$\Gamma = \frac{p_a\gamma^a}{\sqrt{p^2}} \tag{183}$$

de manière à ce que $\Gamma^2 = 1$. Cette matrice permet de définir deux spineurs de chiralité opposée

$$\epsilon_A^\pm = \pm i\Gamma\mathcal{Q}_A^B\epsilon_B^\pm. \tag{184}$$

Nous allons voir qu'une moitié des supersymétries est préservée par chacun des bords. La compatibilité entre les supersymétries avec les deux bords définit la supersymétrie globale.

L'équation des jauginos admet la forme

$$\partial_{x_5}\phi^x = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2}}W^{,x} \tag{185}$$

dépendant du signe la chiralité des spineurs de Killing. Nous choisirons le signe $+$ dans la suite. L'équation différentielle pour ϕ^x est du premier ordre et dépend directement du superpotentiel. L'équation des gravitinos donne une équation de compatibilité

$$[D_a, D_b]\epsilon_A^+ = R_{abcd}\frac{\gamma^{cd}}{8}\epsilon_A^+ \tag{186}$$

qui contraint la forme du tenseur de Riemann dans l'intérieur[35]

$$R_{abcd} = -\frac{1}{16}W^2(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) + \frac{1}{4p^2}W^{,x}W_{,x}(p_a g_{b[d}p_{c]} - p_b g_{a[d}p_{c]}). \tag{187}$$

Connaissant le tenseur de Riemann on peut calculer le tenseur d'Einstein et vérifier que

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} = T_{ab} \tag{188}$$

avec pour tenseur énergie impulsion de l'intérieur

$$T_{ab} = \frac{3}{4} \partial_a \phi^x \partial_b \phi_x - \frac{3}{8} g_{ab}((\partial\phi)^2 + V) \tag{189}$$

prouvant que les solutions des équations des spineurs de Killing donnent des solutions des équations d'Einstein.

Il est intéressant de remarquer que le tenseur de Weyl de l'intérieur doit s'annuler

$$W_{abcd} = 0. \tag{190}$$

Cela implique que le métrique de l'intérieur est conformément plate

$$ds^2 = a^2(-dt^2 + dz^2 + dx_i dx^i) \tag{191}$$

Nous allons nous restreindre aux configurations telles que $a(z,t)$. Dans ce cas l'équation du mouvement est unique et s'écrit

$$\partial_{x_5} \ln(a) = -\frac{W}{4\sqrt{p^2}}. \tag{192}$$

Noter l'analogie avec la condition sur les champs scalaires. Ici p_a n'a que deux composantes p_{x_5} et p_t que nous n'avons pas determinées. Celles-ci sont obtenues à partir des conditions de bord. Il est facile de voir que celles-ci impliquent que

$$p^2 = 1 \tag{193}$$

donc que les configurations sont statiques. Dans ce cas les équations BPS de la supergravité singulière sont données par

$$\begin{aligned} \partial_{x_5} \ln(a) &= -\frac{W}{4} \\ \partial_{x_5} \phi^x &= W^{,x} \end{aligned} \tag{194}$$

préservant une moitié des supersymétries.

C. Solutions cosmologiques

Comme dans le cas de la théorie de Horava-Witten, on peut briser toutes les supersymétries en changeant la tension de l'une des branes[36]. Nous allons nous intéresser au cas où le couplage de la première brane devient

$$-\frac{3}{2\kappa_5^2} \int d^5x \delta_0 \sqrt{-g_4} T W \tag{195}$$

avec $T > 1$ constant. Dans ce cas le vecteur p_a devient tel que

$$T\sqrt{p^2} = 1 \tag{196}$$

c'est à dire que l'intérieur n'est plus statique mais dépendant du temps. Cette dépendance dans le temps n'est rien d'autre que le boost[37] que nous avons déjà décrit pour la théorie de Horava-Witten. En particulier, on peut toujours se ramener au cas où la brane de droite est statique, l'intérieur est statique et seule la brane de gauche bouge. Ainsi la solution correspond à une instabilité provoquée par le changement de la tension d'une des branes.

On trouve que la supersymétrie vérifié par la brane gauche est telle que

$$\epsilon_A = i\Gamma \mathcal{Q}_A^B \epsilon_B \tag{197}$$

alors que la brane de droite préserve

$$\epsilon_A = i\gamma_5 \mathcal{Q}_A^B \epsilon_B \tag{198}$$

Dès que $p_t \neq 0$, la supersymétrie est complètement brisée par incompatibilité entre les supersymétries préservées par chacune des branes. C'est un phénomène général pour les configurations dont les branes bougent.

Intéressons nous maintenant aux solutions de la théorie lorsque $T \neq 1$. Pour cela nous allons nous restreindre à un modèle simple possèdant un unique champ scalaire ϕ. Nous prenons $n = 2$ et

$$C_{122} = 1 \tag{199}$$

comme seule composante non-nulle. On peut donc paramétriser les solutions par

$$h^1 = e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\phi}, \ h^2 = e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}}} \tag{200}$$

quand on impose que $g_{\phi\phi} = 1$. Nous obtenons une famille de superpotentiels. Nous nous restreindrons à

$$W = \xi e^{\alpha\phi} \tag{201}$$

avec $\alpha = 1/\sqrt{3},\ \alpha = -1/\sqrt{12}$. Les solutions BPS lorsque $T = 1$ s'écrivent

$$\begin{aligned} a &= = (1 - \alpha^2 \xi |x_5 - x_0|)^{1/4\alpha^2} \\ \phi &= -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha^2 \xi |x_5 - x_0|). \end{aligned} \tag{202}$$

Une des caractéristiques des configurations avec champs scalaires est l'apparition de singularités nues associées à l'annulation du facteur d'échelle a. Ici la singularité a lieu à $x_* = 1/\alpha^2\xi + x_0$. Ces singularités peuvent être cachées par la seconde brane[38]. Néanmoins elles influencent la physique de basse énergie comme on le verra plus avant.

Pour écrire la solution cosmologique lorsque $T \neq 1$, il est commode de passer aux coordonnées conformes telles que

$$a(u, \eta) = (\frac{u + p_t \eta}{u_0(p)})^{1/(4\alpha^2 - 1)} \tag{203}$$

avec $u_0(p) = \sqrt{p^2}/(1/4 - \alpha^2)\xi$. Il est à noter que suivant le signe de p_t, la brane de gauche va vers la droite ou la gauche. Pour mieux appréhender la physique de ces solutions il est commode passer à la métrique induite sur la brane de gauche, celle qui bouge dans un intérieur statique. Pour cela on est obligé de changer de schéma car la masse de Planck deviendrait dépendante du temps. En l'absence de matière le schéma est sans importance. Dans un schéma où la masse de Planck à quatre dimensions est constante on obtient

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(1 - \frac{t}{t_0})^{1/3+1/6\alpha^2} \tag{204}$$

avec

$$t_0 = \frac{2}{3\alpha^2}\frac{1}{p_t T^{3/2}\xi} \tag{205}$$

et t est le temps cosmique

$$ds_4^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx_i dx^i. \tag{206}$$

Il est intéressant de remarquer aucune singularité n'est présente dans le futur si $p_t < 0$, c'est à dire que la brane se déplace vers la gauche[36].

La solution cosmologique que nous venons d'exhiber est un exemple de cosmologie mirage[40]. La dynamique apparente de l'univers pour un observateur sur la brane est due au mouvement de la brane et non à la physique propre de la brane. Néanmoins, la cosmologie sur la brane est remarquable car elle singe un univers de Friedmann-Robertson-Walker du à de la matière sur la brane d'équation d'état $p = \omega\rho$

$$\omega = -1 + \frac{4\alpha^2}{1+2\alpha^2}. \tag{207}$$

Pour les valeurs de la supergravité, cela donne lieu à un univers en accélération $\omega < -1/3$ pour $\alpha = -1/\sqrt{12}$

$$\omega = -\frac{5}{7}. \tag{208}$$

De même le paramètre d'accélération $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ vaut[36]

$$q = \frac{6\alpha^2}{1+2\alpha^2} - 1 \tag{209}$$

qui vaut

$$q = -\frac{4}{7}. \tag{210}$$

Ces valeurs sont proches des valeurs expérimentales obtenues par combinaison des mesures de supernovae et du CMB.

Ce scénario met en pratique l'idée de l'autoajustement de la constante cosmologique[14]. En effet, on trouve que l'univers apparent sur la brane accélère indépendamment de l'échelle de brisure de supersymétrie T. Celle-ci n'affecte pas l'accélération. On se trouve ainsi dans la situation où l'énergie de la brane et son accélération découplent.

Bien sur ce modèle ne tient pas compte de la matière qui doit exister sur la brane. Nous verrons que la prise en compte de celle-ci réintroduit un ajustement fin dans le problème de la constante cosmologique.

D. La gravité à quatre dimensions

Dans le cadre des modèles à dimensions supplémentaires, il est important de considérer la gravité à basse énergie[8]. En effet les tests de précision dans le système solaire peuvent invalider certains modèles modifiant de façon trop drastique la gravité[41]. Pour étudier ces phénomènes on considére que de la matière existe sur les deux bords de l'espace-temps. On étudie les perturbations autour des configurations statiques[39]. La présence de matière implique un rayonnement gravitationnel vers l'intérieur. On s'intéresse aux effets sur la brane et notamment à la modification des équations telles que la loi de Poisson.

Les perturbations sont de deux types. D'une part il y a des perturbations de la métrique

$$ds^2 = dx_5^2 + a^2(x_5)dx^\mu dx_\nu + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{211}$$

et des perturbations $\delta\phi$ du champ scalaire. L'équation du champ scalaire est obtenue par perturbation de l'équation de Klein-Gordon

$$\Box\delta\phi + \frac{1}{2}h'\phi' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\delta\phi \tag{212}$$

avec $' = d/dx_5$ et $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$. On obtient le mode zéro quadri-dimensionnel de cette équation sous la forme

$$\delta\phi = \frac{\partial W}{\partial\phi}\hat{\phi}(x^\mu) \tag{213}$$

et $\hat{\phi}$ est une de masse nulle à quatre dimension. On obtient aussi que

$$h = 0. \tag{214}$$

Les équations de bord sont automatiquement satisfaites.[6]

On obtient plus d'information sur $\delta\phi$ grâce aux équations d'Einstein

$$\Box h_{ab} + \frac{W^2}{8}h_{ab} - D_{\{a}D_c h^c_{b\}} = \frac{3}{4}\partial_{\{a}\delta\phi\partial_{b\}}\phi \tag{215}$$

dont la composante (55) donne $\partial_5\delta\phi = 0$ et donc

$$\delta\phi = 0. \tag{216}$$

[6] Nous n'avons pas la preuve de l'unicité de cette solution.

De même l'équation ($\mu 5$) donne

$$D_\mu h^{\mu\nu} = 0. \tag{217}$$

On trouve donc que la perturbation gravitationnelle est sans trace et transverse. On peut comprendre l'absence de degrés de liberté pour le champ scalaire par l'absence de champ réél pour completer ce qui devrait devenir la partie scalaire d'un superchamp chiral. Ceci est à contraster avec le radion et le dilaton qui sont complétés par la composante (5) du graviphoton et du champ vectoriel.

Lorsque la brane porte de la matière, elle se tord et se déplace vers

$$z_+ = \xi^+,\ z_- = \pi R + \xi^-. \tag{218}$$

On peut toujours ramener la brane de gauche à l'origine par l'effet d'un changement de coordonnées locales

$$h^+_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{W}{2} a^2 \xi^+ \eta_{\mu\nu} - 2a^2 \int_0^{x_5} \frac{dy}{a^2(y)} \partial_\mu \partial_\nu \xi^+ \tag{219}$$

et de même pour la brane de droite. Passant aux coordonnées conformes, on peut se ramener à une équation des ondes avec sources pour le graviton [39]

$$Q^\dagger Q \tilde{h}_{\mu\nu} - \Box^{(4)} \tilde{h}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=\pm} (\frac{3}{4} W \tilde{h}_{\mu\nu} + 2\kappa_5^2 \sqrt{a} \Sigma^\sigma_{\mu\nu}) \delta(u - u_\sigma) \tag{220}$$

et

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{a} \tilde{h}_{\mu\nu}. \tag{221}$$

Les deux branes sont à $u = u_\pm$. On a défini

$$Q = -\frac{d}{du} + \frac{d \ln a^{3/2}}{du},\ Q^\dagger = \frac{d}{du} + \frac{d \ln a^{3/2}}{du},\ \Box^{(4)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tag{222}$$

et les sources

$$\Sigma^\sigma_{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa_5^2} \partial_\mu \partial_\nu \xi^\pm + (T^\pm_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T^\pm g^\pm_{\mu\nu}) \tag{223}$$

dépendent du tenseur énergie-impulsion $T^\pm_{\mu\nu}$ et de la métrique induite $g^\pm_{\mu\nu}$ sur chaque brane.

Le déplacement de la brane peut facilement se déduire de la trace des équations gravitationnelles où l'on utilise le fait que $h = 0$

$$\Box^{(4)} \xi^\pm = -\frac{\kappa_5^2}{6} a_\pm T^\pm \tag{224}$$

avec $a_\pm = a(u_\pm)$. Cette équation nous apprend que le déplacement des branes est du à la trace du tenseur d'énergie-impulsion porteé par chaque brane[42]. Lorsque la brane ne porte pas de matière on obtient une équation des ondes sans source. Les deux modes zéro se traduisent en deux excitations sans masse, le radion mesurant la distance inter-brane et le dilaton mesurant une translation globale des deux branes. Nous les discuterons plus tard.

La solution des équations de champ peut s'obtenir par la technique des fonctions de Green. En particulier la partie dominante est transmise par le mode zéro $a^{3/2}$ de l'opérateur de mécanique quantique supersymétrique Q. Plaçons nous dans le cas où la matière n'est présente que sur la brane de gauche. Ceci permet de résoudre

$$\Box^{(4)} h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_N}{\Phi} (T^+_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^+ \eta_{\mu\nu}) - \frac{8\pi G_N}{\Phi(3 + 2\omega(\Phi))} T^+ \eta_{\mu\nu} \tag{225}$$

Le champ Φ est un champ de Brans-Dicke et $\omega(\Phi)$ est le paramètre de Brans-Dicke. Nous avons identifié

$$\kappa_5^2 = 16\pi G_N \int_0^{r_\infty} a^2 dx_5 \tag{226}$$

quand $a_+ = 1$, r_∞ est le lieu où l'on rencontre la première singularité le long de x_5. Le champ de Brans-Dicke est

$$\Phi = \frac{\int_0^{\pi R} a^2 dx_5}{\int_0^{r_\infty} a^2 dx_5} \tag{227}$$

qui varie entre zéro et un. Enfin le paramètre de Brans-Dicke vaut

$$\omega(\Phi) = \frac{3}{2}(-1 + \frac{1}{1 - \Phi \frac{W}{2}|_0 \int_0^{r_\infty} a^2 dx_5}) \tag{228}$$

Comme on le voit, la théorie de basse énergie est une théorie de type tenseur-scalaire caractérisée par une constante de Newton effective dépendant de Φ et donc de la distance entre les branes. Ce fait est général dés que le radion et le dilaton ne sont pas stabilisés. Les deux branes peuvent être fixées le long de x_5 par un mécanisme qui peut être relié à la brisure de supersymétrie. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction qui se heurte comme toujours aux différentes possibilités pour briser la supersymétrie.

Il se peut toutefois que le radion et le dilaton n'aient pas à être stabilisés pour satisfaire aux mesures gravitationnelles. D'un point de vue strictement gravitationnel on se doit de vérifier que $\omega(\Phi)$ est grand (plusieurs milliers). Dans le cas de Randall-Sundrum on trouve

$$\omega(\Phi) = \frac{3}{2}(-1 + e^{2\pi kR}) \tag{229}$$

qui demande que kR soit grand[41]. Pour les théories avec champ scalaire dans l'intérieur on obtient que

$$\omega(\Phi) = \frac{3}{2}(-1 + \frac{1}{1 - \Phi^{\frac{1+4k\alpha^2 x_0}{1+2\alpha^2}}}) \tag{230}$$

avec

$$\Phi = 1 - (1 - \frac{\pi R}{r_\infty})^{1+\frac{1}{2\alpha^2}} \tag{231}$$

et $r_\infty = x_0 + 1/4k\alpha^2$ où $W|_0 = 4k$. Il existe un mécanisme d'attracteur pour les théories de Brans-Dicke qui conduit Φ vers sa valeur maximale[44]. Si $x_0 \geq 1/2k$, $\omega(\Phi) = \infty$ est un attracteur. On se trouve donc dans la situation où la gravité sur la brane de gauche ne contredit pas les expériences dès que la brane est éloignée de la singularité.

Bien sur, ceci n'est que préliminaire. Il faudrait encore coupler le modèle avec de la matière telle que le modèle standard, puis briser la supersymétrie pour conclure à l'intérêt de ces modèles de supergravité singulière.

Finalement nous souhaitons donner une définition précise du radion[43, 45]. Revenons aux équations pour $\xi^\pm$ en l'absence de matière. Une solution peut s'écrire

$$\xi^+ = \xi_0 + \frac{\xi}{a_+^2},\ \xi_- = \xi_0 + \frac{\xi}{a_-^2}. \tag{232}$$

Le mode ξ_0 est une translation globale des deux branes quant à ξ c'est le mode radion, il mesure la distance relative entre les branes. On peut décrire les solutions générales des équations de perturbations sous la forme

$$ds^2 = a^2(G(x_5, x_\mu))g_{\mu\nu}dx^{\mu\nu} + (\partial_5 G)^2 dx_5^2 \tag{233}$$

et

$$\phi = \phi_0(G(x_5, x_\mu)). \tag{234}$$

Les deux branes sont maintenant situées à

$$x_+ = \xi_0,\ x_- = \xi_0 + \pi R. \tag{235}$$

Dans ce systeme de coordonnées, les rôles des trois champs de masse nulle sont bien séparés. D'une part ξ_0 translate les branes, ξ déforme la géometrie de manière à ce que

$$G(x_5, x_\mu) = x_5 + \frac{\xi}{a^2} \tag{236}$$

et

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu} \tag{237}$$

est le graviton[43].

E. Cosmologie Branaire

Dans la section précédente nous avons vu que la gravité à quatre dimension est modifiée à basse énergie par un champ de Brans-Dicke qui reflète l'existence du mode radion mesurant la distance inter-brane. Nous allons étudier ici les conséquences cosmologiques de l'existence de la cinquième dimension. Comme nous le verrons cette étude n'est pas complète et se heurte à des difficultés non-résolues.

Dans l'approche de cosmologie branaire, contrairement à une approche de type théorie effective de basse énergie, on s'intéresse aux équations du mouvement exactes à cinq dimensions. L'approche de type théorie effective se préoccupe de la physique des modes zéros et de leurs interactions d'un point de vue purement quadri-dimensionnel. C'est cette approche que nous avons suivie dans la section précédente où nous avons déterminé l'équation du mouvement pour la perturbation quadri-dimensionnelle $h_{\mu\nu}$ puis déduit que la gravité est modifiée en une théorie tenseur-scalaire. Pour ce faire nous avons négligé tous les modes massifs dans un développement de type Kaluza-Klein. Nous avons aussi considéré uniquement la solution $h_{\mu\nu}$ sur la brane. Traditionnellement on considére qu'inclure tous les modes massifs se traduit par des corrections dans le Lagrangien à quatre dimensions. L'approximation devenant ainsi de plus en plus acceptable. Pour décrire la cosmologie des modèles branaires nous allons suivre la voie directe, via les équations du mouvement à cinq dimensions.

Néanmoins la description par les équations complètes à cinq dimensions se révèle très ardue. Pour obtenir le comportement des branes en présence de matière, une approche appelée projective a été développée. Celle-ci consiste à écrire les équations cinq-dimensionnelles exactes et à les spécialiser sur la brane de gauche.

Considérons le cas d'une configuration de deux brane à la Randall-Sundrum, c'est à dire de tension λ_1 et λ_2 plongées dans un espace de constante cosmologique Λ. Nous nous intéressons à la cosmologie de ces modèles donc les branes portent une densité d'énergie $\rho_{1,2}$. Une première approche de la cosmologie de ce modèle suivant l'approche projective consiste à restreindre notre étude à l'une des deux branes et de décrire l'évolution temporelle de la métrique induite que l'on suppose de type Friedmann-Robertson-Walker

$$ds_B^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^i dx_i. \tag{238}$$

Comme en cosmologie à quatre dimensions on peut vérifier que la matière obéit à une équation de conservation

$$\dot{\rho}_1 = -3H(p_1 + \rho_1) \tag{239}$$

Il n'y a donc pas de fuite de matière de la brane vers l'intérieur. On a défini le paramètre de Hubble par

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{240}$$

avec $. = d/dt$. On peut également ramener la dynamique à une équation de Friedmann déterminant le paramètre de Hubble en fonction de la matière sur la brane[9]

$$H^2 = \frac{\rho_1^2}{36} + \frac{\lambda_1}{12}\rho_1 + \frac{\lambda_1^2 - \Lambda}{16} + \frac{C}{a^4}. \tag{241}$$

Cette équation contient tous les ingrédients de la cosmologie branaire. D'une part à haute énergie lorsque la matière domine sur la tension de la brane, on se retrouve dans une ère où le terme en ρ_1^2 domine. Physiquement, cette modification ne peut intervenir qu'avant la nucléosynthèse ce qui implique que la tension de la brane ne doit pas être bien inférieure à l'èchelle du MeV. A plus basse énergie le terme linéaire en ρ_1 domine et l'on se trouve en présence d'un modèle avec constante cosmologique non-nulle à moins que

$$\Lambda = \lambda_1^2. \tag{242}$$

C'est l'ajustement de Randall-Sundrum[11]. Il permet ici de mettre à zéro la constante cosmologique sur la brane. On voit ainsi un lien inattendu entre caractéristiques cinq-dimensionnelles et la constante cosmologique. En particulier, on peut ajuster la constante cosmologique à une valeur de l'ordre de la densité critique de l'univers au prix d'un ajustement fin entre la tension de la brane et la constante cosmologique. On verra que dans le cas de modèles avec champs scalaires dans l'intérieur on peut obtenir des modèles de quintessence avec accélération de l'univers au prix d'un ajustement similaire. Il semble que le problème de la constante cosmologique soit aussi ardu à cinq que quatre dimensions.

Le dernier terme de l'équation de Friedmann a une interprétation intéressante. En effet, concentrons nous sur l'intérieur maintenant. Dans le cas où celui-ci n'est soumis qu'à une constante cosmologique, on peut montrer qu'une extension du théorème de Birkhoff existe[46]. Dand ce cas la métrique devient

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_k^2 \tag{243}$$

où $d\Sigma_k^2$ est la métrique d'un espace tri-dimensionnel de courbure $k = -1, 0, 1$. La fonction f dépend de la courbure et d'un paramètre de masse comme pour les trous noirs de Schwarzschild

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} + k - \frac{\mu^2}{r^2}. \tag{244}$$

Cette solution porte le nom de AdS-Schwarzschild. Le cas $k = -1$ et $\mu = 0$ a déjà été étudié dans le cadre de la brisure de supersymétrie par retournement de chiralité. La constante cosmologique Λ est reliée à l par

$$\Lambda = \frac{16}{l^2} \tag{245}$$

On peut voir ceci en écrivant l'équation d'évolution d'une brane de tension λ dans l'espace AdS-Schwarzchild[47]

$$(\dot{r}^2 + f(r))^{1/2} = \frac{\lambda}{4} r \tag{246}$$

en temps propre sur la brane. Cette équation est équivalente à l'équation de Friedmann

$$H^2 = \frac{\lambda^2 - \Lambda}{16} - \frac{k}{r^2} + \frac{\mu^2}{r^4}. \tag{247}$$

On retrouve le fait que $\Lambda = \lambda^2$ donne une constante cosmologique nulle. Dans le cas de sections spatiales plates $k = 0$, on voit apparaitre le terme en $1/r^4$. Ce terme de radiation (noire car non conventionnelle) apparait donc relié à la présence d'un trou noir dans l'intérieur

$$C = \mu^2 \tag{248}$$

Dans le cas de la cosmologie de Randall-Sundrum sans trou noir, le terme de radiation noire disparait.

Dans la suite on va généraliser ces résultats au cas où l'intérieur possède un champ scalaire couplé aux branes[48]. Comme pour le cas de Randall-Sundrum, on va voir apparaitre des termes correspondant à ρ^2 et de la radiation noire. Néanmoins la cosmologie de ces modèles est encore plus riche. On trouve des comportements de quintessence ainsi que la variation temporelle de la constante de Newton dans l'ère de matière.

On s'intéressera au cas la brane porte une tension spécifiée par le tenseur énergie-impulsion

$$T^B_{\mu\nu} = -\frac{3}{2} g_{\mu\nu} U_B(\phi). \tag{249}$$

Lorsque $U_B = W$, nous retrouvons le cas de la supergravité singulière. De même l'intérieur subit le tenseur

$$T_{ab} = \frac{3}{4}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{3}{8} g_{ab}((\partial\phi)^2 + U). \tag{250}$$

Dans le cas de la supergravité on a $U = (\frac{\partial W}{\partial \phi})^2 - W^2$. Enfin la brane de gauche porte de la matière

$$\tau^\mu_\nu = \mathrm{diag}(-\rho, p, p, p). \tag{251}$$

Ceci détermine la dynamique de la brane.

Les équations d'Einstein réduites sur la brane peuvent se déduire des équations de Gauss-Codazzi et de conditions au bord[49, 50]. Dans notre cas elles deviennent

$$\bar{G}_{ab} = -\frac{3}{8}Vn_{ab} + \frac{U_B}{4}\tau_{ab} + \pi_{ab} + \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{5}{16}(\nabla\phi)^2 n_{ab} - E_{ab} \tag{252}$$

avec $\nabla_a = n_a^b D_b$. Nous avons identifié $\bar{G}_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{\bar{R}}{2}n_{ab}$ avec le tenseur d'Einstein de la brane dépendant de la courbure de la brane $\bar{R}_{ab}$ et de la métrique induite

$$n_{ab} = g_{ab} - n_a n_b \tag{253}$$

et n_a est le vecteur normal à la brane. Le tenseur π_{ab} contient le fameux terme quadratique en la matière

$$\pi_{ab} = \frac{\tau}{12}\tau_{ab} - \frac{\tau_{ac}\tau_b^c}{4} + \frac{\tau_{ab}}{24}(3\tau_{cd}\tau^{cd} - \tau^2) \tag{254}$$

et $\tau = \tau_a^a$. Enfin le dernier terme de l'équation d'Einstein projetée contient la projection sur la brane du tenseur de Weyl

$$E_{ab} = W_{acbd}n^c n^d. \tag{255}$$

Ce terme met en jeu la connaissance de la dynamique de l'intérieur et non pas uniquement des quantités locales sur la brane. En un sens la brane n'est pas un systéme fermé mais ouvert en constante interaction avec l'intérieur.

On peut aussi projeter l'équation de Klein-gordon, cela donne[48]

$$\nabla^2\phi + \frac{\tau}{6}\frac{\partial U_B}{\partial\phi} = \frac{\partial V}{\partial\phi} - \Delta\Phi_2. \tag{256}$$

Le potentiel effectif sur la brane vaut

$$V = \frac{U - (\frac{\partial U_B}{\partial\phi})^2 + U_B^2}{2}. \tag{257}$$

On a identifié le paramètre de perte

$$\Delta\Phi_2 = \partial_n^2\phi|_0 - \frac{\partial U_B}{\partial\phi}\frac{\partial^2 U_B}{\partial\phi^2}. \tag{258}$$

Dans le cas où il n' y a pas de matière et que la supersymétrie singulière n'est pas brisée on trouve

$$V = 0,\ \Delta\Phi_2 = 0. \tag{259}$$

C'est la généralisation de la condition d'ajustement de Randall-Sundrum au cas du champs scalaire dans l'intérieur. On voit ici trés clairement que la dynamique sur la brane n'est pas isolée. Elle dépend de l'évolution dans l'intérieur par l'intermédiaire de la dérivée normale du champ scalaire.

Les équations de Bianchi $\nabla^a\bar{G}_{ab} = 0$ permettent de contraindre le tenseur de Weyl projeté[35]

$$\nabla^a E_{ab} = \frac{\nabla^a U_B}{4}\tau_{ab} + \nabla^a\pi_{ab} + \nabla^a P_{ab} \tag{260}$$

et

$$P_{ab} = -\frac{3}{8}Vn_{ab} + \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{5}{16}(\nabla\phi)^2 n_{ab} \tag{261}$$

Cette équation est cruciale pour obtenir des informations sur l'évolution cosmologique de la brane.

Nous allons maintenant décrire l'évolution du fond cosmologique. Celui-ci est determiné par la métrique induite

$$ds_4^2 = -dt^2 + a^2 dx_i dx^i \tag{262}$$

où t est le temps propre sur la brane. Dans ce cas l'équation de Bianchi peut s'intégrer en prenant un fond isotrope $E_{ij} = 0$. La trace de E_{ab} étant nulle, on obtient une seule inconnue E_{00} qui satisfait

$$\dot{E}_{00} + 4HE_{00} = \partial_t(\frac{3}{16}\dot{\phi}^2 + \frac{3}{8}V) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_B}{4}\rho \tag{263}$$

avec $H = \dot{a}/a$. C'est à dire

$$E_{00} = \frac{1}{a^4}\int dt a^4[\partial_t(\frac{3}{16}\dot{\phi}^2 + \frac{3}{8}V) + \frac{3}{2}H\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{U}_B}{4}\rho]. \tag{264}$$

Dans un fond isotrope, le tenseur de Weyl projeté est complètement déterminé à un terme en $1/a^4$ près. Utilisons maintenant

$$\bar{G}_{00} = 3H^2 \tag{265}$$

pour obtenir l'équation de Friedmann[35, 48]

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36} + \frac{U_B}{12}\rho + \frac{1}{16a^4}\int dt\frac{da^4}{dt}(2V - \dot{\phi}^2) - \frac{1}{12a^4}\int dt\dot{U}_B\rho + \frac{C}{a^4} \tag{266}$$

Cette équation est trés différente de l'équation de Friedmann habituelle. En plus du terme en ρ^2, nous voyons que la constante de Newton cosmologique dépend du champ ϕ et donc du temps

$$8\pi G_N = \frac{U_B}{4}. \tag{267}$$

Notons que cette constante de Newton diffère de celle vue dans l'approche de type théorie effective où l'on s'intéressait au couplage de la matière à la gravité. Nous voyons aussi que des effets retardés entrent en jeu, ils proviennent de E_{00} et donc d'une interaction retardée avec l'intérieur. Enfin le terme en $1/a^4$ imite une terme de radiation, nous le négligerons dans la suite.

Pour clore la dynamique nous avons aussi l'équation de conservation

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \tag{268}$$

et l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 4H\dot{\phi} - \frac{\tau}{6}\frac{\partial U_B}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} + \Delta\Phi_2. \tag{269}$$

Nous sommes obligés ici de faire une hypothése sur $\Delta\Phi_2$. Dans la suite nous supposerons que la brisure de supersymétrie est suffisamment douce pour préserver

$$\Delta\Phi_2 = 0. \tag{270}$$

Sans cette hypothèse l'approche projective ne mène à aucune prédiction quantitative.

Nous allons maintenant décrire quelques conséquences de la cosmologie branaire. L'ère de radiation n'est pas affectée par la dynamique branaire car le champ scalaire est constant. Par contre lors de l'ère de matière on trouve que le champ ϕ dépend du temps. Ceci induit des variations de la constante de Newton. Nous trouvons que

$$\phi = \phi_0 + \beta \ln \frac{t}{t_e} \tag{271}$$

avec

$$\beta = -\frac{8}{15}\alpha \tag{272}$$

dans un développement en α. De même le facteur d'échelle devient

$$a = a_e(\frac{t}{t_e})^{\gamma} \tag{273}$$

où t_e est le temps à l'égalite matière-radiation et a_e le facteur d'échelle au même temps. On trouve

$$\gamma = \frac{2}{3} - \frac{8}{45}\alpha^2 \tag{274}$$

corrigeant ainsi le facteur 2/3 usuel. Bien sûr, ceci implique que

$$\frac{G_N(z)}{G_N(z_e)} = (\frac{z+1}{z_e+1})^{4\alpha^2/5} \tag{275}$$

depuis la nucléosynthése. Pour le modèle de supergravité avec $\alpha = -1/\sqrt{12}$ on trouve une variation de 37%, c'est à dire à la limite des contraintes expérimentales[51]. Cependant pour que la présence de l'ère de matière ne soit pas perturbée par le champ scalaire, avant que le champ scalaire ne domine la dynamique de l'univers maintenant, expliquant une accélération de l'univers, il faut un ajustement trés fin de la brisure de supersymétrie

$$M_{susy} = (T-1)\frac{3W}{2\kappa_5^2} \sim \rho_c. \tag{276}$$

On retrouve ainsi l'ajustement fin de la constante cosmologique dans les modèles de branes avec brisure de supersymétrie.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire nous avons présenté quelques aspects de la physique des branes. Dans tous les cas les effets gravitationnels ont été pris en compte. Ceci diffère de l'approche utilisée en théorie des cordes où le fond est le plus souvent plat et les branes de simples hyperplans. Dans les modèles à cinq dimensions en particulier la courbure de l'espace-temps est mise à profit pour envisager de nouveaux modes de brisure de supersymétrie comme ceux induits par le mouvement de branes dans l'intérieur. Nous avons vu que la brisure de supersymétrie est ici intimement liée au mouvement des branes. Ceci autorise un lien inattendu entre brisure de supersymétrie, cosmologie et variations des constantes fondamentales. Nous ne sommes qu'au début de l'exploration fine de ces phénomènes dans les modèles de branes à cinq dimensions.

Sur un plan plus général, on peut se demander si la physique des branes est réductible à une certaine classe de modèles de théorie effective des champs à quatre dimensions. Notons cependant que même s'il est légitime de traiter la physique des branes dans une approximation effective de basse énergie qui est quadri-dimensionnelle, la classe des modèles obtenus est sans doute peu naturelle sans une justification extra-dimensionnelle. Il est probable que de nombreux problèmes allant de la brisure de supersymétrie à la description des anisotropies du rayonnement de fond bénéficieront des apports de la physique des branes.

Enfin, je souhaiterais envisager quelques perspectives pour mon travail dans le domaine des dimensions supplémentaires. Il me semble que ce domaine ouvre de grandes possibilités dans l'exploration des extensions du modèle standard. Par exemple la brisure de supersymétrie par retournement de chiralité est un terrain où le mécanisme de brisure est extra-dimensionnel avec des conséquences quadri-dimensionnelles fortes que nous étudions avec Z. Lalak. De même les modèles avec champs scalaire dans l'intérieur offre , après réduction dimensionnelle, une approche sur des problèmes comme la variation temporelle des constantes fondamentales, la quintessence, la stabilisation du radion. On peut aussi légitimement se poser la question du fondement des modéles à cinq dimensions. Un tel fondement ne pourra venir que de la théorie des cordes. Dans ce cadre, le comportement temporel des modèles à cinq dimensions est à rapprocher des recherches actuelles sur des solutions dépendantes du temps en théorie des cordes, en particulier les S-Branes dont la structure est proche des branes BPS présentées ici[52]. Il me semble aussi clair qu'une des leçons à tirer des modèles avec dimensions supplémentaires est le lien étroit entre les compactifications sur des espaces à géométrie courbe et les problèmes tels que celui de la hiérarchie ou de la constante cosmologique. On peut aussi comme dans le cas de modèles avec flux[53] espérer stabiliser des modules et peut-être avoir une certaine compréhension de la brisure de supersymétrie.

---

[1] J. Polchinski Phys.Rev.Lett.**75** 4724-4727, (1995).
[2] G. Aldazabal, Luis E. Ibanez, and F. Quevedo, JHEP 0001:031, 2000.
[3] P. Horava and E. Witten, Nucl.Phys.**B475** 94-114,(1996).
[4] P. Horava and E. Witten (Princeton, Nucl.Phys.**B460** 506-524 (1996).
[5] A. Lukas, B. A. Ovrut, K.S. Stelle, D. Waldram Nucl.Phys. **B552**, 246-290 (1999).
[6] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press.
[7] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
[8] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
[9] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, Nucl. Phys. **B 565**, 269 (2000)
[10] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285 (2000)
[11] J. M. Cline, C. Grojean and G. Servant, Phys. Rev. Lett. **83**, 4245 (1999)
[12] R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett and I. Heard Phys.Rev. **D62** 041301, (2000).
[13] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
[14] S. Kachru, M. B. Schulz and E. Silverstein, Phys. Rev. **D62**, 045021 (2000).
[15] A. Sen, "Non-BPS states and branes in string theory" hep-th/9904207.
[16] A. Falkowski, Z. Lalak and S. Pokorski, Phys. Lett. **B509**, 337 (2001).
[17] R. Altendorfer, J. Bagger and D. Nemeschansky, Phys. Rev. **D63**, 125025 (2001).
[18] E. Bergshoeff, R. Kallosh and A. Van Proeyen, JHEP **0010**, 033 (2000).
[19] P. Brax, A. Falkowski and Z. Lalak, Phys.Lett. **B521** 105-113, (2001).
[20] M. Fabinger and P. Horava, Nucl. Phys. **B580**, 243 (2000).
[21] K. S. Stelle, "BPS branes in supergravity", hep-th/9803116.
[22] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, Phys. Lett. **B189**, 75 (1987).
[23] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk Phys.Lett.**B76** 409-412,(1978).
[24] P. Brax and J. Mourad, Phys.Lett. **B408** 142-150, (1997).
[25] K. Lechner and M. Tonin, Nucl. Phys. **B475**, 535 (1996).
[26] M. Tonin, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 1983 (1989).
[27] P. Brax , G. Mandal and Y. Oz Phys.Rev.**D63** 064008, (2001)
[28] B. Zhou and C. J. Zhu, 'The complete black brane solutions in D-dimensional coupled gravity system," ,hep-th/9905146.
[29] P. Brax and D.A. Steer, JHEP 0205:016,2002
[30] M. Gunaydin, G. Sierra and P.K. Townsend (Cambridge U.) Nucl.Phys.**B253** 573, (1985).
[31] R. Emparan, JHEP **9906**, 036 (1999).
[32] P. Brax, Phys.Lett.**B506** 362-368, (2001).
[33] G. W. Gibbons and G. Papadopoulos, Commun. Math. Phys. **202**, 593 (1999).
[34] B. A. Ovrut, T. Pantev and J. Park JHEP 0005 (2000) 045.
[35] P. Brax, C. van de Bruck and A.C. Davis JHEP 0110 (2001) 026.
[36] P. Brax and A.C. Davis, Phys.Lett.**B497** 289-295,(2001).
[37] . P. Binetruy, J.M. Cline and C. Grojean Phys.Lett. **B489** (2000) 403-410.
[38] P. Brax and A.C. Davis , Phys.Lett.**B513** 156-162,(2001).
[39] P. Brax, C van de Bruck, A.C. Davis and C.S. Rhodes Phys.Rev.**D65** 121501,(2002).
[40] A. Kehagias and E. Kiritsis, JHEP 9911:022,1999.
[41] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000).
[42] P. Binetruy , C. Deffayet and D. Langlois, Nucl.Phys. **B615** 219-236, (2001).
[43] P. Brax , C. van de Bruck, A.C. Davis and C.S. Rhodes, Phys.Lett.**B531** 135-142, (2002).
[44] T. Damour and K. Nordtvedt, Phys. Rev. **D48**, 3436 (1993).
[45] C. Charmousis, R. Gregory and V. A. Rubakov, Phys. Rev. **D62**, 067505 (2000).
[46] P. Bowcock, C. Charmousis and R. Gregory, Class. Quant. Grav. **17**, 4745 (2000).
[47] P. Kraus, JHEP **9912**, 011 (1999).
[48] P. Brax and A.C. Davis JHEP 0105:007,2001
[49] K. i. Maeda and D. Wands, Phys. Rev. **D62**, 124009 (2000).
[50] A. Mennim and R. A. Battye, Class. Quant. Grav. **18**, 2171 (2001).
[51] J. P. Uzan, Submitted to Rev.Mod.Phys.
[52] C-M. Chen, D. V. Gal'tsov and M. Gutperle, "S-brane Solutions in Supergravity Theories", hep-th/0204071.
[53] S. Kachru, M. Schulz and S. Trivedi, " Moduli Stabilization from Fluxes in a Simple IIB Orientifold" hep-th/0201028.