



# Limite asymptotique de schémas d'éléments finis linéaires discontinus lumpés en régime de diffusion

Gerald Samba

## ► To cite this version:

Gerald Samba. Limite asymptotique de schémas d'éléments finis linéaires discontinus lumpés en régime de diffusion. Rapport CEA-R-5960. 2001. <hal-00341627>

**HAL Id: hal-00341627**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00341627>**

Submitted on 25 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Limite asymptotique de schémas d'éléments finis  
linéaires discontinus lumpés en régime de diffusion

G.Samba  
CEA, DIF, F-91297 Arpajon, France

Mars 2001

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Etude en géométrie 1D</b>	<b>5</b>
2.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés . . . . .	5
2.2	Limite diffusion . . . . .	8
2.2.1	Isotropie . . . . .	8
2.2.2	Equation du flux . . . . .	8
2.2.3	Continuité . . . . .	9
2.2.4	Expression du flux . . . . .	9
2.2.5	Conditions aux limites . . . . .	10
2.3	Résumé . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Etude en géométrie 2D plane</b>	<b>14</b>
3.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés . . . . .	14
3.2	Limite diffusion . . . . .	18
3.2.1	Isotropie . . . . .	18
3.2.2	Equation du flux . . . . .	18
3.2.3	Continuité . . . . .	20
3.2.4	Expression du flux . . . . .	22
3.2.5	Conditions aux limites . . . . .	25
3.3	Résumé . . . . .	29
3.4	Variante des éléments finis linéaires discontinus lumpés . . . . .	29
3.5	Limite diffusion . . . . .	30
3.5.1	Isotropie . . . . .	30
3.5.2	Equation du flux . . . . .	30
3.5.3	Continuité . . . . .	30
3.5.4	Expression du flux . . . . .	31
3.5.5	Conditions aux limites . . . . .	33
3.6	Résumé . . . . .	33
3.7	Méthode SCB . . . . .	34
3.8	Limite diffusion . . . . .	34
3.8.1	Isotropie . . . . .	34
3.8.2	Equation du flux . . . . .	35

3.8.3	Continuité . . . . .	35
3.8.4	Expression du flux . . . . .	35
3.9	Résumé . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Etude en géométrie 2D cylindrique</b>	<b>37</b>
4.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés . . . . .	37
4.2	Limite diffusion . . . . .	41
4.2.1	Isotropie . . . . .	41
4.2.2	Equation du flux . . . . .	41
4.2.3	Continuité . . . . .	43
4.2.4	Expression du flux . . . . .	43
4.2.5	Conditions aux limites . . . . .	45
4.3	Résumé . . . . .	47

# Chapitre 1

## Introduction

Il est souhaitable de trouver une méthode permettant de résoudre l'équation de transport des photons aussi bien dans les zones transparentes que dans celles où les processus de diffusion ou d'émission-absorption sont dominants. Or, ces dernières zones nécessitent généralement des maillages de taille prohibitive. Avec les méthodes de Monte-Carlo standard sans biaisage particulier, elles nécessitent des tailles de mailles de l'ordre du libre-parcours et des pas de temps de l'ordre du temps de collision. On est donc conduit à coupler le transport Monte-Carlo dans les zones transparentes à la résolution de l'équation de diffusion dans les milieux opaques [11]. Cette méthode pose de nombreuses questions qui ne sont pas complètement résolues. Par exemple : comment placer la frontière entre milieux transparents et milieux opaques sachant que la caractérisation de ces milieux peut dépendre de la fréquence des photons ? Certains schémas déterministes permettent de lever ces difficultés. L'objet de ce rapport est d'étudier leurs propriétés en milieu diffusif.

On sait qu'un schéma qui approche correctement la solution de l'équation du transport approche également celle de l'équation de diffusion (là où cette approximation est valable) quand la taille des mailles est de l'ordre du libre-parcours moyen [7]. En revanche, cette propriété n'est pas toujours vraie sur un maillage beaucoup plus grossier résolvant les longueurs de gradient caractéristiques du problème : par exemple, en diffusion Rosseland, un maillage comportant une centaine de libre-parcours par maille peut résoudre correctement la variation de la température et être adapté à un schéma pour l'équation de diffusion Rosseland. Par contre, un schéma qui résout l'équation du transport sur ce maillage peut donner une solution complètement fautive. On dira alors que ce schéma n'a pas la limite diffusion.

On cherche à savoir parmi ces schémas quels sont ceux qui ont la limite diffusion. L'intérêt de cette démarche est double :

- On peut trouver le schéma qui permet d'économiser la place mémoire et le temps calcul puisqu'il se satisfait de maillages grossiers dans les

zones où l'approximation de la diffusion est valable.

- On peut trouver le schéma de diffusion associé au schéma de transport qui permet une accélération efficace de ce dernier (diffusion synthétique).

La démarche pour arriver à cette fin consiste à utiliser la même méthode dans le schéma discret que celle qui, dans l'équation de transport continue, permet de trouver comme limite l'équation de diffusion. On rappelle la méthode pour l'équation de transport continue. On introduit un paramètre petit  $\epsilon$  : le libre parcours divisé par une longueur caractéristique, on développe la solution de l'équation  $u$  par rapport aux puissances de ce paramètre :  $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$  et on démontre que  $u_0$  est solution d'une équation de diffusion [9]. Pour le schéma discret, on introduit le même paramètre dans l'équation de transport discrétisée, ainsi que le même développement pour la solution discrète. On trouve le schéma numérique dont  $u_0$  est solution puis on détermine si ce schéma correspond à une discrétisation consistante de l'équation de diffusion [8].

La première partie de ce rapport concerne un schéma aux éléments finis linéaires discontinus en 1D plan infini. On y redémontre un résultat de Larsen et de Morel [6, 10]. La démonstration est conduite en 5 étapes.

- Tout d'abord, on démontre que  $u_0$  est isotrope.
- On trouve ensuite l'équation vérifiée par le moment angulaire d'ordre 1 de  $u_1$ . C'est l'équivalent discret de l'équation du flux :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ .
- On démontre ensuite que  $u_0$  est continue.
- Puis on relie le flux à  $u_0$  par l'équivalent discret de la loi de Fick  $\vec{F} = -\frac{1}{3\sigma} \vec{\nabla} u_0$ . On démontre qu'on trouve un schéma d'éléments finis linéaires continus.
- On s'attache ensuite à déterminer les conditions aux limites de cette équation de diffusion. Lorsque l'intensité entrante  $g(\mu)$  est anisotrope, nous savons qu'il se développe sur quelques libre-parcours une couche limite dans laquelle l'intensité devient isotrope. Ce problème de couche limite se pose également à l'interface d'un milieu transparent et d'un milieu diffusif lorsque l'intensité provenant du milieu transparent sur l'interface est anisotrope [13]. Lorsqu'on fait l'hypothèse de la diffusion, la "bonne" condition aux limites n'est pas la condition de Dirichlet en prenant comme valeur de l'intensité au bord :  $\int 2\mu g(\mu) d\mu$  mais la condition dite de Chandrasekhar [4] dont la version approchée consiste à prendre comme condition de Dirichlet :  $\int (\mu + \frac{3}{2}\mu^2) g(\mu) d\mu$ . On démontre que la solution discrète  $u_0$  possède la propriété remarquable d'être égale à  $\int (\mu + \frac{3}{2}\mu^2) g(\mu) d\mu$  au bord, ce qui signifie qu'il n'est pas nécessaire de mailler au libre-parcours la couche limite pour avoir la bonne solution à l'intérieur du domaine.

Dans la deuxième partie, on étudie en géométrie 2D plane, 3 schémas qui sont des extensions du schéma précédemment étudié en 1D.

Dans la troisième partie, on étudie en géométrie 2D cylindrique, le premier schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés.

## Chapitre 2

# Etude en géométrie 1D

### 2.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On part de l'équation de transport en plan infini 1D.

On redémontre ci dessous un résultat de Larsen et de Morel [5, 10] :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = \sigma \tilde{u}, \quad (2.1)$$

avec  $x$  dans  $[0, 1]$ ,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(\mu) d\mu,$$

et pour conditions aux limites :

$$u(0, \mu \geq 0) = g(\mu), \quad u(1, \mu \leq 0) = h(\mu).$$

Par rapport au chapitre précédent, on a supposé que  $\sigma_a = 0$  mais prendre en compte une section d'absorption non nulle ne pose pas de difficulté particulière.

Les directions discrètes sont notées  $\mu_m$ , la maille  $j$  est l'intervalle  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ , on suppose pour plus de simplicité que le maillage est uniforme de pas  $\Delta x$ .

La valeur de  $u$  sur la demi-maille  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_j]$  et pour la direction  $\mu_m$  est notée  $u_{j,G}^m$ .

La valeur de  $u$  sur la demi-maille  $[x_j, x_{j+\frac{1}{2}}]$  et pour la direction  $\mu_m$  est notée  $u_{j,D}^m$ .

$\sigma$  est supposé linéaire discontinue.

$\sigma_{j,G}$  et  $\sigma_{j,D}$  sont les valeurs de  $\sigma$  dans la maille  $j$  aux sommets  $x_{j-\frac{1}{2}}$  et  $x_{j+\frac{1}{2}}$ .

On pose :

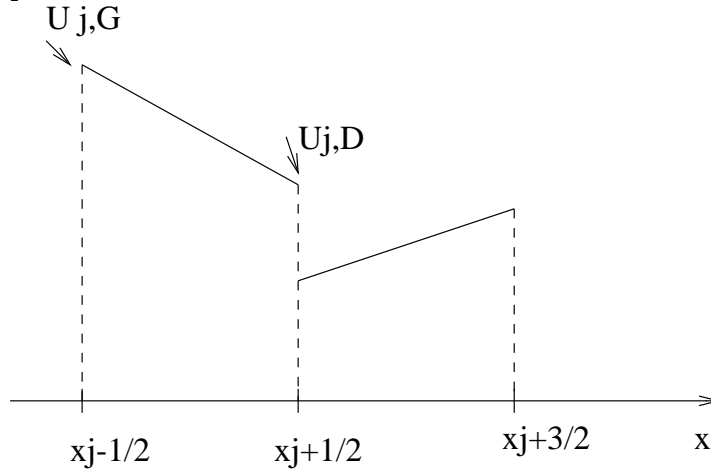


$$u_j^m = \frac{u_{j,G}^m + u_{j,D}^m}{2}.$$

Le “lumping” ou “condensation” de la matrice de masse consiste à faire l’approximation :

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lambda_A \lambda_B dx = \delta_A^B \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lambda_A dx$$

dans le terme de scattering  $\sigma u - \sigma \tilde{u}$ , où  $\lambda_A$  est la fonction affine qui vaut 1 au sommet A et 0 au sommet B (A et B pouvant être les points  $x_{j-\frac{1}{2}}$  ou  $x_{j+\frac{1}{2}}$ ).



Le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés s’écrit en 1D :

Trouver  $u_{j,G}^m, u_{j,D}^m$  solutions de :

$$\begin{cases} \mu_m(u_j^m - u_{j-\frac{1}{2}}^m) + \frac{u_{j,G}^m}{2} \sigma_{j,G} \Delta x = \frac{\tilde{u}_{j,G}}{2} \sigma_{j,G} \Delta x, \\ \mu_m(u_{j+\frac{1}{2}}^m - u_j^m) + \frac{u_{j,D}^m}{2} \sigma_{j,D} \Delta x = \frac{\tilde{u}_{j,D}}{2} \sigma_{j,D} \Delta x, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec :

$$\tilde{u} = \sum_m \omega_m u^m,$$

et

$$\begin{aligned} u_{j-\frac{1}{2}}^m &= u_{j-1,D}^m \text{ si } \mu_m \geq 0, \\ u_{j-\frac{1}{2}}^m &= u_{j,G}^m \text{ si } \mu_m \leq 0, \end{aligned}$$

pour la maille 1 =  $[x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}]$ , ( $x_{\frac{1}{2}} = 0$ )

$$\begin{aligned} u_{\frac{1}{2}}^m &= g(\mu_m) \text{ si } \mu_m \geq 0, \\ u_{\frac{1}{2}}^m &= u_{1,G}^m \text{ si } \mu_m \leq 0, \end{aligned}$$

de même pour la dernière maille  $N = [x_{N-\frac{1}{2}}, x_{N+\frac{1}{2}}]$ , ( $x_{N+\frac{1}{2}} = 1$ )

$$\begin{aligned} u_{N+\frac{1}{2}}^m &= h(\mu_m) \text{ si } \mu_m \leq 0, \\ u_{N+\frac{1}{2}}^m &= u_{N,D}^m \text{ si } \mu_m \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque : pour  $\mu_m \geq 0$ ,  $u_{j-\frac{1}{2}}^m$  est une donnée pour le système (2.2) et  $u_{j+\frac{1}{2}}^m$  une inconnue et inversement pour  $\mu_m \leq 0$ .

Les  $\omega_m$  sont les poids d'une formule de quadrature sur  $[-1, +1]$  normalisés de telle sorte que  $\sum_m \omega_m = 1$ .

Dans la limite diffusion, la profondeur optique (nombre de libres parcours) tend vers l'infini dans chaque maille, on introduit donc le petit paramètre  $\epsilon = \frac{1}{\tilde{\sigma}\Delta x}$ . On note :  $\tilde{\sigma}$ , une valeur caractéristique de  $\sigma$ ,

$$\sigma_{j,G} = \frac{\sigma_{j,G}}{\tilde{\sigma}},$$

$$\sigma_{j,D} = \frac{\sigma_{j,D}}{\tilde{\sigma}}.$$

Le système (2.2) se réécrit :

$$\epsilon\mu_m(u_j^m - u_{j-\frac{1}{2}}^m) + \sigma_{j,G} \frac{u_{j,G}^m}{2} = \sigma_{j,G} \frac{\tilde{u}_{j,G}}{2}, \quad (2.3)$$

$$\epsilon\mu_m(u_{j+\frac{1}{2}}^m - u_j^m) + \sigma_{j,D} \frac{u_{j,D}^m}{2} = \sigma_{j,D} \frac{\tilde{u}_{j,D}}{2}. \quad (2.4)$$

On introduit le développement :

$$u_{j,G}^m = u_{j,G,0}^m + \epsilon u_{j,G,1}^m + \epsilon^2 u_{j,G,2}^m + \dots,$$

$$u_{j,D}^m = u_{j,D,0}^m + \epsilon u_{j,D,1}^m + \epsilon^2 u_{j,D,2}^m + \dots$$

On veut montrer que  $\tilde{u}_0$  ( $\tilde{u}_0 = \sum_m \omega_m u_0^m$ ) est continue soit :

$$\tilde{u}_{j,D,0} = \tilde{u}_{j+1,G,0} = \tilde{u}_{j+\frac{1}{2},0},$$

et que  $\tilde{u}_{j+\frac{1}{2},0}$  vérifie une équation discrète consistante avec l'équation de diffusion associée à l'équation de transport continue :

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{3\sigma} \frac{d}{dx} u = 0.$$

ici,  $\sigma$  est la quantité dimensionnée de l'équation de transport continue (2.1).

On précisera ensuite les conditions aux limites de cette équation discrète.

## 2.2 Limite diffusion

### 2.2.1 Isotropie

On fait dans la suite l'hypothèse que le système de quadrature vérifie la relation :

$$\sum_m \mu_m \omega_m = 0, \quad (2.5)$$

ce qui est vérifié s'il est symétrique par rapport à 0. On montre que  $u$  est isotrope à l'ordre 0.

Pour cela, on commence par identifier les termes d'ordre 0 dans (2.3) et (2.4).

Il vient :

$$\begin{aligned} u_{j,G,0}^m &= \tilde{u}_{j,G,0}, \\ u_{j,D,0}^m &= \tilde{u}_{j,D,0}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $u$  ne dépend pas de  $m$  et est donc isotrope à l'ordre 0.

### 2.2.2 Equation du flux

On montre que le flux discret ;  $\sum_m \omega_m \mu_m u_1^m$ , vérifie une version discrète de l'équation du flux :  $\frac{d}{dx}(F) = 0$ .

En écrivant l'équation (2.4) sur la maille  $j$  et l'équation (2.3) sur la maille  $j+1$ , en les multipliant par  $\omega_m$ , en les sommant sur les  $m$  et en les ajoutant, on obtient :

$$\epsilon \sum_m (\omega_m \mu_m u_{j+1}^m - \omega_m \mu_m u_j^m) + \sum_m \omega_m \left( \frac{\sigma_{j,D} u_{j,D}^m + \sigma_{j+1,G} u_{j+1,G}^m}{2} \right) = \frac{\sigma_{j,D} \tilde{u}_{j,D} + \sigma_{j+1,G} \tilde{u}_{j+1,G}}{2}.$$

On pose :

$$J_j^1 = \sum_m \omega_m \mu_m u_{j,1}^m.$$

En identifiant les termes facteurs de  $\epsilon^2$ , il vient :

$$J_{j+1}^1 - J_j^1 + \sum_m \omega_m \left( \frac{\sigma_{j,D} u_{j,D,2}^m + \sigma_{j+1,G} u_{j+1,G,2}^m}{2} \right) = \frac{\sigma_{j,D} \tilde{u}_{j,D,2} + \sigma_{j+1,G} \tilde{u}_{j+1,G,2}}{2},$$

donc

$$J_{j+1}^1 - J_j^1 = 0. \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Continuité

On établit maintenant la continuité de  $u$  à l'ordre 0. Pour cela, nous prenons l'équation (2.3), nous sommions sur les  $m$  en multipliant par le poids  $\omega_m$ . En identifiant les termes d'ordre 1, on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{j,0}^m - u_{j-\frac{1}{2},0}^m) + \sigma_{j,G} \sum_m \omega_m \frac{u_{j,G,1}^m}{2} = \sigma_{j,G} \frac{\tilde{u}_{j,G,1}}{2},$$

donc :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{j,0}^m - u_{j-\frac{1}{2},0}^m) = 0.$$

Or  $u_{j,0}^m$  ne dépend pas de  $m$ , donc grâce à (2.5), on a :

$$\sum_m \omega_m \mu_m u_{j-\frac{1}{2},0}^m = 0,$$

ou

$$\sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m u_{j-1,D,0}^m = \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| u_{j,G,0}^m,$$

soit

$$\tilde{u}_{j-1,D,0} \sum_{\mu_m \geq 0} \mu_m \omega_m = \tilde{u}_{j,G,0} \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m|.$$

On obtient grâce à (2.5) :

$$\tilde{u}_{j-1,D,0} = \tilde{u}_{j,G,0}, \quad (2.7)$$

ce qui prouve la continuité de  $\tilde{u}_0$ .

### 2.2.4 Expression du flux

Nous allons maintenant exprimer  $J^1$  en fonction de  $\tilde{u}_0$ , ce qui permettra, en remplaçant dans (2.6) de trouver l'équation de diffusion vérifiée par  $\tilde{u}_0$ .

On pose  $\tilde{u}_{j-1,D,0} = \tilde{u}_{j,G,0} = \tilde{u}_{j-\frac{1}{2},0}$ . On multiplie (2.3) et (2.4) par  $\mu_m \omega_m$ , on somme sur les  $m$  et on identifie les termes d'ordre 1 donc :

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{j,0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \sigma_{j,G} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{j,G,1}^m}{2} = 0, \quad (2.8)$$

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j,0}) + \sigma_{j,D} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{j,D,1}^m}{2} = 0. \quad (2.9)$$

En supposant que :

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 = \frac{1}{3}, \quad (2.10)$$

en sommant les deux équations après division par  $\sigma_{j,G}$  et  $\sigma_{j,D}$ , on obtient :

$$\frac{1}{3\sigma_{j,G}}(u_{j,0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{3\sigma_{j,D}}(u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j,0}) + J_j^1 = 0.$$

Donc puisque

$$u_{j,0} = \frac{u_{j-\frac{1}{2},0} + u_{j+\frac{1}{2},0}}{2},$$

on a :

$$\frac{1}{6\sigma_{j,G}}(u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{6\sigma_{j,D}}(u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + J_j^1 = 0,$$

$$J_j^1 = -\frac{1}{3\sigma_j}(u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) \quad (2.11)$$

avec :

$$\frac{2}{\sigma_j} = \frac{1}{\sigma_{j,G}} + \frac{1}{\sigma_{j,D}}.$$

En remplaçant dans (2.6), on trouve :

$$-\frac{1}{3\sigma_{j+1}}(u_{j+\frac{3}{2},0} - u_{j+\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{3\sigma_j}(u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) = 0,$$

ce qui est une discrétisation aux noeuds consistante de l'équation de diffusion.

## 2.2.5 Conditions aux limites

Nous allons maintenant chercher quelles sont les conditions aux limites de cette équation, par exemple à gauche, ce que l'on doit prendre comme valeur de  $u_{\frac{1}{2},0}$ .

On écrit pour la première maille (2.3) et (2.4) :

$$\begin{aligned} \epsilon\mu_m(u_1^m - u_{\frac{1}{2}}^m) + \sigma_{1,G}\frac{u_{1,G}^m}{2} &= \sigma_{1,G}\frac{\tilde{u}_{1,G}}{2}, \\ \epsilon\mu_m(u_{\frac{3}{2}}^m - u_1^m) + \sigma_{1,D}\frac{u_{1,D}^m}{2} &= \sigma_{1,D}\frac{\tilde{u}_{1,D}}{2}. \end{aligned}$$

La première équation à l'ordre 0 donne :

$$u_{1,G,0}^m = \tilde{u}_{1,G,0},$$

donc  $u_{1,G,0}^m$  ne dépend pas de  $m$ .

De même,  $u_{1,D,0}^m$  ne dépend pas de  $m$ , donc  $u_{1,0}^m$  ne dépend pas de  $m$ .

A l'ordre 1, en sommant sur les  $m$  et en multipliant par  $\omega_m$ , on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{1,0}^m - u_{\frac{1}{2},0}^m) = 0.$$

Ici,  $u_{\frac{1}{2}}^m$  est une donnée pour  $\mu_m \geq 0$ , notons  $u_{\frac{1}{2},0}^m = g_0^m$  pour  $\mu_m \geq 0$ .  
Puisque  $u_{1,0}^m$  ne dépend pas de  $m$ , on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m u_{\frac{1}{2},0}^m = 0,$$

soit encore :

$$\sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m g_0^m = \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| u_{1,G,0}^m.$$

Donc :

$$u_{1,G,0}^m = \tilde{u}_{1,G,0} = 4 \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m g_0^m, \quad (2.12)$$

à condition que le système de quadrature vérifie :

$$\sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| = \frac{1}{4}. \quad (2.13)$$

A l'ordre 0, la valeur à gauche dans la première maille est donc entièrement déterminée par la condition aux limites, mais nous allons voir que  $u_{\frac{1}{2},0} = \tilde{u}_{\frac{1}{2},0}$  n'est pas égale à  $\tilde{u}_{1,G,0}$ .

Pour cela, nous allons déterminer  $u_{\frac{1}{2},0}$  en utilisant (2.11) :

$$J_1^1 = -\frac{1}{3\sigma_1} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{\frac{1}{2},0}). \quad (2.14)$$

On a (2.8,2.9) pour  $j = 1$  :

$$\begin{aligned} \sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{1,0} - u_{\frac{1}{2},0}^m) + \sigma_{1,G} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{1,G,1}^m}{2} &= 0, \\ \sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) + \sigma_{1,D} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{1,D,1}^m}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sigma_{1,G}} \sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{1,0} - u_{\frac{1}{2},0}^m) + \frac{1}{\sigma_{1,D}} \frac{1}{3} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) + J_1^1 = 0,$$

$$\begin{aligned} J_1^1 = -\frac{1}{\sigma_{1,D}} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) \frac{1}{3} - \frac{1}{\sigma_{1,G}} u_{1,0} \frac{1}{3} + \frac{1}{\sigma_{1,G}} \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m \\ + \frac{1}{\sigma_{1,G}} u_{1,G,0} \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

En substituant  $u_{1,0}$  par  $\frac{u_{1,G,0} + u_{\frac{3}{2},0}}{2}$  dans l'équation précédente, on obtient, en supposant que  $\sigma_{1,G} = \sigma_{1,D} = \sigma_1$  pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned}
J_1^1 &= -\frac{1}{2\sigma_1}(u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,G,0})\frac{1}{3} - \frac{1}{\sigma_1}\frac{u_{1,G,0} + u_{\frac{3}{2},0}}{2}\frac{1}{3} \\
&\quad + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{\mu_m \geq 0}\omega_m\mu_m^2 g_0^m + \frac{1}{\sigma_1}u_{1,G,0}\frac{1}{6}, \\
J_1^1 &= -\frac{1}{3\sigma_1}u_{\frac{3}{2},0} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{\mu_m \geq 0}\omega_m\mu_m^2 g_0^m + \frac{1}{6\sigma_1}u_{1,G,0}, \\
J_1^1 &= -\frac{1}{3\sigma_1}(u_{\frac{3}{2},0} - \frac{1}{2}u_{1,G,0} - 3\sum_{\mu_m \geq 0}\omega_m\mu_m^2 g_0^m). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

On a donc en utilisant (2.14, 2.12, 2.15) :

$$u_{\frac{1}{2},0} = 2\sum_{\mu_m \geq 0}\omega_m\mu_m g_0^m + 3\sum_{\mu_m \geq 0}\omega_m\mu_m^2 g_0^m.$$

Ceci est la condition aux limites de l'équation de diffusion associée au transport. Il faut noter que la condition aux limites "exacte" [4] associée à l'équation de diffusion en continu est :

$$u(0) = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}\mu H(\mu)g(\mu)d\mu,$$

où

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\mu H(\mu) \simeq \mu + \frac{3}{2}\mu^2.$$

Remarque : pour obtenir la condition aux limites associée à une intensité entrante anisotrope, il faut ajouter une correction d'ordre  $\epsilon$  à la condition aux limites précédente [12].

On retrouve bien la version discrète de :

$$u(0) = \int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(\mu)d\mu.$$

Il faut noter que si l'intensité entrante est isotrope ( $g_0^m$  indépendant de  $m$ ), on trouve le résultat exact quelle que soit la valeur de  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}}$ . En effet :

$$u_{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}(2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}})g_0 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}}g_0 = g_0.$$

On a alors :

$$u_{\frac{1}{2},0} = \tilde{u}_{1,G,0} = g_0.$$

## 2.3 Résumé

Sous des hypothèses naturelles sur la quadrature utilisée (2.5,2.10,2.13), le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés a bien la limite diffusion. Les conditions aux limites à l'ordre 0 sont des conditions de Dirichlet avec une pondération en  $\mu + \frac{3}{2}\mu^2$  de l'intensité entrante. Ceci constitue un résultat remarquable et surprenant car si l'intensité entrante n'est pas isotrope, il y a une couche limite qu'il est normalement indispensable de mailler très finement (avec des mailles de l'ordre du libre-parcours) pour avoir un résultat précis. Ce schéma permet d'avoir un résultat précis sans avoir à mailler finement le bord du domaine.



## Chapitre 3

# Etude en géométrie 2D plane

### 3.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On étend les éléments finis linéaires discontinus lumpés aux triangles en géométrie plane pour l'équation :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = \sigma \tilde{u},$$

avec pour conditions aux limites :  $u(x, y, \vec{\Omega}) = g(x, y, \vec{\Omega})$  sur les points de la frontière où  $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \leq 0$ ,  $\vec{n}$  étant la normale extérieure à la frontière,

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} u d\vec{\Omega}.$$

Le schéma s'écrit :

Trouver sur le triangle  $T$  pour la direction  $\vec{\Omega}_m = (\alpha_m, \beta_m)$ ,  $u_T^m$  solution de :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_T^m dx dy + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i dx dy = \sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i dx dy, \quad (3.1)$$

où  $i$  vaut  $A, B$  ou  $C$ , sommets du triangle  $T$ .

Les  $\lambda_i$  sont les 3 fonctions de base :

$$u_T^m = \sum_i \lambda_i u_{T,i}^m,$$

$b$  est une arête du triangle  $T$ ,

$\sum_b$  désigne la somme sur les 3 arêtes du triangle  $T$ ,

$\vec{n}_b$  est le vecteur unitaire extérieur (par rapport au triangle  $T$ ) à l'arête  $b$ ,

$u_b^m$  est égal à la restriction de  $u_T^m$  sur  $b$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b \geq 0$  ou celle de  $u_{T_b}^m$  sur  $b$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b \leq 0$  ( $T_b$  est le triangle adjacent au triangle  $T$  par l'arête  $b$ ).

Nous allons transformer (3.1) sous la forme d'un schéma de type volumes finis. Soit  $AH$  la hauteur issue de  $A$ ,  $G$  le barycentre du triangle  $ABC$ ,  $M$  le milieu de  $AB$ ,  $L$  le milieu de  $AC$ , on a :

$$\int_T \lambda_A dx dy = \text{aire}(AMGL) = \frac{S_T}{3},$$

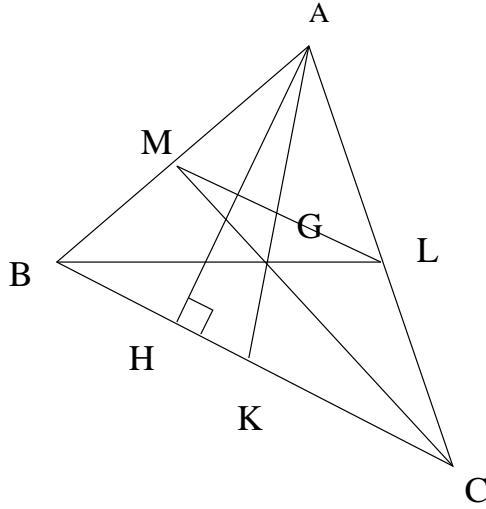
où  $S_T$  est l'aire du triangle  $ABC$ , et

$$\begin{aligned} \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_A) u_T^m dx dy &= -(\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|}) (\frac{1}{|\vec{AH}|}) \text{aire}(ABC) u_G^m \\ &= -\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|} \frac{|\vec{BC}|}{2} u_G^m = -(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| u_G^m, \end{aligned}$$

avec :

$$u_G^m = \frac{1}{3} \sum_i u_{T,i}^m,$$

et  $\vec{n}_{ML}$  le vecteur unitaire extérieur (par rapport au triangle  $AML$ ) normal au segment  $ML$ .



On peut interpréter  $u_{T,A}^m$  comme la valeur de  $u$  à l'intérieur du quadrilatère  $AMGL$  et  $u_G^m$  comme la valeur de  $u$  associée au côté  $ML$ .

On peut réécrire le schéma de la façon suivante. Il s'agit de trouver  $u_{T,A}^m$ ,  $u_{T,B}^m$ ,  $u_{T,C}^m$  solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| u_G^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_B ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}) |MK| u_G^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_C ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}) |KL| u_G^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{array} \right.$$

Or, en notant :

$\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{AC}, \vec{n}_{BC}$  les vecteurs unitaires normaux extérieurs (par rapport au triangle  $T$ ) à  $AB$  et  $AC$  et  $BC$ ,

$\{ABC\}$  le point  $G$ ,  $u_{\{ABC\}} = \frac{1}{3}(u_A + u_B + u_C)$ ,

$\{AB\}$  le point  $\{AB\} = \frac{2}{3}(A) + \frac{1}{3}(B)$ , soit le barycentre de  $A, B$  avec les

poids  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  et

$$u_{\{AB\}} = \frac{2}{3}u_A + \frac{1}{3}u_B,$$

$$u_{\{BA\}} = \frac{2}{3}u_B + \frac{1}{3}u_A, \text{ et les formules identiques pour } \{AC\}, \{CA\}, \{BC\}, \{CB\},$$

on a :

$$\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_{AB} u_b^m \lambda_A ds = \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m,$$

où la valeur de  $u$  au point  $\{AB\}$  est à prendre dans le triangle  $T$  ou le triangle  $T_b$  suivant le signe de  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b$ .

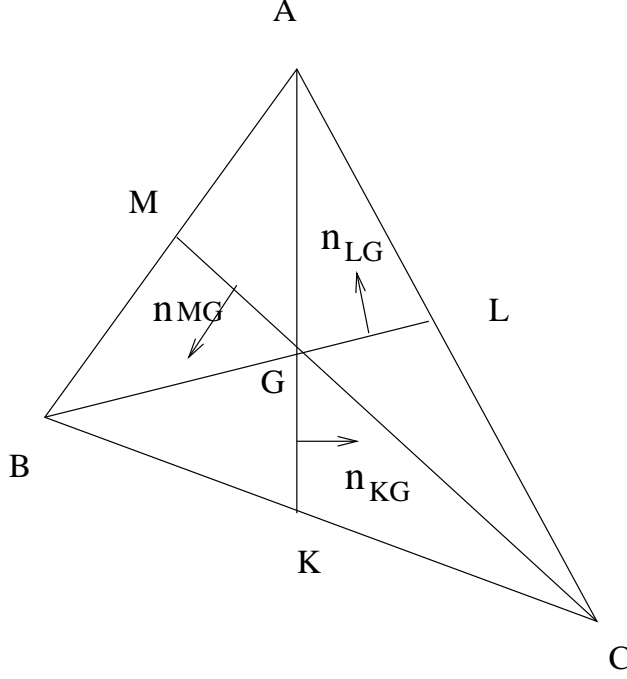
Donc :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM| u_{\{AB\}}^m + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}) |AL| u_{\{AC\}}^m.$$

Le schéma se réécrit : trouver  $u_{T,A}^m, u_{T,B}^m, u_{T,C}^m$  solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_{\{BC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_{\{CA\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

ou encore sous une forme de type volumes finis faisant apparaître le caractère conservatif de l'équation, si les vecteurs  $\vec{n}_{MG}$ ,  $\vec{n}_{LG}$ ,  $\vec{n}_{KG}$  sont orientés comme sur la figure suivante :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| u_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| u_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_{\{CA\}}^m - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| u_{\{ABC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{array} \right.$$

On reprend l'étude asymptotique faite précédemment en 1D sur le système d'équations écrit sous la forme 3.2.

On suppose que le milieu est optiquement épais, c'est à dire que si  $h$  désigne une longueur caractéristique du maillage et  $\sigma$  la section efficace caractéristique du système, alors  $\epsilon = \frac{1}{\sigma h}$  est petit.

On adimensionne les équations 3.2 pour faire apparaître  $\epsilon$ . On écrit  $\sigma_{T,i}$  pour  $\frac{\sigma_{T,i}}{\sigma}$ ,  $S_T$  pour  $\frac{S_T}{h^2}$  et toutes les longueurs par exemple  $|AM|$  pour  $\frac{|AM|}{h}$ .  
Le schéma s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_{\{BA\}} + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_{\{BC\}} \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_{\{CB\}}^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_{\{CA\}}^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}.
\end{array} \right. \quad (3.3)$$

On introduit le développement :

$$\begin{aligned}
u_{T,A}^m &= u_{T,A,0}^m + \epsilon u_{T,A,1}^m + \epsilon^2 u_{T,A,2}^m + \dots, \\
u_{T,B}^m &= u_{T,A,0}^m + \epsilon u_{T,B,1}^m + \epsilon^2 u_{T,B,2}^m + \dots, \\
u_{T,C}^m &= u_{T,C,0}^m + \epsilon u_{T,C,1}^m + \epsilon^2 u_{T,C,2}^m + \dots
\end{aligned}$$

## 3.2 Limite diffusion

### 3.2.1 Isotropie

A l'ordre 0, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{T,A}^m &= \tilde{u}_{T,A,0}, \\
u_{T,B}^m &= \tilde{u}_{T,B,0}, \\
u_{T,C}^m &= \tilde{u}_{T,C,0},
\end{aligned}$$

donc  $u$  est isotrope à l'ordre 0.

### 3.2.2 Equation du flux

Pour un noeud global donné, on somme, sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 3.1).

On introduit une formule de quadrature discrète sur la sphère angulaire unité

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_2} f(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \simeq \sum_m \omega_m f(\vec{\Omega}_m).$$

On suppose que cette formule de quadrature vérifie :

$$\sum_m \omega_m = 1,$$

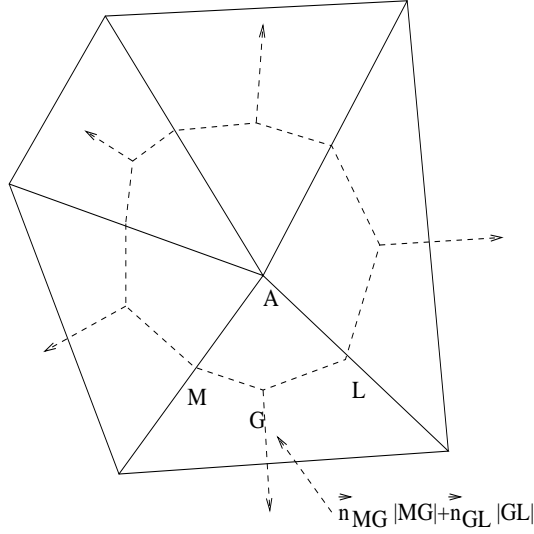


FIG. 3.1 – volume de contrôle autour de A

et que l'on a une hypothèse de symétrie, c'est à dire que pour tout  $\vec{n}$ , on a :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \geq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}|. \quad (3.4)$$

Cette dernière hypothèse n'est réalisée que de façon approchée sur un maillage quelconque. En effet, le nombre des axes de symétrie des formules de quadrature sur la sphère angulaire unité est forcément limité.

On somme sur les directions  $m$  et sur tous les triangles  $T$  ayant ce noeud en commun, les équations de 3.3 relatives à ce sommet. On suppose que dans tous les triangles  $T$  ayant ce noeud en commun, le point  $A$  dans la numérotation locale du triangle  $T$  correspond à ce noeud si bien que cela revient à faire cette somme sur la première équation de 3.3 :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m + \vec{n}_{ML} |ML| u_{T, \{ABC\}}^m) \\ + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

Si  $AB$  est un bras interne, la valeur de  $u_{\{AB\}}^m$  est celle du triangle  $T$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$  est positif ou du triangle adjacent à  $T$  par  $AB$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$  est négatif.

Si  $AB$  est un bras frontière, la valeur de  $u_{\{AB\}}^m$  est celle du triangle  $T$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$  est positif ou la valeur de la condition aux limites au point  $\{AB\}$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$  est négatif.

Les termes sur les arêtes "internes" du volume de contrôle autour du noeud global s'annulent, car la même arête apparaît 2 fois dans la somme ci-dessus mais avec des vecteurs unitaires normaux opposés, donc :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{T,\{ABC\}}^m + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \\ \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

On pose

$$\vec{J}_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m u_{T,\{ABC\},1}^m$$

qui est le vecteur flux discret.

En identifiant les termes facteurs de  $\epsilon^2$ , il vient :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A,2}^m \frac{S_T}{3} = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,2} \frac{S_T}{3}.$$

Soit :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| = 0, \quad (3.5)$$

ou sous forme conservative :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \{\vec{n}_{MG} |MG| + \vec{n}_{GL} |GL|\} = 0.$$

### 3.2.3 Continuité

Nous voudrions maintenant démontrer que  $\tilde{u}_0$  est continue. Nous reprenons la même démarche qu'en 1D. Pour cela, nous prenons l'équation (3.3), nous sommes sur les  $m$  en multipliant par le poids  $\omega_m$ . Il vient en identifiant les termes d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0}^m + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0}^m \quad (3.6) \\ + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0}^m + \sum_m \omega_m \sigma_{T,A} u_{j,A,1}^m \frac{S_j}{3} = \\ \sum_m \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,1} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

Or  $u_{\{ABC\},0}^m$ ,  $u_{\{AC\},0}^m$  et  $u_{\{AB\},0}^m$  sont isotropes en supposant que ni  $AB$  ni  $AC$  ne sont des arêtes frontières (la condition aux limites peut être anisotrope). Il reste :

$$\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0} + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0} = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned} -4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| |AM| u_{\{AB\},0} + 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \geq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0} = \\ 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}| |AL| u_{\{AC\},0} - 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} \geq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0}. \end{aligned}$$

Donc, d'après (3.4), on a :

$$\begin{aligned} -|AM| u_{T_{ext},\{AB\},0} + |AM| u_{T,\{AB\},0} = \\ |AL| u_{T_{ext},\{AC\},0} - |AL| u_{T,\{AC\},0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si l'arête  $AB$  est interne,  $u_{T_{ext},\{AB\},0}$  est la valeur de  $u$  au point  $\{AB\}$  sur le triangle adjacent à  $T$  par  $AB$ .

Si l'arête  $AB$  est sur le bord, on note

$$u_{T_{ext},\{AB\},0} = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g(\{AB\}, \vec{\Omega}_m, 0).$$

Cette notation permet d'avoir, si  $g$  est isotrope à l'ordre 0,

$$u_{T_{ext},\{AB\},0} = g(\{AB\}, 0).$$

Cette égalité est assurée si on suppose en plus de (3.4) que :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| \omega_m = \frac{1}{4}.$$

Pour que  $u$  à l'ordre 0 soit continue, nous allons prouver que :

$$\begin{aligned} u_{T_{ext},\{AB\},0} &= u_{T,\{AB\},0}, \\ u_{T_{ext},\{AC\},0} &= u_{T,\{AC\},0}. \end{aligned}$$

Le nombre d'inconnues sur un maillage triangulaire est 3 fois le nombre de triangles :  $3 * nt$ . Le nombre d'équations (3.7) par noeud est égal au nombre d'arêtes reliées à ce noeud moins une.

**Proposition 1** *L'espace vectoriel des  $3nt$  valeurs de  $u_0$  aux sommets du maillage vérifiant les équations (3.7) avec  $g=0$  est de dimension  $n_i$  où  $n_i$  est le nombre de sommets internes du maillage.*



**Preuve 1** Pour démontrer ce résultat, on raisonne par récurrence :

Si on a un seul triangle les 3 valeurs de  $u_0$  sont nécessairement fixées car on a 3 équations. La relation est donc vérifiée car  $n_i$  est nul.

Si on a un maillage triangulaire auquel on ajoute un triangle, soit ce triangle est adjacent par 1 face au maillage, auquel cas on ajoute 3 inconnues  $u_0$  mais aussi 3 équations qui sont indépendantes des autres donc la dimension de l'espace vectoriel reste égale à  $n_i$ , soit ce triangle est adjacent par 2 faces au maillage, auquel cas on ajoute seulement 2 équations qui restent indépendantes (2 pour les noeuds frontière, 0 pour le noeud interne), la dimension de l'espace vectoriel est donc augmentée de 1 mais également le nombre de sommets internes. Donc la relation est toujours vérifiée.

**Proposition 2** Si la quantité  $\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(\vec{\Omega}_m, 0)$  est continue,  $u_0$  est continue.

**Preuve 2** Supposons que  $g = 0$ . L'espace vectoriel des 3nt valeurs de  $u_0$  aux sommets du maillage vérifiant les équations (3.7) contient l'espace vectoriel des 3nt uplet nuls sur les noeuds du bord et continus aux noeuds internes qui est également de dimension  $n_i$ . Donc, ces 2 espaces vectoriels sont égaux. Donc  $u_0$  est nécessairement continue et nulle sur le bord.

Si maintenant  $g \neq 0$ , on construit un 3nt uplet  $u_g$  continu aux noeuds du maillage et égal à la valeur  $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(x, y, \vec{\Omega}_m, 0)$  aux noeuds frontière (ce qui est possible par hypothèse).  $u = u_0 - u_g$  satisfait les contraintes (3.7) avec  $g = 0$ . D'après ce qui précède,  $u$  est donc continue, nulle sur le bord. Donc  $u_0$  est continue égale à  $u_g$  sur le bord.

Nous allons maintenant chercher quel schéma de diffusion on obtient.

### 3.2.4 Expression du flux

On suppose dorénavant que :

$$\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m = \frac{1}{3} I.$$

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de  $u$  à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. On multiplie par  $\vec{\Omega}_m$  et on somme sur les directions les équations 3.3. On identifie les termes d'ordre 1.

Il vient :

$$\frac{1}{\sigma_{T,A}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,\{AC\},0} + \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sigma_{T,B}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,\{BC\},0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{\sigma_{T,C}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{BC} |CK| u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} |CL| u_{T,\{CA\},0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\},0}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{S_T}{3} (u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m + u_{T,C,1}^m) = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,\{AC\},0} + \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,\{BC\},0} + \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC} |CK| u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} |CL| u_{T,\{CA\},0} + \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\},0}) \\
& \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,\{AC\},0} + \vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,\{BC\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,\{CA\},0} + \vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\
& \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3\sigma_{T,A}} \frac{1}{3} (\vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,C,0}) \\
& - \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \frac{1}{3} (\vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,C,0}) \\
& - \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \frac{1}{3} (\vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,C,0}) \\
& \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\vec{\nabla} \lambda_A = - \frac{\vec{A}H}{|AH|^2} = - \frac{\vec{n}_{BC}}{|AH|} = - \frac{|BC| \vec{n}_{BC}}{2S_T},$$

$$\vec{\nabla}\lambda_B = -\frac{|AC|\vec{n}_{AC}}{2S_T},$$

$$\vec{\nabla}\lambda_C = -\frac{|AB|\vec{n}_{AB}}{2S_T}.$$

Donc, on obtient en divisant par  $S_T$  :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sigma_{T,A}} + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} + \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\right)(u_{T,A,0}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{T,B,0}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{T,C,0}\vec{\nabla}\lambda_C) + \vec{J}_T^1 = 0,$$

ou :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(\vec{\nabla}u_{T,0}),$$

avec :

$$\frac{3}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}} + \frac{1}{\sigma_{T,B}} + \frac{1}{\sigma_{T,C}}, \quad (3.8)$$

ce qui est une discrétisation consistante de l'équation du flux.

L'expression du flux injectée dans l'équation (3.5) donne alors une discrétisation consistante de l'équation de diffusion en 2D.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{3\sigma_T}\vec{\nabla}u\right) = 0$$

C'est celle obtenue en éléments finis P1 avec lumping de la matrice de masse en prenant (3.8) comme moyenne de  $\sigma_T$  à l'intérieur de la maille.

A partir de (3.1), on peut trouver plus facilement l'expression du flux à partir de  $u_0$ .

On multiplie (3.1) par  $\vec{\Omega}_m$ , on somme les 3 équations correspondant aux 3 sommets du triangle T et on somme sur les directions. On identifie les termes d'ordre 1 :

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left( \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \left\{ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy \right) = \vec{0},$$

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left( \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy = \vec{0}. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\vec{J}_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (u)_{T,\{ABC\},1}^m = \frac{1}{S_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \sum_i \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} \\ + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i dx dy + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.$$

On obtient finalement l'expression du flux discret :

$$\begin{aligned} S_T \vec{J}_T^1 &= - \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i dx dy \\ &= - \frac{1}{3} \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} (\vec{\nabla} u_0) S_T, \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{J}_T^1 = - \frac{1}{3} \sum_i \left( \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \right) \vec{\nabla} u_0. \quad (3.9)$$

### 3.2.5 Conditions aux limites

On suppose que le côté  $AB$  du triangle  $T$  est sur la frontière et que les 2 autres côtés  $AC$  et  $BC$  sont internes. Nous allons modifier  $u_0$  en  $A$  et  $B$  de telle façon que le flux discret  $\vec{J}_T^1$  puisse toujours s'exprimer comme dans (3.9). Faisons l'hypothèse  $\sigma_{T,A} = \sigma_{T,B} = \sigma_{T,C} = \sigma_T$ .

On a pour ce triangle :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_A ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g(\vec{\Omega}_m, 0) \lambda_A ds \right. \\
& \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy \right) \\
& + \left( \frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_B ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g(\vec{\Omega}_m, 0) \lambda_B ds \right. \\
& \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy \right) \\
& + (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}.
\end{aligned}$$

On remplace  $u_0$  sur  $AB$  par sa valeur  $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$ . Il vient :

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m 2 |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds + 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds \right. \\
& \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy \right) \\
& + \left( \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m 2 |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B ds + 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B ds \right. \\
& \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy \right) \\
& (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}.
\end{aligned}$$

On sait que :  $\vec{\Omega}_m = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \vec{n}_{AB} + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{t}_{AB}) \vec{t}_{AB}$  où  $\vec{t}_{AB}$  est le vecteur tangent à la surface. On suppose que la condition aux limites possède la symétrie azimutale autour de  $\vec{n}_{AB}$ , alors on vérifie que :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2 \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds.$$

Donc en posant  $u_{lim} = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (2(|\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| + 3(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2) g_0^m$ , formule identique au cas 1D, on obtient :

$$\begin{aligned}
& (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_A ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy) \\
& + (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_B ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy) \\
& + (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim} + u_{B,lim}}{2} + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,0} + u_{C,0}}{2} + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,0} + u_{C,0}}{2}),$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{J}_T^1 = & -\frac{1}{3\sigma_T} ((u_{A,lim} + u_{B,lim} - u_{B,0}) \vec{\nabla} \lambda_A + (u_{B,lim} + u_{A,lim} - u_{A,0}) \vec{\nabla} \lambda_B \\ & + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Or, nous aimerions avoir :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T} (u_{A,lim} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,lim} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \quad (3.11)$$

On ne peut pas exprimer le vecteur flux discret  $\vec{J}_T^1$  comme le gradient d'une fonction affine prenant les valeurs  $u_0$  en  $C$  et  $u_{lim}$  en  $A$  et  $B$ , qui serait la bonne condition aux limites, car cela signifierait que la condition aux limites pour  $u_0$  associée à l'équation de diffusion est la condition de Dirichlet :  $u = u_{lim}$  sur  $AB$ .

Quand l'intensité incidente est isotrope, on a  $u_{lim,A} = u_{A,0}$  et  $u_{lim,B} = u_{B,0}$  et les deux expressions (3.10,3.11) sont identiques. Le schéma satisfait une équation de diffusion avec la condition de Dirichlet sur le bord :  $u = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$ . Par contre, quand l'intensité incidente est anisotrope, les deux expressions ne sont pas identiques. Par exemple, supposons que  $g(A) = g(B)$ , la condition aux limites est alors la condition de Dirichlet  $u = 6 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|^2 g_0^m$ . On ne peut donc pas dire que le schéma satisfait la bonne condition aux limites quand l'intensité incidente est anisotrope.

Remarque : on a deux autres possibilités :

- Les 3 arêtes du triangle  $T$  sont internes et un sommet, par exemple  $A$ , est sur le bord.

On a alors :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T} (u_{A,0} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,0} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C),$$

au lieu de :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T} (u_{A,lim} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,0} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C)$$

qui serait la bonne condition aux limites.

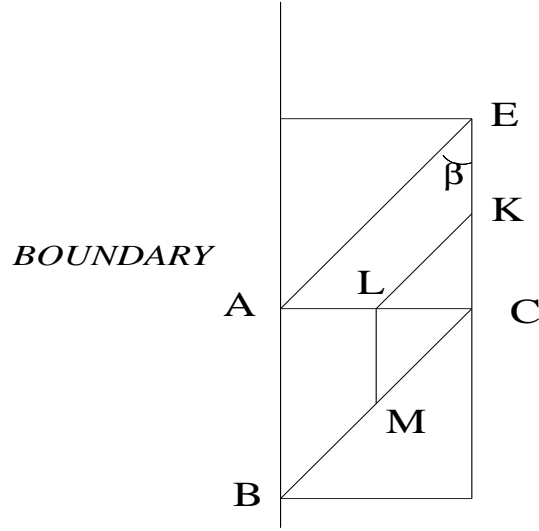


FIG. 3.2 – Cas particulier favorable pour la condition aux limites

- Deux arêtes sont sur le bord, par exemple  $AB$  et  $BC$ .  
On a alors :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}((u_{A,0} + u_{C,0} - u_{C,lim})\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,lim}\vec{\nabla}\lambda_B + (u_{C,0} + u_{A,0} - u_{A,lim})\vec{\nabla}\lambda_C),$$

au lieu de :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(u_{A,lim}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,lim}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{C,lim}\vec{\nabla}\lambda_C)$$

qui serait la bonne condition aux limites.

**Remarque :**

Nous allons montrer que sous certaines hypothèses (vérifiées quand on fait une simulation 2D d'un cas 1D), on retrouve la bonne condition aux limites.

On suppose que la frontière est bordée par des rectangles identiques, décomposés en triangles, que la condition aux limites est uniforme en espace et que  $\sigma_T$  ne dépend pas de  $T$  sur les triangles appartenant aux rectangles bordant la frontière.

Dans ce cas particulier, dans l'équation du flux relative au noeud  $C$ , la condition aux limites intervient dans le terme suivant :

$(\vec{J}_{ACE}^1 \cdot \vec{n}_{KL}|KL| + \vec{J}_{ABC}^1 \cdot \vec{n}_{LM}|LM|)$ .  $u_B$  n'est pas présent dans ce terme, seul intervient le terme suivant :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma}(u_0)\vec{\nabla}\lambda_{A,ACE}\cdot\vec{n}_{KL}|KL| - \frac{1}{3\sigma}(2* u_{lim} - u_0)\vec{\nabla}\lambda_{A,ABC}\cdot\vec{n}_{LM}|LM| \\
& = -\frac{1}{3\sigma}(u_0)\cot\beta - \frac{1}{3\sigma}(2* u_{lim} - u_0)\cot\beta \\
& = -\frac{1}{3\sigma}(2u_{lim})\cot\beta.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient le même terme que celui obtenu en imposant la valeur de  $u$  en A à  $u_{lim}$  dans l'expression de  $\vec{J}_{ABC}^1$  et  $\vec{J}_{ACE}^1$ . C'est la condition aux limites "exacte".

### 3.3 Résumé

Sous des hypothèses sur la quadrature angulaire, le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés en 2D a bien la limite diffusion. En général, quand l'intensité incidente est anisotrope, contrairement au 1D, le schéma ne satisfait pas la bonne condition aux limites. Cependant, sous certaines hypothèses sur le maillage sur la frontière et la condition aux limites, on peut démontrer que la condition aux limites est aussi précise qu'en 1D, ce qui autorise des maillages grossiers vis à vis du libre-parcours même en présence d'une couche limite.

### 3.4 Variante des éléments finis linéaires discontinus lumpés

Pour rendre plus robuste le schéma précédent, on le modifie de la façon suivante [3] : on "lumpe" les termes de bord c'est à dire qu'au lieu de prendre  $u_{\{AB\}}^m$  au point  $\{AB\}$ , on prend  $u$  au point  $A$  (dans le triangle  $T$  ou le triangle adjacent à  $T$  suivant le signe de  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}$ ).

Les équations (3.3) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|AM|u_A^m + \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|AL|u_A^m \\
+ \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}|ML|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A}u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,A}\tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|BM|u_B^m + \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|BK|u_B^m \\
+ \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}|MK|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B}u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,B}\tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|CK|u_C^m + \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|CL|u_C^m \\
+ \epsilon\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}|KL|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C}u_C^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,C}\tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}.
\end{array} \right. \quad (3.12)$$



Dans les équations précédentes,  $u_A^m$  est la valeur de  $u$  au point  $A$  prise dans le triangle  $T$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \geq 0$  et dans le triangle adjacent à  $T$  par  $AB$  si  $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0$ ,  $\vec{n}_{AB}$  est le vecteur unitaire porté par la normale extérieure par rapport au triangle  $T$  à  $AB$ .

### 3.5 Limite diffusion

#### 3.5.1 Isotropie

On obtient de la même façon que dans le cas précédent l'isotropie à l'ordre 0 de  $u$ .

#### 3.5.2 Equation du flux

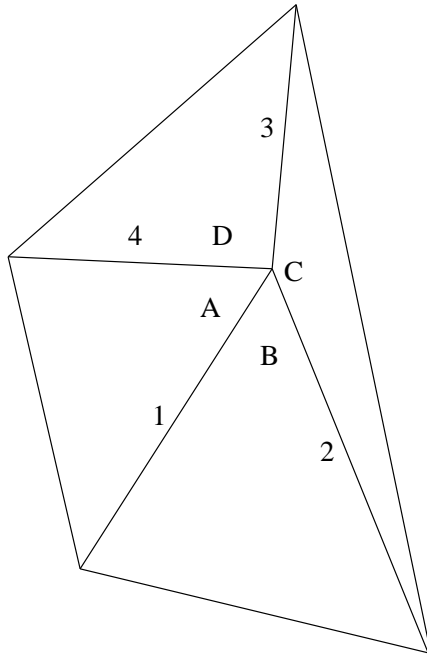
L'équation du flux est identique à celle obtenue dans le cas précédent.

#### 3.5.3 Continuité

On peut démontrer, de façon plus directe que dans le cas précédent, la continuité des valeurs de  $u$  à l'ordre 0.

**Preuve 3** On a la relation (équivalente de 3.7) :

$$-|AM|u_{T_{ext},A,0} + |AM|u_{T,A,0} = |AL|u_{T_{ext},A,0} - |AL|u_{T,A,0}.$$



Les relations :

$$l1(u_B - u_A) = l2(u_C - u_B) = l3(u_D - u_C) = l4(u_A - u_D)$$

où  $l_i$  sont les longueurs des arêtes  $i$ , entraînent clairement que

$$u_A = u_B = u_C = u_D.$$

On peut démontrer le même résultat sur un noeud sur la frontière mais à la condition que la quantité

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

soit continue. La valeur de  $u$  au point A sur le bord est alors nécessairement égale à

$$4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

où  $g_{x,y,0}^m$  est la valeur de la condition aux limites pour la direction  $m$  à l'ordre 0 au point  $(x, y)$ .

Remarque :

si elle est discontinue, on peut montrer [1] que les valeurs de  $u$  pour un noeud sur le bord sont des moyennes pondérées par des valeurs positives des deux valeurs de la quantité  $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$  de part et d'autre

de ce noeud. On n'a plus la continuité de  $u_0$  en ce noeud mais on garde la continuité de  $u_0$  aux noeuds internes. Avec la méthode précédente, on peut démontrer que  $u_0$  est continue aux noeuds internes et que les valeurs de  $u_0$  pour un noeud sur le bord dépendent linéairement de la quantité  $\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$  sur toute la frontière et non plus seulement de part

et d'autre du point considéré. On ne peut pas garantir que ces valeurs soient comprises entre les deux valeurs de la condition aux limites. La variante devrait donc dans ce cas être plus robuste.

Nous allons maintenant regarder quel schéma de diffusion on obtient.

### 3.5.4 Expression du flux

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de  $u$  à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle.

On multiplie par  $\vec{\Omega}_m$  et on somme sur les directions les équations (3.12). On identifie les termes d'ordre 1. On obtient :

$$\frac{1}{\sigma_{T,A}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,A,0})$$

$$\begin{aligned}
& + \vec{n}_{ML}|ML|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{\sigma_{T,B}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB}|BM|u_{T,B,0} + \vec{n}_{BC}|BK|u_{T,B,0} \\
& \quad + \vec{n}_{MK}|MK|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{\sigma_{T,C}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{BC}|CK|u_{T,C,0} + \vec{n}_{AC}|CL|u_{T,C,0} \\
& \quad + \vec{n}_{KL}|KL|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{S_T}{3} (u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m + u_{T,C,1}^m) = \vec{0}, \\
& \quad \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB}|AM| + \vec{n}_{AC}|AL|)u_{T,A,0} \\
& \quad + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB}|BM| + \vec{n}_{BC}|BK|)u_{T,B,0} \\
& \quad + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC}|CK| + \vec{n}_{AC}|CL|)u_{T,C,0} \\
& + (\frac{1}{3\sigma_{T,A}} \vec{n}_{ML}|ML| + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \vec{n}_{MK}|MK| + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \vec{n}_{KL}|KL|)u_{\{ABC\},0} \\
& \quad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{AB}|AM| + \vec{n}_{AC}|AL| &= -\frac{1}{2} \vec{n}_{BC}|BC|, \\
\vec{n}_{AB}|BM| + \vec{n}_{BC}|BK| &= -\frac{1}{2} \vec{n}_{AC}|AC|, \\
\vec{n}_{BC}|CK| + \vec{n}_{AC}|CL| &= -\frac{1}{2} \vec{n}_{AB}|AB|, \\
S_T &= |BC| \frac{h_A}{2} = |AC| \frac{h_B}{2} = |AB| \frac{h_C}{2},
\end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma_{T,A}} \frac{\vec{n}_{BC}}{h_A} u_{T,A,0} - \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \frac{\vec{n}_{AC}}{h_B} u_{T,B,0} - \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \frac{\vec{n}_{AB}}{h_C} u_{T,C,0} \\
& + (\frac{1}{3\sigma_{T,A}} \vec{n}_{ML}|ML| + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \vec{n}_{MK}|MK| + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \vec{n}_{KL}|KL|) \frac{u_{\{ABC\},0}}{S_T} + \vec{J}_T^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3\sigma_{T,A}} \vec{\nabla} \lambda_A u_{T,A,0} + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \vec{\nabla} \lambda_B u_{T,B,0} + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \vec{\nabla} \lambda_C u_{T,C,0} \\
& - (\frac{1}{3\sigma_{T,A}} \vec{\nabla} \lambda_A + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \vec{\nabla} \lambda_B + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \vec{\nabla} \lambda_C) u_{\{ABC\},0} + \vec{J}_T^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

On trouve une discrétisation consistante du vecteur flux, calculé au barycentre du triangle  $T$ , exprimé de la façon suivante :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3}(\vec{\nabla}(\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0}) - (\vec{\nabla}\frac{1}{\sigma_T})u_{\{ABC\},0}).$$

En effet, en supposant que  $\frac{1}{\sigma_T}$  est affine par maille, on a :

$$\frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\lambda_C,$$

donc :

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}}\vec{\nabla}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\vec{\nabla}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\vec{\nabla}\lambda_C,$$

et

$$\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0} = \left\{ \frac{1}{\sigma_{T,A}}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\lambda_C \right\} u_{\{ABC\},0}.$$

En supposant maintenant que  $\frac{1}{\sigma_T}u$  peut être approché par une fonction affine par maille, on a :

$$\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0} \simeq \left( \frac{1}{\sigma_{T,A}}u_{T,A,0} \right) \lambda_A + \left( \frac{1}{\sigma_{T,B}}u_{T,B,0} \right) \lambda_B + \left( \frac{1}{\sigma_{T,C}}u_{T,C,0} \right) \lambda_C,$$

donc :

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0} \simeq \left( \frac{1}{\sigma_{T,A}}u_{T,A,0} \right) \vec{\nabla}\lambda_A + \left( \frac{1}{\sigma_{T,B}}u_{T,B,0} \right) \vec{\nabla}\lambda_B + \left( \frac{1}{\sigma_{T,C}}u_{T,C,0} \right) \vec{\nabla}\lambda_C.$$

L'expression du flux injectée dans l'équation (3.5) donne alors une discrétisation consistante de l'équation de diffusion en 2D. Lorsqu'on prend  $\sigma_T$  constante par maille, c'est la même que celle obtenue en éléments finis P1 avec lumping de la matrice de masse.

### 3.5.5 Conditions aux limites

On obtient les mêmes résultats qu'avec le schéma précédent.

## 3.6 Résumé

Si l'on "lumpe" en plus des termes de "scattering" les termes de bord apparaissant dans le schéma aux éléments finis linéaires discontinus, le schéma que l'on obtient possède toujours la limite diffusion, avec une discrétisation de l'équation de diffusion différente de la précédente quand  $\sigma$  n'est pas constant

par maille. Le schéma obtenu est plus robuste que le précédent lorsque la quantité

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

n'est pas continue sur le bord.

### 3.7 Méthode SCB

M.L Adams [2] propose une variante du schéma précédent (Single Corner Balance) qui peut s'interpréter comme une méthode de volumes finis sur des polygones ayant un nombre de côtés arbitraire. Nous allons analyser cette méthode dans le cas des triangles. Le schéma s'écrit de la façon suivante : trouver  $u_{T,A}^m$ ,  $u_{T,B}^m$ ,  $u_{T,C}^m$  solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_A^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_A^m \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,B}^m}{2} \\ - \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,C}^m}{2} \\ + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_B^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_B^m \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B}^m + u_{T,C}^m}{2} \\ - \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,B}^m}{2} \\ + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_C^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_C^m \\ - \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B}^m + u_{T,C}^m}{2} \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,C}^m}{2} \\ + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

### 3.8 Limite diffusion

#### 3.8.1 Isotropie

De la même façon que dans le cas précédent, on obtient que  $u$ , à l'ordre 0, est isotrope.

### 3.8.2 Equation du flux

Pour obtenir l'équation du flux, on somme sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 3.1).

On pose :

$$\vec{J}_{T,MG}^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m}{2}$$

qui est le vecteur flux discret sur l'arête  $MG$ ,

$$\vec{J}_{T,LG}^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{u_{T,A,1}^m + u_{T,C,1}^m}{2}$$

qui est le vecteur flux discret sur l'arête  $GL$ .

En identifiant les termes facteurs de  $\epsilon^2$ , il vient :

$$\sum_T \vec{J}_{T,MG}^1 \cdot \vec{n}_{MG} |MG| + \vec{J}_{T,LG}^1 \cdot \vec{n}_{LG} |LG| = \vec{0}.$$

### 3.8.3 Continuité

De la même façon que dans le cas précédent, on obtient que  $u$ , à l'ordre 0, est continue.

### 3.8.4 Expression du flux

Il s'agit d'exprimer les vecteurs flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de  $u$  à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. Pour cela, on multiplie par  $\vec{\Omega}_m$  et on somme sur les directions les équations (3.13) et on identifie les termes d'ordre 1. On suppose que  $\sigma_{T,A} = \sigma_{T,B} = \sigma_{T,C}$ .

Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,A,0} \\ & \quad - \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & + \frac{1}{\sigma_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,B,0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,B,0} \\ & \quad + \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & \quad + \frac{2S_T}{3} \vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} |AM| + \vec{n}_{AC} |AL|) u_{T,A,0}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3\sigma_T}(-\vec{n}_{LG}|LG|\frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& + \frac{1}{3\sigma_T}(\vec{n}_{AB}|BM| + \vec{n}_{BC}|BK|)u_{T,B,0} \\
& + \frac{1}{3\sigma_T}(+\vec{n}_{KG}|KG|\frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{S_T}{3}2\vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3\sigma_T} \frac{\vec{n}_{BC}}{h_A} u_{T,A,0} - \frac{1}{3\sigma_T} \frac{\vec{n}_{AC}}{h_B} u_{T,B,0} \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T}(-\vec{n}_{LG}|LG|\frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T}(+\vec{n}_{KG}|KG|\frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{2}{3}\vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3\sigma_T} \vec{\nabla} \lambda_A u_{T,A,0} + \frac{1}{3\sigma_T} \vec{\nabla} \lambda_B u_{T,B,0} \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T}(-\vec{n}_{LG}|LG|\frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T}(\vec{n}_{KG}|KG|\frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{2}{3}\vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

L'expression de  $\vec{J}_{T,MG}^1$  n'est pas consistante avec l'expression exacte du flux. Si  $\sigma_T$  est constante et  $u$  est linéaire dans la maille, le vecteur  $\vec{J}_{T,MG}^1$  devrait être égal à  $-\frac{1}{3\sigma_T}\{\vec{\nabla} \lambda_A u_{T,A,0} + \vec{\nabla} \lambda_B u_{T,B,0} + \vec{\nabla} \lambda_C u_{T,C,0}\}$  comme avec les deux schémas précédents. Or, cette égalité n'est pas vérifiée. Donc, sur les triangles, on ne peut affirmer que la méthode SCB a la limite diffusion.

### 3.9 Résumé

La méthode SCB possède la limite diffusion sur un maillage composé de rectangles [2] mais ne la possède pas si le maillage comporte des triangles.

## Chapitre 4

# Etude en géométrie 2D cylindrique

### 4.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On reprend le premier schéma : les éléments finis linéaires discontinus lumpés, en géométrie 2D cylindrique.

L'équation en géométrie 2D cylindrique s'écrit :

$$\eta \frac{\partial ru}{\partial r} + \mu \frac{\partial ru}{\partial z} - \frac{\partial \chi u}{\partial \varphi} + \sigma ru = \sigma r \tilde{u},$$

avec pour conditions aux limites :  $u(r, z, \vec{\Omega}) = g(r, z, \vec{\Omega})$  sur les points de la frontière où  $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \leq 0$ ,  $\vec{n}$  étant la normale extérieure à la frontière, en notant  $\vec{\Omega}$  le vecteur de composantes :  $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi)$  en  $r$ , et  $\mu$  en  $z$ ,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi u(r, z, \mu, \varphi),$$

$$\chi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin(\varphi).$$

On commence par approcher le terme  $-\frac{\partial \chi u}{\partial \varphi}$  au point  $\vec{\Omega}_m = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m), \mu_m)$  par l'expression :

$$-\frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\},$$

$u^2$  est une approximation de  $u$  au point  $\vec{\Omega}_2 = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m + \frac{\Delta\varphi}{2}), \mu_m)$ ,

$u^1$  est une approximation de  $u$  au point  $\vec{\Omega}_1 = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m - \frac{\Delta\varphi}{2}), \mu_m)$ ,

$u^m$  est une approximation de  $u$  au point  $\vec{\Omega}_m = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m), \mu_m)$ .

On suppose que  $u^m = \frac{u^1 + u^2}{2}$ .



Les  $\alpha^i$  sont calculés par la formule de récurrence :

$$\alpha^2 - \alpha^1 = \Delta\varphi\eta_m.$$

On voit donc que  $\alpha$  est une approximation de  $\chi$ .

Après cette discrétisation en angle, on doit résoudre :

$$\eta_m \frac{\partial r u_m}{\partial r} + \mu \frac{\partial r u_m}{\partial z} - \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\} + \sigma r u_m = \sigma r \tilde{u},$$

$$\eta_m r \frac{\partial u_m}{\partial r} + \eta_m u_m + \mu r \frac{\partial u_m}{\partial z} - \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\} + \sigma r u_m = \sigma r \tilde{u}.$$

On discrétise cette équation par des éléments finis linéaires discontinus lumpés en espace.

Le schéma s'écrit :

Trouver sur le triangle  $T$  pour la direction  $\vec{\Omega}_m = (\eta_m, \mu_m)$ ,  $u_T^m$  solution de :

$$\begin{aligned} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} r \lambda_i) u_T^m dr dz - \int_T \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_i dr dz \\ + \int_T \eta_m u_T^m \lambda_i r dr dz + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i r dr dz = \\ \sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i r dr dz, \end{aligned}$$

où  $i$  vaut  $A, B$  ou  $C$ .

On transforme l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_T^m r dr dz \\ - \int_T \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_i dr dz + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i r dr dz = \sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i r dr dz, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous allons transformer (4.1) sous la forme d'un schéma de type volumes finis.

En notant :

$$R_A = \frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{4} + \frac{r_C}{4}, \quad R_B = \frac{r_A}{4} + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{4}, \quad R_C = \frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{4},$$

$G$  l'isobarycentre du triangle, on obtient :

$$\int_T \lambda_A r dr dz = \left(\frac{S_T}{3}\right) R_A,$$

et

$$\begin{aligned} \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_A) u_T^m r dr dz &= -(\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|AH|}) (\frac{1}{|AH|}) \int_T u_T^m r dr dz \\ &= -(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| (ru)_G^m, \end{aligned}$$

avec :

$$(ru)_G^m = \frac{1}{3} \sum_i R_i u_{T,i}^m.$$

On peut interpréter  $(ru)_G^m$  comme la valeur de  $ru$  au point  $G$  qu'on associe au côté  $ML$ .

On peut réécrire le schéma de la façon suivante. Il s'agit de trouver  $u_{T,A}^m$ ,  $u_{T,B}^m$ ,  $u_{T,C}^m$  solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A dr dz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \\ \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_B r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}) |MK| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B dr dz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \\ \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_C r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}) |KL| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C dr dz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \\ \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C. \end{array} \right.$$

En notant :

$$(ru)_{\{AB\}} = \left(\frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(A) + \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(B),$$

$(ru)_{\{BA\}} = \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{2}\right) u_b(B) + \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(A)$  (les formules sont identiques pour  $\{AC\}, \{CA\}, \{BC\}, \{CB\}$ ), on obtient :

$$(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \int_{AB} u_b^m \lambda_A r ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM| (ru)_{\{AB\}}^m,$$

où la valeur de  $u$  au point  $\{AB\}$  est à prendre dans le triangle  $T$  ou le triangle  $T_b$  suivant le signe de  $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b)$ .

On a :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}) |AL|(ru)_{\{AC\}}^m.$$

Le schéma se réécrit : trouver  $u_{T,A}^m, u_{T,B}^m, u_{T,C}^m$  solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

ou encore sous une forme de type volumes finis faisant apparaître le caractère conservatif de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A \\ = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B \\ = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C \\ = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C. \end{array} \right.$$

On reprend l'étude asymptotique faite précédemment en géométrie 2D plane sur l'équation 4.3 dans laquelle on a introduit le paramètre  $\epsilon$ , le schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ - \varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C. \end{array} \right.$$

## 4.2 Limite diffusion

### 4.2.1 Isotropie

A l'ordre 0, on obtient :

$$u_{T,A}^m = \tilde{u}_{T,A,0},$$

$$u_{T,B}^m = \tilde{u}_{T,B,0},$$

$$u_{j,C}^m = \tilde{u}_{T,C,0}.$$

Donc  $u$  est isotrope à l'ordre 0.

### 4.2.2 Equation du flux

Pour un noeud global donné, on somme sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 3.1).

On introduit une formule de quadrature discrète sur la sphère angulaire unité.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \simeq \sum_m \omega_m f(\vec{\Omega}_m).$$

On suppose que cette formule de quadrature vérifie :

$$\sum_m \omega_m = 1.$$

On somme sur les directions  $m$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{n}_{ML} |ML|(ru)_{T,\{ABC\}}^m) \\ + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A. \end{aligned}$$

Le terme sommé sur les directions  $\{\alpha^2 u_i^2 - \alpha^1 u_i^1\}$  disparaît car il a le caractère conservatif de  $\frac{\partial \chi u}{\partial \varphi}$  :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \chi u}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Pour faciliter les notations, on a supposé que le point  $A$  dans la numérotation locale du triangle  $T$  correspond au même noeud global donné.

Si  $AB$  est un bras interne, la valeur de  $(ru)_{\{AB\}}^m$  est celle du triangle  $T$  si  $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$  est positif ou du triangle adjacent à  $T$  par  $AB$  si  $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$  est négatif.

Si  $AB$  est un bras frontière, la valeur de  $(ru)_{\{AB\}}^m$  est celle du triangle  $T$  si  $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$  est positif ou la valeur de la condition aux limites au point  $\{AB\}$  si  $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$  est négatif.

Les termes sur les arêtes "internes" du volume de contrôle autour du noeud global s'annulent, car la même arête apparaît 2 fois dans la somme ci-dessus mais avec des vecteurs unitaires normaux opposés, donc :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| (ru)_{T,\{ABC\}}^m + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \\ \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A. \end{aligned}$$

On pose

$$(r\vec{J})_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (ru)_{T,\{ABC\},1}^m$$

qui est le vecteur flux discret.

En identifiant les termes facteurs de  $\epsilon^2$ , il vient :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A,2}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,2} \frac{S_T}{3} R_A.$$

Soit :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| = 0,$$

ou sous forme conservative :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \{\vec{n}_{MG} |MG| + \vec{n}_{GL} |GL|\} = 0. \quad (4.3)$$

### 4.2.3 Continuité

La démonstration de la continuité est identique à celle faite en géométrie 2D plane. On démontre tout d'abord que :

$$-|AM|(ru)_{T_{ext},\{AB\},0} + |AM|(ru)_{T,\{AB\},0} = \\ |AL|(ru)_{T_{ext},\{AC\},0} - |AL|(ru)_{T,\{AC\},0}.$$

Si l'arête  $AB$  est interne,  $(ru)_{T_{ext},\{AB\},0}$  est la valeur de  $(ru)$  au point  $\{AB\}$  sur le triangle adjacent à  $T$  par  $AB$ , si l'arête  $AB$  est sur le bord,

$$(ru)_{T_{ext},\{AB\},0} = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| (rg)(\{AB\}, \vec{\Omega}_m, 0).$$

On en déduit que  $u_0$  est continue à condition que

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(\vec{\Omega}_m, 0) \text{ soit continue sur le bord.}$$

Nous allons maintenant chercher quel schéma de diffusion on obtient.

### 4.2.4 Expression du flux

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de  $u$  à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. Pour cela, on multiplie (4.1) par  $\vec{\Omega}_m$ , on somme les 3 équations correspondant aux 3 sommets du triangle  $T$  et on somme sur les directions. On identifie les termes d'ordre 1 :

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left( \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \left\{ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz \right. \right. \\ \left. \left. - \int_T \frac{1}{\Delta \varphi} u_{T,0} \{\alpha^2 - \alpha^1\} \lambda_i dr dz \right\} \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz = \vec{0},$$

ou encore en notant que  $\frac{1}{\Delta \varphi} \{\alpha^2 - \alpha^1\} = \eta_m$ ,

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left( \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz \right\} \right. \\ \left. - \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T u_0 \eta_m \lambda_i dr dz \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz = \vec{0}.$$

Or on a :

$$(r\vec{J})_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (ru)_{T,\{ABC\},1}^m = \frac{1}{S_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \sum_i \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_i dr dz \right\} \\ + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente,  $\vec{r}$  est le vecteur de composantes 1 en  $r$  et 0 en  $z$ .

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i r dr dz + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0}.$$

On obtient finalement l'expression du flux discret :

$$\begin{aligned} S_T (r\vec{J})_T^1 &= -\frac{1}{3} \sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i r dr dz \\ &= -\frac{1}{3} \sum_i \frac{R_i}{3\sigma_{T,i}} (\vec{\nabla} u_0) S_T, \end{aligned}$$

soit :

$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{3} \sum_i \left( \frac{R_i}{3\sigma_{T,i}} \right) \vec{\nabla} u_0.$$

On obtient ainsi une discrétisation consistante du vecteur  $r\vec{J} = -\left(\frac{r}{3\sigma_T}\right) \vec{\nabla} u_0$  avec :

$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) (\vec{\nabla} u_0), \quad (4.4)$$

où

$$\left( \frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) = \sum_i \frac{R_i}{3\sigma_{T,i}}.$$

En insérant cette expression du flux dans (4.3) on obtient :

$$\sum_T -\frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) (\vec{\nabla} u_{T,0}) \cdot \{ \vec{n}_{MG} |MG| + \vec{n}_{GL} |GL| \} = 0,$$

qui est une discrétisation consistante de l'équation du flux :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{1}{3\sigma_T} (\vec{\nabla} u_0) \right) = 0$$

en géométrie cylindrique.

## 4.2.5 Conditions aux limites

On suppose que le côté  $AB$  du triangle  $T$  est sur la frontière et que les 2 autres côtés  $AC$  et  $BC$  sont internes. Nous allons modifier  $u_0$  en  $A$  et  $B$  de telle façon que le flux discret  $(r\vec{J})_T^1$  puisse toujours s'exprimer comme dans (4.4).

On a pour ce triangle :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_T} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_i dr dz \right\} + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0},$$

ou, en supposant que  $\sigma_T$  est constante dans la maille :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_A r ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A r ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_A dr dz \right) \\ & + \left( \frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_B r ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B r ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_B dr dz \right) \\ & + \left( \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_C dr dz \right) \\ & \quad + S_T (r\vec{J})_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

On remplace  $u_0$  sur  $AB$  par sa valeur  $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$ .

En posant :  $\vec{\Omega}_m = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \vec{n}_{AB} + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{t}_{AB}) \vec{t}_{AB}$  où  $\vec{t}_{AB}$  est le vecteur tangent à la surface,  $u_{lim} = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (2(|\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| + 3(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2) g_0^m$ , en supposant que  $g_0$  possède la symétrie azimutale autour de  $\vec{n}_{AB}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_A r ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_A dr dz \right) \\ & + \left( \vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_B r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_B dr dz \right) \\ & + \left( \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_C dr dz \right) \\ & \quad + S_T (r\vec{J})_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

Nous obtenons :



$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} r ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 r ds - \vec{r} \int_T u_0 dr dz),$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (r\vec{J})_T^1 = & -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_B}{3}) + u_{B,lim}(\frac{r_A+2r_B}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,0}(\frac{2r_A+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_A+2r_C}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,0}(\frac{2r_B+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_B+2r_C}{3})}{2} - \vec{r} \frac{S_T}{3} (u_{A,0} + u_{B,0} + u_{C,0})), \end{aligned}$$

Or, nous aimerions avoir :

$$\begin{aligned} (r\vec{J})_T^1 = & -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_B}{3}) + u_{B,lim}(\frac{r_A+2r_B}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_A+2r_C}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,lim}(\frac{2r_B+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_B+2r_C}{3})}{2} - \vec{r} \frac{S_T}{3} (u_{A,lim} + u_{B,lim} + u_{C,0})) \\ = & -\frac{1}{3\sigma_T} (\frac{r_A + r_B + r_C}{3}) (u_{A,lim} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,lim} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \end{aligned}$$

On ne peut pas exprimer le vecteur flux discret  $(r\vec{J})_T^1$  comme le gradient d'une fonction affine prenant les valeurs  $u_0$  en  $C$  et  $u_{lim}$  en  $A$  et  $B$ , qui serait la bonne condition aux limites, car cela signifierait que la condition aux limites pour  $u_0$  associée à l'équation de diffusion est la condition de Dirichlet :  $u = u_{lim}$  sur  $AB$ . On ne peut donc dire que le schéma satisfait la bonne condition aux limites quand le flux incident est anisotrope.

Quand le flux incident est isotrope, le schéma satisfait une équation de diffusion avec la "bonne" condition de Dirichlet sur le bord :

$$u = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g(\vec{\Omega}_m, 0).$$

Remarque :

A la différence du cas plan, on ne peut trouver la "bonne" condition aux limites quand la frontière est composée de rectangles identiques et que la condition est uniforme en espace et que  $\sigma_T$  ne dépend pas de  $T$ . Nous allons en donner la raison. On se place dans la même configuration qu'en plan (Fig 3.2).

Dans ce cas particulier, dans l'équation du flux relative au noeud  $C$ , la condition aux limites intervient dans le terme suivant :  $(\vec{J}_{ACE}^1 \cdot \vec{n}_{KL} |KL| + \vec{J}_{ABC}^1 \cdot \vec{n}_{LM} |LM|)$ .  $u_B$  n'est pas présent dans ce terme. Seul intervient le terme :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma} \frac{r_A + r_C + r_E}{3} (u_0) \vec{\nabla} \lambda_{A,ACE} \cdot \vec{n}_{KL} |KL| \\
& -\frac{1}{3\sigma} \left( \frac{r_A + r_B}{2} (2 * u_{lim} - 2u_0) + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} u_0 \right) \vec{\nabla} \lambda_{A,ABC} \cdot \vec{n}_{LM} |LM| \\
= & -\frac{1}{3\sigma} \left( \frac{r_A + r_C + r_E}{3} (u_0) + \frac{r_A + r_B}{2} (2 * u_{lim} - 2u_0) + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} u_0 \right) \cot \beta \\
& = -\frac{1}{3\sigma} \left( \frac{2r_C + r_E - r_A - 2r_B}{3} u_0 + (r_A + r_B) u_{lim} \right) \cot \beta \\
& \neq -\frac{1}{3\sigma} \left( \frac{r_A + r_C + r_E}{3} + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} \right) u_{lim} \cot \beta
\end{aligned}$$

Donc, on n'obtient pas le même terme que celui obtenu en imposant la valeur de  $u$  en  $A$  à  $u_{lim}$  dans l'expression de  $\vec{J}_{ABC}^1$  et  $\vec{J}_{ACE}^1$ . Cependant, l'erreur que l'on commet reste petite, de l'ordre de  $o(h)$  où  $h$  est la taille des rectangles et d'autant plus petite que le rayon de giration est grand. L'erreur est donc petite par rapport à celle qu'on commettrait en prenant comme condition de Dirichlet  $u_0$  au lieu de  $u_{lim}$ .

### 4.3 Résumé

Sous des hypothèses sur la quadrature angulaire, le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés en géométrie 2D cylindrique, a bien la limite diffusion. En général, quand le flux incident est anisotrope, contrairement au cas 1D, le schéma ne satisfait pas la bonne condition aux limites. Cependant, sous certaines hypothèses sur le maillage sur la frontière et la condition aux limites, on peut démontrer que la condition aux limites approche celle obtenue en 1D, ce qui autorise des maillages grossiers vis à vis du libre-parcours même en présence d'une couche limite.

# Bibliographie

- [1] M.L.Adams, “Discontinuous Finite Element Methods in Thick Diffusive Problems”, *Nuclear Science and Engineering*, **137**, 298 (2001) .
- [2] M.L.Adams, “Subcell balance methods”, *Trans Theory and Statistical Physics*, 385-431 (1997).
- [3] M.L.Adams, “Discontinuous Finite Element Transport Solutions in the Thick Diffusion Limit in Cartesian Geometry”,*Proc. International Topical Mtg on Advances in Mathematics, Computations and reactor Physics*, vol **5** ,p 21.1 3-1 Pittsburg (1991).
- [4] S.Chandrasekhar, “Radiative transfer”, Dover, New York (1960).
- [5] E.W.Larsen, G.C.Pomraning and V.C.Badham, “Asymptotic Analysis of Radiative Transfer Problems”, *J.Quant.Spectrosc.Radiat.Transfer*, **29**, 285 (1983).
- [6] E.W.Larsen, “The Asymptotic Diffusion Limit of Discretized Transport Problems”,*Nuclear Science and Engineering*, **112**, 336-346 (1992).
- [7] E.W.Larsen, J.E.Morel and W.F.Miller Jr, “Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes”, *J.Comput.Phys*, **69**, 283 (1987).
- [8] E.W.Larsen, “On Numerical Solutions of Transport Problems in the Diffusion Limit”, *Nuclear Science and Engineering*, **83**, 90 (1983).
- [9] E.W.Larsen and J.B.Keller, “Asymptotic Solution of Neutron Transport Problems for Small Mean Free Paths”, *J.Math. Phys*, **15**, 75 (1974).
- [10] J.E.Morel, T.Wareing, K.Smith, “A Linear Discontinuous Spatial Differencing Scheme for Sn Radiative Transfer Calculations”, *J.Comput.Phys* **128** , 445-462 (1996).
- [11] T.N’Kaoua, “Solution of the Non linear Radiative transfer Equation by a Fully Implicit Monte-Carlo Method Coupled with the Rosseland Diffusion Equation Via Domain Decomposition”, *SIAM J on Scient and Stat. Comput.* **12** (3) 505-520 (1991).
- [12] G.C.Pomraning, “Diffusive Limits for Linear Transport Equations”,*Nuclear Science and Engineering*, **112**, 239-255 (1992).
- [13] R.Sentis, “Analyse Asymptotique d’Equations de transport”, Thèse (1981).