



## Introduction à la physique du Soleil

Jean-Marie Malherbe

► **To cite this version:**

Jean-Marie Malherbe. Introduction à la physique du Soleil. École thématique. 2010, pp.137.  
<cel-00682269>

**HAL Id: cel-00682269**

**<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00682269>**

Submitted on 24 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Astronomie Astrophysique niveau L3/M1

## Introduction à la physique du Soleil

Cours rédigé par [Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr](mailto:Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr)  
et relu par [Thierry.Roudier@ast.obs-mip.fr](mailto:Thierry.Roudier@ast.obs-mip.fr)



- I - Le soleil en tant qu'étoile
- II - Equilibre thermodynamique et formation des raies
- III - Introduction au transfert de rayonnement
- IV - Effet Doppler ; lumière polarisée ; effet Zeeman, effet Hanle
- V - Introduction à la magnétohydrodynamique
- VI - La photosphère
- VII - La chromosphère
- VIII - La couronne
- IX - Télescopes et instruments solaires

<b>Chapitre 1 : Le soleil en tant qu'étoile .....</b>	<b>5</b>
I – 1 Les equations de l'interieur stellaire: equilibre hydrostatique, equilibre radiatif.....	5\
I – 2 Transport convectif: le critère de Schwarzschild.....	7\
I – 3 Une estimation aux ordres de grandeur de la pression centrale.....	7
I – 4 Une solution approximative : l'équation de Lane Emden pour un gaz polytropique.....	9\
I – 5 Le theoreme du Viriel et quelques conséquences.....	10
I – 6 Evolution du soleil .....	11
<b>Chapitre 2 : Equilibre thermodynamique et formation des raies .....</b>	<b>15</b>
II - 1 Le spectre des atomes hydrogénoïdes (transitions quantiques) .....	15
II – 2 Sections efficaces .....	16
II – 3 Formation des raies spectrales ; profil Lorentzien ; amortissement naturel.....	17
II – 4 Loi de Boltzmann de distribution des niveaux d'énergie en équilibre thermodynamique.....	18
II – 5 Loi de Maxwell de distribution des vitesses ; profil Doppler ; largeur Doppler.....	18
II – 6 Loi de Saha de l'équilibre d'ionisation .....	19
II – 7 Fonction de Planck du corps noir : densité de rayonnement et intensité .....	19
II – 8 Coefficients d'Einstein et équilibre statistique.....	20
II – 9 Amortissement collisionnel ; théorie de l'impact de Weisskopf.....	21
II – 10 Convolution des profils Gaussiens et Lorentziens, profil de Voigt .....	22
<b>Chapitre 3 : Introduction au transfert de rayonnement .....</b>	<b>24</b>
III – 1 quelques définitions .....	24
III – 2 Densité d'énergie radiative et pression radiative .....	25
III – 3 Cas particulier : rayonnement isotrope (indépendant de $\mu = \cos\theta$ ).....	25
III – 4 Diffusion, absorption, et émission du rayonnement .....	26
III – 5 Equation de transfert du rayonnement .....	27
III – 6 Equations de Schwarzschild – Milne .....	28
III – 7 Moments de l'équation de transfert du rayonnement.....	30
III – 8 Condition de l'équilibre radiatif.....	30
III – 9 Un premier modèle simple : le cas gris et l'assombrissement centre bord.....	31
III – 10 Moyenne de Rosseland .....	33
III – 11 Un second modèle simple : le « cloud model » .....	34\
III – 12 Un troisième modèle simple : l'atmosphère de Milne Eddington .....	35
III – 13 Processus de diffusion et la redistribution des fréquences.....	37
III – 14 L'atome à deux niveaux hors ETL.....	38
<b>Chapitre 4 : Effet Doppler ; lumière polarisée ; effet Zeeman, effet Hanle .....</b>	<b>41</b>
IV – 1 Mesure des déplacements de matière macroscopiques par effet Doppler .....	41
IV – 2 Effet Zeeman – approche classique .....	42
IV – 3 Effet Zeeman – approche quantique .....	43
IV – 3 - 1 Les transitions quantiques .....	44
IV – 3 - 2 Effet Zeeman .....	44
IV – 3 - 3 Effet Zeeman « normal » et effet Zeeman « anormal ».....	45\
IV – 4 Introduction au transfert de rayonnement en lumière polarisée .....	46
IV – 4 – 1 Formation des raies en présence de champ magnétique .....	48
IV – 4 – 2 Matrice de transfert du rayonnement .....	49
IV – 4 – 3 Equation de transfert du rayonnement en lumière polarisée.....	51
IV – 4 – 4 Solution de l'équation de transfert pour les champs magnétiques faibles.....	51
IV – 5 Mesure des champs magnétiques à partir des paramètres de Stokes.....	53
IV – 6 Cas des champs magnétiques non résolus .....	56
IV – 7 Quelques solutions de l'équation de transfert polarisé .....	57

IV – 7 – 1	Solution d'Unno Rachkovsky pour une atmosphère de type Milne eddington .....	57
IV – 7 – 2	Solution pour une atmosphère plus complexe avec chromosphère .....	58
IV – 8	Polarisation par diffusion résonante, effet Hanle et champs magnétiques .....	58
IV – 8 – 1	Polarisation du continu .....	59
IV – 8 – 2	Polarisabilité des raies .....	60
IV – 8 – 3	Dépolarisation par collisions .....	60
IV – 8 – 4	Effet Hanle .....	61
IV – 8 – 5	Diffusion de la lumière et effet Hanle .....	61
IV – 8 – 6	Application 1 : diffusion à 90° en présence de champ magnétique horizontal.....	64\
IV – 8 – 7	Application 2 : diffusion à 90° en présence de champ magnétique dans un plan méridien .....	65\
IV – 8 – 8	Diffusion directe ou « forward scattering » .....	68\
<b>Chapitre 5 : Introduction à la magnétohydrodynamique .....</b>		<b>70</b>
V – 1	Les équations de base.....	70
V – 2	Force de Laplace .....	76
V – 3	Equilibres sans force .....	77
V – 3 - 1	Equilibres sans courant : solutions générales à variables séparées.....	78\
V – 3 - 2	Equilibres sans force à $\alpha$ constant: solutions générales à variables séparées .....	79\
V – 3 - 3	Equilibres 2D sans force à $\alpha$ non constant.....	81
V – 3 - 4	Tube cylindrique sans force à $\alpha$ constant.....	81
V – 3 - 5	Hélicité magnétique .....	82
V – 4	Equation de diffusion et d'advection du champ magnétique .....	82
V – 5	Reconnexion magnétique .....	86
V – 6	Ondes acoustiques, ondes d'Alfven, ondes magnéto acoustiques, ondes de gravité .....	87
V – 6 –1	Ondes de pression longitudinales.....	87
V – 6 –2	Ondes magnétiques d'Alfven transversales .....	88
V – 6 – 3	Ondes magnéto acoustiques .....	88
V – 6 - 4	Ondes de gravité .....	90
V – 7	Chocs hydrodynamiques : relations de Rankine Hugoniot.....	92\
V – 8	Introduction aux chocs MHD.....	93
V – 8 – 1	chocs MHD perpendiculaires.....	93
V – 8 – 2	Chocs obliques lents et rapides (« slow shock » et « fast shock »).....	94\ \ \
V – 9	Solution de Parker du vent solaire : écoulement transsonique.....	96\
V – 10	Tubes de flux en régime stationnaire .....	98
V – 10 – 1	Tube hydrodynamique isotherme à section S constante .....	99
V – 10 – 2	Tube isotherme à $\beta \ll 1$ .....	99
V – 10 – 3	Tube isotherme quelconque .....	99
V – 10 – 4	Tube hydrodynamique adiabatique à section S constante.....	100
V – 10 – 5	Tube adiabatique à $\beta \ll 1$ .....	100
V – 10 – 6	Tube adiabatique quelconque.....	100
V – 11	Equilibre énergétique des boucles magnétiques coronales .....	101
V – 12	Stabilité MHD idéale (adiabatique, non résistive) : modes normaux .....	102\
V – 12 - 1	Condition d'équilibre aux interfaces plasma plasma.....	105
V – 12 – 2	Résumé de quelques instabilités .....	107
V – 12 – 3	Instabilité thermique radiative.....	108
<b>Chapitre 6 : La photosphère .....</b>		<b>110</b>
VI – 1	Conditions physiques.....	110
VI – 2	assombrissement centre bord .....	110
VI – 3	Formation du spectre continu: l'ion H- .....	111\
VI – 4	Flux de chaleur convective et flux d'énergie cinétique dans la photosphère .....	112

VI – 5 Les structures: granulation, mésogranulation, taches, tubes de flux .....	112\
VI – 6 Cyclicité.....	114
<b>Chapitre 7 : La chromosphère.....</b>	<b>115</b>
VII – 1 Conditions physiques.....	115
VII – 2 Comment est elle chauffée ? Le dépôt d'énergie .....	115
VII – 3 Raies chromosphériques visibles.....	117
VII – 4 Les structures: filaments, protubérances .....	118\
VII – 5 Les éruptions .....	119
<b>Chapitre 8 : La couronne .....</b>	<b>121</b>
VIII – 1 Raies coronales « interdites ».....	123\
VIII – 2 Couronne K.....	125
VIII – 3 Couronne F.....	126
VIII – 4 Vent solaire .....	127
VIII – 5 Interactions Soleil / Terre et Planètes.....	128
<b>Chapitre 9 : Télescopes et instruments solaires, aujourd'hui et demain.....</b>	<b>130</b>
IX – 1 Télescopes au sol .....	130
IX – 2 Télescopes spatiaux .....	131
<b>Annexe.....</b>	<b>134</b>
Quelques constantes universelles.....	134
Quelques constantes solaires.....	134
Quelques formules d'analyse vectorielle .....	136
Quelques fonctions spéciales .....	137
Bibliographie succinte.....	137

# Chapitre 1

## Le soleil en tant qu'étoile

### I – 1 Les équations de l'intérieur stellaire: équilibre hydrostatique, équilibre radiatif

Les équations de l'intérieur stellaire sont basées sur les lois de l'équilibre hydrostatique et de l'équilibre radiatif en symétrie sphérique. Considérons une étoile de rayon R ; on désigne par la variable r la distance au centre, et par  $M_r$  la masse de l'étoile contenue dans la sphère de rayon r. L'équilibre hydrostatique nous donne la première équation :

$$dM_r/dr = 4\pi r^2 \rho, \text{ ce signifie que la masse de l'étoile est } M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$$

$\rho(r)$  étant la masse volumique. L'équilibre des forces (pression, force de gravitation) donne :

$$dP/dr = - \rho GM_r/r^2$$

On peut adjoindre à ces deux équations d'inconnues  $M_r$ ,  $\rho$ ,  $P$ , une troisième équation d'état polytropique ( $P / \rho^\alpha = \text{Cte}$ ) si l'on ne souhaite pas faire intervenir la température T. Néanmoins cette méthode est restrictive et il est préférable de considérer la loi de l'équilibre radiatif, qui fera intervenir la température, à laquelle on adjoindra l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P = \rho k T / m$$

m étant la masse atomique moyenne du gaz, et k la constante de Boltzmann.

La loi de l'équilibre radiatif peut s'établir de manière simplifiée, et supposant que la variation relative du flux net  $dF/F$  intégrée sur les fréquences entre les coquilles de rayon r et r+dr est égale à la variation de la profondeur optique  $d\tau$  selon la loi :

$$dF/F = d\tau \text{ avec } d\tau = - k^* \rho dr$$

$k^*$  est le coefficient d'absorption du gaz intégré sur les fréquences : il dépend de r.

Dans les régions internes des étoiles où l'opacité est élevée, on peut considérer que la variation de flux radiatif net  $dF$  entre r et r+dr résulte d'un équilibre entre le rayonnement thermique émis (selon la fonction de Planck intégrée sur les fréquences) et le rayonnement absorbé, avec un bon degré d'approximation.

$$\text{On écrira donc } dF = d(\sigma T^4) = F d\tau = - F k^* \rho dr$$

$$\text{On déduit de cette relation : } dT/dr = -F k^* \rho / (4 \sigma T^3)$$

Le flux radiatif est par ailleurs relié à la luminosité de l'étoile  $L(r)$  à la distance r du centre par la relation :

$$F(r) = L(r) / (4\pi r^2)$$

$$\text{On en déduit l'équation d'équilibre radiatif : } dT/dr = - [ L / (4\pi r^2) ] k^* \rho / (4 \sigma T^3)$$

La formulation rigoureuse basée sur le transfert de rayonnement et la moyenne du coefficient d'absorption sur les fréquences sera donnée plus loin. Elle fait intervenir un facteur 4/3 supplémentaire et la moyenne de Rosseland  $k^*$ , et on obtient le **gradient radiatif** :

$$dT/dr = - [ 3 k^* \rho / (16 \sigma T^3) ] L / (4\pi r^2)$$

Enfin, la luminosité de l'étoile à la distance r est reliée au taux de production d'énergie  $\epsilon(r)$  par unité de masse selon la loi simple (description macroscopique des processus nucléaires):

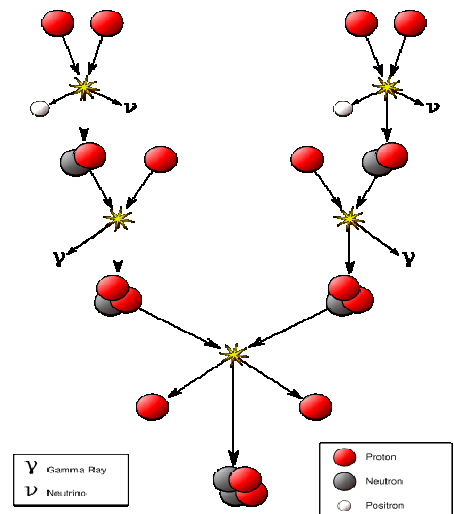
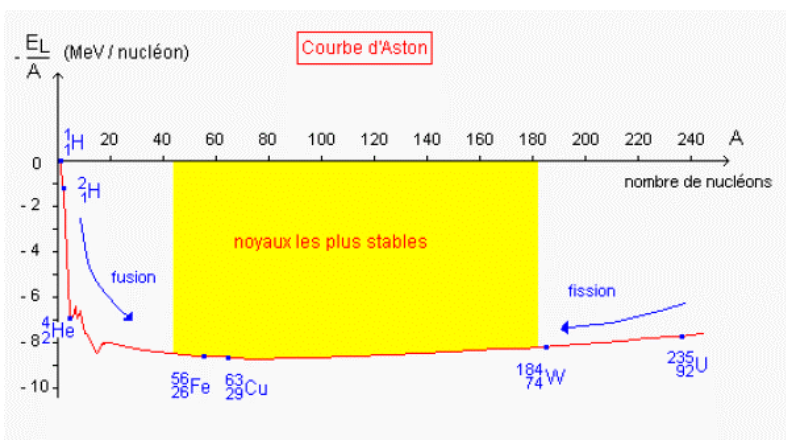
$$dL/dr = 4\pi r^2 \rho \epsilon$$

$\epsilon(r)$  se mesurant en  $\text{W kg}^{-1}$

Ces lois permettent le calcul numérique de modèles d'intérieur stellaires simples.

## Production d'énergie au cœur du soleil

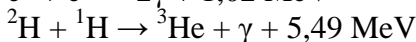
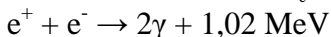
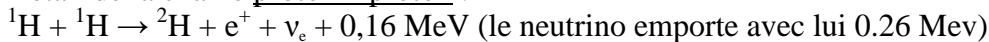
La courbe d'Aston (énergie de liaison par nucléon) présente un minimum au voisinage du Fer. Ainsi, seules les réactions de fusion des éléments légers ou de fission des éléments lourds sont susceptibles de fournir de l'énergie. Dans le soleil, la principale source d'énergie est due aux réactions proton – proton qui transmutent 4 noyaux d'hydrogène en un noyau d'hélium, et cette réaction qui dégage **26.2 Mev** s'accompagne de la production de neutrinos et de rayons gamma. En supposant que seule **10%** de la masse du Soleil, soit  $2 \cdot 10^{29}$  kg, est un réservoir de combustible utilisable d'Hydrogène, on peut en déduire un ordre de grandeur de la durée de vie de l'étoile. En effet, 10% de la masse du Soleil, soit  $1.2 \cdot 10^{56}$  protons, va générer par cette réaction  $1.2 \cdot 10^{56} \times 26.2 / 4$  Mev, soit  $1.2 \cdot 10^{44}$  J pendant la durée de vie du Soleil. Sachant que la luminosité du Soleil est de  $3.86 \cdot 10^{26}$  W, on en déduit une durée de vie approximative de  $3.2 \cdot 10^{17}$  s soit encore  **$10^{10}$  ans**.



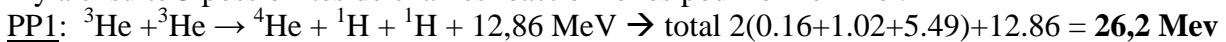
La chaîne proton – proton (à droite) génère un déficit de masse égal à  $4 \cdot 10^9$  kg/s. Cette perte de masse est convertie en énergie par la relation  $E = \Delta m C^2$  d'où la luminosité de l'étoile égale à :  $L = 3.86 \cdot 10^{26}$  W.

En  $10^{10}$  ans, la perte de masse représente  $1.3 \cdot 10^{27}$  kg soit moins d'un millème de la masse de l'étoile ( $6 \cdot 10^{-4}$ ).

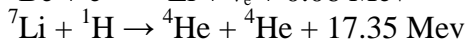
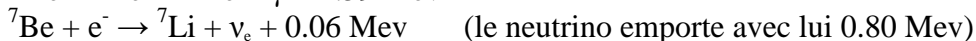
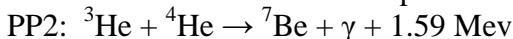
Détail de la chaîne proton – proton :



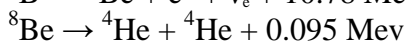
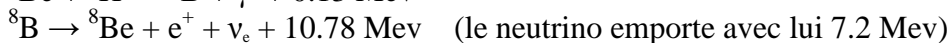
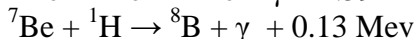
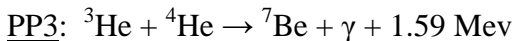
Il y a ensuite 3 possibilités de chaînes réactionnelles pour former  ${}^4_2\text{He}$  :



Cette réaction domine aux températures du coeur solaire ( $15 \cdot 10^6\text{K}$ ) à hauteur de **56%**

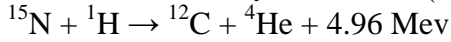
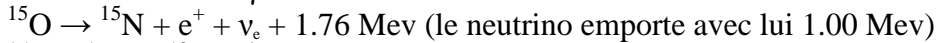
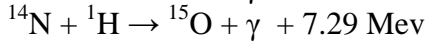
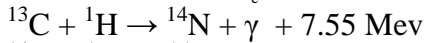
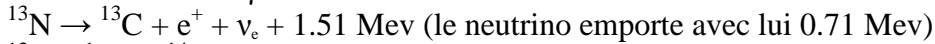
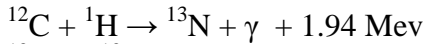


Cette chaîne domine autour de  $20 \cdot 10^6\text{K}$  et contribue pour le Soleil à hauteur de **40%**



Cette chaîne domine au dessus de  $25 \cdot 10^6$  K et contribue pour le Soleil à hauteur de **0.05%**

**3.2%** de la contribution est dûe au cycle CNO, qui se produit surtout dans les étoiles massives :



Le bilan du cycle CNO est de 25.01 Mev (plus 1.71 Mev pour les neutrinos)

## I – 2 Transport convectif: le critère de Schwarzschild

Néanmoins, le transport de l'énergie n'est pas toujours radiatif dans les étoiles, et comme dans le soleil à partir de 0.85 Rs, la convection (mouvements) peut prendre le relais jusqu'à la surface. Considérons une bulle de gaz qui monte dans l'étoile de  $r$  à  $r+dr$ , dans un environnement de gradient radiatif (indiqué R) ou la masse volumique passe de  $\rho$  à  $\rho+d\rho_R$ . Appelons  $\rho_A$  la masse volumique de la bulle de gaz. On suppose que l'équilibre des pressions est réalisé entre la bulle et le milieu environnant. Au cours de son ascension entre  $r$  et  $r+dr$ ,  $\rho_A$  passe de  $\rho$  à  $\rho+d\rho_A$  avec  $d\rho_A \neq d\rho_R$ . Si  $\rho+d\rho_A > \rho+d\rho_R$  alors l'ascension de la bulle s'arrête ; par contre, si  $\rho+d\rho_A < \rho+d\rho_R$  alors la bulle reçoit la poussée d'Archimède et continue son ascension : le gaz est instable.

Le critère d'instabilité est donc :  $d\rho_A < d\rho_R$

Supposons que les transformations dans la bulle soient adiabatiques :  $P / \rho^\gamma = \text{Cte}$

En différenciant, il vient :  $dP/P - \gamma d\rho/\rho = 0$ , d'où l'on tire  $d\rho_A = (\rho / \gamma) dP/P$

Dans le milieu environnant, la loi des gaz parfaits  $P / (\rho T) = \text{Cte}$  se différencie et donne :

$$dP/P - d\rho/\rho - dT/T = 0, \text{ d'où l'on tire } d\rho_R = \rho dP/P - \rho dT/T$$

Le critère d'instabilité  $d\rho_A < d\rho_R$  se traduit donc par :  $(\rho / \gamma) dP/P < \rho dP/P - \rho dT/T$ ,

Soit  $dP/P (1 - \gamma)/\gamma < - dT/T$ , ou  $dP/P (\gamma-1)/\gamma > dT/T$ , avec  $dP < 0$  et  $dT < 0$ , ce qui donne :

$$\boxed{d \ln P / d \ln T < \gamma / (\gamma - 1)} \quad \text{avec } \gamma = 5/3 \text{ (gaz monoatomique), on trouve } \boxed{d \ln P / d \ln T < 5/2}$$

Lorsque ce critère d'instabilité est rempli, alors le transport convectif s'installe.

Dans une zone convective, le gradient radiatif  $dT/dr = - [ 3 k^* \rho / (16 \sigma T^3) ] L / (4\pi r^2)$  sera remplacé par le gradient convectif  $dT/dr = (\gamma-1)/\gamma (T/P) (dP/dr)$  trouvé ci dessus. L'équilibre des forces (pression, force de gravitation) fournit  $dP/dr = - \rho GM_r/r^2$ , d'où le **gradient convectif** :

$$dT/dr = - (\gamma-1)/\gamma (T/P) \rho GM_r/r^2$$

## I – 3 Une estimation aux ordres de grandeur de la pression centrale

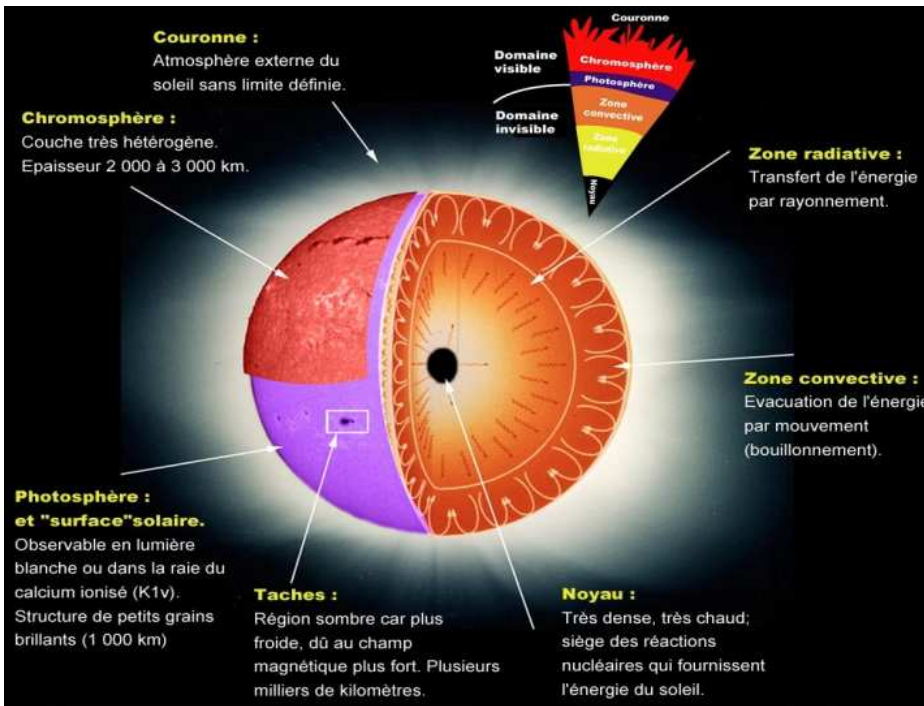
Pour retrouver, aux ordres de grandeur, les valeurs de température  $T_c$  et de pression  $P_c$  qui règnent au **cœur du Soleil**, on peut tenter de supposer la masse volumique  $\rho$  constante. Dans ce cas, on a :

$$M(r) = 4/3 \pi r^3 \rho \text{ masse à l'intérieur de la sphère de rayon } r$$

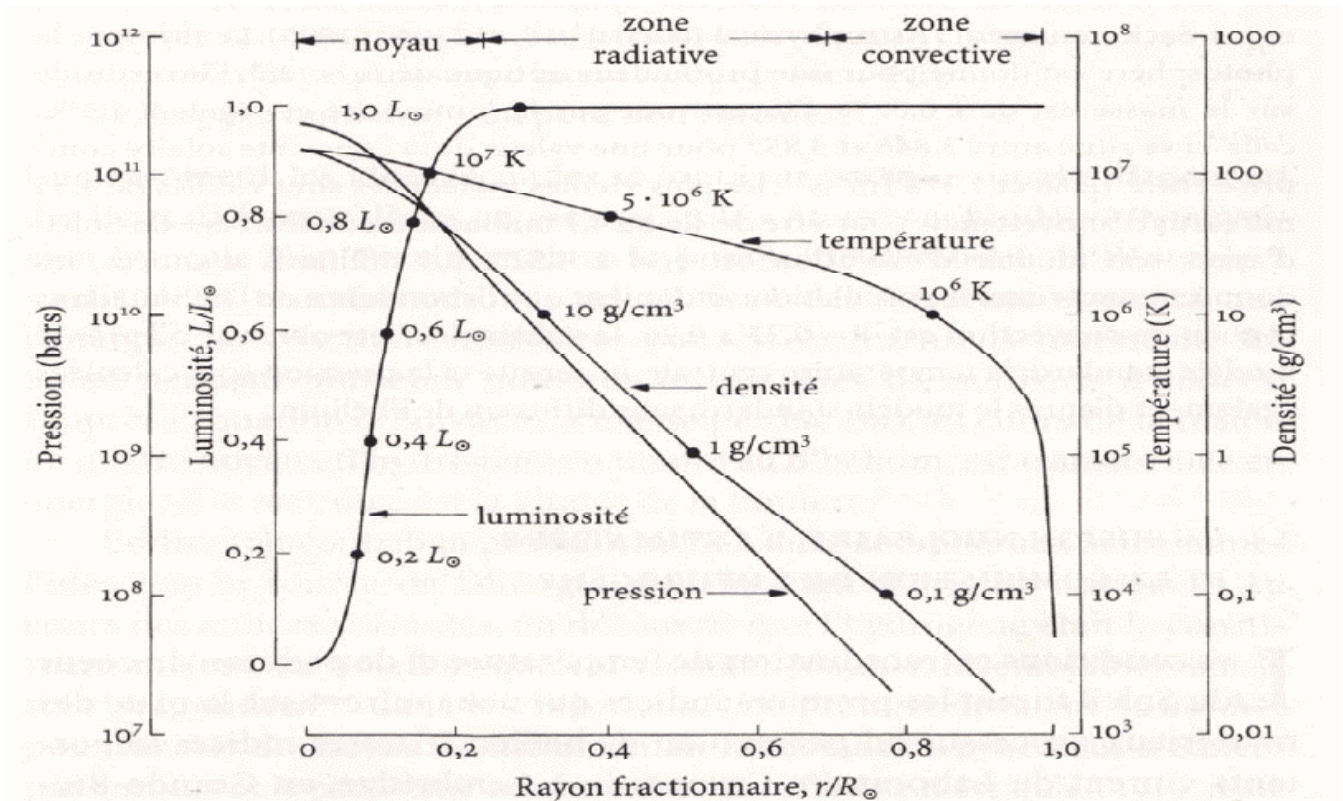
$$dP/dr = - \rho g(r) = - \rho G M(r)/r^2$$

d'où par intégration immédiate, on obtient  $P(r) - P_c = - 2/3 \pi G \rho^2 r^2$ .





*Vue d'artiste de la Structure interne du Soleil (noyau jusqu'à 0.25 R, zone radiative de 0.25 à 0.8 R, zone convective) et de son atmosphère (photosphère à 5750 K, chromosphère à 8000 K, couronne à 10<sup>6</sup> K puis vent solaire)*



*Structure interne du Soleil : pression, température, masse volumique, luminosité*

Avec  $\rho = M / (4/3 \pi R^3)$  où  $M$  est la masse du Soleil et  $R$  le rayon du Soleil, on obtient finalement :  
 $P(r) = P_c - 3 G M^2 r^2 / (8 \pi R^6)$   
 ce dont on peut déduire la pression centrale en supposant que  $P(R) = 0$  en surface :

$$P_c = 3 G M^2 / (8 \pi R^4) \text{ varie en } M^2/R^4$$

Numériquement, avec  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg et  $R = 7 \cdot 10^8$  m, on trouve  $P_c = 1.3 \cdot 10^{14}$  Pa. Avec une masse volumique moyenne de  $1400 \text{ kg m}^{-3}$ , la loi des gaz parfaits  $P_c = 2 \rho k T_c / m$  ( $m$  masse du proton, le facteur 2 provient du fait que le gaz est constitué pour moitié de protons et d'électrons) donne  $T_c =$

$5.5 \cdot 10^6$  K, ce qui n'est pas si mal, les valeurs « réelles » étant de  $T_c = 15 \cdot 10^6$  K et  $P_c = 1.8 \cdot 10^{16}$  Pa (avec  $\rho_c = 150000$  kg m<sup>-3</sup>). Comme  $\rho$  varie en  $M/R^3$ ,  $T_c$  varie en  $M/R$ .

#### I – 4 Une solution approximative : l'équation de Lane Emden pour un gaz polytropique

On fait parfois l'hypothèse (très approchée !) d'un gaz polytropique tel que  $P/P_c = (\rho/\rho_c)^\gamma$ ,  $\gamma$  étant l'indice polytropique,  $P_c$  et  $\rho_c$  étant les pressions et masse volumique au centre du Soleil. Dans ce cas, on résoud :

$$dM_r/dr = 4\pi r^2 \rho$$

$$dP/dr = -\rho GM_r/r^2$$

$$P = P_c (\rho/\rho_c)^\gamma$$

Et la loi des gaz parfaits  $P = \rho k T / m$  ( $m$  masse atomique moyenne =  $0.5 m_H$ )

On dérive la seconde équation ( $r^2 / \rho$ )  $dP/dr = -G M_r$  pour obtenir  $dM_r/dr$  que l'on égalise alors avec la première équation pour obtenir une équation sur  $\rho$ :

$$d/dr [(r^2 / \rho) dP/dr] = -G 4\pi r^2 \rho, \text{ qui devient avec } P = P_c (\rho/\rho_c)^\gamma :$$

$$P_c d/dr [(r^2 / \rho) d(\rho/\rho_c)^\gamma/dr] = -G 4\pi r^2 \rho$$

On transforme ensuite cette équation sur  $\rho$  en une équation sur  $T$  sachant que la loi polytropique relie  $\rho$  et  $T$  selon :  $\rho/\rho_c = (T/T_c)^{1/\gamma-1}$ ,  $T_c$  étant la température centrale.

En posant  $u = T/T_c$  (température normalisée), et  $n = 1/(\gamma-1)$ , l'équation différentielle devient :

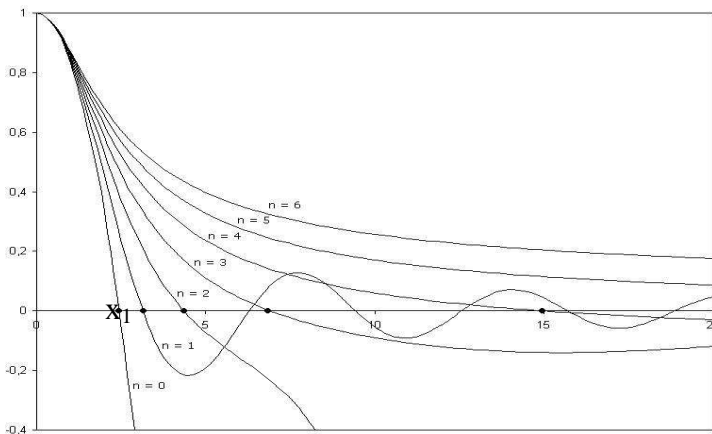
$$d/dr (r^2 du/dr) = -G 4\pi r^2 [(\gamma-1)/\gamma] [\rho_c / (kT_c/m)] u^n$$

Si nous posons  $h = [(\gamma/\gamma-1) (kT_c/m) / (4\pi G \rho_c)]^{1/2}$ , homogène à une échelle de hauteur, nous pouvons effectuer le changement de variable  $x = r/h$ , et nous obtenons finalement :

$$\boxed{d^2u/dx^2 + (2/x) du/dx + u^n = 0} \quad \text{Equation différentielle de Lane Emden}$$

qui a pour conditions aux limites en  $x = 0$  (centre du Soleil) :  $u = 1$  et  $du/dx = 0$ , car la nullité de la masse au centre du Soleil implique en  $r = 0$  :  $dP/dr = d\rho/dr = dT/dr = 0$ .

Diverses solutions sont données sur le graphique ci dessous, mais seules quelques valeurs de  $n$  ont un sens physique ( $n = 3/2$  pour  $\gamma = 5/3$ ,  $n = 3$  pour  $\gamma = 4/3$ ).



*Solution de l'équation de Lane Emden en fonction de  $x = r/h$  pour différentes valeurs de  $n$ . Le premier zéro  $x_1$  fixe le rayon  $R = x_1 h$  de l'étoile avec*

$$h = [(\gamma/\gamma-1) (kT_c/m) / (4\pi G \rho_c)]^{1/2}$$

La masse de l'étoile se calcule par  $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$

Avec  $r = x h$ ,  $\rho = \rho_c (T/T_c)^{1/\gamma-1} = \rho_c u^n$ , il vient  $M = 4\pi h^3 \rho_c \int_0^{R/h} x^2 u^n dx$

L'équation de Lane Emden pouvant s'écrire sous la forme  $d/dx[x^2 du/dx] = -x^2 u^n$ , l'intégration est immédiate, et donne la masse totale  $M$  de l'étoile:

$$M = -4\pi h R^2 \rho_c (du/dx)_{x=R/h}$$

La dérivée  $du/dx$  étant prise sur la surface de l'étoile en  $x = x_1 = R/h$ .

### I – 5 Le théorème du Viriel et quelques conséquences

Ce théorème est particulièrement important. Il énonce que **lorsqu'une étoile perd, du fait de sa contraction gravitationnelle, une énergie potentielle  $\Delta E_p$ , celle-ci se retrouve pour moitié dans l'apparition d'énergie thermique (qui sert à chauffer l'étoile) et pour moitié dans l'énergie rayonnée par l'étoile.** Définissons :

$$L'énergie potentielle de l'étoile par  $E_p = - \int_0^M G M(r) dM(r) / r$ ,$$

$M(r)$  étant la masse contenue dans une sphère de rayon  $r$ ,  $M$  la masse totale de l'étoile de rayon  $R$ .

$$L'énergie thermique de l'étoile par  $E_T = \int 3/2 k T(r) dN(r)$ ,$$

$N(r)$  étant le nombre d'atomes dans la couche de température  $T(r)$  et d'épaisseur  $dr$ .

Or  $dN(r) = dM(r) / \mu m$  avec  $m$  masse du proton,  $\mu$  masse atomique moyenne en unité de masse du proton (0.5 pour un gaz neutre protons/électrons) et  $dM(r) = 4 \pi r^2 \rho(r) dr$ . On en déduit :

$$E_T = \int_0^R (3/2 k T) 4 \pi r^2 \rho(r) dr / \mu m$$

$$\text{Or d'après la loi des gaz parfaits, on a } P(r) = \rho(r) k T(r) / \mu m, \text{ d'où } E_T = \int_0^R (3/2) 4 \pi r^2 P(r) dr$$

Intégrons par parties :

$$E_T = [(1/2) 4 \pi r^3 P(r)]_0^R - \int_0^R (1/2) 4 \pi r^3 dP(r)$$

Le premier terme est nul car  $P(R) = 0$  à la surface de l'étoile. Il reste donc

$$E_T = - \int_0^R (1/2) 4 \pi r^3 dP(r) \text{ que l'on intègre en utilisant la loi de l'équilibre hydrostatique :}$$

$$dP(r) = - \rho(r) G M(r) / r^2 dr, \text{ d'où :}$$

$$E_T = \int_0^R (1/2) 4 \pi r^3 \rho(r) G M(r) / r^2 dr = \int_0^R (1/2) dM(r) G M(r) / r = - 1/2 E_p$$

On obtient ainsi le théorème du Viriel :  $E_T = -1/2 E_p$

**L'ordre de grandeur** pour  $E_p$  est  $E_p \approx - G M^2/R$ , celui de l'énergie thermique est  $E_T \approx 1/2 G M^2 / R$

On peut se demander si l'énergie rayonnée par le Soleil ne provient pas de sa seule contraction.

L'énergie rayonnée par le Soleil durant le temps  $t$  est  $L t$  ( $L$  luminosité solaire). On peut en déduire  $t$  d'après le théorème du Viriel :

$$L t \approx 1/2 G M^2/R, \text{ d'où } t \approx 1/2 G M^2 / (L R)$$

On obtient numériquement avec  $L = 3.86 \cdot 10^{26}$  W,  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $R = 7 \cdot 10^8$  m,  $t \approx 1.5 \cdot 10^7$  ans, temps mille fois plus court que la durée de vie estimée du Soleil ( $10^{10}$  ans). Il est donc clair que l'énergie de contraction gravitationnelle est incapable d'expliquer le rayonnement du Soleil.

### Température interne moyenne

Le théorème du Viriel permet d'estimer une **température interne moyenne** au Soleil. Supposant qu'il y ait  $M/\mu m$  particules dans le Soleil,  $E_T = 3/2 k T M/\mu m$  (température supposée uniforme). D'après le théorème, on a  $E_T = 3/2 k T (M/\mu m) = 1/2 G M^2/R$  d'où l'on tire :

$$T = G M \mu m / (3 R k) \quad \text{qui varie comme } M/R$$

Numériquement, avec  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $\mu = 0.5$ ,  $R = 7 \cdot 10^8$  m, on trouve  **$T = 3.8 \cdot 10^6$  K**

### Relation masse luminosité (en transport radiatif)

Nous avons vu plus haut que le gradient radiatif est donné par :

$$dT/dr = - [ 3 k^* \rho / (16 \sigma T^3) ] L / (4\pi r^2)$$

Une analyse dimensionnelle donnerait :

$$T/R = [ 3 k^* \rho / (16 \sigma T^3) ] L / (4\pi R^2)$$

Avec  $\rho = M / (4/3 \pi R^3)$  et le résultat trouvé ci dessus  $T = G M \mu m / (3 R k)$ , on en déduit que :

$$L = (4\pi R) (16 \sigma T^4) / (3 k^* \rho) \quad \text{varie comme } M^3 / k^*$$

Dans cette relation le rayon  $R$  n'intervient pas : la luminosité totale  $L$  d'une étoile **en équilibre radiatif** dépend de la masse  $M$  seulement et du coefficient d'absorption moyen  $k^*$  intégré sur les fréquences.

### Temps d'effondrement gravitationnel

On peut formuler également un calcul aux ordres de grandeur pour se convaincre de la nécessité des forces de pression pour s'opposer à l'effondrement gravitationnel. En supposant que l'accélération d'une particule vaut  $- G M / R^2$  et reste constante de la surface au centre du Soleil, on calcule aisément que l'ordre de grandeur du temps pour parcourir la distance  $R$  est  $t \approx [2 R^3 / (G M)]^{1/2} \approx 2300$  s soit environ une heure. Ce **temps d'effondrement gravitationnel** est ainsi extrêmement rapide : l'équilibre hydrostatique est donc particulièrement efficace à l'intérieur du soleil.

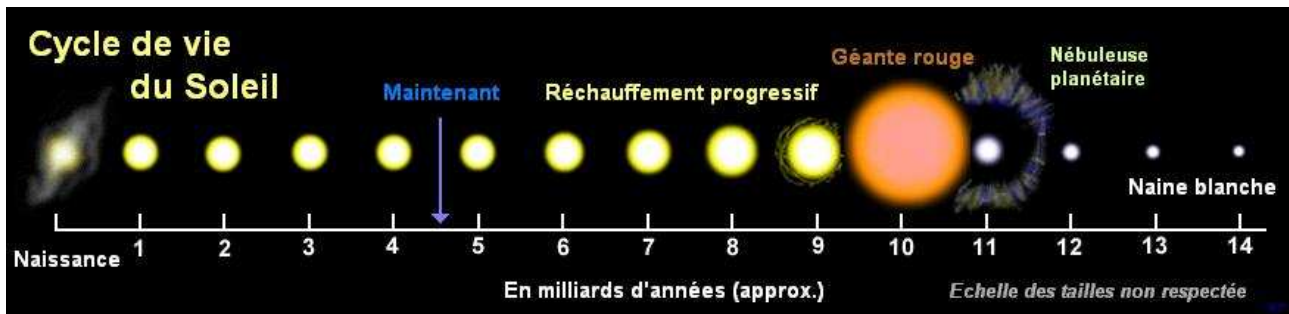
## I – 6 Evolution du soleil

On pense que le Soleil s'est formé à partir de la contraction d'un nuage d'Hydrogène interstellaire. Il est actuellement en équilibre hydrostatique (gravitation/pression) et thermique (production d'énergie nucléaire/rayonnement). L'équilibre hydrostatique d'un gaz parfait implique un rayonnement : pour l'assurer sans variation de rayon (donc d'énergie potentielle), l'énergie nucléaire au cœur de l'étoile s'est substituée à l'énergie due à la contraction gravitationnelle de l'étoile pendant sa phase de formation, lorsque la température centrale (en augmentation pendant la contraction car en  $M/R$ ) est devenue suffisante pour déclencher la fusion de l'Hydrogène. Le Soleil figure actuellement sur la séquence principale du diagramme de Hertzsprung Russel (diagramme HR Luminosité / Température effective).

### Sortie de la séquence principale

Le Soleil restera sur la séquence principale du diagramme HR tant que les conditions d'équilibre ne changeront pas. Il y a néanmoins évolution permanente au cœur du Soleil en raison du processus de fusion qui consomme de l'Hydrogène et fait apparaître de l'Hélium. En particulier, un cœur neutre d'Hydrogène et d'électrons a une masse atomique moyenne de  **$0.5 m_H$**  ( $\rho = n_H m_H$  mais  $P = 2 n_H k T = 2 \rho k T / m_H$ , avec  $n_H$  densité volumique de protons et  $m_H$  masse du proton). Mais à l'issue du processus de fusion, un cœur neutre d'Hélium et d'électrons a une masse atomique moyenne de  **$1.33 m_H$**  ( $\rho = 4 n_{He} m_H$  mais  $P = 3 n_{He} k T = 3/4 \rho k T / m_H$ , avec  $n_{He}$  densité volumique d'Hélium). Pour maintenir constante la pression imposée par l'équilibre hydrostatique (on passe de  $P = 2 \rho k T / m_H$  à  $P = 3/4 \rho k T / m_H$ ), la consommation d'Hydrogène implique donc une augmentation progressive de  $\rho$ , soit une contraction du noyau, impliquant un accroissement de  $T$  d'après le théorème du Viriel ( $T$  varie en  $M/R$ ), ce qui entraîne un *emballement du taux de production*

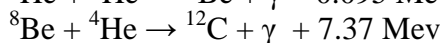
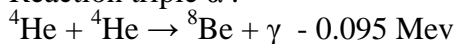
d'énergie nucléaire (très sensible à T). La contraction du cœur et l'augmentation progressive de la température centrale induisent une dilatation des couches extérieures de l'étoile autour du noyau, dans lesquelles la masse atomique moyenne n'a pas varié ( $0.5 m_H$ ) : à pression constante, le volume augmente avec la température. L'étoile devient alors plus lumineuse, parce que la dilatation facilite l'évacuation de l'excès de rayonnement (l'épaisseur optique  $\tau = \rho k^* R$  variant selon  $k^* / R^2$  diminue si R augmente). On assiste donc à un effet paradoxal dans lequel l'épuisement des ressources en Hydrogène entraîne un surcroît de consommation et de luminosité : ainsi, on estime que le Soleil est 2 fois plus brillant aujourd'hui que lors de son arrivée sur la séquence principale il y a  $4,5 \cdot 10^9$  ans, et ce mécanisme perdurera encore  $5 \cdot 10^9$  ans (figure ci dessous) jusqu'à l'épuisement total des réserves accessibles d'Hydrogène.



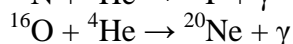
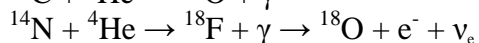
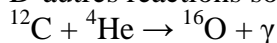
### Etape géante rouge

Lorsque tout l'Hydrogène disponible (10% du Soleil) aura été consommé dans le noyau, les réactions de fusion ne pourront plus subvenir à l'alimentation de la luminosité solaire. Le Soleil va donc se contracter, la variation d'énergie potentielle servant pour première moitié à la luminosité (selon le théorème du Viriel), et pour seconde moitié à l'accroissement d'énergie thermique de l'étoile dont la température interne va augmenter, provoquant la dilatation des couches extérieures. Dans un premier temps, le transport reste radiatif à luminosité constante ( $L$  varie selon  $M^3$ ), la dilatation de l'enveloppe à  $L$  constant implique donc une diminution de la température effective ( $L = 4 \pi R^2 \sigma T_e^4$ ) qui va porter  $T_e$  à 3000 K environ. Dans un second temps, la convection revient et la dilatation continue, mais à température effective  $T_e$  à peu près constante (3000 K) : on a affaire à une géante rouge, dont la luminosité  $L$  croît selon le carré du rayon, celui ci allant jusqu'à englober les planètes intérieures Mercure et Vénus. L'évolution s'accélère à mesure que la température centrale de l'étoile augmente, et cette phase d'expansion prend fin lorsque la température centrale est suffisante ( $10^8$  K) pour amorcer les réactions de fusion de l'Hélium en Carbone, dite triple  $\alpha$ ,  $3 \text{ He} \rightarrow \text{C}$  (et dans le cas du Soleil, on n'ira pas au delà de la fusion de l'Hélium, la fusion du Carbone nécessitant  $5 \cdot 10^8$  K, puis celle de l'Oxygène  $10^9$  K, températures réalisables uniquement dans des étoiles plus massives).

Réaction triple  $\alpha$  :



D'autres réactions sont possibles accompagnant la réaction triple  $\alpha$  :



de sorte que le cycle de fusion de l'Hélium ne produit pas seulement du Carbone.

D'autres phénomènes se produisent avant l'allumage des réactions de fusion de l'Helium en Carbone. En effet, au cours de la contraction des couches internes, la température du noyau d'Hélium augmente progressivement jusqu'à atteindre les  $10^8$  K nécessaires au déclenchement des réactions de fusion. Pendant ce temps, la température (plus faible) de la coquille périphérique du

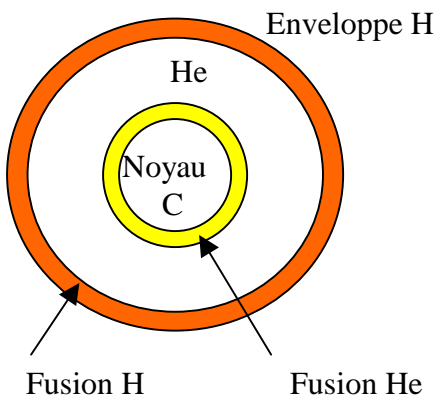


noyau, qui contient de l'Hydrogène, augmente également et la réaction de fusion  $4 \text{ H} \rightarrow \text{He}$  se produit désormais dans une couche fine autour du noyau : on dit que l'Hydrogène brûle en couche. Cette source d'énergie supplémentaire retarde la contraction interne qui n'est donc plus seule à alimenter la luminosité. C'est pourquoi la phase de géante rouge dure nettement plus longtemps ( $10^9$  ans) que la phase de contraction initiale proto stellaire (seulement  $1.5 \cdot 10^7$  ans).

### « Hélium flash »

Lorsque la fusion  $3 \text{ He} \rightarrow \text{C}$  démarre, la contraction gravitationnelle est stoppée et le transport redevient radiatif. Dans les étoiles de type solaire, on assiste tout d'abord à un « Hélium flash », sorte d'explosion due à l'emballage temporaire de la réaction. L'« Hélium flash » s'explique par la dégénérescence du gaz d'électrons qui, dans des conditions de densité extrêmes ( $\rho > 10^7 \text{ kg/m}^3$ ), ne se comporte plus comme un gaz parfait, mais comme un gaz de Fermi (contrairement au gaz parfait, la pression  $P$  y est indépendante de la température  $T$  et ne dépend que de  $\rho^{5/3}$ , voir cours de physique statistique). L'amorçage des réactions de fusion entraîne une augmentation de  $T$  qui n'est pas suivie d'une diminution de  $\rho$  par dilatation du noyau, s'opposant à l'échauffement (ce serait le cas avec un gaz parfait). De ce fait la réaction s'emballage par accroissement de  $T$  jusqu'au moment où la pression due à l'agitation thermique des noyaux (qui constituent un gaz parfait) devient voisine de la pression du gaz d'électrons. Le noyau gonfle alors rapidement (explosion),  $\rho$  diminue,  $T$  également, la dégénérescence du gaz d'électrons disparaît et l'étoile se stabilise et brûle dans son noyau l'Hélium disponible.

### Fusion de l'Hélium



L'Hélium brûle d'abord au centre du Soleil, puis en couche autour d'un noyau de Carbone. En même temps, la fusion de l'hydrogène continue en couche autour d'une enveloppe d'Hélium. Cette phase est bien plus courte ( $10^8$  ans) que sur la séquence principale ( $10^{10}$  ans) car les réserves en He sont faibles, la réaction triple  $\alpha$  moins efficace (7 Mev) que la chaîne proton-proton (26 Mev) et la luminosité de la géante rouge 10 à 100 fois plus élevée. Lorsque les ressources en He sont tarées, la contraction du noyau reprend, mais dans le cas du Soleil, sa masse est trop faible pour que la température de fusion du Carbone puisse être atteinte. La contraction du cœur ( $\rho$  augmente) va entraîner la réapparition d'un gaz dégénéré d'électrons.

### Naine Blanche

La fusion du Carbone n'étant pas amorçable dans le cas solaire, on a désormais affaire à un noyau de Carbone et d'électrons avec équilibre hydrostatique entre la pression du gaz dégénéré d'électrons ( $P$  proportionnelle à  $\rho^{5/3}$ ) et la gravitation. On peut montrer (cours de physique statistique) que l'équation d'état d'un gaz *totalemment dégénéré d'électrons non relativistes* est :

$$P = 10^7 (\rho/\mu_e)^{5/3}$$

$P$  en Pa et  $\rho$  en  $\text{kg m}^{-3}$ , où  $\mu_e$  est un nombre qui représente pour chaque atome le nombre de nucléons par électron libre. Pour un gaz protons/électrons, on aurait  $\mu_e = 1$ . Par contre, pour un gaz composé de noyaux d'Hélium ou de Carbone et d'électrons, on a  $\mu_e = 2$  (4 nucléons/2 électrons pour l'Hélium et 12 nucléons/6 électrons pour le Carbone).

Calculons la température pour laquelle la pression du gaz dégénéré d'électrons l'emporte sur celle du gaz parfait composé des noyaux seuls :

$$10^7 (\rho/\mu_e)^{5/3} > 10^4 \rho T / \mu \Rightarrow \rho > \rho_c = 2.4 \cdot 10^{-5} \mu_e^{5/2} \mu^{-3/2} T^{3/2}$$

où  $\mu$  est la masse atomique en unités de masse du proton ( $\mu = 1$  pour H, 4 pour He, 12 pour C).

A la température de fusion de l'Hydrogène ( $T = 15 \cdot 10^6 \text{ K}$ ,  $\mu_e = 1$ ,  $\mu = 1$ ), cela donne une masse volumique critique  $\rho_c = 1.4 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-3}$ , qui n'est pas atteinte (elle est 10 fois plus petite, donc les électrons ne forment pas un gaz dégénéré lors de la fusion des noyaux d'Hydrogène).

A la température de fusion de l'Hélium ( $T = 10^8 \text{ K}$ ,  $\mu_e = 2$ ,  $\mu = 4$ ),  $\rho_c = 1.7 \cdot 10^7 \text{ kg m}^{-3}$ , on estime que cette valeur critique est dépassée au moment de l'« Helium flash » avant la dilatation du noyau.

A cette même température, mais pour une naine blanche de Carbone ( $T = 10^8 \text{ K}$ ,  $\mu_e = 2$ ,  $\mu = 12$ ),  $\rho_c = 3.3 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-3}$ , on estime que cette valeur critique est très largement dépassée et que la pression est créée par le gaz dégénéré d'électrons.

Pour estimer, aux ordres de grandeur, les conditions physiques de la naine blanche de type « solaire », écrivons le théorème du Viriel, en supposant que l'énergie thermique  $E_T$  est égale à l'énergie interne  $U = P V$  ( $V$  est le volume de la naine):

$$E_T = -1/2 E_p \text{ soit } P (4/3 \pi R^3) = 1/2 G M^2 / R,$$

avec  $M$  et  $R$  respectivement masse et rayon de la naine blanche et  $P = 10^7 (\rho/\mu_e)^{5/3}$  pression du gaz d'électrons. Avec  $\rho = M / (4/3 \pi R^3)$ , on en déduit le rayon  $R$  en fonction de  $M$  et de  $\mu_e$  :

$R \approx 1.15 \cdot 10^{17} M^{-1/3} \mu_e^{-5/3}$
--

Avec  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  et  $\mu_e = 2$  (mélange Carbone/électrons), on trouve  $R \approx 3000 \text{ km}$  environ. La naine blanche a donc les dimensions d'une petite planète. Sa masse volumique  $\rho$  est évidemment énorme :  $\rho = M / (4/3 \pi R^3) \approx 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$ , soit  $10^7$  fois la densité de l'eau ! La gravité à la surface d'un tel astre  $g = G M / R^2$  est voisine de  $1.5 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-2}$ , plus d'un million de fois la gravité à la surface de la Terre !

Quel est le devenir de la naine blanche ? Elle se refroidira au fil du temps par rayonnement pour devenir une naine rouge, puis noire, corps froid invisible, dans lequel on pense que les noyaux de Carbone formeront un réseau solide cristallin.

Les étoiles plus massives que le Soleil ( $> 1.2 M$ ) peuvent atteindre le stade de neutronisation, car lorsque la densité est très élevée, les électrons se recombinent avec les protons des noyaux pour former un gaz de neutrons dégénéré. Si la masse est trop grande, la pression du gaz de neutrons ne parvient pas à équilibrer la gravitation, et il y a effondrement impliquant la formation d'un « trou noir » de rayon  $R = 2 G M / C^2$  faisant seulement quelques km duquel aucun rayonnement électromagnétique ne peut sortir.

## Chapitre 2

### Equilibre thermodynamique et formation des raies

#### II - 1 Le spectre des atomes hydrogénoïdes (transitions quantiques)

Un atome hydrogénoïde est composé d'un noyau de charge électrique  $+Ze$  et d'un unique électron de charge  $-e$ . On peut citer par exemple l'hydrogène neutre HI, dont les raies sont caractéristiques de la chromosphère (10000 K), et l'ion HeII, dans la transition chromosphère couronne (80000 K). En théorie classique, on considère que l'électron est en rotation autour du noyau à la vitesse angulaire  $\omega$  et à la distance  $r$  du noyau, de telle sorte que :  $m_e \omega^2 r = Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^2)$

Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique orbital  $L$  de l'électron est quantifié par la loi:

$$L = n \hbar = m_e \omega r^2$$

Où  $\hbar = h / 2\pi$  et où  $n$  est un nombre entier positif.

On déduit de ces deux relations  $r = n^2 \hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi Z e^2)$

soit numériquement  $r = 0.53 n^2 / Z$  Angströms ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ). Le rayon de l'atome d'hydrogène est égal à  $\hbar^2 \epsilon_0 / (m_e \pi e^2) = 0.53 \text{ \AA}$  au niveau fondamental ( $n = 1, Z = 1$ ).

L'énergie totale  $E_n$  de l'atome est la somme des énergies cinétiques  $\frac{1}{2} m_e \omega^2 r^2$  et de l'énergie potentielle  $-Z e^2 / (4 \pi \epsilon_0 r)$ . On trouve :

$$E_n = - (Z^2 / n^2) [ e^4 m_e / (8 \hbar^2 \epsilon_0^2) ] = - R_H Z^2 / n^2 = -13.6 Z^2 / n^2 \text{ électrons Volt}$$

$R_H = e^4 m_e / (8 \hbar^2 \epsilon_0^2)$  est la constante de Rydberg égale numériquement à 13.6 eV.

Les transitions quantiques entre deux niveaux  $m$  et  $n$  font intervenir l'absorption ou l'émission d'un photon dont l'énergie correspond à la différence d'énergie entre les deux niveaux électroniques :

$$h \nu_{mn} = h C / \lambda_{mn} = - R_H Z^2 ( 1/n^2 - 1/m^2 )$$

$\nu_{mn}$  et  $\lambda_{mn}$  sont respectivement la fréquence et la longueur d'onde de la transition quantique.

L'énergie d'ionisation à partir du niveau de départ  $n$  vaut  $E_i = R_H Z^2 / n^2 = 13.6 Z^2 / n^2 \text{ eV}$  ; pour l'atome d'Hydrogène, l'énergie d'ionisation à partir du fondamental ( $n = 1, Z = 1$ ) est égale à la constante de Rydberg  $R_H = 13.6 \text{ eV}$ .

*Le spectre de l'atome d'Hydrogène ( $Z = 1$ )*

**UV** : Série de **Lyman**, transitions du niveau **1**  $\rightarrow$   **$n > 1$**  :  $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H ( 1 - 1/n^2 )$

$\Delta E = h \nu$  : 10.2 eV  $\rightarrow$  13.6 eV (continu); en  $\lambda$  : 1216 Å (Ly  $\alpha$ )  $\rightarrow$  912 Å (continu de Lyman)

Dénomination : Ly  $\alpha$  1  $\rightarrow$  2 ; Ly  $\beta$  1  $\rightarrow$  3 ; Ly  $\gamma$  1  $\rightarrow$  4 ...

Energie d'ionisation 13.6 eV ou 912 Å

**Visible** : série de **Balmer**, transitions du niveau **2**  $\rightarrow$   **$n > 2$**  :  $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H ( 1/4 - 1/n^2 )$

$\Delta E = h \nu$  : 1.9 eV  $\rightarrow$  3.4 eV (continu); en  $\lambda$  : 6563 Å (H  $\alpha$ )  $\rightarrow$  3650 Å (continu de Balmer)

Dénomination : H  $\alpha$  2  $\rightarrow$  3 ; H  $\beta$  2  $\rightarrow$  4 ; H  $\gamma$  2  $\rightarrow$  5 ...

Energie d'ionisation 3.4 eV ou 3650 Å

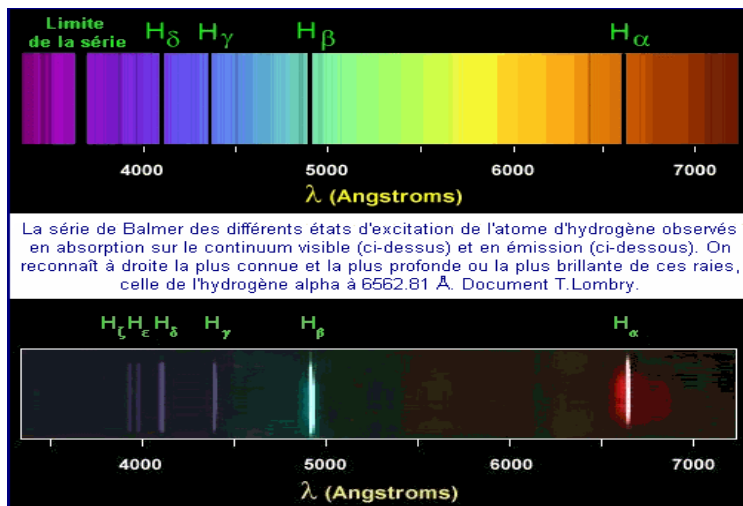
**IR**, Série de **Paschen**, transitions du niveau **3**  $\rightarrow$   **$n > 3$**  :  $\Delta E = h \nu = h C / \lambda = R_H ( 1/9 - 1/n^2 )$

$\Delta E = h \nu$  : 0.7 eV  $\rightarrow$  1.5 eV (continu); en  $\lambda$  : 18775 Å (Pa  $\alpha$ )  $\rightarrow$  8214 Å (continu de Paschen)

Dénomination : Pa  $\alpha$  3  $\rightarrow$  4 ; Pa  $\beta$  3  $\rightarrow$  5 ; Pa  $\gamma$  3  $\rightarrow$  6 ...

Energie d'ionisation 1.5 eV ou 8214 Å





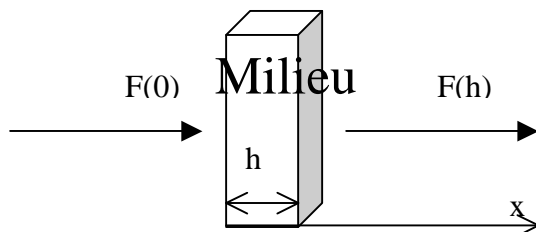
Série de Balmer de l'atome d'Hydrogène.  
 en haut : raies d'absorption  
 en bas : raies d'émission.

La limite de la série est à 3650 Å (énergie d'ionisation, continu de Balmer)

## II – 2 Sections efficaces

Les sections efficaces servent à quantifier les interactions matière rayonnement. Elles représentent une surface d'interaction et se mesurent en  $m^2$ .

Considérons un flux  $F$  de particules rencontrant un obstacle composé de  $N$  cibles par unité de volume, d'épaisseur  $h$ , et appelons  $\sigma$  la section efficace d'interaction.



On peut écrire  $dF = -F \sigma N dx$  avec  $\sigma$  en  $m^2$  et  $N$  en  $m^{-3}$

En intégrant (en supposant  $\sigma$  et  $N$  indépendants de  $x$ ), il vient  $F(h) = F(0) \exp(-\sigma N h)$

La quantité  $\tau = \sigma N h$  est l'épaisseur optique du milieu. Lorsqu'on observe le soleil, on voit les régions dont la profondeur optique est voisine de 1 à la longueur d'onde de l'observation.

Plus généralement, on peut écrire  $d\tau = \sigma N dx$  ; dans ce cas  $F(h) = F(0) \exp(-\tau)$  avec  $\tau = \int_0^h \sigma N dx$

Processus de diffusion des photons:

- la diffusion des photons par les atomes fait passer l'atome d'un niveau d'énergie 1 vers 2, immédiatement suivie de la transition inverse de 2 vers 1, avec ré-émission d'un photon de même énergie mais de direction différente (diffusion cohérente)
- La diffusion des photons par les électrons libres : la section de diffusion Thomson des photons par les électrons libres est:  $\sigma \approx 6.65 \cdot 10^{-29} m^2$
- La diffusion des photons par les molécules (Rayleigh), qui varie en  $1/\lambda^4$

Les collisions avec les électrons libres:

Sections efficaces de collision avec des électrons libres :  $\sigma \approx 10^{-20} m^2 \approx \pi a^2$  ( $a$  rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène) : la collision provoque un changement d'orbite (hyperbolique) de l'électron dans le champ de l'atome (transition « libre – libre ») qui peut passer à un niveau d'excitation supérieur ou inférieur (excitation ou desexcitation collisionnelle). Le rayon de Bohr est  $a = (h^2 \epsilon_0) / (\pi m_e e^2) = 0.5 \text{ \AA}$ .

L'absorption ou l'émission des photons:

- Sections efficaces de collision avec les photons (photo ionisation) :  $\sigma \approx 10^{-21}$  à  $10^{-22}$  m<sup>2</sup>. Elle correspond à la perte d'un électron par l'atome (transition « **lié – libre** »)
- Sections efficaces de collision avec les photons (photo excitation) :  $\sigma \approx 10^{-14}$  à  $10^{-16}$  m<sup>2</sup>. Elle correspond à une transition quantique « **lié – lié** », mais la section efficace est très élevée uniquement dans un intervalle de fréquences très étroit correspondant aux raies spectrales

## II – 3 Formation des raies spectrales ; profil Lorentzien ; amortissement naturel

Les sections efficaces de photo excitation (transitions quantiques radiatives) sont très élevées dans le domaine étroit de fréquence des raies. Considérons un électron de position  $x$  lié au noyau par la force de rappel  $-kx$ , subissant un amortissement  $-m\gamma dx/dt$ , et oscillant dans un champ électrique  $E e^{i\omega t}$  représentant la vibration lumineuse de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ .  $m$  et  $-e$  sont respectivement la masse et la charge de l'électron ;  $\gamma$  est son amortissement (en s<sup>-1</sup>). Le principe de la dynamique donne :

$$m d^2x/dt^2 + m\gamma dx/dt + kx = -e E e^{i\omega t} \text{ et l'on pose } x = X e^{i\omega t}$$

On peut montrer que le coefficient d'amortissement  $\gamma$  s'obtient en égalisant la puissance dissipée par la force de frottement à la puissance rayonnée par l'électron (potentiels retardés):

$$\gamma = (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 \omega^2 / (m C^3) \text{ avec } \omega^2 = k/m \text{ pulsation de résonance}$$

Pour la raie H $\alpha$  ( $\lambda = 6563$  Å), on a  $\omega_0 = 2\pi C / \lambda = 2.87 \cdot 10^{15}$  Hz, d'où  $\gamma = 5.2 \cdot 10^7$  s<sup>-1</sup>.

La résolution de l'équation du mouvement donne :  $X = (-e/m) E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)$

La puissance absorbée par la dissipation est égale à :

$$\langle P_f \rangle = 1/2 m\gamma |X|^2 \omega^2 = 1/2 \gamma (e^2/m) E^2 \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]$$

En posant  $\omega = 2\pi\nu$ , il vient  $\langle P_f \rangle = (\gamma/8\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(v_0^2/v - v)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$

Au voisinage de la fréquence de résonance  $\nu_0$ , on a  $(v_0^2/v - v) \approx 2(v_0 - v)$ , d'où

$$\langle P_f \rangle \approx (\gamma/32\pi^2) (e^2/m) E^2 / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

La section efficace  $\sigma$  (en m<sup>2</sup>) de photo ionisation est définie comme le rapport de la puissance dissipée  $\langle P_f \rangle$  à la densité de puissance électromagnétique incidente par unité de surface, elle-même égale au produit  $C \epsilon_0 E^2/2$  (en W/m<sup>2</sup>) :

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / (C \epsilon_0 E^2/2) = [ e^2 / (16\pi^2 \epsilon_0 m C) ] \gamma / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Avec  $\gamma = 2 \pi e^2 \nu_0^2 / (3 \epsilon_0 m C^3)$ , on obtient finalement la section efficace en fonction de  $\nu$ :

$$\sigma(\nu) = [ e^4 / (24\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4) ] \nu_0^2 / [(v - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Introduisons la section efficace de diffusion Thomson de la lumière sur les électrons libres,

$\sigma_{th} = e^4 / (6\pi \epsilon_0^2 m^2 C^4)$ , alors on obtient  $\sigma = 1/4 \sigma_{th} \nu_0^2 / [(v - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$ . A la fréquence centrale de la raie,  $\nu = \nu_0$  implique  $\sigma(\nu_0) = \sigma_{th} 4 \pi^2 \nu_0^2 / \gamma^2 = \sigma_{th} 4 \pi^2 C^2 / (\gamma^2 \lambda_0^2)$

Sachant que  $\sigma_{th} = 6.63 \cdot 10^{-29}$  m<sup>2</sup>, on en déduit, pour la raie H $\alpha$  ( $\lambda_0 = 6563$  Å,  $\gamma = 5.2 \cdot 10^7$  s<sup>-1</sup>) que  $\sigma(H\alpha) \approx 2 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup>. La section efficace au cœur des raies est très grande.

La section efficace totale sur l'ensemble du profil s'obtient par intégration sur les fréquences.

$$\sigma_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\nu) d\nu = e^2 / (4 \epsilon_0 m C)$$

En mécanique quantique, on introduit un facteur multiplicatif appelé *force d'oscillateur*  $f_{nm}$  de la transition de telle sorte que  $\sigma_{tot} = f_{nm} [e^2 / (4 \epsilon_0 m C)]$ . La force d'oscillateur est un nombre inférieur à l'unité (0.641 pour H $\alpha$ , 0.119 pour H $\beta$  par exemple).

## II – 4 Loi de Boltzmann de distribution des niveaux d'énergie en équilibre thermodynamique

Soit  $N_n$  et  $N_m$  les nombres d'atomes respectivement aux niveaux d'énergie  $E_n$  et  $E_m$ , chaque niveau d'énergie  $i$  ayant un poids statistique  $g_i$ . La loi de Boltzmann permet de connaître la répartition des atomes en fonction de leur niveau d'énergie :

$$N_n / N_m = (g_n / g_m) \exp - [(E_n - E_m) / kT]$$

$k$  constante de Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  MKSA),  $T$  température du milieu en Kelvins.

$g_n$  est le poids statistique du niveau  $n$ . Par exemple :

$g_n = 2n^2$  pour le niveau  $n$  des atomes de type hydrogénoïde

$g_J = 2J+1$  pour un atome dans un état  $^{2S+1}L_J$  ( $L$ ,  $S$ ,  $J$  moment cinétique orbital, de spin, et total)

## II – 5 Loi de Maxwell de distribution des vitesses ; profil Doppler ; largeur Doppler

La fonction de distribution du module des vitesses  $v$  d'un gaz d'atomes de masse  $m$  en équilibre thermodynamique à la température  $T$  est donnée par la loi :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT) 4 \pi v^2 \quad \text{avec} \quad \int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Cette fonction de distribution présente un maximum pour  $v_{\max} = (2kT / m)^{1/2}$

La *vitesse moyenne* est  $\langle v \rangle = \int v f(v) dv / \int f(v) dv = 2 v_{\max} / \sqrt{\pi} = [8kT / (\pi m)]^{1/2}$

On a typiquement 14 km/s dans la photosphère et 145 km/s dans la couronne pour de l'Hydrogène ou des protons

La *vitesse quadratique moyenne* est  $\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(v) dv / \int f(v) dv = 3/2 v_{\max}^2 = 3 kT / m$

de sorte que *l'énergie cinétique moyenne* est  $\langle E_c \rangle = 1/2 m \langle v^2 \rangle = 3/2 kT$

Lorsque l'on s'intéresse au mouvement des particules dans une seule direction de l'espace (cas de l'effet Doppler thermique par exemple), on utilise la forme suivante de la loi de Maxwell :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp(-1/2 m v^2 / kT)$$

L'effet Doppler mène à un décalage en fréquence tel que  $(v - v_0) / v_0 = v / C$  où  $v_0$  est la fréquence au repos et l'on obtient un profil Doppler **gaussien** dont la distribution en fréquence est :

$$f(v) = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-1/2 m C^2 ((v - v_0)^2 / v_0^2) / kT] = [m / (2\pi kT)]^{3/2} \exp[-((v - v_0)^2 / \Delta v_D^2)]$$

La quantité  $\Delta v_D = (v_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$  s'appelle demi largeur Doppler du profil.

Sa demi largeur à mi hauteur vaut  $\Delta v = (\ln 2)^{1/2} \Delta v_D = (v_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

En longueur d'onde, avec  $\lambda_0$  longueur d'onde au repos, on obtient :

$\Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$  demi largeur Doppler, et

$\Delta \lambda = (\ln 2)^{1/2} \Delta \lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$  demi largeur à mi hauteur du profil

On retient que la largeur *totale* à mi hauteur est  $2\Delta \lambda = 2 (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$

Plus la température est élevée, et plus la masse des atomes constituant le gaz est faible, plus la largeur Doppler est grande. A titre d'exemple, on trouve :

H $\alpha$  :  $T = 10^4$  K,  $2\Delta \lambda = 0.47$  Å dans la chromosphère

Fe :  $T = 10^4$  K,  $2\Delta \lambda = 0.06$  Å dans la photosphère

Fe :  $T = 10^6$  K,  $2\Delta \lambda = 0.62$  Å dans la couronne (raies élargies par la température)

## II – 6 Loi de Saha de l'équilibre d'ionisation

L'équilibre d'ionisation  $A = A^+ + e$  est régi par la loi de Saha :

$$n_e n_{A^+} / n_A = (g_e g_{A^+} / g_A) [ (2\pi m_e k T)^{3/2} / h^3 ] \exp - (\chi_A / kT)$$

$n_e$ ,  $n_{A^+}$ ,  $n_A$  étant les populations en  $m^{-3}$  des électrons, ions  $A^+$  et atomes  $A$ ,  $m_e$  la masse de l'électron et  $\chi_A$  le potentiel d'ionisation. Plus la température est élevée, et plus l'équilibre se déplace vers la droite (ionisation). Les coefficients  $g$  sont les poids statistiques (2 pour l'électron).

## II – 7 Fonction de Planck du corps noir : densité de rayonnement et intensité

Paradoxalement, le spectre continu (donc en négligeant les raies spectrales) du soleil et des étoiles est proche d'un spectre de corps noir (objet idéal de température  $T$  qui absorbe toute lumière extérieure tombant sur lui, et qui n'émet aucune radiation vers l'extérieur). Le spectre de corps noir fournit une bonne approximation de la température de surface (dite effective) des étoiles. La densité spectrale d'énergie du corps noir est :

$$E_\nu = (8 \pi h \nu^3 / C^3) / [ \exp (h \nu / k T) - 1 ] \quad \text{en } J \text{ m}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$$

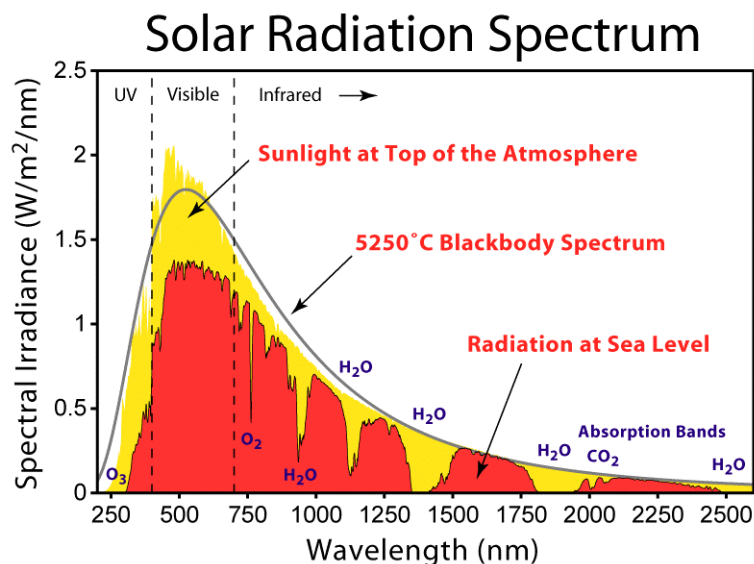
L'intensité spectrale du corps noir est :

$$B_\nu = E_\nu (C / 4\pi) = (2 h \nu^3 / C^2) / [ \exp (h \nu / k T) - 1 ] \quad \text{en } W \text{ st}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \quad (\text{st} = \text{stéradian})$$

De la relation  $B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$  avec  $\lambda = C/\nu$ , il vient  $B_\lambda = B_\nu C/\lambda^2$  d'où :

$$B_\lambda = (2 h C^2 / \lambda^5) / [ \exp (h C / \lambda k T) - 1 ]$$

L'intensité spectrale du corps noir pour  $T = 5750 \text{ K}$  est représentée ci dessous avec en superposition l'intensité spectrale de rayonnement du soleil en fonction de la longueur d'onde.



La densité spectrale d'énergie intégrée sur les fréquences donne :

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu = a T^4 \quad \text{en } J \text{ m}^{-3} \quad \text{avec } a = 8 \pi^5 k^4 / (15 C^3 h^3) = 7.56 \cdot 10^{-16} \text{ MKSA}$$

L'intensité spectrale du corps noir intégrée sur les fréquences vaut :

$$B = \int_0^{\infty} B_v dv = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

avec  $\sigma = a C / 4 = 2 \pi^5 k^4 / (15 C^2 h^3) = 5.67 \cdot 10^{-8} W \text{ m}^{-2} K^{-4}$  **constante de Stefan**

**La puissance en Watts rayonnée par 1 m<sup>2</sup> de corps noir est égale à  $\sigma T^4$**

On définit la température effective du soleil en exprimant l'égalité entre la puissance rayonnée L du soleil et celle du corps noir :  $L = 3.86 \cdot 10^{26} W = 4 \pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$   
avec R rayon du soleil ; on en déduit pour le soleil  $T_{\text{eff}} = 5750 K$  environ

## Loi de Wien

Le maximum  $\lambda_{\text{max}}$  de la fonction  $B_\lambda$  est obtenu en résolvant l'équation  $dB_\lambda/d\lambda = 0$ , équation qui n'a pas de solution analytique et donne numériquement:

$$h C / \lambda_{\text{max}} k T = 4.965 \text{ ( ce nombre est solution de } e^x = (1 - x/5)^{-1} \text{ )}$$

ce qui donne  $\lambda_{\text{max}} T = 2.9 \cdot 10^{-3}$  **ou loi de Wien**

Le maximum de la fonction de Planck se décale vers le bleu lorsque T augmente. Pour le soleil, il se trouve à  $\lambda_{\text{max}} = 5000 \text{ \AA}$  dans le vert.

**Médiane**  $\lambda_{1/2}$  de la fonction  $B_\lambda$  : elle est telle que  $\int_0^{\lambda_{1/2}} B_\lambda d\lambda = \int_{\lambda_{1/2}}^{\infty} B_\lambda d\lambda$

On trouve numériquement  $\lambda_{1/2} = 1.42 \lambda_{\text{max}} = 7100 \text{ \AA}$  pour le soleil, ce qui veut dire que presque la moitié de l'énergie est rayonnée dans l'infra rouge.

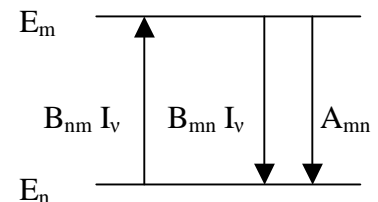
## II – 8 Coefficients d'Einstein et équilibre statistique

Considérons l'équilibre statistique entre deux niveaux m et n à la température T. Soit  $N_m$  et  $N_n$  les densités volumiques (en  $m^{-3}$ ) des populations des niveaux m et n, soumises par ailleurs à l'intensité spectrale de rayonnement  $I_\nu$  ( $W \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ st}^{-1}$ ).

La variation de population du niveau m est donnée par :

$$dN_m/dt = - A_{mn} N_m - B_{mn} N_m I_\nu + B_{nm} N_n I_\nu$$

*émission      émission      absorption*  
*spontanée    induite*



Les coefficients  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  et  $B_{nm}$  sont les coefficients d'Einstein.  $A_{mn}$  se mesure en  $s^{-1}$  et mesure l'inverse de la durée de vie des niveaux (facteur d'amortissement  $\gamma$  des raies).

A l'équilibre statistique, on a  $dN_m/dt = 0$ , d'où l'on tire :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [ (B_{nm} N_n / B_{mn} N_m) - 1 ]$$

D'après la loi de Boltzman,  $N_n/N_m = (g_n/g_m) \exp [-(E_n-E_m)/kT]$ , et d'autre part  $I_\nu$  est égale à l'intensité spectrale de rayonnement du corps noir  $B_\nu$ , d'où il vient :

$$I_\nu = (A_{mn}/B_{mn}) / [ (B_{nm} g_n / B_{mn} g_m) \exp(-(E_n-E_m)/kT) - 1 ] = (2 h \nu^3 / C^2) / [ \exp(h\nu / kT) - 1 ]$$

En identifiant, on trouve :  $A_{mn}/B_{mn} = 2 h \nu^3 / C^2$  et  $B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$ , avec  $h \nu = E_m - E_n$

Les coefficients  $A_{mn}$  sont reliés au coefficient d'amortissement  $\gamma$  introduit plus haut. En effet, sans champ de rayonnement, on a :

$$dN_m/dt = - \sum_{n < m} A_{mn} N_m = - N_m \sum_{n < m} A_{mn} = - N_m \gamma_m \text{ avec } \gamma_m = \sum_{n < m} A_{mn} = 1/\tau_m$$

$\gamma_m$  est l'inverse de la durée de vie  $\tau_m$  du niveau  $m$

Les coefficients  $B_{mn}$  sont reliés aux forces d'oscillateur par  $f_{mn} = (\epsilon_0 m C / \pi e^2) B_{mn} h \nu_{mn}$

## II – 9 Amortissement collisionnel ; théorie de l'impact de Weisskopf

Les collisions, tout comme l'agitation thermique, constituent un facteur important d'élargissement des raies spectrales. Nous allons utiliser ici la théorie la plus simple, celle de l'impact de Weisskopf, qui a ensuite entraîné de nombreux développements.

Soit  $t_c$  la durée entre deux collisions. On assimile l'atome perturbé par la collision à un oscillateur harmonique qui émet pendant le temps  $t_c$  fini un train d'onde de la forme  $A e^{2i\pi\nu_0 t}$ ,  $\nu_0$  étant la fréquence propre de l'oscillateur. Le spectre de puissance de ce train d'onde de durée finie  $t_c$  est égal à  $|F(\nu, t)|^2$  où  $F(\nu, t)$  est la transformée de Fourier que l'on calcule par :

$$F(\nu, t) = A \int_0^T e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-2i\pi\nu t} dt = A (e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)T} - 1) / (2i\pi(\nu_0 - \nu))$$

Nous supposons que la densité de probabilité pour que le temps entre deux collisions soit égal à  $t_c$  est une loi exponentielle de marche au hasard du type  $(1/\tau) e^{-t_c/\tau}$  où  $\tau$  est le temps **moyen** entre deux collisions, avec la normalisation  $\int (1/\tau) e^{-t_c/\tau} dt_c = 1$ . Le spectre de puissance moyen des trains d'onde est alors donné par :

$$E(\nu) = \int_0^{+\infty} |F(\nu, t)|^2 (1/\tau) e^{-t_c/\tau} dt_c = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu)t_c) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-t_c/\tau} d(t_c/\tau)$$

Faisons le changement de variable  $u = t_c/\tau$ , il vient :

$$E(\nu) = |A|^2 \int_0^{+\infty} [\sin^2(\pi(\nu_0 - \nu)\tau u) / (\pi^2(\nu_0 - \nu)^2)] e^{-u} du = |A|^2 / (2\pi^2) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (1/2\pi\tau)^2]$$

On normalise la fonction  $E(\nu)$  telle que  $\int E(\nu) d\nu = 1$ , et on obtient :

$$E(\nu) = (1/\pi) (\gamma/4\pi) / [(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2] \text{ avec } \gamma = 2/\tau$$

Il s'agit donc d'un **profil Lorentzien d'amortissement**  $\gamma = 2/\tau$  de demi largeur en fréquence  $\gamma/4\pi$

La difficulté consiste maintenant à évaluer l'amortissement  $\gamma$ , donc  $\tau$ . Pour ce faire, on introduit la section efficace de collision  $\sigma$  ( $m^2$ ) qui est telle que :

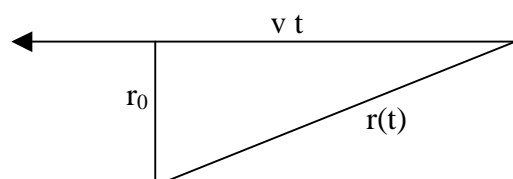
$$\sigma N (v \tau) = 1$$

avec  $N$  densité ( $m^{-3}$ ) des particules perturbatrices,  $v$  leur vitesse moyenne, et  $\tau$  temps moyen entre deux collisions,  $v \tau$  étant la distance moyenne parcourue par les perturbateurs entre deux collisions. Si la distribution des vitesses est une loi de Maxwell, on a  $v = (8 k T / \pi m)^{1/2}$ ,  $T$  température,  $k$  constante de Boltzmann,  $m$  masse des projectiles. Connaissant  $\sigma$ ,  $N$  et  $v$ , on en déduira  $\tau = 1 / \sigma N v$ .

Le calcul de  $\sigma$  revient au calcul du paramètre d'impact  $r_0$  des perturbateurs, supposés aller en ligne droite à la vitesse constante  $v$ .

$$\sigma = \pi r_0^2$$

$r(t) = (r_0^2 + v^2 t^2)^{1/2}$  est la distance du projectile à l'instant  $t$ .



Weisskopf suppose que l'effet de la collision est de générer un changement de phase de l'oscillateur de la forme  $\Delta\omega = C_p / r^p$

Où  $C_p$  est une constante et  $p$  un nombre entier dépendant de la nature de l'interaction :

- $p = 2$  effet Stark linéaire (interaction Hydrogène + particule chargée)
- $p = 3$  collision résonante (interaction entre deux atomes identiques)
- $p = 4$  effet Stark quadratique (interaction atome + particule chargée)
- $p = 6$  forces de Van der Waals (interaction entre atomes de natures différentes)

Weisskopf calcule alors le déphasage total introduit par la collision :

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega dt = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} (r_0^2 + v^2 t^2)^{-p/2} dt = C_p r_0^{-p} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + v^2 t^2 / r_0^2)^{-p/2} dt$$

On pose  $u = v t / r_0$

$$\delta = C_p r_0^{-p+1} / v \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du \quad \text{où} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2)^{-p/2} du = \sqrt{\pi} \Gamma((p-1)/2) / \Gamma(p/2) = \alpha_p$$

formule dans laquelle  $\Gamma(x)$  est la fonction Gamma telle que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = 1$ , avec la formule de récurrence  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ , permettant de calculer le coefficient numérique  $\alpha_p$  :

$\alpha_2 = \pi$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $\alpha_4 = \pi/2$  et  $\alpha_6 = 3\pi/8$  pour  $p=2, 3, 4$  et  $6$ , selon la nature de la collision.

Le calcul du paramètre d'impact  $r_0$  repose sur l'hypothèse  $\delta = 1$ , ce qui donne  $r_0 = [v / (C_p \alpha_p)]^{1/1-p}$ , dont on déduit l'amortissement :

$$\gamma = 2/\tau = 2 \sigma N v = 2 \pi r_0^2 N v = 2 \pi N v [v / (C_p \alpha_p)]^{2/1-p}$$

Il est important de constater que l'amortissement  $\gamma$  varie comme  $N v^{(p-3)/(p-1)}$ , et lorsqu'on introduit la dépendance de  $v$  en fonction de la température  $T$ , comme  $N T^{(p-3)/(2p-2)}$

- $p = 2$  effet Stark linéaire :  $\gamma$  varie comme  $N T^{-1/2}$
- $p = 3$  collision résonante :  $\gamma$  varie comme  $N$
- $p = 4$  effet Stark quadratique :  $\gamma$  varie comme  $N T^{1/6}$
- $p = 6$  forces de Van der Waals :  $\gamma$  varie comme  $N T^{3/10}$

On notera que cette présentation très simplifiée ne permet pas de rendre compte du petit décalage observé en fréquence (effet Lindholm).

Il existe des tables donnant  $\gamma = a N T^b$  en fonction du projectile et de l'atome perturbé. Si l'on prend comme perturbateur l'atome d'Hydrogène, on a par exemple  $\gamma \approx 10^{-15} n_H T^{0.35} (1 + m_H/m)^{0.35} s^{-1}$  avec  $n_H$  densité des atomes d'Hydrogène en  $m^{-3}$ ,  $m_H$  et  $m$  respectivement masses de l'atome d'Hydrogène et de l'atome perturbé. Il est intéressant de comparer le rapport des largeurs collisionnelles et naturelles  $\gamma_{coll} / \gamma_{nat}$  dans l'atmosphère solaire (pour un atome de masse atomique  $m_H/m \ll 1$ ) sachant qu'une valeur typique de la largeur naturelle est de  $10^8 s^{-1}$ .

variation de  $T$  de  $0 \rightarrow 500 \text{ km} \rightarrow 2000 \text{ km} : 6400 \text{ K} \rightarrow 4170 \text{ K} \rightarrow 10000 \text{ K}$

variation de  $n_H$  de  $0 \rightarrow 500 \text{ km} \rightarrow 2000 \text{ km} : 2 \cdot 10^{23} m^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{21} m^{-3} \rightarrow 2 \cdot 10^{17} m^{-3}$

donne la variation de  $\gamma_{coll} / \gamma_{nat}$  de  $0 \rightarrow 500 \text{ km} \rightarrow 2000 \text{ km} : 40 \rightarrow 0.3 \rightarrow 10^{-4}$

L'élargissement collisionnel domine donc dans la photosphère et s'efface dans la chromosphère.

## II – 10 Convolution des profils Gaussiens et Lorentziens, profil de Voigt

La demi largeur Doppler  $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$  est souvent insuffisante pour rendre compte de la largeur réelle des profils de raie, c'est pourquoi on est souvent appelé à introduire une vitesse

de macroturbulence  $v_m$  de distribution Gaussienne, tout comme la distribution des vitesses thermiques autour de  $v_t = (2kT / m)^{1/2}$ .

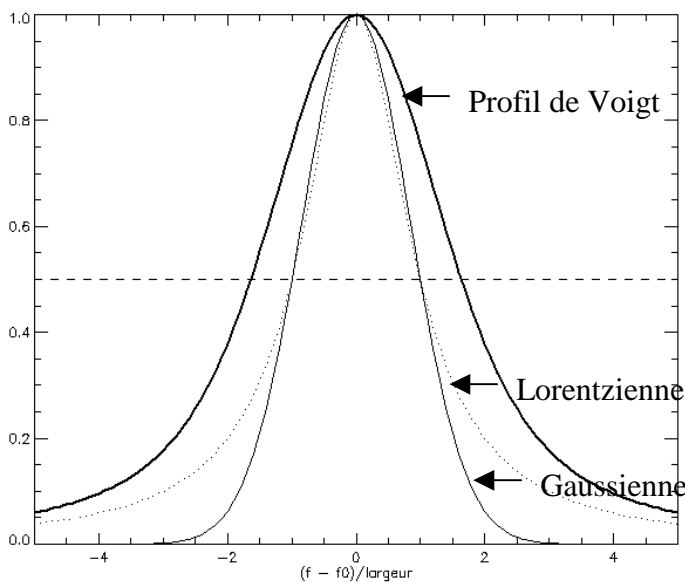
On sait que le produit de convolution de deux Gaussiennes de paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est une nouvelle gaussienne de paramètre égal à  $(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)^{1/2}$

La demi largeur Doppler devient donc  $\Delta\lambda_D = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2} = (\lambda_0 / C) (v_m^2 + 2 k T / m)^{1/2}$

En ce qui concerne les profils Lorentziens, le produit de convolution de deux Lorentziennes de paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est une nouvelle Lorentzienne de paramètre égal à  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ : les largeurs naturelles des deux niveaux de la transition  $\gamma_m$ ,  $\gamma_n$  et collisionnelles  $\gamma_{coll}$  sont donc additives.

Le profil général est donc la convolution d'une Gaussienne de largeur Doppler  $\Delta v_D = (v_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2}$  et d'une Lorentzienne de largeur  $\Gamma/4\pi = [\gamma_m + \gamma_n + \gamma_{coll}]/4\pi$ , que l'on appelle profil de Voigt, donné par la fonction de Harris, tabulée et calculable numériquement :

$$H(a,u) = (a/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} / (a^2 + (u-y)^2) dy \quad \text{où } u = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \Gamma / (4\pi \Delta v_D)$$



Exemple de profil de Voigt, convolution d'une Lorentzienne de largeur à mi hauteur  $\Gamma/4 \pi = 1$  et d'une Gaussienne de largeur à mi hauteur  $(\ln 2)^{1/2} \Delta v_D = 1$

Le cœur du profil de Voigt est de type Gaussien alors que les ailes sont Lorentziennes



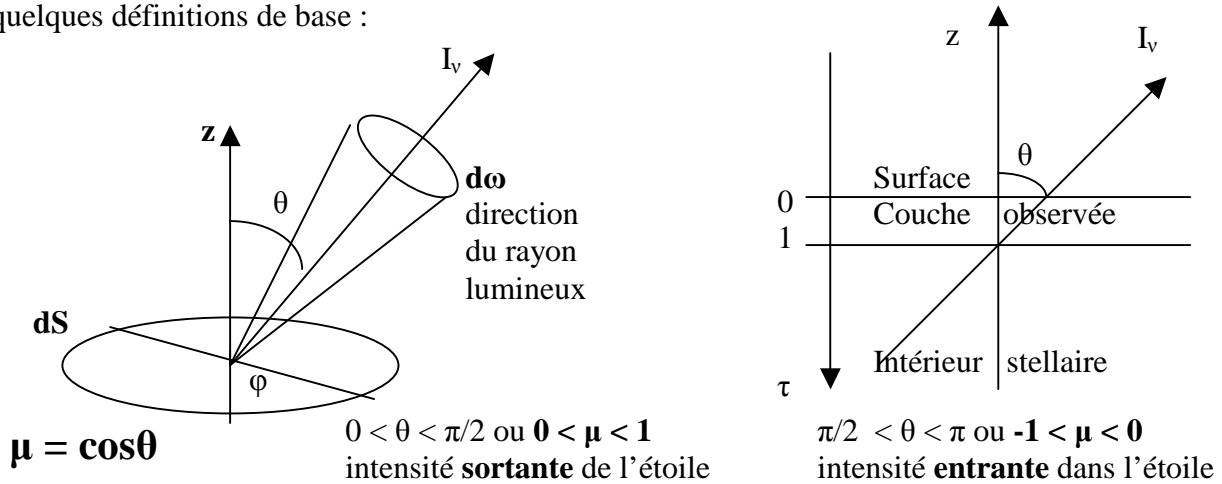
# Chapitre 3

## Introduction au transfert de rayonnement

### III – 1 quelques définitions

Avant d'aborder l'équation de transfert de rayonnement, qui permet de calculer l'intensité émergente  $I_\nu$  ( $\text{W m}^{-2} \text{st}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ) en fonction de l'intensité incidente, via l'équation de transfert,

nous devons introduire quelques définitions de base :



On considère un pinceau lumineux sortant de la surface de l'étoile sous l'angle  $\theta$  avec la normale dans l'angle solide  $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$  tel que  $0 < \theta < \pi$  et  $0 < \varphi < 2\pi$ . Le rayon sort de l'étoile si l'on a  $0 < \theta < \pi/2$  ou si  $0 < (\mu = \cos\theta) < 1$  et entre dans l'étoile si  $\pi/2 < \theta < \pi$  ou  $-1 < (\mu = \cos\theta) < 0$ . Quand on observe le centre du disque solaire, on est à  $\theta = 0$ ,  $\mu = 1$  ; quand on observe le limbe solaire, on est à  $\theta = \pi/2$ ,  $\mu = 0$ . On choisit un axe vertical  $Oz$  orienté vers l'extérieur de l'étoile et orthogonal à la surface. Par contre, la profondeur optique, nulle à la surface de l'étoile, augmente vers l'intérieur. La couche de l'étoile observée est à profondeur optique unité, le centre de l'étoile étant à profondeur optique infinie.

L'énergie lumineuse qui passe dans le cône d'angle solide  $d\omega$ , au travers de la surface  $dS$ , dans le temps  $dt$ , et entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu+d\nu$  est :

$$\boxed{dE_\nu = I_\nu \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, d\nu} \text{ en Joules}$$

L'intensité lumineuse  $I_\nu$  se mesure en  $\text{W st}^{-1} \text{m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$

On définit l'intensité moyenne  $J_\nu$  par  $\boxed{J_\nu = (1/4\pi) \int I_\nu \, d\omega}$  intégré sur les  $4\pi$  stéradian de tout l'espace avec  $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Le flux d'énergie radiative traversant une surface  $dS$  sous l'angle  $\theta$  est  $\boxed{F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\omega}$  intégré sur les  $4\pi$  stéradian de l'espace.

Le flux sortant est intégré pour  $0 < \theta < \pi/2$  et le flux entrant sur  $\pi/2 < \theta < \pi$ , l'intégrale ci dessus représentant le flux net, somme des flux entrants et sortants. Si le champ de radiation est isotrope, par exemple lorsqu'on est en équilibre thermodynamique avec  $I_\nu = B_\nu$  fonction de Planck, le flux net est nul, car  $\int \cos\theta \, d\omega = \int \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0$  ( $0 < \theta < \pi$  et  $0 < \varphi < 2\pi$ ). On définit aussi :

$$\boxed{H_v = (1/4\pi) \int I_v \cos\theta \, d\omega = F_v / 4\pi} \text{ et } \boxed{K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta \, d\omega} \text{ int\u00e9gr\u00e9 sur les } 4\pi \text{ st\u00e9radian}$$

$J_v$ ,  $H_v$ ,  $K_v$  sont donc les diff\u00e9rents moments de  $I_v$  pond\u00e9r\u00e9s par  $\mu = \cos\theta$ .

### III – 2 Densit\u00e9 d'\u00e9nergie radiative et pression radiative

Consid\u00e9rons un \u00e9l\u00e9ment de volume  $dV$ , de section  $dS$ . La quantit\u00e9 d'\u00e9nergie entrant dans  $dV$  par  $dS$  dirig\u00e9e dans le pinceau d'angle solide  $d\omega$  sous l'angle  $\theta$  et pendant  $dt$  est \u00e9gale \u00e0 :

$$dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv \quad \text{avec } dV = dS \cos\theta \, C \, dt$$

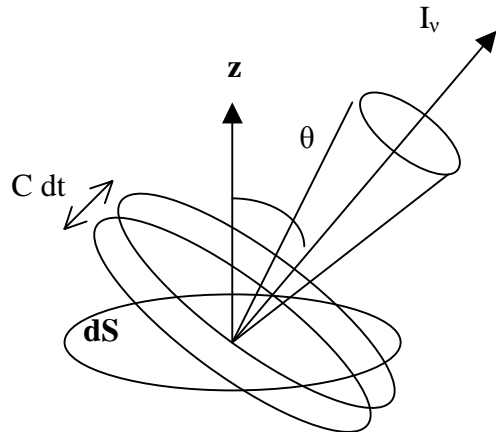
On en d\u00e9duit :  $dS \cos\theta \, dt = dV / C$

$$dE_v / dV \, dv = I_v \, d\omega / C = dU_v$$

Int\u00e9grons sur les  $4\pi$  st\u00e9radian :

la quantit\u00e9  $\boxed{U_v = (1/C) \int I_v \, d\omega}$

est une densit\u00e9 volumique d'\u00e9nergie par unit\u00e9 de fr\u00e9quence, et se mesure en  $J \, m^{-3} \, Hz^{-1}$



Comme  $J_v = (1/4\pi) \int I_v \, d\omega$ , on en d\u00e9duit :  $\boxed{U_v = (4\pi / C) J_v \, (J \, m^{-3} \, Hz^{-1})}$

Si le champ de rayonnement est **isotrope**, alors  $\int I_v \, d\omega = I_v \int d\omega = 4\pi I_v$  et  $U_v = (4\pi / C) I_v$

La pression du rayonnement se d\u00e9duit de  $dE_v = I_v \cos\theta \, dS \, d\omega \, dt \, dv$  de mani\u00e8re simple en remarquant que  $dE_v \cos\theta = P_{v,\omega} \, dS \, C \, dt \, d\omega \, dv$ , o\u00f9  $P_{v,\omega} \cos\theta \, dS$  constitue la force exerc\u00e9e sur l'\u00e9l\u00e9ment de surface  $dS$ , pendant le d\u00e9placement  $C \, dt$  des photons durant de temps  $dt$ , dans l'angle solide  $d\omega$  et entre les fr\u00e9quences  $dv$  et  $v + dv$ . Donc :

$$P_{v,\omega} = I_v \cos^2\theta / C \text{ est la pression radiative par st\u00e9radian et par unit\u00e9 de fr\u00e9quence (Pa st}^{-1} \text{ Hz}^{-1})$$

En int\u00e9grant sur les  $4\pi$  st\u00e9radian, on obtient la pression radiative par unit\u00e9 de fr\u00e9quence:

$$\boxed{P_v = \int I_v \cos^2\theta \, d\omega / C = (4\pi / C) K_v \, (\text{en Pa Hz}^{-1})} \quad (\text{remarque : } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ J m}^{-3})$$

o\u00f9  $K_v = (1/4\pi) \int I_v \cos^2\theta \, d\omega$ . La pression radiative correspond \u00e0 un transfert d'impulsion d'origine photonique, la quantit\u00e9 de mouvement du photon \u00e9tant \u00e9gale \u00e0  $h \, v / C$ .

### III – 3 Cas particulier : rayonnement isotrope (ind\u00e9pendant de $\mu = \cos\theta$ )

Si l'intensit\u00e9 de rayonnement  $I_v$  est isotrope, elle ne d\u00e9pend pas de  $\mu = \cos\theta$  et les formules se simplifient. En int\u00e9grant une premi\u00e8re fois sur  $\varphi$  de 0 \u00e0  $2\pi$ , on obtient :

$$d\omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta = -2\pi \, d\mu, \text{ et } \mu \text{ varie de } 1 \text{ \u00e0 } -1 \text{ lorsque } \theta \text{ varie de } 0 \text{ \u00e0 } \pi$$

$$\int d\omega = - \int_1^{-1} 2\pi \, d\mu = \int_{-1}^1 2\pi \, d\mu = 4\pi \text{ d'o\u00f9 l'on tire } J_v = I_v \text{ et } U_v = (4\pi / C) I_v$$

$$\text{De m\u00eame, } \int \mu \, d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \, \mu \, d\mu = 0 \text{ d'o\u00f9 l'on tire } H_v = F_v = 0$$

$$\text{et } \int \mu^2 d\omega = \int_{-1}^1 2\pi \mu^2 d\mu = 4\pi/3 \text{ d'où l'on tire } K_v = I_v / 3 \text{ et } P_v = (4\pi / C) I_v / 3$$

Comme la densité volumique d'énergie par unité de fréquence est  $U_v = (4\pi / C) I_v$ , on en déduit que  $P_v = U_v / 3$ . Pression radiative par unité de fréquence ou densité volumique d'énergie par unité de fréquence apparaissent donc synonymes. On a en résumé :

**Cas du rayonnement isotrope**

$$J_v = I_v, H_v = F_v = 0, K_v = I_v / 3 = J_v / 3, P_v = (4\pi / C) I_v / 3 = U_v / 3, U_v = (4\pi / C) I_v$$

Le flux net est nul, ce qui signifie que le flux entrant est égal au flux sortant, ils sont égaux à

$$F_{\text{out}} = 2\pi \int I_v \mu d\mu \text{ pour } \mu \text{ variant de } 0 \text{ à } 1, \text{ soit } F_{\text{out}} = \pi I_v$$

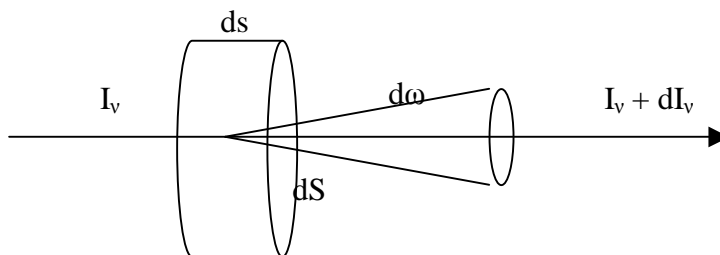
$$F_{\text{in}} = |2\pi \int I_v \mu d\mu| \text{ pour } \mu \text{ variant de } -1 \text{ à } 0, \text{ soit } |F_{\text{in}}| = \pi I_v$$

**III – 4 Diffusion, absorption, et émission du rayonnement**

Pour résoudre les questions de transfert de rayonnement, on décrit les processus d'absorption, d'émission et de diffusion par des coefficients macroscopiques dépendant de la fréquence. Considérons un volume dV de matière, de section dS et de longueur ds, de masse volumique  $\rho$ .

L'énergie absorbée par cet élément de volume pendant le temps dt, entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , par un pinceau lumineux dans l'angle solide d $\omega$  est:

$$dE\nu = k_v I_v \rho dS ds d\nu d\omega dt$$



où  $k_v$  est le coefficient d'absorption ou opacité, relié à la section efficace  $\sigma$  d'absorption par la relation :  $k_v \rho = \sigma N$ ,  $\sigma$  en  $m^2$ ,  $N$  nombre de particules par unité de volume en  $m^{-3}$ ,  $\rho$  en  $kg m^{-3}$ , et  $k_v$  en  $m^2/kg$ .

Le libre parcours moyen des photons est donné par  $l_{pm} = 1 / (k_v \rho) = 1 / (\sigma N)$

En présence de processus de diffusion, on introduit un coefficient de diffusion, souvent appelé  $\sigma_v$  (et à ne pas confondre avec une section efficace) de telle sorte que l'énergie diffusée par l'élément de volume dV pendant le temps dt, entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , par un pinceau lumineux dans l'angle solide d $\omega$  est:

$$dE\nu = \sigma_v I_v \rho dS ds d\nu d\omega dt$$

de sorte que l'effet combiné absorption/diffusion se traduit par l'ajout des coefficients  $k_v + \sigma_v$

L'énergie émise par l'élément de volume pendant le temps dt, entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , par un pinceau lumineux dans l'angle solide d $\omega$  est:

$$dE\nu = j_v \rho dS ds d\nu d\omega dt$$

$j_v$ , coefficient d'émission, se mesure en  $W kg^{-1} Hz^{-1} st^{-1}$

A l'équilibre thermodynamique avec le champ de rayonnement, on a  $j_v = k_v B_v(T)$ , où  $B_v(T)$  est la fonction de Planck. Lorsqu'on fait l'hypothèse dans un milieu de température non uniforme, que les

propriétés de la matière dans un petit volume sont les mêmes qu'à l'équilibre thermodynamique pour la température locale, on dit qu'on est en **ETL** (équilibre thermodynamique local).

### III – 5 Equation de transfert du rayonnement

La variation d'énergie du pinceau qui traverse l'élément de volume  $dV$  pendant le temps  $dt$ , entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , dans l'angle solide  $d\omega$  est  $dE_\nu = dI_\nu dS d\nu d\omega dt$  de sorte que:

$$dI_\nu dS d\nu d\omega dt = j_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt - k_\nu I_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt,$$

ce qui aboutit à l'équation de transfert  $dI_\nu/ds = \rho (j_\nu - k_\nu I_\nu)$

On introduit la **fonction source**  $S_\nu = j_\nu / k_\nu$  qui se mesure comme l'intensité en  $W m^{-2} Hz^{-1} st^{-1}$

Avec cette définition, il vient :  $dI_\nu/ds = -\rho k_\nu (I_\nu - S_\nu)$

La **profondeur optique** définie par  $d\tau_\nu = -k_\nu \rho ds$  permet d'aboutir à l'équation de transfert :

$$dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - S_\nu$$

dont la forme générale en tenant compte de la direction  $\theta$  faite entre le rayon lumineux et la normale à la surface :

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - S_\nu \quad \text{avec} \quad \mu = \cos\theta$$

$d\tau_\nu = -k_\nu \rho ds = -\sigma N ds$ ,  $ds$  abscisse curviligne le long de la direction de propagation,  $k_\nu$  coefficient d'absorption,  $\rho$  masse volumique, ou une formulation équivalente, avec  $\sigma$  section efficace ( $m^2$ ),  $N$  nombre d'atomes par unité de volume ( $m^{-3}$ ).

L'intensité  $I_\nu = I_\nu(\nu, \tau_\nu, \mu)$  dépend de la fréquence  $\nu$ , de la profondeur optique  $\tau_\nu$  et de  $\mu = \cos\theta$ .

Dans une atmosphère plan parallèle, on aurait  $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dz$  et  $I_\nu$  dépendrait de  $\nu$ ,  $z$ , et  $\mu$ .

L'altitude d'observation correspond à la profondeur optique  $\tau = 1$  pour la longueur d'onde de référence souvent prise à  $\lambda = 500$  nm.

La fonction source  $S_\nu$  est égale à la fonction de Planck  $B_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / [ \exp(h \nu / k T) - 1 ]$  lorsqu'on est en **ETL** à la température  $T$  avec le champ de rayonnement, en l'absence de diffusion. En dehors de l'équilibre thermodynamique local, pour un atome à deux niveaux  $m$  et  $n$ , la fonction source prendrait la forme

$$S_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / (g_m N_n / g_n N_m - 1),$$
 les populations  $n$ 'étant plus régies par la loi de Boltzmann.

D'une façon générale, si l'on a à l'**ETL** une contribution d'absorption et d'émission thermique ( $k_\nu$ ,  $B_\nu$ ), plus une diffusion continue des photons **isotrope** ( $\sigma_\nu J_\nu$ , Thomson par les électrons libres, Rayleigh par les atomes ou les molécules,  $\sigma_\nu$  étant le coefficient de diffusion), alors on écrira :

$$S_\nu = (k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu) / (k_\nu + \sigma_\nu),$$

Soit  $S_\nu = B_\nu$  en absorption/émission pure de rayonnement, ou  $S_\nu = J_\nu$  en diffusion pure isotrope.

Dans le cas d'une raie spectrale superposée sur un fond continu, on aurait  $k_\nu = k_{c\nu} + k_{r\nu} \Phi_\nu$  où  $k_{c\nu}$  désigne le coefficient d'absorption du continu,  $k_{r\nu}$  celui de la raie pondéré par le profil d'absorption de la raie  $\Phi_\nu$  (un profil Lorentzien, Gaussien ou de Voigt en fonction de  $\nu$ ).

L'équation de transfert a pour solution générale :

$$I_\nu(\mu, \tau_1) = I_\nu(\mu, \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + e^{\tau_1/\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$$

Lorsque  $0 \leq \mu \leq 1$  l'intensité est sortante de l'étoile; lorsque  $-1 \leq \mu \leq 0$  l'intensité est entrante.

Par exemple, si l'on connaît le rayonnement émergent à la base de la photosphère solaire  $I_v(\mu, \tau_2)$  en  $\tau = \tau_2$  alors on peut calculer l'intensité au dessus en  $\tau = \tau_1$ , dans la chromosphère, connaissant la fonction source entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

**Cas où  $0 \leq \mu \leq 1$  :**

L'intensité est sortante et provient du centre de l'étoile où l'on fait l'hypothèse que  $\tau_2 \rightarrow \infty$   
On obtient alors en posant  $\tau = \tau_1$  :

$$I_v(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq 1$$

L'intensité émergente à la surface de l'étoile est donc  $I_v(\mu, 0) = \int_0^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$

**cas simples :**  $S(t) = a + b t$  donnera  $I_v(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau$  et  $I_v(\mu, 0) = a + b \mu$

$S(t) = a + b t + c t^2$  donnera  $I_v(\mu, \tau) = a + b (\mu + \tau) + c (\tau^2 + 2\tau\mu + 2\mu^2)$  et  $I_v(\mu, 0) = a + b \mu + 2c \mu^2$

**Cas où  $-1 \leq \mu \leq 0$  :**

L'intensité est entrante et on fait l'hypothèse que l'on connaît  $I_v(\mu, 0)$  intensité entrante à la surface de l'étoile en  $\tau_2 = 0$ . On obtient alors en posant  $\tau = \tau_1$ :

$$I_v(\mu, \tau) = I_v(\mu, 0) e^{\tau/\mu} - e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

Si l'on néglige l'intensité entrante à la surface de l'étoile, alors on obtient la solution

$$I_v(\mu, \tau) = - e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

### III – 6 Equations de Schwarzschild – Milne

Il s'agit de déterminer les fonctions  $J_v = (1/4\pi) \int I_v d\omega$ ,  $H_v = (1/4\pi) \int I_v \mu d\omega$ ,  $K_v = (1/4\pi) \int I_v \mu^2 d\omega$ , par intégration sur  $\mu$ , avec  $d\omega = -2\pi d\mu$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ , en prenant la solution de l'équation de transfert trouvée ci dessus, à savoir :

$$I_v(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq 1 \quad \text{et} \quad I_v(\mu, \tau) = - e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu \quad \text{pour } -1 \leq \mu \leq 0$$

Faisons ce calcul pour  $J_v$ , fonction qui dépendra de  $\tau$  et de  $v$  :

$$J_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(\mu, \tau) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 I_v(\mu, \tau) d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_v(\mu, \tau) d\mu$$

$$J_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 [e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu] d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu] d\mu$$

On effectue le changement de variable  $x = 1/\mu$  dans la l'intégrale de gauche et  $x = -1/\mu$  dans la l'intégrale de droite de sorte que  $x$  varie de 1 à  $+\infty$  dans les deux cas

$$J_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} [e^{x\tau} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-xt} dt/x] dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} [e^{-x\tau} \int_0^{\tau} S_v(t) e^{xt} dt/x] dx$$

Intervertissons l'ordre des intégrales sur  $t$  (profondeurs optiques) et  $x$  (angles)

$$J_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x(t-\tau)} / x \, dx \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x(\tau-t)} / x \, dx \right] dt$$

$$J_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x|t-\tau|} / x \, dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_v(t) E_1(|t-\tau|) dt \quad \text{et } J_v(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_v(t) E_1(t) dt$$

Pour  $K_v(\tau)$ , on a dans les 2 intégrales un facteur  $\mu^2$  donc  $1/x^2$  après le changement de variable, d'où :

$$K_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x|t-\tau|} / x^3 \, dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_v(t) E_3(|t-\tau|) dt \quad \text{et } K_v(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_v(t) E_3(t) dt$$

Pour  $H_v(\tau)$ , on a dans les 2 intégrales un facteur  $\mu$  donc  $\pm 1/x$  après le changement de variable, d'où :

$$H_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x(t-\tau)} / x^2 \, dx \right] dt - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} S_v(t) \left[ \int_1^{\infty} e^{-x(\tau-t)} / x^2 \, dx \right] dt$$

$$H_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) E_2(t-\tau) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} S_v(t) E_2(\tau-t) dt \quad \text{dont on déduit le flux total net } F_v(\tau) = 4\pi H_v(\tau)$$

$$F_v(\tau) = 2\pi \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) E_2(t-\tau) dt - 2\pi \int_0^{\tau} S_v(t) E_2(\tau-t) dt \quad \text{avec } F_v(\tau) = F_{v(\tau)\text{sortant}} + F_{v(\tau)\text{entrant}}$$

$$\text{Flux sortant } F_v(\tau) = 2\pi \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) E_2(t-\tau) dt \quad \text{et } \text{Flux entrant } F_v(\tau) = -2\pi \int_0^{\tau} S_v(t) E_2(\tau-t) dt$$

A la surface de l'étoile en  $\tau = 0$ , on avait négligé l'intensité entrante. On trouve bien  $F_v(0)_{\text{entrant}} = 0$  ; dans ce cas :

$$\text{Flux sortant} = \text{Flux net} = F_v(0) = 2\pi \int_0^{\infty} S_v(t) E_2(t) dt$$

Annexe : les fonctions exponentielles intégrales:

Ce sont les fonctions  $E_n(x) = \int_1^{\infty} (e^{-xt} / t^n) dt$  avec  $n$  entier positif ou nul et  $x$  positif

$$E_0(x) = e^{-x} / x$$

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} (e^{-xt} / t) dt = -\gamma - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k / (k \, k!) \quad \text{pour } x > 0$$

$\gamma$  est le nombre d'Euler ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n (1/k) - \int_1^n (1/x) dx \right] = 0.577$

Les autres fonctions  $E_n(x)$  se déduisent de  $E_1(x)$  de proche en proche par la relation de récurrence :

$$E_{n+1}(x) = [e^{-x} - x E_n(x)] / n \quad \text{valable pour } n \geq 1, \text{ donc relation utile pour le calcul de } E_2, E_3, \dots$$

Par exemple,  $E_2(x) = e^{-x} - x E_1(x)$  ;  $E_3(x) = \frac{1}{2} [ (1-x) e^{-x} + x^2 E_1(x) ]$ , etc...

Il existe aussi une relation entre  $dE_{n+1}(x)/dx$  et  $E_n(x)$ :  $dE_{n+1}(x)/dx = -E_n(x)$  pour  $n \geq 0$

Limite en zéro:

$$E_0(x) \rightarrow +\infty$$

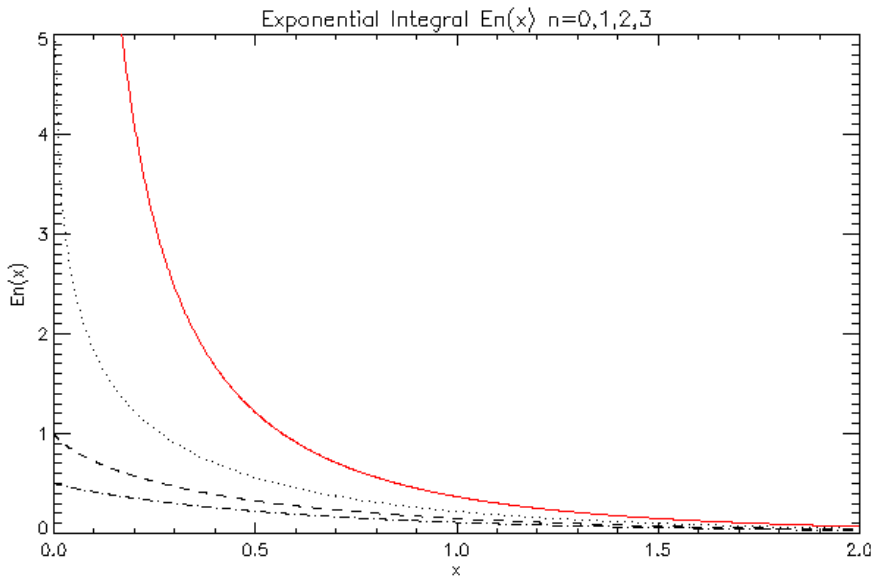
$$E_1(x) \rightarrow +\infty$$

$$E_n(x) \rightarrow 1/(n-1) \quad \text{pour } n \geq 2$$

Limite en  $+\infty$ :  $E_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $n$

La relation de récurrence ci dessus donne un équivalent :

$$E_n(x) \sim e^{-x} / x \quad \text{pour tout } n \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty$$



Fonctions  
exponentielles  
intégrales  $En(x)$  en  
fonction de  $x$ , pour :

- $n=0$  ———
- $n=1$  .....
- $n=2$  - - - - -
- $n=3$  - . - . -

### III – 7 Moments de l'équation de transfert du rayonnement

Moment d'ordre 0 de l'équation :  $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à intégrer sur les  $4\pi$  stéradian d'angle solide :  $d[\int I_v \mu d\omega] / d\tau_v = \int I_v d\omega - \int S_v d\omega$   
Remarquant que  $\int I_v d\omega = 4\pi J_v$  et que  $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$  et en faisant l'hypothèse que la fonction source  $S_v$  est isotrope, c'est à dire indépendante de  $\mu$  de telle sorte que  $\int S_v d\omega = 4\pi S_v$ , il vient avec  $d\omega = -2\pi d\mu$ ,  $\mu$  variant de 1 à -1 pour  $\theta$  de 0 à  $\pi$  :

$$dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$$

Moment d'ordre 1 de l'équation :  $\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v$

Il consiste à multiplier par  $\mu$  puis à intégrer sur les  $4\pi$  stéradian d'angle solide :  
 $d[\int I_v \mu^2 d\omega] / d\tau_v = \int I_v \mu d\omega - \int S_v \mu d\omega$   
Remarquant que  $\int I_v \mu d\omega = 4\pi H_v$  et que  $\int I_v \mu^2 d\omega = 4\pi K_v$  et en faisant l'hypothèse que la fonction source  $S_v$  est isotrope, c'est à dire indépendante de  $\mu$  de telle sorte que  $\int S_v \mu d\omega = 0$ , il vient :

$$dK_v/d\tau_v = H_v$$

### III – 8 Condition de l'équilibre radiatif

Une atmosphère est en équilibre radiatif si l'énergie perdue par un pinceau de rayonnement est égale à l'énergie reçue par ce pinceau :

Energie perdue :

$$\int_0^\infty \left[ \int_{4\pi} k_v I_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[ \int_{4\pi} I_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v J_v dv \text{ car par définition } J_v = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_v d\omega$$

car  $k_v$  ne dépend pas de  $\omega$

Energie reçue :

$$\int_0^\infty \left[ \int_{4\pi} j_v d\omega \right] dv = \int_0^\infty k_v \left[ \int_{4\pi} S_v d\omega \right] dv = 4\pi \int_0^\infty k_v S_v dv \text{ car } S_v \text{ ne dépend pas de } \omega$$

La condition d'équilibre radiatif s'écrit donc ainsi :

$$\int_0^{\infty} k_v J_v dv = \int_0^{\infty} k_v S_v dv$$

Pour une atmosphère **grise** ( $k_v$ ,  $J_v$ ,  $S_v$  indépendants de  $v$ ), cette égalité se traduit par  $\boxed{J = S}$ ,  $J$  et  $S$  étant les quantités indépendantes de la fréquence. Cette égalité reste vraie pour les quantités  $J$  et  $S$  intégrées sur la fréquence si  $k_v$  en est indépendant (il sort alors des intégrales sur  $v$ ).

Reprenons l'équation de transfert  $(\mu/\rho) dI_v/dz = -k_v I_v + j_v$   
Et intégrons sur l'angle solide et les fréquences.

$$(1/\rho) d/dz \left[ \int_0^{\infty} \int_{4\pi} I_v \mu d\omega dv \right] = \int_0^{\infty} \left[ \int_{4\pi} (-k_v I_v + j_v) d\omega \right] dv = \int_{4\pi} \left[ \int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv \right] d\omega = 0$$

En effet, l'équilibre radiatif impose la condition  $\int_0^{\infty} (-k_v I_v + j_v) dv = 0$

Comme on a par définition  $\boxed{F_v = \int I_v \mu d\omega}$ , flux radiatif net, on en déduit :

$$\boxed{dF/dz = 0 \text{ ou } F = \int F_v dv \text{ est le flux net intégré sur les fréquences}}$$

**Le flux total** d'énergie radiative (entrant + sortant) est donc **constant** dans l'atmosphère.

A l'équilibre thermodynamique, lorsque  $I_v = B_v$  fonction de Planck indépendante de  $\mu$ , on a  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  car  $\int \mu d\omega = 2\pi \int \mu d\mu = 0$  ( $\mu$  variant de  $-1$  à  $1$ ).

Le flux entrant est donc égal au flux sortant. Il se calcule aisément sachant que

$$B = \int_0^{\infty} B_v dv = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

$$\mathbf{F}_{out} = 2\pi \int_0^1 B \mu d\mu = \pi B = \sigma T^4 \text{ (en } W \text{ m}^{-2}) \text{ et } \mathbf{F}_{out} = -\mathbf{F}_{in}$$

### III – 9 Un premier modèle simple : le cas gris et l'assombrissement centre bord

L'atmosphère grise a pour particularité d'avoir ses quantités (intensité, fonction source, coefficient d'absorption) indépendants de la fréquence : c'est donc un modèle d'école qui n'existe pas, mais présente néanmoins l'intérêt d'expliquer correctement l'assombrissement centre bord du soleil.

Nous reprenons les équations de base :

$$\mu dI_v/d\tau_v = I_v - S_v \text{ devient par intégration sur les fréquences } \mu dI/d\tau = I - S$$

avec  $I = \int I_v dv$  et  $S = \int S_v dv$

Nous supposons que la fonction source  $S$  peut se mettre sous la forme d'une fonction affine de la profondeur optique  $\tau$ :  $S(\tau) = a + b \tau$  où  $a$  et  $b$  sont deux constantes.

$$\text{L'équation de transfert a pour solution } I(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{-t/\mu} dt / \mu$$

Par intégration avec  $S(\tau) = a + b \tau$ , on obtient facilement  $I(\mu, \tau) = a + b \mu + b \tau$

Par intégration sur les  $4\pi$  stéradian, on calcule  $J$ ,  $H$  et  $K$ :

$$J = (1/4\pi) \int I d\omega = (1/2) \int I d\mu \text{ (car } d\omega = -2\pi d\mu)$$

On trouve  $J(\tau) = S(\tau) = a + b \tau$



$H(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu d\omega = (1/2) \int I \mu d\mu = b/3 = \text{constante}$ , d'où l'on pose  $b = 3 H$   
 Et le flux net  $F(\tau) = \int I \mu d\omega = 4\pi H(\tau) = 4\pi H = \text{constante}$

$$K(\tau) = (1/4\pi) \int I \mu^2 d\omega = (1/2) \int I \mu^2 d\mu = (a + b \tau)/3 = J(\tau)/3 = S(\tau)/3$$

Pour exprimer a en fonction de H, on doit examiner les flux sortant et entrant:

$$F_{\text{out}} = -2\pi \int_1^0 I \mu d\mu = 2\pi (a/2 + b/3)$$

$$\text{On a bien } F = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} = 4\pi b/3 = 4\pi H$$

$$F_{\text{in}} = -2\pi \int_0^{-1} I \mu d\mu = 2\pi (-a/2 + b/3)$$

La détermination de a résulte du fait qu'il n'y a aucun flux entrant dans l'étoile :

$$F_{\text{in}} = 0 \text{ implique } a = (2/3) b = 2 H, \text{ et par conséquent } F_{\text{out}} = F = 4\pi b/3 = 4\pi H$$

En conclusion, on obtient le modèle simple :

$I(\mu, \tau) = H (2 + 3 \mu + 3 \tau)$ $J(\tau) = S(\tau) = H (2 + 3 \tau)$
--

A la surface de l'étoile, on a par définition  $\tau = 0$ , d'où :  $I(\mu, 0) = H (2 + 3 \mu)$

Au centre du disque de l'étoile, on a  $\mu = 1$ , d'où :  $I(1, 0) = I_{\text{centre}} = 5 H$

On peut donc écrire la loi d'assombrissement centre bord :  $I(\mu, 0) = I_{\text{centre}} (2/5 + 3/5 \mu)$

Celle ci prédit qu'**au limbe** ( $\mu = 0$ ) l'intensité n'est plus que de **0.4**  $I_{\text{centre}}$

**Remarques importantes sur le cas gris:**

Le résultat, ici exact,  $K(\tau) = J(\tau)/3$  est souvent utilisé en première approximation et porte le nom « **d'approximation d'Eddington** », ce résultat est exact également dans les milieux isotropes.

Dans une atmosphère où la fonction source est isotrope, le moment d'ordre 0 de l'équation de transfert donne :  $dH_v/d\tau_v = J_v - S_v$  et le moment d'ordre 1 donne :  $dK_v/d\tau_v = H_v$ .

Par intégration sur les fréquences, il vient  **$dH/d\tau = J - S$**  et  **$dK/d\tau = H$**

Comme l'équilibre radiatif impose  $\int k_v J_v dv = \int k_v S_v dv$ , cette équation devient dans le cas gris  $\int J_v dv = \int S_v dv$ , c'est à dire  **$J = S$**  par intégration sur les fréquences. Dans ce cas, on obtient  **$dH/d\tau = 0$**  qui entraîne  **$H = \text{constante}$** , et  **$K(\tau) = H \tau + Cte$** .

L'hypothèse d'Eddington  $K(\tau) = J(\tau)/3$  fournit  $J(\tau) = 3 H \tau + Cte = S(\tau)$ , c'est à dire confirme l'hypothèse que nous avons formulée au départ, à savoir que la fonction source est une fonction affine de la profondeur optique.

La connaissance de  $J(\tau) = S(\tau) = H (2 + 3 \tau)$  permet d'établir une loi de variation de la température avec la profondeur optique, sachant qu'à l'équilibre thermodynamique on a  $B_v = S_v$ , où  $B_v$  est la fonction de Planck. Après avoir intégré sur les fréquences on obtient  $B = S$ , avec (voir plus haut) :

$$B = \int_0^\infty B_v dv = \sigma T^4 / \pi \text{ en } W \text{ st}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

On en déduit  $\sigma T^4 / \pi = H (2 + 3 \tau)$ , soit encore  $T^4 = T_0^4 (1 + 3/2 \tau)$  avec  $H = \sigma T_0^4 / (2\pi)$ , formule dans laquelle  $T_0 = T(\tau=0)$  température **de surface** de l'étoile, que l'on peut relier à la température effective  $T_{\text{eff}}$  en écrivant que le flux sortant de l'étoile, intégré sur les fréquences :

$$F_{\text{out}} = 4\pi H = \sigma T_{\text{eff}}^4 / \pi \quad \text{avec } H = \sigma T_0^4 / (2\pi),$$

Ce qui donne finalement  $T_{\text{eff}}^4 = 2 T_0^4$ , donc  $T_0 = 2^{-1/4} T_{\text{eff}} \approx 0.84 T_{\text{eff}}$

Pour le soleil,  $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ K}$  donne  $T_0 = 4850 \text{ K}$

On remarque enfin que pour  $\tau = 2/3$  la température  $T$  est égale à la température effective  $T_{\text{eff}}$  ce qui permet de définir une « zone moyenne » d'émission à la profondeur optique  $2/3$ .  $\tau$  augmentant avec la profondeur, *l'assombrissement centre bord traduit simplement que la température augmente avec la profondeur, ou décroît avec l'altitude.*

### III – 10 Moyenne de Rosseland

Cette moyenne est utilisée notamment en structure interne dans les régions de l'étoile où la profondeur optique est importante. Elle provient de considérations sur la dernière équation :

$$-1/(\rho k_v) dK_v/dz = H_v$$

et de sa version dans le cas gris indépendant de  $v$  :

$$-1/(\rho k) dK/dz = H$$

Intégrons la première équation sur les fréquences:

$$-\int 1/(\rho k_v) dK_v/dz dv = \int H_v dv = H$$

Si l'on pose  $H = -1/(\rho k^*) dK/dz = -1/(\rho k^*) \int dK_v/dz dv$ , on en déduit un coefficient d'absorption moyen  $k^*$  tel que :

$$1/k^* = \int [(1/k_v) dK_v/dz] dv / \int [dK_v/dz] dv$$

$K_v$  étant une inconnue du problème, on peut faire l'approximation d'Eddington dont on a parlé ci dessus, valable dans un milieu optiquement épais :  $K_v = J_v/3$  et d'autre part  $J_v = B_v$  ce qui permet d'exprimer  $K_v$  de telle sorte que  $dK_v/dz = 1/3 dB_v/dz = 1/3 dB_v/dT dT/dz$ . On obtient par ce procédé la moyenne de Rosseland :

$$1/k^* = \int_0^\infty [(1/k_v) dB_v/dT] dv / \int_0^\infty [dB_v/dT] dv$$

avec en outre  $\int [dB_v/dT] dv = d/dT \int B_v dv = dB/dT$ ,

$B$  étant la fonction de Planck intégrée sur les fréquences égale à  $B = \sigma T^4/\pi$  ( $\sigma$  constante de Stéfán).

Avec les approximations précédentes, l'équation de départ  $-1/(\rho k_v) dK_v/dz = H_v$  devient :

$$-1/(3\rho k_v) dB_v/dT dT/dz = H_v, \text{ dont la forme intégrée sur les fréquences est :}$$

$$H = -1/(3\rho k^*) dB/dT dT/dz$$

Comme par définition  $H$  est relié au flux net  $F$  intégré sur les fréquences par la relation  $H = F / 4\pi$ , alors on obtient  $F = -4/(3\rho k^*) d(\sigma T^4)/dT dT/dz$ , soit plus simplement :

$$F = -16 \sigma T^3 / (3\rho k^*) dT/dz$$

Lorsqu'à l'intérieur d'une étoile le flux net est relié à la luminosité  $L$  par la loi  $F = L/(4\pi r^2)$ , on en déduit le gradient radiatif  $dT/dr = -3\rho k^*/(16 \sigma T^3) [L/(4\pi r^2)]$  déjà vue plus haut à propos des équations de l'équilibre stellaire.

### III – 11 Un second modèle simple : le « cloud model »

Les filaments solaires sont des structures de type chromosphérique, mais supportées dans la couronne solaire par des champs magnétiques, bien au dessus de la basse atmosphère (photosphère et chromosphère). En supposant connu le rayonnement émergent de la chromosphère, sous le filament, on peut à l'aide d'un modèle simplifié, dit « cloud model », ou nuage, calculer le transfert au travers du filament, et le rayonnement qui en émerge.

On se base sur le résultat général de l'équation de transfert de rayonnement

$$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\mu, \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + e^{\tau_1/\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$$

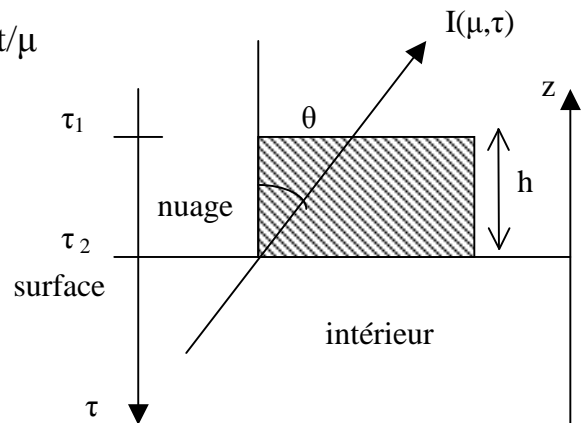
Nous supposons pour simplifier que dans le nuage entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$

on a :

$$S_v(t) = a_v + b_v t$$

fonction source affine de  $\tau$

avec  $\tau_2 - \tau_1 > 0$



L'intégration de l'équation donne :

$$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} - (a_v + b_v \mu + b_v \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + (a_v + b_v \mu + b_v \tau_1)$$

Dans l'hypothèse où  $\tau_2 - \tau_1$  serait *petit devant l'unité*, on aurait avec  $S_v(\tau_2) = a + b \tau_2$ :

$$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\tau_2) - I_v(\tau_2) (\tau_2 - \tau_1)/\mu + S_v(\tau_2) (\tau_2 - \tau_1)/\mu$$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Intensité incidente	absorption du nuage	terme source du nuage

Dans l'hypothèse plus simple encore d'une fonction source **S constante**, on aurait simplement :

$$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + S_v [ 1 - e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} ]$$

En première approximation, si l'on considère la masse volumique  $\rho$  et le coefficient d'absorption  $k_v$  constants entre  $\tau_2$  et  $\tau_1$  on peut écrire  $\tau_2 - \tau_1 = k_v \rho h$ , où  $h$  est l'épaisseur du nuage. On constate facilement dans ce cas qu'au profil chromosphérique  $I_v(\tau_2)$  se superpose un profil d'absorption du nuage  $I_v(\tau_2) (\tau_2 - \tau_1)/\mu$  qui peut être décalé par effet Doppler sur  $k_v$  et un profil d'émission  $S_v(\tau_2) (\tau_2 - \tau_1)/\mu$  qui peut être aussi décalé par effet Doppler. La mesure du décalage Doppler sur le profil résultant  $I_v(\mu, \tau_1)$  n'est pas affectée en signe, mais seulement en valeur, tant que la fonction source du nuage  $S_v(\tau_2)$  est petite devant l'intensité incidente  $I_v(\tau_2)$ . Par contre la mesure du décalage Doppler peut être totalement erronée et donner un signe opposé à la vitesse du nuage si  $S_v(\tau_2) > I_v(\tau_2)$ , notamment en présence d'une remontée de la fonction source (cas des éruptions solaires par exemple).

Dans le cas d'une fonction source **nulle**, on a  $I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\mu, \tau_2) e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu}$

Avec  $d\tau_v = -\rho k_v dz$  et  $k_v = k_{cv} + k_{rv} \Phi_v$  somme des coefficients d'absorption par le continu et par la raie spectrale de profil  $\Phi_v$ , on peut écrire en supposant que les quantités sont indépendantes de l'altitude  $z$  :  $\tau_1 - \tau_2 = -\rho (k_{cv} + k_{rv} \Phi_v) h$  où  $h$  est l'épaisseur du nuage, d'où il découle que :

$I_v(\mu, \tau_1) = I_v(\mu, \tau_2) \exp[-\rho (k_{cv} + k_{rv} \Phi_v) h/\mu]$ , ce qui donne en supposant  $h$  petit :

$I_\nu(\mu, \tau_1) = I_\nu(\mu, \tau_2) [1 - (\rho k_{cv} - \rho k_{rv} \Phi_\nu) h/\mu]$ , ce qui donne un profil d'absorption en fonction de la fréquence, la fonction  $\Phi_\nu$  étant maximale au cœur de la raie spectrale.

### III – 12 Un troisième modèle simple : l'atmosphère de Milne Eddington

Nous donnerons comme troisième modèle simple un aperçu de l'atmosphère de Milne Eddington, qui permet le transfert dans les raies spectrales de manière simplifiée.

L'équation de transfert est écrite de la façon suivante à l'ETL:

$$\mu dI_\nu/ds = -\rho (k_{cv} + \sigma_\nu + k_{rv} \Phi_\nu) I_\nu + \rho j_\nu = -\rho k_\nu I_\nu + \rho j_\nu$$

avec  $k_\nu = k_{cv} + \sigma_\nu + k_{rv} \Phi_\nu$

$k_{cv} I_\nu$  est l'absorption par le continu (rend compte des transitions « lié – libre »)

$\sigma_\nu I_\nu$  est l'absorption par diffusion du continu (rend compte des transitions « libre – libre »)

$k_{rv} \Phi_\nu I_\nu$  est l'absorption par la raie spectrale (rend compte des transitions « lié – lié »,  $\Phi_\nu$  étant le profil de la raie)

$j_\nu = (k_{cv} + \varepsilon k_{rv} \Phi_\nu) B_\nu + (\sigma_\nu + (1-\varepsilon) k_{rv} \Phi_\nu) J_\nu$  où  $\varepsilon$  est un nombre compris entre 0 et 1

$k_{cv} B_\nu$  est l'émission du continu dans le champ de rayonnement  $B_\nu$

$\varepsilon k_{rv} \Phi_\nu B_\nu$  est la fraction émise par la raie spectrale dans le champ de rayonnement  $B_\nu$

$\sigma_\nu J_\nu$  est l'émission par les processus diffusion du continu hors raie

$(1-\varepsilon) k_{rv} \Phi_\nu J_\nu$  est la fraction diffusée par la raie spectrale

Le coefficient  $\varepsilon$  sert donc à distinguer les processus d'absorption/émission et de diffusion dans la raie : si  $\varepsilon = 1$ , on a une raie en absorption/émission pure ; si  $\varepsilon = 0$ , on a une raie de diffusion pure.

Nous prendrons dans ce qui suit  $\sigma_\nu = 0$  pour simplifier (pas de diffusion par le continu). Dans ce cas, on a  $d\tau_\nu = -\rho (k_{cv} + k_{rv} \Phi_\nu) ds$  et l'équation de transfert devient :

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - B_\nu (k_{cv} + \varepsilon k_{rv} \Phi_\nu)/(k_{cv} + k_{rv} \Phi_\nu) - J_\nu (1-\varepsilon) k_{rv} \Phi_\nu/(k_{cv} + k_{rv} \Phi_\nu)$$

Posons  $\beta_\nu = k_{rv} \Phi_\nu / k_{cv}$  (notons au passage que  $\beta_\nu \gg 1$  dans le cœur des raies car  $\Phi_\nu$  est très grand)

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - B_\nu (1 + \varepsilon \beta_\nu)/(1 + \beta_\nu) - J_\nu (1-\varepsilon) \beta_\nu / (1 + \beta_\nu)$$

Posons maintenant  $f_\nu = (1 + \varepsilon \beta_\nu)/(1 + \beta_\nu)$ , alors l'équation de transfert se met sous la forme:

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - f_\nu B_\nu - (1 - f_\nu) J_\nu$$

Rappelons que  $B_\nu$  est la fonction de Planck et  $J_\nu$  est l'intensité moyenne. Pour traiter des raies d'absorption pure, on prend  $\varepsilon = 1$  donc  $f_\nu = 1$  et dans ce cas  $S_\nu = B_\nu$ ; pour des raies de diffusion pure, on prend  $\varepsilon = 0$  donc  $f_\nu = 1/(1 + \beta_\nu)$ , dans le cœur des raies fortes,  $\beta_\nu \rightarrow \infty$  entraîne  $f_\nu \rightarrow 0$  et  $S_\nu \rightarrow J_\nu$ ; le cas général est une combinaison des deux (absorption et diffusion).

L'hypothèse de Milne Eddington porte sur le comportement affine de la fonction  $B_\nu$  en fonction de la profondeur optique :

$$B_\nu = a + b_\nu \tau_\nu = a + b \tau_\nu / (1 + \beta_\nu) \text{ où } b_\nu = b / (1 + \beta_\nu), \text{ avec } a \text{ et } b \text{ constantes}$$

Nous prenons d'abord le moment d'ordre 0 de l'équation de transfert par intégration sur les angles solides donc sur  $\mu$  ( $d\omega = -2\pi d\mu$  avec  $\mu$  variant de 1 à -1) :

$$dH_\nu/d\tau_\nu = J_\nu - f_\nu B_\nu - (1 - f_\nu) J_\nu = f_\nu (J_\nu - B_\nu)$$

car le moment d'ordre 0 de  $f_\nu B_\nu + (1 - f_\nu) J_\nu$  est égal à lui même (quantités ne dépendant pas de  $\mu$ ). Nous prenons ensuite le moment d'ordre 1 de l'équation de transfert :

$$d\mathbf{K}_v/d\tau_v = \mathbf{H}_v$$

car le moment d'ordre 1 de  $f_v B_v + (1 - f_v) J_v$  est nul (quantités ne dépendant pas de  $\mu$ ).  
Nous faisons l'approximation d'Eddington  $\mathbf{K}_v = \frac{1}{3} \mathbf{J}_v$  dont on déduit du moment d'ordre 1 que  $\mathbf{H}_v = \frac{1}{3} d\mathbf{J}_v/d\tau_v$  et en remplaçant dans le moment d'ordre 0, on obtient une équation sur  $J_v$ :

$$\frac{1}{3} d\mathbf{J}_v/d\tau_v = f_v (\mathbf{J}_v - \mathbf{B}_v)$$

Comme  $\mathbf{B}_v = \mathbf{a} + \mathbf{b}_v \tau_v$  est affine en  $\tau_v$ , on peut écrire :  $\frac{1}{3} d(\mathbf{J}_v - \mathbf{B}_v)/d\tau_v = f_v (\mathbf{J}_v - \mathbf{B}_v)$  dont la solution est  $J_v = B_v + \alpha_v \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v] + \alpha'_v \exp[(3f_v)^{1/2} \tau_v]$  avec  $\alpha_v, \alpha'_v$  constantes, dont on élimine la seconde solution pour éviter la divergence lorsque  $\tau_v \rightarrow \infty$ , donc il reste :

$$\mathbf{J}_v = \mathbf{a} + \mathbf{b}_v \tau_v + \alpha_v \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v], \quad \mathbf{H}_v = \mathbf{b}_v/3 - (3f_v)^{1/2} (\alpha_v/3) \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v]$$

De cette dernière expression, on tire  $H_v(0) = b_v/3 - (3f_v)^{1/2} \alpha_v/3$

Milne et Eddington font l'hypothèse (condition aux limites) que  $\mathbf{J}_v(\mathbf{0}) = \sqrt{3} \mathbf{H}_v(\mathbf{0})$  ce qui permet de calculer la constante  $\alpha_v = (b_v - a\sqrt{3}) / (\sqrt{3} + (3f_v)^{1/2})$ , d'où l'on tire  $J_v$ :

$$J_v = a + b_v \tau_v + [ (b_v - a\sqrt{3}) / (\sqrt{3} + (3f_v)^{1/2}) ] \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v]$$

Le flux vaut  $H_v = \frac{1}{3} dJ_v/d\tau_v = \frac{1}{3} b_v - \frac{1}{3} (3f_v)^{1/2} [ (b_v - a\sqrt{3}) / (\sqrt{3} + (3f_v)^{1/2}) ] \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v]$

$$\text{Puis } S_v = f_v B_v + (1 - f_v) J_v = a + b_v \tau_v + (1 - f_v) [ (b_v - a\sqrt{3}) / (\sqrt{3} + (3f_v)^{1/2}) ] \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v]$$

Et enfin par intégration  $I_v(\mu, \tau) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(t) e^{-t/\mu} dt/\mu$ , on trouve l'intensité

$$I_v(\mu, \tau_v) = a + b_v (\mu + \tau_v) + \exp[-(3f_v)^{1/2} \tau_v] (1 - f_v)(b_v - a\sqrt{3}) / [\sqrt{3} (1 + \sqrt{f_v})(1 + \mu (3f_v)^{1/2})]$$

A la **surface** de l'étoile en  $\tau_v = 0$ , on en déduit l'intensité et le flux émergents :

$$\mathbf{I}_v(\mu, \mathbf{0}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}_v \mu + (1 - f_v)(\mathbf{b}_v - \mathbf{a}\sqrt{3}) / [\sqrt{3} (1 + \sqrt{f_v})(1 + \mu (3f_v)^{1/2})]$$

$$\mathbf{H}_v(\mathbf{0}) = \frac{1}{3} (\mathbf{b}_v + \mathbf{a}(3f_v)^{1/2}) / (1 + \sqrt{f_v})$$

Le traitement de l'**absorption continue « lié – libre »** permet d'introduire par normalisation au continu le flux résiduel  $\mathbf{R}_v = \mathbf{H}_v(\mathbf{0}) / \mathbf{H}_{\text{cont}}(\mathbf{0})$  et l'intensité résiduelle  $\mathbf{r}_v = \mathbf{I}_v(\mu, \mathbf{0}) / \mathbf{I}_{\text{cont}}(\mu, \mathbf{0})$

On suppose pour traiter l'absorption continue que  $k_{rv} = 0$  donc  $\beta_v = 0$  d'où  $b_v = b$  et  $f_v = 1$  :

$$\mathbf{H}_{\text{cont}}(\mathbf{0}) = \mathbf{H}_v(\mathbf{0}) = 1/6 (b + a\sqrt{3})$$

$$\mathbf{I}_{\text{cont}}(\mu, \mathbf{0}) = \mathbf{I}_v(\mu, \mathbf{0}) = a + b \mu$$

Le flux résiduel est donc obtenu par :

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{H}_v(\mathbf{0}) / \mathbf{H}_{\text{cont}}(\mathbf{0}) = 2 [\mathbf{b}_v + \mathbf{a}(3f_v)^{1/2}] / [(\mathbf{b} + \mathbf{a}\sqrt{3}) (1 + \sqrt{f_v})] \text{ avec } b_v = b/(1 + \beta_v)$$

Et l'intensité résiduelle par :

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{I}_v(\mu, \mathbf{0}) / \mathbf{I}_{\text{cont}}(\mu, \mathbf{0}) = \{ \mathbf{a} + \mathbf{b}_v \mu + (1 - f_v)(\mathbf{b}_v - \mathbf{a}\sqrt{3}) / [\sqrt{3} (1 + \sqrt{f_v})(1 + \mu (3f_v)^{1/2})] \} / (\mathbf{a} + \mathbf{b} \mu)$$

toujours avec  $b_v = b/(1 + \beta_v)$

**Cas particulier n°1: les raies de diffusion** avec  $\varepsilon = 0$

Dans ce cas,  $f_v = 1/(1 + \beta_v)$

On s'intéresse au cas limite dans lequel les raies sont fortes ( $\beta_v \rightarrow \infty$ ), alors  $b_v \rightarrow 0$  et  $f_v \rightarrow 0$

$\lim_{\beta_v \rightarrow \infty} R_v = 0$  et  $\lim_{\beta_v \rightarrow \infty} r_v = 0$ , on a affaire à des « raies noires » quelque soit  $\mu$

### Cas particulier n°2: les raies d'absorption avec $\varepsilon = 1$

Dans ce cas,  $f_v = 1$

$$R_v = (b_v + a\sqrt{3}) / (b + a\sqrt{3}) \text{ avec } b_v = b/(1 + \beta_v)$$

$r_v = (a + b_v \mu) / (a + b \mu)$  c'est la loi de variation centre bord en fonction de  $\mu$

On s'intéresse au cas limite dans lequel les raies sont fortes ( $\beta_v \rightarrow \infty$ ), alors  $b_v \rightarrow 0$

$$\lim_{\beta_v \rightarrow \infty} R_v = a\sqrt{3} / (b + a\sqrt{3}) \text{ et } \lim_{\beta_v \rightarrow \infty} r_v = a / (a + b \mu),$$

Cette loi signifie que le contraste des raies diminue à mesure qu'on s'approche du limbe.

Au centre disque on aurait  $r_v = a / (a + b) < 1$  et au limbe  $r_v = 1$  : les raies ne sont plus visibles.

### III – 13 Processus de diffusion et la redistribution des fréquences

L'énergie diffusée par l'élément de volume  $dV = dS ds$  pendant le temps  $dt$ , entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ , par un pinceau lumineux dans l'angle solide  $d\omega$  est:

$$dE_v = \sigma_0 \rho dS ds dt d\nu d\omega \int_0^\infty \int_{4\pi} R(\nu, \nu', \omega, \omega') I_{\nu'} d\nu' d\omega' / 4\pi = j_\nu \rho dS ds d\nu d\omega dt$$

$$j_\nu = \sigma_0 \int_0^\infty \int_{4\pi} R(\nu, \nu', \omega, \omega') I_{\nu'} d\nu' d\omega' / 4\pi$$

$R(\nu, \nu', \omega, \omega')$  est la fonction de redistribution en fréquences et  $\sigma_0$  le coefficient de diffusion total (la dépendance en fréquence étant intégrée à  $R$ ).

$R(\nu, \nu', \omega, \omega') d\nu' d\omega' / 4\pi d\nu d\omega / 4\pi$  représente la probabilité qu'un photon arrivant dans l'angle solide  $d\omega$  entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu+d\nu$  soit diffusé dans l'angle solide  $d\omega'$  entre les fréquences  $\nu'$  et  $\nu'+d\nu'$ . Cette probabilité est normalisée à 1 par intégration sur  $\nu, \nu', \omega, \text{ et } \omega'$ .

On parle de **diffusion cohérente** lorsqu'il n'y a pas de changement de fréquence ( $\nu = \nu'$ ). Dans ce cas,  $R(\nu, \nu', \omega, \omega') = \Phi_\nu \delta(\nu - \nu') R'(\omega, \omega')$ , avec  $\delta$  fonction de Dirac et  $\Phi_\nu$  est le profil d'absorption.

On parle de **diffusion cohérente et isotrope** lorsque la partie angulaire  $R'(\omega, \omega') = 1$ . Dans ce cas précis,  $j_\nu = \sigma_\nu J_\nu = \sigma_0 \Phi_\nu J_\nu$  où  $J_\nu$  est l'intensité moyenne.

La diffusion n'est pas toujours isotrope. Par exemple, dans la diffusion Thomson par les électrons ou la diffusion Rayleigh par les molécules,  $R'(\omega, \omega') = 3/4 (1 + \cos^2\theta)$ ,  $\theta$  étant l'angle entre le rayon incident et diffusé.

On parle de **diffusion isotrope** lorsque la partie angulaire  $R'(\omega, \omega') = 1$ . Dans ce cas précis, on a :

$$j_\nu = \sigma_0 \int_0^\infty R(\nu, \nu') \left[ \int_{4\pi} I_{\nu'} d\omega' / 4\pi \right] d\nu' = \sigma_0 \int_0^\infty R(\nu, \nu') J_{\nu'} d\nu'$$

On parle de **redistribution complète** lorsque  $R(\nu, \nu') = \Phi_\nu \Phi_{\nu'}$ , où  $\Phi_\nu$  est le profil d'absorption c'est à dire qu'il n'y a pas de corrélation entre le photon incident et diffusé. On obtient alors :

$$j_\nu = \sigma_0 \Phi_\nu \int_0^\infty \Phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu'$$

Dans le cas simplifié d'une raie spectrale en redistribution complète isotrope pour les processus de diffusion où l'on ne tient compte que des processus « lié – libre » ( $k_{cv}$  coefficient d'absorption du continu) et « lié – lié » ( $k_{rv} \Phi_\nu$  coefficient d'absorption dans la raie) :

$$k_\nu = k_{cv} + k_{rv} \Phi_\nu$$

$$j_\nu = (k_{cv} + \varepsilon k_{rv} \Phi_\nu) B_\nu + (1-\varepsilon) k_{rv} \Phi_\nu \int_0^\infty \Phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu'$$

Le coefficient  $\varepsilon$  sert à distinguer les processus d'absorption/émission et de diffusion: si  $\varepsilon = 1$ , on a une raie en absorption/émission pure ; si  $\varepsilon = 0$ , on a une raie de diffusion pure. Dans ce cas, la fonction source s'écrit en redistribution complète avec  $\beta_v = \mathbf{k}_{rv} \Phi_v / \mathbf{k}_{cv}$  :

$$S_v = \mathbf{j}_v / \mathbf{k}_v = [(1 + \varepsilon \beta_v) / (1 + \beta_v)] B_{v+} + (1 - \varepsilon) [\beta_v / (1 + \beta_v)] \int_0^\infty \Phi_v \cdot \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{v}'$$

Et l'équation de transfert devient une équation différentielle intégrale ( $J_v$  figure dans  $S_v$ ).

### III – 14 L'atome à deux niveaux hors ETL

Considérons de nouveau l'équilibre statistique entre deux niveaux m et n. Soit  $N_m$  et  $N_n$  les densités volumiques (en  $\text{m}^{-3}$ ) des populations des niveaux m et n, soumises par ailleurs à l'intensité spectrale de rayonnement  $I_v$  ( $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{st}^{-1}$ ).

La variation de population du niveau m est donnée par :

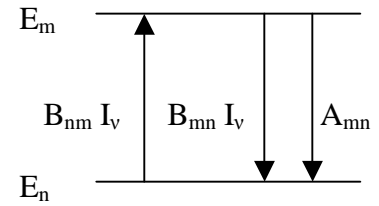
$$dN_m/dt = (-A_{mn} N_m - B_{mn} N_m I_v + B_{nm} N_n I_v) \Phi_v d\omega / 4\pi$$

*émission spontanée      émission induite      absorption*

avec pour unités  $A_{mn}$  en  $\text{s}^{-1}$  et  $B_{mn}$  en  $\text{m}^2 \text{J}^{-1}$

et ceci dans l'angle solide  $d\omega$ .

$\Phi_v$  est le profil de la raie qui vient pondérer le nombre d'atomes effectuant la transition à la fréquence  $\nu_{mn}$  sachant que par intégration sur les fréquences  $\int \Phi_v d\nu = 1$  (on suppose, en redistribution complète, que les profils d'absorption et d'émission sont identiques).  $\Phi_v$  est bien sûr très étroit et sa contribution n'est importante que dans la raie au voisinage de  $\nu_{mn}$



Les coefficients  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  et  $B_{nm}$  sont les coefficients d'Einstein, par ailleurs reliés par les relations  $A_{mn}/B_{mn} = 2 h \nu^3 / C^2$  et  $B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$ , avec  $h\nu_{mn} = E_m - E_n$ ,  $g_m$  et  $g_n$  étant les poids statistiques des niveaux m et n.

Les coefficients  $B_{mn}$  sont reliés aux forces d'oscillateur  $f_{mn}$  (nombres sans unité) par l'intermédiaire de la section efficace d'absorption ( $\text{m}^2$ ) intégrée sur les fréquences et calculée plus haut :

$$\sigma_{\text{tot}} = f_{nm} [e^2 / (4 \varepsilon_0 m C)] = B_{mn} h\nu_{mn} / 4\pi, B_{mn} \text{ en } \text{m}^2 \text{J}^{-1}$$

$$d'où \mathbf{f}_{mn} = (\varepsilon_0 m C / \pi e^2) B_{mn} h\nu_{mn}$$

L'énergie **perdue** par unité de temps du niveau m est donnée par :

$$dE_v = - (dN_m/dt) dV dt h\nu = (dN_m/dt) dS ds dt h\nu \text{ avec } dV = dS ds \text{ (surface } dS \times \text{ longueur } ds)$$

$$dE_v = (A_{mn} N_m + B_{mn} N_m I_v - B_{nm} N_n I_v) dS ds dt \Phi_v h\nu_{mn} d\omega / 4\pi$$

Cette énergie perdue est égale à l'augmentation de l'énergie rayonnée  $dE_v = dI_v dS d\omega dt$ , dont on déduit par identification:

$$dI_v = (A_{mn} N_m + B_{mn} N_m I_v - B_{nm} N_n I_v) ds \Phi_v h\nu_{mn} / 4\pi$$

L'équation de transfert devient, si l'on introduit se surcroît en incidence non normale au volume  $dV$

$$\mu dI_v/ds = (A_{mn} N_m + B_{mn} N_m I_v - B_{nm} N_n I_v) \Phi_v h\nu_{mn} / 4\pi, \text{ soit}$$

$$\boxed{\mu dI_v/ds = [N_m (A_{mn} + B_{mn} I_v) - N_n B_{nm} I_v] \Phi_v h\nu_{mn} / 4\pi}$$

Introduisons l'opacité  $k$  intégrée sur les fréquences telle que

$$\rho k = (N_n B_{nm} - N_m B_{mn}) h\nu_{mn} / 4\pi = [\pi e^2 / (4\pi \varepsilon_0 m C)] (N_n f_{nm} - N_m f_{mn})$$

avec  $B_{mn} g_m = B_{nm} g_n$ , on a aussi  $f_{mn} g_m = f_{nm} g_n$  d'où l'on déduit :

$$\rho k = (N_n B_{nm} - N_m B_{mn}) h\nu_{mn} / 4\pi = [\pi e^2 / (4\pi \varepsilon_0 m C)] f_{nm} (N_n - N_m g_n/g_m)$$

L'équation de transfert devient  $\mu dI_v/d\tau = \Phi_v (I_v - S)$  avec  $d\tau = -\rho k ds$

Avec  $S = N_m A_{mn} / (N_n B_{nm} - N_m B_{mn}) = (2 h v^3 / C^2) N_m B_{mn} / (N_n B_{nm} - N_m B_{mn})$ ,  
 Ou encore  $S = (2 h v^3 / C^2) / (N_n B_{nm} / N_m B_{mn} - 1) = (2 h v^3 / C^2) / (N_n g_m / N_m g_n - 1)$

La fonction source  $S = (2 h v^3 / C^2) / (N_n g_m / N_m g_n - 1)$

dépend donc des populations des niveaux m et n, qui seraient donnés par la loi de Boltzmann à l'ETL (et dans ce cas S serait égale à la fonction de Planck pour la fréquence  $\nu_{mn}$ ). Ici, pour déterminer le rapport  $N_n / N_m$  nous considérons l'équation de l'équilibre statistique du niveau m :  $dN_m/dt = 0$  en redistribution complète des fréquences et en tenant compte des **taux de collisions**  $C_{mn}$  provoquant une transition entre les niveaux m et n ( $N_m C_{mn}$  est le nombre d'atomes passant par unité de temps et de volume des états m vers n, et vice versa pour  $N_n C_{nm}$ ):

$$N_m [A_{mn} + B_{nm} \int \Phi_v J_v dv + C_{mn}] = N_n [B_{nm} \int \Phi_v J_v dv + C_{nm}]$$

Les coefficients  $C_{mn}$  et  $C_{nm}$  sont liées par la relation  $N_m^* C_{mn} = N_n^* C_{nm}$  où  $N_m^*$  et  $N_n^*$  sont les populations à l'équilibre thermodynamique données par la loi de Boltzmann, ce qui donne :

$$C_{nm} = C_{mn} (g_m/g_n) e^{-h\nu/kT} \quad N_m^* / N_n^* = C_{nm}/C_{mn} = (g_m/g_n) e^{-(E_m-E_n)/kT}$$

On transforme l'équation d'équilibre statistique sachant que :

$$B_{nm} = (C^2 / 2 h v^3) A_{mn}$$

$$B_{nm} = B_{nm} g_m / g_n = (C^2 / 2 h v^3) A_{mn} g_m / g_n$$

On obtient alors :

$$N_n g_m / N_m g_n = [1 + (C^2 / 2 h v^3) \int \Phi_v J_v dv + C_{nm}/A_{mn}] / [(C^2 / 2 h v^3) \int \Phi_v J_v dv + e^{-h\nu/kT} C_{mn}/A_{mn}]$$

D'où l'on déduit, après quelques calculs :

$$S = [\int \Phi_v J_v dv + (2 h v^3 / C^2) e^{-h\nu/kT} C_{nm}/A_{mn}] / [1 + C_{nm}/A_{mn}(1 - e^{-h\nu/kT})]$$

On pose  $\varepsilon' = C_{nm}/A_{mn}(1 - e^{-h\nu/kT})$

Alors on obtient  $S = [\int \Phi_v J_v dv + \varepsilon' B_v] / [1 + \varepsilon']$  avec  $B_v = (2 h v^3 / C^2) / (e^{h\nu/kT} - 1)$

La fonction source apparaît donc comme la somme d'une composante de **diffusion non cohérente** (redistribuée sur les fréquences) et d'une source **thermique**. La source thermique représente les transitions créées par excitation collisionnelle, suivies par désexcitation radiative (dans le champ de rayonnement  $B_v$ ). Le terme  $1 + \varepsilon'$  du dénominateur est un terme « puits » qui représente les transitions par désexcitation collisionnelle suivies par une photoexcitation radiative.

Pour résoudre l'équation de transfert  $\mu dI_v/d\tau = \Phi_v (I_v - S)$  avec  $d\tau = -\rho k ds$ , on distingue l'intensité sortante  $I_v(\tau, \mu)$  pour  $\mu \geq 0$  et l'intensité entrante  $I_v(\tau, \mu)$  pour  $\mu \leq 0$  (ou encore  $I_v(\tau, -\mu)$  pour  $\mu \geq 0$ ) en faisant le changement de variable suivant :

$$u_v(\tau, \mu) = 1/2 [I_v(\tau, \mu) + I_v(\tau, -\mu)],$$

avec  $\mu dI_v(\tau, \mu)/d\tau = \Phi_v (I_v(\tau, \mu) - S)$  pour l'intensité sortante

$$v_v(\tau, \mu) = 1/2 [I_v(\tau, \mu) - I_v(\tau, -\mu)],$$

avec  $-\mu dI_v(\tau, -\mu)/d\tau = \Phi_v (I_v(\tau, -\mu) - S)$  pour l'intensité entrante

Additionnons ces deux équations de transfert. On obtient  $\mu dv_v(\tau, \mu)/d\tau = \Phi_v (u_v(\tau, \mu) - S)$   
 Soustrayons ces deux équations de transfert. On obtient  $\mu du_v(\tau, \mu)/d\tau = \Phi_v v_v(\tau, \mu)$



Avec la définition classique de la profondeur optique  $d\tau_v = -\rho k \Phi_v ds$ , on a :  
 $\mu dv_v(\tau, \mu)/d\tau_v = u_v(\tau, \mu) - S$  et  $\mu du_v(\tau, \mu)/d\tau_v = v_v(\tau, \mu)$

La combinaison de ces deux équations donne  $\mu^2 d^2u_v(\tau, \mu)/d\tau_v^2 = u_v(\tau, \mu) - S$ , qui est une équation différentielle du second ordre sur  $u_v(\tau, \mu)$ , dont on déduira après résolution  $v_v(\tau, \mu) = \mu du_v(\tau, \mu)/d\tau_v$ , puis les intensités sortantes et entrantes. La solution ne peut être que **numérique** (équation intégrale différentielle) en raison de la **dépendance de S en J<sub>v</sub>**, donc des intensités  $u_v$ .

Pour résoudre cette équation, on utilise généralement comme condition aux limites  $I_v(0, -\mu) = 0$ , faisant l'hypothèse d'une intensité entrante nulle, et une seconde condition pour une seconde valeur de  $\tau$ . On rappelle que le profil  $\Phi_v$  de la raie s'exprime à l'aide d'une variable normalisée  $x$  selon :

Profil du type *Doppler* (Gaussien) :  $\Phi(x) = e^{-x^2} / \sqrt{\pi}$   
 Où  $x = (v - v_{mn}) / \Delta v_D$  avec  $\Delta v_D$  largeur Doppler de la raie.

Profil du type *naturel ou collisionnel* (Lorentzien) :  $\Phi(x) = (1/\pi) / (1+x^2)$   
 Où  $x = (v - v_{mn}) / (\Gamma / 4\pi)$  avec  $\Gamma$  amortissement de la raie.

Profil *convolué* de Voigt :

$$\Phi(x) = (a/\pi^{3/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} / (a^2 + (x-y)^2) dy \quad \text{où } x = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \Gamma / (4\pi \Delta v_D)$$

$$\text{et } \Phi(x) \text{ est normalisée : } \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) dx = 1$$

## Chapitre 4

### Effet Doppler ; lumière polarisée ; effet Zeeman, effet Hanle

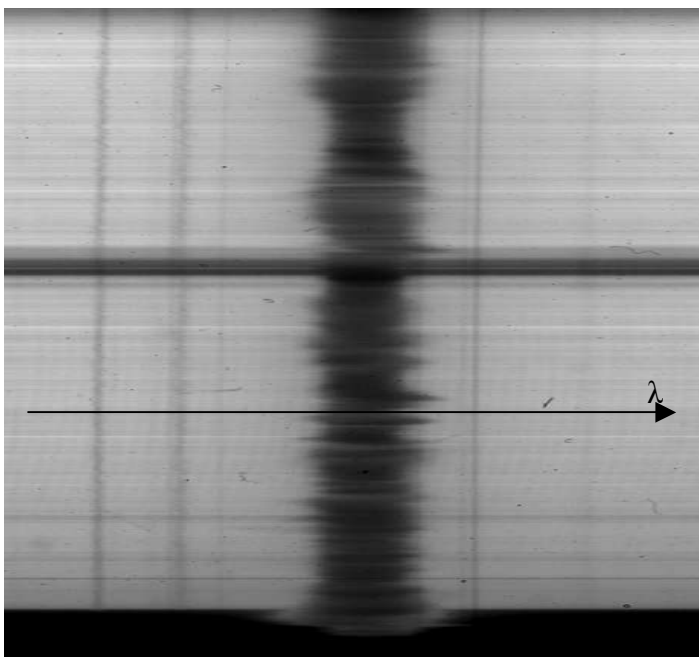
#### IV – 1 Mesure des déplacements de matière macroscopiques par effet Doppler

Lorsque les atomes sur la ligne de visée sont en mouvement **global** par rapport à l'observateur, les raies spectrales d'absorption ou d'émission se décalent vers le bleu ou vers le rouge d'une quantité égale à (dans l'approximation non relativiste) :

$$\Delta\lambda = -\lambda_0 v / C$$

Où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde au repos, et  $v$  la projection du vecteur vitesse le long de la ligne de visée. Le signe – indique un déplacement vers le bleu pour un mouvement d'approche et vers le rouge pour un éloignement. La méthode usuelle consiste à évaluer le décalage en longueur d'onde  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$  entre le profil  $I_1(\lambda)$  du pixel étudié et un profil moyen de référence  $I_0(\lambda)$  en mesurant leur écartement, chacun pouvant être repéré en longueur d'onde par la méthode du centre de gravité:

$$\lambda_1 = \left[ \int \lambda (1 - (I_1(\lambda))/I_c) d\lambda \right] / \left[ \int (1 - (I_1(\lambda))/I_c) d\lambda \right] \text{ région étudiée et}$$
$$\lambda_0 = \left[ \int \lambda (1 - (I_0(\lambda))/I_c) d\lambda \right] / \left[ \int (1 - (I_0(\lambda))/I_c) d\lambda \right] \text{ référence soleil calme}$$



l'intégration portera sur un domaine spectral égal au double de la largeur à mi hauteur de la raie (de l'aile bleue à l'aile rouge).

← tache

← Bord solaire

*Effet Doppler sur la raie H $\alpha$*

L'expression  $1 - (I_1(\lambda))/I_c$  est une fonction de poids qui est maximale au cœur de la raie (proche de 1) et diminue progressivement vers les ailes. Le domaine d'intégration doit être égal au double de la largeur Doppler à mi hauteur de la raie. On met à profit l'effet Doppler pour mesurer la vitesse du plasma dans l'atmosphère solaire. En fait, cette vitesse peut être trouvée différente selon qu'on la mesure au cœur de la raie, aux points d'inflexion ou dans les ailes. En effet, les cœurs de raie sont formés plus haut dans l'atmosphère que les ailes : il n'y a aucune raison que le mouvement du plasma soit uniforme. La méthode du centre de gravité proposée ici opère une moyenne.

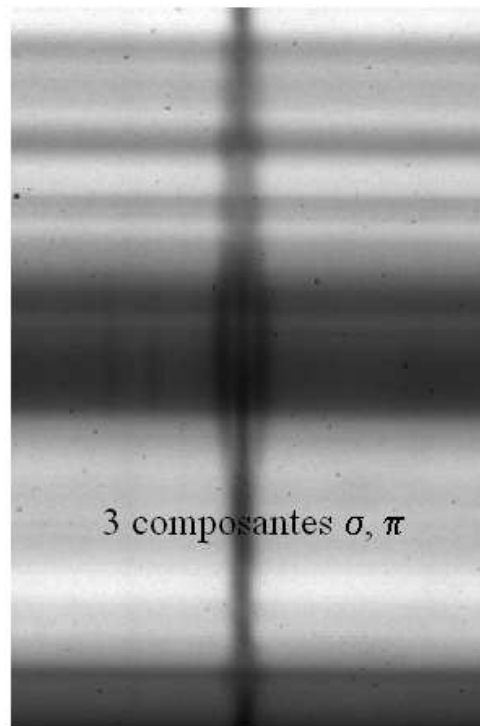
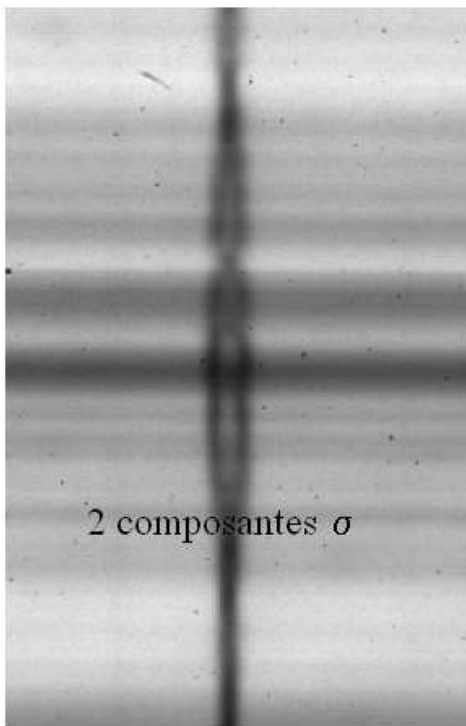
Numériquement, un décalage Doppler de 1 Angström ( $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$ ) correspond dans le rouge à une vitesse de l'ordre de 45 km/s. Ce sont des vitesses que l'on rencontre dans les éruptions. En général, dans le soleil calme, les vitesses ne dépassent pas quelques km/s, de sorte que les vitesses Doppler imposent un décalage souvent faible, une petite fraction seulement de la largeur Doppler de la raie, qui est de quelques centaines de mÅ pour les raies solaires larges.

## IV – 2 Effet Zeeman – approche classique

Lorsque les atomes sur la ligne de visée sont plongés dans un champ magnétique, les raies se scindent en plusieurs composantes. Dans l'effet Zeeman « normal », on observe deux composantes décalées de part et d'autre de la position de la raie sans champ, et polarisées **circulairement** autour de la direction du champ magnétique, que l'on appelle  $\sigma+$  et  $\sigma-$ . Il existe une troisième composante centrale polarisée **linéairement** dans la direction du champ magnétique et appelée composante  $\pi$ . La composante  $\pi$  n'est pas décalée par rapport à la position initiale de la raie sans champ.

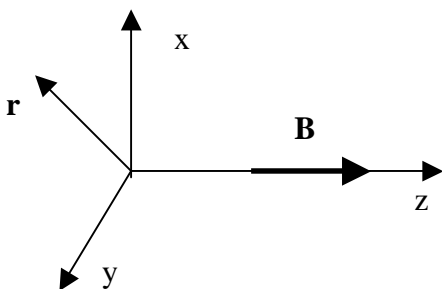
Si le champ est purement **longitudinal** (orienté dans la direction de l'observateur), on ne voit que les deux composantes décalées  $\sigma+$  et  $\sigma-$ . Si le champ est purement **transversal** (orienté dans le plan du ciel perpendiculairement à l'observateur), on voit les 3 composantes mais elles apparaissent toutes trois polarisées linéairement (les composantes  $\sigma+$  et  $\sigma-$  vibrent perpendiculairement au champ magnétique et la composante  $\pi$  est parallèle au champ magnétique). La réalité est toujours un mélange des deux situations.

### Effet Zeeman sur FeI 6173 dans une tache solaire



L'interprétation de cet effet nécessite l'usage de la mécanique quantique. On peut néanmoins à l'aide d'une théorie classique basée sur l'oscillateur harmonique en découvrir quelques aspects.

Considérons un électron de masse  $m$  et charge  $q$ , soumis à une force de rappel, et plongé dans un champ magnétique  $B$  le long de l'axe  $oz$ . L'électron vibre dans le plan  $(xOy)$  dans la direction du vecteur  $\mathbf{r}$ .



$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + f \mathbf{r} = q \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B} \quad (\text{force de Laplace})$$

En projection sur Ox et Oy avec  $\mathbf{r}(x, y, 0)$  et  $\mathbf{B}(0, 0, B)$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f x = q \frac{dy}{dt} B$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f y = -q \frac{dx}{dt} B$$

Posons  $u = x + i y$  alors les 2 équations peuvent s'écrire :  $m \frac{d^2 u}{dt^2} + f u + q i \frac{du}{dt} B = 0$

Cherchons des solutions sous la forme  $u = A e^{\pm i \omega t}$

$$\text{Alors } \omega^2 \pm (q B / m) \omega - \omega_0^2 = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = f / m$$

$$\text{Posons } \omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad \text{avec } \Delta\omega / \omega_0 \ll 1$$

Il vient  $\Delta\omega = \pm q B / (2 m) = \pm 2 \pi \nu_L$  avec  $\nu_L = q B / (4\pi m)$  appelée **fréquence de Larmor**

$$\text{De } \omega = 2 \pi C / \lambda, \text{ on tire } \Delta\lambda = \pm \lambda^2 q B / (4\pi m C) = \pm \lambda^2 \nu_L / C$$

Ce qui montre qu'en présence d'un champ longitudinal, on assiste à l'apparition de 2 composantes séparées de  $\Delta\lambda = \pm \lambda^2 \nu_L / C$ . Numériquement, avec B en Gauss et  $\lambda$  en Å :  $\Delta\lambda = \pm 4.67 \cdot 10^{-13} \lambda^2 B$

L'écart en énergie entre les deux composantes  $\sigma+$  et  $\sigma-$  est donnée par :

$$\Delta E = h \Delta\nu = 2 (h/2\pi) \Delta\omega = 2 h (q B / 2m) = 2 \mu_B B$$

où  $\mu_B = h q / (2m)$  est appelé **magnéton de Bohr** ou moment magnétique de l'électron.

La mécanique quantique introduit un facteur  $g^*$  (facteur de Landé équivalent) qui dépend des nombres quantiques L, S, J des niveaux haut et bas de la transition et donne :

$$\Delta\lambda = \pm [q / (4\pi m C)] \lambda^2 g^* B = \pm 4.67 \cdot 10^{-13} \lambda^2 g^* B$$

La mesure de l'écartement des composantes Zeeman  $2|\Delta\lambda|$  permet donc de mesurer les champs magnétiques. Mais comme en général, les composantes sont peu séparées en intensité, on doit recourir à l'analyse de la polarisation de la lumière, le décalage entre les composantes pouvant être mesuré beaucoup plus facilement sur les profils de Stokes  $V(\lambda)$ .

#### IV – 3 Effet Zeeman – approche quantique

Les niveaux d'énergie des atomes sont discrets et quantifiés par des nombres entiers ou demi entiers introduits par la théorie quantique. Pour décrire l'état d'un atome, on a besoin de connaître :

- le moment cinétique orbital total  $\mathbf{L}$  de l'ensemble des électrons de l'atome
- le moment cinétique de spin total  $\mathbf{S}$  de l'ensemble des électrons de l'atome
- le moment cinétique total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  de l'ensemble des électrons de l'atome dans le cadre du couplage spin orbite (entier ou demi entier)
- la projection  $m_J$  du moment cinétique total J de l'ensemble des électrons de l'atome sur un axe, par exemple l'axe Oz.  $m_J$  ne peut prendre que  $2J + 1$  valeurs discrètes possibles (entières ou demi entières) telles que :  $-J \leq m_J \leq J$

Un atome caractérisé par les nombres L, S, J possède une configuration notée :  $^{2S+1} L_J$   
et son énergie ne dépend pas de  $m_J$ .

Il y a donc  $2J + 1$  **niveaux de même énergie** : on dit qu'il y a dégénérescence.

Le niveau L = 0 est noté S, L = 1 est appelé P, L = 2 est nommé D, etc...

### IV – 3 - 1 Les transitions quantiques

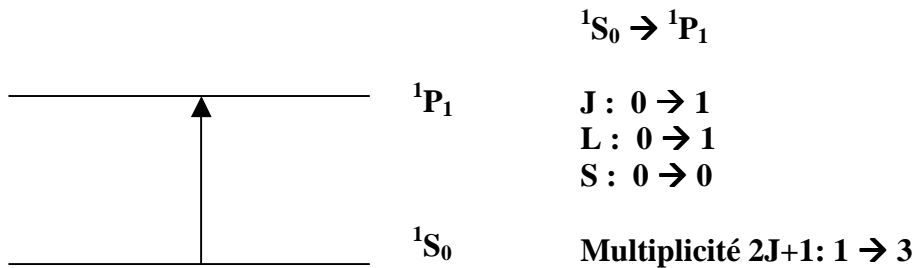
Lorsqu'un atome absorbe un photon, il se produit une raie d'absorption (même mécanisme pour l'émission). La fréquence  $\nu$  du photon correspond à la différence d'énergie entre les niveaux de départ LSJ et d'arrivée L'S'J' :

$$E = h \nu = h c / \lambda = |E_{L'S'J'} - E_{LSJ}|$$

Les transitions quantiques sont soumises à des règles de sélection établies par la mécanique quantique. En **couplage L,S pur** (ce n'est pas toujours le cas), on aura :

$$\Delta S = 0, \Delta L = 0, \pm 1, \Delta J = 0, \pm 1, \text{ et } \Delta m_J = 0, \pm 1$$

Exemple : transition CaI 4227 Å

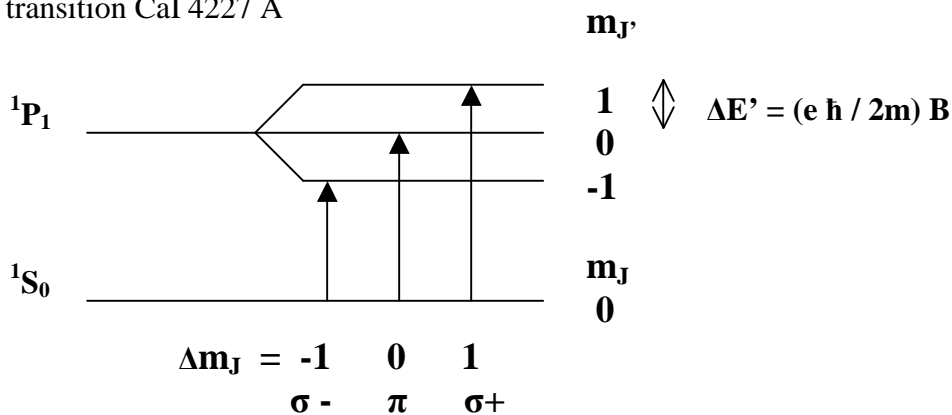


### IV – 3 - 2 Effet Zeeman

En présence de champ magnétique, la dégénérescence des niveaux d'énergie ( $2J + 1$ ) est levée et chaque niveau LSJ se scinde en  $2J + 1$  sous niveaux, dont l'énergie dépend maintenant de  $m_J$  qui n'est pas intervenu jusqu'ici.

- La transition  $\Delta m_J = 0$  est dite **composante  $\pi$**  ; elle est polarisée linéairement dans la direction du champ magnétique (direction de polarisation = direction du champ électrique décrivant l'onde électromagnétique). Si le champ magnétique se trouve dans la direction de la ligne de visée, c'est à dire longitudinal, alors la composante  $\pi$  est invisible.
- Les transitions  $\Delta m_J = \pm 1$  sont dites **composantes  $\sigma+$  et  $\sigma-$** . La polarisation est circulaire droite ou gauche autour de la direction du champ magnétique. Lorsqu'il est orienté dans le plan du ciel, c'est à dire transverse, l'observateur voit en réalité deux polarisations linéaires orthogonales à la direction du champ magnétique.

Exemple : transition CaI 4227 Å



La variation d'énergie  $\Delta E$  entre les sous niveaux  $L'S'J'm_J$  et  $LSJm_J$  est donnée par la mécanique quantique :

$$\Delta E = h \Delta \nu = -h C \Delta \lambda / \lambda^2 = (e \hbar / 2m) B (g_J m_J - g_J' m_J) = \mu_B B (g_J m_J - g_J' m_J)$$

$g_J$  et  $g_J'$  sont les facteurs de Landé des niveaux haut et bas de la transition. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} g_J &= 3/2 + [S'(S'+1) - L'(L'+1)] / [2J'(J'+1)] \\ g_J' &= 3/2 + [S(S+1) - L(L+1)] / [2J(J+1)] \end{aligned}$$

$\mu_B = e \hbar / 2m$  est le magnéton de Bohr ou moment magnétique de l'électron.

Pour la transition  $\Delta m_J = 0$ ,  $\Delta E = h \Delta \nu = (e \hbar / 2m) B (g_J - g_J') m_J$  donne des valeurs symétriques autour de  $m_J = 0$  : le centre de gravité de la composante  $\pi$  ne se déplace pas.

Un cas particulier important où il n'y a que 3 composantes:

Lorsque  $S = S' = 0$ , on a  $J' = L'$  et  $J = L$ , d'où  $g_J = g_J' = 1$

Dans ce cas,  $\Delta E = h \Delta \nu = -h C \Delta \lambda / \lambda^2 = (e \hbar / 2m) B \Delta m_J = \mu_B B \Delta m_J$

#### IV – 3 - 3 Effet Zeeman « normal » et effet Zeeman « anormal »

*effet Zeeman « normal »*

En spin nul ( $S = S' = 0$ ), les sous niveaux correspondant aux états  $L'S'J'm_J$  et  $LSJm_J$  sont équidistants, la différence d'énergie entre 2 sous niveaux adjacents étant égale à  $(e \hbar / 2m) B = \mu_B B$ . Compte tenu de la règle de sélection  $\Delta m_J = 0, \pm 1$  on observera donc **3 composantes** Zeeman écartées de la différence d'énergie  $\Delta E = h \Delta \nu = 0$  (composante  $\pi$ ),  $\Delta E = h \Delta \nu = \pm (e \hbar / 2m) B = \pm \mu_B B$  (composantes  $\sigma$ ).

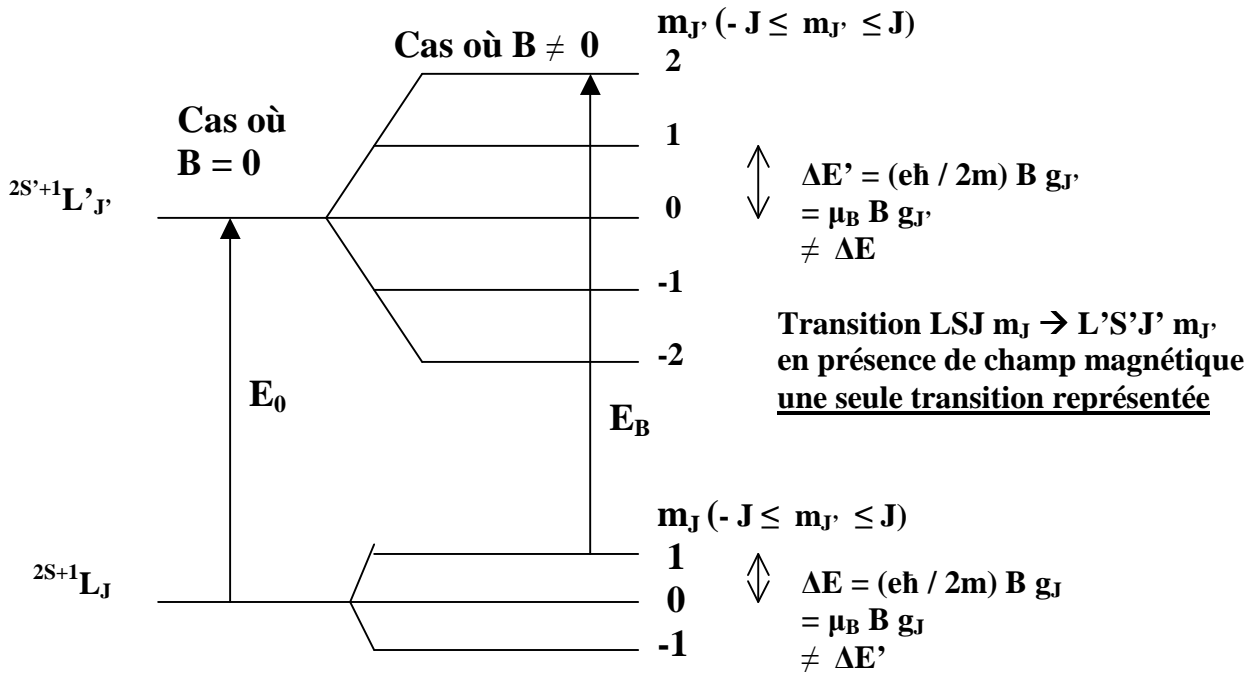
*effet zeeman « anormal »*

En spin non nul ( $S \neq S' \neq 0$ ), les sous niveaux correspondant aux états  $L'S'J'm_J$  et  $LSJm_J$  ne sont pas équidistants, la différence d'énergie entre 2 sous niveaux adjacents étant égale à  $(e \hbar / 2m) B g_J' = \mu_B B g_J'$  ou  $(e \hbar / 2m) B g_J = \mu_B B g_J$  car  $g_J' \neq g_J$  : on observera donc **plus de 3 composantes** Zeeman. Dans ce cas d'effet Zeeman « anormal », on introduit pour simplifier la notion de centre de gravité des multiples composantes  $\pi, \sigma+, \sigma-$  données par la règle de sélection  $\Delta m_J = 0, \pm 1$ .

**Le centre de gravité de la composante  $\pi$**  ( $\Delta m_J = 0$ ) est centré sur la transition sans champ magnétique  $E = h \nu = h C / \lambda = |E_{L'S'J} - E_{LSJ}|$

**Les centres de gravité des composantes  $\sigma+$  et  $\sigma-$**  ( $\Delta m_J = \pm 1$ ) sont décalés par rapport à la transition sans champ magnétique de la valeur  $\Delta E = h \Delta \nu = \pm (e \hbar / 2m) g^* B = \pm \mu_B B g^*$ , où  $g^*$  est le facteur de Landé équivalent qui se calcule par la formule suivante :

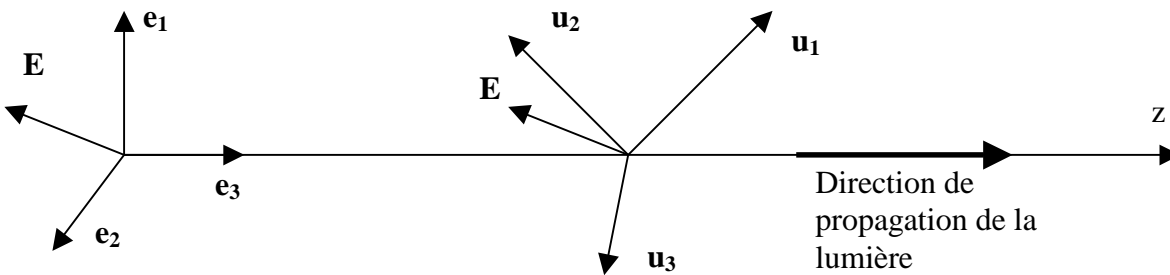
$$g^* = 1/2 (g_J + g_J') + 1/4 (g_J - g_J') (J(J+1) - J'(J'+1))$$



$E_0 = h \nu_0 = |E_{L'S'J'} - E_{LSJ}|$  transition sans champ magnétique avec  $\Delta L = 0, \pm 1, \Delta J = 0, \pm 1$   
 $\Delta E_B = E_B - E_0 = h \Delta \nu = (e h / 2m) B (g_{J'} m_{J'} - g_J m_J) = \mu_B B (g_{J'} m_{J'} - g_J m_J)$  variation d'énergie en présence de champ magnétique avec  $\Delta m_J = 0, \pm 1$

#### IV – 4 Introduction au transfert de rayonnement en lumière polarisée

Nous adopterons ici une description classique dans laquelle le milieu de propagation de l'onde possède trois directions propres ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ) avec trois vitesses de phase différentes. Considérons pour ce faire une onde plane se propageant **dans la direction z** dans le repère ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ).



Dans le repère ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ), le long de chaque axe la lumière se propage avec un indice de réfraction ( $n_1, n_2, n_3$ ) de sorte que le champ électrique  $\mathbf{E}$  (qui n'a de composante que sur  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ) peut s'exprimer dans ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ) sous la forme  $\mathbf{E} = \sum E_\alpha \mathbf{u}_\alpha \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)]$  pour  $\alpha = 1, 2, 3$ , avec  $\nu$  fréquence de l'onde et  $\lambda = C/\nu$  la longueur d'onde **dans le vide**.

Les vitesses de phase de l'onde le long des axes ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ) sont ( $C/n_1, C/n_2, C/n_3$ ). Attention : les vecteurs ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ) sont **complexes**, de sorte que  $\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha^* = 1$  et  $\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\beta^* = 0$  (pour  $\alpha \neq \beta$ ) où \* désigne la quantité complexe conjuguée.

On a également dans le repère ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ),  $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2$

On s'intéresse au transfert des paramètres de Stokes (I, Q, U, V) de la lumière définis par :

$$\begin{aligned}
I &= E_1 E_1^* + E_2 E_2^* \\
Q &= E_1 E_1^* - E_2 E_2^* \\
U &= E_1^* E_2 + E_1 E_2^* \\
V &= i (E_1^* E_2 - E_1 E_2^*)
\end{aligned}$$

*Paramètres de Stokes dans le repère (e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>, e<sub>3</sub>)  
\* désigne la quantité complexe conjuguée*

Considérons l'égalité  $\mathbf{E} = \sum E_k \mathbf{e}_k = \sum E_\alpha \mathbf{u}_\alpha \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)]$  pour  $k = 1, 2$  et  $\alpha = 1, 2, 3$

Effectuons le produit scalaire avec  $\mathbf{e}_j$ :

$$E_j = \sum E_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)] = \sum E_\alpha C_{\alpha j} \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)] \text{ pour } k = 1, 2 \text{ et } \alpha = 1, 2, 3$$

Les  $C_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j$  sont les cosinus directeurs des vecteurs  $\mathbf{u}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$

Effectuons le produit scalaire avec  $\mathbf{u}_\beta^*$ :

$$\sum E_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{u}_\beta^* = E_\beta \exp[2i\pi(n_\beta z/\lambda - vt)] = \sum E_k C_{\beta k}^* \text{ pour } k = 1, 2 \text{ et } \alpha = 1, 2, 3$$

Les  $C_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j$  sont les cosinus directeurs des vecteurs  $\mathbf{u}_\alpha$  sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$

Nous prenons maintenant la dérivée spatiale en  $z$  de  $E_j = \sum E_\alpha C_{\alpha j} \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)]$  :

$$dE_j/dz = \sum (2i\pi n_\alpha/\lambda) E_\alpha C_{\alpha j} \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)]$$

or  $E_\alpha \exp[2i\pi(n_\alpha z/\lambda - vt)] = \sum E_k C_{\alpha k}^*$  pour  $k = 1, 2$ , d'où il vient par substitution :

$$dE_j/dz = \sum [\sum (2i\pi n_\alpha/\lambda) C_{\alpha j} C_{\alpha k}^*] E_k \text{ double somme pour } k = 1, 2 \text{ et pour } \alpha = 1, 2, 3$$

$$\text{et la quantité conjuguée } dE_j^*/dz = - \sum_{k \alpha} [\sum (2i\pi n_\alpha/\lambda) C_{\alpha j}^* C_{\alpha k}] E_k^*$$

L'équation de transfert des paramètres de Stokes s'obtient par dérivation de la quantité  $I_{jk} = E_j^* E_k$  pour  $j, k = 1, 2$  car elles sont reliées aux paramètres de Stokes  $I, Q, U, V$  par les relations simples :

$$I = I_{11} + I_{22}, Q = I_{11} - I_{22}, U = I_{12} + I_{21}, V = i (I_{12} - I_{21}), \text{ et réciproquement :}$$

$$I_{11} = \frac{1}{2} (I + Q)$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} (I - Q)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2} (U - i V)$$

$$I_{21} = \frac{1}{2} (U + i V)$$

On obtient par dérivation des  $I_{jk}$  4 équations du premier ordre à 4 inconnues  $I_{11}, I_{22}, I_{12}, I_{21}$  :

$$dI_{jk}/dz = d(E_j^* E_k)/dz = dE_j^*/dz E_k + E_j^* dE_k/dz \text{ pour } j, k = 1, 2$$

$$\text{dans lesquelles on a } dE_j^*/dz = - \sum_{\alpha} [\sum (2i\pi n_\alpha/\lambda) C_{\alpha j}^* C_{\alpha l}] E_l^* \text{ et } dE_k/dz = \sum_{\alpha} [\sum (2i\pi n_\alpha/\lambda) C_{\alpha k} C_{\alpha l}^*] E_l$$

Les produits du type  $E_j^* E_k$  font apparaître les  $I_{jk}$  dans les membres de droite. Les 4 équations du premier ordre aux 4 inconnues  $I_{11}, I_{22}, I_{12}, I_{21}$  se transforment en 4 équations du premier ordre sur  $I, Q, U, V$  par combinaison linéaire et on obtient tous calculs effectués l'équation de transfert:

$$d/dz \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice ne dépendent que des cosinus directeurs  $C_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j$  des vecteurs  $\mathbf{u}_\alpha$  sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  ( $j = 1, 2$ ) ainsi que des facteurs  $2\pi n_\alpha/\lambda$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) apparus dans la dérivation. Si l'on pose :

$$n_\alpha = 1 + \delta_\alpha + i k_\alpha$$



avec  $1 + \delta_\alpha$  et  $k_\alpha$  respectivement partie réelle et imaginaire des indices de réfraction  $n_\alpha$  dans les trois directions  $\mathbf{u}_\alpha$ , les coefficients de la matrice s'écrivent :

$$\eta_I = 2\pi/\lambda \sum_\alpha k_\alpha (|C_{\alpha 1}|^2 + |C_{\alpha 2}|^2)$$

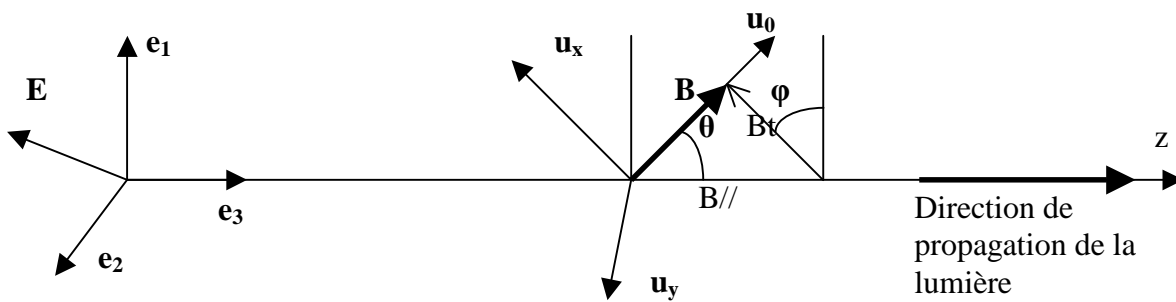
$$\eta_Q = 2\pi/\lambda \sum_\alpha k_\alpha (|C_{\alpha 1}|^2 - |C_{\alpha 2}|^2) \quad \rho_Q = 2\pi/\lambda \sum_\alpha \delta_\alpha (|C_{\alpha 1}|^2 - |C_{\alpha 2}|^2)$$

$$\eta_U = 2\pi/\lambda \sum_\alpha k_\alpha 2\text{Re}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) \quad \rho_U = 2\pi/\lambda \sum_\alpha \delta_\alpha 2\text{Re}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*)$$

$$\eta_V = 2\pi/\lambda \sum_\alpha k_\alpha 2\text{Im}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) \quad \rho_V = 2\pi/\lambda \sum_\alpha \delta_\alpha 2\text{Im}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*)$$

Le problème pour résoudre l'équation de transfert consiste maintenant à identifier les indices de réfraction  $n_\alpha$  dans les trois directions  $\mathbf{u}_\alpha$

#### IV - 4 - 1 Formation des raies en présence de champ magnétique



On choisit un vecteur unitaire  $\mathbf{u}_0$  colinéaire au champ magnétique  $\mathbf{B}$  et on définit un trièdre direct  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_0)$  tel que  $\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_0$ . L'angle  $\theta$  est l'angle du champ magnétique  $\mathbf{B}$  avec la ligne de visée et l'angle  $\varphi$  est son azimuth.

La projection du champ magnétique sur la ligne de visée  $\mathbf{e}_3$  est  $B_{//} = B \cos\theta$ .

Le champ transverse est  $B_t = B \sin\theta$  dont les projections sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont respectivement  $(B \sin\theta \cos\varphi, B \sin\theta \sin\varphi)$ . Le vecteur  $\mathbf{B}_t$  appartient au plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On a  $B^2 = B_{//}^2 + B_t^2$ .

On définit à partir de  $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$  deux autres vecteurs complexes (avec  $i$  nombre complexe imaginaire pur) définissant une nouvelle base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$ :

$$\mathbf{u}_+ = (\mathbf{u}_x + i \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}_- = (\mathbf{u}_x - i \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$$

Ces vecteurs ont pour propriétés:  $\mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_+ = 1, \mathbf{u}_-^* \cdot \mathbf{u}_- = 1$  (normés),  $\mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_- = \mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_0 = 0$  (orthogonaux)

Appelons  $\mathbf{u}_\alpha$  avec  $\alpha = -1, 0, 1$ , respectivement les vecteurs  $\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_+$

On remarque que  $\mathbf{u}_\alpha \wedge \mathbf{u}_0 = i \alpha \mathbf{u}_\alpha$  avec  $\alpha = -1$  (pour  $\mathbf{u}_-$ ),  $\alpha = 0$  (pour  $\mathbf{u}_0$ ),  $\alpha = +1$  (pour  $\mathbf{u}_+$ )

C'est dans cette base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  que l'on va rechercher les indices de réfraction  $(n_+, n_-, n_0)$ . Pour ce faire, on considère un oscillateur harmonique (électron de charge  $-e$  et de masse  $m$ ) dont l'équation du mouvement de vecteur  $\mathbf{r}$  ( $r_+, r_-, r_0$ ) s'écrit dans le champ de l'onde électromagnétique  $\mathbf{E}$ , en présence du champ magnétique  $B \mathbf{u}_0$ , d'une force d'amortissement et de rappel: :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + m \omega_0^2 \mathbf{r} = -e \mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge (B \mathbf{u}_0)$$

où  $\mathbf{E} = (E_+, E_-, E_0) e^{-i\omega t}$  dans le repère  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$ ,  $\mathbf{E}$  étant contenu dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

On développe ensuite le vecteur  $\mathbf{r}$  sur la base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  en posant  $\mathbf{r} = \sum x_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ ,

de sorte que  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{u}_0 = \sum x_\alpha i \alpha \mathbf{u}_\alpha$  implique  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{u}_0 = \sum dx_\alpha/dt i \alpha \mathbf{u}_\alpha$

Dans cette base, l'équation du mouvement devient le long de  $\mathbf{u}_\alpha$  pour  $\alpha = -1, 0, 1$  :

$$d^2x_\alpha/dt^2 + (\gamma + i \alpha eB/m) dx_\alpha/dt + \omega_0^2 x_\alpha = -e/m E_\alpha e^{-i\omega t}$$

En recherchant les solutions sous la forme  $x_\alpha = a_\alpha e^{-i\omega t}$ , on obtient rapidement :

$$a_\alpha = -e/m E_\alpha / [\omega_0^2 - \omega^2 + \omega (\alpha eB/m) - i \gamma \omega], \text{ soit encore :}$$

$$a_\alpha = -e/m E_\alpha [\omega_0^2 - \omega^2 + \omega \alpha (eB/m) + i \gamma \omega] / [(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega \alpha (eB/m))^2 + \gamma^2 \omega^2]$$

Posons  $\nu_L = eB / (4\pi m)$  fréquence de Larmor de l'électron et  $\omega = 2\pi\nu$ , et plaçons nous au voisinage de la fréquence de résonance  $\nu_0$  de sorte que  $\nu^2 - \nu_0^2 \approx 2 \nu_0 (\nu - \nu_0)$ , on obtient alors :

$$a_\alpha = (eE_\alpha / 8\pi^2 m \nu_0) [\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L - i \gamma / 4\pi] / [(\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L)^2 + (\gamma / 4\pi)^2]$$

Pour calculer l'indice de réfraction  $n_\alpha$  associé à la direction du déplacement  $a_\alpha$ , on recherche le moment dipolaire de l'électron défini par  $\mathbf{P} = -e \mathbf{r}$  et dont les composantes de l'amplitude dans le repère  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  sont  $p_\alpha = -e a_\alpha$ . La polarisation du milieu est définie par  $\mathbf{P}_\alpha = -N e a_\alpha$  où  $N$  désigne le nombre d'électrons par unité de volume. L'indice de réfraction s'obtient en écrivant que :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \text{ dont les composantes sont } D_\alpha = \varepsilon_\alpha E_\alpha = \varepsilon_0 E_\alpha + P_\alpha$$

$$n_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha / \varepsilon_0 = 1 + P_\alpha / (\varepsilon_0 E_\alpha) = 1 - N e a_\alpha / (\varepsilon_0 E_\alpha)$$

$$n_\alpha^2 = 1 - (Ne^2 / 8\pi^2 \varepsilon_0 m \nu_0) [\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L - i \gamma / 4\pi] / [(\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L)^2 + (\gamma / 4\pi)^2]$$

or  $n_\alpha = 1 + \delta_\alpha + i k_\alpha$  donne au premier ordre  $n_\alpha^2 \approx 1 + 2\delta_\alpha + 2 i k_\alpha$  ce qui donne  $\delta_\alpha$  et  $k_\alpha$  :

$$\delta_\alpha = - (Ne^2 / 16\pi^2 \varepsilon_0 m \nu_0) (\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L) / [(\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L)^2 + (\gamma / 4\pi)^2]$$

profil de dispersion

$$k_\alpha = (Ne^2 / 16\pi^2 \varepsilon_0 m \nu_0) (\gamma / 4\pi) / [(\nu - \nu_0 - \alpha \nu_L)^2 + (\gamma / 4\pi)^2]$$

profil d'absorption

#### IV – 4 – 2 Matrice de transfert du rayonnement

Les coefficients de la matrice de transfert nécessitent la calcul des cosinus directeurs des 3 vecteurs  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$ , sachant que dans  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  on a :

$$\mathbf{u}_0 = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$\mathbf{u}_x$  est obtenu simplement de  $\mathbf{u}_0$  en changeant  $\theta$  en  $\theta + \pi/2$  :

$$\mathbf{u}_x = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta)$$

$\mathbf{u}_y$  est obtenu simplement de  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_0$  par  $\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{u}_x$  :

$$\mathbf{u}_y = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

On en déduit:

$$\mathbf{u}_+ = (\mathbf{u}_x + i \mathbf{u}_y) / \sqrt{2} = (\cos\theta \cos\varphi - i \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi + i \cos\varphi, -\sin\theta) / \sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}_- = (\mathbf{u}_x - i \mathbf{u}_y) / \sqrt{2} = (\cos\theta \cos\varphi + i \sin\varphi, \cos\theta \sin\varphi - i \cos\varphi, -\sin\theta) / \sqrt{2}$$

Connaissant maintenant les coordonnées de  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  dans le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , on peut calculer aisément par produit scalaire les  $C_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j$  pour  $\alpha = -1 (\mathbf{u}_-)$ ,  $0 (\mathbf{u}_0)$ ,  $+1 (\mathbf{u}_+)$ , qui sont leurs cosinus directeurs sur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  :

$$C_{01} = \sin\theta \cos\varphi$$

$$C_{02} = \sin\theta \sin\varphi$$

$$C_{11} = (\cos\theta \cos\varphi - i \sin\varphi) / \sqrt{2}$$

$$C_{12} = (\cos\theta \sin\varphi + i \cos\varphi) / \sqrt{2}$$

$$C_{-11} = (\cos\theta \cos\varphi + i \sin\varphi) / \sqrt{2}$$

$$C_{-12} = (\cos\theta \sin\varphi - i \cos\varphi) / \sqrt{2}$$

D'où l'on déduit:

$$|C_{01}|^2 + |C_{02}|^2 = \sin^2\theta$$

$$|C_{01}|^2 - |C_{02}|^2 = \sin^2\theta \cos 2\varphi$$

$$|C_{11}|^2 + |C_{12}|^2 = (1 + \cos^2\theta) / 2$$

$$|C_{01}|^2 - |C_{02}|^2 = -\sin^2\theta \cos 2\varphi / 2$$

$$|C_{-11}|^2 + |C_{-12}|^2 = (1 + \cos^2\theta) / 2$$

$$|C_{01}|^2 - |C_{02}|^2 = -\sin^2\theta \cos 2\varphi / 2$$

$$2C_{01} C_{02}^* = \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

$$2C_{11} C_{12}^* = -\sin^2\theta \sin 2\varphi / 2 - i \cos\theta$$

$$2C_{-11} C_{-12}^* = -\sin^2\theta \sin 2\varphi / 2 + i \cos\theta$$

On peut avec ces cosinus directeurs évaluer les coefficients de la matrice en posant  $\lambda = C/v_0$  :

$$\eta_I = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} k_{\alpha} (|C_{\alpha 1}|^2 + |C_{\alpha 2}|^2) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) [ \Phi_0 \sin^2\theta + (1 + \cos^2\theta) ( \Phi_{-1} + \Phi_1) / 2 ] / 2$$

$$\eta_Q = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} k_{\alpha} (|C_{\alpha 1}|^2 - |C_{\alpha 2}|^2) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) [ \Phi_0 - ( \Phi_{-1} + \Phi_1) / 2 ] \sin^2\theta \cos 2\varphi / 2$$

$$\rho_Q = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} (|C_{\alpha 1}|^2 - |C_{\alpha 2}|^2) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) [ \Psi_0 - ( \Psi_{-1} + \Psi_1) / 2 ] \sin^2\theta \cos 2\varphi / 2$$

$$\eta_U = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} k_{\alpha} 2\text{Re}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) [ \Phi_0 - ( \Phi_{-1} + \Phi_1) / 2 ] \sin^2\theta \sin 2\varphi / 2$$

$$\rho_U = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} 2\text{Re}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) [ \Psi_0 - ( \Psi_{-1} + \Psi_1) / 2 ] \sin^2\theta \sin 2\varphi / 2$$

$$\eta_V = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} k_{\alpha} 2\text{Im}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) \cos\theta ( \Phi_{-1} - \Phi_1 ) / 2$$

$$\rho_V = 2\pi/\lambda \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} 2\text{Im}(C_{\alpha 1} C_{\alpha 2}^*) = (Ne^2 / 4\epsilon_0 m C) \cos\theta ( \Psi_{-1} - \Psi_1 ) / 2$$

formules dans lesquelles on a introduit les **profils d'absorption  $\Phi_{\alpha}$  et de dispersion  $\Psi_{\alpha}$**  normalisés (intégrale sur la fréquence égale à 1) provenant de l'indice de réfraction complexe  $n_{\alpha} = 1 + \delta_{\alpha} + i k_{\alpha}$  pour  $\alpha = -1, 0, +1$  :

$\Phi_0 = 1/\pi (\gamma/4\pi) / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0$
$\Phi_1 = 1/\pi (\gamma/4\pi) / [(v - v_0 - v_L)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0 + v_L$ (décalé vers le bleu)
$\Phi_{-1} = 1/\pi (\gamma/4\pi) / [(v - v_0 + v_L)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0 - v_L$ (décalé vers le rouge)
et	
$\Psi_0 = -1/\pi (v - v_0) / [(v - v_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0$
$\Psi_1 = -1/\pi (v - v_0 - v_L) / [(v - v_0 - v_L)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0 + v_L$ (décalé vers le bleu)
$\Psi_{-1} = -1/\pi (v - v_0 + v_L) / [(v - v_0 + v_L)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$	centré en $v_0 - v_L$ (décalé vers le rouge)

Le coefficient multiplicatif  $(Ne^2 / 4\epsilon_0 m C)$  est égal à  $(N \sigma_{\text{tot}})$  où  $\sigma_{\text{tot}} = e^2 / (4\epsilon_0 m C)$  représente la section efficace totale d'absorption intégrée sur les fréquences (voir paragraphe II - 3).

En **mécanique quantique**, on introduit un facteur multiplicatif appelé *force d'oscillateur*  $f_{nm}$  de la transition de telle sorte que  $\sigma_{\text{tot}} = f_{nm} [e^2 / (4 \epsilon_0 m C)]$ . La force d'oscillateur est un nombre inférieur à l'unité (0.641 pour H $\alpha$ , 0.119 pour H $\beta$  par exemple).

En présence d'élargissement Doppler, on généralise ces profils d'absorption  $\Phi_{\alpha}$  et de dispersion  $\Psi_{\alpha}$  en les remplaçant par des profils de **convolution** entre une **Gaussienne** de largeur Doppler  $\Delta v_D = (v_0 / C) (v_m^2 + v_t^2)^{1/2}$ ,  $v_t$  et  $v_m$  étant respectivement les vitesses thermiques et de macroturbulence, et d'une **Lorentzienne** de largeur  $\gamma/4\pi = [\gamma_m + \gamma_n + \gamma_{\text{coll}}] / 4\pi$ , qui sont donnés par les fonctions de Harris H(a,u) et L(a,u) calculables numériquement :

$$H(a,u) = (a/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} / (a^2 + (u-y)^2) dy \quad \text{où } u = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \gamma / (4\pi \Delta v_D)$$

$$L(a,u) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} (u-y) e^{-y^2} / (a^2 + (u-y)^2) dy \quad \text{où } u = (v - v_0) / \Delta v_D \text{ et } a = \gamma / (4\pi \Delta v_D)$$

#### IV – 4 – 3 Equation de transfert du rayonnement en lumière polarisée

Une première généralisation consiste à introduire un terme source S, c'est à dire un vecteur émission de composantes ( $\eta_I S, \eta_Q S, \eta_U S, \eta_V S,$ ) de sorte que l'équation de transfert devient :

$$d/dz \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

A l'équilibre thermodynamique local (ETL), on a  $S = B_\nu = (2 h \nu^3 / C^2) / [\exp(h \nu / k T) - 1]$

Une seconde généralisation consiste à introduire, en plus de la raie pour laquelle on a établi les coefficients  $\eta_I, \eta_Q, \eta_U, \eta_V, \rho_Q, \rho_U, \rho_V$  en fonction des profils d'absorption  $\Phi_\alpha$  et de dispersion  $\Psi_\alpha$  ( $\alpha = -1, 0, +1$ ) un **continu non polarisé** de coefficient d'absorption  $k_c$ .

Introduisons la profondeur optique par  $d\tau = -\rho k_c dz$  où  $\rho$  est la masse volumique du milieu.

$$d/d\tau \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = 1/(\rho k_c) \begin{pmatrix} \eta_I & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & \eta_I & \rho_V & -\rho_U \\ \eta_U & -\rho_V & \eta_I & \rho_Q \\ \eta_V & \rho_U & -\rho_Q & \eta_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_I & n_Q & n_U & n_V \\ n_Q & n_I & r_V & -r_U \\ n_U & -r_V & n_I & r_Q \\ n_V & r_U & -r_Q & n_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

En lumière **non polarisée**, on a  $\eta_I = N \sigma_{tot} \Phi_0$  (car  $\nu_L = 0$  implique  $\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi_{-1}$ ), d'où l'on en déduit que  $n_I = \eta_I / (\rho k_c) = N \sigma_{tot} \Phi_0 / (\rho k_c) = \Phi_0 (N \sigma_{tot} / \rho) / k_c$

Par définition,  $k_r = (N \sigma_{tot} / \rho)$  coefficient d'absorption dans la raie, donc  $n_I = \eta_I / (\rho k_c) = \Phi_0 k_r / k_c$

Le coefficient d'absorption total en intensité raie + continu s'écrit  $k = k_c + k_r \Phi_0$ , on remplacera donc dans la matrice ci dessus  $n_I = \eta_I / (\rho k_c) = \Phi_0 k_r / k_c$  par  $n_I = k / k_c = \mathbf{1} + \Phi_0 k_r / k_c$  pour tenir compte d'un continu non polarisé. Les autres coefficients seront inchangés. On a finalement en posant  $n_0 = k_r / k_c = (N \sigma_{tot} / \rho) / k_c = N [f_{nm} e^2 / (4\epsilon_0 m C)] / (\rho k_c)$ , nombre sans dimension :

$$\begin{aligned} n_I &= 1 + n_0 [ \Phi_0 \sin^2\theta + (1+\cos^2\theta) (\Phi_{-1} + \Phi_1)/2 ] / 2 \\ n_Q &= n_0 [ \Phi_0 - (\Phi_{-1} + \Phi_1)/2 ] \sin^2\theta \cos 2\varphi / 2 \\ r_Q &= n_0 [ \Psi_0 - (\Psi_{-1} + \Psi_1)/2 ] \sin^2\theta \cos 2\varphi / 2 \\ n_U &= n_0 [ \Phi_0 - (\Phi_{-1} + \Phi_1)/2 ] \sin^2\theta \sin 2\varphi / 2 \\ r_U &= n_0 [ \Psi_0 - (\Psi_{-1} + \Psi_1)/2 ] \sin^2\theta \sin 2\varphi / 2 \\ n_V &= n_0 \cos\theta (\Phi_{-1} - \Phi_1) / 2 \\ r_V &= n_0 \cos\theta (\Psi_{-1} - \Psi_1) / 2 \end{aligned}$$

$$d/d\tau \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_I & n_Q & n_U & n_V \\ n_Q & n_I & r_V & -r_U \\ n_U & -r_V & n_I & r_Q \\ n_V & r_U & -r_Q & n_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

#### IV – 4 – 4 Solution de l'équation de transfert pour les champs magnétiques faibles

Pour simplifier la résolution de l'équation de transfert, on effectue un développement limité sur la variable  $\Delta\lambda_B$  des profils décalés par effet Zeeman  $\Phi_{-1}, \Phi_1, \Psi_{-1}, \Psi_1$  en fonction de  $\Phi_0$  et de  $\Psi_0$ .

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \Delta\lambda_B d\Phi_0/d\lambda + 1/2 \Delta\lambda_B^2 d^2\Phi_0/d\lambda^2 \text{ et } \Phi_{-1} = \Phi_0 - \Delta\lambda_B d\Phi_0/d\lambda + 1/2 \Delta\lambda_B^2 d^2\Phi_0/d\lambda^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (\Phi_{-1} + \Phi_1)/2 &= \Phi_0 + \frac{1}{2} \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Phi_0}{d\lambda^2} \\ \text{et } (\Phi_{-1} - \Phi_1)/2 &= -\Delta\lambda_B \frac{d\Phi_0}{d\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_0 + \Delta\lambda_B \frac{d\Psi_0}{d\lambda} + \frac{1}{2} \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Psi_0}{d\lambda^2} \text{ et } \Psi_{-1} = \Psi_0 - \Delta\lambda_B \frac{d\Psi_0}{d\lambda} + \frac{1}{2} \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Psi_0}{d\lambda^2} \\ \text{d'où } (\Psi_{-1} + \Psi_1)/2 &= \Psi_0 + \frac{1}{2} \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Psi_0}{d\lambda^2} \\ \text{et } (\Psi_{-1} - \Psi_1)/2 &= -\Delta\lambda_B \frac{d\Psi_0}{d\lambda} \end{aligned}$$

avec  $\Delta\lambda_B = [e / (4\pi m C)] \lambda^2 g^* B = 4.67 \cdot 10^{-13} \lambda^2 g^* B$  décalage Zeeman

$$\left\{ \begin{aligned} n_I &= 1 + n_0 \Phi_0 + (n_0/4) (1 + \cos^2\theta) \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Phi_0}{d\lambda^2} \\ n_Q &= n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Phi_0}{d\lambda^2}] \sin^2\theta \cos 2\varphi \\ r_Q &= n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Psi_0}{d\lambda^2}] \sin^2\theta \cos 2\varphi \\ n_U &= n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Phi_0}{d\lambda^2}] \sin^2\theta \sin 2\varphi \\ r_U &= n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \frac{d^2\Psi_0}{d\lambda^2}] \sin^2\theta \sin 2\varphi \\ n_V &= -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Phi_0}{d\lambda} \\ r_V &= -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Psi_0}{d\lambda} \end{aligned} \right.$$

*Equations de transfert au premier ordre en  $\Delta\lambda_B$  pour  $S = B_v$  fonction de Planck*

Au premier ordre, les coefficients deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} n_I &= 1 + n_0 \Phi_0 \\ n_Q &= r_Q = n_U = r_U = 0 \\ n_V &= -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Phi_0}{d\lambda} \\ r_V &= -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Psi_0}{d\lambda} \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} dI/d\tau &= n_I (I - B_v) + n_V V \\ dQ/d\tau &= n_I Q + r_V U \\ dU/d\tau &= -r_V Q + n_I U \\ dV/d\tau &= n_V (I - B_v) + n_I V \end{aligned} \right.$$

Ces equations sont decouplées en I, V et Q, U avec pour solution triviale  $U = Q = 0$

Dans la première équation, le terme  $n_V V$  (ordre  $\geq 1$  en  $\Delta\lambda_B$ ) est négligeable devant  $n_I (I - B_v)$  qui est d'ordre 0 en  $\Delta\lambda_B$ , il reste donc à résoudre :

$$\left\{ \begin{aligned} dI/d\tau &= (1 + n_0 \Phi_0) (I - B_v) \\ dV/d\tau &= -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Phi_0}{d\lambda} (I - B_v) + (1 + n_0 \Phi_0) V \end{aligned} \right.$$

Dérivons la première équation sur l'intensité I par rapport à  $\lambda$  en négligeant le terme à variation lente  $dB_v/d\lambda$  devant  $dI/d\lambda$  (qui varie vite dans la raie):

$$d/d\tau (dI/d\lambda) = n_0 \frac{d\Phi_0}{d\lambda} (I - B_v) + (1 + n_0 \Phi_0) dI/d\lambda$$

et multiplions cette équation par  $[-\cos\theta \Delta\lambda_B]$  (en supposant que  $\Delta\lambda_B$  est indépendant de  $\tau$ ) :

$$d/d\tau (-\cos\theta \Delta\lambda_B dI/d\lambda) = -n_0 \cos\theta \Delta\lambda_B \frac{d\Phi_0}{d\lambda} (I - B_v) + (1 + n_0 \Phi_0) (-\cos\theta \Delta\lambda_B dI/d\lambda)$$

En procédant par identification avec la seconde équation sur V, on en déduit sans calcul que :

$$\boxed{V(\lambda) = -\cos\theta \Delta\lambda_B dI/d\lambda}$$

$V(\lambda)$  est donc au premier ordre en  $\Delta\lambda_B$ , proportionnel à la dérivée du profil d'intensité  $I(\lambda)$  sans champ magnétique et est maximal en valeur absolue aux points d'inflexion de la raie.

*Equations de transfert au second ordre en  $\Delta\lambda_B$  pour  $S = B_v$  fonction de Planck*

Au second ordre en  $\Delta\lambda_B$ , on va pouvoir déterminer les paramètres de Stokes Q et U.

L'équation de transfert sur l'intensité I s'écrit :

$dI/d\tau = n_I (I - B_V) = (1 + n_0 \Phi_0) (I - B_V)$  car les autres termes sont négligeables (ordre  $\geq 1$  en  $\Delta\lambda_B$ )  
 Sur Q et U, les deux équations de transfert se réduisent, en se limitant au second ordre en  $\Delta\lambda_B$ , à :

$$\begin{cases} dQ/d\tau = n_I Q + n_Q (I - B_V) \\ dU/d\tau = n_I U + n_U (I - B_V) \end{cases}$$

Prenons l'équation sur Q et remplaçons les coefficients  $n_I$  et  $n_Q$  par leur expression :

$$dQ/d\tau = (1 + n_0 \Phi_0) Q + n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 d^2\Phi_0/d\lambda^2] \sin^2\theta \cos 2\varphi (I - B_V)$$

Dérivons deux fois la première équation sur l'intensité I par rapport à  $\lambda$  en négligeant le terme à variation lente  $dB_V/d\lambda$  devant  $dI/d\lambda$  (qui varie vite dans la raie):

$$d/d\tau (dI/d\lambda) = n_0 d\Phi_0/d\lambda (I - B_V) + (1 + n_0 \Phi_0) dI/d\lambda, \text{ puis}$$

$$d/d\tau (d^2I/d\lambda^2) = n_0 d^2\Phi_0/d\lambda^2 (I - B_V) + 2 n_0 d\Phi_0/d\lambda dI/d\lambda + (1 + n_0 \Phi_0) d^2I/d\lambda^2$$

et multiplions cette équation par  $[-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi]$  (en supposant  $\Delta\lambda_B$  indépendant de  $\tau$ ) :

$$d/d\tau (-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi d^2I/d\lambda^2) = n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi] d^2\Phi_0/d\lambda^2 (I - B_V) + 2 n_0 [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi] d\Phi_0/d\lambda dI/d\lambda + (1 + n_0 \Phi_0) [-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi] d^2I/d\lambda^2$$

En procédant par identification avec l'équation sur Q, on en déduit sans calcul que :

$$Q(\lambda) = -1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi d^2I/d\lambda^2$$

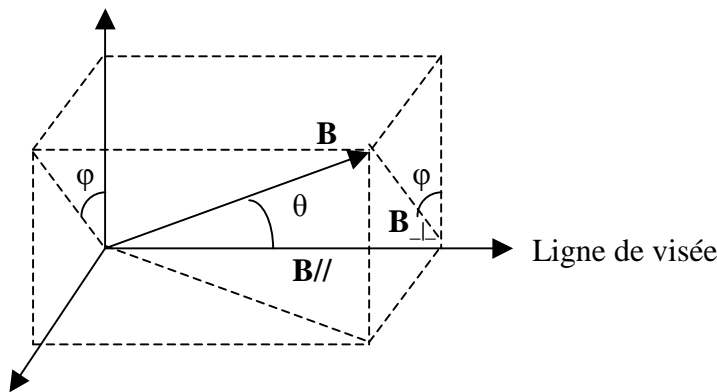
à la condition exprime que  $d\Phi_0/d\lambda dI/d\lambda = 0$ , c'est à dire **au cœur de la raie pour  $\lambda = \lambda_0$** . Un calcul identique en multipliant l'équation d'intensité par  $[-1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi]$  conduirait par identification avec l'équation sur U à  $U(\lambda) = -1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi d^2I/d\lambda^2$ , avec la même condition.

En conclusion, l'approximation au second ordre donne :

$$\begin{aligned} Q(\lambda_0) &= -1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi (d^2I/d\lambda^2)_{(\lambda=\lambda_0)} \\ U(\lambda_0) &= -1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi (d^2I/d\lambda^2)_{(\lambda=\lambda_0)} \\ (Q(\lambda_0)^2 + U(\lambda_0)^2)^{1/2} &= 1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta |d^2I/d\lambda^2|_{(\lambda=\lambda_0)} \\ U(\lambda_0)/Q(\lambda_0) &= \tan(2\varphi) \end{aligned}$$

#### IV – 5 Mesure des champs magnétiques à partir des paramètres de Stokes

Les observations spectro polarimétriques permettent de déterminer les profils de Stokes I ( $\lambda$ ), Q ( $\lambda$ ), U ( $\lambda$ ) et V ( $\lambda$ ). Comment interpréter ces observations en termes de champs magnétiques ?



Champ longitudinal

$$B_{//} = B \cos\theta$$

Champ transverse

$$B_{\perp} = B \sin\theta$$

$\varphi$  azimuth de **B**

La méthode que nous proposons s'applique uniquement aux raies photosphériques fines et se base sur l'**approximation théorique des champs faibles**. On a vu, dans cette approximation, que :

$$V(\lambda) = -\Delta\lambda_B \cos\theta dI/d\lambda = -4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda^2 dI/d\lambda$$

d'où l'on peut déduire le champ longitudinal  $B_{//} = B \cos\theta$  ; d'autre part,

$$Q(\lambda_0) = - 1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \cos(2\varphi) d^2I/d\lambda^2 = - 1/4 (4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2)^2 B_{\perp}^2 \cos(2\varphi) d^2I/d\lambda^2_{(\lambda=\lambda_0)}$$

$$U(\lambda_0) = - 1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta \sin(2\varphi) d^2I/d\lambda^2 = - 1/4 (4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2)^2 B_{\perp}^2 \sin(2\varphi) d^2I/d\lambda^2_{(\lambda=\lambda_0)}$$

On voit que  $(Q^2 + U^2)^{1/2}(\lambda_0) = 1/4 \Delta\lambda_B^2 \sin^2\theta d^2I/d\lambda^2 / 1/4 (4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2)^2 B_{\perp}^2 d^2I/d\lambda^2_{(\lambda=\lambda_0)}$   
d'où l'on peut en déduire le champ transverse  $B_{\perp} = B \sin\theta$

et  $U/Q(\lambda_0) = \tan(2\varphi)$  fournit l'azimut  $\varphi$  avec une ambiguïté de  $180^\circ$ .

Attention : B est en **Gauss** ( $1G = 10^{-4} T$ ) et  $\lambda$  en  $\text{\AA}$  dans ces formules ; d'autre part, les dérivées  $dI/d\lambda$  et  $d^2I/d\lambda^2$  sont estimées hors perturbation par le champ magnétique.

Nous supposons maintenant pour aller plus loin que le profil non perturbé par le champ magnétique peut se mettre sous la forme d'une gaussienne, ce qui est une *hypothèse très simplificatrice* :

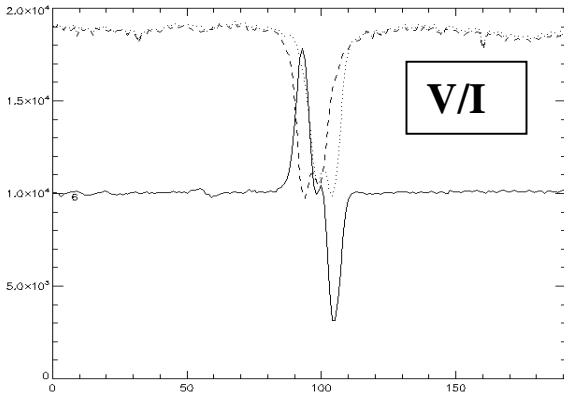
$$I(\lambda) = I_c (1 - r e^{-1/2 ((\lambda-\lambda_0)/\Delta\lambda)^2})$$

Avec r dépression centrale de la raie (nombre compris entre 0 et 1),  $I_c$  niveau du continu,  $\lambda_0$  longueur d'onde centrale de la raie, et  $2 \Delta\lambda$  **largeur de la raie aux points d'inflexion du profil**. La dérivée de  $I(\lambda)$  est maximale (ou minimale) aux points d'inflexion du profil. En ces points particuliers où  $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$ , on obtient :

$$V/I(\lambda_0 \pm \Delta\lambda) = \pm 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda_0^2 [r e^{-1/2}/((1 - r e^{-1/2})\Delta\lambda)] = \pm (\Delta\lambda_{B_{//}} / \Delta\lambda) [r e^{-1/2}/(1 - r e^{-1/2})]$$

En mesurant approximativement r (dépression centrale) et  $\Delta\lambda$  (demi largeur aux points d'inflexion) sur les profils en intensité  $I(\lambda)$  ainsi que  $V/I$  aux deux pics V (situés au **voisinage des points d'inflexion** en  $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ ), c'est à dire  $V/I(\lambda_0+\Delta\lambda)$  ou  $V/I(\lambda_0-\Delta\lambda)$ , on peut en déduire une estimation du champ longitudinal  $B_{//}$ , valeur qui peut être positive ou négative selon que la polarité est Nord ou Sud, soit sortante ou entrante.

Par exemple, si  $B_{//} = 1000 G$ ,  $\lambda = 6000 \text{\AA}$ ,  $g^* = 1$ ,  $r = 0.75$ ,  $\Delta\lambda = 50 \text{ m\AA}$ , on trouve  $V/I \approx 0.25$



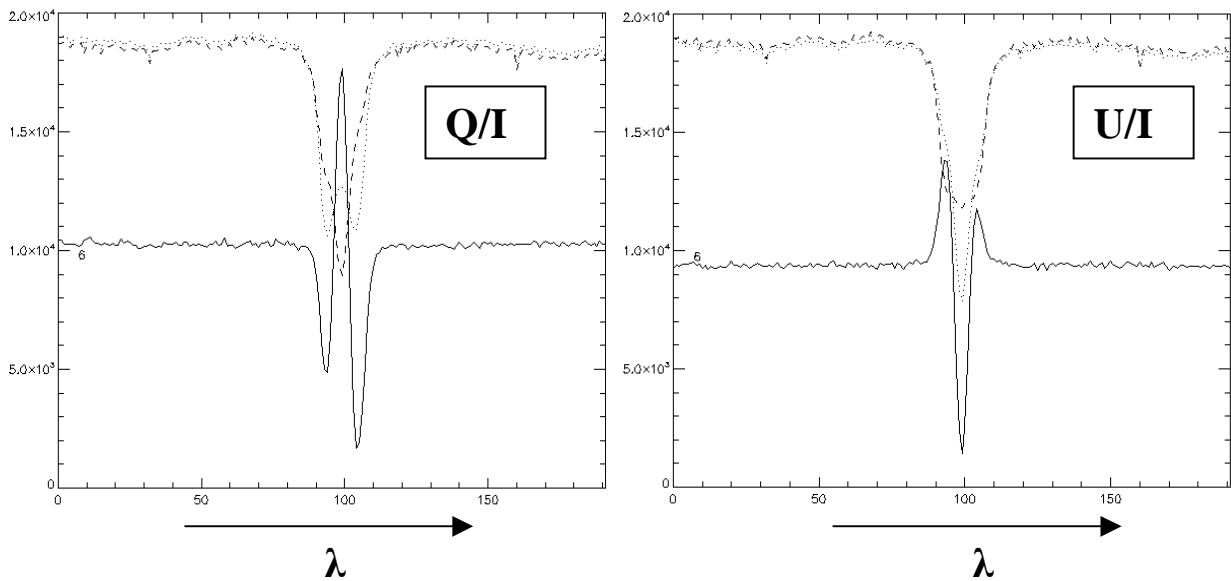
*Exemple de profils de Stokes V/I dans une région active solaire, raie FeI 6173 Å. Les profils V sont antisymétriques par rapport à la longueur d'onde centrale (composantes  $\sigma$  décalées)*

On peut employer la même méthode pour estimer le champ transverse  $B_{\perp}$ . Au centre de la raie où  $\lambda = \lambda_0$ , on obtient :

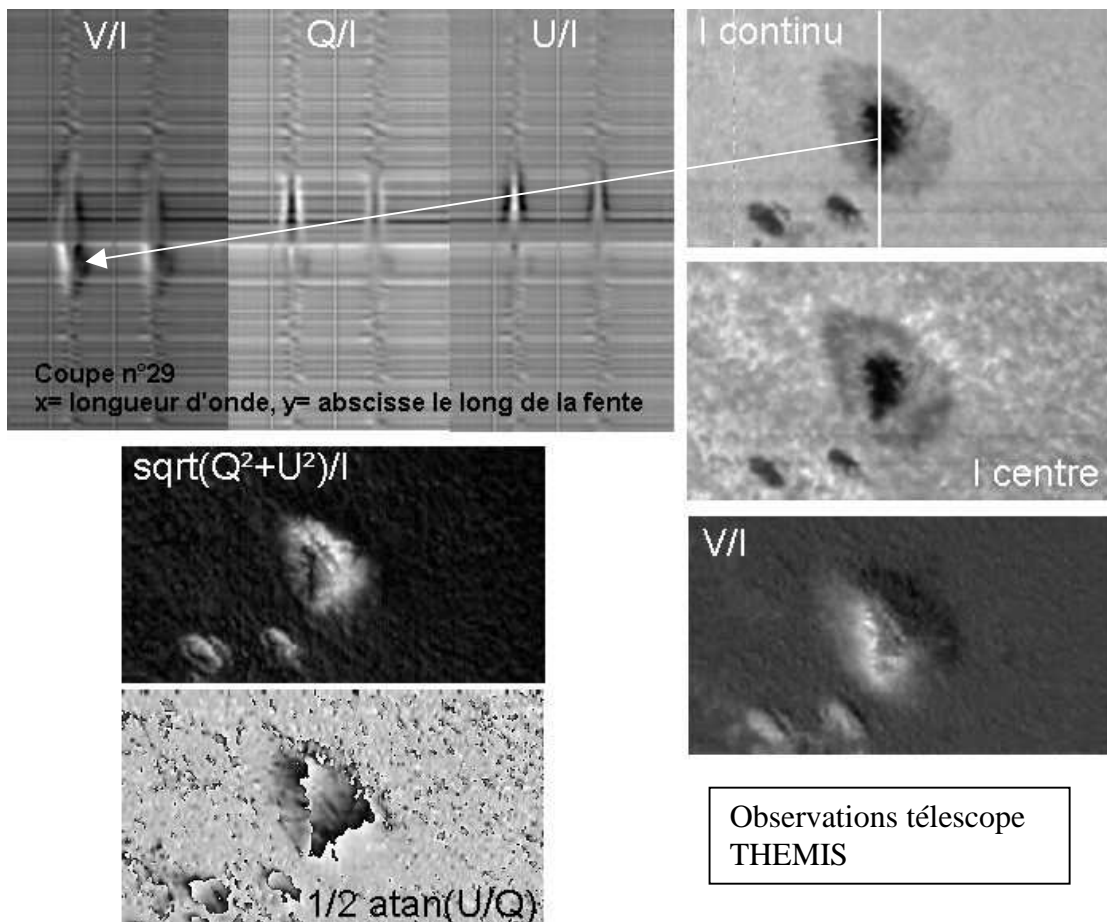
$$(Q^2 + U^2)^{1/2}/I(\lambda_0) = 1/4 (4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda_0^2)^2 B_{\perp}^2 [r / (\Delta\lambda^2(1 - r))] = 1/4 (\Delta\lambda_{B_{\perp}} / \Delta\lambda)^2 [r / (1 - r)]$$

En mesurant approximativement  $(Q^2 + U^2)^{1/2}/I$  **au centre de la raie en  $\lambda_0$** , on peut en déduire une estimation du champ transverse  $B_{\perp}$ . Son azimut sera donné par :  $\varphi = 1/2 \text{ arc tan}(U/Q)$  en  $\lambda_0$ , à  **$180^\circ$  près**.

Par exemple, si  $B_{\perp} = 1000 G$ ,  $\lambda = 6000 \text{\AA}$ ,  $g^* = 1$ ,  $r = 0.75$ ,  $\Delta\lambda = 50 \text{ m\AA}$ , on trouve  $\Delta\lambda_{B_{\perp}} = 17 \text{ m\AA}$  et  $(Q^2 + U^2)^{1/2}/I \approx 0.10$



Exemples de profils de Stokes  $Q/I$  et  $U/I$  dans une région active solaire, raie  $Fe I 6173 \text{ \AA}$  ; les profils  $Q$  et  $U$  sont **symétriques** par rapport à la longueur d'onde centrale (composante  $\pi$  centrée).



*La méthode du centre de gravité pour la mesure du champ magnétique longitudinal*

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la mesure de la composante longitudinale du champ magnétique  $B_{//} = B \cos\theta$ , il existe une alternative à la méthode décrite ci dessus qui n'est pas basée sur l'intensité des profils de Stokes  $V(\lambda)$ , mais directement sur les décalages en longueur d'onde des **quantités**

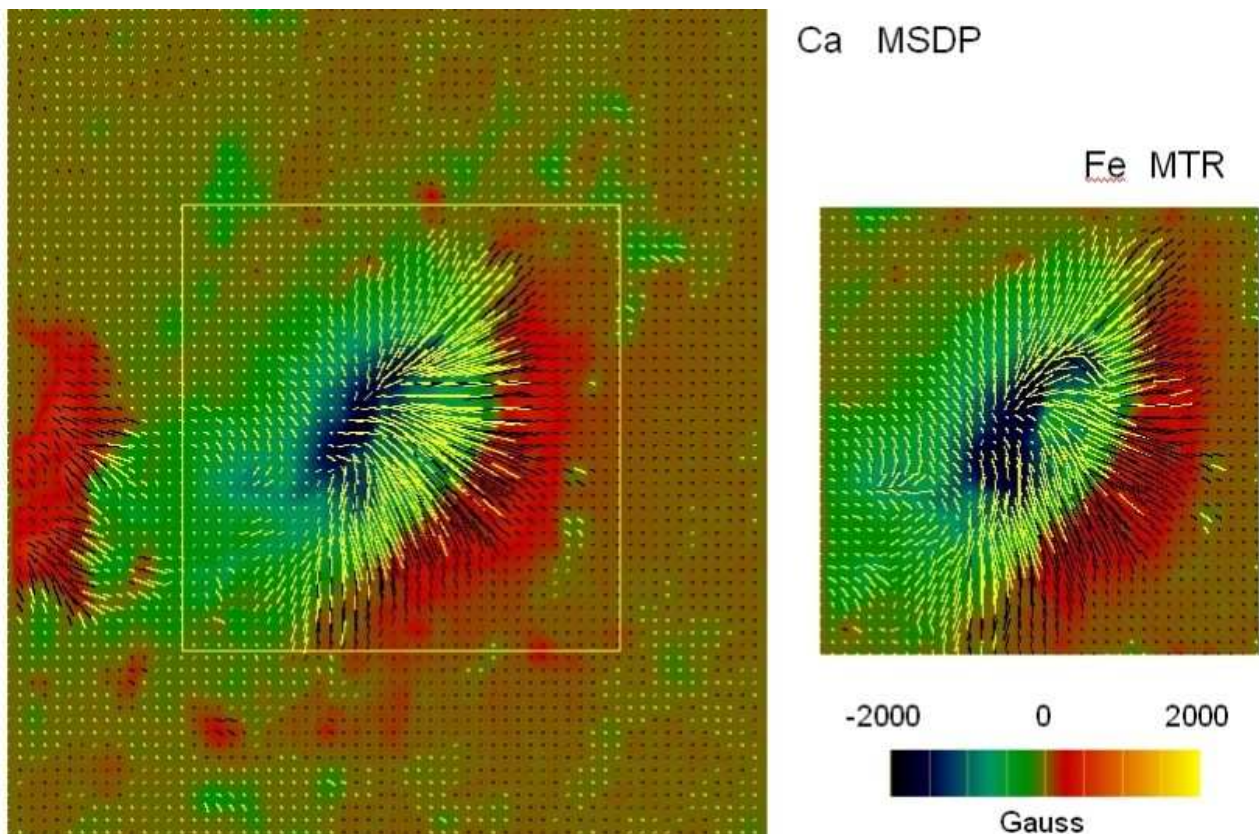


**observées** que sont les deux profils  $I+V(\lambda)$  et  $I-V(\lambda)$ . La méthode consiste à mesurer l'écartement en longueur d'onde  $2 \Delta\lambda_B = \lambda_1 - \lambda_2$  entre les deux profils  $I+V(\lambda)$  et  $I-V(\lambda)$  en mesurant l'écartement des deux composantes Zeeman, chacune pouvant être repérée en longueur d'onde par la méthode du centre de gravité:

$$\lambda_1 = \left[ \int \lambda (1 - (I+V(\lambda))/I_c) d\lambda \right] / \left[ \int (1 - (I+V(\lambda))/I_c) d\lambda \right] \text{ et}$$

$$\lambda_2 = \left[ \int \lambda (1 - (I-V(\lambda))/I_c) d\lambda \right] / \left[ \int (1 - (I-V(\lambda))/I_c) d\lambda \right]$$

où l'intégration porte sur un domaine spectral égal au double de la largeur à mi hauteur de la raie (de l'aile bleue à l'aile rouge). L'expression  $(1 - (I\pm V(\lambda))/I_c)$  est une fonction de poids qui est maximale au coeur de la raie et diminue vers les ailes. La théorie de l'effet Zeeman nous donne :  $\Delta\lambda_B = (\lambda_1 - \lambda_2)/2 = 4.67 \cdot 10^{-13} B_{\parallel} g^* \lambda^2$  d'où l'on en déduit  $B_{\parallel}$  (attention : B en Gauss et  $\lambda$  en Å dans cette formule).



*Champs magnétiques vectoriels : raies CaI 6103 Å et FeI 6302 Å ; champ longitudinal codé en couleurs auquel on a superposé des vecteurs (non orientés) représentant le champ transversal.*

#### IV – 6 Cas des champs magnétiques non résolus

Les télescopes solaires ont un pouvoir séparateur limité à une fraction de seconde d'arc ( $1'' = 725$  km). Le principal facteur limitant est la turbulence atmosphérique. Les meilleurs instruments descendent exceptionnellement à  $0.15''$  soit 100 km. En règle générale les champs magnétiques observés ne sont donc pas résolus, surtout les tubes de flux minces. Alors que mesure t-on ?

On introduit souvent un facteur de remplissage (« filling factor ») signifiant que le vecteur de Stokes observé  $\mathbf{S} = (I, Q, U, V)$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{S}_m + (1-\alpha) \mathbf{S}_{nm}$$

Où  $\mathbf{S}_m = (I_m, Q_m, U_m, V_m)$  est le vecteur de Stokes des structures magnétiques et  $\mathbf{S}_{nm} = (I_{nm}, 0, 0, 0)$  est le vecteur de Stokes des structures non magnétiques. On suppose donc que seule une fraction  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ) de la surface est couverte par des champs magnétiques, seul le vecteur  $\alpha \mathbf{S}_m$  pouvant donner naissance à un signal polarimétrique. On observera donc :

$$V(\lambda) = - 4.67 \cdot 10^{-13} B_{//} g^* \lambda^2 \alpha dI_m/d\lambda$$

En faisant l'hypothèse qu'il existe un facteur  $\beta$  (voisin de 1) tel que  $I_m = \beta I_{nm}$ , on pourra en tirer un champ magnétique apparent  $\mathbf{B}_{//app} = \alpha \beta \mathbf{B}_{//}$

En particulier on constate qu'on ne mesure pas  $B_{//}$ , mais le produit  $\alpha B_{//}$  qui est le **flux magnétique** puisque  $\alpha$  est proportionnel à une surface.

$$\text{Pour } Q, \text{ on observera : } Q(\lambda_0) = - 1/4 (4.67 \cdot 10^{-13} g^* \lambda^2)^2 B_{\perp}^2 \cos(2\varphi) \alpha d^2I_m/d\lambda^2_{(\lambda=\lambda_0)},$$

et de même pour  $U$ , dont on pourra tirer un champ magnétique apparent tel que  $B_{\perp app}^2 = \alpha \beta B_{\perp}^2$ , soit finalement  $\mathbf{B}_{\perp app} = (\alpha \beta)^{1/2} \mathbf{B}_{\perp}$

#### IV – 7 Quelques solutions de l'équation de transfert polarisé

Cette section a pour but la résolution de l'équation de transfert polarisée, sans faire d'hypothèse contraignante sur les champs magnétiques (contrairement à ce que nous avons fait précédemment).

##### IV – 7 – 1 Solution d'Unno Rachkovsky pour une atmosphère de type Milne eddington

On se place dans le cadre simple d'une atmosphère du type Milne Eddington ou la fonction de Planck  $B_\nu$  est une fonction linéaire de la profondeur optique  $\tau$  :  $B_\nu = B_0 + B_1 \tau$ .

L'équation de transfert s'écrit sous forme matricielle :

$$d\mathbf{S}/d\tau = \mathbf{M} (\mathbf{S} - B_\nu \mathbf{U})$$

avec  $\mathbf{S} = (I, Q, U, V)$  vecteur de Stokes,  $\mathbf{U}$  vecteur unitaire (1, 0, 0, 0), et  $\mathbf{M}$  matrice de transfert :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n_I & n_Q & n_U & n_V \\ n_Q & n_I & r_V & -r_U \\ n_U & -r_V & n_I & r_Q \\ n_V & r_U & -r_Q & n_I \end{pmatrix}$$

On fait l'hypothèse que la matrice  $\mathbf{M}$  est indépendante de la profondeur optique  $\tau$ , c'est à dire que le champ magnétique ne dépend pas de  $\tau$  (son module intervient dans les profils  $\Phi_1, \Phi_{-1}, \Psi_1, \Psi_{-1}$ , son orientation dans les angles  $\theta$  et  $\varphi$ ), et que le rapport  $n_0 = k_r / k_c = (N \sigma_{tot} / \rho) / k_c$  qui intervient dans chaque coefficient  $n$  en dépend pas non plus.

Avec  $B_\nu = B_0 + B_1 \tau$ , on recherche une solution de l'équation de transfert sous la forme  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau$  d'où  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{M} (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau - B_0 \mathbf{U} - B_1 \tau \mathbf{U})$

En égalisant selon les puissances 0 et 1 de  $\tau$ , on en déduit les 2 relations suivantes:

$$\mathbf{S}_1 = B_1 \mathbf{U}$$

et

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{M} (\mathbf{S}_0 - B_0 \mathbf{U}), \text{ que l'on inverse pour obtenir } \mathbf{S}_0: \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0 - B_0 \mathbf{U}, \text{ d'où } \mathbf{S}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_1 + B_0 \mathbf{U}$$

La solution d'Unno Rachkovsky est donc, avec  $\mathbf{I}_d$  matrice identité 4 x 4:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau = (B_1 \mathbf{M}^{-1} + B_0 \mathbf{I}_d + B_1 \tau \mathbf{I}_d) \mathbf{U}}$$

Le vecteur de Stokes émergent est obtenu pour  $\tau = 0$ , c'est  
Tous calculs faits, on obtient pour  $\mathbf{S}_0 = (I_0, Q_0, U_0, V_0)$  :

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{B}_1 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{B}_0 \mathbf{U}$$

$$\begin{cases} I_0 = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 [n_I (n_I^2 + r_Q^2 + r_U^2 + r_V^2)] / \Delta \\ Q_0 = -\mathbf{B}_1 [n_I^2 n_Q + n_I (n_V r_U - n_U r_V) + r_Q p] / \Delta \\ U_0 = -\mathbf{B}_1 [n_I^2 n_U + n_I (n_Q r_V - n_V r_Q) + r_U p] / \Delta \\ V_0 = -\mathbf{B}_1 [n_I^2 n_V + n_I (n_U r_Q - n_Q r_U) + r_V p] / \Delta \\ \text{avec } p = (n_Q r_Q + n_U r_U + n_V r_V) \text{ et } \Delta = n_I^2 (n_I^2 - n_Q^2 - n_U^2 - n_V^2 + r_Q^2 + r_U^2 + r_V^2) - p^2 \end{cases}$$

Cette solution fournit les profils de Stokes en fonction de  $B$  (fréquence de Larmor),  $\theta$ ,  $\varphi$  (orientation du champ),  $\Delta\lambda_D$  (largeur Doppler),  $\gamma$  (durée de vie des niveaux, élargissement par collisions),  $n_0 = k_r / k_c$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_1$ . Une grille de solutions analytiques est souvent utilisée pour en déduire par une méthode de moindres carrés les paramètres qui minimisent sur un intervalle spectral  $[\lambda_1, \lambda_2]$  la quantité :

$$\chi^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [(I_{\text{obs}} - I_0)^2 + (Q_{\text{obs}} - Q_0)^2 + (U_{\text{obs}} - U_0)^2 + (V_{\text{obs}} - V_0)^2] d\lambda$$

où  $\mathbf{S}_{\text{obs}} = (I_{\text{obs}}, Q_{\text{obs}}, U_{\text{obs}}, V_{\text{obs}})$  et  $\mathbf{S}_0 = (I_0, Q_0, U_0, V_0)$  sont les profils observés et calculés.

#### IV – 7 – 2 Solution pour une atmosphère plus complexe avec chromosphère

Lorsque l'on veut par exemple simuler une chromosphère avec remontée en température, on peut choisir une fonction plus complexe pour la variation de la fonction de Planck en fonction de la profondeur optique :  $B_v = B_0 + B_1 \tau + B_2 e^{-\alpha\tau}$  ( $\alpha$  constante positive).

On recherche une solution de l'équation de transfert  $d\mathbf{S}/d\tau = \mathbf{M} (\mathbf{S} - B_v \mathbf{U})$

sous la forme  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau + \mathbf{S}_2 e^{-\alpha\tau}$

d'où  $\mathbf{S}_1 - \alpha \mathbf{S}_2 e^{-\alpha\tau} = \mathbf{M} (\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau + \mathbf{S}_2 e^{-\alpha\tau} - B_0 \mathbf{U} - B_1 \tau \mathbf{U} - B_2 e^{-\alpha\tau} \mathbf{U})$

En égalisant selon les puissances 0 et 1 de  $\tau$ , et selon  $e^{-\alpha\tau}$ , on en déduit les 3 relations :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = \mathbf{M} (\mathbf{S}_0 - B_0 \mathbf{U}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{M} (\mathbf{S}_1 - B_1 \mathbf{U}) \\ -\alpha \mathbf{S}_2 = \mathbf{M} (\mathbf{S}_2 - B_2 \mathbf{U}) \end{cases}$$

d'où l'on tire des deux premières  $\mathbf{S}_1 = B_1 \mathbf{U}$  puis  $\mathbf{S}_0 = B_0 \mathbf{U} + \mathbf{B}_1 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}$

La troisième s'écrit  $(\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M}) \mathbf{S}_2 = B_2 \mathbf{M} \mathbf{U}$  où  $\mathbf{I}_d$  est la matrice identité. On en déduit :

$$\mathbf{S}_2 = B_2 (\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{U}$$

Qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$\mathbf{S}_2 = B_2 (\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{I}_d - \alpha \mathbf{I}_d) \mathbf{U} = B_2 (\mathbf{I}_d - \alpha (\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M})^{-1}) \mathbf{U}$$

La solution générale est donc:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 \tau + \mathbf{S}_2 e^{-\alpha\tau} = [ B_0 \mathbf{I}_d + \mathbf{B}_1 \mathbf{M}^{-1} + B_1 \tau \mathbf{I}_d + B_2 e^{-\alpha\tau} (\mathbf{I}_d - \alpha (\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M})^{-1}) ] \mathbf{U}$$

Le vecteur de Stokes émergent est obtenu pour  $\tau = 0$ , soit

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_2 = [ B_0 \mathbf{I}_d + \mathbf{B}_1 \mathbf{M}^{-1} + B_2 (\mathbf{I}_d - \alpha (\alpha \mathbf{I}_d + \mathbf{M})^{-1}) ] \mathbf{U}$$

#### IV – 8 Polarisation par diffusion résonante, effet Hanle et champs magnétiques

Parmi les processus de diffusion, dont les plus connus sont la diffusion de la lumière par les électrons libres (diffusion Thomson) ou par les molécules (diffusion Rayleigh), le phénomène de

diffusion résonante dans les raies spectrales se produit lorsque l'atome excité retombe immédiatement de façon cohérente vers le niveau de départ. On a constaté que beaucoup de raies de diffusion, lorsqu'elles sont observées au voisinage immédiat du limbe solaire, mais sur le disque (typiquement  $0 < \mu < 0.2$ ), présentent une polarisation linéaire (Q/I) faible (par rapport à l'effet Zeeman) comprise entre  $10^{-5}$  et  $10^{-2}$ . C'est ce qu'on appelle le « second spectre » solaire par opposition au spectre classique en intensité. C'est la **polarisation de résonance**. Les raies les plus polarisées sont CaI 4227 Å, SrI 4607 Å, SrII 4078 Å, BaII 4554 Å. Au dessus du limbe, dans les protubérances, les raies chromosphériques sont également polarisées. Dans le cas de la polarisation de résonance, on attribue la polarisation à l'**éclairage anisotrope** des atomes dans l'atmosphère, en particulier l'assombrissement centre bord qui est lié à un gradient de température négatif dans la photosphère. L'anisotropie de rayonnement dans les protubérances est différent parce qu'elles sont situées au dessus du bord solaire, dans la couronne : elles reçoivent donc un éclairage conique, l'axe du cône étant orthogonal à la ligne de visée.

#### IV – 8 – 1 Polarisation du continu

Il s'agit de la diffusion Thomson par les électrons libres et de la diffusion Rayleigh par les électrons liés aux atomes ou molécules.

Reprenons le modèle de l'oscillateur harmonique introduit en II 3, qui décrit un électron lié à l'atome par la force  $-k x$  avec un amortissement  $-m \gamma dx/dt$  et soumis à une force  $-e E e^{i\omega t}$  qui représente l'onde lumineuse de pulsation  $\omega$ .

Son mouvement est  $x = X e^{i\omega t}$  avec  $X = (-e/m) E / (\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega)$ .

On a vu que le coefficient d'amortissement  $\gamma$  s'obtient en égalisant la puissance moyenne dissipée par la force de frottement :

$$\langle P_f \rangle = m\gamma \langle (dx/dt)^2 \rangle = \frac{1}{2} m\gamma (dx/dt) (dx/dt)^* = \frac{1}{2} m\gamma |X|^2 \omega^2$$

à la puissance moyenne rayonnée par l'électron :

$$\langle P_{ray} \rangle = (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 \langle (d^2x/dt^2)^2 \rangle / C^3 = \frac{1}{2} (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 (d^2x/dt^2)(d^2x/dt^2)^* = \frac{1}{2} (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 |X|^2 \omega^4 / C^3$$

L'égalité  $\langle P_f \rangle = \langle P_{ray} \rangle$  fournit  $\gamma = (1/4\pi\epsilon_0) (2/3) e^2 \omega^2 / (m C^3)$  ; l'amortissement dépend de la fréquence.

La section efficace  $\sigma$  (en  $m^2$ ) d'interaction est définie comme le rapport de la puissance dissipée  $\langle P_f \rangle$  à la densité de puissance électromagnétique incidente par unité de surface, elle même égale au produit  $C \epsilon_0 E^2/2$  (en  $W/m^2$ ) :

$$\sigma(\nu) = \langle P_f \rangle / (C \epsilon_0 E^2/2) = [ e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4) ] \nu^2 / [(\nu_0^2/\nu - \nu)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$$

formule légèrement différente de celle trouvée en II 3 où nous nous étions placés au voisinage de la fréquence de résonance  $\nu_0$ .

##### *Diffusion Thomson*

Les électrons étant libres, on traite ce cas en faisant  $\nu_0 = 0$  et  $\gamma = 0$  (pas de liaison)

Il vient immédiatement  $\sigma_{th} = e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4)$  , valeur indépendante de la fréquence

##### *Diffusion Rayleigh*

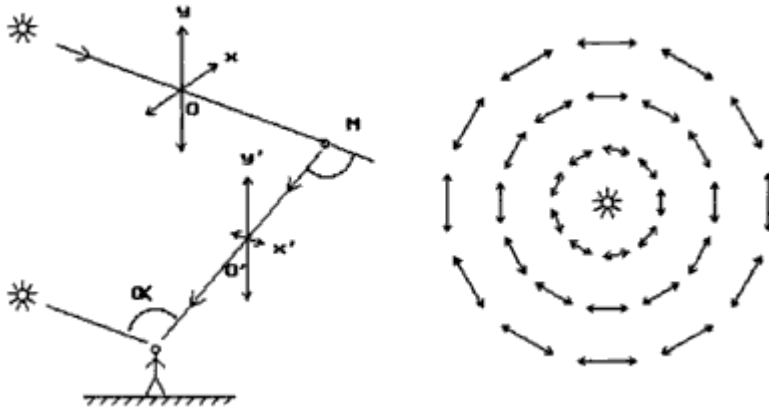
Les électrons étant liés, on traite ce cas en faisant  $\gamma = 0$  (pas d'amortissement)

Dans ce cas, on obtient  $\sigma(\nu) = [ e^4 / (6\pi\epsilon_0^2 m^2 C^4) ] \nu^4 / [(\nu_0^2 - \nu^2)^2] = \sigma_{th} \nu^4 / [(\nu_0^2 - \nu^2)^2]$

Si l'on se situe dans le cas où  $\nu \ll \nu_0$  , ou  $\lambda \gg \lambda_0$ , alors  $\sigma(\nu) = \sigma_{th} \nu^4 / \nu_0^4 = \sigma_{th} \lambda_0^4 / \lambda^4$ . Dans le cas où les atomes cibles sont constitués d'Hydrogène, on prend  $\lambda_0 = 1026 \text{ \AA}$  qui est le centre de gravité

de la série de Lyman (de 912 à 1216 Å). Cette relation explique le bleu du ciel dans l'atmosphère terrestre.

### Distribution angulaire de la polarisation



La lumière de l'étoile est non polarisée dans le plan (xOy) orthogonal à la direction de propagation.  
Si  $\alpha = \pi/2$ , la lumière diffusée est polarisée selon Oy'.  
La figure de droite représente la direction de polarisation de la lumière diffusée par la source.

La répartition angulaire de la polarisation en fonction de  $\alpha$  (ou de l'angle héliocentrique  $\theta$  si on s'intéresse au soleil) est donnée par la loi :

$$P(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \text{ où } \mu = \cos\theta$$

qui se démontre facilement : en effet, la lumière incidente non polarisée est telle que  $\langle E_x E_x^* \rangle = \langle E_y E_y^* \rangle = I/2$ , et  $\langle E_x E_y^* \rangle = \langle E_x^* E_y \rangle = 0$ , donc  $Q = U = V = 0$ . La lumière diffusée a pour composantes  $E'_x = E_x \cos\theta$  et  $E'_y = E_y$ . Ses paramètres de Stokes sont donnés par :

$$I' = \langle E'_x E'_x^* \rangle + \langle E'_y E'_y^* \rangle = \langle E_x E_x^* \rangle \cos^2\theta + \langle E_y E_y^* \rangle = I (1 + \cos^2\theta)/2$$

$$Q' = \langle E'_x E'_x^* \rangle - \langle E'_y E'_y^* \rangle = \langle E_x E_x^* \rangle \cos^2\theta - \langle E_y E_y^* \rangle = I (\cos^2\theta - 1)/2$$

D'où le rapport  $Q'/I' = -P(\theta)$  et toujours  $U' = V' = 0$

Ce facteur  $P(\theta)$  est multiplicatif des sections efficaces déterminées ci dessus.

### IV – 8 – 2 Polarisation des raies

La polarisation des raies dépend théoriquement d'un facteur  $W_2$  de mécanique quantique, compris entre 0 (raie non polarisable) et 1 : si J est le moment cinétique total du niveau bas, on a :

pour une diffusion  $\Delta J = -1, J \rightarrow J-1, W_2 = (J-1)(2J-3)/(10J(2J+1))$   
 pour une diffusion  $\Delta J = 0, J \rightarrow J, W_2 = (2J-1)(2J+3)/(10J(J+1))$   
 pour une diffusion  $\Delta J = +1, J \rightarrow J+1, W_2 = (J+2)(2J+5)/(10(J+1)(2J+1))$

On constate que pour une transition  $\Delta J = 0$  avec  $J=1/2$  que  $W_2 = 0$ , c'est à dire que la raie de diffusion n'est pas polarisable. C'est le cas de la raie NaD1 pour  $J : 1/2 \rightarrow 1/2 \rightarrow 1/2$

### IV – 8 – 3 Dépolarisation par collisions

L'effet des collisions, ainsi que nous l'avons décrit dans la théorie de Weisskopf, est d'introduire un déphasage  $\Delta\omega$ . Il est aisé de comprendre que si l'on part d'une polarisation linéaire, une collision avec un projectile se déplaçant le long de l'axe Ox va introduire un déphasage sur la composante  $E_x$  du champ électrique décrivant l'onde, et rien sur  $E_y$ . La polarisation devient alors elliptique. En moyennant sur toutes les valeurs possibles du déphasage, il en résulte une dépolarisation.

Nous avons montré que le facteur d'amortissement collisionnel (qui représente aussi la fréquence des collisions)  $\gamma_{coll} = 2/\tau$  (où  $\tau$  est la durée moyenne entre deux collisions) peut se mettre sous la forme :

$$\gamma_{\text{coll}} = a N T^b (1+m_H/m)^b$$

Où a et b sont des constantes, et n la densité des perturbateurs.

Il existe une densité critique  $n_c$  pour laquelle la durée moyenne entre deux collisions  $\tau$  est égale à la durée de vie du niveau excité  $1/\gamma = 1/A$  ( $\gamma = A$  coefficient d'Einstein en  $s^{-1}$ ).

Si  $1/\tau \gg \gamma$ , ou  $\gamma_{\text{coll}} \gg \gamma$ , le rôle des collisions est important, tandis que

Si  $1/\tau \ll \gamma$ , ou  $\gamma_{\text{coll}} \ll \gamma$ , le rôle des collisions est négligeable

$$n_c = (A/a) T^{-b} (1+m_H/m)^{-b}$$

Le facteur de dépolarisation dû aux collisions peut se mettre sous la forme :

$$k_c = \gamma / (\gamma + \gamma_{\text{coll}}) = 1 / (1 + \gamma_{\text{coll}}/\gamma)$$

Avec les valeurs typiques  $\gamma = A = 10^{-8} s^{-1}$ ,  $a = 10^{-15}$  et  $b = 0.35$ , on trouve  $n_c \approx 10^{23} T^{-0.35} m^{-3}$ , ce qui donne dans l'atmosphère solaire avec  $T = 6400 K$ ,  $n_c \approx 5 \cdot 10^{21} m^{-3}$

La photosphère solaire avec une variation de  $n_H$  de 0 à 500 km de  $2 \cdot 10^{23} m^{-3}$  à  $2 \cdot 10^{21} m^{-3}$  est donc dominée par les collisions ; ce n'est plus le cas de la chromosphère au dessus.

Variation de  $\gamma_{\text{coll}} / \gamma$  de 0 → 500 km → 2000 km :  $\gamma_{\text{coll}} / \gamma = 40 \rightarrow 0.3 \rightarrow 10^{-4}$

$k_c = 1 / (1 + \gamma_{\text{coll}}/\gamma)$  varie dans ce cas de **0.025 à 0.7 dans la photosphère**, montrant ainsi l'importance de la dépolarisation collisionnelle. Dans la chromosphère, la dépolarisation collisionnelle est rapidement proche de 1.

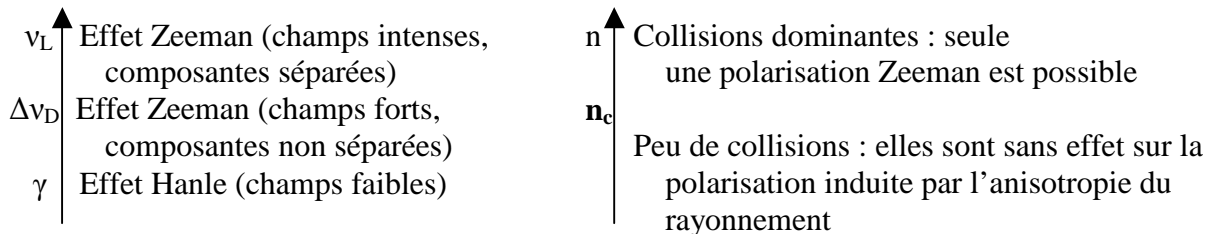
#### IV – 8 – 4 Effet Hanle

L'effet d'un champ magnétique sur la polarisation des raies de diffusion se caractérise par une dépolarisation des raies et une rotation du plan de polarisation : c'est l'effet Hanle. Celui ci n'intervient que pour les champs magnétiques faibles, résolus ou non (car la dépolarisation Hanle dépend du module du champ), lorsque la fréquence de Larmor  $\nu_L = e B / (4\pi m)$  est comparable à l'inverse de la durée de vie des niveaux  $\gamma$  (ou A). L'effet Zeeman, quant à lui, concerne plutôt les champs forts résolus (il dépend de la projection du champ), lorsque la fréquence de Larmor  $\nu_L = e B / (4\pi m_e)$  est comparable à la largeur Doppler de la raie  $\Delta\nu_D = (v_0 / C) (2 k T / m)^{1/2}$ .

Considérons les valeurs typiques solaires :  $T = 6000 K$ , atomes de Fer de masse m atomique 56. On trouve pour  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  :  $\Delta\nu_D \approx 3 \cdot 10^9 s^{-1}$  à comparer avec  $\gamma \approx 5 \cdot 10^7 s^{-1}$ . Un bon ordre de grandeur est donc  $\Delta\nu_D / \gamma \approx 100$ .

Pour  $\Delta\nu_D = \nu_L$ , on en déduit  $B \approx 0.2 T$  ou 2000 Gauss, champ fort typique des taches.

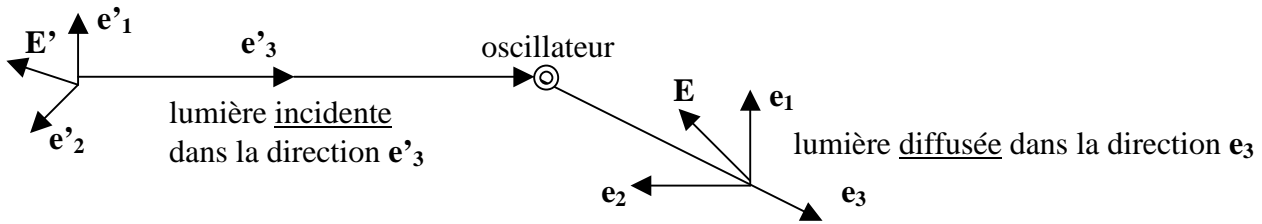
Pour  $\gamma = \nu_L$ , on en déduit  $B \approx 0.002 T$  ou 20 Gauss, champ faible typique du soleil calme.



#### IV – 8 – 5 Diffusion de la lumière et effet Hanle

Nous nous proposons dans deux géométries différentes de calculer le facteur de dépolarisation Hanle ainsi que l'angle de rotation de la direction de polarisation.

Nous allons baser notre démonstration sur une théorie simplifiée basée sur l'oscillateur harmonique en mécanique classique. Considérons un électron de position  $\mathbf{r}$  soumis à une force de rappel  $-k \mathbf{r}$ , à un amortissement  $-m \gamma d\mathbf{r}/dt$  et plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . L'équation du mouvement est :  $m d^2\mathbf{r}/dt^2 = -m \gamma d\mathbf{r}/dt - k \mathbf{r} - e d\mathbf{r}/dt \wedge \mathbf{B}$  dans le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  défini ci dessous.



Le repère  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  est lié au faisceau incident, le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est lié au faisceau diffusé. On définit un vecteur  $\mathbf{u}_0$  dans la direction du champ magnétique de sorte que  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_0$ , et deux vecteur  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  définissant avec  $\mathbf{u}_0$  un trièdre direct, tels que  $\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_0$ .

On introduit également deux vecteurs (avec  $i$  nombre complexe imaginaire):

$$\mathbf{u}_+ = (\mathbf{u}_x + i \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}_- = (\mathbf{u}_x - i \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$$

Ces vecteurs ont pour propriétés:  $\mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_+ = 1$ ,  $\mathbf{u}_-^* \cdot \mathbf{u}_- = 1$  (normés),  $\mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_- = \mathbf{u}_+^* \cdot \mathbf{u}_0 = 0$  (orthogonaux)

Appelons  $\mathbf{u}_\alpha$  avec  $\alpha = -1, 0, 1$ , respectivement les vecteurs  $\mathbf{u}_-$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_+$

On remarque que  $\mathbf{u}_\alpha \wedge \mathbf{u}_0 = i \alpha \mathbf{u}_\alpha$  avec  $\alpha = -1$  (pour  $\mathbf{u}_-$ ),  $\alpha = 0$  (pour  $\mathbf{u}_0$ ),  $\alpha = +1$  (pour  $\mathbf{u}_+$ )

On développe ensuite le vecteur  $\mathbf{r}$  sur la base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  en posant  $\mathbf{r} = \sum x_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ ,

de sorte que  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{u}_0 = \sum x_\alpha i \alpha \mathbf{u}_\alpha$

Dans cette base, l'équation du mouvement devient avec  $\omega_0^2 = k/m$  et  $\nu_L$  fréquence de Larmor:

$$d^2x_\alpha/dt^2 = -\gamma dx_\alpha/dt - \omega_0^2 x_\alpha - 4\pi i \alpha \nu_L dx_\alpha/dt$$

On recherche une solution de cette équation de la forme  $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha \exp(-2i\pi\nu_\alpha t)$ , ce qui donne

$$-4\pi^2 \nu_\alpha^2 = \gamma 2 i \pi \nu_\alpha - \omega_0^2 - 8\pi^2 \alpha \nu_L \nu_\alpha \text{ et avec } \omega_0 = 2 \pi \nu_0,$$

$$\nu_\alpha^2 - \nu_0^2 = (2 \alpha \nu_L - i \gamma/2\pi) \nu_\alpha$$

On en tire une équation plus simple pour  $\nu_\alpha$  en faisant l'hypothèse que  $|\nu_\alpha - \nu_0| \ll \nu_0$ :

$$\nu_\alpha = \nu_0 + \alpha \nu_L - i \gamma/4\pi \text{ pour } \alpha = -1, 0, +1$$

$$\text{et le déplacement } x_\alpha = A_\alpha \exp[-2i\pi(\nu_0 + \alpha \nu_L)t] e^{-\gamma t/2} \text{ pour } \alpha = -1, 0, +1$$

Le déplacement de l'électron ainsi obtenu permet de définir son moment dipolaire :

$$\mathbf{P} = -e \mathbf{r} = -e \sum x_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum P_i \mathbf{e}_i$$

Dont les composantes dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  sont  $P_i = -e \sum x_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i$  pour  $i = 1, 2, 3$

Introduisons les cosinus directeurs de  $\mathbf{u}_\alpha$  sur  $\mathbf{e}_i$  :  $C_{\alpha i} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i$  pour  $\alpha = -1, 0, +1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , on déduit :

$$P_i = -e \sum A_\alpha C_{\alpha i} \exp[-2i\pi(\nu_0 + \alpha \nu_L)t] e^{-\gamma t/2}$$

Le moment dipolaire de l'électron permet maintenant de calculer son rayonnement, sous la forme du champ électrique  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  défini à grande distance  $d$  par :

$$E_i = d^2P_i/dt^2 / (4\pi\epsilon_0 d C^2), \text{ pour } i = 1, 2 \text{ (voir la théorie des potentiels retardés)}$$

dont on déduira des valeurs moyennes les caractéristiques des paramètres de Stokes I, Q, U, V :

$$I = \langle E_1 E_1^* \rangle + \langle E_2 E_2^* \rangle$$

$$Q = \langle E_1 E_1^* \rangle - \langle E_2 E_2^* \rangle$$

$$U = \langle E_1^* E_2 \rangle + \langle E_1 E_2^* \rangle$$

$$V = i [\langle E_1^* E_2 \rangle - \langle E_1 E_2^* \rangle]$$

Par dérivation de  $P_i$ , on obtient  $d^2 P_i / dt^2 = -e \sum A_\alpha C_{\alpha i} [2i\pi(v_0 + \alpha v_L) + \gamma/2]^2 \exp[-2i\pi(v_0 + \alpha v_L)t] e^{-\gamma t/2}$  qui au voisinage de la résonance vaut  $d^2 P_i / dt^2 \approx -e [2i\pi v_0 + \gamma/2]^2 \sum A_\alpha C_{\alpha i} \exp[-2i\pi(v_0 + \alpha v_L)t] e^{-\gamma t/2}$  d'où l'on déduit :

$$E_i = [-e / (4\pi\epsilon_0 d C^2)] [2i\pi v_0 + \gamma/2]^2 \sum A_\alpha C_{\alpha i} \exp[-2i\pi(v_0 + \alpha v_L)t] e^{-\gamma t/2}$$

On peut ainsi écrire les produits moyennés sur la durée T (avec double somme sur  $\alpha, \beta$  prenant tous deux les valeurs  $-1, 0, 1$ ) :

$$\langle E_i^* E_j \rangle = [e^2 / (4\pi\epsilon_0 d C^2)^2] [4\pi^2 v_0^2 + \gamma^2/4]^2 \sum_\alpha \sum_\beta A_\alpha^* C_{\alpha i}^* A_\beta C_{\beta j} \int_0^T \exp\{2i\pi [(\alpha-\beta) v_L + i\gamma/2\pi]t\} dt$$

L'intégrale sur le temps, lorsque T est grand, converge vers  $\gamma^{-1} [1 - 2i\pi v_L (\alpha-\beta)/\gamma]^{-1}$ , on constate donc qu'elle dépend d'un facteur  $H = 2\pi v_L / \gamma$  ; avec cette définition de H, on obtient :

$$\langle E_i^* E_j \rangle = [e^2 / (4\pi\epsilon_0 d C^2)^2] [4\pi^2 v_0^2 + \gamma^2/4]^2 / \gamma \sum_\alpha \sum_\beta A_\alpha^* C_{\alpha i}^* A_\beta C_{\beta j} / [1 - i (\alpha-\beta)H]$$

(pour  $i = 1, 2$  et double somme sur  $\alpha, \beta = -1, 0, 1$ )

On a maintenant besoin d'évaluer  $A_\alpha^* A_\beta$ ,  $A_\alpha$  étant les amplitudes des oscillations du dipôle sur la base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$  ; pour ce faire, on suppose que :

$A_\alpha^* A_\beta = k E'_\alpha E'_\beta$  où  $E'_\alpha$  est la composante du champ électrique incident  $\mathbf{E}'$  dans la base  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$ , k étant une constante .

Introduisons les cosinus directeurs de  $\mathbf{u}_\alpha$  sur  $\mathbf{e}'_i$  :  $C'_{\alpha i} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_i$  pour  $\alpha = -1, 0, +1, i = 1, 2, 3$

On a  $\mathbf{E}' = \sum E'_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \sum E'_i \mathbf{e}'_i$  d'où  $E'_\alpha = \sum E'_i \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_i = \sum E'_i C'_{\alpha i}$   
 $E'_i$  étant les composantes du champ incident  $\mathbf{E}'$  dans la base  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  du faisceau incident.

$$\text{On en déduit } A_\alpha^* A_\beta = k \sum_i \sum_j E'_i{}^* C'_{\alpha i} E'_j C'_{\beta j}$$

pour  $\alpha, \beta = -1, 0, 1$  et double somme sur  $i, j = 1, 2$

Cette formule permet donc de relier  $A_\alpha^* A_\beta$  aux paramètres de Stokes de la **lumière incidente** supposée non polarisée de paramètres de Stokes  $(I', 0, 0, 0)$

$$I' = \langle E'_1 E'_1{}^* \rangle + \langle E'_2 E'_2{}^* \rangle$$

$$Q' = \langle E'_1 E'_1{}^* \rangle - \langle E'_2 E'_2{}^* \rangle = 0 \text{ donc } \langle E'_1 E'_1{}^* \rangle = \langle E'_2 E'_2{}^* \rangle = I'/2$$

$$U' = \langle E'_1^* E'_2 \rangle + \langle E'_1 E'_2^* \rangle = 0$$

$$V' = i [\langle E'_1^* E'_2 \rangle - \langle E'_1 E'_2^* \rangle] = 0 \text{ donc } \langle E'_1^* E'_2 \rangle = \langle E'_1 E'_2^* \rangle = 0$$

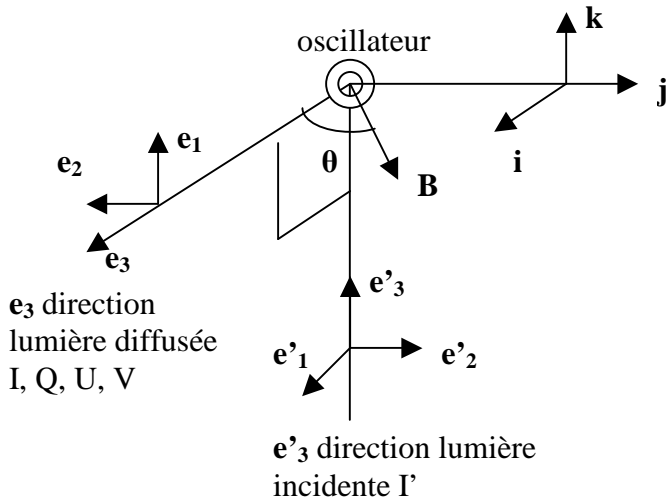
### Récapitulatif de la méthode:

- 1) on se donne une direction incidente  $\mathbf{e}'_3$  et le repère associé  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$
- 2) une direction de diffusion  $\mathbf{e}_3$  et le repère associé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
- 3) une direction de champ magnétique  $\mathbf{u}_0$ , et on construit le repère  $(\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-, \mathbf{u}_0)$
- 4) On calcule les cosinus directeurs  $C_{\alpha i} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i$  et  $C'_{\alpha i} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_i$  (pour  $\alpha = -1, 0, +1, i = 1, 2, 3$ )
- 5) On calcule ensuite  $A_\alpha^* A_\beta = k \sum_i \sum_j E'_i{}^* C'_{\alpha i} E'_j C'_{\beta j}$  (pour  $\alpha, \beta = -1, 0, 1$  et double somme sur  $i, j = 1, 2$ ) à partir de l'intensité incidente  $I'$  (faisceau incident non polarisé tel que que  $E'_1 E'_1{}^* = E'_2 E'_2{}^* = I'/2$  et  $E'_1^* E'_2 = E'_1 E'_2^* = 0$ )
- 6) Puis on détermine  $E_i^* E_j = [e^2 / (4\pi\epsilon_0 d C^2)^2] [4\pi^2 v_0^2 + \gamma^2/4]^2 / \gamma \sum_\alpha \sum_\beta A_\alpha^* C_{\alpha i}^* A_\beta C_{\beta j} / [1 - i (\alpha-\beta)H]$  (pour  $i = 1, 2$  et double somme sur  $\alpha, \beta = -1, 0, 1$ )
- 7) Enfin, on déduit de  $E_i^* E_j$  (pour  $i = 1, 2$ ) le vecteur de Stokes diffusé  $(I, Q, U, V)$



Le résultat dépend de la constante sans dimension  $H = 2\pi \nu_L / \gamma = e B / (2 \gamma m)$  avec  $\nu_L = eB / (4\pi m)$  fréquence de Larmor en  $s^{-1}$  et  $\gamma$  inverse de la durée de vie du niveau en  $s^{-1}$  ( $m$  et  $e$  respectivement masse et charge de l'électron). Pour  $\gamma = 5 \cdot 10^7 s^{-1}$ , la constante  $H$  vaut 1 pour  $B = 6 \text{ Gauss} = 6 \cdot 10^{-4} T$ , on en déduit que l'effet Hanlé est opérant pour des champ faibles typiques du soleil calme. On verra apparaître des termes en  $1/(1 \pm iH)$  et  $1/(1 \pm 2iH)$  selon les valeurs respectives de  $(\alpha-\beta)$  variant de  $-2$  à  $2$  par pas de 1, donnant dans le résultat final des termes en  $1/(1+H^2)$  et  $1/(1+4H^2)$ .

#### IV – 8 – 6 Application 1 : diffusion à 90° en présence de champ magnétique horizontal



$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i}; \mathbf{e}'_2 = \mathbf{j}; \mathbf{e}'_3 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}; \mathbf{e}_2 = -\mathbf{j}; \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}$$

$\mathbf{u}_\alpha$  pour  $\alpha = 0, +1, -1$  :

$$\mathbf{u}_0 = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_{+1} = (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} + i \mathbf{k})/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}_{-1} = (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} - i \mathbf{k})/\sqrt{2}$$

$$C_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j \quad C'_{\alpha j} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_j$$

Pour  $\alpha = +1, 0, -1$  et  $j = 1, 2$

$$C_{11} = i/\sqrt{2} \quad C'_{11} = -\sin\theta/\sqrt{2}$$

$$C_{12} = -\cos\theta/\sqrt{2} \quad C'_{12} = \cos\theta/\sqrt{2}$$

$$C_{01} = 0 \quad C'_{01} = \cos\theta$$

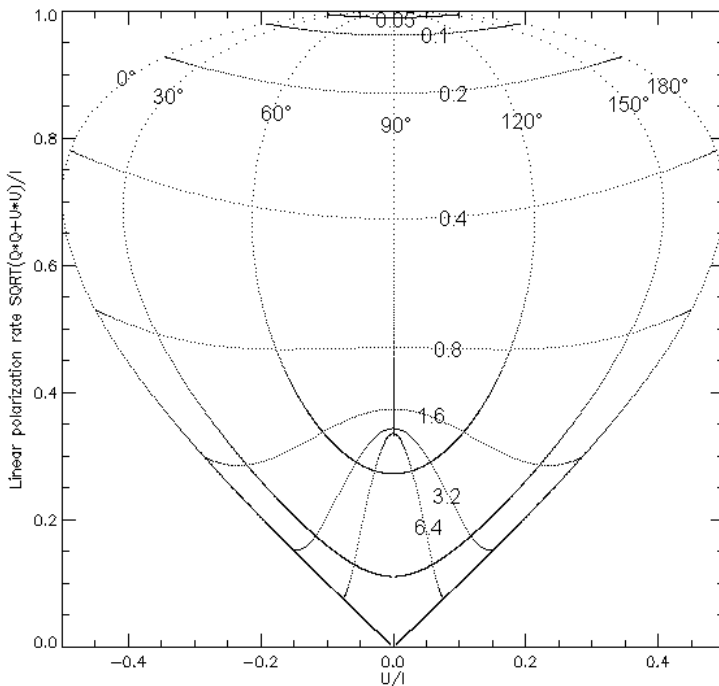
$$C_{02} = -\sin\theta \quad C'_{02} = \sin\theta$$

$$C_{-11} = -i/\sqrt{2} \quad C'_{-11} = -\sin\theta/\sqrt{2}$$

$$C_{-12} = -\cos\theta/\sqrt{2} \quad C'_{-12} = \cos\theta/\sqrt{2}$$

( $i$  nombre imaginaire pur)

Le vecteur  $B$  est horizontal au dessus de la surface du Soleil (plan tangent  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ) et fait un angle  $\theta$  avec la direction de diffusion  $\mathbf{e}_3$ . La diffusion se fait à 90° ( $\mathbf{e}'_3$  orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ ). Tous calculs faits, avec  $I'$  intensité incidente, on trouve pour le vecteur de Stokes diffusé:



$$\mathbf{I} = (I'/2) [ 3 - \cos^2\theta - \sin^2\theta/(1 + 4H^2) ]$$

$$\mathbf{Q} = (-I'/2) [ \sin^2\theta + (1 + \cos^2\theta)/(1 + 4H^2) ]$$

$$\mathbf{U} = -I' (2H \cos\theta)/(1 + 4H^2)$$

$$\mathbf{V} = 0$$

Ci contre diagramme de polarisation.

Abscisse :  $U/I$ ; ordonnée  $(Q^2+U^2)^{1/2}/I$

Courbes iso valeurs (.....) pour :

$\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$

et second réseau (.....) pour :

$H = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4$   
(champs faibles en haut et forts en bas)

Une mesure de  $U/I, Q/I$  permet donc une détermination de  $\pm\theta$  et de  $H$

On remarque que si l'on change  $\theta$  en  $-\theta$ , les formules sont invariantes : il existe donc une ambiguïté angulaire. Une mesure de  $U/I, Q/I$  permet donc une détermination de  $H$  et de  $\theta$  au signe près.

En l'absence de champ magnétique ( $H = 0$ ), la lumière est polarisée le long de  $\mathbf{j}$ , c'est à dire **parallèlement au bord solaire**. En présence de champ magnétique, il y a **rotation** du plan de polarisation d'un angle  $\alpha$  tel que  $\alpha = \frac{1}{2} \text{arc tan} (U/Q) = \frac{1}{2} \text{arc tan}[2H\cos\theta/(1+2H^2\sin^2\theta)]$ . Lorsque  $H = 0$ , on trouve  $I = I'$ ,  $Q = -I'$  (donc  $|Q/I| = 1$ ),  $U = 0$ , et  $\alpha = 0$ . Il n'y a ni dépolarisation, ni rotation du plan de polarisation. Lorsque  $H > 0$ , il y a dépolarisation  $|Q/I| < 1$  et rotation du plan de polarisation. Si  $H$  est fort, la dépolarisation est maximale lorsque le champ magnétique est orienté dans la direction de diffusion.

*Cas particulier n°1 : champ magnétique horizontal et parallèle à la direction de diffusion ( $\theta = 0$ )*

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}'$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{I}' / (1 + 4H^2)$$

Le facteur de dépolarisation Hanle vaut  $1 / (1 + 4H^2)$  d'où  $0 < |Q/I| = 1 / (1 + 4H^2) < 1$

Plus le champ magnétique est fort, et plus la depolarisation est élevée ; lorsque  $H \rightarrow \infty$ ,  $|Q/I| \rightarrow 0$

$$\mathbf{U} = -\mathbf{I}' (2H) / (1 + 4H^2) \text{ d'où } |U/I| = 2H / (1 + 4H^2) \text{ et } \alpha = \frac{1}{2} \text{arc tan} (U/Q) = \frac{1}{2} \text{arc tan}[2H].$$

Plus le champ magnétique est fort, et plus la rotation du plan de polarisation est importante.

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

*Cas particulier n°2 : champ magnétique horizontal et orthogonal à la direction de diffusion ( $\theta = \pi/2$ )*

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I}'/2) [ 3 - 1/(1 + 4H^2) ]$$

$$\mathbf{Q} = (-\mathbf{I}'/2) [ 1 + 1/(1 + 4H^2) ]$$

Le facteur de dépolarisation Hanle vaut  $(1 + 2H^2) / (1 + 6H^2)$

d'où  $1/3 < |Q/I| = (1 + 2H^2) / (1 + 6H^2) < 1$

Plus le champ magnétique est fort, et plus la depolarisation est importante, mais lorsque  $H \rightarrow \infty$ ,  $|Q/I| \rightarrow 1/3$  donc celle ci possède une borne inférieure.

$$\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

*Cas particulier n°3 : champ magnétique horizontal et turbulent ( $0 < \theta < 2\pi$  équiprobable)*

Pour étudier ce cas, on suppose que toutes les orientations du champ magnétique sont équiprobables dans le plan tangent à la surface du Soleil. On effectue donc une moyenne angulaire sur  $\theta$  de 0 à  $2\pi$ .

$$I_{\text{moy}} = \int_0^{2\pi} I d\theta = \pi/2 [ 5 - 1 / (1+4H^2) ] I'$$

$$Q_{\text{moy}} = \int_0^{2\pi} Q d\theta = -\pi/2 [ 1 + 3 / (1+4H^2) ] I'$$

$$U_{\text{moy}} = \int_0^{2\pi} U d\theta = 0$$

*il n'y a donc aucun signal sur U dans cette hypothèse, donc la polarisation reste parallèle au bord solaire.*

On en déduit que le facteur de dépolarisation Hanle vaut :

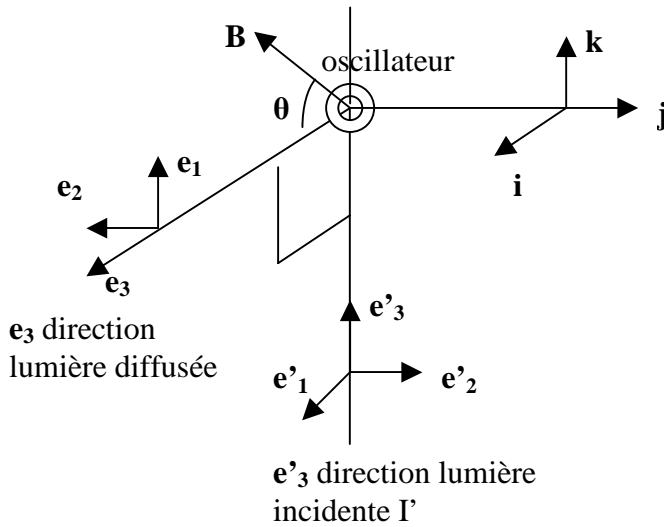
$$|Q_{\text{moy}}/I_{\text{moy}}| = (1 + H^2) / (1 + 5H^2) = 1 - 4H^2/(1 + 5H^2)$$

et finalement on obtient les bornes :  $1/5 < |Q_{\text{moy}}/I_{\text{moy}}| = 1 - 4H^2/(1 + 5H^2) < 1$  avec encore une borne inférieure pour la dépolarisation

#### **IV – 8 – 7 Application 2 : diffusion à 90° en présence de champ magnétique dans un plan méridien**

Le vecteur  $\mathbf{B}$  est contenu dans un plan méridien (plan  $\mathbf{i}, \mathbf{k}$ ) au dessus de la surface du Soleil (plan tangent  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ) et fait un angle  $\theta$  avec la direction de diffusion  $\mathbf{e}_3$ . La diffusion se fait à 90° ( $\mathbf{e}'_3$

orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ ). Tous calculs faits, on trouve, avec  $I'$  intensité incidente, pour le vecteur de Stokes diffusé:



$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i} ; \mathbf{e}'_2 = \mathbf{j} ; \mathbf{e}'_3 = \mathbf{k}$
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k} ; \mathbf{e}_2 = -\mathbf{j} ; \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}$
$\mathbf{u}_\alpha$ pour $\alpha = 0, +1, -1$ :
$\mathbf{u}_0 = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{k}$
$\mathbf{u}_{+1} = (-i \sin\theta \mathbf{i} + \mathbf{j} + i \cos\theta \mathbf{k})/\sqrt{2}$
$\mathbf{u}_{-1} = (i \sin\theta \mathbf{i} + \mathbf{j} - i \cos\theta \mathbf{k})/\sqrt{2}$
$C_{aj} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}_j \quad C'_{aj} = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{e}'_j$
Pour $\alpha = +1, 0, -1$ et $j = 1, 2$
$C_{11} = i \cos\theta / \sqrt{2} \quad C'_{11} = -i \sin\theta / \sqrt{2}$
$C_{12} = -1/\sqrt{2} \quad C'_{12} = 1/\sqrt{2}$
$C_{01} = \sin\theta \quad C'_{01} = \cos\theta$
$C_{02} = 0 \quad C'_{02} = 0$
$C_{-11} = -i \cos\theta / \sqrt{2} \quad C'_{-11} = i \sin\theta / \sqrt{2}$
$C_{-12} = -1/\sqrt{2} \quad C'_{-12} = 1/\sqrt{2}$
(i nombre imaginaire pur)

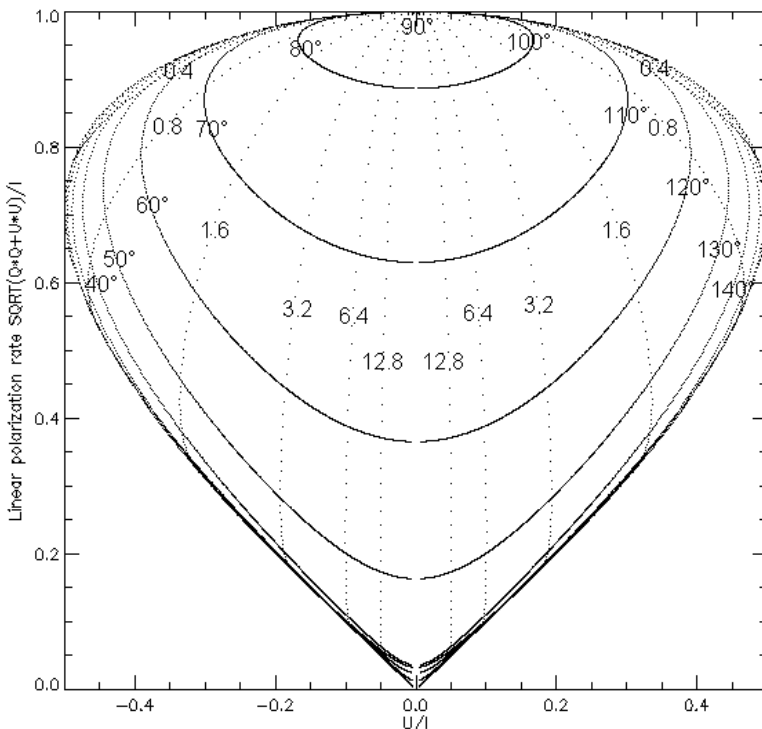
$$\mathbf{I} = I' \left[ \frac{1}{2} (2 + 3 \cos^2\theta \sin^2\theta) - 2 \cos^2\theta \sin^2\theta / (1 + H^2) + \frac{1}{2} \cos^2\theta \sin^2\theta / (1 + 4H^2) \right]$$

$$\mathbf{Q} = I' \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta (3 \cos^2\theta - 2) - 2 \cos^2\theta \sin^2\theta / (1 + H^2) - \frac{1}{2} \cos^2\theta (1 + \cos^2\theta) / (1 + 4H^2) \right]$$

$$\mathbf{U} = -I' \left[ 2H \sin^2\theta \cos\theta / (1 + H^2) + 2H \cos^3\theta / (1 + 4H^2) \right]$$

$$\mathbf{V} = 0$$

Lorsque  $H = 0$ , on trouve  $I = I'$ ,  $Q = -I'$  (donc  $|Q/I| = 1$ ),  $U = 0$ , et  $\alpha = \frac{1}{2} \arctan(U/Q) = 0$ . Il n'y a ni dépolarisation, ni rotation du plan de polarisation. Lorsque  $H > 0$ , il y a dépolarisation  $|Q/I| < 1$  et rotation du plan de polarisation.



Ci contre diagramme de polarisation.  
Abscisse :  $U/I$  ; ordonnée  $(Q^2+U^2)^{1/2}/I$

Courbes iso valeurs (.....) pour :  
 $\theta = 0^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 180^\circ$   
et second réseau (.....) pour :  
 $H = 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4, 12.8$

Une mesure de  $U/I$ ,  $Q/I$  permet une détermination de  $\pm\theta$  et de  $H$

Il n'y a pas d'effet Hanle pour  $\theta = 90^\circ$  (champ vertical) car  $U/I = 0$  et  $|Q/I| = 1$  quelque soit  $H$

Cas particulier n°1 : champ magnétique horizontal et parallèle à la direction de diffusion ( $\theta = 0$ )

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}'$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{I}' / (1 + 4\mathbf{H}^2)$$

$$\mathbf{U} = -\mathbf{I}' (2\mathbf{H}) / (1 + 4\mathbf{H}^2) \text{ d'où } |\mathbf{U}/\mathbf{I}| = 2\mathbf{H} / (1 + 4\mathbf{H}^2), \alpha = \frac{1}{2} \arctan(\mathbf{U}/\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \arctan[2\mathbf{H}] \text{ et } \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

On retrouve bien sûr les mêmes résultats que dans l'application précédente n°1 avec  $\theta = 0$

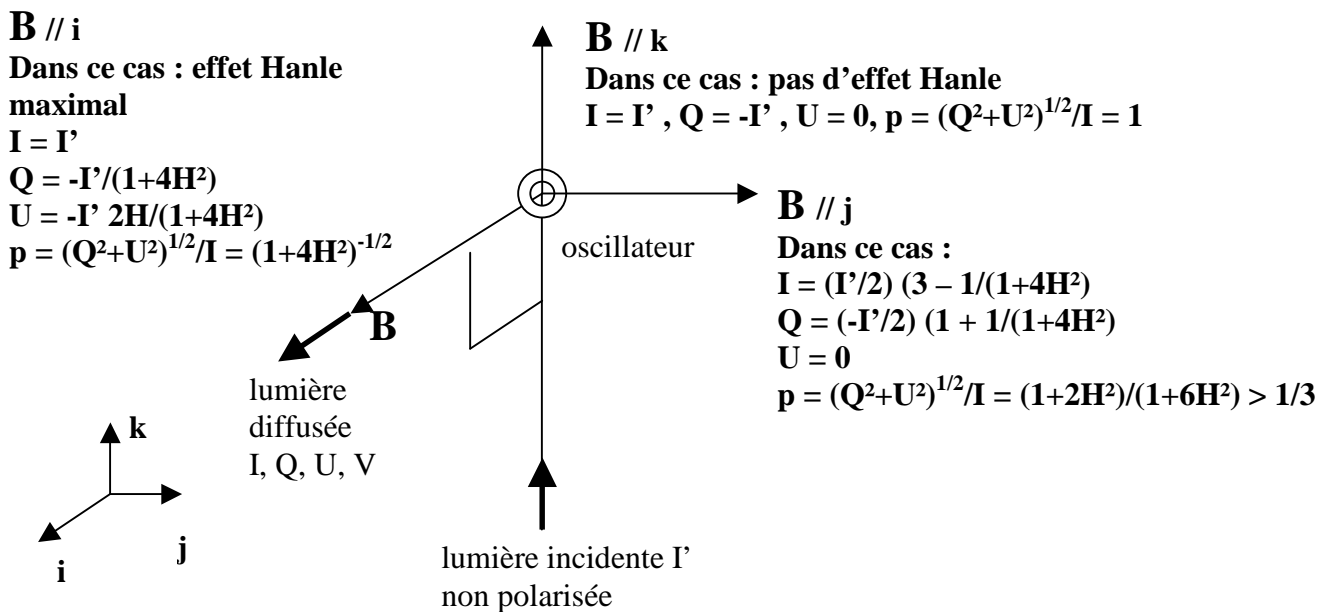
Cas particulier n°2 : champ magnétique vertical et orthogonal à la direction de diffusion ( $\theta = \pi/2$ )

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}'$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{I}'$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

L'effet Hanle est donc inactif dans une configuration de champ vertical : aucune dépolarisation ni rotation du plan de polarisation ne se produit quelle que soit la valeur de  $\mathbf{H}$ .



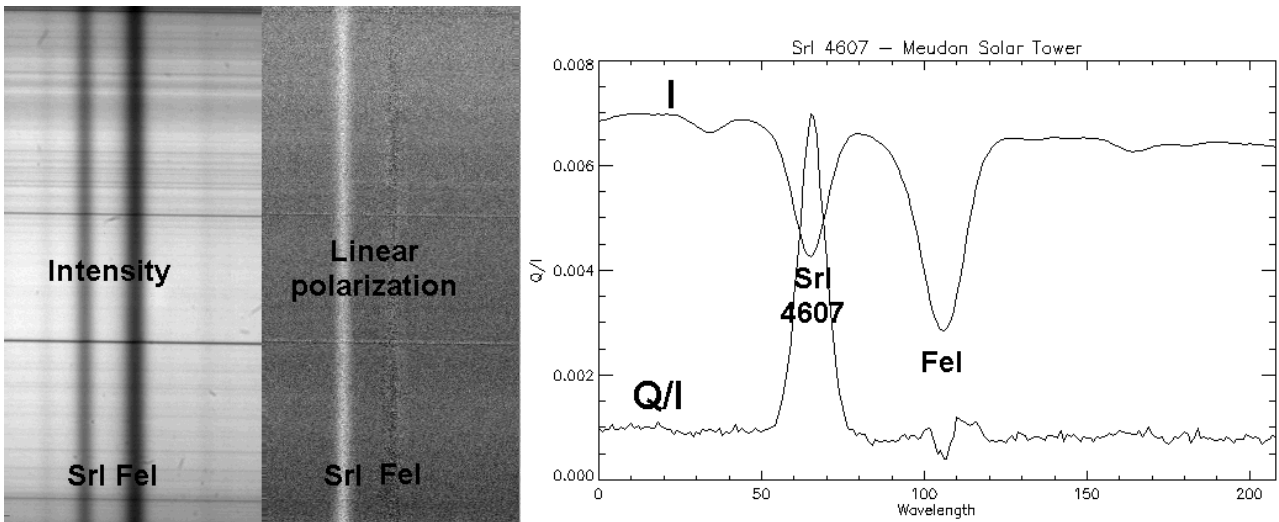
Pour conclure sur l'effet Hanle, nous pouvons affirmer que ce mécanisme est fondamental pour le diagnostic des **champs magnétiques faibles** :

- Dans les protubérances au limbe sur le fond de ciel, où il permet de mesurer l'intensité du champ magnétique et son orientation (un exemple frappant : travaux de J.-L. Leroy au Pic du Midi, repris par la suite à Thémis)
- le second spectre solaire, où spectre de diffusion sur le disque au voisinage du limbe. Dans les raies de résonance, lorsque  $\mathbf{U}$  est nul, on peut faire l'hypothèse d'un champ magnétique turbulent (toutes orientations possibles et équiprobables) dont le facteur de dépolarisation  $p = |Q_{\text{moy}}/I_{\text{moy}}(\mathbf{H})| / |Q_{\text{moy}}/I_{\text{moy}}(0)|$  permet d'obtenir la valeur de  $\mathbf{H}$ , d'où l'on déduit le module du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Une des difficultés des mesures de dépolarisation par le champ magnétique sur le disque solaire près du limbe (second spectre) réside dans le zéro de polarisation. Nous avons vu qu'il existe bien d'autres sources de dépolarisation, par collisions notamment, de sorte que la dépolarisation  $p$  se met sous la forme d'un produit de facteurs :

$$p = W_2 p_G p_c p_H$$

dont nous avons brièvement examiné les différentes contributions :



*Polarisation de résonance sur le disque à 10'' du bord solaire ( $\mu=0.15$ ) de la raie SrI 4607Å  
La polarisation mesurée dépend du champ magnétique (dépolariation par effet Hanle)*

$W_2$  polarisabilité intrinsèque de la raie

$p_G$  dépolariation géométrique (facteur dépendant de  $\mu = \cos\theta$  donc de la position)

$p_c$  dépolariation par collisions

$p_H$  dépolariation Hanle par le champ magnétique

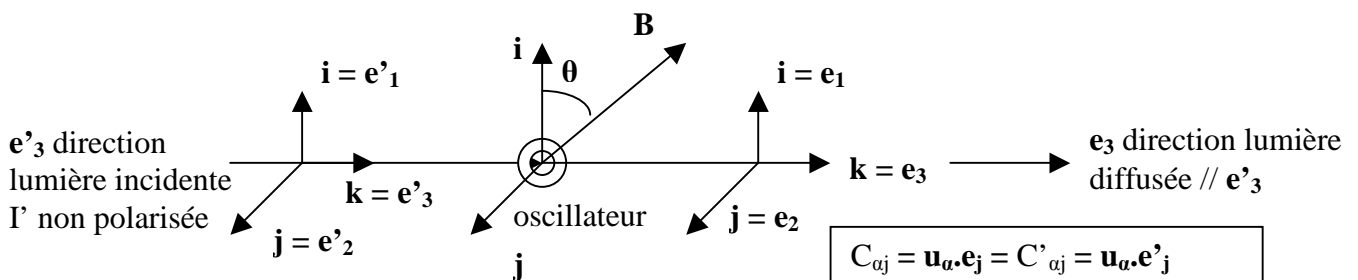
Si l'on effectue deux mesures  $p_1$  et  $p_2$  sur des régions différentes du Soleil, de la même raie, à  $\mu$  constant, en supposant la dépolariation collisionnelle inchangée, alors on peut écrire :

$$p_1/p_2 = (Q/I)_1 / (Q/I)_2 = p_{H1} / p_{H2}$$

Pour mesurer une valeur de champ magnétique, il faut disposer d'une **mesure de référence** en champ magnétique **nul** pour laquelle  $p_H = 1$ . Comme c'est impossible, on effectue souvent de nombreuses mesures à  $\mu$  constant dont on prend la plus polarisée comme référence.

Une alternative pour surmonter cet écueil existe : il s'agit de **l'effet Hanle différentiel**. Cette méthode consiste à effectuer des rapports de taux de polarisation  $p_1/p_2$  cette fois ci sur des raies différentes observées simultanément, et sur la même région solaire, à condition toutefois qu'on dispose de raies formées dans les mêmes conditions thermodynamiques, à même altitude (raies moléculaires de  $C_2$  par exemple).

#### IV - 8 - 8 Diffusion directe ou « forward scattering »



$$e_1 = e'_1 = i ; e_2 = e'_2 = j ; e_3 = e'_3 = k$$

$u_\alpha$  pour  $\alpha = 0, +1, -1$  :

$$u_0 = \cos\theta i + \sin\theta k$$

$$u_{+1} = (-i \sin\theta i + j + i \cos\theta k) / \sqrt{2}$$

$$u_{-1} = (i \sin\theta i + j - i \cos\theta k) / \sqrt{2}$$

$$C_{\alpha j} = u_\alpha \cdot e_j = C'_{\alpha j} = u_\alpha \cdot e'_j$$

Pour  $\alpha = +1, 0, -1$  et  $j = 1, 2$

$$C_{11} = -i \sin\theta / \sqrt{2} = C'_{11}$$

$$C_{12} = 1/\sqrt{2} = C'_{12}$$

$$C_{01} = \cos\theta = C'_{01}$$

$$C_{02} = 0 = C'_{02}$$

$$C_{-11} = i \sin\theta / \sqrt{2} = C'_{-11}$$

$$C_{-12} = 1/\sqrt{2} = C'_{-12}$$

(i nombre imaginaire pur)

Le vecteur  $B$  est contenu dans un plan méridien

(plan  $\mathbf{i}, \mathbf{k}$ ) au dessus de la surface du Soleil

(plan tangent  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ) et fait un angle  $\theta$  avec la direction de l'horizontale. La diffusion se fait à  $0^\circ$  ( $\mathbf{e}'_3 // \mathbf{e}_3$ ). La lumière incidente  $I'$  n'est pas polarisée.

Tous calculs faits, on trouve, pour le vecteur de Stokes diffusé ( $I, Q, U, V$ ) dans la direction  $\mathbf{e}_3$  :

$$I = (I'/2) [ \cos^4\theta + (1+\sin^2\theta)/2 + 2\cos^2\theta \sin^2\theta/(1 + H^2) + 1/2 \cos^4\theta/(1 + 4H^2) ]$$

$$Q = (I'/2) [ \cos^2\theta (3/2 \cos^2\theta - 1) + 2\cos^2\theta \sin^2\theta/(1 + H^2) - 1/2 \cos^2\theta (1+\sin^2\theta)/(1 + 4H^2) ]$$

$$U = I' \sin\theta \cos^2\theta [ H/(1 + H^2) - H/(1 + 4H^2) ]$$

$$V = 0$$

Lorsque  $H = 0$ , on trouve  $I = I'$ ,  $Q = U = V = 0$ , il n'y a aucune polarisation.

*Cas particulier n°1 : champ magnétique vertical et orthogonal à la ligne de visée et à la direction de diffusion ( $\theta = 0$ )*

$$I = I' (1+3H^2)/(1+4H^2)$$

$$Q = I' H^2/(1+4H^2)$$

$$U = V = 0$$

**On constate qu'une polarisation linéaire apparaît en présence de champ magnétique orthogonal à la ligne de visée.** Le taux de polarisation vaut :

$$p = Q/I = H^2/(1+3H^2)$$

Il est compris entre **0** et **1/3**.

*Cas particulier n°2 : champ magnétique horizontal parallèle à la ligne de visée et à la direction de diffusion ( $\theta = \pi/2$ )*

$$I = I'$$

$$Q = U = V = 0$$

**On constate qu'aucune polarisation linéaire n'apparaît quelle que soit la valeur de  $H$ .** Le champ magnétique ne crée pas polarisation dans une configuration de champ orienté le long de la ligne de visée.

# Chapitre 5

## Introduction à la magnétohydrodynamique

La magnétohydrodynamique, ou MHD, est basée sur la description du plasma comme constitué d'un gaz de vitesse  $\mathbf{v}$  et de masse volumique  $\rho$ , sous l'action d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  donné par la loi d'Ohm, et d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans ce qui suit, les **vecteurs** sont écrits en **gras**.

### V – 1 Les équations de base

#### Remarques sur les équations de conservation

Les lois de conservation (masse, énergie) suivent une équation de conservation du type :

$$\partial f / \partial t + \text{div}(\mathbf{fv}) = s$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse et  $s$  un terme source. Par intégration sur un volume  $V$  fermé par une surface  $S$ , on obtient en appliquant le théorème d'Ostrogradski, où  $dV$  est un élément de volume et  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ ,  $\mathbf{n}$  normale à la surface) :

$$\partial / \partial t [\iiint f dV] + \iint f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint s dV$$

$\iint f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux de la quantité  $f$  à la frontière entourant le volume  $V$ . Introduisons  $v_n$ , composante normale à la surface fermée qui enveloppe le volume :

$$\partial / \partial t [\iiint f dV] + \iint f v_n dS = \iiint s dV$$

On constate, à partir de cette équation, que la quantité  $\iiint f dV$  est conservative à condition que :

- il n'y a pas de terme source ( $s = 0$ )
- le flux à la frontière est nul ( $v_n = 0$  partout)

#### Equation de conservation de la masse (équation de continuité)

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

#### Equation du mouvement

$$\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})] = - \text{grad} P + \mathbf{f}$$

où  $\mathbf{f}$  désigne les forces par unité de volume autres que les forces dues à la pression  $P$ .

Par exemple,  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  (en  $\text{N m}^{-3}$ )

$\rho \mathbf{g}$  est le poids,  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  est la force de Laplace,  $\mathbf{j}$  désignant la densité de courant reliée à l'intensité du courant électrique total  $i$  par la loi  $i = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  (flux du vecteur  $\mathbf{j}$ )

On écrit parfois cette équation sous la forme  $\rho d\mathbf{v}/dt = - \text{grad} P + \mathbf{f}$  avec  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$

Dans la description Lagrangienne, qui suit le fluide, la quantité  $d\mathbf{v}/dt$  est l'accélération. Dans la description Eulérienne (position fixe), l'accélération se compose d'une composante locale  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  à laquelle s'ajoute un terme advectif  $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}$

### Fluide incompressible en régime stationnaire

$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g}$  devient en régime stationnaire  $\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g}$   
Dans un système de coordonnées curvilignes (repère de Frénet  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ), cette équation devient avec  $\mathbf{v} \cdot \text{grad} = v d/ds$  et  $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$  ( $\mathbf{t}$  vecteur unitaire tangent à la ligne fluide):

$$\rho v d(v \mathbf{t}) / ds = - \text{grad} P - \rho g \mathbf{e}_z$$

or  $d(v \mathbf{t}) / ds = v dt/ds + \mathbf{t} dv/ds = v \mathbf{n} / R + \mathbf{t} dv/ds$  ( $R$  rayon de courbure,  $\mathbf{n}$  normale), ce qui donne en projection sur  $\mathbf{t}$  :  $\rho d(v^2/2) / ds = -dP/ds - \rho g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t}$

Cette équation s'intègre immédiatement le long de la ligne fluide si l'on choisit  $\rho = \text{constante}$ , et sachant que  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} = dz/ds$  :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z = \text{constante, dite loi de Bernoulli}$$

### Fluide incompressible et forces visqueuses

Lorsque l'on tient compte des forces de frottement visqueuses, les forces par unité de volume pour un fluide *incompressible* sont données par

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} + \nu \rho \Delta \mathbf{v}$$

$\Delta \mathbf{v}$  est le Laplacien du vecteur vitesse.  $\nu = \mu / \rho$  est la *viscosité cinématique* en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et  $\mu$  la viscosité dynamique en Poiseuille (Pa s). Numériquement, et en première approximation, on a :

$$\nu \rho = 2.2 \cdot 10^{-17} \text{T}^{5/2} \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec  $T = 10^4 \text{K}$  et  $\rho = 10^{-7} \text{kg m}^{-3}$ , on trouve que la viscosité cinématique  $\nu$  est voisine de  $1 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

En l'absence de forces autres que visqueuses, l'équation du mouvement est

$$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = \nu \rho \Delta \mathbf{v}$$

La partie diffusive  $\partial \mathbf{v} / \partial t = \nu \Delta \mathbf{v}$  possède une constante de temps diffusive  $\tau_{\text{diff}} = L^2 / \nu$  et la partie advective la constante dynamique  $\tau = L / \nu$ . Le rapport de ces deux temps caractéristiques est appelé *nombre de Reynolds* ( $L$  et  $\nu$  sont respectivement des longueurs et vitesses caractéristiques):

$$\text{Re} = \tau_{\text{diff}} / \tau = L \nu / \nu$$

Dans les conditions de la photosphère, avec  $T = 10^4 \text{K}$ ,  $L = 10^4 \text{km}$ ,  $\nu = 1 \text{km/s}$ ,  $\nu = 1 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $\text{Re}$  est voisin de  $10^{10}$ , ce qui signifie que les termes visqueux sont négligeables dans ce régime.

### Force de Coriolis

La force de Coriolis a une action sur le mouvement d'un fluide dans un référentiel en rotation, comme une étoile. Si  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation de l'étoile autour de son axe, la force de Coriolis est, par unité de volume,  $\mathbf{f} = 2 \rho \Omega \wedge \mathbf{v}$

Le temps caractéristique associé est  $\tau_c = 1/\Omega$ . Avec  $\tau = L/\nu$  temps dynamique, on appelle nombre de Rossby le rapport :

$$\text{Ro} = \tau_c / \tau = \nu / (\Omega L)$$

Dans les conditions de la photosphère solaire, avec  $L = 10^4 \text{km}$ ,  $\nu = 1 \text{km/s}$ ,  $\Omega = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{rd s}^{-1}$ ,  $\text{Ro}$  est voisin de 100, ce qui signifie que la force de Coriolis peut souvent être négligée.

### Equation d'état du gaz

Loi des gaz parfaits  $P = \rho k T / m = \rho R T / M$



P pression, k constante de Boltzmann, R constante des gaz parfaits ( $R = k \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}$  constante d'Avogadro), m masse atomique, M masse molaire

On utilise parfois une loi adiabatique telle que

$$P / \rho^\gamma = \text{constante}$$

dans laquelle  $\gamma$  est l'exposant adiabatique ( $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ )

pour un gaz monoatomique, rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants).

*Equations de Maxwell dans le vide*

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + 1/C^2 \partial \mathbf{E} / \partial t \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0 \text{ car la densité de charge est supposée nulle (neutralité électrique)} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= - \partial \mathbf{B} / \partial t \end{aligned}$$

Le long d'une ligne de champ de section S et d'abscisse curviligne s,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  se traduit par :  $(1/S) d(BS)/ds = 0$  soit  $BS = \text{constante}$

*La loi d'Ohm*

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

$\sigma$  est la conductivité du plasma  $\sigma = 10^{-3} T^{3/2}$  MKSA, inverse de la résistivité

*La loi de conservation de l'énergie*

Cette loi de conservation est la plus difficile à établir. Elle résulte du premier principe de la thermodynamique :

$dU = -P dV + \delta Q$ , U fonction énergie interne, V volume, P pression, Q quantité de chaleur. A masse constante, on a  $m = \rho V$ , soit  $V = m / \rho$ , ce qui donne par unité de masse:

$$dU/m = -P d(1/\rho) + \delta Q/m$$

Appelons **u** et **q** respectivement **l'énergie interne et la quantité de chaleur par unité de masse**.

Il vient :  $du = (P/\rho^2) d\rho + \delta q$ , soit encore par unité de temps :

$$du/dt = (P/\rho^2) d\rho/dt + \delta q/dt$$

avec  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}$  l'équation ci dessus devient :

$$\partial u/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = (P/\rho^2) [\partial \rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho] + \delta q/dt$$

L'équation de continuité nous donne  $\partial \rho/\partial t = -\text{div}(\rho \mathbf{v}) = -\rho \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho$  d'où

$$\partial u/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = - (P/\rho) \text{ div } \mathbf{v} + \delta q/dt$$

Multiplions maintenant les deux membres de cette dernière équation par  $\rho$  :

$$\rho \partial u/\partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = -P \text{ div } \mathbf{v} + \rho \delta q/dt$$

$$\partial(\rho u)/\partial t - u \partial \rho/\partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = -P \text{ div } \mathbf{v} + \rho \delta q/dt$$

avec  $\partial \rho/\partial t = -\text{div}(\rho \mathbf{v})$ , on a  $\partial(\rho u)/\partial t + u \text{ div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = -P \text{ div } \mathbf{v} + \rho \delta q/dt$

On remarque que  $u \text{ div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad } u = \text{div}(\rho u \mathbf{v})$ , ce qui donne alors *l'équation de continuité de l'énergie interne*:

$$\partial(\rho u)/\partial t + \text{div}(\rho u \mathbf{v}) = -P \text{ div } \mathbf{v} + \rho \delta q/dt \quad (a)$$

Nous utilisons maintenant l'équation du mouvement  $\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) ] = - \mathbf{grad} P + \mathbf{f}$   
dont on fait le produit scalaire avec le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  :  
 $\rho \mathbf{v} [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) ] = - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$

Or  $\partial(1/2 \rho v^2) / \partial t = 1/2 v^2 \partial \rho / \partial t + \rho \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t$  et  $\partial \rho / \partial t = - \text{div}(\rho \mathbf{v})$ , d'où  
 $\partial(1/2 \rho v^2) / \partial t = - 1/2 v^2 \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t$ , d'où l'on tire  $\rho \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t = \partial(1/2 \rho v^2) / \partial t + 1/2 v^2 \text{div}(\rho \mathbf{v})$  que  
l'on remplace dans l'équation du mouvement projetée sur  $\mathbf{v}$  :  
 $\partial(1/2 \rho v^2) / \partial t + 1/2 v^2 \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$   
or  $\text{div}(1/2 \rho v^2 \mathbf{v}) = 1/2 v^2 \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v})$ , ce qui entraîne alors l'équation de continuité de  
l'énergie cinétique:

$$\partial(1/2 \rho v^2) / \partial t + \text{div}(1/2 \rho v^2 \mathbf{v}) = - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (b)$$

On peut combiner les deux relations ci dessus (équations de continuité de l'énergie interne et de  
l'énergie cinétique) en remarquant que  $\text{div}(P\mathbf{v}) = P \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{grad} P \cdot \mathbf{v}$   
De sorte que (a) + (b) donnent :

$$\partial(\rho u + 1/2 \rho v^2) / \partial t + \text{div}(\rho u \mathbf{v} + 1/2 \rho v^2 \mathbf{v}) = - \text{div} P \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q / dt, \text{ soit finalement :}$$

$$\partial(\rho u + 1/2 \rho v^2) / \partial t + \text{div}[(\rho u + 1/2 \rho v^2 + P) \mathbf{v}] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q / dt$$

équation de conservation de l'énergie totale.

Dans cette équation,  $\rho \delta q / dt$  est le **taux de production d'énergie** par unité de volume. Il se met  
sous la forme phénoménologique:

$$\rho \delta q / dt = h \rho - \rho^2 Q(T) + j^2 / \sigma + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T)$$

par unité de volume et de temps, unité le  $\mathbf{W m}^{-3}$ , relation dans laquelle:

$h \rho$  est le taux de *chauffage par dissipation d'ondes* (h supposée constante)

$\rho^2 Q(T)$  est le taux de *pertes radiatives* optiquement mince (la fonction  $Q(T)$  est tabulée et présente  
un maximum autour de  $10^5$  K, décroît en  $1/T$  à haute température, ci dessous Hildner, 1974)

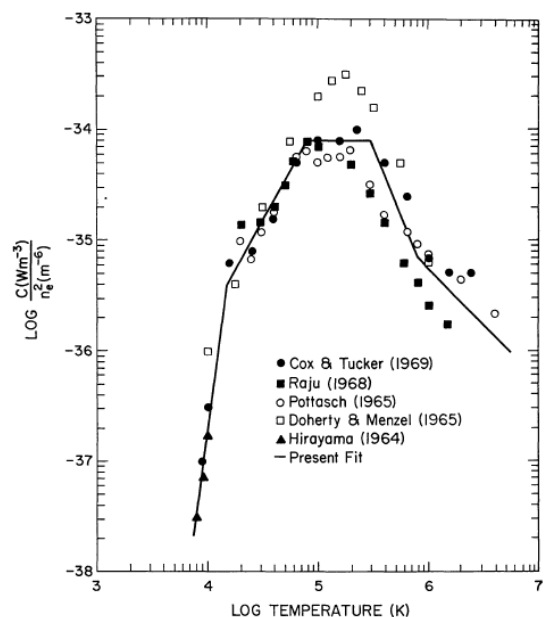
Temperature	$i$	$\chi_i$	$\alpha_i$
$T \geq 8 \times 10^5 \text{K}$	1	$5.51 \times 10^{-30}$	- 1.0
$8 \times 10^5 \text{K} > T \geq 3 \times 10^5 \text{K}$	2	$3.94 \times 10^{-21}$	- 2.5
$3 \times 10^5 \text{K} > T \geq 8 \times 10^4 \text{K}$	3	$8.00 \times 10^{-35}$	0
$8 \times 10^4 \text{K} > T \geq 1.5 \times 10^4 \text{K}$	4	$1.20 \times 10^{-43}$	+ 1.8
$1.5 \times 10^4 \text{K} > T$	5	$4.92 \times 10^{-67}$	+ 7.4

*Pertes radiatives optiquement minces.*

Fonction  $Q(T)$  définie par morceaux en unités MKSA :

$$Q(T) = \chi T^\alpha / m^2$$

avec  $m$  masse du proton =  $1.67 \cdot 10^{-27}$  kg



$j^2 / \sigma$  est le taux de *chauffage par effet Joule*

$\text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T)$  est le taux de *conduction électronique de la chaleur* parallèle aux lignes de champ magnétique, le flux de chaleur mesuré en  $\text{W}/\text{m}^2$  étant égal à :

$F = -k_{//} \mathbf{grad} T$ , avec  $k_{//} = k_0 T^{5/2} = 10^{-11} T^{5/2}$  MKSA, conductibilité thermique

Le long d'une ligne de champ magnétique d'abscisse curviligne  $s$ , le terme conductif s'écrit :

$$\text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T) = (1/S) d(S k_{//} dT/ds)/ds = (2/7) k_0 (1/S) d(S dT^{7/2}/ds)/ds$$

où  $S$  est la section du tube reliée au champ magnétique  $B$  par la relation  $BS = \text{constante}$ . Si la section est invariable, alors  $\text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T) = (2/7) k_0 d^2(T^{7/2})/ds^2$

Le produit scalaire  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  peut se transformer en écrivant que  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  avec  $\mathbf{g} = -\mathbf{grad} \varphi$ ,  $\varphi$  étant le potentiel de gravitation.

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \varphi + (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

Or  $\text{div}(\rho \varphi \mathbf{v}) = \varphi \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \varphi$  et  $\partial \rho / \partial t = -\text{div}(\rho \mathbf{v})$ , d'où l'on tire :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\text{div}(\rho \varphi \mathbf{v}) - \varphi \partial \rho / \partial t + (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -\text{div}(\rho \varphi \mathbf{v}) - \partial(\rho \varphi) / \partial t + (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

L'équation de conservation de l'énergie est alors :

$$\partial(\rho u + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2) / \partial t + \text{div}[(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + P) \mathbf{v}] = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} + \rho \delta q / dt$$

Le terme  $(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$  se modifie avec la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  en évaluant  $\mathbf{j}^2 / \sigma = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} / \sigma$

$$\mathbf{j}^2 / \sigma = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

$$\text{or } \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{j} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$$

on en déduit :

$$(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{j}^2 / \sigma$$

et l'équation d'énergie devient donc :

$$\partial(\rho u + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2) / \partial t + \text{div}[(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + P) \mathbf{v}] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + h \rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T) \quad (c)$$

Une autre forme de cette équation existe en introduisant le vecteur de Poynting

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) / \mu_0$$

$$\text{div } \mathbf{P} = \text{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) / \mu_0 = (\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{B}) / \mu_0$$

avec  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + 1/C^2 \partial \mathbf{E} / \partial t$  et  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , on obtient :

$$\text{div } \mathbf{P} = -\partial / \partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

soit encore une *équation de conservation de l'énergie électromagnétique* :

$$\partial / \partial t (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) + \text{div } \mathbf{P} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

dans laquelle  $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2$  et  $\mathbf{B}^2 / 2 \mu_0$  sont respectivement les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique ( $\text{J m}^{-3}$ ),  $\mathbf{P}$  étant le flux d'énergie électromagnétique ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Attention ! Ne pas confondre  $\mathbf{P}$  vecteur de Poynting (en gras) et  $P$  pression gazeuse ! Sous forme intégrée sur un volume fermé  $V$ , on a :

$$\partial / \partial t \iiint (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) dV + \iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$$

$\iint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  est le flux d'énergie électromagnétique au travers de la surface frontière.

En reportant l'expression de  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  dans l'équation d'énergie, on trouve finalement la loi générale :

$$\partial(\rho u + \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2 + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) / \partial t + \text{div}[(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + P) \mathbf{v} + \mathbf{P}] = h \rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T)$$

Appelons maintenant  $U = \rho u$  l'énergie interne par unité de volume.  
L'enthalpie  $H$  par unité de volume étant égale à  $U + P$ , il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (U + \rho\phi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) + \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\phi) \mathbf{v} + \mathbf{P}] = h\rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T) \quad (d)$$

Considérons de nouveau un volume  $V$  fermé par une surface  $S$ .  
La quantité  $\iint_S [(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\phi) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}]$  représente le flux sur la surface  $S$ .  
Quand y a-t-il conservation de l'énergie totale dans un volume fermé  $V$  ?

L'intégrale  $\iiint_V (U + \rho\phi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0) dV$  est *conservative* si :

- le terme source (chauffage, refroidissement radiatif, conduction) est nul
- la vitesse  $v_n$  normale est nulle en tout point de la surface  $S$  ( $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v_n dS = 0$ )
- le vecteur de Poynting  $\mathbf{P}_n$  normal est nul en tout point de la surface  $S$ . Si le milieu n'est pas résistif (conductivité infinie),  $\mathbf{P} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0 = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = B^2 \mathbf{v} / \mu_0 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} / \mu_0$  montre que  $\mathbf{P}_n$  est nul si les composantes normales  $v_n$  et  $B_n$  sont nulles sur la surface.

*Les équations en régime stationnaire*

**En régime stationnaire**, avec  $\partial/\partial t = 0$ , la conservation de la masse se traduit par  $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$   
Le long d'une ligne de champ d'abscisse curviligne  $s$  et de section  $S(s)$ ,  
 $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$  s'écrit  $(1/S) d(\rho v S)/ds = 0$  soit  $\rho v S = \text{constante}$

l'équation (d) se met sous la forme plus simple :  
 $\text{div}[(U + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\phi + P) \mathbf{v} + \mathbf{P}] = h\rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T)$ , soit :

$$\begin{aligned} \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\phi) \mathbf{v} + \mathbf{P}] &= h\rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T) \\ \text{ou la forme équivalente} \\ \text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} - k_{//} \mathbf{grad}T] &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} + h\rho - \rho^2 Q(T) + j^2/\sigma \end{aligned}$$

Le long d'une ligne de champ d'abscisse curviligne  $s$  et de section  $S(s)$ , l'opérateur divergence s'écrit  $\text{div} \mathbf{f} = (1/S) d(fS)/ds$

Il faut adjoindre à cette équation d'énergie l'équation du mouvement en régime stationnaire :

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = -\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$$

ainsi que les équations de Maxwell

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 ; \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} ; \text{div} \mathbf{E} = 0 ; \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Le long d'une ligne de champ d'abscisse curviligne  $s$  et de section  $S(s)$ ,  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  s'écrit  $\underline{BS} = \text{cte}$

Formulation de **l'énergie interne et de l'enthalpie par unité de volume**:

$U = (\rho/M) C_v T$  et  $H = (\rho/M) C_p T$   
 $M$  est la masse molaire du gaz ; avec  $\gamma = C_p/C_v$  et  $C_p - C_v = R$  (constante des gaz parfaits),  
on a  $C_v = R/(\gamma - 1)$  et  $C_p = R \gamma /(\gamma - 1)$ . Les fonctions  $U$  et  $H$  s'écrivent par unité de volume :  
 $U = (\rho/M) C_v T$  et  $H = (\rho/M) C_p T$  soit, avec  **$m$  la masse atomique** :

$$U = (\rho/m) kT/(\gamma - 1) = P/(\gamma - 1) \text{ et } H = (\rho/M) kT \gamma /(\gamma - 1) = P \gamma /(\gamma - 1)$$

Plus généralement, si **N** est le nombre de particules par unité de volume, on a  $\rho = m N$ :

$$U = N kT/(\gamma - 1) \text{ et } H = N kT \gamma /(\gamma - 1)$$

Pour un gaz d'hydrogène totalement ionisé (dans la couronne solaire), on aurait en raison de la neutralité électrique  $N = 2 N_{\text{protons}}$

*Seconde forme de l'équation d'énergie couramment utilisée*

Le premier principe donne  $du = -P d(1/\rho) + \delta Q/m$ , avec  $u$  énergie interne par unité de masse :

$$u = [1/(\gamma - 1)] kT/m = [1/(\gamma - 1)] P/\rho$$

On déduit du premier principe:

$$dP/[(\gamma - 1)\rho]/dt + P d(1/\rho)/dt = \delta(Q/m)/dt$$

En développant, on obtient :

$$dP/dt - (\gamma P/\rho) d\rho/dt = (\gamma - 1) \rho \delta q/dt \quad \text{avec } d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$$

où  $\rho \delta q/dt$  est le taux de production d'énergie (chaleur) par unité de volume, d'où :

$$dP/dt - (\gamma P/\rho) d\rho/dt = (\gamma - 1) [h \rho - \rho^2 Q(T) + j^2/\sigma + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T)]$$

avec  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$

Le long d'un tube de champ de section  $S$ , on rappelle que  $\text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T) = (1/S) d(S k_{//} dT/ds)/ds$

## V - 2 Force de Laplace

La force de Laplace par unité de volume  $\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  s'écrit avec  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  (on a négligé le terme en  $1/C^2 \partial \mathbf{E}/\partial t$  car la vitesse caractéristique  $\mathbf{v}$  est négligeable devant  $C$ ) peut se développer sachant que :

$$\mathbf{grad} B^2 = 2 \mathbf{B} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{B} + 2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B}$$

on en déduit  $\mathbf{f} = (\mathbf{rot} \mathbf{B} / \mu_0) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{grad} (B^2/2\mu_0)$

Dans le repère de Frénet, avec  $\mathbf{t}$  vecteur unitaire tangent aux lignes de champ,  $\mathbf{B} = B \mathbf{t}$ , et :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B} = B \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} (B\mathbf{t}) = B^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} (\mathbf{t}) + B \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} (B) \mathbf{t}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B} = B^2 dt/ds + B dB/ds \mathbf{t} \quad \text{car } \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} = d/ds \text{ (s abscisse curviligne)}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{B} = B^2 \mathbf{n}/R + d(B^2/2)/ds \mathbf{t} \quad \text{car } dt/ds = \mathbf{n} / R, R \text{ rayon de courbure de la ligne de champ, et } \mathbf{n} \text{ normale (repère de Frénet). Finalement,}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \mathbf{grad} (B^2/2\mu_0) + B^2 \mathbf{n}/(\mu_0 R) + d(B^2/2\mu_0)/ds \mathbf{t}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \mathbf{grad}_{\perp} (B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R)$$

où  $\mathbf{grad}_{\perp}$  est le gradient dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ (orthogonale à  $\mathbf{t}$ ).

A l'équilibre magnétostatique ( $\partial/\partial t = 0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), on aurait :  $-\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$  ou encore :

$$-\mathbf{grad}_{\perp} (P + B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R) - \mathbf{grad}_{//} P + \rho \mathbf{g} = 0$$

où  $\mathbf{grad}_{//} = d/ds$  est le gradient dans la direction des lignes de champ (direction  $\mathbf{t}$ ).

Dans la direction du champ magnétique, en projection sur le vecteur  $\mathbf{t}$ , l'équation devient:

$$-\mathbf{grad}_{//} P + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ ou } -dP/ds - \rho g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} = 0$$

Comme  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} = dz/ds$ , on obtient la loi de l'équilibre hydrostatique  $dP/dz = -\rho g$

Dans une configuration de lignes de champ parallèles (rayon  $R \rightarrow \infty$ ), la projection dans la direction orthogonale aux lignes de force donne:

$$-\mathbf{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0) = 0, \text{ c'est la loi de l'équilibre transversal entre pression gazeuse et magnétique}$$

$$P + B^2/2\mu_0 = \text{constante}$$

$B^2/2\mu_0$  est la pression magnétique. On introduit le paramètre  $\beta$  du plasma égal au rapport des pressions gazeuse à magnétique:

$$\beta = P / (B^2/2\mu_0)$$

Si  $\beta > 1$ , les forces de pression dominent ; et si  $\beta < 1$ , les forces magnétiques dominent.  $\beta$  varie énormément dans l'atmosphère solaire, non pas à cause de la variation du champ magnétique en altitude, mais parce que la pression du gaz varie très vite.

Dans la photosphère calme,  $\beta \gg 1$  car  $P = 10^3$  Pa et  $B^2/2\mu_0$  est voisin de 1 Pa avec  $B=10^{-3}$  T

Dans la chromosphère calme,  $\beta \approx 1$  car  $P = 1$  Pa et  $B^2/2\mu_0$  est voisin de 1 avec  $B=10^{-3}$  T

Dans la couronne,  $\beta \ll 1$  car  $P = 10^{-4}$  Pa et  $B^2/2\mu_0$  est voisin de 1 avec  $B=10^{-3}$  T

La chromosphère réalise une sorte de transition entre un plasma dominé par les forces de pression et un plasma dominé par les forces magnétiques. Les taches (champ fort) ont toujours  $\beta \ll 1$ .

En présence d'un écoulement stationnaire de vitesse  $\mathbf{v}$ , le terme  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \rho v d(vt)/ds$  se décompose en  $\rho v^2 \mathbf{n}/R + \rho \mathbf{t} d(v^2/2)/ds$ , de sorte que l'équation du mouvement est :

$$\rho v^2 \mathbf{n}/R + \rho \mathbf{t} d(v^2/2)/ds = -\mathbf{grad}_{\perp}(P + B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R) - \mathbf{grad}_{//} P + \rho \mathbf{g} = 0$$

En projection sur  $\mathbf{t}$  :  $\rho d(v^2/2)/ds = -dP/ds - \rho g dz/ds$

La matière glisse le long des lignes de champ magnétique, qui joue le rôle de « tuyaux ».

Dans la direction orthogonale, si  $R \rightarrow \infty$ , on retrouve  $P + B^2/2\mu_0 = \text{constante}$

### V – 3 Equilibres sans force

Lorsque  $\mathbf{j} = \mathbf{rot} \mathbf{B} / \mu_0$  est colinéaire à  $\mathbf{B}$ , c'est à dire s'il existe un nombre  $\alpha$  tel que  $\mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}$ , alors la force magnétique s'évanouit.

Les classes d'équilibres magnétostatiques tels que  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$  constituent à elles seuls un véritable domaine de recherche. En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient  $\Delta \mathbf{B} + \mathbf{rot}(\alpha \mathbf{B}) = \mathbf{0}$  soit  $\Delta \mathbf{B} + \alpha \mathbf{rot} \mathbf{B} + \mathbf{grad} \alpha \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , donc :

$$\Delta \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} + \mathbf{grad} \alpha \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Lorsque  $\alpha = 0$ , le champ est dit *potentiel* (sans courant). Il est solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Lorsque  $\alpha \neq 0$ , le champ est dit *sans force* « force free ». Une classe spéciale est celle où  $\alpha$  est constant (« force free » linéaire) dans l'espace. Dans ce cas  $\mathbf{grad} \alpha = \mathbf{0}$ , et on doit résoudre l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{B} + \alpha^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

### V – 3 - 1 Equilibres sans courant : solutions générales à variables séparées

Cette classe d'équilibres correspond à **rot B = 0** ; on recherche des solutions en posant  $\mathbf{B} = \text{grad } f$  avec  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , ce qui implique  $\Delta f = 0$ .  $f$  est donc une fonction solution de l'équation de Laplace.

*En coordonnées cartésiennes :*

On procède par séparation des variables :  $f(x,y,z) = X(x) Y(y) Z(z)$ . On doit résoudre l'équation :  $X''/X + Y''/Y + Z''/Z = 0$ .

Posons  $X''/X = -k_x^2$  et  $Y''/Y = -k_y^2$ ,  $k_x$  et  $k_y$  nombres réels. On en déduit  $Z''/Z - k_x^2 - k_y^2 = 0$ , ce qui fournit une solution générale décroissante en  $z$  du type :

$$f(x,y,z) = \int_0^\infty \int_0^\infty A_{xy} e^{i(k_x x + k_y y - lz)} dk_x dk_y \quad \text{où } l = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$$

*En coordonnées cylindriques :*

On pose  $f(r,\theta,z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$  avec  $\Delta f = (1/r) \partial(r\partial f/\partial r)/\partial r + (1/r^2) \partial^2 f/\partial \theta^2 + \partial^2 f/\partial z^2 = 0$ , soit :

$$(1/rR) \partial(r\partial R/\partial r)/\partial r + (1/r^2) (1/\Theta) \partial^2 \Theta/\partial \theta^2 + (1/Z) \partial^2 Z/\partial z^2 = 0$$

On recherche des solutions angulaires  $2\pi$  périodiques, donc  $\Theta(\theta) = e^{im\theta}$ ,  $m$  entier, et décroissantes en altitude, telles que  $Z(z) = e^{-kz}$  ( $k$  réel strictement positif). Il reste alors à résoudre :

$$(1/rR) \partial(r\partial R/\partial r)/\partial r - m^2/r^2 + k^2 = 0,$$

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - m^2) R = 0$$

c'est une équation de Bessel ayant pour solution :

$R(r) = A_{mk} J_m(kr) + B_{mk} N_m(kr)$ , où  $J_m$  et  $N_m$  sont les fonctions de Bessel et de Neumann d'indice entier. La solution générale prend la forme :

$$f(r,\theta,z) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty [A_{mk} J_m(kr) + B_{mk} N_m(kr)] e^{im\theta} e^{-kz} dk$$

*En coordonnées polaires :*

Avec  $k=0$ , la partie radiale s'écrit  $r^2 R'' + r R' - m^2 R = 0$

Si  $m \neq 0$ ,  $R(r) = A_m r^{-m} + B_m r^m$

Si  $m = 0$ ,  $R(r) = C \ln(r)$

La solution générale prend la forme :

$$f(r,\theta,z) = \sum_{m=0}^\infty [A_m r^{-m} + B_m r^m] e^{im\theta} + C \ln(r), \quad \text{avec } m \text{ entier}$$

*En coordonnées sphériques :*

On pose  $f(r,\theta,\varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$  avec  $\Delta f = (1/r) \partial^2(rf)/\partial r^2 + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial(\sin \theta \partial f/\partial \theta)/\partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 f/\partial \varphi^2 = 0$ , soit :

$$(1/r) \partial^2(rf)/\partial r^2 + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial(\sin \theta \partial f/\partial \theta)/\partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 f/\partial \varphi^2 = 0$$

$$\text{et } (1/rR) \partial^2(rR)/\partial r^2 + (1/r^2 \sin \theta) [(1/\Theta) \partial(\sin \theta \partial \Theta/\partial \theta)/\partial \theta + (1/\Phi \sin \theta) \partial^2 \Phi/\partial \varphi^2] = 0$$

On recherche des solutions angulaires  $2\pi$  périodiques, donc  $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$ ,  $m$  entier ; on pose alors pour la partie dépendant de  $\theta$  :

$$(1/\sin \theta) [(1/\Theta) \partial(\sin \theta \partial \Theta/\partial \theta)/\partial \theta - m^2/\sin \theta] = -l(l+1), \quad \text{avec } l \text{ entier positif ou nul.}$$

Cette équation admet pour solution les fonctions associées de Legendre  $P_l^m(\cos \theta)$  avec  $-1 \leq m \leq l$ , il y a  $2l+1$  valeurs de  $m$  possibles.

Si  $m = 0$ , les fonctions associées  $P_l^m(\cos \theta)$  se réduisent aux polynômes de Legendre  $P_l(\cos \theta)$

Avec cette solution en  $\theta$ , la partie radiale  $R$  obéit à l'équation différentielle :

$$r^2 R'' + 2r R' - l(l+1) R = 0$$

dont les solutions sont du type  $R = A r^1 + B r^{-1}$

La solution générale prend la forme suivante:

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}] P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

### V - 3 - 2 Equilibres sans force à $\alpha$ constant: solutions générales à variables séparées

On a maintenant  $\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$  telles que  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ; on recherche des solutions en posant :

$$\mathbf{B} = \alpha \text{rot}(\mathbf{f} \mathbf{a}) + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{f} \mathbf{a}))$$

où  $f$  est une fonction et  $\mathbf{a}$  un vecteur constant quelconque.

On peut montrer que  $f$  satisfait  $\Delta f + \alpha^2 f = 0$ ,  $f$  est donc solution de l'équation d'Helmholtz.

En coordonnées cartésiennes avec  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$

On procède par séparation des variables :  $f(x,y,z) = X(x) Y(y) Z(z)$ . On doit résoudre l'équation :  $X''/X + Y''/Y + Z''/Z + \alpha^2 = 0$ .

Posons  $X''/X = -k_x^2$  et  $Y''/Y = -k_y^2$ ,  $k_x$  et  $k_y$  nombres réels. On en déduit  $Z''/Z - k_x^2 - k_y^2 + \alpha^2 = 0$ , ce qui fournit une solution générale décroissante en  $z$  du type

$$f(x,y,z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_{xy} e^{i(k_x x + k_y y - lz)} dk_x dk_y \quad \text{où } l = (k_x^2 + k_y^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

$\mathbf{B}$  a pour coordonnées  $(\alpha \partial f / \partial y + \partial^2 f / \partial x \partial z, -\alpha \partial f / \partial x + \partial^2 f / \partial y \partial z, -\partial^2 f / \partial x^2 - \partial^2 f / \partial y^2)$  :

$$B_x = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_{xy} i (\alpha k_y - l k_x) e^{i(k_x x + k_y y - lz)} dk_x dk_y$$

$$B_y = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} -A_{xy} i (\alpha k_x + l k_y) e^{i(k_x x + k_y y - lz)} dk_x dk_y$$

$$B_z = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_{xy} k^2 e^{i(k_x x + k_y y - lz)} dk_x dk_y$$

Application : une arcade coronale dépendant de  $x$  et  $z$

On impose  $k_y = 0$  et  $k_x = \pm k$ ,  $k$  étant donné.

On a ainsi  $l = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$  qui est également fixé.

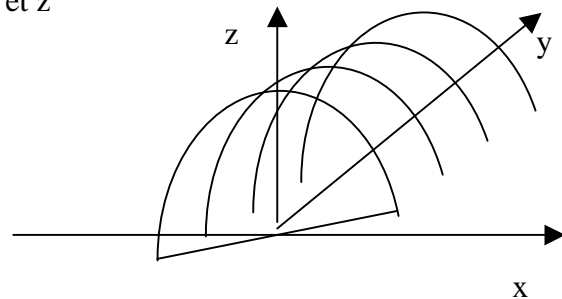
$$B_x = -(l/k) B_0 \cos(kx) e^{-lz}$$

$$B_y = -(\alpha/k) B_0 \cos(kx) e^{-lz}$$

$$B_z = B_0 \sin(kx) e^{-lz}$$

$$\text{Avec en module } B = B_0 e^{-lz}$$

$$\text{Et } B_y/B_x = \alpha/l = \text{constante}$$



Les lignes de champ sont données par  $dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z$  et sont contenues dans les plans parallèles d'équation  $y = (\alpha/l) x + \text{constante}$ . Dans ces plans parallèles, leur équation est :

$$z = (1/k) \ln|\cos(kx)| + z_0, \quad \text{où } z_0 \text{ est la hauteur de l'arcade.}$$

En coordonnées cylindriques :

On pose  $f(r,\theta,z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$  :

$$(1/rR) \partial(r\partial R/\partial r)/\partial r + (1/r^2) (1/\Theta) \partial^2 \Theta/\partial \theta^2 + (1/Z) \partial^2 Z/\partial z^2 + \alpha^2 = 0$$

On recherche des solutions angulaires  $2\pi$  périodiques,  $\Theta(\theta) = e^{im\theta}$ ,  $m$  entier, et décroissantes en altitude, telles que  $Z(z) = e^{-lz}$  ( $l$  réel strictement positif). Il reste alors à résoudre:



$(1/rR) \partial(r\partial R/\partial r)/\partial r - m^2/r^2 + l^2 + \alpha^2 = 0$ , soit

$$r^2 R'' + r R' + (l^2 + \alpha^2) r^2 - m^2) R = 0$$

c'est une équation de Bessel ayant pour solution :

$R(r) = A_m J_m(kr) + B_m N_m(kr)$  avec  $k^2 = l^2 + \alpha^2$ . La solution générale prend ainsi la forme :

$$f(r, \theta, z) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty [A_{mk} J_m(kr) + B_{mk} N_m(kr)] e^{i m \theta} e^{-lz} dk, \text{ où } l = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

Application 1 : une tache solaire en symétrie cylindrique ( $\partial/\partial\theta = 0$  donc  $m = 0$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$ )

On impose comme pour l'arcade  $k$  donc également  $l = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ , d'où :

$$f(r, z) = A J_0(kr) e^{-lz}$$

$\mathbf{B}$  a pour coordonnées  $(\partial^2 f/\partial r \partial z, -\alpha \partial f/\partial r, -1/r \partial(r\partial f/\partial r)/\partial r)$  avec  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$

En invoquant certaines propriétés des fonctions de Bessel  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$ , à savoir :

$d(x J_1)/dx = x J_0$  et  $dJ_0/dx = -J_1$ , on trouve finalement :

$$\begin{cases} B_r = (1/k) B_0 J_1(kr) e^{-lz} \\ B_\theta = (\alpha/k) B_0 J_1(kr) e^{-lz} \\ B_z = B_0 J_0(kr) e^{-lz} \end{cases} \text{ où } l = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$$

Les lignes de champ sont données par  $dr/B_r = r d\theta/B_\theta = dz/B_z$  et sont représentées dans le plan  $(r, \theta)$  par des spirales d'équation polaire  $r = (1/\alpha)(\theta - \theta_0)$ , avec  $\theta_0$  constante. Dans les plans  $(r, z)$ , leur équation est :  $z = (1/k) \ln|(kr)J_1(kr)| + \text{constante}$ . La solution se limite au premier zéro de la fonction de Bessel  $J_1$  de sorte que  $0 < kr < 3.83$ . Comme  $dz/dr = J_0(kr)/J_1(kr)$ ,  $z$  est maximal au premier zéro de la fonction de Bessel  $J_0$  qui vaut  $kr \approx 2.4$

Application 2 : un tube de flux mince en symétrie cylindrique ( $\partial/\partial\theta = 0$  donc  $m = 0$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$ )

On reprend la solution trouvée ci dessus, mais on s'intéresse uniquement à la solution asymptotique lorsque  $r \rightarrow 0$ . On sait que  $J_0(kr) \sim 1$  et que  $J_1(kr) \sim kr/2$  ( $J_n(x) \sim (x/2)^n/n!$  lorsque  $x \rightarrow 0$ ). D'où :

$$\begin{cases} B_r = B_0 (rl/2) e^{-lz} \\ B_\theta = B_0 (r\alpha/2) e^{-lz} \\ B_z = B_0 e^{-lz} \end{cases}$$

En  $r = 0$  (axe du tube), le champ est purement vertical en  $B_0 e^{-lz}$

*En coordonnées sphériques :*

On pose  $f(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ :

$$(1/rR) \partial^2(rR)/\partial r^2 + (1/r^2 \sin\theta) [(1/\Theta) \partial(\sin\theta \partial\Theta/\partial\theta)/\partial\theta + (1/\Phi \sin\theta) \partial^2\Phi/\partial\varphi^2] + \alpha^2 = 0$$

On recherche des solutions angulaires  $2\pi$  périodiques, donc  $\Phi(\varphi) = e^{i m \varphi}$ ,  $m$  entier ; on pose alors pour la partie dépendant de  $\theta$  :

$$(1/\sin\theta) [(1/\Theta) \partial(\sin\theta \partial\Theta/\partial\theta)/\partial\theta - m^2/\sin\theta] = -l(1+l), \text{ avec } l \text{ entier positif ou nul.}$$

ayant pour solution les fonctions associées de Legendre  $P_l^m(\cos\theta)$  avec  $-l \leq m \leq l$

Avec cette solution en  $\theta$ , la partie radiale  $R$  obéit à l'équation différentielle :

$$r^2 R'' + 2 r R' + (\alpha^2 r^2 - l(l+1)) R = 0$$

que l'on transforme par un artifice en posant  $R(r) = r^{-1/2} S(r)$ , d'où une nouvelle équation :

$$r^2 S'' + r S' + (\alpha^2 r^2 - (l+1/2)^2) S = 0$$

dont les solutions sont les fonctions de Bessel demi entières  $S(r) = J_{l+1/2}(\alpha r)$

La solution générale prend la forme suivante:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} e^{i m \varphi} P_l^m(\cos\theta) r^{-1/2} J_{l+1/2}(\alpha r)$$

Les fonctions  $e^{i m \varphi} P_l^m(\cos\theta)$  sont à une constante près les harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$

### V – 3 - 3 Equilibres 2D sans force à $\alpha$ non constant

Le problème se traite en 2D (deux variables  $x, z$ ).

Les équations de base sont  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{B} / \mu_0$ ,  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  avec  $\partial/\partial y = 0$

On pose  $\mathbf{B} = (\partial A / \partial z, B_y, -\partial A / \partial x)$  où  $A(x, z)$  est un potentiel vecteur porté par l'axe Oy. L'équation  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  est vérifiée. On en déduit  $\mathbf{j} = (-\partial B_y / \partial z, \Delta A, \partial B_y / \partial x)$ . Le champ est sans force si :

$$\begin{cases} \Delta A \partial A / \partial x + \partial(B_y^2/2) / \partial x = 0 \\ \partial A / \partial z \partial B_y / \partial x - \partial A / \partial x \partial B_y / \partial z = 0 \text{ ce qui implique } \underline{B_y = f(A) \text{ fonction de } A \text{ seulement}} \\ \Delta A \partial A / \partial z + \partial(B_y^2/2) / \partial z = 0 \end{cases}$$

On déduit de la première (ou de la dernière équation) :  $\Delta A + \partial(B_y^2/2) / \partial A = 0$

Et  $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}$  signifie que  $\Delta A = \alpha B_y = -\partial(B_y^2/2) / \partial A$ , donc  $\alpha = -\partial B_y / \partial A$

Si  $B_y = \text{constante}$ , le champ est sans courant ( $\alpha = 0$ )

Si  $B_y = k A$ ,  $k$  constante, le champ est sans force linéaire ( $\alpha = \text{constante}$ )

Généralement, on impose la fonction  $B_y(A)$  puis on résoud l'équation  $\Delta A + \partial(B_y^2/2) / \partial A = 0$

L'équation des lignes de champ est donnée par la relation  $dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z$  ; dans le plan xOz on trouve  $A(x, z) = \text{constante}$ . Ceci est toujours vrai en 2D, même s'il y a une force de Laplace.

### V – 3 - 4 Tube cylindrique sans force à $\alpha$ constant

A titre d'exemple, nous nous intéressons à un tube de flux à symétrie cylindrique sans force à  $\alpha$  constant dont la torsion  $\varphi$  est uniforme, dont la longueur  $L$  et le rayon  $R$  sont donnés. En coordonnées cylindriques, le champ magnétique a pour coordonnées  $\mathbf{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r))$  et ne dépend que de la seule variable  $r$ . L'équation  $\text{div} \mathbf{B}$  est vérifiée. L'uniformité de la torsion  $\varphi$  se traduit par la relation :

$$B_\theta / B_z = r \varphi / L$$

Le courant électrique  $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{B} / \mu_0$  a pour coordonnées  $(0, -dB_z/dr, (1/r) d(rB_\theta)/dr) / \mu_0$

La force de Laplace  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$  n'a de composante que radiale et s'écrit :

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = [-d(B_z^2 + B_\theta^2)/dr - B_\theta^2/r] \mathbf{e}_r / \mu_0$$

et comporte un gradient de pression magnétique ainsi qu'une tension magnétique.

Le champ est sans force, donc :

$$d(B_z^2 + B_\theta^2)/dr + B_\theta^2/r = 0$$

Sachant que  $B_\theta = B_z (r \varphi / L)$ , on obtient une équation différentielle en  $B_z$  qui s'intègre et donne :

$$B_z = B_0 / [1 + (r\varphi/L)^2], \quad B_\theta = B_0 (r\varphi/L) / [1 + (r\varphi/L)^2], \quad B = B_0 / [1 + (r\varphi/L)^2]^{1/2}$$

Où  $B_0 = B_z(0)$ . Le module  $B$  du champ magnétique décroît avec  $r$ .

$$\text{Flux magnétique } \Phi = \int_0^R B_z 2\pi r dr = \pi B_0 (L^2/\varphi^2) \ln[1 + (R\varphi/L)^2]$$

$$\text{Energie magnétique } E_m = \int_0^R \int_0^L (B^2/2\mu_0) 2\pi r dr dz = (\pi L^3/\varphi^2) (B_0^2/2\mu_0) \ln[1 + (R\varphi/L)^2] = \Phi B_0 L / 2\mu_0$$

*Torsion du tube à flux magnétique  $\Phi$  et longueur  $L$  constants*

Le champ magnétique à la frontière du tube en  $r = R$  est imposé par l'équilibre des pressions qui s'écrit  $P_{\text{ext}} = B(R)^2/2\mu_0 = \text{constante}$  (en supposant  $P$  nul à l'intérieur et  $B$  nul à l'extérieur), d'où :  $B(R) = B_0 / [1+(R\phi/L)^2]^{1/2} = \text{constante}$ , donc  $B_0$  varie comme  $[1+(R\phi/L)^2]^{1/2}$

Le flux magnétique constant à  $L$  fixé implique  $(B_0/\phi^2) \ln[1+(R\phi/L)^2] = \text{constante}$

En faisant le rapport de ces deux expressions, on peut éliminer  $B_0$ , ce qui amène à :

$$[1+(R\phi/L)^2]^{1/2} \ln[1+(R\phi/L)^2] = \phi^2 \times \text{cte}$$

Si  $\phi$  augmente, alors cette expression entraîne  $R\phi$  croissant.

L'énergie magnétique s'écrit aussi  $E_m = \Phi B_0 L/2\mu_0$ . Elle varie comme  $B_0$ , donc comme  $[1+(R\phi/L)^2]^{1/2}$ . Comme  $\phi$  croissant entraîne  $R\phi$  croissant, à son tour  $E_m$  croît.

*Éirement du tube à flux magnétique  $\Phi$  et torsion  $\phi$  constants*

L'équilibre à la frontière du tube impliquant la variation de  $B_0$  comme  $[1+(R\phi/L)^2]^{1/2}$ , l'énergie magnétique varie selon  $L [1+(R\phi/L)^2]^{1/2}$ . Si le rayon du tube est petit devant sa longueur, alors  $E_m$  est proportionnel à  $L$ , donc augmente par étirement du tube.

On peut donc stocker de l'énergie magnétique dans un tube en le tordant ou en l'étirant : c'est ce que fait le Soleil par l'intermédiaire des mouvements photosphériques qui agissent sur les ancrages des tubes magnétiques.

### V – 3 - 5 Hélicité magnétique

Sur un volume fini  $V$ , on montre que l'intégrale  $\iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV = H$  est invariante pour un plasma parfaitement conducteur et se nomme hélicité magnétique. Dans cette intégrale,  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur dont dérive  $\mathbf{B}$  par la relation  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

On montre également que l'état d'énergie minimale d'une configuration magnétique est un champ sans force à  $\alpha$  constant.

### V – 4 Equation de diffusion et d'advection du champ magnétique

De  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 [ \mathbf{j} + 1/C^2 \partial \mathbf{E} / \partial t ]$ , on tire en prenant le rotationnel de cette équation:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} + 1/C^2 \partial \text{rot } \mathbf{E} / \partial t$$

avec  $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$ , et  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , on obtient:

$$-\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} + 1/C^2 \partial \text{rot } \mathbf{E} / \partial t = \mu_0 \text{rot } \mathbf{j} - 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$$

Avec la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ , on obtient :

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \text{rot} ( \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) ) + 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$$

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \text{rot} ( \sigma \mathbf{E} ) + \mu_0 \text{rot} ( \sigma (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) ) + 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$$

$$\text{Or } \text{rot} ( \sigma \mathbf{E} ) = \sigma \text{rot } \mathbf{E} + \text{grad } \sigma \wedge \mathbf{E}$$

$$\text{et } \text{rot} ( \sigma (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) ) = \sigma \text{rot} ( \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} ) + \text{grad } \sigma \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

d'où

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \text{rot } \mathbf{E} - \mu_0 \text{grad } \sigma \wedge \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \text{rot} ( \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} ) - \mu_0 \text{grad } \sigma \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$$

avec  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , on obtient finalement:

$$\boxed{[\Delta \mathbf{B} - 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2] / \mu_0 \sigma + \text{rot} ( \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} ) + 1/\sigma [\text{grad } \sigma \wedge (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})] = \partial \mathbf{B} / \partial t}$$

Dans l'hypothèse où  $\text{grad } \sigma = 0$ , c'est à dire lorsque  $\sigma$  ne varie pas dans l'espace (ce qui signifie un milieu isotherme puisque  $\sigma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{3/2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ), cette équation se simplifie:

$$[\Delta \mathbf{B} - 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2] / \mu_0 \sigma + \text{rot} ( \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} ) = \partial \mathbf{B} / \partial t$$

Dans un milieu de **conductivité infinie**, on a simplement  $\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$  qui constitue une équation de transport ou d'advection du champ magnétique.

Dans un milieu de **conductivité finie**, on reconnaît dans le premier terme l'équation de propagation des ondes lumineuses à la vitesse  $C$  ( $\Delta \mathbf{B} = 1/C^2 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$ ). La vitesse caractéristique  $v$  du plasma étant très petite devant  $C$ , nous pouvons négliger le terme en  $1/C^2$  et nous aboutissons à l'équation d'induction du champ magnétique :

$$\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \sigma + \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$$

Cette équation comprend un terme de **diffusion**  $\Delta \mathbf{B} / \mu_0 \sigma = \partial \mathbf{B} / \partial t$  dont le temps caractéristique (temps de diffusion) est égal à  $\tau_d = L^2 \mu_0 \sigma$  ( $L$  dimension caractéristique) ;

et un terme d'**advection**  $\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$  dont le temps caractéristique (temps dynamique) est égal à  $\tau = L/v$ .

Numériquement, on trouve avec  $\sigma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ T}^{3/2} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  :

Photosphère chromosphère (10000 K) :  $\sigma \approx 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , couronne ( $10^6 \text{ K}$ ) :  $\sigma \approx 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

*Granulation photosphérique*  $L = 10^3 \text{ km}$ ,  $v = 1 \text{ km/s}$  :  $\tau_d = 10^9 \text{ s}$ ,  $\tau = 10^3 \text{ s}$

$\tau$  est du même ordre de grandeur que la durée de vie des granules (10 mn)

*Structures coronales* :  $L = 10^5 \text{ km}$ ,  $v = 100 \text{ km/s}$  :  $\tau_d = 10^{16} \text{ s}$ ,  $\tau = 10^3 \text{ s}$

Aux échelles des structures solaires observables ( $L > 100 \text{ km}$ ), le temps de diffusion  $\tau_d$  est toujours très long devant le temps dynamique  $\tau$  ; la diffusion du champ magnétique est donc inefficace, sauf sur des échelles minuscules (100 fois plus petites que le minimum observable) de l'ordre de 1 km ou moins, ce qui laisse supposer que les phénomènes purement diffusifs ne se produisent que sur ces petites échelles spatiales. Pour  $L = 1 \text{ km}$ , on trouve  $\tau_d = 10^3 \text{ s}$  pour la photosphère.

Mais il existe une échelle de temps intermédiaire qui décrit l'instabilité de déchirement (« tearing mode ») du champ magnétique dans une région de champs magnétiques anti parallèles par exemple (nappe de courant). Cette instabilité se produit sur l'échelle de temps caractéristique égale à :

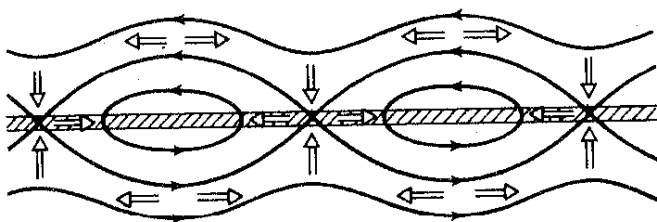
$$\tau_t = (\tau_d \tau)^{1/2}$$

ce qui donnera numériquement pour une région d'épaisseur 100 km (minimum observable) à 10000 K et  $v = 1 \text{ km/s}$  :  $\tau_d = 10^7 \text{ s}$ ,  $\tau = 10^3 \text{ s}$ , et  $\tau_t = 10^5 \text{ s}$  soit une journée. Le rapport

$$\mathbf{R}_m = \tau_d / \tau = L \mu_0 \sigma v$$

est appelé **nombre de Reynolds magnétique**  $\mathbf{R}_m$  et le temps de « tearing » s'en déduit par  $\tau_t = \tau (\mathbf{R}_m)^{1/2}$ . Le rapport  $P = \mathbf{R}_m / \mathbf{R}_e = (L^2 \mu_0 \sigma) / (L^2/v) = \mu_0 \sigma v$  du nombre de Reynolds magnétique au nombre de Reynolds visqueux est appelé nombre de **Prandtl** magnétique.

Dans la couronne avec les valeurs ci dessus,  $\mathbf{R}_m \approx 10^{13}$  ; dans la granulation, on aurait  $\mathbf{R}_m \approx 10^6$ .  $\mathbf{R}_m$  est de l'ordre de 1 seulement aux petites l'échelles spatiales diffusives ( $< 100 \text{ m}$ ).



*Modes de déchirement « tearing modes » du champ magnétique dans une configuration anti parallèle (nappe de courant); les points X de la nappe sont des sites de reconnexion magnétique.*

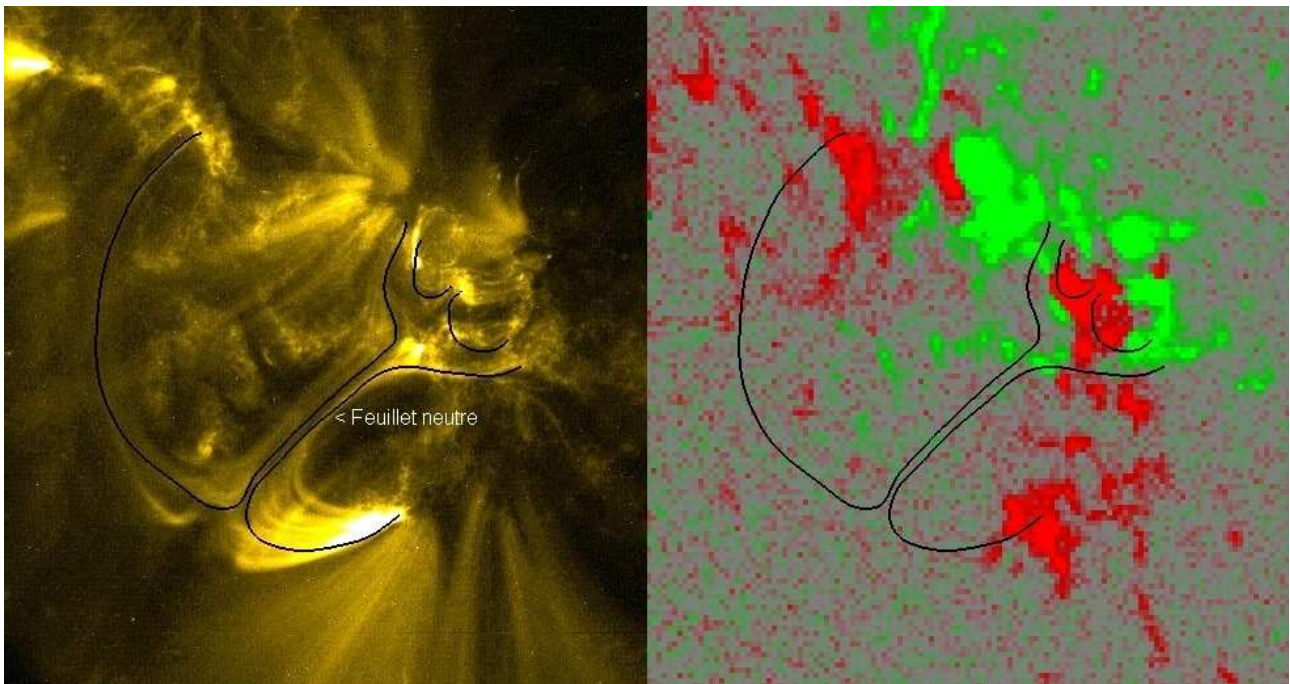
## Résolution de l'équation de diffusion dans quelques cas simples

On se place dans un espace à 1 dimension  $x$  et on suppose connue à l'instant  $t = 0$  la distribution du champ magnétique vertical  $B(x,0)$ .  $B(x,t)$  est donné par la résolution de l'équation de diffusion :  
 $\partial^2 B / \partial x^2 / \mu_0 \sigma = \partial B / \partial t$

Cette équation se résoud par transformée de Fourier. Avec la convention

$TF_f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$ , on obtient en prenant la TF de l'équation :

$-4 \pi^2 u^2 TF_B(u,t) / \mu_0 \sigma = \partial TF_B(u,t) / \partial t$  en utilisant la propriété de la TF :  $TF_{f'} = -4 \pi^2 u^2 TF_f$   
 Cette équation a pour solution :  $TF_B(u,t) = TF_B(u,0) e^{-4 \pi^2 u^2 t / \mu_0 \sigma}$



*Observation d'une nappe de courant dans un site éruptif (TRACE, NASA, à gauche en EUV et SOHO/MDI, ESA/NASA, à droite en champ magnétique longitudinal)*

Et par transformée de Fourier inverse sur  $u$ , on obtient  $B(x,t)$  connaissant la transformée de Fourier de la distribution spatiale initiale du champ magnétique :

$$B(x,t) = TF^{-1} [ TF_{B(x,0)}(u,0) e^{-4 \pi^2 u^2 t / \mu_0 \sigma} ]$$

Remarque :  $e^{-4 \pi^2 u^2 t / \mu_0 \sigma} = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} TF(e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t})$

donc  $TF_B(u,t) = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} TF[B(x,0)] TF[e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t}] = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} TF[B(x,0) * e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t}]$   
 où  $*$  désigne le produit de convolution, en utilisant le fait que la TF d'un produit de convolution est égal au produit des deux TF. On en déduit donc que :

$$B(x,t) = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} B(x,0) * e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t} \quad (\text{produit de convolution sur } x)$$

En développant,  $B(x,t) = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(u-x,0) e^{-\mu_0 \sigma u^2 / 4t} du$

Si  $B(x,0) = B_0 \delta(x)$  fonction de Dirac, on obtient de suite  $B(x,t) = B_0 (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t}$

Si  $B(x,0)$  est une fonction porte de hauteur  $B_0$  et de largeur  $l$ , alors :

$$B(x,t) = B_0 \text{TF}^{-1} \left[ \frac{\sin(\pi l u)}{\pi u} e^{-4 \pi^2 u^2 t / \mu_0 \sigma} \right]$$

car la transformée de Fourier de la porte est  $B_0 \sin(\pi l u) / (\pi u)$

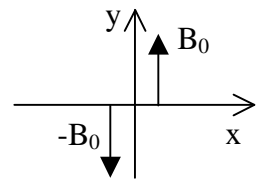
### Nappe de courant et point neutre X

Une nappe de courant dans le plan Oyz infiniment fine peut être décrite par le modèle simple :

$\mathbf{B} = B(x,t) \mathbf{e}_y$  avec:  $B(x,0) = B_0$  pour  $x > 0$  et  $B(x,0) = -B_0$  pour  $x < 0$ . Le résultat ci dessus (produit de convolution) nous donne :

$$B(x,t) = (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x-u,0) e^{-\mu_0 \sigma u^2 / 4t} du = 2 B_0 (\mu_0 \sigma / 4\pi t)^{1/2} \int_0^x e^{-\mu_0 \sigma u^2 / 4t} du$$

$$B(x,t) = (2 B_0 / \sqrt{\pi}) \int_0^y e^{-u^2} du \quad \text{pour } y = x / (4t / \mu_0 \sigma)^{1/2}$$



$$B(x,t) = B_0 \text{erf}[x / (4t / \mu_0 \sigma)^{1/2}] \quad \text{où } \text{erf}(y) = 2 / \sqrt{\pi} \int_0^y e^{-u^2} du \quad \text{est la fonction d'erreur, tabulée.}$$

On a  $B(0,t) = 0$  (point neutre X) et  $\lim B(x,t) = \pm B_0$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$

La densité de courant est donnée par  $j_z = (1 / \mu_0) dB / dx = [2B_0 / (\mu_0 \sqrt{\pi})] (\mu_0 \sigma / 4t)^{1/2} e^{-\mu_0 \sigma x^2 / 4t}$

En  $x = 0$  dans la nappe,  $j_z(0) = [2B_0 / (\mu_0 \sqrt{\pi})] (\mu_0 \sigma / 4t)^{1/2}$  diminue avec  $t$ . Néanmoins, le courant total :

$$j_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_z dx = 2B_0 / \mu_0 \text{ est conservé, ce qui signifie que le courant diffuse en s'étendant.}$$

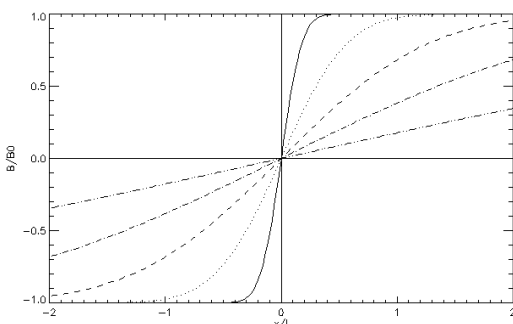
La puissance totale dissipée par effet Joule  $P_j = \int_{-\infty}^{+\infty} j_z^2 / \sigma dx$  peut se calculer sachant que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$

$$\text{et on obtient } P_j = (B_0^2 / \mu_0) [2 / (\mu_0 \pi \sigma t)]^{1/2}$$

La puissance Joule varie donc en  $1 / \sqrt{t}$  : elle assure la conversion de l'énergie magnétique en chaleur.

Le résultat de la diffusion est un étalement des champs magnétiques, et une diminution de l'intensité du champ, comme le montre la figure ci dessous pour laquelle la distribution initiale est  $B(x,0) = B_0$  pour  $x > 0$  et  $B(x,0) = -B_0$  pour  $x < 0$ . On a tracé la fonction normalisée en  $x$  et  $t$ :

$$B(x,t) = B_0 \text{erf}[(x/l) / (4t / \tau_d)^{1/2}], \quad l \text{ étant définie par } \tau_d = l^2 \mu_0 \sigma, \quad \tau_d \text{ étant le temps diffusif.}$$



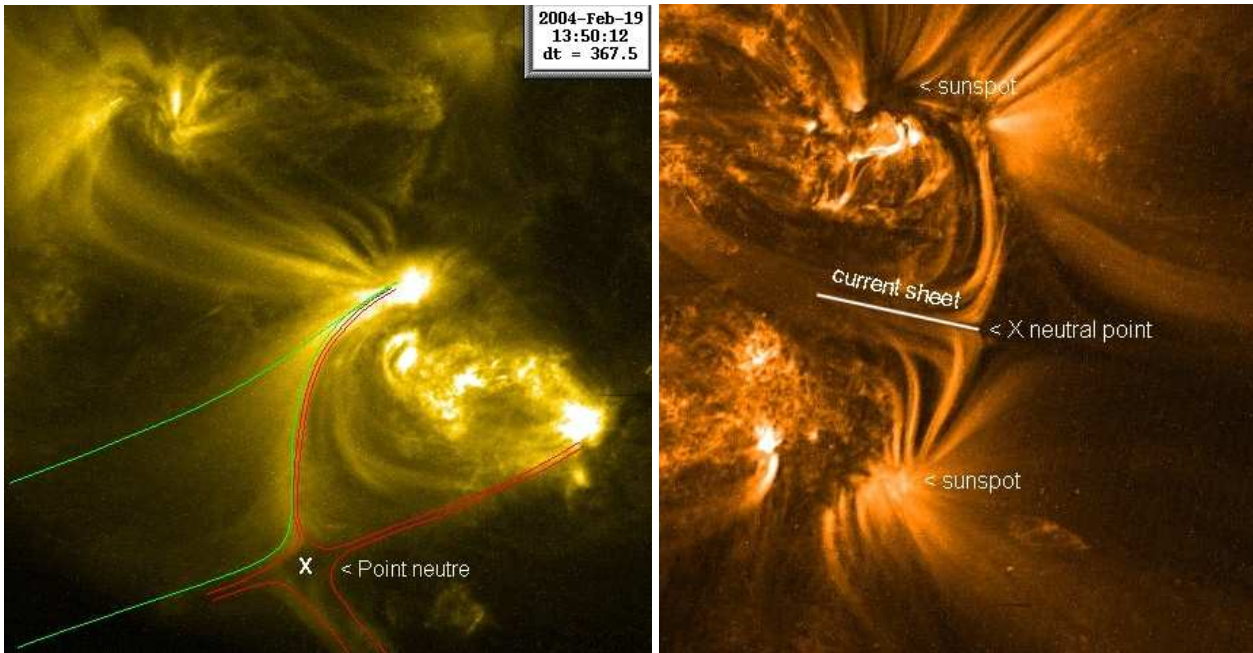
*Diffusion du champ magnétique dans une nappe de courant.*

*Le champ magnétique est initialement antiparallèle dans l'espace  $x > 0$  et  $x < 0$ . On a représenté  $B/B_0$  en fonction de  $x/l$  pour  $t/\tau_d =$*

*0.01 ——— 0.1 ..... 0.5 -----*

*2.0 - - - - - 10.0 - - - - -*

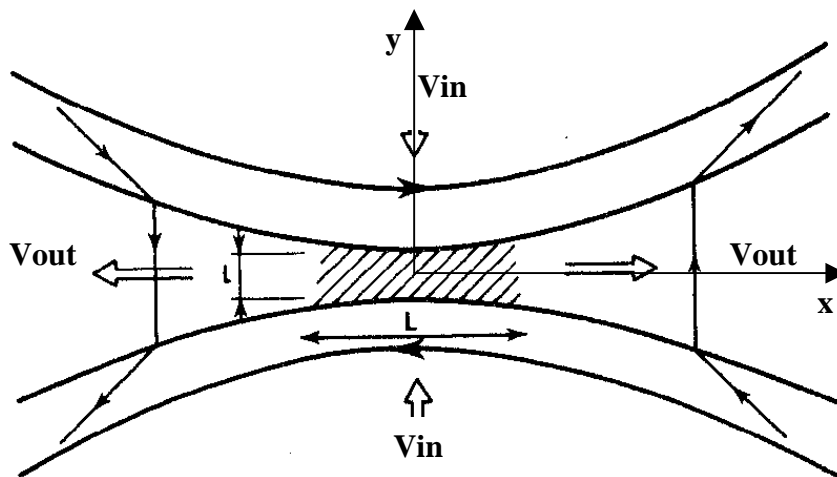
*avec  $\tau_d = l^2 \mu_0 \sigma$  temps diffusif,  $l$  épaisseur de la nappe*



Points et feuillets neutres de type X au dessus d'une région éruptive (TRACE, NASA, en EUV)

## V – 5 Reconnexion magnétique

Ainsi que nous l'avons dit, elle ne peut se développer qu'aux petites échelles, au voisinage d'un point d'annihilation des champs magnétiques de type X, au sein d'une nappe de courant très fine dont l'épaisseur  $l$  est gouvernée par les mouvements de convergence du plasma vers le point X comme le montre la figure ci dessous.



*Reconnexion magnétique de type Petschek. La partie hachurée est une région centrale purement diffusive, et d'épaisseur  $l$  extrêmement fine dans laquelle le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$  est voisin de 1.*

Le temps diffusif dans la couche d'épaisseur  $l$  s'écrit :  $\tau_d = l^2 \mu_0 \sigma$ . Si  $v_{in}$  désigne la vitesse de convergence du plasma vers la nappe (celle ci peut être imposée par exemple par les mouvements photosphériques entraînant les pieds des lignes de force d'une structure plus haute dans leur mouvement), alors  $l = \tau_d v_{in} = l^2 \mu_0 \sigma v_{in}$  d'où l'on tire :

$$l = 1 / (\mu_0 \sigma v_{in})$$

En général,  $v_{in}$  est faible (de l'ordre du km/s).

En prenant  $v_{in} = 1$  km/s,  $\sigma \approx 10^3 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $l$  de la couche est seulement le mètre !



Le plasma est éjecté du site diffusif à la **vitesse d'Alfven**  $v_{out} = v_a = B/(\mu_0 \rho)^{1/2}$ , vitesse en général élevée mais inobservable vu la faible épaisseur du site de reconnexion. B est la valeur du champ externe à la nappe de courant.  $\rho$  est la masse volumique interne à la nappe.

Dans la photosphère calme :  $B = 10^{-3}$  T,  $\rho = 10^{-6}$  kg m<sup>-3</sup> donne  $v_a = 1$  km/s

Dans les taches:  $B = 0.1$  T,  $\rho = 10^{-6}$  kg m<sup>-3</sup> donne  $v_a = 100$  km/s

Dans la couronne:  $B = 10^{-3}$  T,  $\rho = 10^{-12}$  kg m<sup>-3</sup> donne  $v_a = 1000$  km/s

La longueur L de la région diffusive est donnée par la **conservation de la masse** :

$$\rho_{in} L v_{in} = \rho_{out} l v_{out} = \rho_{out} l v_a$$

Ce qui donne L de l'ordre du m dans la photosphère calme, et du km dans les conditions de la couronne, avec  $v_{in} = 1$  km/s et  $\rho_{in} \approx \rho_{out}$ .

Par ailleurs, la conservation du flux magnétique donne  $v_{in} B_{in} = v_{out} B_{out}$ . Comme  $v_{in} \ll v_{out}$ , on en déduit que  $B_{in} \gg B_{out}$ . La nappe de courant convertit donc l'énergie magnétique en énergie cinétique et en chaleur (effet Joule).

La topologie locale des lignes de champ peut être décrite par le modèle simple de champ magnétique  $\mathbf{B}(y, \alpha^2 x, 0)$  dans le repère Oxy de la figure, avec  $\alpha^2 \ll 1$ . Les lignes de champ magnétique sont des hyperboles d'équation  $y^2 - \alpha^2 x^2 = \text{constante}$ , ayant pour asymptotes  $y = \pm \alpha x$ .

La densité de courant est alors donnée par  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}/\mu_0 = (\alpha^2 - 1)/\mu_0 \mathbf{e}_z$

D'où la force de Laplace  $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = [ (1-\alpha^2) \alpha^2 x \mathbf{e}_x - (1-\alpha^2) y \mathbf{e}_y ]/\mu_0$

Cette relation montre que le plasma est poussé le long de l'axe Oy vers la nappe de courant puisque  $\mathbf{F}(0,y) = - (1-\alpha^2) y \mathbf{e}_y / \mu_0$  ( $F_y < 0$  si  $y > 0$ ), et éjecté de la nappe le long de l'axe Ox où l'on a maintenant  $\mathbf{F}(x,0) = (1-\alpha^2) \alpha^2 x \mathbf{e}_x / \mu_0$  ( $F_x > 0$  si  $x > 0$ ).

## V – 6 Ondes acoustiques, ondes d'Alfven, ondes magnéto acoustiques, ondes de gravité

### V – 6 –1 Ondes de pression longitudinales

On dispose des équations de base, avec  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  et en négligeant la gravité :

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 && \text{conservation de la masse} \\ \rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] &= - \text{grad } P && \text{mouvement} \end{aligned}$$

On se place dans l'hypothèse de petits mouvements le long de l'axe des x :

$$\partial \rho / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x = 0$$

$$\rho_0 \partial v / \partial t = - \partial P / \partial x$$

On a négligé le terme  $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v})$  du second ordre, et  $\rho_0$  est la masse volumique au repos.

Pour aller plus loin, il faut relier P à  $\rho$  par une loi :

Dans un milieu isotherme,  $P / \rho = \text{constante}$ , d'où il vient  $\partial^2 v / \partial x^2 = (\rho_0 / P_0) \partial^2 v / \partial t^2$ , qui est une équation de propagation d'une onde à la vitesse  $C_s = (P_0 / \rho_0)^{1/2} = (kT_0 / m)^{1/2}$ , m masse atomique

Dans un milieu adiabatique,  $P / \rho^\gamma = \text{constante}$ , d'où il vient  $\partial^2 v / \partial x^2 = (\rho_0 / \gamma P_0) \partial^2 v / \partial t^2$ , qui est une équation de propagation d'une onde à la vitesse  $C_s = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2} = (\gamma kT_0 / m)^{1/2}$ , m masse atomique.



Dans la photosphère, avec  $T = 5800 \text{ K}$ , on trouve  $C_s = (\gamma k T_0 / m)^{1/2} = 9 \text{ km/s}$   
 Dans la chromosphère, avec  $T = 8000 \text{ K}$ , on trouve  $C_s = (\gamma k T_0 / m)^{1/2} = 11 \text{ km/s}$   
 Dans la couronne, avec  $T = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$ , on trouve  $C_s = (\gamma k T_0 / m)^{1/2} = 144 \text{ km/s}$

### V – 6 – 2 Ondes magnétiques d'Alfven transversales

On dispose des équations de base, dans lesquelles on néglige la gravité et la pression:

$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$	conservation de la masse
$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$	mouvement
$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$	
$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$	équation d'induction en conductivité infinie

On se place dans l'hypothèse de petits mouvements le long de l'axe des  $z$  dans un champ uniforme  $\mathbf{B}_0$  porté par l'axe des  $x$ ,  $\rho_0$  étant la masse volumique au repos (figure). Les quantités dépendent de la variable  $x$ .

$\partial \rho / \partial t = 0$  montre que l'on peut considérer  $\rho$  comme constante.

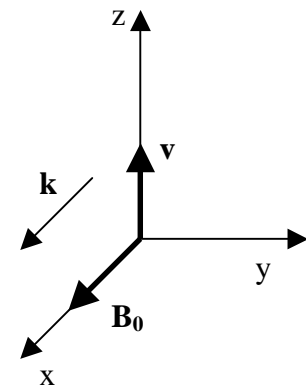
$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = \text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)$$

La 2<sup>ème</sup> équation montre que  $\mathbf{v}$  est orthogonal à  $\mathbf{B}_0$ .

En prenant la dérivée par rapport au temps de la seconde équation, on obtient :

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0$$



La 3<sup>ème</sup> équation montre que la perturbation du champ magnétique est portée par l'axe  $Oz$ , tout comme le mouvement, donc elle est orthogonale à  $\mathbf{B}_0$ . Tous calculs faits, on trouve :

$$\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2 = (\mu_0 \rho_0 / B_0^2) \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 \text{ et } \partial \mathbf{B} / \partial t = B_0 \partial \mathbf{v} / \partial x$$

La 1<sup>ère</sup> équation est une équation de propagation à la vitesse caractéristique appelée vitesse d'Alfven, de l'ordre de 1000 km/s dans la couronne solaire.

$$C_a = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2}$$

La solution est une onde plane de la forme  $\mathbf{v} = v_0 e^{i(kx - \omega t)}$ , la 2<sup>ème</sup> équation donnant la perturbation de champ magnétique  $\mathbf{B} = -B_0 (\mathbf{v} / C_a) \ll B_0$

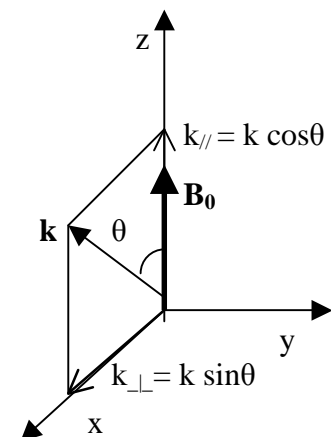
### V – 6 – 3 Ondes magnéto acoustiques

Le cas général est plus complexe : il tient compte à la fois de la pression et du champ magnétique.

On dispose des équations de base, dans lesquelles on néglige la gravité:

$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$	conservation de la masse
$\rho [ \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) ] = -\text{grad } P + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$	mouvement
$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0$	
$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \partial \mathbf{B} / \partial t$	équation d'induction

On relie  $P$  à  $\rho$  par une loi adiabatique,  $P / \rho^\gamma = \text{constante}$



Le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  est supposé uniforme porté par  $Oz$ .

$\rho_0$ , la masse volumique au repos, et  $P_0$  la pression, sont aussi uniformes.

On va rechercher les solutions sous forme d'ondes de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  contenu dans le plan  $xOz$ , et faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Oz$ . En s'intéressant uniquement aux petits mouvements, les équations ci dessus se transforment en :

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0 \\ \rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t &= -(\gamma P_0 / \rho_0) \mathbf{grad} \rho + \mathbf{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 \quad \text{car } P = P_0 (\rho / \rho_0)^\gamma \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \end{aligned}$$

En dérivant la seconde équation par rapport au temps, il vient :

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = -(\gamma P_0 / \rho_0) \mathbf{grad}(\partial \rho / \partial t) + \mathbf{rot}(\partial \mathbf{B} / \partial t) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0$$

On tire  $\partial \rho / \partial t$  et  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  des deux autres équations d'où :

$$\partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = (\gamma P_0 / \rho_0) \mathbf{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)) \wedge \mathbf{B}_0 / (\rho_0 \mu_0)$$

Posons  $C_s = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2}$  et  $C_a = B_0 / (\rho_0 \mu_0)^{1/2}$  respectivement **vitesse du son et d'Alfvén**.

En remarquant que  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ , on aboutit à l'équation finale :

$$\partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = C_s^2 \mathbf{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{v})) + C_a^2 \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_z)) \wedge \mathbf{e}_z$$

Pour résoudre cette équation, on recherche des **ondes planes** sous la forme  $\mathbf{v} = \mathbf{X} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ ,  $\mathbf{X}$  amplitude du mouvement. Sachant que l'on a, dans le cadre des ondes planes, les opérateurs :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} &= i \mathbf{k} \cdot \quad (\text{produit scalaire}) & \mathbf{grad} &= i \mathbf{k} \quad (\text{multiplication}) \\ \mathbf{rot} &= i \mathbf{k} \wedge \quad (\text{produit vectoriel}) \\ \partial / \partial t &= -i \omega \quad (\text{multiplication}) \end{aligned}$$

On transforme cette équation en:  $\omega^2 \mathbf{X} = C_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}) + C_a^2 \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge (\mathbf{X} \wedge \mathbf{e}_z)) \wedge \mathbf{e}_z$

Posons  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  et  $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$ ; on en déduit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} (C_s^2 + C_a^2) k_\perp^2 + C_a^2 k_\parallel^2 - \omega^2 & 0 & C_s^2 k_\perp k_\parallel \\ 0 & C_a^2 k_\parallel^2 - \omega^2 & 0 \\ C_s^2 k_\perp k_\parallel & 0 & C_s^2 k_\parallel^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Ce système n'a de solution non triviale que si son déterminant est nul, on obtient par ce moyen la relation de dispersion  $\omega$  en fonction de  $k$ .

*Premier cas particulier : ondes acoustiques ( $C_a = 0$ )*

On retrouve une vibration longitudinale parallèle à  $\mathbf{k}$  et la relation de dispersion  $\omega = C_s k$

*Second cas particulier : ondes d'Alfvén ( $C_s = 0$ )*

On trouve deux possibilités de vibrations transversales orthogonales à  $\mathbf{B}_0$ :

- une vibration  $x = z = 0$  orthogonale au plan  $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$  et de relation de dispersion  $\omega = C_a k_\parallel$
- une vibration  $y = z = 0$  dans le plan  $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$  et de relation de dispersion  $\omega = C_a k$

*Dans le cas général, on trouve deux relations de dispersion :*

- $\omega = C_a k_\parallel$  qui est une onde d'Alfvén
- $\omega^2 / k^2 = 1/2 \{ [C_s^2 + C_a^2] \pm [(C_s^2 - C_a^2) + 4 C_s^2 C_a^2 \sin^2 \theta]^{1/2} \}$  qui est une vibration  $y = 0$  dans le plan  $(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0)$  avec  $k_\perp = k \sin \theta$  et  $k_\parallel = k \cos \theta$

Cette dernière relation de dispersion délivre deux vitesses de phase  $v_\phi = \omega / k$ , donc 2 modes : un mode rapide (signe +) et un mode lent (signe -). Lorsque  $C_a \gg C_s$ , alors on obtient approximativement pour vitesses de phase  $v_\phi = \omega / k \approx C_a$  (rapide) et  $v_\phi = \omega / k \approx C_s \cos \theta$  (lent)

Si  $\theta = \pi/2$ ,  $k_\parallel = 0$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}_0$  sont **orthogonaux**, il n'y a qu'une seule vibration parallèle à  $Ox$ , le mode rapide, de vitesse de phase  $v_\phi = \omega / k = (C_s^2 + C_a^2)^{1/2}$

Si  $\theta = 0$ ,  $k_{\perp} = 0$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}_0$  sont **parallèles**, il y a deux modes, une onde d'Alfvén transversale parallèle à  $Oy$  de vitesse de phase  $v_{\varphi} = \omega / k = C_a$  et une onde sonore longitudinale parallèle à  $Oz$  de vitesse de phase  $v_{\varphi} = \omega / k = C_s$

Les relations entre les composantes  $x$  et  $z$  de la vibration sont les suivantes :

$$z/x = - C_s^2 \sin\theta \cos\theta / (C_s^2 \cos^2\theta - \omega^2 / k^2)$$

Lorsque  $C_a \gg C_s$ , alors  $v_{\varphi} = \omega / k \approx C_a$  (mode rapide) donne  $z/x \ll 1$ , vibration selon  $Ox$  orthogonale à  $\mathbf{B}_0$  et  $v_{\varphi} = \omega / k \approx C_s \cos\theta$  (mode lent) donne  $z/x \gg 1$ , vibration selon  $Oz$  et  $\mathbf{B}_0$ .

Le mode lent peut être assimilé à une onde sonore se propageant le long de tuyaux magnétiques.

## V – 6 - 4 Ondes de gravité

On considère un milieu isotherme stratifié en altitude  $z$  de pression  $P_0(z) = P_0(0) e^{-z/H}$  et densité  $\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-z/H}$ , dans lequel la vitesse du son est donnée par  $C_s^2(z) = \gamma P_0(z)/\rho_0(z) = \gamma kT/m = \gamma gH$ , où  $H = kT / gm$  est l'échelle de hauteur.

Le milieu est initialement au repos, sans champ magnétique, et stationnaire. En supposant une petite perturbation, on peut écrire  $P = P_0 + P_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ . On négligera les quantités au second ordre.

Equation de conservation de la masse :

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \text{ devient au premier ordre : } \partial\rho_1/\partial t + \rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0 = 0$$

Equation du mouvement :

$$\rho (\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \mathbf{v}) = - \text{grad } P + \rho\mathbf{g} \text{ devient au premier ordre : } \rho_0 \partial\mathbf{v}/\partial t = - \text{grad } P_1 + \rho_1\mathbf{g}$$

car initialement on est à l'équilibre hydrostatique :  $-\text{grad } P_0 + \rho_0\mathbf{g} = \mathbf{0}$

Equation de conservation de l'énergie :

Pour un milieu supposé adiabatique,

$$(\partial P/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } P) = (\gamma P/\rho) (\partial\rho/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho) \text{ devient au premier ordre :}$$

$$(\partial P_1/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } P_0) = (\gamma P_0/\rho_0) (\partial\rho_1/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0) = C_s^2 (\partial\rho_1/\partial t + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0)$$

En dérivant l'équation du mouvement par rapport au temps, on obtient :

$$\rho_0 \partial^2\mathbf{v}/\partial t^2 = - \text{grad } \partial P_1/\partial t - \partial\rho_1/\partial t \mathbf{g} \mathbf{e}_z \text{ (}\mathbf{e}_z \text{ étant un vecteur unitaire dirigé vers le haut)}$$

On tire  $\partial P_1/\partial t$  de l'équation d'énergie et  $\partial\rho_1/\partial t$  de l'équation de conservation de la masse, d'où  $\partial P_1/\partial t = - C_s^2 \rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot\text{grad } P_0$ , que l'on reporte dans l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial^2\mathbf{v}/\partial t^2 &= - \text{grad } \partial P_1/\partial t + (\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0) \mathbf{g} \mathbf{e}_z \\ &= \text{grad } (C_s^2 \rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\text{grad } P_0) + (\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0) \mathbf{g} \mathbf{e}_z \\ &= C_s^2 \rho_0 \text{grad}(\text{div}(\mathbf{v})) + C_s^2 \text{grad}\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \text{grad } (\mathbf{v}\cdot\text{grad } P_0) + (\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\text{grad } \rho_0) \mathbf{g} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Comme  $\text{grad } P_0 = -P_0/H \mathbf{e}_z$  et  $\text{grad } \rho_0 = -\rho_0/H \mathbf{e}_z$ , on obtient finalement :

$$\boxed{\partial^2\mathbf{v}/\partial t^2 = C_s^2 \text{grad}(\text{div}(\mathbf{v})) - \mathbf{g} \text{grad}(v_z) - \mathbf{g} (\gamma-1) \text{div}(\mathbf{v}) \mathbf{e}_z}$$

La recherche de solutions en ondes planes de la forme  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  entraîne :

$$\omega^2 \mathbf{v} = C_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) + i \mathbf{g} \mathbf{k} v_z + i \mathbf{g} (\gamma-1) (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{e}_z$$

On prend le produit scalaire avec  $\mathbf{k}$  :  $i \mathbf{g} \mathbf{k}^2 v_z = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) (\omega^2 - C_s^2 \mathbf{k}^2 - i \mathbf{g} (\gamma-1) k_z)$   
puis avec  $\mathbf{e}_z$  :  $v_z (\omega^2 - i \mathbf{g} k_z) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) (C_s^2 k_z + i \mathbf{g} (\gamma-1))$

Le rapport des deux expressions permet d'éliminer  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$  et  $v_z$  et on obtient ainsi la relation de dispersion :

$$(\omega^2 - i g k_z) / (i g \mathbf{k}^2) = (C_s^2 k_z + i g (\gamma-1)) / (\omega^2 - C_s^2 \mathbf{k}^2 - i g (\gamma-1) k_z)$$

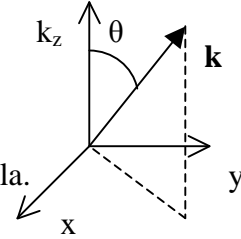
qui donne des ondes acoustiques ( $\omega = k C_s$ ) lorsque  $g = 0$ . Les ondes de gravité sont des ondes de basse fréquence telles que  $\omega \ll k C_s$ ; dans cette hypothèse, la relation de dispersion se réduit à :

$$\omega \approx (g/C_s) (\gamma-1)^{1/2} (1 - k_z^2/\mathbf{k}^2)^{1/2}$$

et si l'on pose  $\cos\theta = k_z/k$ ,  $\theta$  étant l'angle entre  $\mathbf{k}$  et la verticale,

$$\omega = (g/C_s) (\gamma-1)^{1/2} \sin\theta = N \sin\theta$$

La pulsation  $N = (g/C_s) (\gamma-1)^{1/2}$  porte le nom de pulsation de Brunt Vaisala.



Dans l'atmosphère solaire ( $10^4$  K):

Avec  $\gamma = 5/3$ ,  $C_s = 10$  km/s,  $g = 275$  m/s<sup>2</sup>,  $v = N \sin\theta/2\pi \leq 3.5$  MHz (période  $\geq 285$  s).

Dans l'intérieur solaire ( $10^6$  K), les fréquences sont très basses:

Avec  $C_s = 100$  km/s,  $v = N \sin\theta/2\pi \leq 0.35$  MHz (période  $\geq 2850$  s).

Les ondes de gravité se propagent plutôt **horizontalement** ( $\theta = 0 \Rightarrow \omega = 0$ ).

Pour étudier le déplacement en propagation horizontale, supposons que  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$  ( $\theta = \pi/2$ ) :

De la relation :  $\omega^2 \mathbf{v} = C_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + i g \mathbf{k} v_z + i g (\gamma-1) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_z$ , on déduit en projetant sur les axes, avec  $\omega = N = (g/C_s) (\gamma-1)^{1/2}$  :

$$v_y = 0 \text{ et } v_z = i (C_s^2 k/g) v_x, |v_z| \gg |v_x|$$

l'onde est **transversale** et le déplacement est **vertical**.

Dans le cas général où on ne fait plus l'hypothèse  $\omega \ll k C_s$ , la résolution de l'équation de dispersion est plus complexe et nécessite le changement de variable  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + i \gamma g/(2C_s^2) \mathbf{e}_z$  et l'introduction d'un angle  $\theta'$  tel que  $\mathbf{k}^2 \sin^2\theta = \mathbf{k}'^2 \sin^2\theta'$ . Nous ne développons pas les calculs qui sont fastidieux et énonçons seulement la nouvelle relation de dispersion obtenue :

$$\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = C_s^2 \mathbf{k}'^2 (\omega^2 - N^2 \sin^2\theta')$$

$$\text{où } N_s = \gamma g/(2C_s), N = (g/C_s) (\gamma-1)^{1/2}, C_s = (\gamma kT/m)^{1/2}, N_s/N = \gamma/[2(\gamma-1)^{1/2}] \approx 1.02 \text{ si } \gamma = 5/3$$

La perturbation est en  $e^{[\gamma g/(2C_s^2)]z} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  et croît exponentiellement en altitude.

En propagation verticale ( $\theta = 0$ ), la relation de dispersion est  $\omega^2 = N_s^2 + C_s^2 \mathbf{k}'^2 \geq N_s^2$

Il existe donc une pulsation de coupure  $\omega \geq N_s$

En propagation horizontale ( $\theta = \pi/2$ ), la relation de dispersion est  $\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = C_s^2 \mathbf{k}'^2 (\omega^2 - N^2)$ , et  $\omega^2 \geq 0$  implique  $\omega \geq N_s$  ou  $\omega \leq N$

En propagation quelconque avec  $\mathbf{k}' = (k'_x, 0, k'_z)$ , la relation de dispersion est :

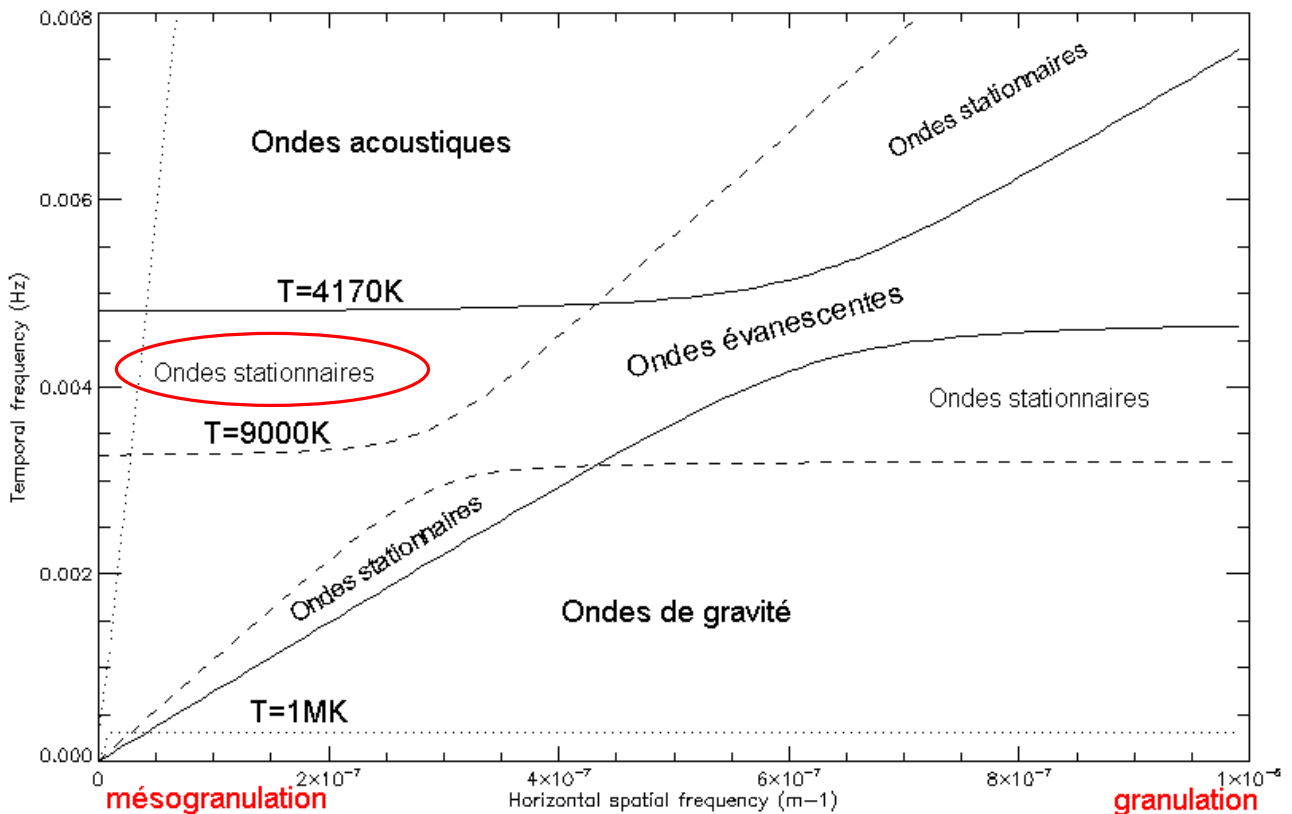
$$\omega^2 C_s^2 k'_z{}^2 = \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) - C_s^2 k'_x{}^2 (\omega^2 - N^2) \geq 0, \text{ d'où :}$$

$$\omega^4 - \omega^2 (N_s^2 + C_s^2 k'_x{}^2) + C_s^2 k'_x{}^2 N^2 \geq 0$$

ayant pour solution :

$$\begin{cases} \omega \geq \omega_1 = \frac{1}{2} [ N_s^2 + C_s^2 k'_x{}^2 + ( (N_s^2 + C_s^2 k'_x{}^2)^2 - 4 C_s^2 k'_x{}^2 N^2 )^{1/2} ] \\ \omega \leq \omega_2 = \frac{1}{2} [ N_s^2 + C_s^2 k'_x{}^2 - ( (N_s^2 + C_s^2 k'_x{}^2)^2 - 4 C_s^2 k'_x{}^2 N^2 )^{1/2} ] \end{cases}$$

On a représenté  $\nu_1 = \omega_1/2\pi$  et  $\nu_2 = \omega_2/2\pi$  en fonction de  $\sigma_x = k'_x/2\pi$  sur la figure ci dessous. La granulation solaire (1000 km) apparaît dans la zone  $\sigma_x = 1/\lambda_x = 10^{-6} \text{ m}^{-1}$  ; la mésogranulation (10000 km) correspond à  $\sigma_x = 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ . On a tracé  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour les températures extrêmes (4170 K et 9000 K) de la photosphère (—) et de la chromosphère (---) solaire, ainsi que pour l'intérieur solaire ( $10^6$  K en pointillés). Entre les deux limites à 4170 K et 9000 K, les ondes sont piégées dans des cavités et deviennent stationnaires. Les oscillations de période 200-300 s (4 mHz) observées sur une échelle spatiale de 10000 km (mésogranulation) dans l'atmosphère solaire tombent dans une cavité.



## V – 7 Chocs hydrodynamiques : relations de Rankine Hugoniot

Nous traitons un choc comme une discontinuité de vitesse, température, densité et pression. En amont, le nombre de Mach est supérieur à l'unité. Un choc engendre une compression du plasma en aval. Appelons  $v_1, P_1, \rho_1$  les vitesse, pression, masse volumique en amont du choc, et  $v_2, P_2, \rho_2$  les vitesse, pression, masse volumique en aval.

La conservation de la masse  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  donne  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

L'équation du mouvement  $\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) + \text{grad} P = 0$  donne  $\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$

L'équation d'énergie  $\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v}] = 0$  donne :

$$[\gamma / (\gamma - 1)] P_1 / \rho_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = [\gamma / (\gamma - 1)] P_2 / \rho_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

En fonction du nombre de Mach incident  $M_1 = v_1 / C_{s1}$  où  $C_{s1}^2 = \gamma P_1 / \rho_1$  est la vitesse du son, on obtient pour  $M_1 > 1$  :

$$v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 = (\gamma+1) M_1^2 / [2 + M_1^2(\gamma-1)] > 1 \text{ (compression)}$$

$$P_2/P_1 = [2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)] / (\gamma+1) > 1 \text{ (compression)}$$

$$M_2^2 = [M_1^2(\gamma-1) + 2] / [2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)] < 1$$

Lorsque  $M_1$  varie de 1 à l'infini :

$$1 < v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1 < (\gamma+1)/(\gamma-1) \text{ (} = 4 \text{ pour } \gamma = 5/3 \text{)}$$

$$1 < P_2/P_1 < \infty \text{ et } 1 < T_2/T_1 = (P_2/P_1) / (\rho_2/\rho_1) < \infty$$

## V – 8 Introduction aux chocs MHD

### V – 8 – 1 chocs MHD perpendiculaires

On traitera uniquement les chocs perpendiculaires non dissipatifs (conductivité infinie) à la direction du champ magnétique sous la forme d'une discontinuité de vitesse, température, densité, pression et champ magnétique. En amont, le nombre de Mach est supérieur à l'unité. Le choc engendre une compression du plasma en aval qui est limitée par la présence du champ magnétique. Appelons  $v_1, P_1, \rho_1, B_1$  les vitesse, pression, masse volumique, champ magnétique en amont du choc, et  $v_2, P_2, \rho_2, B_2$  les vitesse, pression, masse volumique, champ magnétique en aval.

La conservation de la masse  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  donne  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

L'équation du mouvement

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$$

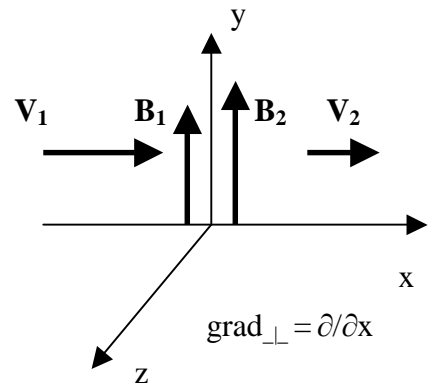
fait appel à la formulation de la force de Laplace donnée ci dessus  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \text{grad}_{\perp}(B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R)$ , dans laquelle le rayon de courbure est infini. Dans la direction x orthogonale aux lignes de force, on obtient alors:

$$\rho v \text{ grad}_{\perp}(v) = - \text{grad}_{\perp} P - \text{grad}_{\perp}(B^2/2\mu_0)$$

Comme  $\rho v = \text{constante}$ , cette équation devient

$$\text{grad}_{\perp}(\rho v^2 + P + B^2/2\mu_0) = 0 \text{ d'où :}$$

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 + B_1^2/2\mu_0 = \rho_2 v_2^2 + P_2 + B_2^2/2\mu_0$$



La conservation du flux magnétique ( $\text{div} \mathbf{B} = 0$ ) impose d'avoir  $B v = \text{constante}$ , donc

$$B_1 v_1 = B_2 v_2$$

L'équation d'énergie  $\text{div}[(H + 1/2 \rho v^2) \mathbf{v}] = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$  fait aussi appel à la formulation de la force de Laplace donnée ci dessus  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = - \text{grad}_{\perp}(B^2/2\mu_0) + \mathbf{n} B^2/(\mu_0 R)$ , dans laquelle le rayon de courbure est infini. Dans la direction x orthogonale aux lignes de force, on obtient alors:

$$\text{div}[(H + 1/2 \rho v^2) \mathbf{v}] = - v \text{ grad}_{\perp}(B^2/2\mu_0), \text{ soit}$$

$$\partial/\partial x [(H + 1/2 \rho v^2) v] + v \partial/\partial x (B^2/2\mu_0) = 0, \text{ car } \text{div} = \partial/\partial x \text{ et } \text{grad}_{\perp} = \partial/\partial x$$

$$\partial/\partial x [(H + 1/2 \rho v^2) v] + v B \partial/\partial x (B/\mu_0) = 0$$

Comme  $B v = \text{constante}$ , cela permet de simplifier l'équation ci dessus sous la forme :

$$\partial/\partial x [(H + 1/2 \rho v^2) v + v B^2/\mu_0] = 0, \text{ d'où l'on déduit finalement :}$$

$$(H_1 + 1/2 \rho_1 v_1^2 + B_1^2/\mu_0) v_1 = (H_2 + 1/2 \rho_2 v_2^2 + B_2^2/\mu_0) v_2$$

L'enthalpie par unité de volume vaut  $H = U + P = P \gamma / (\gamma - 1)$ , avec  $\gamma = 5/3$  pour un gaz monoatomique. On doit donc résoudre le système d'équations suivant :

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$B_1 v_1 = B_2 v_2$$

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 + B_1^2/2\mu_0 = \rho_2 v_2^2 + P_2 + B_2^2/2\mu_0$$

$$(P_1 \gamma / (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + B_1^2/\mu_0) v_1 = (P_2 \gamma / (\gamma - 1) + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + B_2^2/\mu_0) v_2$$

connaissant en entrée  $M_1 = v_1/Cs_1$  où  $Cs_1^2 = \gamma P_1/\rho_1$  est la vitesse du son, avec  $M_1 > 1$ , et  $\beta_1 = P_1 / (B_1^2/2\mu_0)$ , les inconnues sont  $X = \rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = B_2/B_1$  ainsi que  $P_2/P_1$

Tous calculs faits, on trouve :

$$P_2/P_1 = \gamma M_1^2 (1 - X^{-1}) + 1 + \beta_1^{-1}(1 - X^2)$$

X étant solution d'une équation du second degré qui n'admet qu'une seule racine positive :

$$2 X^2 (2 - \gamma) + X \gamma (2 \beta_1 + \beta_1 (\gamma - 1) M_1^2 + 2) - \beta_1 \gamma (\gamma + 1) M_1^2 = 0$$

Le choc ne se produit que si  $X > 1$ . Il est facile de montrer que cette condition se traduit par la somme des trois coefficients de l'équation du second degré négative, soit :

$$2 (2 - \gamma) + \gamma (2 \beta_1 + \beta_1 (\gamma - 1) M_1^2 + 2) - \beta_1 \gamma (\gamma + 1) M_1^2 < 0, \text{ ce qui donne :}$$

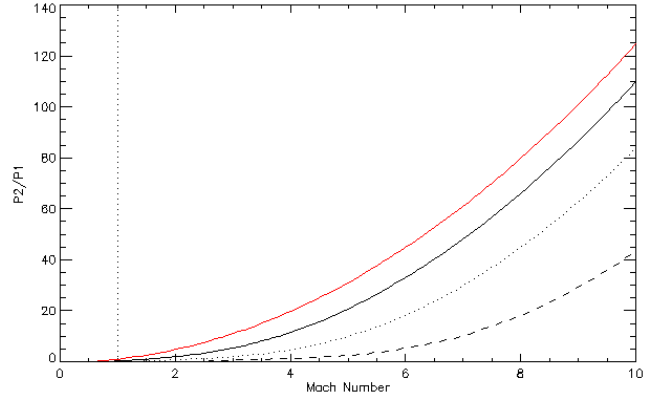
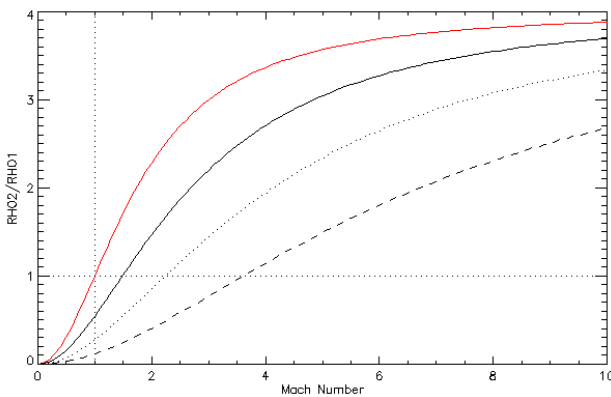
$$4 + 2 \gamma \beta_1 - 2 \gamma \beta_1 M_1^2 < 0,$$

$$\text{donc } M_1^2 > 1 + 2 / (\gamma \beta_1)$$

De  $M_1 = v_1 / Cs_1$ ,  $\beta_1 = P_1 / (B_1^2/2\mu_0)$ ,  $Cs_1^2 = \gamma P_1/\rho_1$ ,  $Ca_1^2 = B_1^2/(\mu_0 \rho_1)$  vitesse d'Alfven,

On déduit  $v_1 > (Cs_1^2 + Ca_1^2)^{1/2}$

Le choc ne se produit donc que si la vitesse amont est supérieure à celle du mode MHD rapide.



Variations de  $X = \rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 = B_2/B_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  (à gauche) et de  $P_2/P_1$  (à droite) pour plusieurs valeurs de  $\beta_1 = 1$  (—),  $0.3$  (.....),  $0.1$  (-----) ; la courbe la plus haute, en rouge, est la solution asymptotique que l'on obtient à l'aide des relations de Rankine Hugoniot en l'absence de champ magnétique.

### V – 8 – 2 Chocs obliques lents et rapides (« slow shock » et « fast shock »)

Nous ne donnerons que les principaux résultats de ces types de chocs plus généraux, que l'on trouve à l'œuvre dans les processus de reconnexion magnétique (éruptions solaires par exemple). On

montre, avec  $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ,  $\mathbf{v} (v_x, v_y, 0)$  et  $\mathbf{B} (B_x, B_y, 0)$ , que :

la conservation de la masse  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  entraîne  $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$

$\text{div} \mathbf{B} = 0$  implique  $B_{1x} = B_{2x}$

l'équation du mouvement en projection sur les deux axes Ox et Oy donne :

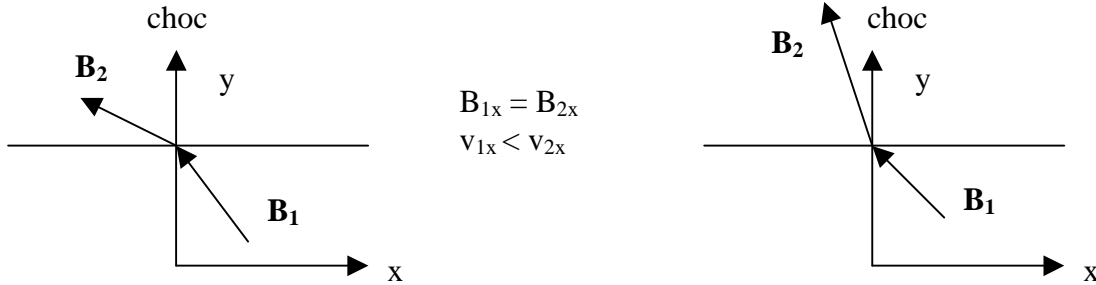
$$\rho_1 v_{1x}^2 + P_1 + B_{1y}^2/2\mu_0 = \rho_2 v_{2x}^2 + P_2 + B_{2y}^2/2\mu_0$$

$$\rho_1 v_{1x} v_{1y} - B_{1x} B_{1y} / \mu_0 = \rho_2 v_{2x} v_{2y} - B_{2x} B_{2y} / \mu_0$$

l'équation d'induction  $\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$  se traduit par :

$$B_{1x} v_{1y} - B_{1y} v_{1x} = B_{2x} v_{2y} - B_{2y} v_{2x}$$

La condition de choc est  $X = \rho_2/\rho_1 > 1$ ,  $P_2/P_1 > 1$ . On distingue deux types de chocs :



**Choc lent « slow shock »**

**B** se rapproche de la normale au choc

$$B_{2y} < B_{1y} \Rightarrow B_2 < B_1$$

$$v_1 \leq C_{a1}$$

$$v_{1x} \geq C_{\text{slow } 1}$$

$$v_{2x} \leq C_{\text{slow } 2}$$

où  $C_{\text{slow}}$  et  $C_{\text{fast}}$  sont les vitesses caractéristiques des ondes MHD "lentes" et "rapides".

$$v_{2y} \leq v_{1y}$$

**Choc rapide « fast shock »**

**B** s'éloigne de la normale au choc

$$B_{2y} > B_{1y} \Rightarrow B_2 > B_1$$

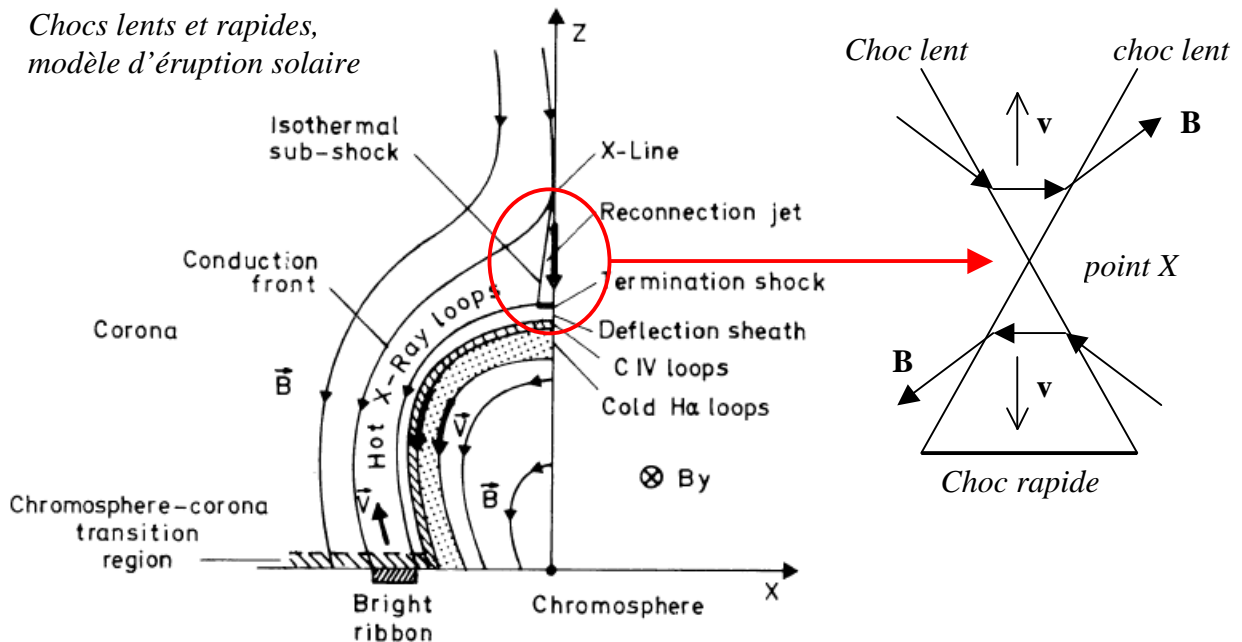
$$v_1 \geq X C_{a1}$$

$$v_{1x} \geq C_{\text{fast } 1}$$

$$v_{2x} \leq C_{\text{fast } 2}$$

$$v_{2y} \geq v_{1y}$$

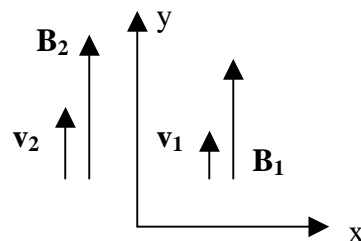
*Chocs lents et rapides, modèle d'éruption solaire*



Lorsque  $B_x \rightarrow 0$  et  $v_y \rightarrow 0$ , le choc rapide dégénère en choc MHD perpendiculaire pour lequel on a vu que  $B_2 > B_1$ ,  $v_{1x} \geq C_{\text{fast } 1} = (C_{s1}^2 + C_{a1}^2)^{1/2}$

Lorsque  $B_x \rightarrow 0$  et  $v_x \rightarrow 0$ , on est en présence d'une discontinuité tangentielle qui sépare simplement deux plasma pour lesquels on a simplement :

$$P_1 + B_{1y}^2/2\mu_0 = P_2 + B_{2y}^2/2\mu_0$$





## V – 9 Solution de Parker du vent solaire : écoulement transsonique

Les équations fondamentales, en régime stationnaire, et en négligeant toute force magnétique, ainsi que toute source d'énergie, ont été établies et sont les suivantes :

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) = - \text{grad} P + \rho \mathbf{g}$$

$$\text{div}[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} - k_{//} \text{grad} T] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \text{ avec } \mathbf{g} = - GM/r^2$$

$$\text{avec } H = (\rho/M) kT \gamma / (\gamma - 1) = P \gamma / (\gamma - 1)$$

et  $P = 2 \rho kT/m$  ( $m$  est la masse atomique du proton, le facteur 2 provient du fait que le plasma est totalement ionisé dans la couronne solaire), ce qui donne 3 équations à 3 inconnues,  $P$ ,  $\rho$  et  $v$ .

On se place dans un système de coordonnées sphériques, dans lequel la seule variable est  $r$ . Le vecteur vitesse est purement radial. Dans ce cas,  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 1/r^2 d/dr(r^2 \rho v) = 0$  ; on en déduit :

$$r^2 \rho v = \text{constante}$$

$$\text{L'équation du mouvement devient : } \rho v dv/dr = - dP/dr - \rho GM/r^2$$

L'équation d'énergie devient :

$$1/r^2 d\{r^2[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) v - k_{//} dT/dr]\}/dr = - \rho (GM/r^2) v$$

$$d[(H + \frac{1}{2} \rho v^2) v r^2 - k_{//} r^2 dT/dr]/dr = - (GM/r^2) (\rho v r^2)$$

Comme  $r^2 \rho v = \text{constante}$ , on peut intégrer cette équation :

$$(H + \frac{1}{2} \rho v^2) v r^2 - k_{//} r^2 dT/dr = (GM/r) (\rho v r^2) + \text{constante, d'où finalement :}$$

$$(H + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho GM/r) v r^2 - k_{//} r^2 dT/dr = \text{constante} \quad \text{avec } H = P \gamma / (\gamma - 1)$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'un milieu **isotherme** : dans ce cas, on a une équation de trop (l'équation d'énergie) puisque l'on a 2 équations à 2 inconnues  $\rho$  et  $v$  (continuité et mouvement) :

$$r^2 \rho v = \text{constante, et}$$

$$\rho v dv/dr = - dP/dr - \rho GM/r^2 \text{ dans laquelle } P = 2 \rho kT/m \text{ (} T = \text{constante)}$$

On choisit  $v$  comme variable, et on exprime  $\rho$  et  $P$  en fonction de  $v$  :

$$\rho = \rho_0 v_0 r_0^2 / (v r^2) \text{ et } P = 2 \rho kT/m = 2 (kT/m) \rho_0 v_0 r_0^2 / (v r^2) \text{ en supposant qu'en } r = r_0, \text{ on ait } \rho = \rho_0 \text{ et } v = v_0. \text{ L'équation du mouvement devient :}$$

$$dv/dr (v - v_s^2/v) = 2 v_s^2/r - (v_1^2/2) (r_0/r^2)$$

où  $v_s = (2 kT/m)^{1/2}$  est la **vitesse du son** et  $v_1 = (2GM/r_0)^{1/2}$  est la **vitesse de libération** du plasma (on trouve  $v_1$  en écrivant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en  $r = r_0$  est égale à celle que l'on aurait à l'infini, c'est à dire nulle). Cette équation différentielle s'intègre :

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) - v_s^2 \ln(v/v_0) = 2 v_s^2 \ln(r/r_0) + (v_1^2/2) (r_0/r - 1)$$

L'équation différentielle admet une singularité lorsque le terme de gauche et le terme de droite s'annulent simultanément :  $v = v_s$  et  $r = r_s = \frac{1}{4} r_0 (v_1/v_s)^2$

La solution est alors **transsonique** ( $v < v_s$  pour  $r < r_s$  et  $v > v_s$  pour  $r > r_s$ ). Cette solution est atteinte pour la condition initiale  $v_0$  telle que :

$$\frac{1}{2} (v_s^2 - v_0^2) - v_s^2 \ln(v_s/v_0) = 2 v_s^2 \ln(\frac{1}{4} (v_1/v_s)^2) + (v_1^2/2) (4(v_s/v_1)^2 - 1)$$

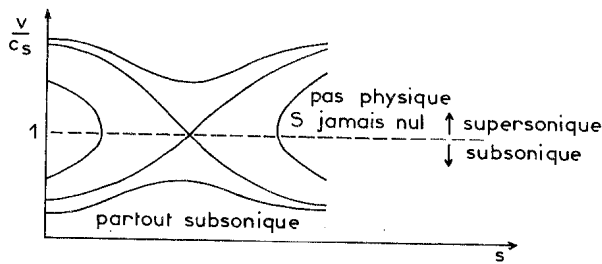
Numériquement, avec  $T = 1.5 \cdot 10^6$  K,  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $r_0 = 700000$  km, on trouve  $v_s = 157$  km/s, et  $v_1 = 600$  km/s, dont on déduit  $r_s = 3.9 r_0$ . Dans ce modèle, l'écoulement devient supersonique à 4 rayons solaires lorsque  $v_0$  satisfait l'équation ci dessus, ce qui donne 6.3 km/s.

A grande distance du soleil, on a les solutions asymptotiques :

$$v = 2 v_s [\ln(r/r_0)]^{1/2} \text{ et } \rho = \rho_0 v_0 r_0^2 / [2 v_s r^2 (\ln(r/r_0))^{1/2}]$$

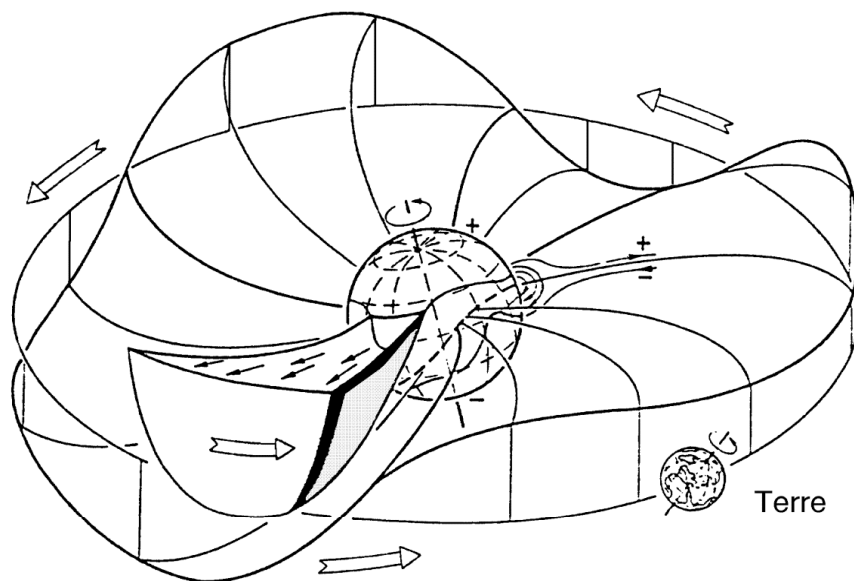
Ce sont des fonctions à variation lente (mais irréalistes, car  $v \rightarrow \infty$  et  $\rho \rightarrow 0$ ).

A l'orbite de la Terre (1 UA), cette solution asymptotique donne 365 km/s (la valeur observée est voisine de 400 km/s). La densité observée est voisine de  $10^7$  m<sup>-3</sup>, ou masse volumique de  $1.7 \cdot 10^{-20}$  kg m<sup>-3</sup>. Avec ces données, la perte de masse du soleil est de  $4\pi r^2 \rho v$  soit  $2 \cdot 10^9$  kg/s (ce qui est comparable à la perte de masse de  $4 \cdot 10^9$  kg/s due aux réactions nucléaires de fusion au cœur de l'étoile). Si l'on considère que la durée de vie du soleil est de  $10^{10}$  ans, on trouve que la perte de masse par le vent solaire sera de  $3 \cdot 10^{-4}$  masse solaire pendant la vie de l'étoile. La solution de Parker permet de calculer la densité dans la couronne à la naissance du vent solaire à partir des données à 1 UA par la relation  $\rho_0 = r^2 \rho v / (r_0^2 v_0)$ , ce qui donne  $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-14}$  kg m<sup>-3</sup>.



*Solutions de Parker  $v/v_s(r)$  du vent solaire selon les valeurs de la vitesse initiale  $v_0$ ; la solution transsonique (subsonique dans la basse couronne, puis supersonique) est la seule convenable.*

La situation réelle est plus complexe en raison du champ magnétique solaire et de la rotation de l'étoile. Le mouvement radial des particules se combine à la rotation du Soleil, et le fluide emporte avec lui les lignes de champ magnétique solaires qui forment une spirale (la spirale de Parker) non plane, avec une alternance de secteurs à polarité N ou S dans le plan de l'écliptique.



*Structure en spirale d'Archimède du champ magnétique interplanétaire selon le modèle de Parker*

## V – 10 Tubes de flux en régime stationnaire

Ce paragraphe traite d'une thématique dont les progrès expérimentaux sont particulièrement liés à l'amélioration du pouvoir séparateur des télescopes. Les meilleures images du monde ont une résolution de 0.15'' (100 km) et ne permettent pas encore de résoudre les « points brillants » concentrés dans les espaces intergranulaires, que l'on interprète comme étant la signature de tubes de flux magnétiques minces et concentrés. Pour simplifier, nous appliquerons les équations de la MHD dans un espace ne dépendant que de l'altitude  $z$  (axe  $Oz$  orienté vers le haut) en géométrie cylindrique, pour un tube de flux de section  $S$  s'évasant faiblement en altitude. En première approximation, le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  n'a de composante  $v_z = v$  que sur  $Oz$ , et  $B_r$  composante radiale de  $\mathbf{B}$  est faible devant  $B_z = B$ . On considère un écoulement stationnaire sans force de Laplace.

L'équation de continuité  $\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$  s'écrit en développant :

$$\partial\rho/\partial t + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}.\text{grad}\rho = 0$$

L'équation d'induction en MHD idéale  $\partial\mathbf{B}/\partial t = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  s'écrit en développant :

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{v} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{B}.\text{grad} \mathbf{v} - \mathbf{v}.\text{grad} \mathbf{B}$$

avec  $\text{div} \mathbf{B} = 0$

En projection sur  $Oz$ ,  $\mathbf{v}.\text{grad} = v\partial/\partial z$  et  $\mathbf{B}.\text{grad} = B\partial/\partial z$

De l'équation d'induction, on tire  $\text{div}(\mathbf{v}) = \partial v/\partial z - (v/B) \partial B/\partial z - (1/B) \partial B/\partial t$ , que l'on injecte dans l'équation de continuité :

$\partial\rho/\partial t - (\rho/B) \partial B/\partial t + \rho \partial v/\partial z - (\rho v/B) \partial B/\partial z + v \partial\rho/\partial z = 0$ , et en divisant par  $B$  :

$(1/B) \partial\rho/\partial t - (\rho/B^2) \partial B/\partial t + (\rho/B) \partial v/\partial z - (\rho v/B^2) \partial B/\partial z + (v/B) \partial\rho/\partial z = 0$ , soit finalement :

$$\partial(\rho/B)/\partial t + \partial(\rho v/B)/\partial z = 0$$

En régime stationnaire, cette équation se réduit à  $\rho v/B = \text{constante}$

ce qui découlait directement de  $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \rho v S = \text{constante}$   
et de  $\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow B S = \text{constante}$

On impose l'équilibre radial au tube de flux :  $P + B^2/2\mu_0 = P_e(z)$

Où  $P_e(z)$  est la pression extérieure, supposée connue, en fonction de  $z$ .  
Un modèle simple consiste à choisir  $P_e(z) = P_e(0) e^{-z/h}$  où  $h$  est une échelle de hauteur donnée (150 km environ).

$\text{div}\mathbf{B} = (1/r) \partial(rB_r)/\partial r + \partial B_z/\partial z = 0$  fournira ensuite  $B_r = -(r/2) dB/dz$

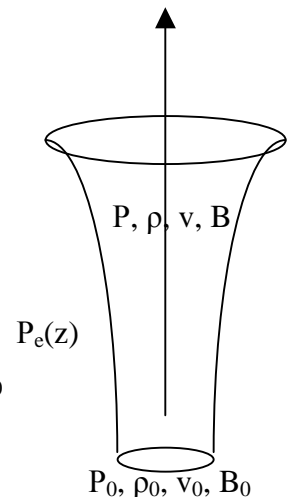
L'équation du mouvement  $\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}.\text{grad} \mathbf{v}) = -\text{grad}P + \rho\mathbf{g} + \text{rot}\mathbf{B} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$

devient en projection sur  $Oz$  :  $\rho v dv/dz = -dP/dz - \rho g$ , d'où

$$v dv/dz = -(1/\rho) dP/dz - g \Leftrightarrow d(1/2 v^2 + gz)/dz + (1/\rho) dP/dz = 0$$

Cette dernière équation pourra s'intégrer si l'on suppose le gaz isotherme ou adiabatique. Dans un milieu isotherme de température  $T$ , avec la loi des gaz parfaits  $P = \rho kT/m = \rho Cs^2$ , on obtient :  
 $d(1/2 v^2 + gz)/dz + (Cs^2/\rho) d\rho/dz = 0$  qui s'intègre aisément :

$$1/2 v^2 + gz + Cs^2 \ln(\rho) = \text{constante} \quad \text{milieu isotherme avec } Cs = (kT/m)^{1/2} \text{ vitesse du son}$$



Dans un milieu adiabatique, on a  $P/\rho^\gamma = \text{constante} = P_0/\rho_0^\gamma$ ,  $P_0$  et  $\rho_0$  étant la pression et la masse volumique à la base du tube. L'équation devient, avec  $C_s = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2} = (\gamma kT_0/m)^{1/2}$  vitesse du son à la base du tube :  $d(1/2 v^2 + gz)/dz + (Cs^2 \rho^{\gamma-2}/\rho_0^{\gamma-1}) dp/dz = 0$  qui s'intègre immédiatement :

$$\boxed{1/2 v^2 + gz + Cs^2 (\rho/\rho_0)^{\gamma-1} / (\gamma-1) = \text{constante}} \quad \text{milieu adiabatique avec } C_s \text{ vitesse du son à la base}$$

Muni de ces quelques équations en régime stationnaire, on peut étudier quelques cas particuliers simples, mais instructifs.

### V – 10 – 1 Tube hydrodynamique isotherme à section S constante

Il n'y a alors pas de champ magnétique, et  $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \rho v S = \text{constante}$ .

Avec une section S constante, on obtient  $\rho v = \rho_0 v_0 = \text{constante}$ , où  $\rho_0$  et  $v_0$  sont les quantités à la base. L'équation du mouvement devient dans ce cas:

$$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz - Cs^2 \ln(v/v_0) = 0$$

La dérivation de cette relation montre l'existence d'une singularité ( $dv/dz \rightarrow \infty$ ) lorsque  $v = C_s$ . Elle correspond à une altitude critique  $z_c$  définie par :

$$z_c = (Cs^2/g) \ln(Cs/v_0) - 1/2 (Cs^2 - v_0^2)/g$$

où la quantité  $Cs^2/g = kT/(gm) = h$  représente l'échelle de hauteur

### V – 10 – 2 Tube isotherme à $\beta \ll 1$

Si suppose que  $\beta = P/(B^2/2\mu_0) \ll 1$ , alors on peut négliger P dans l'équilibre radial des pressions qui s'écrit désormais  $B^2/2\mu_0 = P_e(z)$  ce qui revient à imposer B(z) par la pression extérieure.

On a maintenant  $\rho v / B = \rho_0 v_0 / B_0 = \text{constante}$  et l'équation du mouvement devient :

$$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz - Cs^2 \ln[(vB_0)/(v_0B)] = 0 \quad \text{avec } \rho_0, v_0, B_0 \text{ quantités à la base}$$

La dérivation de cette relation montre encore l'existence d'une singularité du type  $dv/dz \rightarrow \infty$  lorsque  $v = C_s$ , ou bien du type  $dv/dz \rightarrow 0/0$  dans le cas particulier où  $P_e(z) = P_e(0) e^{-z/h}$  entraînant  $B(z) = B_0 e^{-z/2h}$ , h étant l'échelle de hauteur définie par  $Cs^2 = g h$ . L'altitude critique correspondante  $z_c$  est solution de l'équation :

$$z_c = (Cs^2/g) \ln[(CsB_0)/(v_0B(z_c))] - 1/2 (Cs^2 - v_0^2)/g$$

Dans le cas particulier où  $B(z) = B_0 e^{-z/2h}$ , h étant l'échelle de hauteur ( $Cs^2/g$ ), on trouve que l'altitude critique est doublée par rapport au cas hydrodynamique sans champ magnétique.

### V – 10 – 3 Tube isotherme quelconque

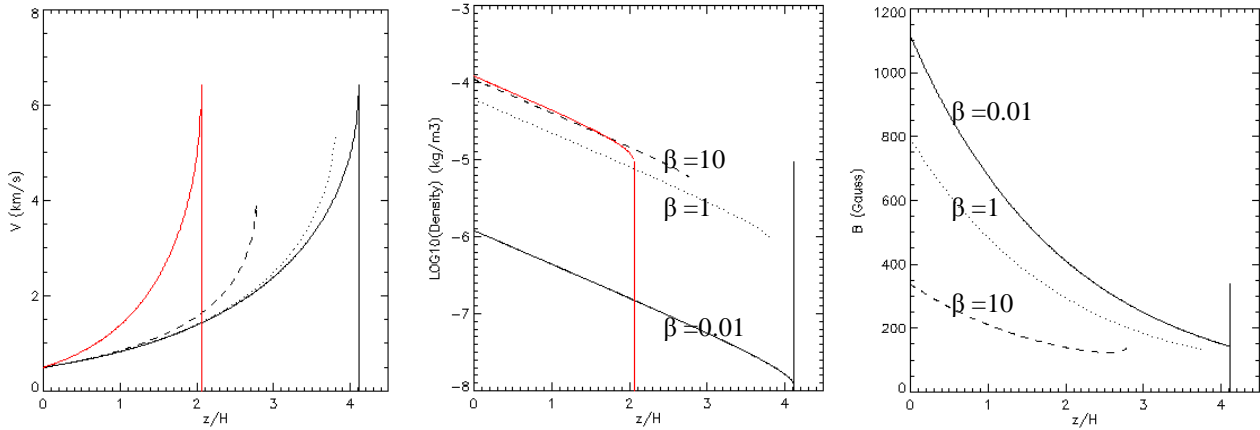
L'équation du mouvement reste la même :

$$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz + Cs^2 \ln(\rho/\rho_0) = 0 \quad \text{avec } \rho_0, v_0 \text{ quantités à la base}$$

L'équilibre radial des pressions  $P + B^2/2\mu_0 = P_e(z)$  avec  $P_e(z) = P_e(0) e^{-z/h}$  où h est une échelle de hauteur donnée, fournit une équation liant  $\rho$  et v puisque  $P = \rho kT/m$  et  $B = B_0 (\rho v) / (\rho_0 v_0)$ , soit :

$$\rho kT/m + (B_0^2/2\mu_0) (\rho v)^2 / (\rho_0 v_0)^2 = P_e(0) e^{-z/h}$$

En  $z = 0$ , cette relation s'écrit  $\rho_0 kT/m + (B_0^2/2\mu_0) = P_e(0)$ . En supposant le  $\beta$  du plasma connu à la base du tube  $\beta = (\rho_0 kT/m) / (B_0^2/2\mu_0)$ , on impose par la connaissance de  $P_e(0)$ , le champ magnétique  $B_0 = [2\mu_0 P_e(0)/(1 + \beta)]^{1/2}$  et la masse volumique  $\rho_0 = P_0/Cs^2 = (P_e(0)/Cs^2) \beta/(1 + \beta)$  à la base du tube.



Les équations ont une solution numérique  $v(z)$  en km/s,  $\rho(z)$  en kg m<sup>-3</sup> et  $B(z)$  en Gauss, présentée ci dessus. On a choisi  $P_e(0) = 5000$  Pa,  $T_0 = 5000$  K,  $v_0 = 0.5$  km/s et on a fait varier  $\beta$ . L'altitude est normalisée à  $h = Cs^2/g = 150$  km, avec  $Cs = 6.4$  km/s.

Les courbes rouges représentent la solution hydrodynamique sans champ ; l'altitude critique calculée est  $z_c/h = 2.05$

Les courbes noires donnent la solution pour  $\beta = 0.01$  (—),  $1$  (·····) et  $10$  (- - -). L'altitude critique augmente lorsque  $\beta$  diminue et double ( $z/h = 4.1$ ) lorsque  $\beta \rightarrow 0$ . Le tube est d'autant plus « vide » que  $\beta$  est petit.

#### V – 10 – 4 Tube hydrodynamique adiabatique à section S constante

On a en fonction de  $\rho_0, v_0$  quantités à la base :  $\rho v = \rho_0 v_0$ . L'équation du mouvement devient :

$$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz + Cs^2 [(\rho/\rho_0)^{\gamma-1} - 1] / (\gamma-1) = 0$$

avec  $Cs = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$  vitesse du son à la base. La dérivation de cette relation montre encore l'existence d'une singularité ( $dv/dz \rightarrow \infty$ ) lorsque

$$v = Cs^{2/(\gamma+1)} v_0^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$$

$$\text{soit pour } \gamma = 5/3, v = Cs^{3/4} v_0^{1/4}$$

Cette vitesse critique correspond à une altitude critique  $z_c$  définie par :

$$z_c = -v_0^2/(2g) [(Cs/v_0)^{4/(\gamma+1)} - 1] - Cs^2/(g(\gamma-1)) [(v_0/Cs)^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 1]$$

où  $Cs^2/(\gamma g) = kT_0/(gm) = h$  est l'échelle de hauteur à la base du tube de flux, de température  $T_0$ .

#### V – 10 – 5 Tube adiabatique à $\beta \ll 1$

Avec  $\rho v / B = \rho_0 v_0 / B_0 = \text{constante}$  et l'équation du mouvement devient :

$$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz + Cs^2 [((v_0 B)/(v B_0))^{\gamma-1} - 1] / (\gamma-1) = 0 \text{ avec } \rho_0, v_0, B_0 \text{ quantités à la base}$$

En supposant  $P_e(z) = P_e(0) e^{-z/h}$ , on en déduit  $B(z) = B_0 e^{-z/2h}$ ,  $h$  étant l'échelle de hauteur extérieure.

Il existe encore une altitude critique  $z_c$  solution de l'équation :

$$z_c + 1/2 (v_0^2/g) [(Cs/v_0)^{4/(\gamma+1)} e^{-(z_c/h)(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 1] + (Cs^2/g) [(v_0/Cs)^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)} e^{-(z_c/h)(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 1]/(\gamma-1) = 0$$

qui doit être résolue numériquement.

#### V – 10 – 6 Tube adiabatique quelconque

L'équation du mouvement reste identique :

$1/2 (v^2 - v_0^2) + gz + Cs^2 [(\rho/\rho_0)^{\gamma-1} - 1] / (\gamma-1) = 0$  avec  $Cs = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $v_0$ ,  $B_0$  quantités à la base, et  $\rho v / B = \rho_0 v_0 / B_0$

L'équilibre radial des pressions  $P + B^2/2\mu_0 = P_e(z)$  avec  $P_e(z) = P_e(0) e^{-z/h}$  où  $h$  est une échelle de hauteur donnée, permet de relier  $\rho$  et  $v$  selon :

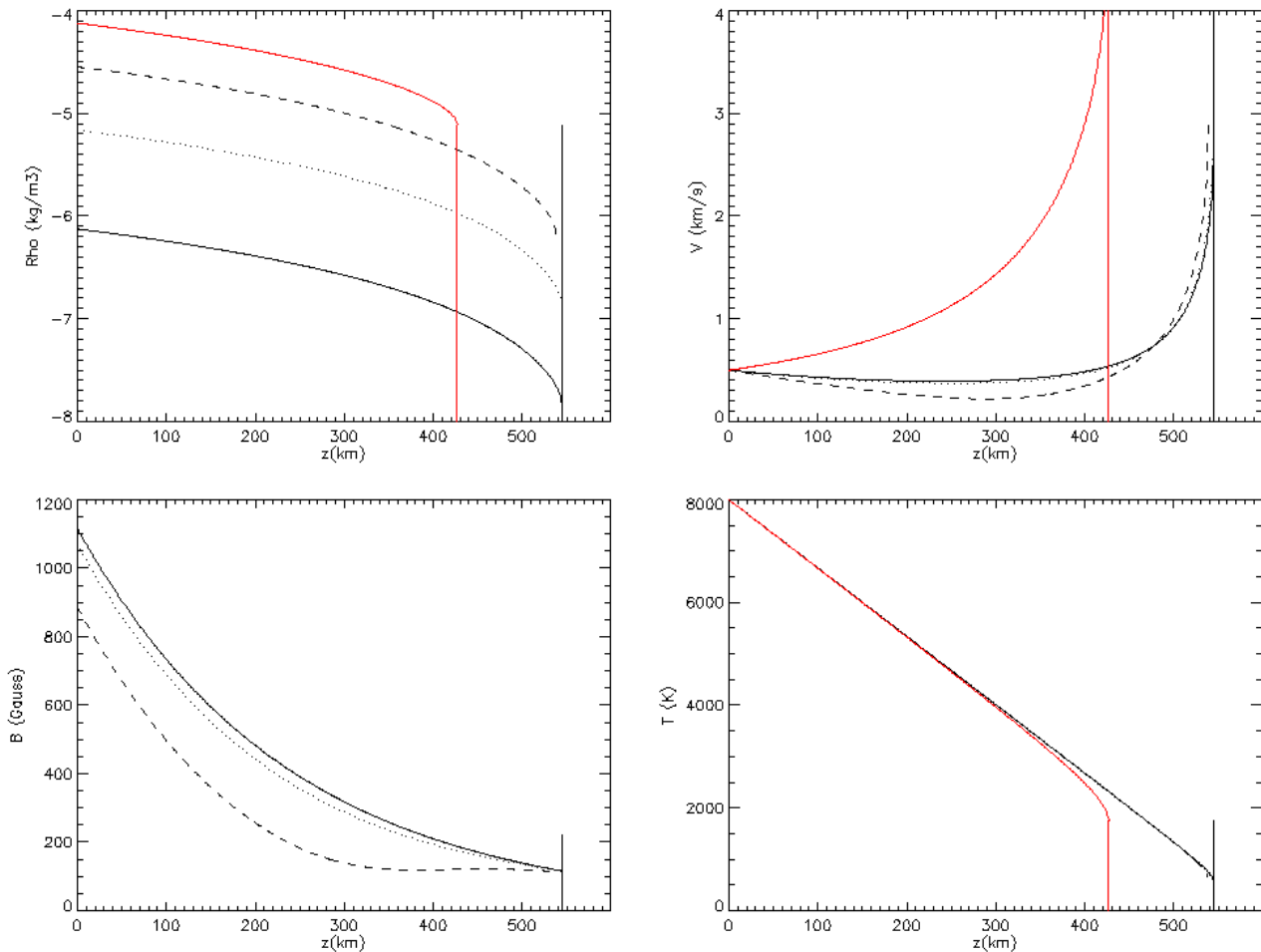
$$P_0(\rho/\rho_0)^\gamma + (B_0^2/2\mu_0) (\rho v)^2 / (\rho_0 v_0)^2 = P_e(0) e^{-z/h}$$

En  $z = 0$ , cette relation s'écrit  $\rho_0 k T_0 / m + (B_0^2/2\mu_0) = P_e(0)$ . En supposant  $T_0$  et le  $\beta$  du plasma connus à la base du tube,  $\beta = (\rho_0 k T_0 / m) / (B_0^2/2\mu_0)$ , on impose par la connaissance de  $P_e(0)$ , le champ magnétique  $B_0 = [2\mu_0 P_e(0)/(1 + \beta)]^{1/2}$  et la masse volumique  $\rho_0 = P_0 m / k T_0 = (m/k T_0) P_e(0) \beta / (1 + \beta)$  à la base du tube.

Les équations ont une solution numérique. On a choisi  $P_e(0) = 5000$  Pa,  $T_0 = 8000$  K,  $v_0 = 0.5$  km/s et on a fait varier  $\beta$ . L'échelle de hauteur extérieure est de 120 km.

Les courbes rouges représentent la solution hydrodynamique sans champ (altitude critique 425 km)

Les courbes noires donnent la solution pour  $\beta = 0.01$  (—), 0.1 (·····) et 0.6 (- - -). L'altitude critique augmente à 545 km lorsque  $\beta$  diminue. La température doit être plus élevée à la base que celle de la photosphère moyenne si l'on veut avoir vers 300 km une température réaliste.



## V – 11 Equilibre énergétique des boucles magnétiques coronales

De quels paramètres l'équilibre énergétique d'une boucle magnétique dépend-il ? Nous allons tenter de répondre à cette question de façon simplifiée en considérant une boucle de longueur  $L$  donnée de pression constante  $P$  (ce qui n'est réaliste que pour les boucles basses compte tenu de l'échelle de

hauteur de la couronne  $H = kT/gm$  voisine de 50 000 km) ancrée dans la photosphère. En régime stationnaire, on a compétition entre le chauffage, les pertes radiatives, et la conduction, selon la loi :

$$h \rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T) = 0 \text{ avec } k_{//} = k_0 T^{5/2}$$

et  $\text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T) = (1/S) d(S k_{//} dT/ds)/ds = (2/7) k_0 d^2(T^{7/2})/ds^2$  pour une boucle de section constante  $S$ .  $s$  est l'abscisse curviligne.  $T(s)$  est la température de la boucle à l'abscisse  $s$ . La fonction  $Q(T)$  prend la forme  $\chi/T$  aux températures coronales qui nous concernent (environ  $10^6$  K).  $h$  est le taux de chauffage par unité de masse. L'équation d'énergie s'écrit ainsi :

$$h \rho - \rho^2 \chi/T + (2/7) k_0 d^2(T^{7/2})/ds^2 = 0 \text{ avec } P = \rho kT/m = \text{constante}$$

Avec  $\rho = Pm/kT$  et en multipliant par  $d(T^{7/2})/ds$ , on fait apparaître une intégrale première :  $(7hPm/5k) T^{5/2} - (7P^2m^2 \chi/k^2) T^{1/2} + (k_0/7) [d(T^{7/2})/ds]^2 = \text{constante}$

Nous raisonnons maintenant aux ordres de grandeur pour éviter d'avoir à intégrer cette équation différentielle, et  $T$  désignera la température du sommet de la boucle. En faisant l'hypothèse que le chauffage est du même ordre que le rayonnement, l'égalité des deux premiers termes fournit une relation pour le taux de chauffage  $h = (5Pm \chi/k)/T^2$ .

En faisant l'hypothèse que le chauffage est du même ordre de grandeur que la conduction, l'égalité du 1<sup>er</sup> et du 3<sup>ème</sup> terme fournit une seconde relation pour le taux de chauffage :  $h = (5k k_0/49Pm) T^{9/2}/L^2$ , car aux ordres de grandeur  $d(T^{7/2})/ds \approx (T^{7/2} - T_0^{7/2})/L$ , en supposant que la température  $T_0$  aux pieds de la boucle (photosphère à  $10^4$  K) est négligeable devant celle du sommet  $T$  (coronale).

De ces deux formulations de  $h$ , on conclut que  $P/T^2$  est proportionnel à  $P^{-1} T^{9/2}/L^2$ , dont on déduit :

$\begin{aligned} T \text{ varie comme } L^{4/13} P^{4/13} \text{ et } h \text{ varie comme } L^{-8/13} P^{5/13} \\ P \text{ varie comme } L^{8/5} h^{13/5} \text{ et } T \text{ varie comme } L^{4/5} h^{4/5} \end{aligned}$
--

Ainsi, la température de la boucle est d'autant plus élevée qu'elle est longue (faible conduction vers les pieds) ou que le taux de chauffage est fort.

La pression  $P$  de la boucle est reliée à la pression extérieure par la relation de l'équilibre transversal  $P + B^2/2\mu_0 = P_{\text{ext}}$ ,  $B$  étant le champ magnétique de la boucle.  $P$  est donc d'autant plus faible que  $B$  est élevé, à  $P_{\text{ext}}$  constant. En introduisant le  $\beta$  du plasma, on a  $P = P_{\text{ext}} \beta/(1 + \beta)$ . Si  $\beta$  est petit devant 1, on peut donc affirmer :  $T$  varie comme  $L^{4/13} (\beta P_{\text{ext}})^{4/13}$  et  $h$  varie comme  $L^{-8/13} (\beta P_{\text{ext}})^{5/13}$ . Ainsi, les boucles basses ( $P_{\text{ext}}$  fort) pourront être plus chaudes que les boucles élevées ( $P_{\text{ext}}$  faible).

## V – 12 Stabilité MHD idéale (adiabatique, non résistive) : modes normaux

L'analyse de la stabilité MHD repose sur les équations simplifiées suivantes :

$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$	<i>conservation de la masse</i>
$\rho [ \partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}(\mathbf{v}) ] = - \mathbf{grad} P + \rho \mathbf{g} + \mathbf{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$	<i>équation du mouvement</i>
$\partial\mathbf{B}/\partial t = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$	<i>équation d'induction</i>
$dP/dt = (\gamma P/\rho) d\rho/dt$ avec $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}$	<i>transformation adiabatique</i>
variables uniquement dans un milieu infiniment conducteur ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) et adiabatique ( $P/\rho^\gamma = \text{cte}$ ).	
L'analyse de la stabilité repose sur les équations aux perturbations. Pour ce faire, on pose :	

$P = P_0 + P_1$  où  $P_0(x,y,z)$  est le champ de pression à l'équilibre et  $P_1(x,y,z)$  sa perturbation

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$  où  $\mathbf{B}_0(x,y,z)$  est le champ magnétique à l'équilibre et  $\mathbf{B}_1(x,y,z)$  sa perturbation

$\rho = \rho_0 + \rho_1$  où  $\rho_0(x,y,z)$  est la masse volumique à l'équilibre et  $\rho_1(x,y,z)$  sa perturbation

Le champ de vitesse à l'équilibre étant nul, on a :  $-\mathbf{grad} P_0 + \rho_0 \mathbf{g} + \mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 = 0$

Les dérivées partielles  $\partial P_0 / \partial t$ ,  $\partial \rho_0 / \partial t$ ,  $\partial \mathbf{B}_0 / \partial t$  sont nulles.

En négligeant les termes de second ordre, on obtient :

$$\partial \rho_1 / \partial t + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = -\mathbf{grad} (P_0 + P_1) + (\rho_0 + \rho_1) \mathbf{g} + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \wedge (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) / \mu_0$$

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)$$

$$\partial P_1 / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P_0 = (\gamma P_0 / \rho_0) [\partial \rho_1 / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho_0]$$

ou encore, tenant compte de la relation à l'équilibre :

$$\partial \rho_1 / \partial t = -\text{div}(\rho_0 \mathbf{v})$$

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)$$

$$\partial P_1 / \partial t = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P_0 + (\gamma P_0 / \rho_0) [\partial \rho_1 / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho_0]$$

$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = -\mathbf{grad} P_1 + \rho_1 \mathbf{g} + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{B}_1 / \mu_0$$

En dérivant l'équation du mouvement par rapport au temps, on y fait apparaître les quantités  $\partial \rho_1 / \partial t$ ,  $\partial \mathbf{B}_1 / \partial t$  et  $\partial P_1 / \partial t$  que l'on tire des trois premières équations :

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = -\mathbf{grad}(\partial P_1 / \partial t) + \partial \rho_1 / \partial t \mathbf{g} + \mathbf{rot}(\partial \mathbf{B}_1 / \partial t) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge (\partial \mathbf{B}_1 / \partial t) / \mu_0$$

Après transformation, on obtient finalement :

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{v} / \partial t^2 = \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{grad}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P_0 + \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{v})] - \mathbf{g} \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) + \mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0) / \mu_0$$

↓  
terme en  $(\Delta \mathbf{j} / \Delta t) \wedge \mathbf{B}_0$

↓  
terme en  $\mathbf{j}_0 \wedge (\Delta \mathbf{B} / \Delta t)$

Intégrons par rapport au temps en introduisant le petit déplacement vectoriel  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathbf{v} = d\mathbf{x} / dt \approx \partial \mathbf{x} / \partial t$  (second ordre en  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{x})$  négligé) ; on trouve avec  $F(\partial \mathbf{x} / \partial t) = \partial F(\mathbf{x}) / \partial t$  l'équation des petits mouvements :

$$\rho_0 \partial^2 \mathbf{x} / \partial t^2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \text{avec } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \text{ opérateur des petits mouvements, ou force de rappel généralisée}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}[\mathbf{x} \cdot \mathbf{grad} P_0 + \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x})] - \mathbf{g} \text{div}(\rho_0 \mathbf{x}) + \mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{B}_0 / \mu_0 + \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0) / \mu_0$$

Cette équation linéaire peut s'étudier par séparation des variables en posant  $\mathbf{x} = \mathbf{R}(x,y,z) T(t)$  où  $\mathbf{R}$  est un vecteur de coordonnées  $(R_x, R_y, R_z)$

$$\text{On obtient alors : } \rho_0 \mathbf{R} \partial^2 T / \partial t^2 = T \mathbf{F}(\mathbf{R})$$

Ce qui implique  $(1/T) \partial^2 T / \partial t^2 = \text{constante} = \lambda$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \rho_0 \lambda \mathbf{R}$

Il s'agit d'une équation aux valeurs propres  $\lambda$  et vecteurs propres  $\mathbf{R}$  de l'opérateur  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) / \rho_0$ . Les vecteurs propres  $\mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$  correspondant aux valeurs propres  $\lambda$  sont appelés modes normaux.

Si toutes les valeurs propres sont négatives ( $\lambda = -\omega^2$ ), le système est stable (solutions en  $e^{\pm i\omega t}$ ).

Si l'une seulement des valeurs propres est positive, le système est instable (solutions en  $e^{\pm t \sqrt{\lambda}}$ ).

Des trois équations obtenues ci dessus :

$$\partial \rho_1 / \partial t = -\text{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = -\rho_0 \text{div}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho_0$$

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)$$

$$\partial P_1 / \partial t = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P_0 + (\gamma P_0 / \rho_0) [\partial \rho_1 / \partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho_0] = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} P_0 - \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{v})$$

dans lesquelles on peut remplacer  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{v} = d\mathbf{x} / dt \approx \partial \mathbf{x} / \partial t$ , on déduit les perturbations :



$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_1 &= \operatorname{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0) \\ P_1 &= -\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 - \gamma P_0 \operatorname{div}(\mathbf{x}) \\ \text{avec } \rho &= \rho_0 + \rho_1, P = P_0 + P_1, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \end{aligned}$$

Une autre alternative à la recherche des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur  $\mathbf{F}$  consiste à étudier la variation seconde de l'énergie potentielle du système. On sait qu'à l'équilibre, l'énergie potentielle d'un système est minimale, ce qui implique la nullité de ses dérivées partielles par rapport aux petits déplacements, donc de sa variation première. Si sa variation seconde (dérivées partielles secondes) est positive pour tout petit déplacement  $\mathbf{x}$  (concavité dirigée vers le haut), le système est stable.

L'énergie totale, est par unité de volume :  $U + \rho\phi + \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$ , avec  $U = P/(\gamma-1)$ ,  $\rho\phi$  et  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0$  respectivement densités d'énergie interne, gravitationnelle et électromagnétique.

L'énergie potentielle d'un système de volume  $V$  fermé est définie par l'intégrale:

$$E_p = \iiint [U + \rho\phi + \varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2 + \mathbf{B}^2/2\mu_0] dV$$

On peut exprimer la variation seconde de  $E_p$  en fonction des petits déplacements  $\mathbf{x}$  et de la force de rappel généralisée  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Reprenons la relation  $\rho_0 \partial^2 \mathbf{x} / \partial t^2 = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  qui s'intègre en multipliant les deux membres par  $\partial \mathbf{x} / \partial t$  :

$$\rho_0 \partial \mathbf{x} / \partial t \partial^2 \mathbf{x} / \partial t^2 = \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \partial [1/2 \rho_0 (\partial \mathbf{x} / \partial t)^2] / \partial t - \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\text{En intégrant sur le volume, on a } \partial [\iiint 1/2 \rho_0 (\partial \mathbf{x} / \partial t)^2 dV] / \partial t - \iiint \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = 0$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie cinétique + potentielle,  $\partial [E_c + E_p] / \partial t = 0$

$$\text{D'où } \partial E_p / \partial t = - \iiint \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV$$

$$\text{On admettra que } \iiint \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \iiint \mathbf{x} \mathbf{F}(\partial \mathbf{x} / \partial t) dV \text{ (qui est égal à } \iiint \mathbf{x} \partial \mathbf{F}(\mathbf{x}) / \partial t dV \text{).}$$

on en déduit que  $\iiint \partial \mathbf{x} / \partial t \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{2} \partial [\iiint \mathbf{x} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV] / \partial t = - \partial E_p / \partial t$ , soit finalement :

$$E_p^{(2)} = - \frac{1}{2} \iiint \mathbf{x} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV \text{ variation seconde de l'énergie potentielle}$$

Application aux modes normaux :  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \rho_0 \lambda \mathbf{R}$

$$E_p^{(2)} = - \frac{1}{2} \iiint \mathbf{R} \mathbf{F}(\mathbf{R}) dV = - \frac{1}{2} \lambda \iiint \rho_0 \mathbf{R}^2 dV \text{ est du signe de } - \lambda$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre négative, alors  $E_p^{(2)}(\mathbf{R}) > 0$ , le mode est stable

Si  $\lambda$  est une valeur propre positive, alors  $E_p^{(2)}(\mathbf{R}) < 0$ , le mode est stable

Le système est globalement stable si  $E_p^{(2)} = - \frac{1}{2} \iiint \mathbf{x} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV$  est positif pour tout petit déplacement  $\mathbf{x}$ , ou bien si toutes les valeurs propres  $\lambda$  de l'équation  $\mathbf{F}(\mathbf{R}) / \rho_0 = \lambda \mathbf{R}$  sont négatives.

Il est possible d'établir en fonction de  $\mathbf{x}$ ,  $P_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  la variation seconde de l'énergie à partir de l'expression de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ; on trouve après calcul :

$$E_p^{(2)} = \frac{1}{2} \iiint [ \underbrace{Q^2/\mu_0}_{\text{partie magnétique}} - \underbrace{(\mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{x}}_{\text{partie hydrodynamique}} + (\gamma P_0/\rho_0) \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{x}) + \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{g})}_{\text{partie gravitationnelle}} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) ] dV$$

avec  $\mathbf{Q} = \operatorname{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)$ ,  $\mathbf{j}_0 = \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0)/\mu_0$  et  $\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) = \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} \rho_0$

$E_p^{(2)}$  est constituée d'une intégrale sur le volume d'une somme de termes qui dépendent de la configuration d'équilibre  $P_0(x,y,z)$ ,  $\rho_0(x,y,z)$  et  $B_0(x,y,z)$ .

On constate qu'un milieu homogène ( $P_0$ ,  $\rho_0$  et  $B_0$  constants, donc  $\mathbf{j}_0$  nul) sans gravité est toujours stable car  $E_p^{(2)} = \frac{1}{2} \iiint [ Q^2/\mu_0 + \gamma P_0 (\operatorname{div} \mathbf{x})^2 ] dV > 0$

Une autre forme de  $E_p^{(2)} = -\frac{1}{2} \iiint \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV$  peut être obtenue de la manière suivante :

$$E_p^{(2)} = -\frac{1}{2} \iiint [ \mathbf{x} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Q} \wedge \mathbf{B}_0/\mu_0 + \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{Q}/\mu_0 ] dV$$

En remarquant que (premier terme):

$$\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x}) = \operatorname{div}((\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x}) \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{x}$$

et que (troisième terme):

$$\mathbf{x} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Q} \wedge \mathbf{B}_0/\mu_0 = [ \operatorname{div}((\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{x}) - Q^2 ]/\mu_0$$

le théorème « flux divergence » d'Ostrogradski permet de scinder la variation seconde d'énergie potentielle en deux termes : un terme volumique, et une contribution de la surface frontière :

$$E_p^{(2)} = E_{\text{vol}}^{(2)} + E_{\text{surf}}^{(2)} \text{ avec:}$$

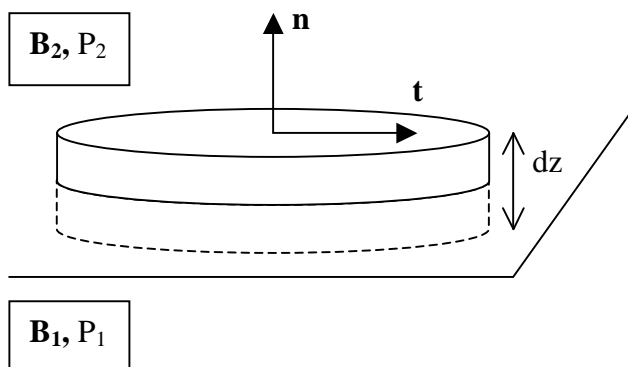
$$E_{\text{vol}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iiint [ \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{x} + Q^2/\mu_0 - \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{Q}/\mu_0 ] dV$$

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \iint [ (\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{x} - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}/\mu_0)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q})(\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S})/\mu_0 ]$$

Où  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ ,  $\mathbf{n}$  vecteur normal à la surface frontière orienté vers l'extérieur.

## V - 12 - 1 Condition d'équilibre aux interfaces plasma plasma

La majorité des problèmes rencontrés mettent en jeu des interfaces plasma plasma ou plasma vide (exemple : un cylindre de plasma confiné dans le vide par un champ magnétique). Il est indispensable de préciser les relations de continuité aux interfaces.



Considérons l'élément de surface  $dS$  d'épaisseur  $dz$  à l'interface entre deux plasma 1 et 2. La normale à la surface est  $\mathbf{n}$  et la tangente est  $\mathbf{t}$ .  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  implique, lorsque  $dz \rightarrow 0$ , la conservation de la composante normale  $B_n$  du champ magnétique :

$$B_{n1} = B_{n2} \text{ ou } B_n = \text{cte}$$

La force par unité de volume qui s'exerce sur chaque plasma de part et d'autre est donnée par :

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} P + \rho \mathbf{g} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$$

$$\text{Comme } \operatorname{grad}(B^2/2) = \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B}$$

on en déduit  $\mathbf{f} = -\operatorname{grad}(P + B^2/2\mu_0) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B} / \mu_0$

La condition d'équilibre de la surface  $dS$  implique la nullité des forces qui lui sont appliquées lorsque  $dz \rightarrow 0$ , ce qui se traduit, sachant que  $B_n$  se conserve à la traversée, par :

$$-(P + B^2/2\mu_0) \mathbf{n} + B_n \mathbf{B}/\mu_0 = \text{cte}$$

Comme  $\mathbf{B} = B_n \mathbf{n} + B_t \mathbf{t}$ , et que  $B_n$  se conserve à la traversée, on obtient :

$$P_1 + B_{t1}^2/2\mu_0 = P_2 + B_{t2}^2/2\mu_0 \text{ et } B_n (B_{t1} - B_{t2}) = 0$$

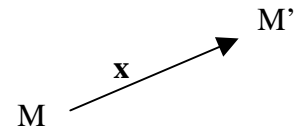
L'équilibre des forces à la frontière implique donc :

Si  $B_{n1} = B_{n2} = 0$  (champ tangent à la frontière) :  $P_1 + B_1^2/2\mu_0 = P_2 + B_2^2/2\mu_0$   
 Si  $(B_{n1} = B_{n2}) \neq 0$  :  $B_{t1} = B_{t2}$  donc  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  et  $P_1 = P_2$

On sera en général en présence du premier cas :  $B_n = 0$  (champ tangent à la frontière) et  $P + B^2/2\mu_0 = \text{cte}$ . Comment se traduit cette condition sur le petit déplacement  $\mathbf{x}$  ? Considérons le déplacement du point  $M$  vers le point  $M'$  tel que  $\mathbf{MM}' = \mathbf{x}$ . A la suite de la perturbation pour une interface plasma plasma,  $\mathbf{B}(M')$  et  $P(M')$  se déduisent de  $\mathbf{B}(M)$  et  $P(M)$  par un développement limité à l'ordre 1 en  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{B}(M) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(M') = \mathbf{B}(M) + \mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 + \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0) + \mathbf{x} \cdot \text{grad} \mathbf{B}_0$$



$$P(M) = P_0 + P_1 = P_0 - \mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 - \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow P(M') = P(M) + \mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 = P_0 - \mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 - \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 = P_0 - \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x})$$

La relation de continuité  $P(M') + B(M')^2/2\mu_0 = P_0 + B_0^2/2\mu_0$  nous donne en négligeant les termes du second ordre:

$$P_0 - \gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x}) + (\mathbf{B}_0^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0) + 2\mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{x} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_0)/2\mu_0 = P_0 + B_0^2/2\mu_0$$

$$\Rightarrow -\gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_0 \cdot \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)/\mu_0 + \mathbf{x} \cdot \text{grad}(B_0^2/2\mu_0) = 0$$

A l'aide de cette relation, il devient possible de préciser la variation seconde de l'énergie potentielle à l'interface plasma plasma. Pour chaque plasma, on a :

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = -1/2 \iint [ (\mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 + \gamma P_0 \text{div} \mathbf{x} - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}/\mu_0)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q})(\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S})/\mu_0 ]$$

En se plaçant dans le cas où le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est tangent à la frontière, on a  $B_n = 0$  donc  $\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$ , et le dernier terme s'évanouit. Il reste pour chaque plasma avec  $\mathbf{Q} = \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)$ :

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = -1/2 \iint (\mathbf{x} \cdot \text{grad} P_0 + \gamma P_0 \text{div} \mathbf{x} - \mathbf{B}_0 \cdot \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)/\mu_0)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S})$$

Or  $\gamma P_0 \text{div}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_0 \cdot \text{rot}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_0)/\mu_0 = \mathbf{x} \cdot \text{grad}(B_0^2/2\mu_0)$ , d'où en substituant :

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = -1/2 \iint \mathbf{x} \cdot \text{grad}(P_0 + B_0^2/2\mu_0) (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S})$$

en sommant les contributions de surface des deux plasma, on obtient (attention aux deux vecteurs  $d\mathbf{S}$  de chaque plasma qui sont opposés sur la frontière commune) avec  $\mathbf{n}$  normale de 1 vers 2 :

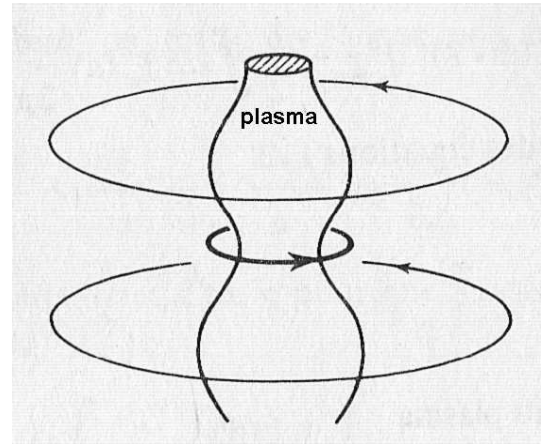
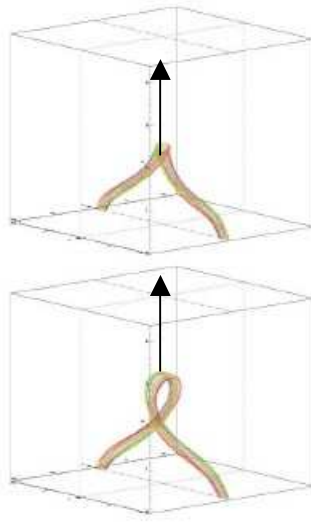
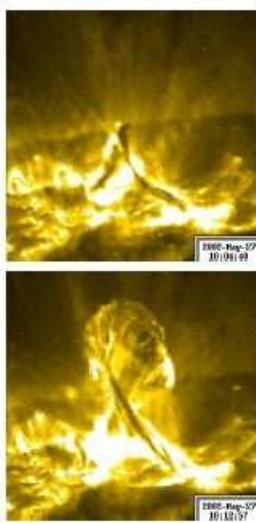
$$E_{\text{surf}}^{(2)} = 1/2 \iint [\mathbf{x} \cdot \text{grad}(P_{02} + B_{02}^2/2\mu_0) - \mathbf{x} \cdot \text{grad}(P_{01} + B_{01}^2/2\mu_0)] (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Comme seule la composante normale du gradient subit un saut, cette expression devient :

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(P_{02} + B_{02}^2/2\mu_0) - \mathbf{n} \cdot \text{grad}(P_{01} + B_{01}^2/2\mu_0)] (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})^2 dS \quad \text{et } B_{n1} = B_{n2} = 0$$

## V – 12 – 2 Résumé de quelques instabilités

L'instabilité d'interchange se produit lorsqu'un échange de lignes de champ magnétique à volume de plasma constant (donc sans variation d'énergie interne  $\iiint U dV$ ) peut entraîner une diminution d'énergie magnétique  $\iiint B^2/2\mu_0 dV$ . Par exemple, elle survient lorsqu'un plasma est confiné dans le vide par un champ magnétique  $\mathbf{B}_{\text{out}}$  dont la concavité est tournée vers l'intérieur du plasma (lignes de champ enroulées autour d'une colonne de plasma cylindrique de pression uniforme  $P_{\text{in}}$ , sans champ magnétique interne, avec un courant de surface à la frontière, tel que  $P_{\text{in}} = B_{\text{out}}^2/2\mu_0$ ).



L'instabilité de « kink »

L'instabilité de « sausage »

Observation TRACE en UV et modélisation MHD

la variation seconde de l'énergie potentielle volumique de la colonne de plasma s'écrit :

$$E_{\text{vol}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iiint [\mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \text{div}(\rho_{\text{in}} \mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \text{grad } P_{\text{in}} + \gamma P_{\text{in}} \text{div } \mathbf{x}) \text{div } \mathbf{x} + \mathbf{Q}_{\text{in}}^2/\mu_0 - \mathbf{x} \cdot \text{rot}(\mathbf{B}_{\text{in}}) \wedge \mathbf{Q}/\mu_0] dV$$

On montre, en l'absence de gravité ( $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ) que les petits déplacements qui minimisent  $E_p^{(2)}$  sont tels que  $\text{div } \mathbf{x} = 0$  ; dans ce cas, puisque  $\mathbf{B}_{\text{in}} = \mathbf{0}$  (pas de champ dans la colonne):  $E_{\text{vol}}^{(2)} = 0$

la variation seconde de l'énergie potentielle surfacique de la colonne de plasma s'écrit :

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(P_{\text{out}} + B_{\text{out}}^2/2\mu_0) - \mathbf{n} \cdot \text{grad}(P_{\text{in}} + B_{\text{in}}^2/2\mu_0)] (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})^2 dS$$

Puisque  $P_{\text{in}}$  est uniforme,  $\mathbf{B}_{\text{in}}$  nul, et  $P_{\text{out}}$  nul,

$$E_{\text{surf}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint \mathbf{n} \cdot \text{grad}(B_{\text{out}}^2/2\mu_0) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})^2 dS$$

Or  $\text{grad}(B_{\text{out}}^2/2) = \mathbf{B}_{\text{out}} \wedge \text{rot } \mathbf{B}_{\text{out}} + (\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_{\text{out}} = (\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_{\text{out}}$  car il n'y a pas de courant dans le vide ( $\mathbf{j}_{\text{out}} = \text{rot } \mathbf{B}_{\text{out}}/\mu_0 = \mathbf{0}$ )

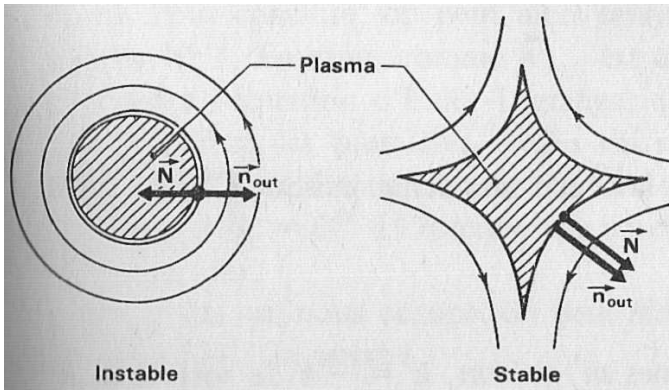
D'où  $\mathbf{n} \cdot \text{grad}(B_{\text{out}}^2/2) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_{\text{out}}$

Dans le repère de Frénet, on peut écrire  $\mathbf{B}_{\text{out}} = B_{\text{out}} \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}$  vecteur tangent à la frontière (car  $B_n = 0$ ), et

$$\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \text{grad } \mathbf{B}_{\text{out}} = B_{\text{out}} d(B_{\text{out}} \mathbf{t}) ds = B_{\text{out}}^2 dt ds + \mathbf{t} B_{\text{out}} dB_{\text{out}} ds = B_{\text{out}}^2 \mathbf{N}/R + \mathbf{t} d(B_{\text{out}}^2/2) ds$$

Où  $\mathbf{N}$  est le vecteur normal aux lignes de champ (tourné vers le centre de courbure) et  $R$  leur rayon de courbure (figure ci dessous). On en déduit (puisque  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ ) :

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{\text{out}} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}_{\text{out}}/\mu_0 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) (B_{\text{out}}^2/\mu_0) /R$  dont il découle la conclusion illustrée ci dessous :



$$E_{\text{surf}}^{(2)} = \frac{1}{2} \iint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) (B_{\text{out}}^2 / \mu_0) / R (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})^2 dS$$

A gauche :

Concavité tournée vers l'intérieur  
 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} < 0 \rightarrow E_{\text{surf}}^{(2)} < 0 \rightarrow \text{instable}$

A droite :

Concavité tournée vers l'extérieur  
 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} > 0 \rightarrow E_{\text{surf}}^{(2)} > 0 \rightarrow \text{stable}$

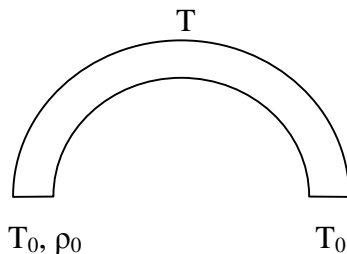
Lorsque la concavité des lignes de champ est tournée vers l'intérieur, on a des instabilités en « flûte » : la perturbation dessine des « vagues » parallèles au champ magnétique non perturbé.

L'instabilité de Rayleigh Taylor survient à l'interface de deux fluides incompressibles soumis à la gravité lorsque le plus dense surmonte le moins dense. L'instabilité hydromagnétique de Rayleigh Taylor se produit lorsqu'un plasma est supporté par un champ magnétique contre la gravité.

En MHD résistive, l'instabilité de déchirement (« tearing mode »), avec reconnexion des lignes de champ magnétique, joue un rôle essentiel dans les éruptions solaires et éjections de masse coronale.

### V – 12 – 3 Instabilité thermique radiative

Nous terminerons par l'instabilité thermique radiative, sans doute à l'œuvre dans les processus de condensation des boucles, filaments et protubérances. Considérons une boucle magnétique de longueur L, de température initiale  $T_0$  et de masse volumique initiale  $\rho_0$ .



Ses pieds sont maintenus à la température coronale constante  $T_0 = 10^6$  K. L'équation d'énergie (sans chauffage Joule) s'écrit:

$$dP/dt - (\gamma P / \rho) d\rho/dt = (\gamma - 1) [h \rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T)]$$

avec l'équilibre de pression latéral  $P + B^2/2\mu_0 = \text{constante}$

On considérera en première approximation une boucle isobare de pression interne  $P_0$  constante (donc  $\rho T = \rho_0 T_0$ ), avec les pertes radiatives  $Q(T) = \chi/T$  et le terme conductif  $\text{div}(k_{//} \mathbf{grad} T) = k_{//} (T_0 - T)/L^2$ , où  $k_{//} = k_0 T^{5/2}$  est le coefficient de conduction, de sorte que l'équation d'énergie simplifiée devient :

$$(\gamma P_0 / T) dT/dt = (\gamma - 1) [h \rho - \rho^2 \chi/T + k_0 T^{5/2} (T_0 - T)/L^2]$$

A l'équilibre pour lequel  $T = T_0 = \text{constante}$ , on a :  $h \rho_0 - \rho_0^2 \chi/T_0 = 0$ , ce qui permet de calculer le taux de chauffage par ondes  $h = \rho_0 \chi/T_0$ .

L'équation devient alors :

$$dT/dt = [(\gamma - 1)/(\gamma P_0)] [-\rho_0^2 \chi (T_0^2/T^2 - 1) + k_0 T^{7/2} (T_0 - T)/L^2]$$

Posons  $T = T_0 (1 + \varepsilon)$  avec  $\varepsilon \ll 1$  et effectuons un développement limité au premier ordre :

$$d\varepsilon/dt = \varepsilon [(\gamma - 1)/(\gamma P_0 T_0)] [2 \rho_0^2 \chi - k_0 T_0^{9/2}/L^2]$$

En l'absence de conduction, on a  $k_0 = 0$ ,  $\varepsilon$  est une exponentielle croissante, l'équilibre est instable.  
En présence de conduction, on peut avoir un équilibre stable ( $\varepsilon$  exponentielle décroissante) à la condition que :  $2 \rho_0^2 \chi - k_0 T_0^{9/2}/L^2 < 0$

soit  $L < [k_0 T_0^{9/2}/(2 \rho_0^2 \chi)]^{1/2}$

Si la boucle magnétique dépasse une certaine longueur, par exemple suite à une élongation sous l'influence de mouvements de ses pieds, elle peut devenir instable et se condenser.

# Chapitre 6

## La photosphère

### VI – 1 Conditions physiques

C'est une fine couche de 500 km d'épaisseur environ. En la supposant isotherme à la température T, on peut calculer son échelle de hauteur par la loi de l'équilibre hydrostatique :

-  $\text{grad } P + \rho g = 0$

$dP/dz = -\rho g$  et la loi des gaz parfaits  $P = \rho kT/m$

d'où  $P/P_0 = e^{-(gm/kT)z}$

$H = kT/mg$  est l'échelle de hauteur

Avec  $g = 275 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $T = 6000 \text{ K}$ , on trouve  $H = 200 \text{ km}$

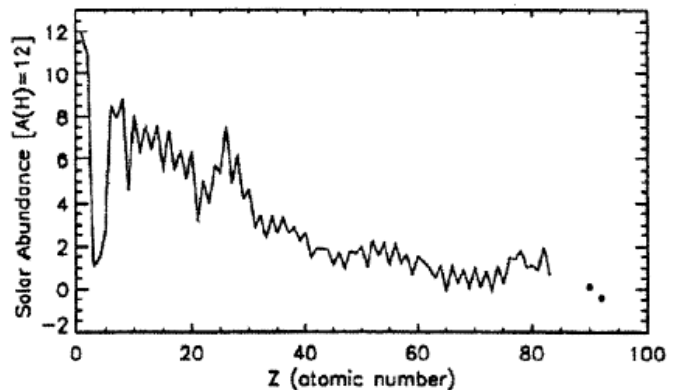
Pression moyenne  $P = 10^3 \text{ Pa}$  et variation de 0 à 500 km :  $1.3 \cdot 10^4 \text{ Pa} \rightarrow 10^2 \text{ Pa}$   
 T moyenne = 5000 K et variation de 0 à 500 km :  $6400 \text{ K} \rightarrow 4170 \text{ K}$   
 Densité moyenne  $N_H = 10^{22} \text{ m}^{-3}$  et variation de  $\rho$  de 0 à 500 km :  $3 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^{-3} \rightarrow 3 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$   
 Densité moyenne  $N_e = 10^{19} \text{ m}^{-3}$  et variation de 0 à 500 km :  $5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \rightarrow 10^{17} \text{ m}^{-3}$

Dans la photosphère, excepté dans les taches, le  $\beta$  du plasma ( $\beta = P/(B^2/2\mu_0)$ ) est grand devant l'unité, c'est à dire que les forces de pression dominent. L'hydrogène est essentiellement sous forme neutre.

Element	Ionization potential (eV)	Photospheric abundance
		Log <sub>10</sub>
1 H	13.6	12.00
2 He	24.6	10.93
6 C	11.3	8.52
7 N	14.5	7.92
8 O	13.6	8.83
10 Ne	21.6	8.11
11 Na	5.1	6.32
12 Mg	7.6	7.58
13 Al	6.0	6.49
14 Si	8.2	7.56
16 S	10.4	7.33
18 Ar	15.8	6.59
20 Ca	6.1	6.35
26 Fe	7.9	7.50
28 Ni	7.6	6.25

Abondances A en échelle logarithmique :  
 $A = \log_{10}(N/N_H) + 12$

et potentiels de première ionisation en eV  
 (H non représenté possède un potentiel de 0.75 eV)



### VI – 2 assombrissement centre bord

La photosphère solaire présente un assombrissement centre bord qui trahit une diminution de la température en fonction de l'altitude, celle-ci étant minimale au sommet de la photosphère. En

utilisant un modèle d'atmosphère grise, on a montré que la loi d'assombrissement centre bord s'écrit en première approximation sous la forme:  $I(\mu,0) = I_{\text{centre}} (2/5 + 3/5 \mu)$  où  $\mu = \cos\theta$ . La variation résultante est donc de 1 (centre) à 0.4 (bord).

Le cas gris nous a même permis d'en déduire une loi de variation de la température avec la profondeur optique :  $T^4 = T_0^4 (1 + 3/2 \tau)$ , formule dans laquelle  $T_0 = T(\tau=0)$  est la température de surface de l'étoile. T augmente donc lorsque l'on s'enfonce dans la photosphère ( $\tau$  augmente).

### VI – 3 Formation du spectre continu: l'ion H-

Le spectre continu provient de transitions lié libre ; peut il s'expliquer en invoquant l'atome d'Hydrogène neutre ? Nous devons pour commencer examiner la formation des continus à partir de la photo ionisation des éléments les plus courants, Hydrogène et Hélium.

Elément	Potentiel d'ionisation	Longueur d'onde	
H-	$h \nu = 0.75 \text{ eV}$	$\lambda < 16550 \text{ \AA}$	Visible et IR
H niveau 3	$h \nu = 1.5 \text{ eV}$	$\lambda < 8214 \text{ \AA}$	Visible, continu de Paschen
H niveau 2	$h \nu = 3.4 \text{ eV}$	$\lambda < 3650 \text{ \AA}$	UV, continu de Balmer
H niveau 1	$h \nu = 13.6 \text{ eV}$	$\lambda < 912 \text{ \AA}$	UV, continu de Lyman
HeI	$h \nu = 24.6 \text{ eV}$	$\lambda < 504 \text{ \AA}$	EUV
HeII niv1	$h \nu = 54.4 \text{ eV}$	$\lambda < 228 \text{ \AA}$	EUV, continu de Lyman

Les continus de He et de l'Hydrogène, Lyman ( $\lambda < 912 \text{ \AA}$  à partir du niveau 1) ou Balmer ( $\lambda < 3650 \text{ \AA}$  à partir du niveau 2), sont tous situés dans l'UV. Le spectre continu peut il s'expliquer par le continu de Paschen ( $\lambda < 8214 \text{ \AA}$ , visible et proche IR) ?

Pour répondre à cette question, on a besoin de connaître les populations du niveau 3 de l'atome d'Hydrogène à l'aide de la loi de Boltzmann :

$$N_3 / N_1 = (g_3 / g_1) \exp - [(E_3 - E_1) / kT] = 9 \exp - [(R_H / kT) (1 - 1/9)]$$

$R_H$  est la constante de Rydberg (13.6 eV) et  $g_n = 2n^2$ .

Pour une température typique de 5700 K (photosphère), on trouve  $N_3 / N_1 \approx 10^{-10}$

Avec  $N_1 \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$ , on trouve  $N_3 \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$

L'épaisseur  $h$  de la photosphère correspond à la profondeur optique unité ; si le spectre continu est le continu de Paschen, l'épaisseur de cette couche est donnée par le produit  $\sigma N_3 h = 1$ , où  $\sigma$  désigne la section efficace de photo ionisation à partir du niveau 3. Avec  $\sigma = 2 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$  et  $N_3 \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ , il vient  $h \approx 5 \cdot 10^5 \text{ km}$ , ce qui est incompatible avec l'épaisseur de la photosphère (de l'ordre de 300 km seulement). Il n'y a donc *pas assez d'atomes au niveau 3* pour rendre compte du spectre continu. Celui ci est en fait dû à l'ionisation de l'ion H<sup>-</sup>.

On a les deux équilibres :  $H = H^+ + e$  et  $H^- = H + e$  pour lesquels on applique la loi de Saha :

$$n_e n_{H^+} / n_H = [ (2\pi m_e k T)^{3/2} / h^3 ] \exp - (\chi_H / kT)$$

$$n_e n_H / n_{H^-} = [ (2\pi m_e k T)^{3/2} / h^3 ] \exp - (\chi_{H^-} / kT)$$

$\chi_H$  est le potentiel d'ionisation de l'hydrogène H :  $\chi_H = R_H = 13.6 \text{ eV}$  ; il correspond à un spectre continu (continu de Lyman) dans l'UV ( $\lambda < 912 \text{ \AA}$ )

$\chi_{H^-}$  est le potentiel d'ionisation de l'ion H<sup>-</sup> :  $\chi_{H^-} = 0.75 \text{ eV}$ ; en raison de sa **très faible valeur**, il correspond à un spectre continu **dans le visible et l'IR** ( $\lambda < 16550 \text{ \AA}$ ) ; examinons si la densité d'ions H<sup>-</sup> donnée par la loi de Saha est compatible avec l'épaisseur de la photosphère.

Avec l'hypothèse  $n_{H^+} \approx n_e$  (neutralité électrique), on déduit de la première relation :

$$n_e^2 \approx n_H [ (2\pi m_e k T)^{3/2} / h^3 ] \exp - (\chi_H / kT)$$

ce qui donne numériquement, avec  $n_H \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$  et  $T = 5700 \text{ K}$ ,  $n_e \approx 7 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} \approx n_{H^+}$

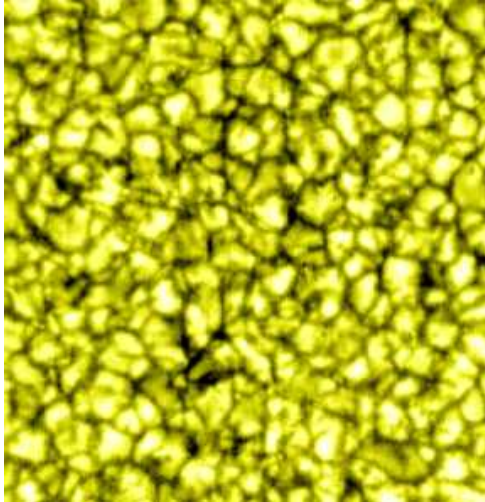
L'hydrogène est donc **très peu ionisé** dans la photosphère (taux d'ionisation  $< 10^{-3}$ ).



La seconde relation permet de calculer  $n_{H^-}$  connaissant  $n_e$  et  $n_H$  :  $n_{H^-} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$

Si le spectre continu provient de l'ionisation de  $H^-$ , l'épaisseur de la photosphère est donnée par le produit  $\sigma n_{H^-} h = 1$ , où  $\sigma$  désigne la section efficace de photo ionisation de l'ion  $H^-$ . Avec  $\sigma = 4 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$ ,  $n_{H^-} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$ , il vient  $h \approx 1000 \text{ km}$ , ce qui est compatible avec l'épaisseur de la photosphère.

#### VI – 4 Flux de chaleur convective et flux d'énergie cinétique dans la photosphère



*La surface du Soleil est en permanence recouverte de structures faiblement contrastées, la granulation, dont la taille typique est de 1000 km (voisine de l'échelle de hauteur locale) et la durée de vie de 10 mn. Les granules sont dynamiques : la matière monte au centre des granules et descend aux frontières (intergranules) avec une vitesse inférieure à 1 km/s. La granulation est la signature en surface de la convection sous jacente.  
(Observation Pic du Midi)*

Le contraste des structures  $(I_{\text{gran}} - I_{\text{inter}})/I_{\text{gran}}$ , voisin de 1/6, permet de calculer la différence de température granule/intergranule, en utilisant la loi de Stefan Boltzmann :  $T_{\text{inter}}^4 \approx 5/6 T_{\text{gran}}^4$ , ce qui donne  $T_{\text{inter}} \approx T_{\text{gran}} (5/6)^{0.25} \approx 5450 \text{ K}$ , soit une faible différence de température  $\Delta T$  de 250 K.

La durée de vie observée (environ 600 s) et la dimension typique des granules (1000 km) donne une estimation aux ordres de grandeur des **mouvements convectifs** : **le km/s**. Cette vitesse  $v_{\text{conv}}$  est très inférieure à la vitesse du son dans le milieu (10 km/s).

Le flux convectif transportée par la photosphère peut se calculer et se comparer avec intérêt avec le flux radiatif, qui vaut  $L/4\pi R^2$ ,  $L$  étant la luminosité du Soleil ( $3.86 \cdot 10^{26} \text{ W}$ ) et  $R$  le rayon du Soleil (696000 km). On trouve pour le flux radiatif  $6.3 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$ .

L'enthalpie  $H/V$  (en  $\text{J m}^{-3}$ ) par unité de volume  $V$  est égal à  $N k [\gamma/(\gamma-1)] \Delta T$ , la quantité  $N k [\gamma/(\gamma-1)]$  désignant la capacité calorifique  $C_p$  à pression constante par unité de volume et  $\Delta T$  l'écart de température granule/intergranule.  $N$  est le nombre d'atomes par unité de volume,  $k$  la constante de Boltzmann, et  $\gamma = C_p/C_v = 5/3$  (pour un gaz monoatomique). Le flux d'enthalpie, ou flux convectif, vaut donc  $N k [\gamma/(\gamma-1)] \Delta T v_{\text{conv}}$ , en  $\text{W/m}^2$ , avec  $v_{\text{conv}}$  vitesse convective (1 km/s).

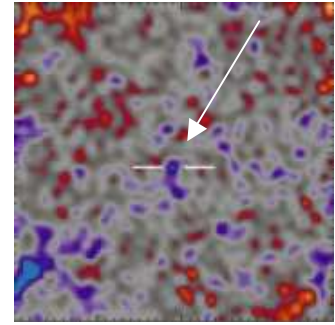
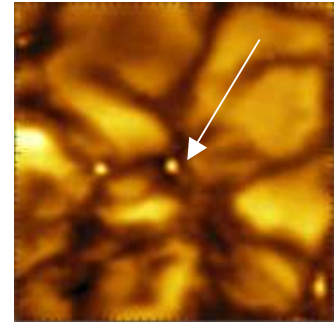
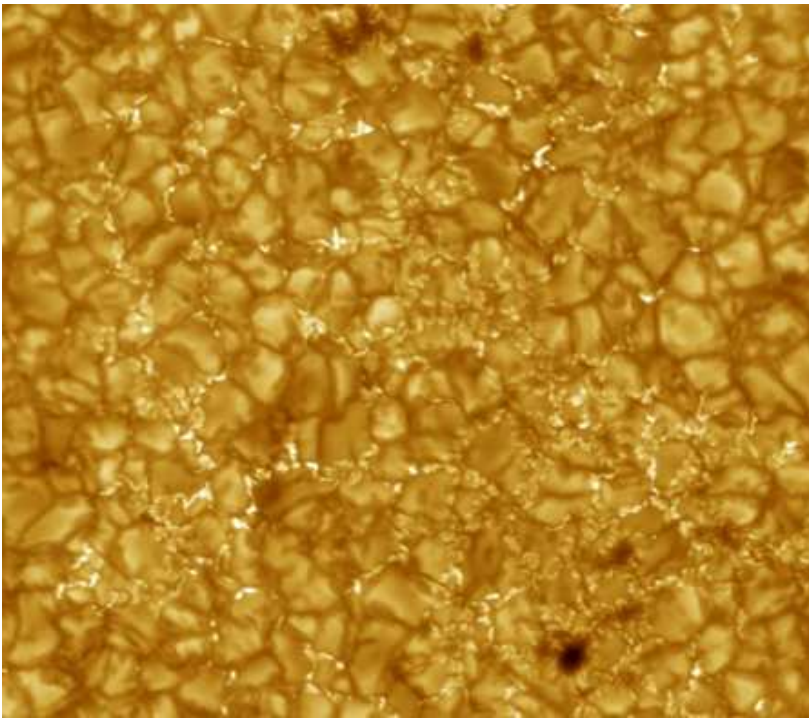
Avec un nombre  $N$  d'atomes typique de  $10^{22} \text{ m}^{-3}$ ,  $\Delta T = 250 \text{ K}$ ,  $v_{\text{conv}} = 1 \text{ km/s}$ , on trouve un flux convectif de  $8.6 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$ .

**Le rapport flux convectif/flux radiatif est donc de l'ordre de  $10^{-3}$** . Le principal mode de transport de l'énergie dans la photosphère est donc le rayonnement, contrairement à la zone sous jacente, où la densité est beaucoup plus élevée.

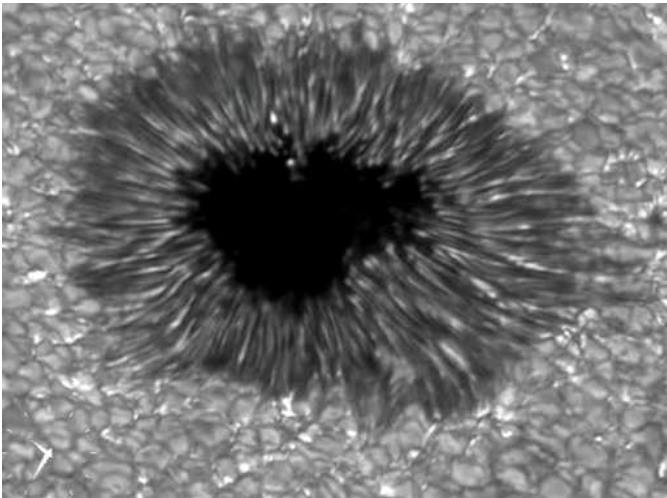
Le flux **d'énergie cinétique** d'origine convective est égal à  $\frac{1}{2} \rho v_{\text{conv}}^2 \times v_{\text{conv}} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{conv}}^3$  ( $\text{W/m}^2$ ). Il vaut en première approximation au sommet de la photosphère, avec  $\rho = 3 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$ ,  $1500 \text{ W/m}^2$ .

#### VI – 5 Les structures: granulation, mésogranulation, taches, tubes de flux

Les plus petits détails observables par les télescopes actuels sont de  $0.15''$ , soit environ 100 km (1 seconde d'arc = 725 km)



*Granulation et points brillants observés à la résolution de 0.15'' par le télescope suédois de la Palma. On assimile les points brillants, concentrés dans les espaces intergranulaires, à des tubes de flux magnétiques minces et concentrés. En haut à droite, intensité ; en bas à droite, Stokes V*



*Tache solaire, ou région d'émergence de champs magnétiques intenses ( $>0.1$  Tesla ou  $> 1000$  Gauss) poussés de la zone convective vers la photosphère par la force d'Archimède. La pression des tubes magnétiques est bien plus faible que celle du milieu environnant car la conservation de la pression totale*  
 $P_{\text{intérieur}} + B^2/2\mu_0 = P_{\text{extérieur}}$   
*implique  $P_{\text{intérieur}} \ll P_{\text{extérieur}}$*   
*(Observation Dutch Optical Telescope)*

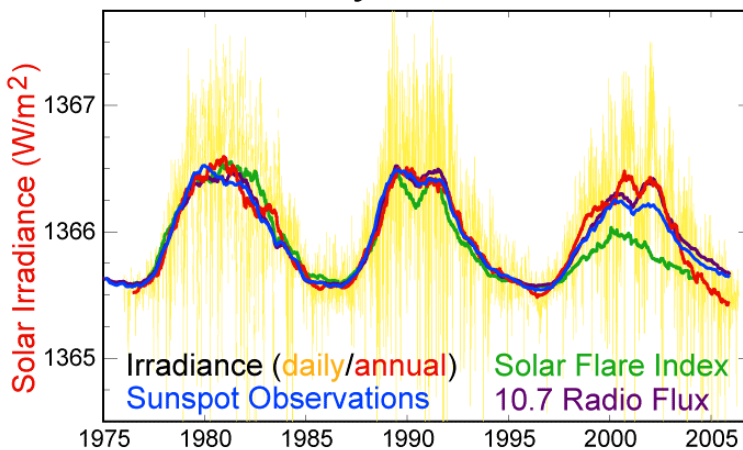
Le champ magnétique des taches, quasi vertical dans l'ombre, devient horizontal dans la pénombre. On y observe l'effet Evershed (circulation de matière dans les tubes de flux vers l'extérieur de la tache). Isolées du milieu ambiant par les champs magnétiques (la conduction de la chaleur est bloquée transversalement aux lignes de force), les taches sont plus froides. Leur luminosité est de 1/5 de la luminosité photosphérique. En supposant que les taches rayonnent comme un corps noir, leur température peut se calculer en écrivant  $\sigma T^4 = 1/5 \sigma T_{\text{eff}}^4$ , soit  $T = T_{\text{eff}}/5^{1/4} = 5750/5^{1/4} = \underline{3850 \text{ K}}$  environ ( $T_{\text{eff}}$  est la température effective).

L'équilibre  $P_{\text{in}} + B^2/2\mu_0 = P_{\text{out}}$  implique une pression interne très faible car  $P_{\text{out}} \approx 5000 \text{ Pa}$ ,  $B^2/2\mu_0 \approx 4000 \text{ Pa}$  pour  $B \approx 0.1 \text{ T}$ , donc  $P_{\text{in}} \approx P_{\text{out}}/5$ . Il en résulte de la loi des gaz parfaits que la densité de matière est très réduite avec  $\rho_{\text{in}} \approx \rho_{\text{out}}/5$ . En conséquence, la tache apparaît comme une dépression profonde d'environ 500 km : c'est l'effet Wilson. Pour une profondeur optique unité, le rayonnement parvient de couches plus profondes :  $\tau = k \rho z = 1$  ( $k$  coefficient d'absorption) entraîne une augmentation de la profondeur de vision lorsque  $\rho$  diminue.

## VI – 6 Cyclicité

L'observation de la photosphère révèle une cyclicité de 11 ans comme le montre la figure ci dessous. On pourrait penser que le soleil devrait être moins lumineux en période de maximum à cause du déficit dû à la présence de taches. En fait il n'en est rien, parce que les taches sont entourées de vastes régions brillantes, appelées facules, plus chaudes que l'atmosphère moyenne, qui compensent largement ce déficit. La variation du diamètre solaire en fonction du cycle n'est pas établie et fait l'objet de la mission spatiale PICARD du CNES qui sera lancée en 2009.

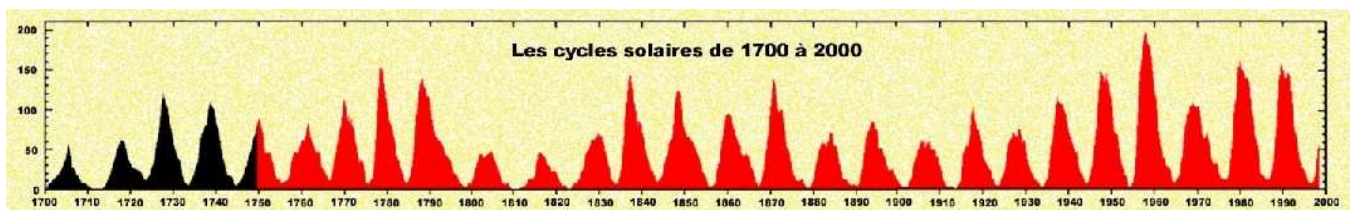
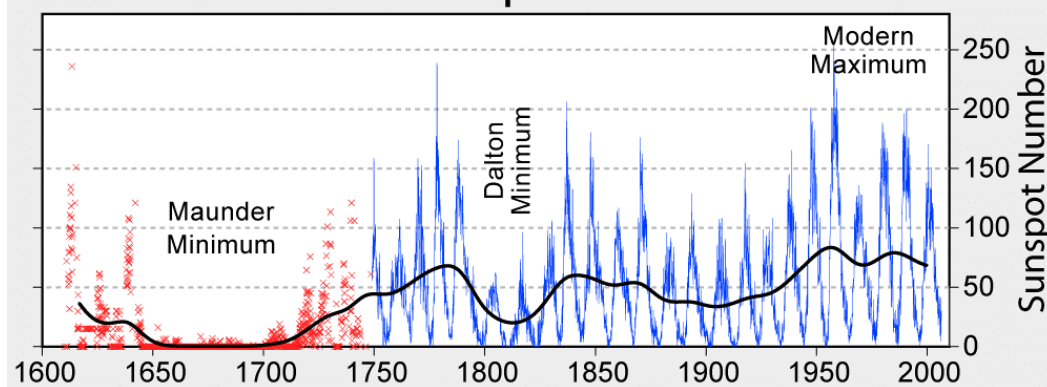
### Solar Cycle Variations



*Cyclicité solaire : l'irradiance à la Terre en  $W/m^2$ , la surface tachée, le nombre des éruptions, le flux solaire centimétrique sont corrélés avec un cycle voisin de 11 ans, bien que le cycle magnétique soit de 22 ans.*

Le cycle de 11 ans se retrouve de manière encore plus marquée dans les observations en rayons X. A ce cycle se superposent d'autres périodes, comme le montre la figure ci dessous, dont la régularité est mal établie (cycles de 80 ans ?), dans lesquelles on discerne des successions de cycles de 11 ans forts et de cycles de 11 ans faibles. Le minimum de Maunder, à l'époque de Louis XIV, est un exemple remarquable de cycles faibles, qui aurait entraîné l'apparition d'un « petit âge glaciaire ».

### 400 Years of Sunspot Observations



*Une alternance de cycles forts et de cycles faibles*



# Chapitre 7

## La chromosphère

### VII – 1 Conditions physiques

La chromosphère est une fine couche de 1500 km d'épaisseur qui surmonte la photosphère. Mais contrairement à celle-ci où la température diminue en fonction de l'altitude, on assiste à une remontée de la température de 4200 K jusqu'à 10000 K environ.

Pression moyenne  $P = 1 \text{ Pa}$  et variation de 500 à 2000 km :  $10^2 \text{ Pa} \rightarrow 10^{-2} \text{ Pa}$   
 T moyenne = 8000 K et variation de 500 à 2000 km :  $4170 \text{ K} \rightarrow 10000 \text{ K}$   
 $n_H = 10^{19} \text{ m}^{-3}$  et variation de  $\rho$  de 500 à 2000 km :  $3 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} \rightarrow 1.8 \cdot 10^{-10} \text{ kg m}^{-3}$   
 Densité moyenne  $N_e = 10^{17} \text{ m}^{-3}$  et variation de 500 à 2000 km :  $10^{17} \text{ m}^{-3} \rightarrow 4 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$

La chromosphère est une région de transition dans laquelle le  $\beta$  du plasma ( $\beta = P/(B^2/2\mu_0)$ ), grand devant l'unité dans la photosphère (forces de pression dominantes), devient négligeable devant 1 dans la couronne (forces magnétiques dominantes). Il en est de même du point de vue de l'ionisation de l'hydrogène, qui n'est plus essentiellement sous forme neutre. En effet, la loi de Saha donne  $n_e n_H^+ / n_H = f(T) = [ (2\pi m_e k T)^{3/2} / h^3 ] \exp - (\chi_H / kT)$  où  $\chi_H$  est le potentiel d'ionisation de l'hydrogène :  $\chi_H = R_H = 13.6 \text{ eV}$  (on a négligé les poids statistiques  $g$ ).

On peut faire un modèle *aux ordres de grandeur* en supposant que tous les électrons sont fournis par l'Hydrogène (ce qui est très approximatif car une partie provient de l'ionisation de métaux Fe, Ca, dont le potentiel est plus petit, de 5 eV à 8 eV) ; la neutralité électrique impose  $n_e \approx n_H^+$ . La connaissance de la masse volumique  $\rho$  (modèle d'atmosphère HSRA en annexe) donne  $n_H = \rho/m_H - n_H^+$  où  $m_H$  est la masse atomique.  $n_H^+$  obéit à l'équation du second degré  $(n_H^+)^2 + f(T) n_H^+ - f(T) \rho/m_H = 0$  dont la solution est  $n_H^+ = \frac{1}{2} ( - f(T) + (f(T)^2 + 4 f(T) \rho/m_H)^{1/2} )$ .

T	$\rho$	$n_H^+ / (n_H + n_H^+)$	$n_H$	$n_e = n_H^+$	z
9000.00	$1.8 \cdot 10^{-10}$	0.99	$2 \cdot 10^{14}$	$10^{17}$	1850
7000.00	$1.3 \cdot 10^{-9}$	0.41	$4 \cdot 10^{17}$	$3 \cdot 10^{17}$	1500
5750.00	$4.5 \cdot 10^{-8}$	0.007	$2 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{17}$	1000
4170.00	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{21}$	$7 \cdot 10^{15}$	500
6400.00	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{23}$	$7 \cdot 10^{19}$	0

*$\rho$  en  $\text{kg m}^{-3}$ ,  
densités en  $\text{m}^{-3}$ ,  
altitude z en km*

Au pied de la chromosphère à 4170 K :  $n_H \approx 10^{21} \text{ m}^{-3}$  ;  $n_H^+ \approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$  ;  $n_H^+ \ll n_H$

Au sommet de la chromosphère à 9000 K :  $n_H \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$  ;  $n_H^+ \approx 10^{17} \text{ m}^{-3}$  ;  $n_H^+ \gg n_H$  ; le modèle HSRA y donne plutôt un degré d'ionisation  $n_H^+ / (n_H + n_H^+)$  voisin de 0.5.

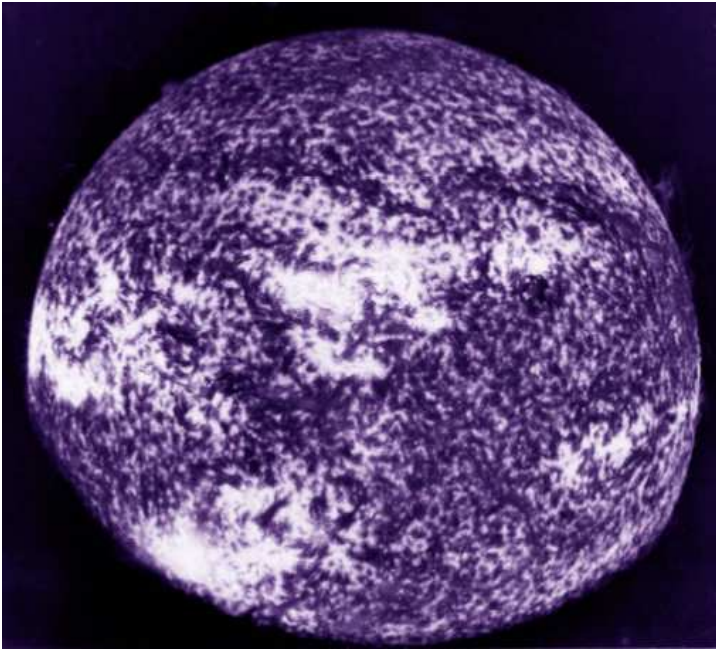
La densité électronique, contrairement à  $n_H$ , varie peu dans la chromosphère car la baisse de densité en altitude est compensée par l'ionisation progressive.

### VII – 2 Comment est elle chauffée ? Le dépôt d'énergie

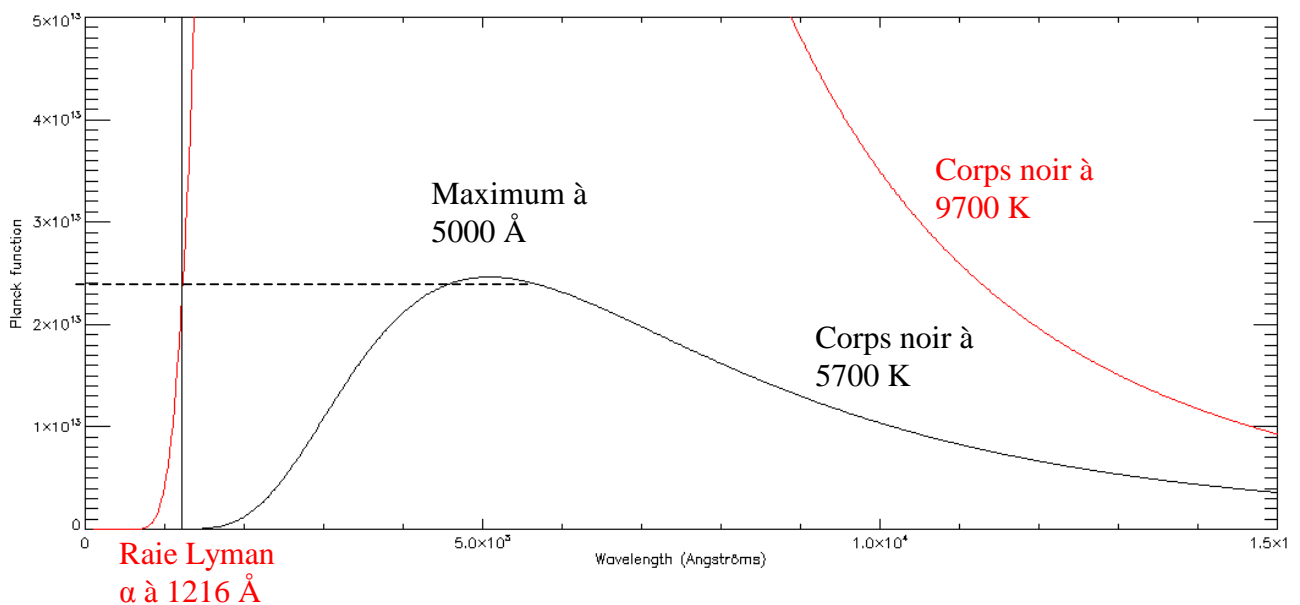
On pense que la chromosphère est chauffée par le flux d'énergie cinétique en provenance de la photosphère, que nous avons évalué à  $1500 \text{ W/m}^2$ , cette énergie se déposant sous forme de dissipation d'ondes acoustiques et MHD. Si  $v$  est la vitesse d'oscillation de la matière dans une onde acoustique se propageant à la vitesse du son  $C_s$  (10 km/s), le flux d'énergie transporté par l'onde est  $\frac{1}{2} \rho v^2 C_s$  (en  $\text{W/m}^2$ ). Au fur et à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère, la décroissance  $\rho$  en fonction de l'altitude (approximativement en  $e^{-z/H}$ ) engendre une augmentation de  $v$  (conservation du produit  $\rho v$ ) approximativement en  $e^{z/H}$ . Lorsque  $v$  atteint  $C_s$ , une onde de choc apparaît et son effet est de transformer l'énergie cinétique en chaleur.

L'échelle de hauteur  $H$  de la chromosphère est voisine de 300 km. La vitesse de convection  $v_{\text{conv}}$  de 1 km/s au pied de la chromosphère atteint la vitesse du son à une altitude  $z = H \ln(C_s / v_{\text{conv}}) \approx H \ln 10 = 2.3 H = 700 \text{ km}$ , c'est à dire au beau milieu de la chromosphère. On peut évaluer la validité de cette hypothèse en examinant si l'énergie cinétique montant de la photosphère est compensée par la perte d'énergie rayonnée par la chromosphère.

Une source importante de perte d'énergie par rayonnement de la chromosphère est celle de la raie Lyman  $\alpha$  à  $1216 \text{ \AA}$  ( $h\nu = 10.2 \text{ eV}$ ), transition des niveaux  $2 \rightarrow 1$ , voir ci dessous, où le Soleil est émissif (car le fond continu de la fonction de rayonnement du corps noir à  $5700 \text{ K}$  est quasi nul à cette longueur d'onde). A  $1216 \text{ \AA}$ , un corps noir à  $9700 \text{ K}$  est 5000 fois plus rayonnant qu'un corps noir à  $5700 \text{ K}$  ; il rayonne autant que le corps noir à  $5700 \text{ K}$  dont le maximum est à  $5000 \text{ \AA}$ .



*Image de la chromosphère du Soleil dans la raie Lyman  $\alpha$  de l'Hydrogène à  $1216 \text{ \AA}$  ( $h\nu = 10.2 \text{ eV}$ ), transition du niveau 2 vers le niveau 1. Expérience TRC, 1979*



Un corps noir à  $9700 \text{ K}$  rayonne autant en Lyman  $\alpha$  à  $1216 \text{ \AA}$  qu'un corps noir à  $5700 \text{ K}$  à  $5000 \text{ \AA}$

Le flux rayonné par unité de longueur d'onde est  $F = 2\pi \int B_\lambda \mu \, d\mu$  pour  $\mu = \cos\theta$  variant de  $0$  à  $1$ , soit  $F = \pi B_\lambda$  avec  $B_\lambda = (2 h C^2 / \lambda^5) / [ \exp(h C / \lambda k T) - 1 ]$

Intégré uniquement sur la largeur  $\Delta\lambda$  de la raie Lyman  $\alpha$  de l'ordre de  $0.35 \text{ \AA}$ , le flux en  $\text{W/m}^2$  est égal à  $\pi B_\lambda \Delta\lambda$ , ce qui donne numériquement avec  $\lambda = 1216 \text{ \AA}$  et  $T = 9700 \text{ K}$  environ  $2500 \text{ W/m}^2$ , qu'il faut mettre en regard du flux d'énergie cinétique de  $1500 \text{ W/m}^2$  estimé plus haut. Ce calcul aux ordres de grandeur montre bien que la perte d'énergie de la chromosphère dans les raies UV de Lyman semble compenser l'apport d'énergie mécanique montant de la photosphère.

### VII – 3 Raies chromosphériques visibles

Contrairement aux raies de Lyman dans l'UV dans lesquelles la chromosphère est émissive (transitions  $n \rightarrow 1$ ), celle-ci absorbe dans les raies de Balmer (ainsi que d'autres raies comme CaII H et K) le rayonnement visible sous-jacent de la photosphère. C'est ainsi que l'on voit apparaître le réseau chromosphérique et les filaments dont on parlera plus loin. La chromosphère est très opaque dans les raies d'absorption de Balmer (transitions  $2 \rightarrow n$ ). Pour le montrer, calculons le nombre d'atomes d'Hydrogène au **niveau 2** dans la photosphère et dans la chromosphère à l'aide de la loi de Boltzmann :

$$N_2/N_1 = g_2/g_1 \exp(-(E_2-E_1)/kT) \text{ avec } E_2-E_1 = -13.6 \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = 10.2 \text{ eV}$$

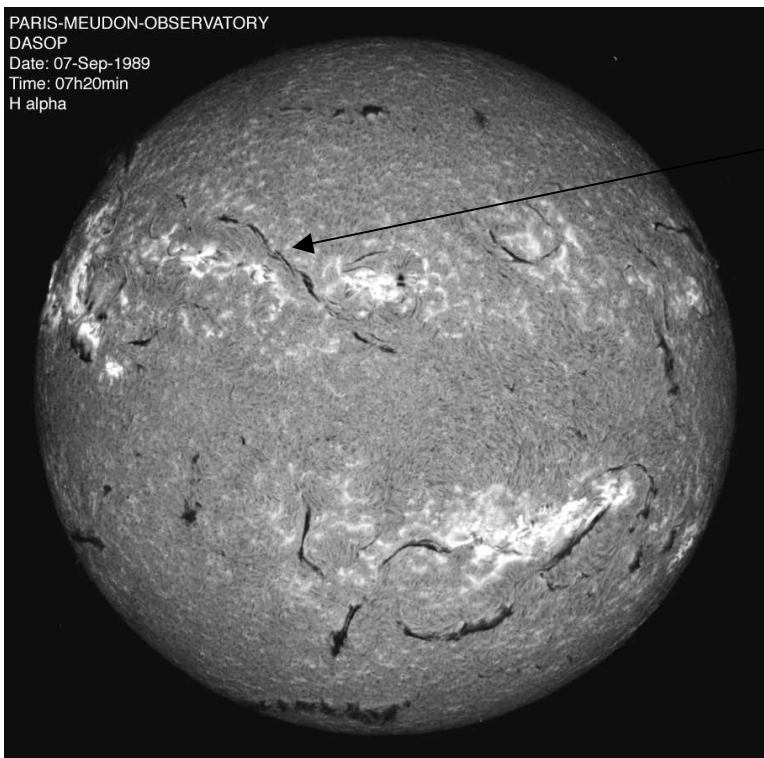
$$\text{Photosphère : } N_1 \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}, \text{ température } T = 5000 \text{ K} \rightarrow N_2 \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{Chromosphère : } N_1 \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}, \text{ température } T = 10000 \text{ K} \rightarrow N_2 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$$

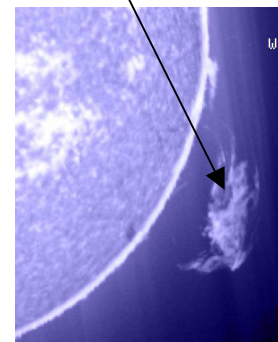
Si, dans la photosphère, il y a 100 fois plus d'atomes au niveau 1 que dans la chromosphère, le résultat est **inversé** pour le niveau 2 : il y a 1000 fois plus d'atomes dans la chromosphère au niveau 2 (*départ de la série d'absorption de Balmer ou d'émission de Lyman  $\alpha$* ) qu'au niveau 1. Les transitions au départ du niveau 2 ont donc lieu dans la chromosphère plus peuplée.

Pour se convaincre de l'opacité de la chromosphère dans les raies de Balmer, il suffit d'évaluer aux ordres de grandeur l'épaisseur optique  $\tau$  par la relation  $\tau = \sigma N h$ , où  $\sigma$  est une section efficace de photoexcitation typique ( $10^{-15} \text{ m}^2$ ) et  $h$  l'échelle de hauteur de la chromosphère.

De cette relation, avec  $N_2 \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$  on en déduit  $\tau$  de l'ordre de  $10^3$ . C'est donc clairement un effet de population du niveau 2 conséquence de la loi de Boltzmann.



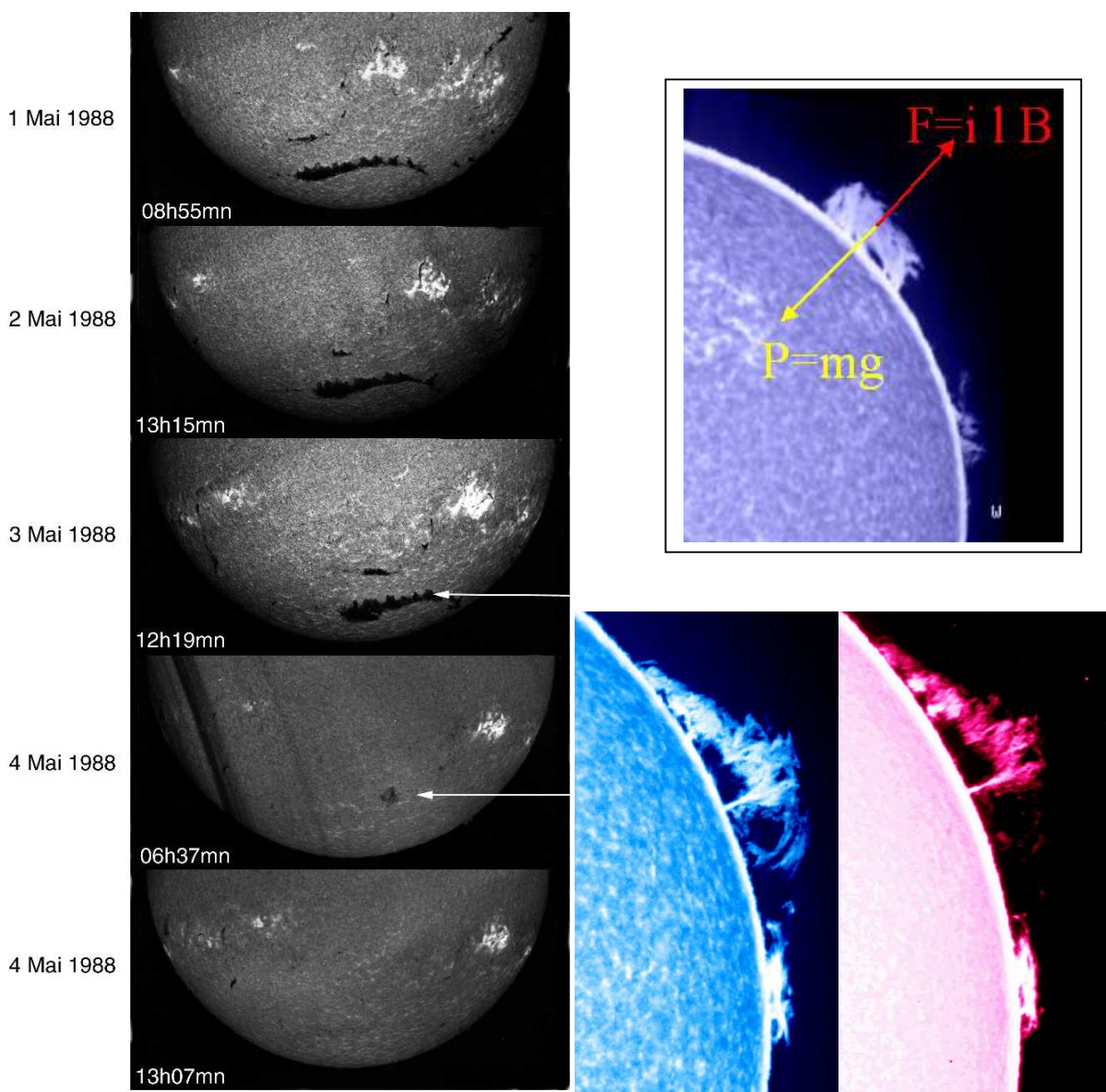
*La chromosphère en H $\alpha$   
Les filaments (qui apparaissent en protubérances au bord solaire) sont constitués de plasma dense de type chromosphérique (8000 K) en suspension dans la couronne chaude (10<sup>6</sup> K) sous l'influence de champs magnétiques qui les soutiennent contre la gravité.*



On peut tenir un raisonnement analogue pour les raies ionisées CaII H et K, mais cette fois ci avec la loi de Saha connaissant le potentiel d'ionisation de CaI qui est de 6.1 eV, les raies de CaI se forment dans la photosphère, et celles de CaII dans la chromosphère plus chaude.

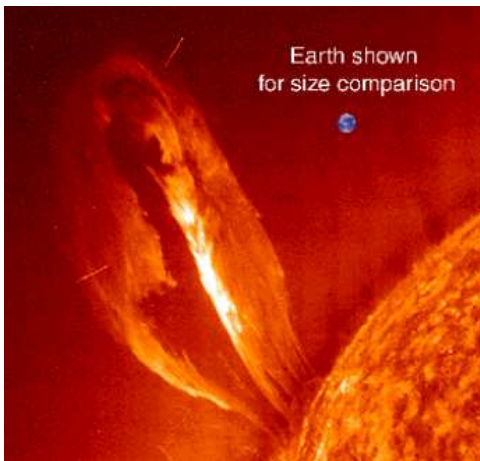
#### VII – 4 Les structures: filaments, protubérances

Les filaments sont constitués de matière de type chromosphérique ( $T = 8000 \text{ K}$ ) mais sont en suspension dans la basse couronne solaire ( $T = 10^6 \text{ K}$ ) par des champs magnétiques faibles, de quelques dizaines de Gauss. C'est la force de Laplace (figure) qui s'oppose à la gravité solaire. Néanmoins ils sont ancrés dans la photosphère solaire par des « pieds » ce qui fait que leur stabilité est très influencée par les mouvements photosphériques. Les filaments surmontent toujours une ligne d'inversion de la polarité magnétique. Leur hauteur peut atteindre plusieurs dizaines de milliers de km. Leur mécanisme de formation (condensation coronale, injection chromosphérique ?) n'est pas élucidé. Le champ magnétique joue un rôle primordial dans leur stabilité.



*Ci dessus, à gauche, une « disparition brusque » d'un filament de ceinture polaire observé en H $\alpha$  au spectrohéliographe. A droite, une protubérance observée en CaII K 3934 Å et en H $\alpha$  6563 Å. Les filaments sont vus en absorption sur le disque solaire. Au limbe, les protubérances diffusent le rayonnement sous jacent en donnant des raies d'émission. Observations Meudon.*

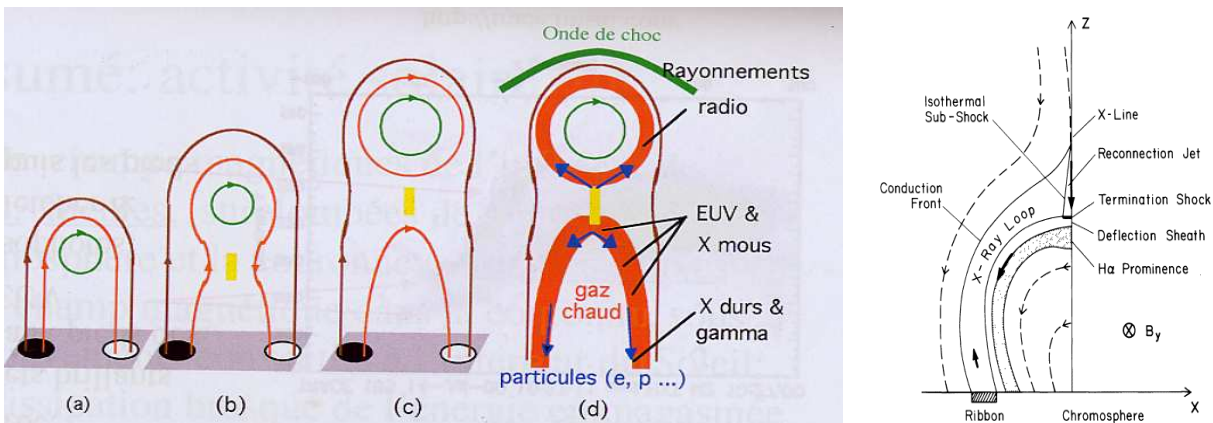




Les filaments peuvent être instables et disparaître en quelques heures, soit par chauffage (dans ce cas ils restent momentanément invisibles dans la raie chromosphérique H $\alpha$  et peuvent « revenir » par refroidissement), soit par éjection rapide (dans ce cas leur « hamac » magnétique est détruit), phénomène souvent associée au déclenchement des Ejections de Masse Coronale (CME). Observation SOHO.

## VII – 5 Les éruptions

Les boucles de champ magnétique coronales fermées structurent la basse couronne solaire et permettent de comprendre intuitivement le stockage de l'énergie magnétique dans l'atmosphère solaire en liaison avec les mouvements photosphériques contraignant les pieds des boucles qui y sont ancrées. Sous l'action de déplacements ou de torsion des lignes de champ, une configuration magnétique peut devenir instable. L'énergie stockée sous forme magnétique (densité volumique  $B^2/2\mu_0$ ) peut ensuite se libérer brutalement en quelques minutes en donnant naissance à une éruption solaire, dont on donne un scénario simplifié ci dessous.

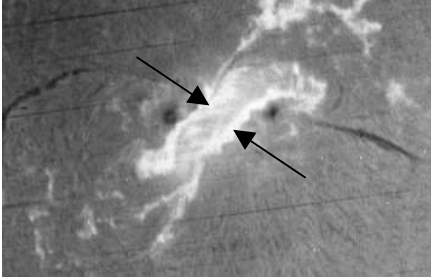


Scénario éruptif avec détail à droite du mécanisme de reconnexion dont la conséquence est l'apparition de boucles chaudes au dessus de rubans brillants, et de boucles froides à l'intérieur

- (a) Configuration initiale: **filament maintenu par le champ magnétique B**, les pieds des lignes de champ sont ancrées dans la photosphère.
- (b) Montée de la configuration devenue instable sous l'effet des mouvements photosphériques et formation d'une **nappe de courant** sous le filament.
- (c et d) Reconnexion magnétique au point **X sous le filament**, formation de **boucles chaudes (> 2 10<sup>6</sup> K)** dans la basse couronne sous le point X (visibles en rayons X mous et EUV) et éjection d'un **plasma** au dessus du point X, avec éventuellement **onde de choc** en amont. Au pied des boucles chaudes, les particules accélérées viennent percuter la chromosphère provoquant l'apparition de deux filets ou rubans brillants. Pendant la phase graduelle de l'éruption, qui dure plusieurs heures, ces boucles chaudes se refroidissent et deviennent visibles progressivement en H $\alpha$  à 10<sup>4</sup> K, on les appelle alors boucles post éruptives (« post flare loops »). Les rubans s'écartent, signant l'évolution du processus de reconnexion (éjection du point X vers le haut).

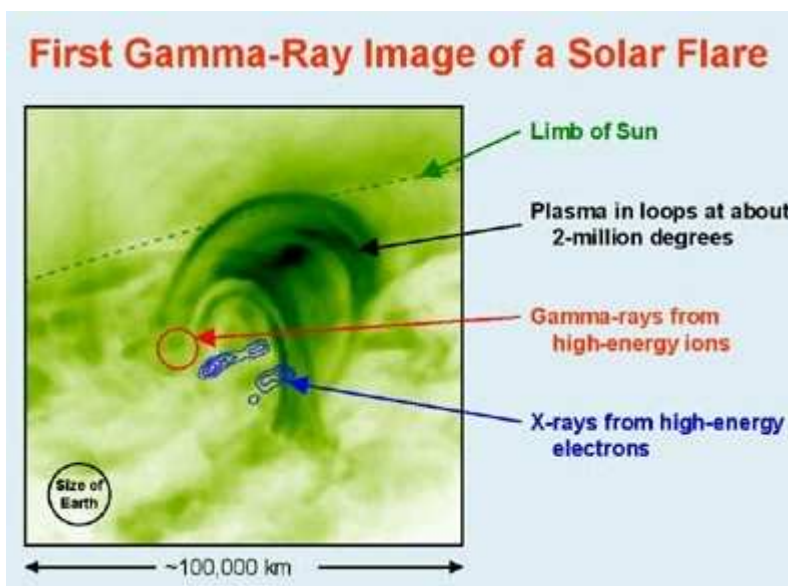
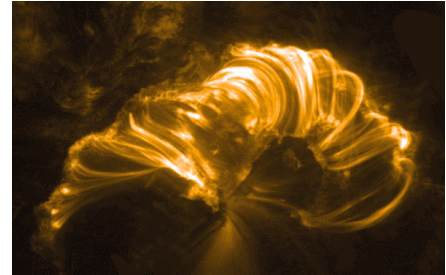


Le site de reconnexion est un site dissipatif où la direction du champ magnétique varie brusquement sur de petites échelles spatiales (<1 km) et qui implique chauffage par effet Joule. La matière y est éjectée à la vitesse d'Alfvén (plusieurs centaines de km/s). Il s'y développe un champ électrique responsable de l'accélération des électrons et des protons. Les particules qui sont éjectées vers le milieu interplanétaire se mélangeront au vent solaire et seront détectées sur Terre 1 à 4 jours plus tard. Les autres bombardent la chromosphère avec formation de rayons X durs et  $\gamma$ .



← éruption en H $\alpha$  10<sup>4</sup>K (remarquer les rubans)

Eruption en EUV dans la couronne (les boucles chaudes surmontent les rubans) →

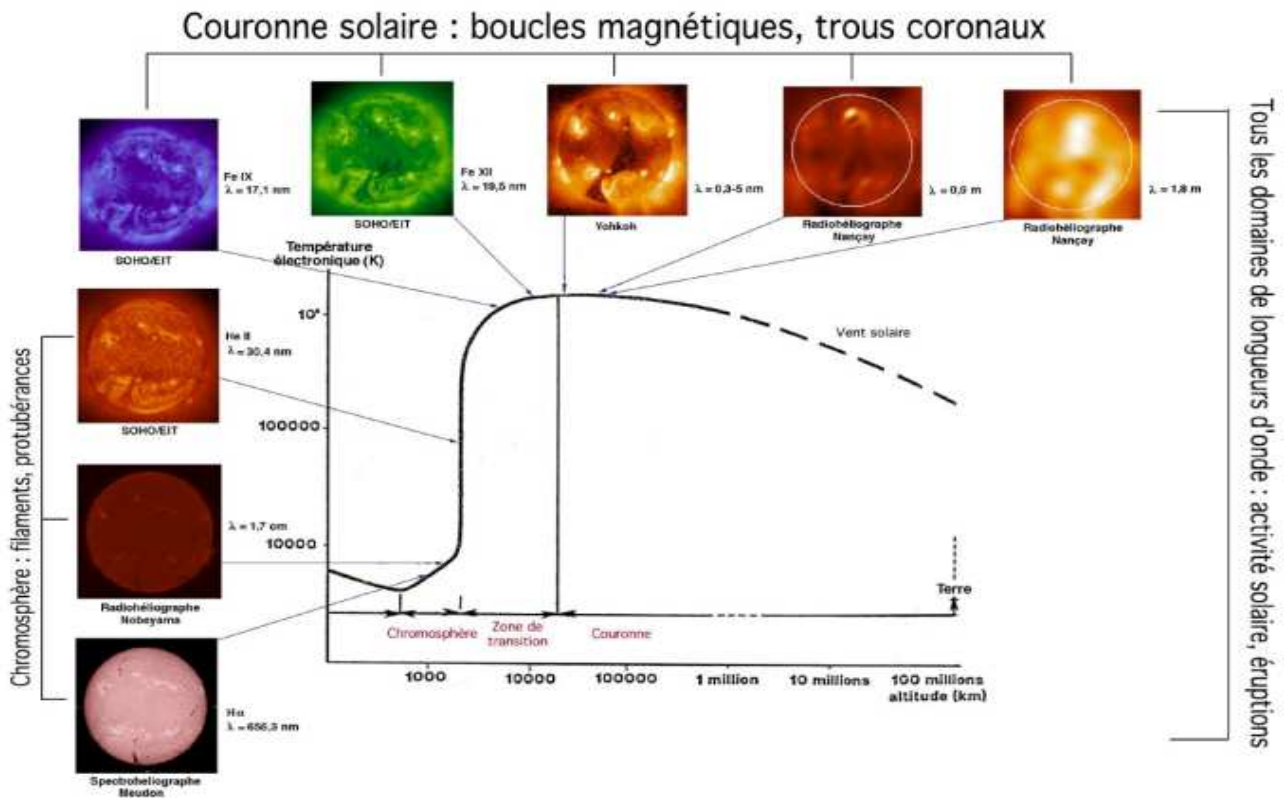


Localisation par l'instrument RHESSI des sites d'émission en rayons X et  $\gamma$  lors d'une éruption solaire par rapport aux boucles de champ magnétique chaudes observées en UV par le satellite TRACE

# Chapitre 8

## La couronne

La couronne solaire est un milieu très dilué (densité électronique  $N_e \approx 10^{14} \text{ m}^{-3}$  dans la basse couronne) caractérisé par une température élevée de l'ordre de 1 à 2 millions de degrés. La température remonte brusquement de  $10^4 \text{ K}$  à  $10^6 \text{ K}$ , en quelques centaines de km seulement, dans la fine zone de transition chromosphère couronne. L'Hydrogène y est sous forme de protons, accompagné d'atomes très ionisés, ayant parfois perdu plus de 15 électrons de leur cortège électronique. Ces atomes forment des raies d'émission, en IR, visible et UV. La couronne est également observable en rayons X pour ses parties les plus chaudes (au dessus des régions actives, ou lors des éruptions). La figure ci dessous présente une vision multi longueur d'onde du Soleil.



L'équilibre thermique de la couronne statique est régi par :

$$h \rho - \rho^2 Q(T) + \text{div}(k_{//} \mathbf{grad}T) = 0 \text{ avec } k_{//} = k_0 T^{5/2}$$

avec dans l'ordre chauffage, refroidissement radiatif et conduction de la chaleur.

Dans la chromosphère ( $10^4 \text{ K}$ ), les termes dominants sont chauffage et rayonnement ( $\rho$  est grand).

Par contre, dans la couronne ( $10^6 \text{ K}$ ), les termes dominants deviennent chauffage et conduction (qui varie en  $T^{5/2}$ , et la température y est très élevée). Dans la zone de transition chromosphère couronne, les processus en compétition sont rayonnement et conduction. En effet, le refroidissement radiatif (fonction  $Q(T)$ ) est maximal vers  $10^5 \text{ K}$ . Seul un gradient thermique important peut l'équilibrer. On peut se faire une idée de l'épaisseur de la zone de transition en égalisant le rayonnement à  $10^5 \text{ K}$  et l'apport conductif de la couronne, via l'égalité :

$$\rho^2 Q(T) = \text{div}(k_0 T^{5/2} \mathbf{grad}T)$$

$$\text{et } \text{div}(k_0 T^{5/2} \mathbf{grad}T) = (2/7) k_0 d^2(T^{7/2})/dz^2, z \text{ désignant l'altitude.}$$

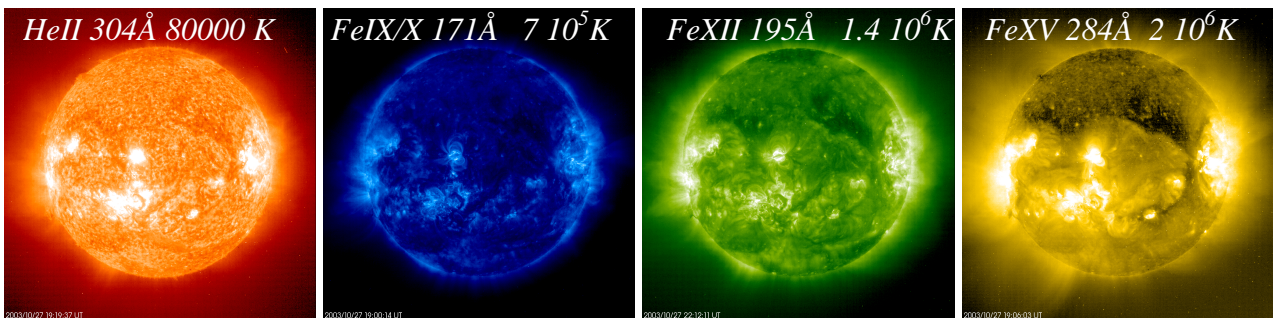
La fonction  $Q(T)$  est assimilable à une constante  $\chi$  aux températures de la zone de transition. La masse volumique sera déterminée par l'équation des gaz parfaits  $P = 2 \rho kT/m$  (le facteur 2 provient de l'ionisation totale de l'hydrogène). Soit  $L$  l'épaisseur de la zone de transition. Aux ordres de

grandeur, on peut écrire en faisant l'approximation  $d^2(T^{7/2})/dz^2 = T^{7/2}/L^2$  où T est la température de la région de transition, et  $\rho = Pm/2kT$ :

$$(Pm/2kT)^2 \chi = (2/7) k_0 T^{7/2}/L^2, \text{ d'où l'on tire } L = [ (8/7) k_0 k^2 T^{11/2} / (P^2 m^2 \chi) ]^{1/2}$$

Avec  $P = 0.01 \text{ Pa}$ ,  $k_0 = 10^{-11} \text{ MKSA}$ ,  $m^2 \chi = 8 \cdot 10^{-35} \text{ MKSA}$ ,  $T = 10^5 \text{ K}$ , on trouve :

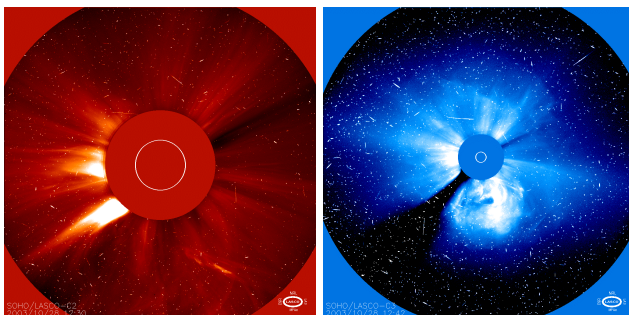
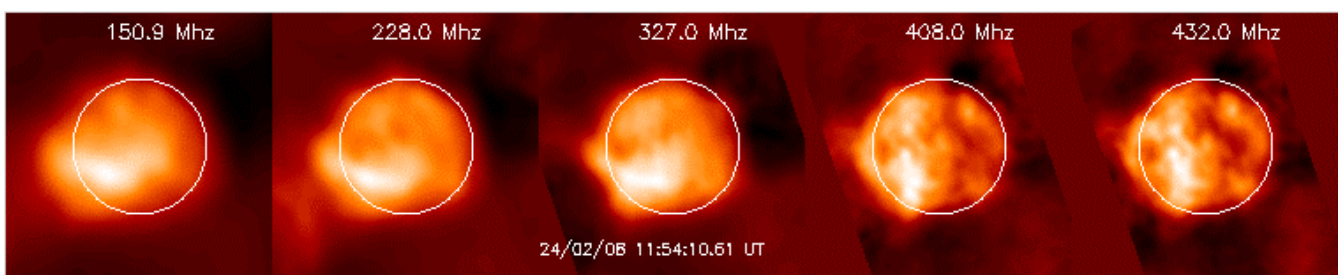
$L = 30 \text{ km}$ , l'épaisseur de la zone de transition est de l'ordre de 0.1 seconde d'arc seulement !



En UltraViolet, domaine réservé aux instruments en orbite, la basse couronne apparaît émissive (à ces longueurs d'onde, le fond continu de rayonnement solaire de corps noir est presque nul) dans des températures qui vont de 80 000 à plus de 2 millions de degrés (EIT/SOHO, ci dessus). Les raies du fer IX (171 Å), XII (195 Å), XV (284 Å), XVI (335 Å), XVII (151 Å) se forment à des températures de  $0.7 \cdot 10^6 \text{ K}$ ,  $1.4 \cdot 10^6 \text{ K}$ ,  $2.0 \cdot 10^6 \text{ K}$ ,  $2.5 \cdot 10^6 \text{ K}$  et  $3.8 \cdot 10^6 \text{ K}$ . En ondes radioélectriques (bande d'images ci dessous), on détecte le rayonnement des particules accélérées dans la basse couronne solaire à une fréquence voisine de la fréquence plasma électronique :

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = (N_e e^2 / (\epsilon_0 m_e))^{1/2},$$

soit numériquement  $\nu_p = 100 \text{ MHz}$  pour  $N_e = 10^{14} \text{ m}^{-3}$  (les hautes fréquences s'observent à basse altitude z car  $N_e$  décroît avec z, Radiohéliographe de Nançay en ondes métriques). La chromosphère émet aussi en radio à la fréquence plasma électronique, avec une densité électronique voisine de  $10^{18} \text{ m}^{-3}$  on se trouve dans la bande des 10 GHz d'où l'émission centimétrique (la station de Nançay est équipée d'un petit interféromètre à 3 cm).

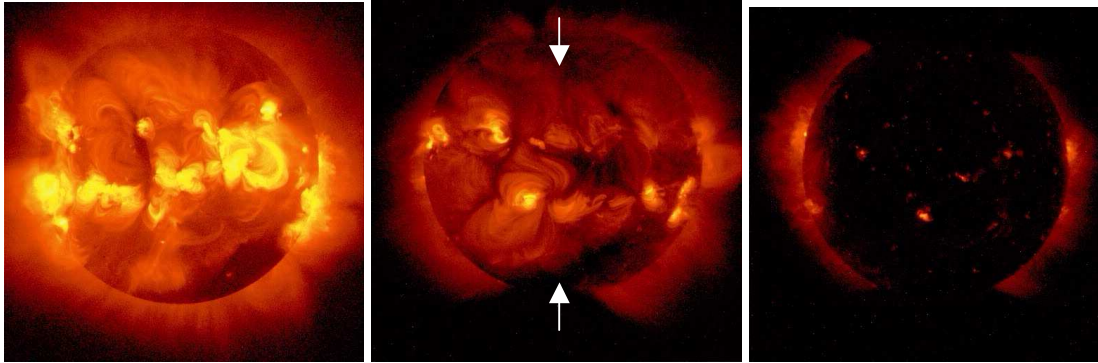


Les coronographes de SOHO, en lumière blanche, révèlent la couronne solaire à moyenne et grande distance (instrument LASCO/SOHO). Le disque du soleil est représenté par le cercle blanc et masqué par une « Lune artificielle ». Des éjections de masse coronale sont visibles.



En rayons X mous, on observe l'émission, sur fond noir, d'un plasma à plusieurs millions de degrés, comme le montrent les observations du satellite YOHKOH ci dessous, où l'on découvre plusieurs types de configurations magnétiques :

- des champs magnétiques fermés où le plasma est confiné donc dense : grandes boucles au dessus des régions actives, *image de gauche* ; micro boucles dans le soleil calme sous forme de points brillants dipolaires (dimension 5000 km, durée de vie 8 h), *image de droite*
- des champs magnétiques ouverts, source du vent solaire, plus marqués aux niveaux des pôles ; le plasma n'est donc pas confiné et peu dense (flèches, *image du centre*)



Observations de YOKKOH en rayons X: à gauche au maximum du cycle, à droite au minimum

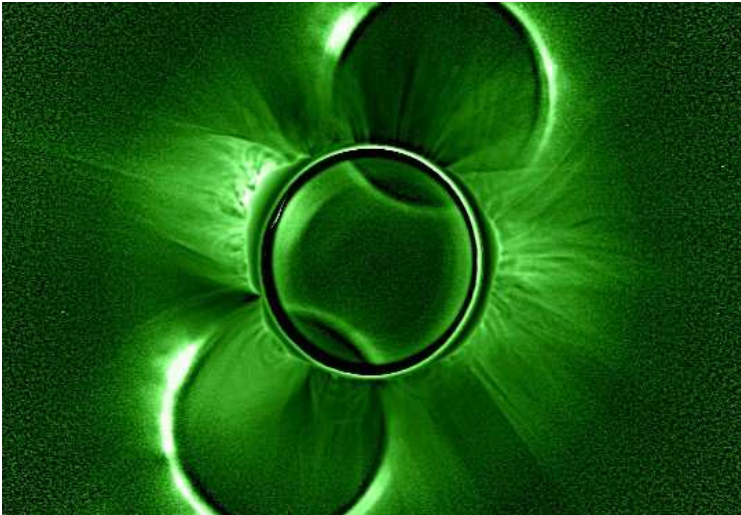
### VIII – 1 Raies coronales « interdites »

Juste avant la phase de totalité d'une éclipse de Soleil, ou juste après, c'est à dire aux moments des deux points de contact intérieurs avec la Lune, apparaît le « spectre éclair » du Soleil, qui n'est visible que quelques secondes lorsque se dévoilent la chromosphère et la basse couronne. On y distingue (figure ci dessous) des raies chromosphériques en émission (vues en absorption sur le disque comme la série de Balmer de l'Hydrogène), mais surtout des raies nouvelles, qui n'apparaissent pas dans le spectre de Fraunhofer en absorption. Ce sont les « raies interdites » qui sont spécifiques aux milieux très dilués. Ces raies correspondent à un processus d'excitation par collisions électroniques suivi d'une désexcitation radiative dont la particularité est d'être très lente (inverse de la durée de vie du niveau **A** de l'ordre de  $100 \text{ s}^{-1}$  au lieu de  $10^8 \text{ s}^{-1}$  habituellement). C'est la raison pour laquelle elles ne peuvent être observées que dans des milieux très ténus (sinon on aurait une désexcitation collisionnelle immédiate).



*Spectre éclair de la basse atmosphère solaire lors des points de contact d'une éclipse totale, on distingue des raies d'émission de la chromosphère comme H $\alpha$  (rouge), H $\beta$  (bleu), HeI (jaune orangé), mais aussi la raie « interdite » verte coronale de FeXIV.*

Pour se convaincre de la haute température coronale, on peut tout d'abord remarquer que la raie verte du FeXIV possède une largeur de  $0.5 \text{ \AA}$ , plus large que les raies du fer de la photosphère. Si celle-ci est le résultat de l'effet Doppler thermique pur, la largeur Doppler vaut  $2\Delta\lambda = 2(\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$ . Avec  $m = 56 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $\lambda_0 = 5303 \text{ \AA}$  et  $2\Delta\lambda = 0.5 \text{ \AA}$ , on tire  $T = 10^6 \text{ K}$ .



*Cliché de la couronne solaire dans la raie verte du Fer XIV montrant les boucles de champ magnétique coronal. Les deux images du haut et du bas (reflets) sont parasites. Cliché obtenu lors d'une mission d'éclipse de l'IAP.*

Elément	$\lambda$ (Å)	Excitation (eV)	$A(s^{-1})$	Potentiel d'ionisation (eV)
FeXIII	3388	5.96	87	
NiXVI	3601	3.44	193	
NiXII	4232	2.93	237	
FeXIV	5303	2.34	60	392
CaXV	5694	2.18	95	895
FeX	6374	1.94	69	161
NiXV	6702	1.85	57	
FeXI	7892	1.57	44	
FeXIII	10747	1.15	14	
FeXIII	10798	2.30	10	

La température du milieu de formation de ces raies peut se calculer approximativement en écrivant que l'énergie cinétique *moyenne* des électrons excitateurs du milieu est égale *environ* à la *moitié* du potentiel d'ionisation de l'élément.

FeI→FeX (ionisation):  $\Phi = 161$  eV       $\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = 3/2 kT = \Phi/2 \rightarrow T \approx 0.6 \cdot 10^6$  K  
 FeI→FeXIV (ionisation):  $\Phi = 392$  eV       $\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = 3/2 kT = \Phi/2 \rightarrow T \approx 1.5 \cdot 10^6$  K  
 FeI→CaXV (ionisation):  $\Phi = 895$  eV       $\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = 3/2 kT = \Phi/2 \rightarrow T \approx 3.4 \cdot 10^6$  K

Pour la zone de transition chromosphère couronne :

HeI→HeII (ionisation):  $\Phi = 24.6$  eV       $\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = 3/2 kT = \Phi/2 \rightarrow T \approx 80000$  K

Et pour comparaison, dans la chromosphère :

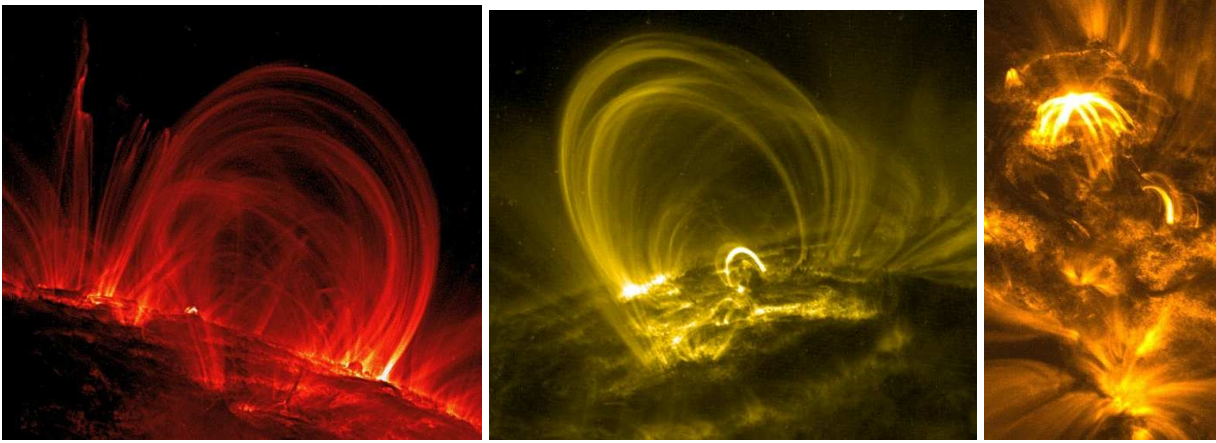
Raie H $\alpha$  (excitation):  $\Phi = 1.89$  eV       $\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = 3/2 kT = \Phi/2 \rightarrow T \approx 7000$  K

Les observations de raies du même ion, par exemple le doublet IR de FeXIII du tableau, sont très utiles pour évaluer la densité électronique  $N_e$  de la couronne. Prenons un ion dans son état fondamental de population  $N_0$  ( $m^{-3}$ ). Nous supposons qu'il passe dans deux états excités de population  $N_1$  et  $N_2$  par excitation collisionnelle électronique, et qu'il revient à l'état fondamental par desexcitation collisionnelle et radiative. Rappelons que l'excitation ( ou la desexcitation) collisionnelle correspond à un transfert d'énergie cinétique électron/ion. A l'équilibre statistique :

$$N_0 C_{01} = N_1 (C_{10} + A_{10}) \text{ et } N_0 C_{02} = N_2 (C_{20} + A_{20})$$

Les  $A_{ij}$  et  $C_{ij}$  étant respectivement les probabilités de transition radiative et collisionnelle en  $s^{-1}$ .

En première approximation, on peut mettre les  $C_{ij}$  sous la forme  $C_{ij} = N_e \sigma \langle v \rangle$  avec :



*Boucles coronales observées par la mission spatiale TRACE en orbite terrestre (Transition Region And Coronal Explorer) de la NASA en Extrême Ultra Violet dans une raie du Fer très ionisée. Ces boucles sont visibles de l'UV aux rayons X donc elles ne sont pas isothermes (par exemple : en UV Ly $\alpha$  20000K, OVI 1.8 10<sup>5</sup>K, MgX 1.5 10<sup>6</sup>K, en rayons X 3 10<sup>6</sup> K), les dimensions y sont de l'ordre de 10<sup>4</sup> à 10<sup>5</sup> km, et les densités de 10<sup>15</sup> m<sup>-3</sup>*

$N_e$  densité électronique (m<sup>-3</sup>), inconnue, et

$\sigma$  section efficace de collision (m<sup>2</sup>) avec les électrons:  $\sigma \approx \pi a_0^2$ ,  $a_0 = h^2 \epsilon_0 / (\pi m_e e^2)$  rayon de Bohr de l'électron (0.53 Å),  $\sigma \approx 10^{-20}$  m<sup>2</sup>

$\langle v \rangle$  vitesse moyenne des électrons (m/s) =  $[8 k T / (\pi m_e)]^{1/2} \approx 620$  km/s à  $T = 10^6$  K en supposant la distribution maxwellienne. Au passage, on remarquera que cette vitesse est sensiblement égale à la vitesse de libération, ce qui permet de former le vent solaire.

Les deux raies « interdites » de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  donnent des intensités  $I_1 = A_{10} h \nu_1 N_1$  et  $I_2 = A_{20} h \nu_2 N_2$  pour lesquelles on s'intéresse au rapport :  $I_2/I_1 = (A_{20}/A_{10}) (\nu_2/\nu_1) (N_2/N_1)$ , le rapport  $N_2/N_1$  pouvant être tiré de l'équilibre statistique :  $N_2/N_1 = (C_{02}/C_{01}) (C_{10} + A_{10}) / (C_{20} + A_{20})$ .

Remplaçons maintenant les  $C_{ij}$  par leur approximation  $N_e \sigma \langle v \rangle$  :

$N_2/N_1 \approx (N_e \sigma \langle v \rangle + A_{10}) / (N_e \sigma \langle v \rangle + A_{20})$ , d'où il vient :

$$I_2/I_1 = (A_{20}/A_{10}) (\nu_2/\nu_1) (N_e \sigma \langle v \rangle + A_{10}) / (N_e \sigma \langle v \rangle + A_{20})$$

Il existe une densité électronique critique  $N_c = A / (\sigma \langle v \rangle)$  telle que :

Si  $N_e \ll N_c$  ou  $N_e \gg N_c$  alors  $I_2/I_1$  est indépendant de  $N_e$

Si  $N_e \approx N_c$  alors  $I_2/I_1$  dépend de  $N_e$ , ce qui permet sa mesure.

Pour les raies « interdites » de la couronne, on a les probabilités  $A$  dans l'intervalle 10 à 100 s<sup>-1</sup> ce qui donne en prenant  $A = 60$  s<sup>-1</sup> :  $N_c = 10^{15}$  m<sup>-3</sup>

Pour le doublet IR de FeXIII avec  $A \approx 10$  s<sup>-1</sup> :  $N_c = 2 \cdot 10^{14}$  m<sup>-3</sup>

Dans la basse couronne,  $N_e \approx 5 \cdot 10^{14}$  m<sup>-3</sup>  $\approx N_c$ , ce qui montre bien qu'on pourra obtenir  $N_e$  en utilisant la méthode des rapports de raies.

## VIII – 2 Couronne K

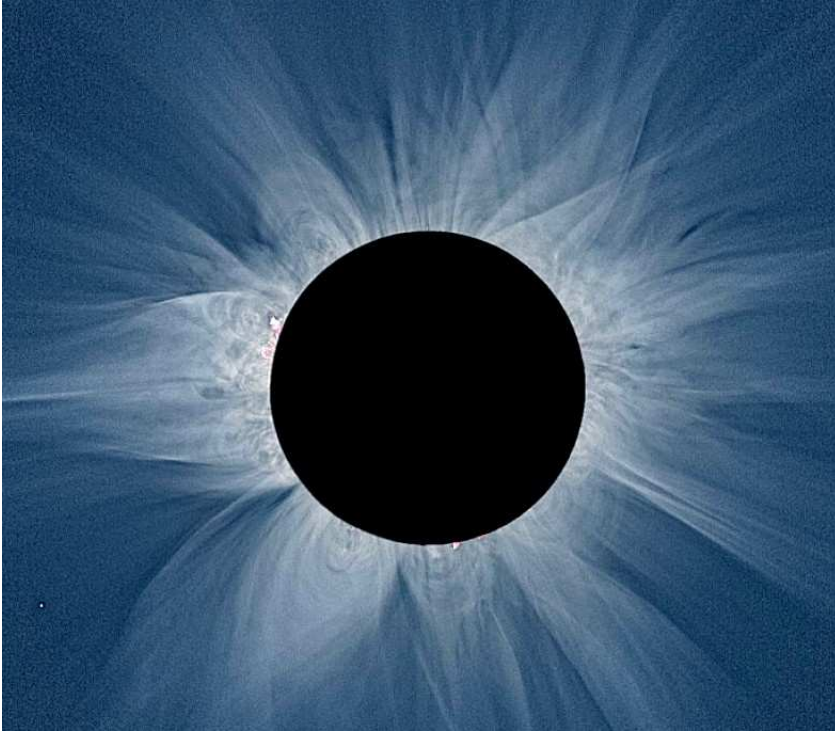
La couronne K (K = Kontinuum) est constitué par un spectre continu formé par la diffusion Thomson de la lumière de la photosphère sur les électrons libres. On constate en regardant ce spectre que toutes les raies photosphériques ont disparu et que la lumière est polarisée linéairement (voir plus haut la section sur la polarisation du continu). On estime que pour « effacer » les raies d'un spectre, il suffit qu'elles soient élargies 500 fois. Pour se convaincre de ce processus,



examinons l'élargissement Doppler d'une raie diffusée par les électrons. On a vu que la largeur Doppler à mi hauteur est:

$$2\Delta\lambda = 2 (\lambda_0 / C) (2 \ln 2 k T / m)^{1/2}$$

Avec  $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ ,  $T = 10^6 \text{ K}$ , on obtient  $2\Delta\lambda = 150 \text{ \AA}$ , à comparer avec la largeur Doppler des raies photosphériques d'environ  $0.3 \text{ \AA}$  seulement. Les raies se trouvent effacées par cet élargissement.



*Cliché de la couronne solaire en lumière blanche lors d'une éclipse, montrant l'extrême complexité de la couronne électronique K qui identifie les structures magnétiques fermées (boucles basses) et ouvertes (« streamers ») en diffusant la lumière du Soleil (diffusion Thomson polarisée). La brillance de la basse couronne est d'un millionième celle de la photosphère et décroît très vite radialement. L'échelle de hauteur de la pression est voisine de  $10^5 \text{ km}$ . Cliché obtenu lors d'une mission d'éclipse de l'IAP.*

*L'échelle de hauteur de la couronne :*

On suppose l'Hydrogène totalement ionisé de sorte que la densité de particules vaut  $2 N_H$

$dP/dz = -\rho g$  avec  $\rho = N_H m_H$  et la loi des gaz parfaits  $P = 2 N_H kT$  donne :

$$d'ou \ P/P_0 = e^{-(2gm/kT)z}$$

$H = 2kT/m_H g \approx 10^5 \text{ km}$  (1/7 du rayon solaire seulement) avec  $T = 1.5 \cdot 10^6 \text{ K}$

En conséquence, la densité de protons et d'électrons décroît très vite dans la couronne.

*La brillance de la couronne :*

La puissance diffusée par un électron est égale à :

$$P_{\text{diff}} = \sigma_{\text{Th}} \times (P_{\text{incidente}} \text{ par m}^2)$$

Où  $\sigma_{\text{Th}}$  est la section efficace de diffusion Thomson. Or la puissance incidente par unité de surface vaut  $L/4\pi R^2$ , où  $L$  est la luminosité du Soleil ( $3.86 \cdot 10^{26} \text{ W}$ ) et  $R$  son rayon ( $696000 \text{ km}$ ).

La puissance diffusée totale vaut  $P_{\text{tot}} = P_{\text{diff}} (N_e V)$ , où  $V$  est le volume diffusant d'électrons et  $N_e V$  le nombre total d'électrons. Ce volume vaut approximativement  $4\pi R^2 H$ , coquille sphérique de rayon  $R$  et d'épaisseur  $H$ , échelle de hauteur de la couronne précédemment calculée.

On obtient finalement  $P_{\text{tot}} = \sigma_{\text{Th}} (L/4\pi R^2) N_e (4\pi R^2 H)$ , d'où  $P_{\text{tot}}/L = \sigma_{\text{Th}} N_e H$

Avec  $H = 10^5 \text{ km}$ ,  $N_e = 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$  et  $\sigma_{\text{Th}} = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$ , on obtient  $P_{\text{tot}}/L \approx 3 \cdot 10^{-6}$

Il s'agit du bon ordre de grandeur (luminosité équivalente à la pleine Lune).

### VIII – 3 Couronne F

La couronne F (F = Fraunhofer) est plus étendue que la couronne K, moins brillante, et présente les mêmes raies en absorption que la photosphère solaire, avec les mêmes intensités relatives et les

mêmes profils. Elle est constituée de grains de poussières qui diffusent le spectre photosphérique (pas de processus d'élargissement, car les grains sont massifs) et apparaît au delà de 2 ou 3 rayons solaires. En première approximation, ces grains absorbent la puissance incidente photosphérique et émettent en retour un rayonnement de corps noir. Quelle est leur température effective ? Leur dimension ?

Soit a la rayon d'un grain supposé sphérique et r la distance de ce grain au centre du Soleil. Il reçoit la puissance (en W):

$(L/4\pi r^2) \times (\pi a^2)$ ,  $\pi a^2$  étant sa section efficace.

Supposons que le grain émette intégralement cette puissance sous forme de rayonnement de corps noir :  $(L/4\pi r^2) \times (\pi a^2) = \sigma T^4 \times (4\pi a^2)$ , où T est la température du grain,  $4\pi a^2$  sa surface et  $\sigma$  la constante de Stéfán. On en déduit avec  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$  ( $T_{\text{eff}}$  température effective du Soleil, R rayon du Soleil) :

$$T(r) = T_{\text{eff}} (1/4)^{1/4} (R/r)^{1/2} \approx 0.7 T_{\text{eff}} (R/r)^{1/2}$$

A 10 rayons solaires,  $T \approx 1300$  K ; à 1 UA (orbite de la Terre),  $T \approx 275$  K.

La température de fusion du Fer étant voisine de 1500 K, cela signifie que des grains de Fer peuvent exister à partir de 10 rayons solaires environ.

Pour estimer les dimensions des grains diffusants, il faut écrire leur équilibre mécanique entre la force de radiation et la force de gravitation.

La force de radiation F qui s'exerce sur un grain sphérique de rayon a (section efficace  $\pi a^2$ ) à la distance r du centre du Soleil est donnée par :

$$(L/4\pi r^2) \times (\pi a^2) = F C$$

avec C vitesse de la lumière (F C est la puissance de la force F, L la luminosité solaire en W).

Or cette force F est en équilibre avec la force de gravitation  $F' = (G M / r^2) (4/3 \pi a^3 \rho)$ , M étant la masse du Soleil ( $2 \cdot 10^{30}$  kg),  $\rho$  la masse volumique du grain, supposé homogène.

De l'égalité  $F = F'$ , soit  $(L/4\pi r^2) \times (\pi a^2)/C = (G M / r^2) (4/3 \pi a^3 \rho)$ , on tire une relation indépendante de r entre le rayon des grains et leur masse volumique :

$$a = 3L / (16\pi C G M \rho)$$

qui donne numériquement  $a = 5 \cdot 10^{-7}$  m pour  $\rho = 1000$  kg m<sup>-3</sup> (densité typique), soit des particules de **1 micron** de diamètre, en ordre de grandeur évidemment.

## VIII – 4 Vent solaire

Le vent solaire, nous l'avons vu à propos de la solution de Parker en MHD, n'est pas un gaz de protons et d'électrons en équilibre hydrostatique, mais hydrodynamique, puisqu'il présente un écoulement supersonique au delà d'une certaine distance.

Intuitivement, on comprend pourquoi en comparant la vitesse du son (agitation thermique) dans une couronne isotherme à la température T, soit  $v_s = (2 kT/m)^{1/2}$ , et la vitesse de libération à la distance r du centre du Soleil, soit  $v_l = (2GM/r)^{1/2}$  (M masse du Soleil, m masse du proton). La distance au Soleil pour laquelle la vitesse thermique des protons est égale la vitesse de libération (ce qui permet leur échappement) est, pour  $T = 1.5 \cdot 10^6$  K, égale à **15 rayons solaires** ( $v_s = v_l = 157$  km/s). La solution hydrodynamique de Parker prédit en fait un écoulement supersonique à 4 rayons solaires, et un vent d'environ 400 km/s à l'orbite de la Terre. Cela correspond à une perte de masse pour le Soleil de l'ordre de  $10^9 - 10^{10}$  kg/s, c'est à dire du même ordre de grandeur que la masse convertie en énergie dans le cœur solaire ( $1/1000^{\text{ème}}$  de la masse totale du Soleil à la fin de sa vie au bout de  $10^{10}$  ans).



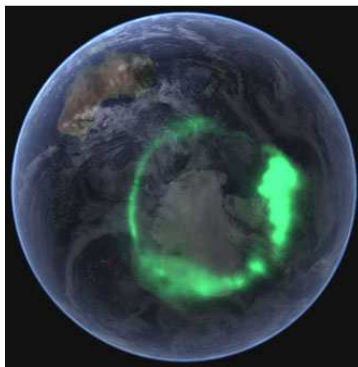
Les observations récentes ont montré que la situation est plus complexe ; le vent solaire se déplace à des vitesses de 300 à 800 km/sec et sans interruption. Depuis 1990, le satellite Ulysse en orbite autour des pôles, a révélé qu'il existe deux vents :

- un vent solaire lent (300 - 400 km/s) qui émerge des régions équatoriales du soleil où la contrainte du champ magnétique est la plus forte. Il varie peu en fonction du cycle solaire et ne dépend pas de l'activité solaire.

- un vent solaire rapide (600 - 800 km/s) qui provient des régions situées près des pôles (trous coronaux), régions où le champ magnétique du Soleil est ouvert sur le milieu interplanétaire. Il dépend fortement du cycle et de l'activité solaire. Il produit des sursauts qui pourront avoir des conséquences sur la haute atmosphère de la Terre.

En prenant une perte de masse de vent solaire  $dm/dt = 3 \cdot 10^9 \text{ kg/s} = 4\pi r^2 \rho v$ , où  $r$  est égal à 1 UA et  $v$  est la vitesse du vent à la Terre (400 km/s), la masse volumique du vent à la Terre vaut  $\rho \approx 2.6 \cdot 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$  soit de l'ordre de 10 protons par  $\text{cm}^3$ . En une seconde, la section efficace de la Terre  $\pi R_T^2$  est percutée (au niveau de la magnétosphère) par une masse de 1 kg de vent solaire, soit 100 tonnes/jour, ce qui est à comparer aux 400 tonnes de poussières interplanétaires balayées par jour au cours du mouvement orbital de la planète !

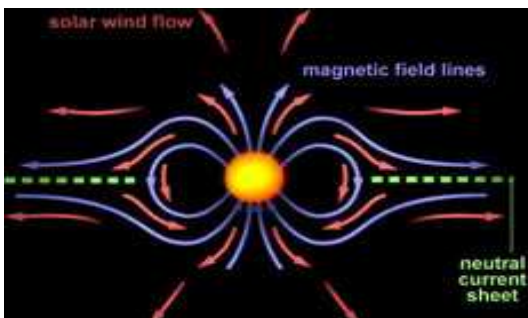
### VIII – 5 Interactions Soleil / Terre et Planètes



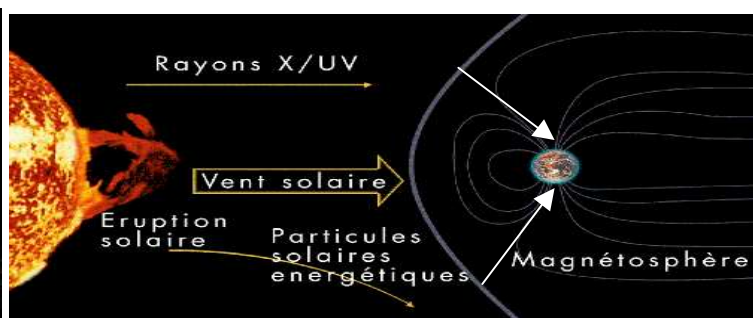
*Aurores polaires terrestres, et ovale auroral vu par satellite*

L'interaction du Vent Solaire avec la magnétosphère de la Terre et des planètes est à l'origine des aurores polaires. Sur Terre, la plupart des aurores se manifestent entre 100 et 150 km d'altitude. Les principales émissions dans le visible sont produites par l'excitation de différents atomes de l'atmosphère par les particules du vent solaire.

- les molécules d'azote ( $\text{N}_2$ ) à 100 km d'altitude émettent une raie violette ou bleue (427 nm).
- les atomes d'oxygène (O) vers 100 km d'altitude émettent une raie de couleur jaune vert (557 nm)
- les atomes d'oxygène (O) vers 200 km produisent une couleur rouge foncé (630nm).
- les atomes d'azote (N) produisent une couleur rouge (620nm) dans les parties inférieures de certaines aurores polaires.



*Champ magnétique solaire et écoulement du vent solaire*

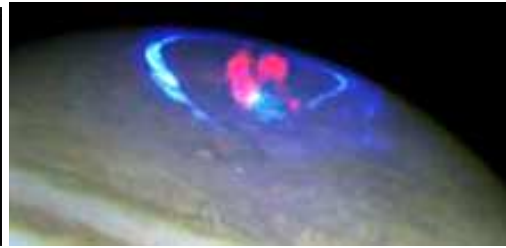


*Interaction vent solaire / magnétosphère*

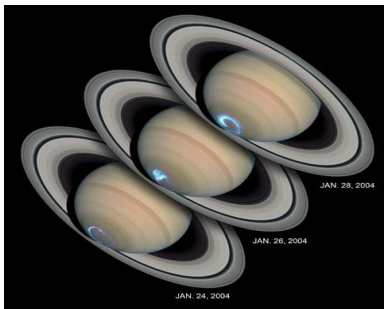
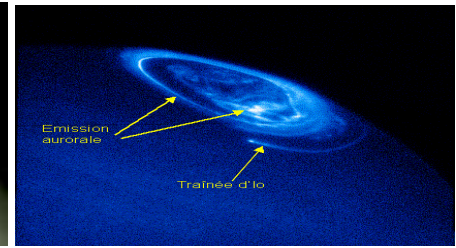
Les aurores se présentent sous une forme ovale (l'ovale auroral) autour des pôles magnétiques nord et sud. Des aurores polaires ont déjà été détectées sur Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, qui sont dotées de champs magnétiques.



Aurore sur MARS

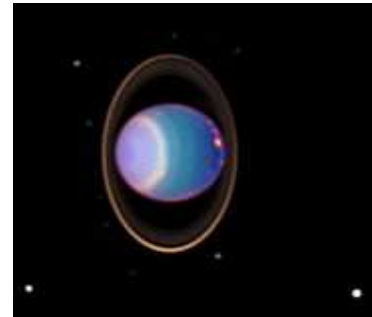


Aurores sur JUPITER en UV (bleu) et rayons X (rouge)



← Aurore sur SATURNE

Aurore sur URANUS →



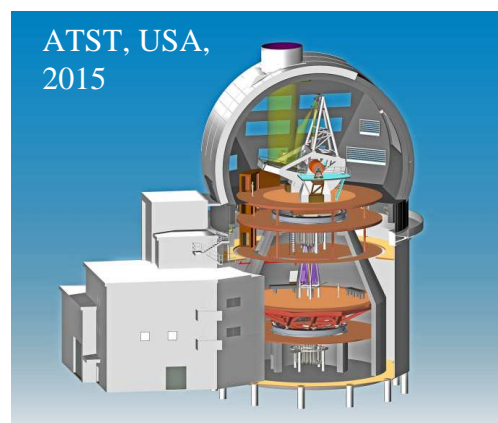
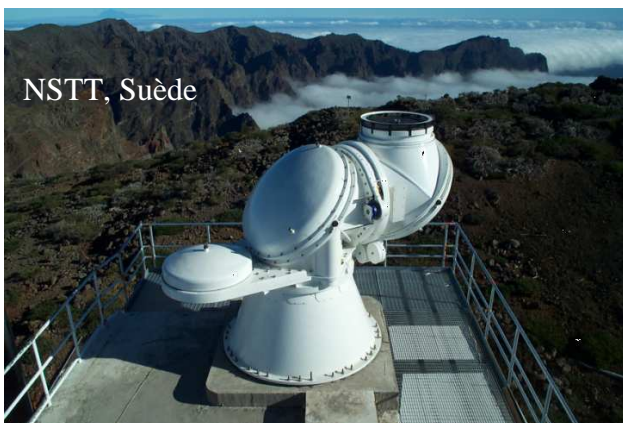
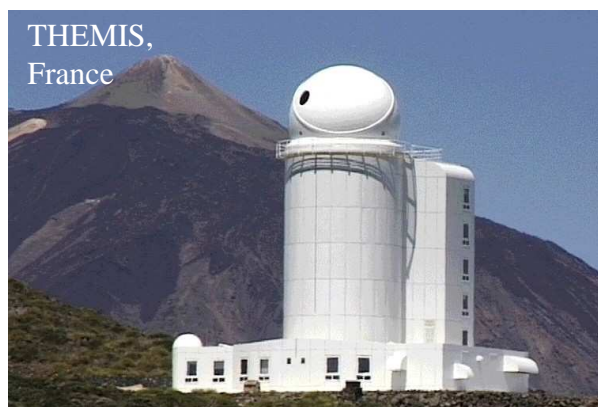
## Chapitre 9

### Télescopes et instruments solaires, aujourd'hui et demain

On ne parlera dans ce chapitre que des instruments à vocation nationale, ou exploités dans un contexte international, ainsi que des projets, qui sont aujourd'hui tous internationaux.

#### IX – 1 Télescopes au sol

Le télescope français THEMIS, mis en service en 1999 à Tenerife aux Canaries, est un télescope de 1 m sous atmosphère d'Hélium en monture azimuthale spécialement optimisé pour réduire au maximum la polarisation instrumentale ; il est pourvu de deux grands spectrographes de 8 m offrant un pouvoir dispersif de 5 mm par Angström. La spécialité de THEMIS est la spectroscopie polarimétrique multi raie dans le domaine spectral 450 – 1100 nm. THEMIS est entouré de télescopes de la même classe que lui, le Vacuum Tower Telescope allemand (spectrographe de 15 m) et du télescope GREGOR de 1.6 m en cours de construction, mais qui ne sont pas optimisés pour la polarimétrie. Sur l'île de La Palma, les suédois possèdent un instrument réfracteur de 1 m, et les Hollandais un petit télescope ouvert de 0.45 m fournissant d'excellentes images.

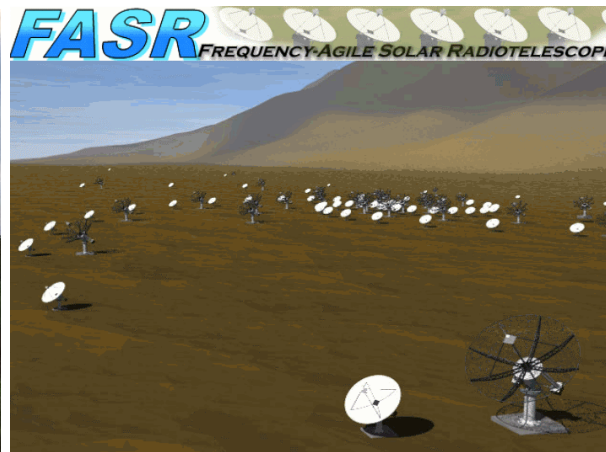
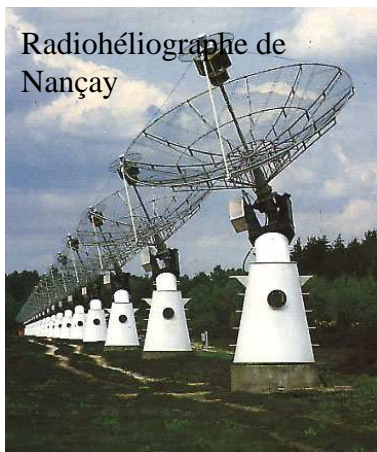


En projets figurent deux très grands télescopes internationaux de la classe de 4 m : ATST (Advanced Technology Solar Telescope) américain et EST (European Solar Telescope) pour les années 2015-2020. Ces télescopes seront munis d'une optique adaptative multi conjuguée, ATST étant plus spécialisé dans l'IR jusqu'à  $30\mu$ , EST ayant son domaine de prédilection en spectro imagerie et spectro polarimétrie entre 400 et 1600 nm.

Les radioastronomes utilisent la station de Nançay qui possède un interféromètre en T à côtés de 1 km opérant dans la gamme de fréquences de 150 à 450 MHz. Ils mènent une collaboration

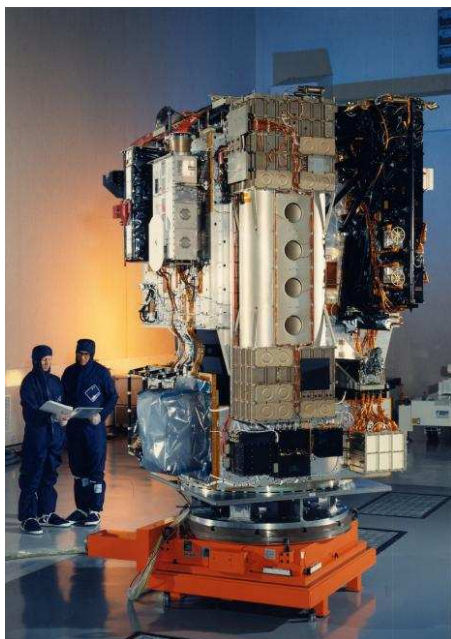


internationale dans le cadre du projet américain FASR (Frequency Agile Solar Radiotelescope), grand interféromètre solaire pouvant fonctionner de 100 MHz à 30 GHz.

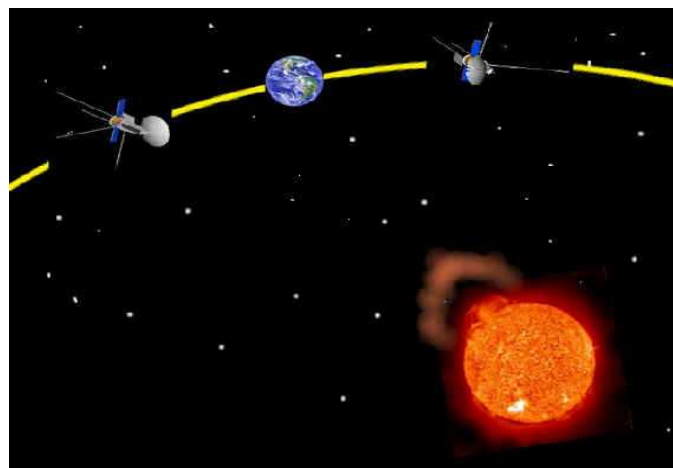


## IX – 2 Télescopes spatiaux

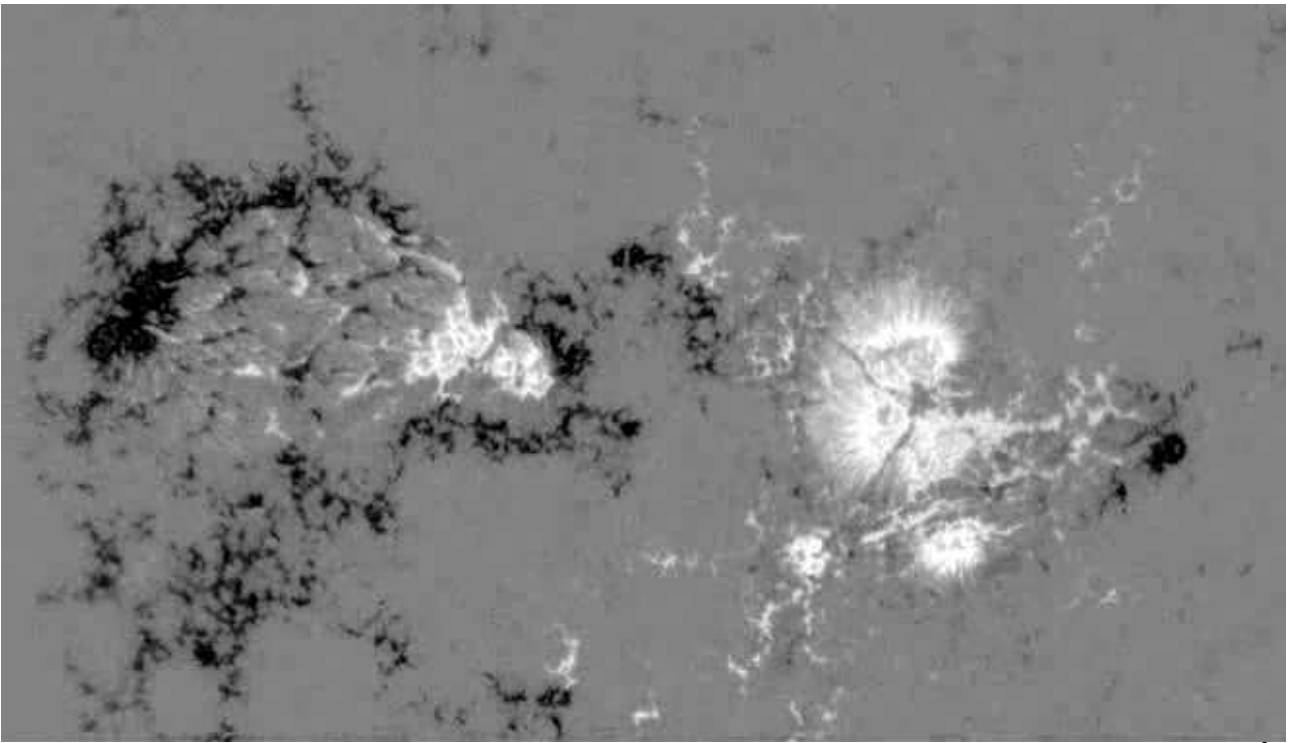
Depuis 1996, la sonde SOHO de l'ESA et de la NASA est placée au point de Lagrange L1 à 1.5 millions de km de la Terre, et observe le Soleil en permanence, à l'aide de petits instruments fonctionnant dans l'Ultra Violet lointain (imagerie et spectroscopie de la couronne solaire et de la zone de transition chromosphère couronne). SOHO est toujours actif.



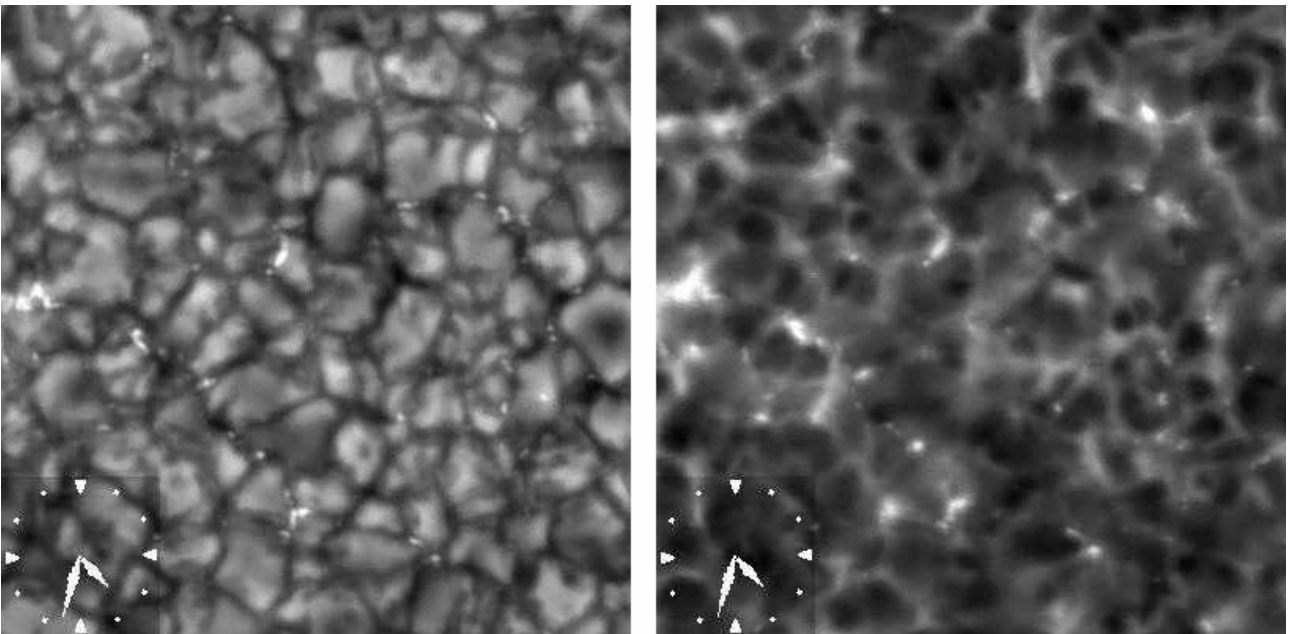
*A gauche SOHO, et ci dessous STEREO*



En 1999, le télescope TRACE de la NASA, reprenant une fraction de la mission SOHO avec des instruments à meilleure résolution spatiale, a été mis sur orbite terrestre. Puis en 2006, la NASA avec une collaboration européenne a lancé deux satellites jumeaux, STEREO, s'écartant progressivement l'un de l'autre de manière à observer les éjections de masse coronale issues du Soleil en 3 dimensions. En 2006 également, la mission HINODE/SOLAR B japonaise, avec une collaboration américaine et européenne, a été mise en orbite avec un télescope optique exceptionnel de 50 cm d'ouverture, présentant un pouvoir séparateur inédit (0.3'') en termes de durée, puisqu'il est possible d'observer avec cette qualité en permanence, et notamment de lancer des séquences de plus de 24 heures d'observations continues. HINODE, plus gros télescope solaire jamais mis en orbite, est parfois appelé le « Hubble solaire ».

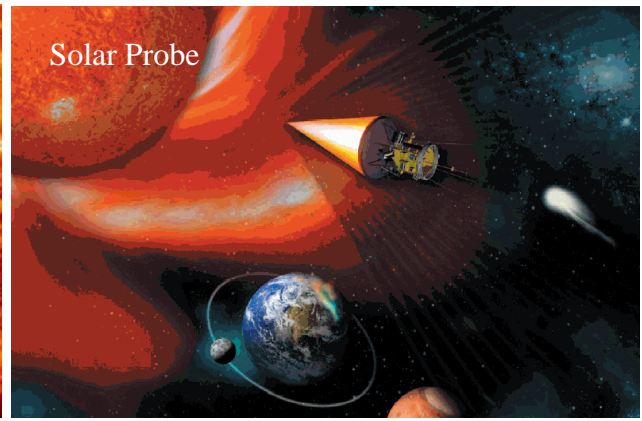
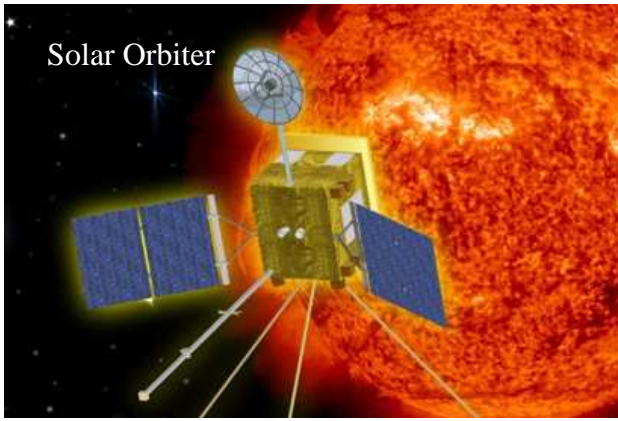


*Champs magnétiques longitudinaux mesurés à haute résolution spatiale par HINODE (FeI 6302 Å)*



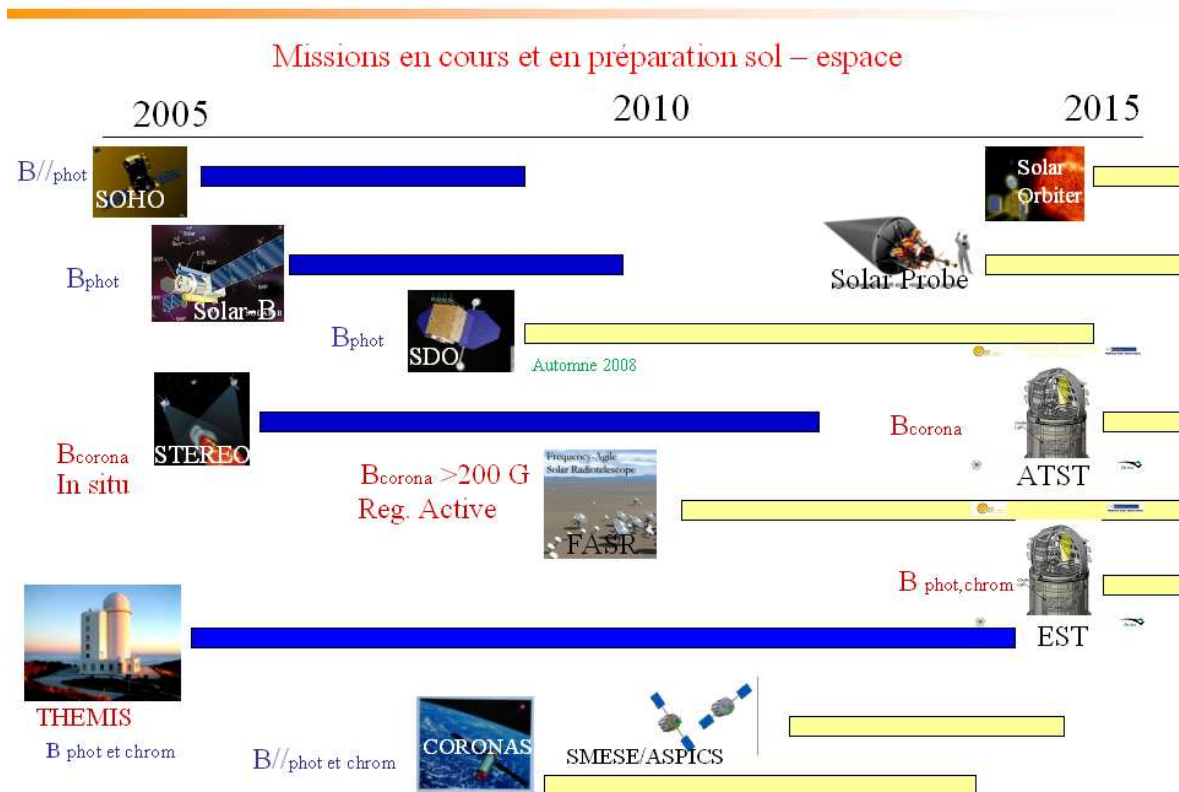
*Granulation (bande CH 4305 Å à gauche et raie CaH 3968 Å à droite) observée à haute résolution spatiale (0.3'') par HINODE. L'instrument permet l'enregistrement de séquences exceptionnelles avec une qualité d'image constante. Les points brillants sont les traceurs des tubes de flux.*

Au cours de la décennie 2010-2020, on s'attend au lancement de deux expériences qui réaliseront des observations inédites, dans la lignée de la mission ULYSSES qui a observé les pôles du Soleil en sortant du plan de l'écliptique en s'aidant de l'effet de fronde gravitationnel de Jupiter. Solar Orbiter est un engin européen de l'ESA qui pourrait être lancé vers 2018, et qui aura la particularité de s'approcher du Soleil à 0.3 UA, avec à un moment donné une rotation synchrone avec le Soleil, permettant d'observer les mêmes détails de la surface pendant plusieurs semaines d'affilée. Solar Orbiter inclinera aussi progressivement son orbite par rapport au plan de l'écliptique. Cet observatoire effectuera des mesures in situ, mais également des observations de la surface du Soleil en UV à haute résolution.



Solar Probe est une expérience américaine, qui pourrait voir le jour en même temps que Solar Orbiter à la fin de la prochaine décennie. Munie d'un bouclier thermique, Solar Probe s'enfoncera pour la première fois dans la couronne solaire, à seulement quelques rayons solaires de la surface de l'étoile. Derrière le bouclier, ce sont des mesures plasma in situ qui seront effectuées.

## Contexte International



## Annexe

### Quelques constantes universelles

$C = 3 \cdot 10^8$  m/s vitesse de la lumière dans le vide

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C charge de l'électron

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg masse de l'électron

$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg masse du proton

$h = 6.62 \cdot 10^{-34}$  MKSA constante de Planck

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  MKSA constante de Boltzmann

$R_H = 13.6$  eV constante de Rydberg

$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  MKSA perméabilité magnétique du vide

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  MKSA constante gravitationnelle

$1/(4 \pi \epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  MKSA,  $\epsilon_0$  permittivité du vide

### Quelques constantes solaires

$M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg masse solaire

$R_S = 696000$  km rayon solaire

$g_S = 275$  m/s<sup>2</sup> accélération de la pesanteur à la surface solaire

$L = 3.86 \cdot 10^{26}$  W luminosité solaire (luminosité d'1 m<sup>2</sup> :  $6.3 \cdot 10^7$  W)

1 UA = 149600000 km distance moyenne Terre/Soleil

$V_1 = 620$  km/s vitesse de libération

$T_e = 5800$  K température effective

Composition : H 92.1% et He 7.8%, autres éléments (O, C, N, Fe, Mg, Ca...) en trace (0.1%)

Rotation : 26 jours à l'équateur, 31 jours aux pôles, inclinaison de 6° sur l'écliptique

### Photosphère solaire : 0 → 500 km d'altitude

Pression moyenne  $P = 10^3$  Pa et variation de 0 à 500 km :  $1.3 \cdot 10^4$  Pa →  $10^2$  Pa

T moyenne = 5000 K et variation de 0 à 500 km : 6400 K → 4170 K

Densité moyenne  $N_H = 10^{22}$  m<sup>-3</sup> et variation de  $\rho$  de 0 à 500 km :  $3 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-3</sup> →  $3 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>-3</sup>

Densité moyenne  $N_e = 10^{19}$  m<sup>-3</sup> et variation de 0 à 500 km :  $5 \cdot 10^{19}$  m<sup>-3</sup> →  $10^{17}$  m<sup>-3</sup>

### Chromosphère solaire : 500 km → 2000 km d'altitude

Pression moyenne  $P = 1$  Pa et variation de 500 à 2000 km :  $10^2$  Pa →  $10^{-2}$  Pa

T moyenne = 8000 K et variation de 500 à 2000 km : 4170 K → 10000 K

$n_H = 10^{19}$  m<sup>-3</sup> et variation de  $\rho$  de 500 à 2000 km :  $3 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>-3</sup> →  $1.8 \cdot 10^{-10}$  kg m<sup>-3</sup>

Densité moyenne  $N_e = 10^{17}$  m<sup>-3</sup> et variation de 500 à 2000 km :  $10^{17}$  m<sup>-3</sup> →  $4 \cdot 10^{16}$  m<sup>-3</sup>

### Couronne solaire : 2000 km → milieu interplanétaire

Conductivité électrique  $\sigma = 10^{-3} T^{3/2}$  MKSA, T en Kelvins (loi d'OHM  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ )

Conductivité thermique  $k_{//} = 10^{-11} T^{5/2}$  MKSA, T en Kelvins (flux de chaleur  $\mathbf{F} = -k_{//} \mathbf{grad} T$ )

- Basse couronne typique:

$n_p = n_e = 5 \cdot 10^{14}$  m<sup>-3</sup>     $T = 1.5 \cdot 10^6$  K     $P = 2 \cdot 10^{-4}$  Pa     $\rho = 10^{-12}$  kg m<sup>-3</sup>

- à 1 rayon solaire :

$n_p = n_e = 10^{12}$  m<sup>-3</sup>     $T = 1.5 \cdot 10^6$  K     $P = 4 \cdot 10^{-7}$  Pa     $\rho = 2 \cdot 10^{-15}$  kg m<sup>-3</sup>



- à 1 UA (orbite terrestre):

$$n_p = n_e = 10^7 \text{ m}^{-3} \quad T_p = 4 \cdot 10^4 \text{ K} \quad T_e = 1.5 \cdot 10^5 \text{ K}$$

$$\rho = 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$$

vitesse du vent solaire à la Terre: 400 km/s en moyenne

- milieu interplanétaire à grande distance:  $n_p = n_e = 10^6 \text{ m}^{-3}$

**Modèle d'atmosphère solaire HSRA : attention ! Unités CGS (cm, g, s, dyne=10 Pa)**

OPTICAL DEPTH	TEMP (K)	PRESSURE (CGS)	ELECTRON PRESSURE	OPACITY (PER GM)	HYDROGEN IONIZED	METAL TOTAL	ELECTRON S1	MAG	CONTRIBUTORS	FE	C	DENSITY (GM/CC)	GRA D I E N T RADIATIVE	A D I A B A T I C	DEPTH (CM)
1.00E-08	8930.0	1.511E-01	4.822E-02	1.46E-01	5.11E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.81E-13	U	7.43E+08	-1.85E+08	
1.25E-08	8880.0	1.523E-01	4.845E-02	1.47E-01	5.12E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.82E-13		7.30E+08	-1.85E+08	
1.58E-08	8810.0	1.529E-01	4.826E-02	1.45E-01	5.07E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.85E-13		-1.80E+10	7.24E+08	-1.85E+08
2.00E-08	8750.0	1.537E-01	4.839E-02	1.45E-01	5.05E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.88E-13		-1.41E+10	7.13E+08	-1.85E+08
2.51E-08	8680.0	1.547E-01	4.919E-02	1.45E-01	5.08E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.91E-13		-1.09E+10	7.06E+08	-1.84E+08
3.16E-08	8630.0	1.559E-01	4.915E-02	1.45E-01	5.08E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.93E-13		-8.12E+09	6.81E+08	-1.84E+08
3.98E-08	8560.0	1.575E-01	4.931E-02	1.44E-01	5.01E-01	.2	.0	.0	.0	.1	1.97E-13		-6.70E+09	6.69E+08	-1.84E+08
5.01E-08	8510.0	1.594E-01	5.028E-02	1.45E-01	5.06E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.00E-13		-4.74E+09	6.46E+08	-1.84E+08
6.31E-08	8450.0	1.619E-01	5.190E-02	1.45E-01	5.05E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.05E-13		-3.45E+09	6.27E+08	-1.83E+08
7.94E-08	8380.0	1.650E-01	5.207E-02	1.46E-01	5.07E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.10E-13		-2.60E+09	6.20E+08	-1.83E+08
1.00E-07	8320.0	1.689E-01	5.345E-02	1.46E-01	5.09E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.16E-13		-2.81E+09	5.77E+08	-1.82E+08
1.26E-07	8250.0	1.737E-01	5.514E-02	1.47E-01	5.11E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.24E-13		-2.58E+09	5.44E+08	-1.81E+08
1.58E-07	8170.0	1.798E-01	5.722E-02	1.48E-01	5.13E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.34E-13		-2.20E+09	5.17E+08	-1.80E+08
2.00E-07	8090.0	1.875E-01	5.883E-02	1.45E-01	5.02E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.48E-13		-1.85E+09	4.95E+08	-1.79E+08
2.51E-07	8000.0	1.973E-01	6.105E-02	1.43E-01	4.92E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.65E-13		-1.56E+09	4.66E+08	-1.78E+08
3.16E-07	7910.0	2.099E-01	6.438E-02	1.41E-01	4.86E-01	.2	.0	.0	.0	.1	2.87E-13		-1.24E+09	4.34E+08	-1.76E+08
3.98E-07	7820.0	2.261E-01	6.770E-02	1.37E-01	4.70E-01	.2	.0	.0	.0	.1	3.16E-13		-1.08E+09	4.05E+08	-1.74E+08
5.01E-07	7710.0	2.475E-01	7.046E-02	1.28E-01	4.37E-01	.2	.0	.0	.0	.1	3.58E-13		-8.42E+08	3.87E+08	-1.72E+08
6.31E-07	7630.0	2.762E-01	7.495E-02	1.20E-01	4.09E-01	.3	.0	.0	.0	.1	4.11E-13		-7.06E+08	3.67E+08	-1.69E+08
7.94E-07	7500.0	3.165E-01	7.652E-02	1.04E-01	3.50E-01	.3	.0	.0	.0	.1	4.99E-13		-7.38E+08	3.60E+08	-1.66E+08
1.00E-06	7360.0	3.763E-01	7.846E-02	8.63E-02	2.99E-01	.3	.0	.0	.0	.1	6.31E-13		-6.88E+08	3.59E+08	-1.62E+08
1.26E-06	7180.0	4.736E-01	7.529E-02	6.24E-02	2.07E-01	.5	.0	.0	.0	.2	8.65E-13		-6.70E+08	3.99E+08	-1.57E+08
1.58E-06	6970.0	6.512E-01	7.276E-02	4.22E-02	1.38E-01	.7	.0	.0	.0	.3	1.29E-12		-6.27E+08	4.45E+08	-1.51E+08
2.00E-06	6720.0	1.003E+00	6.847E-02	2.52E-02	7.99E-02	1.0	.0	.0	.0	.4	2.17E-12		-5.76E+08	5.45E+08	-1.43E+08
2.51E-06	6440.0	1.812E+00	6.252E-02	1.30E-02	3.87E-02	1.6	.1	.1	.1	.9	4.23E-12		-4.71E+08	7.38E+08	-1.34E+08
3.16E-06	6180.0	3.793E+00	6.002E-02	6.67E-03	1.72E-02	2.9	.2	.2	.2	1.9	9.41E-12		-3.40E+08	9.56E+08	-1.23E+08
3.98E-06	5950.0	8.225E+00	6.252E-02	4.08E-03	8.00E-03	5.3	.4	.4	.4	3.6	2.14E-11		-2.37E+08	9.74E+08	-1.12E+08
5.01E-06	5750.0	1.655E+01	6.509E-02	3.04E-03	3.97E-03	8.6	.8	.7	.7	5.7	4.47E-11		-1.59E+08	8.06E+08	-1.02E+08
6.31E-06	5590.0	2.916E+01	6.774E-02	2.69E-03	2.26E-03	11.8	1.4	1.2	1.2	7.1	8.11E-11		-1.08E+08	5.83E+08	-9.47E+07
7.94E-06	5440.0	4.611E+01	6.728E-02	2.55E-03	1.37E-03	14.8	2.2	1.9	2.0	7.5	1.32E-10		-7.99E+07	4.17E+08	-8.88E+07
1.00E-05	5300.0	6.790E+01	6.749E-02	2.58E-03	9.13E-04	16.9	3.2	2.7	2.9	6.6	1.99E-10		-5.91E+07	2.88E+08	-8.40E+07
1.26E-05	5170.0	9.649E+01	6.657E-02	2.43E-03	5.36E-04	22.5	5.1	4.4	4.6	6.5	2.91E-10		-4.50E+07	2.72E+08	-7.97E+07
1.58E-05	5040.0	1.344E+02	6.213E-02	2.26E-03	2.92E-04	31.5	8.2	7.1	7.4	6.3	4.16E-10		-3.58E+07	1.75E+08	-7.58E+07
2.00E-05	4910.0	1.866E+02	6.432E-02	2.11E-03	1.61E-04	46.2	13.4	11.5	12.0	5.9	5.92E-10		-2.75E+07	1.34E+08	-7.20E+07
2.51E-05	4790.0	2.546E+02	6.06E-02	2.10E-03	6.45E-05	63.3	19.7	17.1	17.9	4.7	8.28E-10		-2.16E+07	9.72E+07	-6.85E+07
3.16E-05	4660.0	3.375E+02	3.964E-02	2.24E-03	2.46E-05	80.9	26.3	23.3	24.2	2.9	1.13E-09		-1.79E+07	6.76E+07	-6.54E+07
3.98E-05	4530.0	4.314E+02	4.228E-02	2.59E-03	8.15E-06	92.5	30.2	27.8	28.8	1.4	1.48E-09		-1.42E+07	4.45E+07	-6.27E+07
5.01E-05	4400.0	5.307E+02	4.681E-02	3.14E-03	2.45E-06	97.5	30.5	30.6	31.4	.5	1.88E-09		-1.09E+07	2.90E+07	-6.06E+07
6.31E-05	4280.0	6.342E+02	5.138E-02	3.76E-03	7.65E-07	99.1	28.2	33.0	33.1	.2	2.31E-09		-7.07E+06	1.98E+07	-5.88E+07
7.94E-05	4200.0	7.452E+02	5.527E-02	4.33E-03	3.34E-07	99.6	25.2	35.1	34.2	.1	2.76E-09		-3.18E+06	1.43E+07	-5.72E+07
1.00E-04	4170.0	8.682E+02	6.119E-02	4.87E-03	2.26E-07	99.7	23.3	36.3	34.8	.1	3.24E-09		-6.33E+05	1.09E+07	-5.57E+07
1.26E-04	4175.0	1.007E+03	6.958E-02	5.43E-03	2.09E-07	99.7	22.6	36.8	34.9	.1	3.76E-09		3.27E+05	8.44E+06	-5.43E+07
1.58E-04	4190.0	1.163E+03	7.964E-02	6.04E-03	2.11E-07	99.7	22.3	37.0	35.0	.1	4.33E-09		4.13E+05	6.57E+06	-5.29E+07
2.00E-04	4205.0	1.340E+03	9.093E-02	6.72E-03	2.13E-07	99.7	22.0	37.2	35.0	.1	4.97E-09		3.76E+05	5.14E+06	-5.15E+07
2.51E-04	4225.0	1.541E+03	1.041E-01	7.46E-03	2.25E-07	99.7	21.9	37.3	35.0	.1	5.68E-09		3.86E+05	4.05E+06	-5.01E+07
3.16E-04	4250.0	1.768E+03	1.197E-01	8.29E-03	2.47E-07	99.7	21.9	37.2	35.0	.1	6.48E-09		3.75E+05	3.20E+06	-4.87E+07
3.98E-04	4280.0	2.026E+03	1.380E-01	9.20E-03	2.83E-07	99.6	22.2	37.0	34.9	.1	7.38E-09		3.04E+05	2.53E+06	-4.74E+07
5.01E-04	4305.0	2.319E+03	1.582E-01	1.02E-02	3.11E-07	99.6	22.2	37.0	34.9	.1	8.40E-09		2.18E+05	2.01E+06	-4.60E+07
6.31E-04	4330.0	2.651E+03	1.810E-01	1.13E-02	3.40E-07	99.5	22.3	36.9	34.9	.1	9.54E-09		1.73E+05	1.59E+06	-4.47E+07
7.94E-04	4355.0	3.028E+03	2.071E-01	1.25E-02	3.72E-07	99.5	22.3	36.9	34.9	.1	1.08E-08		1.37E+05	1.26E+06	-4.33E+07
.0010000	4380.0	3.457E+03	2.366E-01	1.39E-02	4.06E-07	99.5	22.3	36.8	34.8	.1	1.23E-08	1.09E+05	1.00E+06	-4.20E+07	
.0012589	4405.0	3.944E+03	2.702E-01	1.54E-02	4.43E-07	99.4	22.4	36.8	34.8	.1	1.40E-08	8.66E+04	7.99E+05	-4.07E+07	
.0015849	4430.0	4.497E+03	3.083E-01	1.71E-02	4.81E-07	99.4	22.4	36.8	34.7	.1	1.58E-08	7.49E+04	6.36E+05	-3.93E+07	
.0019953	4460.0	5.125E+03	3.533E-01	1.89E-02	5.43E-07	99.3	22.5	36.6	34.7	.1	1.79E-08	6.56E+04	5.07E+05	-3.79E+07	
.0025119	4490.0	5.839E+03	4.046E-01	2.10E-02	6.11E-07	99.2	22.7	36.5	34.6	.2	2.03E-08	5.59E+04	4.04E+05	-3.66E+07	
.0031623	4525.0	6.650E+03	4.652E-01	2.32E-02	7.11E-07	99.1	23.0	36.2	34.5	.2	2.29E-08	4.22E+04	3.23E+05	-3.52E+07	
.0039811	4560.0	7.571E+03	5.297E-01	2.57E-02	7.66E-07	99.0	23.0	36.2	34.4	.2	2.59E-08	2.74E+04	2.57E+05	-3.39E+07	
.0050119	4575.0	8.631E+03	6.029E-01	2.85E-02	8.25E-07	98.9	22.9	36.2	34.4	.2	2.94E-08	2.18E+04	2.05E+05	-3.25E+07	
.0063096	4600.0	9.807E+03	6.861E-01	3.16E-02	8.87E-07	98.8	22.9	36.1	34.4	.2	3.32E-08	1.88E+04	1.64E+05	-3.11E+07	
.0079433	4630.0	1.116E+04	7.839E-01	3.50E-02	9.85E-07	98.7	23.0	36.0	34.3	.2	3.76E-08	1.65E+04	1.31E+05	-2.97E+07	
.0100000	4660.0	1.269E+04	8.953E-01	3.88E-02	1.09E-06	98.6	23.1	35.9	34.2	.2	4.25E-08	1.31E+04	1.04E+05	-2.83E+07	
.0125892	4690.0	1.444E+04	1.022E+00	4.30E-02	1.21E-06	98.4	23.1	35.8	34.1	.2	4.80E-08	1.04E+04	8.32E+04	-2.69E+07	
.0158489	4720.0	1.642E+04	1.167E+00	4.76E-02	1.33E-06	98.3	23.2	35.6	34.0	.2	5.42E-08	8.26E+03	6.65E+04	-2.55E+07	
.0199526	4750.0	1.867E+04	1.331E+00	5.28E-02	1.46E-06	98.1	23.2	35.5	33.9	.3	6.13E-08	7.53E+03	5.31E+04	-2.41E+07	
.0251169	4790.0	2.122E+04	1.532E+00	5.85E-02	1.71E-06	97.8	23.5	35.2	33.8	.3	6.91E-08	7.72E+03	4.25E+04	-2.27E+07	
.0316228	4840.0	2.412E+04	1.777E+00	6.49E-02	2.13E-06	97.4	23.9	34.7	33.4	.3	7.77E-08	7.20E+03	3.40E+04	-2.12E+07	
.0398107	4895.0	2.742E+04	2.069E+00	7.20E-02	2.71E-06	97.6	24.3	34.0	33.0	.4	8.73E-08	6.03E+03	2.73E+04	-1.98E+07	
.0501187	4950.0	3.116E+04	2.408E+00	7.99E-02	3.43E-										



## Quelques formules d'analyse vectorielle

Les **vecteurs** sont en caractères **gras**

$f(x,y,z)$  est une fonction,  $\mathbf{A}$  ( $A_x, A_y, A_z$ ),  $\mathbf{B}$  ( $B_x, B_y, B_z$ ) et  $\mathbf{C}$  ( $C_x, C_y, C_z$ ) sont des vecteurs

Produit mixte  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A})$  invariant par permutation circulaire

Double produit vectoriel  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$

Opérateur « nabla »  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

Gradient **grad**  $f = \nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

Divergence  $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$  (produit scalaire de  $\nabla$  avec  $\mathbf{A}$ )

Rotationnel **rot**  $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  (produit vectoriel de  $\nabla$  avec  $\mathbf{A}$ )

$\text{rot } \mathbf{A} = (\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z, \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x, \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y)$

$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \wedge (\nabla f) = \mathbf{0}$  et  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$

$\text{div}(f\mathbf{A}) = f \text{div } \mathbf{A} + \text{grad } f \cdot \mathbf{A}$

$\text{rot}(f\mathbf{A}) = f \text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } f \wedge \mathbf{A}$

$\text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B}$

$\text{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}$

$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$

opérateur Laplacien  $\Delta = (\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$

$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}$

$\text{grad}(\mathbf{A}^2/2) = \mathbf{A} \wedge \text{rot } \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{A}$

Formule de Stokes  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

La circulation du vecteur  $\mathbf{A}$  sur un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface  $S$  s'appuyant sur ce contour

Formule d'Ostrogradski ou « flux divergence »  $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \text{div } \mathbf{A} \, dv$

Le flux du vecteur  $\mathbf{A}$  au travers d'une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur délimité par cette surface fermée

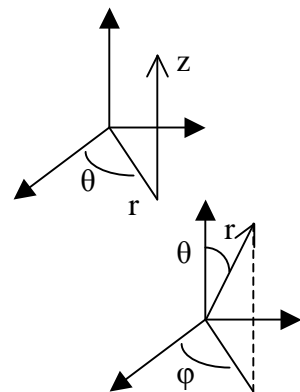
**Coordonnées cylindriques**  $r, \theta, z$

$\text{grad } f = (\partial f/\partial r, (1/r) \partial f/\partial \theta, \partial f/\partial z)$

$\text{div } \mathbf{A} = (1/r) \partial(rA_r)/\partial r + (1/r) \partial A_\theta/\partial \theta + \partial A_z/\partial z$

$\text{rot } \mathbf{A} = [ (1/r) \partial A_z/\partial \theta - \partial A_\theta/\partial z, \partial A_r/\partial z - \partial A_z/\partial r, (1/r) (\partial(rA_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial \theta) ]$

$\Delta f = (1/r) \partial(r \partial f/\partial r)/\partial r + (1/r^2) \partial^2 f/\partial \theta^2 + \partial^2 f/\partial z^2$



**Coordonnées sphériques**  $r, \theta, \varphi$

$\text{grad } f = (\partial f/\partial r, (1/r) \partial f/\partial \theta, (1/r \sin \theta) \partial f/\partial \varphi)$

$\text{div } \mathbf{A} = (1/r^2) \partial(r^2 A_r)/\partial r + (1/r \sin \theta) \partial(\sin \theta A_\theta)/\partial \theta + (1/r \sin \theta) \partial A_\varphi/\partial \varphi$

$\text{rot } \mathbf{A} = [ (1/r \sin \theta) (\partial(\sin \theta A_\varphi)/\partial \theta - \partial A_\theta/\partial \varphi), (1/r \sin \theta) (\partial A_r/\partial \varphi - \sin \theta \partial(r A_\varphi)/\partial r), (1/r) (\partial(r A_\theta)/\partial r - \partial A_r/\partial \theta) ]$

$\Delta f = (1/r) \partial^2(rf)/\partial r^2 + (1/r^2 \sin \theta) \partial(\sin \theta \partial f/\partial \theta)/\partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 f/\partial \varphi^2$

## Cas particulier des ondes planes de la forme $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$

**grad** =  $i \mathbf{k}$  (multiplication par  $i \mathbf{k}$ )

**div** =  $i \mathbf{k} \cdot$  (produit scalaire avec  $i \mathbf{k}$ )

**rot** =  $i \mathbf{k} \wedge$  (produit vectoriel avec  $i \mathbf{k}$ )

$\Delta$  =  $-\mathbf{k}^2$  (multiplication)

$\partial/\partial t$  =  $-i \omega$  (multiplication par  $-i \omega$ )

$\partial^2/\partial t^2$  =  $-\omega^2$  (multiplication)

## Quelques fonctions spéciales

### Fonctions associées de Legendre $P_l^m(x)$ , harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$

$P_l^m(x)$  est solution de  $(1-x^2) d^2y/dx^2 - 2x dy/dx + [l(l+1) - m^2/(1-x^2)] y = 0$

$l$  entier positif ou nul,  $m$  entier relatif tel que  $-l \leq m \leq l$

$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} d^m P_l(x)/dx^m$

où  $P_l(x)$  est un polynôme de Legendre  $P_l(x) = [1/(2^l l!)] d^l(x^2-1)^l/dx^l$

$P_l^m(x) = [(1-x^2)^{m/2}/(2^l l!)] d^{m+l}(x^2-1)^l/dx^{m+l}$  fonction de Legendre associée

Le produit  $A_{lm} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$  est appelé harmonique sphérique  $Y_l^m(\theta, \varphi)$

avec un facteur de normalisation  $A_{lm} = (-1)^m [(2l+1)/(4\pi)]^{1/2} [(l-|m|)!/(l+|m|)!]^{1/2}$  tel que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

### Fonctions de Bessel entières $J_n(x)$

$x^2 d^2y/dx^2 + x dy/dx + (x^2 - n^2) y = 0$ ,  $n$  entier positif ou nul

$c'$  est une équation de Bessel ayant pour solution  $J_n(x) = (x/2)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p}/(2^p p! (n+p)!)$

Propriété :  $d(x^n J_n)/dx = x^n J_{n-1}$  et  $d(x^{-n} J_n)/dx = -x^{-n} J_{n+1}$

### Fonctions de Bessel demi entières $J_{n+1/2}(x)$ et fonctions de Bessel sphériques $j_n(x)$

$x^2 d^2y/dx^2 + x dy/dx + (x^2 - n(n+1)) y = 0$ ,  $n$  entier

Il s'agit d'une équation qui a pour solution  $j_n(x) = (2x/\pi)^{-1/2} J_{n+1/2}(x)$  avec :

$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n (2/\pi)^{1/2} x^{n+1/2} (1/x d/dx)^n [\sin(x)/x]$

Exemple :  $J_{1/2}(x) = (2/(\pi x))^{1/2} \sin(x)$  ;  $J_{3/2}(x) = (2/(\pi x))^{1/2} [\sin(x)/x - \cos(x)]$

$j_n(x) = (2x/\pi)^{-1/2} J_{n+1/2}(x)$  est appelée fonction de Bessel sphérique ; on a  $j_0(x) = \sin(x)/x$

## Bibliographie succincte

- J. Heyvaerts, Aspects MHD de l'activité solaire, 1980, Annales de Physique, Vol 5, N° 5-6
- E. Priest, Solar MHD, 1982, D.Reidel Publishing Company
- D. Mihalas, Stellar atmospheres, 1978, Freeman
- E. Landi Degl'Innocenti, Magnetic fields measurements, in Solar Observations: techniques and interpretation, 1992, Cambridge University Press
- J. Stenflo, Solar Magnetic fields, 1994, Kluwer Academic Publishers
- J.-L. Leroy, La polarisation de la lumière et l'observation astronomique, 1998, Gordon and Breach
- D. Péquignot, 1980, cours de Physique stellaire, Université Paris 7
- E. Berthier, 1979, cours d'Astrophysique, ECP