L'hydrodynamique dans l'œuvre de D'Alembert 1766-1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l'édition critique et commentée de ses "Œuvres complètes" et leur édition électronique.

Alexandre Guilbaud

N° d'ordre : 307-2007 Année 2007

THESE

présentée

devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention

du DIPLOME DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 7 décembre 2007

par

M. Alexandre GUILBAUD

L'hydrodynamique dans l'œuvre de D'Alembert 1766-1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l'édition critique et commentée de ses *Œuvres Complètes* et leur édition électronique.

Directeurs de thèse : P. CREPEL (Chargé de Recherches CNRS, Université Lyon 1)
M. MASSOT (Professeur, Ecole Centrale de Paris)

JURY :

M. Michel BLAY, Directeur de Recherches CNRS (*Examinateur*)
Mme Maria-Teresa BORGATO, Professeur, Università degli studi di Ferrara, Italie (*Rapporteur*)
M. Pierre CREPEL, Chargé de Recherches CNRS, Université Lyon 1 (*Directeur de la thèse*)
M. Constantine DAFERMOS, Professeur, Brown University, Etats-Unis (*Rapporteur*)
M. Eberhard KNOBLOCH, Professeur, Technische Universität Berlin, Allemagne (*Rapporteur*)
M. Michel LANCE, Professeur, Université Lyon 1 (*Examinateur*)
M. Marc MASSOT, Professeur, Ecole Centrale de Paris (*Codirecteur de la thèse*)
Mme Irène PASSERON, Chargée de Recherches CNRS (*Examinatrice*)

M. Jean BATAILLE, Professeur émérite (*Invité*)
M. Christian GILAIN, Professeur, Université Paris 6 (*Invité*)
Mme Martine MARION, Professeur, Ecole Centrale de Lyon (*Invitée*)

« Tant va la cruche à l'eau
qu'à la fin elle se casse »

Boris Vian (1920-1959),
Cahier 11 du Collège de 'Pataphysique
(25 merdre 80 = 11 juin 1953)

« Don't Try »

Charles Bukowski (1920-1994),
Epitaphe.

À Marine Pobel

et Frédéric Balsarin

Avertissement

Notre thèse, soutenue le 7 décembre 2007 à l'Université Claude Bernard Lyon 1, comprenait un volume principal ainsi que deux volumes d'annexes.

Le premier de ces deux volume d'annexes rassemblait l'ensemble des travaux menés dans le cadre de l'édition des *Œuvres complètes* de D'Alembert, ce qui inclut la version annotée, précédée pour chacun d'une présentation et d'une table analytique, du Mémoire 4 des *Opuscules mathématiques* (t. I, 1761), du Mémoire 51 § IV des *Opuscules mathématiques* (t. VI, 1773) et du Mémoire 57 des *Opuscules mathématiques* (t. VIII, 1780).

Le second correspondait à un volume « classique » d'annexes. Il renfermait les traductions françaises, réalisées en collaboration avec B. Bru, du texte latin original de l'*Hydraulica* de Jean Bernoulli (1742)[1] et du mémoire latin « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones » d'Abraham Gotthelf Kaestner (1769)[2], les observations de D'Alembert, dans le *Traité des fluides* (1744)[3], sur l'*Hydraulica* de Jean Bernoulli, le « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases » de Jean-Charles Borda (1766)[4], les extraits de la correspondance entre D'Alembert et Lagrange relatifs à l'hydrodynamique ainsi que la pièce de Gaspard Marie Riche de Prony intitulée « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horizontal ; Avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problème, dans son Traité des Fluides » (1801)[5].

Les versions critiques et commentées des Mémoires 4, 51 § IV et 57 des *Opuscules mathématiques* de D'Alembert étant destinées aux volumes III/1, III/6 et III/8 des *Œuvres complètes* de D'Alembert, éditées chez CNRS Editions, et compte tenu du fait que nous prévoyons de faire paraître les traductions françaises de l'*Hydraulica* de Jean Bernoulli et du mémoire « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones » de Kaestner, nous ne faisons donc pas apparaître ces annexes dans la présente version, « diffusable », de notre thèse de Doctorat, ce à l'exception d'un extrait de la traduction de l'*Hydraulica* récemment publié, p. 210-225, dans l'ouvrage de M. Blay intitulé *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange* (2007)[6].

[1] « Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732 », *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1742, p. 387-493.

[2] *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89.

[3] Paris, 1744, Livre II, art. 183-191, p. 155-165.

[4] *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour l'année 1766 (1769), p. 579-607.

[5] *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1801*, t. 18, pièce n° 47, 1803.

[6] M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007

Le présent volume contient par conséquent ce qui formait le volume principal de la thèse soutenue le 7 décembre 2007, à savoir la thèse proprement dite. Nous y avons corrigé les inévitables « coquilles », pallié quelques oublis et modifié certains passages suite à notre relecture de l'ensemble et aux discussions que nous avons eues a posteriori avec quelques uns des membres de notre jury (ces modifications concernent notamment le chapitre VIII). En plus de l'inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert ainsi que de la bibliographie associée, déjà présents dans le volume principal, il renferme par ailleurs les annexes suivantes, reprises à l'indentique de notre second volume d'annexes : l'extrait suscité de la traduction de l'*Hydraulica* de Jean Bernoulli, le « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases » de Borda, les extraits de la correspondance entre D'Alembert et Lagrange relatifs à l'hydrodynamique ainsi que la pièce de Gaspard Marie Riche de Prony de 1801.

Alexandre Guilbaud
Octobre 2008

Remerciements

Je remercie mes deux directeurs de thèse, Pierre Crépel et Marc Massot.

Pierre m'a ouvert les portes de l'univers dalembertien il y a de cela quatre ans. Il n'a jamais manqué, depuis le jour de notre rencontre, de me témoigner sa confiance, et de m'apporter son aide dans tous les moments difficiles, et dans tous les domaines. Conscient de ce que lui doit le travail renfermé dans ces trois volumes, de ce que lui doivent mes premiers pas au sein du Groupe D'Alembert, de ce que je lui dois, je le remercie aussi pour avoir su me communiquer les valeurs, tant humaines que professionnelles, qui forment l'esprit de ses recherches en histoire des sciences.

Je dois autant à Marc, qui m'a ouvert des horizons et fait profiter d'un point de vue différent, mais non moins complémentaire de celui de Pierre, sur le sujet. Je mesure par ailleurs la difficulté que représente l'encadrement d'une thèse dans une autre discipline que la sienne. C'est pourtant sans compter qu'il s'y est investi. Je le remercie pour son soutien sans faille, quels qu'aient été les problèmes qui se sont présentés, pour ses conseils, pour tout ce qui n'aurait pu être réalisé sans l'énergie et l'attention qu'il a su déployer ces quatre dernières années. Les rapports d'amitié qui nous lient m'ont permis de traverser de nombreuses épreuves. Ils sont l'âme et le fruit d'une belle aventure... le clodo de la rue Artaud, les solos de Jerk et les mille zébrures de la lune ne chanteront pas le contraire !...

Je remercie Irène Passeron, pierre angulaire et pierre précieuse du Groupe d'édition des *Œuvres Complètes* de D'Alembert. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour son aide et sa confiance de tous les instants. Ces trois années n'auraient pas été ce qu'elles furent sans tous les moments que nous aurons passés à travailler ensemble, sans nos chaleureuses discussions sur le spleen et l'idéal, sans les rapports d'amitié qui nous lient. Merci Irène.

Je remercie de tout cœur Marie-Laure Massot et François Prin, pour leur soutien et leur présence constante. J'ai été extrêmement touché par leur gentillesse à mon égard. Je leur adresse toute mon amitié, avec l'espoir de passer à l'avenir d'aussi bons moments que ceux que nous avons partagés au cours de ma thèse.

Je voudrais également remercier Christian Gilain pour son plein et entier investissement et la confiance qu'il m'a témoignée. J'ai beaucoup apprécié de travailler avec lui, et beaucoup appris. Je me réjouis déjà des douze mois de recherches que le post-doctorat, récemment obtenu, me permettra de passer à ses côtés.

Un grand merci à Bernard Bru pour les nombreuses « Journées mondiales des Loges », pour son accueil chaleureux, ses conseils éclairés, et son généreux concours au travail de traduction de l'*Hydraulique* de Jean Bernoulli et d'un mémoire latin de

Kaestner.

Merci aussi à Alain Coste pour sa disponibilité et ses nombreuses et fertiles remarques. Nos longues discussions ont été fort enrichissantes, aussi bien professionnellement que personnellement. Puisse-t-il un jour écrire une histoire de Lyon !...

Je remercie Guillaume Jouve pour sa présence et son soutien. Nos trois années de collaboration et nos recherches communes ont beaucoup contribué au plaisir que j'ai eu à réaliser ce travail. Elles ont fait de nous des amis.

Je remercie Michelle Chapront-Touzé, Anne-Marie Chouillet, Jérôme Viard, Hugues Chabot, Jean-Daniel Candaux, Frédéric Chambat, Jean-Pierre Schandeler, Jean Souchay et tous les autres membres du Groupe D'Alembert. Ce fut une riche et motivante expérience que de collaborer et d'apprendre auprès de certains d'entre eux, ou de partager notre passion pour D'Alembert.

Mes plus sincères remerciements vont aussi à Martine Marion et Mohand Moussaoui. Ils ont tous deux fait tout leur possible pour m'aider me soutenir et me guider dans le courant de ma scolarité à l'Ecole Centrale de Lyon. Je leur en suis profondément reconnaissant. Je n'aurais probablement jamais écrit ces lignes sans leur soutien, leurs conseils, et sans l'aide que m'a de nouveau apportée Mohand lors de mes premiers pas de futur doctorant au sein du laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon (MAPLY).

Je remercie Maria-Teresa Borgato, Constantine Dafermos et Eberhard Knobloch d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie sincèrement Michel Blay de m'avoir soutenu, conseillé, et aidé à plusieurs reprises ces dernières années. Je suis de même honoré de sa présence au sein du jury.

Mes remerciements vont également à Michel Lance : je suis heureux qu'il ait accepté d'être examinateur de ma thèse.

Merci aussi à Jean Bataille pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je suis très reconnaissant à Olivier Darrigol pour sa gentillesse et ses conseils avisés. J'ai beaucoup apprécié et beaucoup appris lors des discussions que nous avons pu avoir ensemble ces derniers mois. Il m'a notamment donné des clés pour aborder certains points délicats des premiers traités de D'Alembert en hydrodynamique.

Je remercie Michel Enock et Christian Peskine pour la confiance qu'ils m'ont accordée.

Je suis, par ailleurs, heureux d'avoir pu faire la connaissance de Christophe Schmit et Olivier Bruneau, avec lesquels j'ai eu et aurai de nouveau l'occasion de passer d'excellents moments.

J'adresse toute mon amitié à Olivier Ferret et le remercie pour ses encouragements. C'est avec le plus grand plaisir que je continuerai à festoyer et à travailler en sa compagnie ces prochaines années.

Je remercie à nouveau François Prin, pour les quinze merveilleux jours à Sainte-Sophie d'Halifax qu'il nous a offerts, et grâce auxquels j'ai pu retrouver la force de terminer cette thèse.

Je remercie David Meunier, le pire de tous, mais le meilleur des amis qu'il soit donné d'avoir.

Je remercie Frédéric Balsarin avec autant de chaleur. Son amitié, ses encouragements, et la flamme artistique qui anime son cœur ont été une source constante de bonheur et de rêveries poétiques et musicales. Outre cette thèse, ces trois dernières années furent profondément marquées par tout le plaisir que nous avons pris ensemble à la création de l'album « Embruns d'éther ». J'espère qu'il en naîtra encore beaucoup d'autres comme celui-là...

Un énorme merci, pour finir, à Marine Pobel, qui a la patience, me comprend et me supporte comme personne d'autre. Souhaitons-nous de danser encore quelques valses, de gravir et descendre les nombreux vers et dévers des montagnes de notre courte existence.

Alexandre Guilbaud

SOMMAIRE

ANNEXES

Liste des abréviations

Abréviations courantes

art.	article(s)
cf.	*confer* (comparer avec)
chap.	chapitre(s)
dir.	directeur(s) ou direction
éd.	éditeur(s) ou édition
&	et
&c.	etc.
EDP	équation aux dérivées (ou aux différences) partielles
f.	feuillet(s)
fasc.	fascicule
Fig.	figure
ibid.	*ibidem* (au même endroit)
M., MM., M^{rs}	Monsieur, Messieurs
ms.	manuscrit, manuscrits
n.	note
n°	numéro
p.	page(s)
r°	recto
Sect.	Section
t.	tome(s)
trad.	traduction
v°	verso
vol.	volume(s)

Titres d'ouvrages et de périodiques

Réflexions sur la cause générale des Vents	J. D'Alembert, *Réflexions sur la cause générale des vents. Pièce qui a remporté le prix proposé par l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Prusse pour l'année 1746*, David l'aîné, Paris, 1747.
Encyclopédie	*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des*

	sciences des arts et des métiers (Diderot et D'Alembert éd.)
Essai sur la résistance des fluides	J. D'Alembert, *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, David l'aîné, Paris, 1752.
HAB	*Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres* (Berlin)
HARS	*Histoire de l'Académie royale des sciences* (Paris), partie « Histoire »
Hydraulique	J. Bernoulli, *Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure, mechanicis, Johannis Bernoulli Opera Omnia* (4), p. 387-493, 1743.
Hydrodynamique	D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive De Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, Strasbourg, 1738.
MARS	*Histoire de l'Académie royale des sciences* (Paris), partie « Mémoires »
Mélanges de Turin	*Miscellanea Taurinensia*
Mémoires de Petersbourg	*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*
« Mémoire sur l'écoulement »	J. C. Borda, « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases », *MARS* année 1766 (1769), Paris, p. 579-607
NMAB	*Nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*
Opera Omnia	L. Euler, *Leohnardi Euleri Opera Omnia*, séries I-IV.
Opuscules t. I (à VIII)	J. D'Alembert, *Opuscules mathématiques*, t. I (à VIII)
RMAS	*Registres [manuscrits] de l'Académie royale des sciences* (Paris)
Traité des fluides	J. D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des Fluides, pour servir de suite au Traité de Dynamique*, éd. non précisée.

Introduction

Le contexte : l'édition des Œuvres Complètes *de D'Alembert*

Ce travail s'inscrit d'abord, et avant tout, dans le cadre de l'édition des *Œuvres complètes* de D'Alembert (1717-1783).

Ce projet ambitieux, remontant au début des années 1990, vise à établir une édition de référence, fiable, complète, critique et commentée, de ce grand personnage du XVIII^{e} siècle. Une telle édition existe déjà pour Newton, elle est en cours pour les Bernoulli, Euler et Leibniz, prise en charge par des équipes de recherche suisses et allemandes[7]. Elle manque cependant pour D'Alembert, dont les travaux scientifiques n'ont par exemple jamais été édités, si ce n'est sous la forme de reprints des éditions originales de quelques uns de ses premiers traités. Un groupe d'édition, le Groupe D'Alembert, s'est donc constitué il y a maintenant une quinzaine d'années afin de mener à bien cette entreprise. Composé d'historiens des sciences, de mathématiciens, astronomes, physiciens, philosophes, économistes, dix-huitiémistes, etc., ce groupe de recherche pluridisciplinaire s'est d'abord consacré à l'établissement d'une bibliographie des œuvres imprimées, d'un inventaire le plus exhaustif possible de ses manuscrits et de sa correspondance[8], au dépouillement de la presse d'époque, etc, puis à la définition de la structure proprement dite de l'édition. De ces travaux préparatoires, il résulte un plan chronologico-thématique en cinq séries. Les I^{e} et III^{e} regroupent respectivement les traités et mémoires mathématiques du savant pour les périodes 1736-1756 et 1757-1783. La II^{e} rassemble l'intégralité des ses contributions à l'*Encyclopédie*, dont il fut co-directeur avec Diderot, et dont il rédigea le « Discours préliminaire » et environ 1700 articles essentiellement de nature scientifique. La IV^{e} renferme ses écrits littéraires, historiques et philosophiques, la V^{e} l'ensemble de sa correspondance active et passive, soit environ 2200 lettres. Chacun des volumes composant ces cinq séries est par ailleurs placé sous

[7] Les *Œuvres complètes* de Lagrange et Laplace existent également mais ne correspondent pas à des éditions critiques et commentées. Elles ont été publiées à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècles, et répondent, de ce fait, à des exigences éditoriales différentes des nôtres.

[8] Ces travaux ont été facilités par la thèse de Doctorat de G. Maheu, *La vie et l'Œuvre de Jean D'Alembert. Etude bio-bibliographique*, Paris, Ecole pratique des hautes études (VI^{e} section), 1967 et par le travail de J. Pappas sur l'inventaire de la correspondance : J. Pappas, « Inventaire de la correspondance de d'Alembert », *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 245, 1986, p. 131-276.

la direction d'un ou plusieurs chercheurs.

L'entreprise est à présent entrée dans la phase de publication des volumes (chez CNRS Editions). Deux des volumes de la série I, le I/6, *Premiers textes de mécanique céleste 1747-1749*, sous la direction de M. Chapront-Touzé, et le I/7, *Précession et nutation 1749-1752*, sous la direction de M. Chapront-Touzé et J. Souchay, sont respectivement parus en novembre 2002 et octobre 2006. Le volume I/4a de la même série, *Textes de mathématiques pures 1745-1752*, sous la direction de C. Gilain, doit sortir à l'automne prochain.

Nous avons commencé à travailler avec le Groupe D'Alembert à l'été 2002, à l'occasion d'un stage prévu dans le cadre de notre formation à l'Ecole Centrale de Lyon. Ce stage portait sur le développement d'un site Internet dédié à la présentation du projet sur le web. Il fut encadré par P. Crépel, historien des mathématiques à l'Institut Camille Jordan, qui nous fit non seulement découvrir l'univers dalembertien et l'entreprise d'édition de ses œuvres complètes, mais nous révéla également notre goût pour l'histoire des sciences, nous incitant, par là-même, à suivre le DEA proposé dans ce domaine par les Université Lyon 1 et Montpellier 2 en même temps que nous terminions notre dernière année de spécialisation en mathématiques à l'Ecole Centrale. Notre première expérience de recherche fut réalisée dans ce cadre et sous la direction de M. Massot, mathématicien à l'Institut Camille Jordan. Elle déboucha sur la rédaction, à l'été 2003, d'un mémoire intitulé « D'Alembert et la conservation des forces vives en hydrodynamique ». Nous y avons examiné l'un des treize paragraphes constituant le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780), un écrit imposant d'environ deux cent pages, méconnu des historiens, mais pouvant néanmoins être considéré comme le quatrième et dernier traité de D'Alembert dans cette discipline. Le travail entamé sur ce texte, et le plaisir que nous y avons pris nous ont finalement décidé à poursuivre son étude, dans le cadre d'une thèse co-encadrée par P. Crépel et M. Massot.

Nous avons bénéficié, pour ce faire, d'une Bourse Docteur Ingénieur prise en charge pour moitié par le département « Mathématiques Physique Planète et Univers » et pour moitié par le département « Sciences de l'Homme et de la Société » du CNRS. Ce financement nous a permis de réaliser un travail quelque peu singulier, comprenant deux aspects de nature très différente. Le premier correspond à un sujet de thèse en histoire des sciences portant sur le Mémoire 57, et plus généralement, sur l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique pour la période 1766-1783. Le second, plus technique, relève du domaine de l'ingénierie informatique.

Ce double-versant, a priori surprenant, ne doit sa cohérence qu'à son contexte de réalisation : l'édition des *Œuvres complètes* du savant. Le Groupe D'Alembert envisage effectivement, depuis plusieurs années, une édition à double support, imprimé et électronique. Si l'imprimé offre un confort de lecture et une qualité encore inaccessibles aux supports informatiques, le format électronique apporte, quant à lui, de nouvelles possibilités passant notamment par la mise en place de moteurs de recherche ainsi que par l'exploitation des capacités de navigation hypertextuelle et d'affichage simultané de plusieurs documents. Ces avantages, l'essor actuel des nouvelles technologies ainsi que la multiplication de ce type d'initiatives éditoriales ont conduit le Groupe à créer un site Internet dans le courant de l'année 2001. Notre stage de 2002 nous avait permis de prendre la relève et d'enrichir son contenu[9]. L'idée d'une contribution conséquente dans ce domaine s'est donc logiquement imposée au moment de la définition de notre sujet de thèse.

Cette contribution a pris plusieurs formes. Nos compétences dans le domaine des nouvelles technologies nous ont tout d'abord permis de développer un certain nombre d'outils électroniques sur le site D'Alembert. Nous avons en particulier mis au point la base de données de l'inventaire de la correspondance et du moteur de recherche adéquat, en collaboration avec I. Passeron et F. Prin. Nous avons créé un outil du même type pour les rapports de D'Alembert à l'Académie royale des sciences de Paris, en collaboration avec P. Crépel, M. Jacob et I. Passeron, procédé à la mise en ligne d'un grand nombre de documents bio-bibiliographiques sur D'Alembert et ses contemporains, à l'ouverture d'une rubrique protégée et contenant des outils éditoriaux réservés aux membres du Groupe, etc. Si elles ont ainsi permis la création d'une plateforme dalembertienne sur le web, et l'émergence de premiers prototypes, ces réalisations ont également cristallisé notre attention sur le principal enjeu du problème : les solutions offertes par l'informatique supposent une nouvelle façon de penser l'édition. Les difficultés, de ce point de vue, sont de plusieurs ordres.

La nature diverse des sources composant l'œuvre de D'Alembert, à savoir des textes imprimés et manuscrits, de nature scientifique, encyclopédique, philosophique, littéraire, sans oublier la correspondance de l'auteur, les documents et notices annexes, nécessitent tout d'abord la mise en place de différents types de présentations éditoriales, distinctes de celles définies pour la version « papier ». L'inclusion de l'appareil critique au sein de l'édition électronique du corpus pose d'autre part les questions de son intégration au sein des bases de données, et de sa mise en regard avec le texte auquel il se rapporte. La méthode retenue pour l'affichage des textes à l'écran doit par exemple permettre la consultation simultanée d'un manuscrit ou d'un imprimé, de sa transcription, des variantes de texte, des notes de l'éditeur éclairant son contenu, et des autres informations associées à la description du document visionné (la source, la datation, les liens avec d'autres éléments du corpus ou avec des écrits d'autres auteurs, etc.). La gestion électronique des formules mathématiques constitue également un problème technique délicat, compte tenu du manque persistant d'efficacité et de maniabilité, du point de vue éditorial, des solutions logicielles actuellement disponibles. Le moteur de recherche mis en place doit enfin permettre d'interroger transversalement le corpus (par domaines, par matières, par thèmes et par auteurs), ce qui nécessite non seulement la définition et l'intégration de mots-clé au sein des bases de données, mais aussi la prise en compte

[9] Le site est consultable à l'adresse suivante : http ://dalembert.univ-lyon1.fr

des variantes ortographiques, si courantes à cette époque, ainsi que des nombreuses allusions de D'Alembert à d'autres œuvres ou d'autres auteurs.

Nous avons, au cours de ces trois dernières années, mené un travail de réflexion sur ces différents versants du problème, procédé à des tests, des comparatifs, et confronté nos idées avec les options choisies par d'autres équipes en charge de projets similaires. La nécessité d'en discuter collectivement et d'envisager des collaborations en la matière nous a notamment conduit à organiser une table ronde intitulée « L'édition électronique d'œuvres complètes », dans le cadre du XII^e Congrès International des Lumières, à Montpellier, le 13 juillet 2007.

Notre sujet de recherche en histoire des sciences, l'étude des travaux de D'Alembert en hydrodynamique au cours de la période 1766-1783, visait, quant à lui, à contribuer à la préparation de l'édition « papier ». Le Mémoire 57 forme en effet près des deux tiers du t. VIII des *Opuscules Mathématiques* (1780). Le volume III/8 qui lui correspond a donc été placé sous notre direction.

Outre le présent volume de thèse, notre travail de recherche sur ce mémoire nous a, de ce fait, conduit à procéder à son édition critique et commentée selon les normes fixées par le Groupe D'Alembert. Cela implique d'abord la mise en place d'un appareil d'annotations sur le texte original, visant à détailler ou corriger certains calculs difficiles ou erronés, à éclairer les passages susceptibles de paraître obscurs pour un lecteur moderne, à déchiffrer les nombreuses allusions de D'Alembert aux travaux de ses contemporains. Il nous a également fallu dresser la liste des corrections et des variantes entre l'édition originale imprimée et le manuscrit dont nous disposons, à savoir les f. 240 r° à 487 v° du Ms 1788 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris)[10]. Nous avons enfin établi une table analytique de l'ensemble du texte, et rédigé une présentation du mémoire, visant à en donner une vue d'ensemble, à en expliciter les enjeux scientifiques, le contexte historique ainsi que la réception par la communauté savante de l'époque.

Nous avons par ailleurs été conduit à réaliser ce même travail d'édition critique et commentée pour deux autres écrits de D'Alembert en hydrodynamique : le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), en collaboration avec A. Coste, et le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773). Le premier correspond à une contribution à la préparation du volume III/1, co-dirigé par P. Crépel, G. Jouve et nous-même, et dont la parution chez CNRS Editions est prévue pour la fin 2008. Le second fera partie du volume III/6 de l'édition. Le volume III/8 devrait, quant à lui, être publié dans le courant de l'année 2010[11].

---

[10] Ce manuscrit correspond à la version autographe, remise à l'imprimeur, de la seconde moitié du douzième et de l'intégralité du dernier des treize paragraphes que compte le Mémoire 57, ainsi que de l'ensemble des appendices qui lui sont relatifs.

[11] Outre le Mémoire 57, le t. VIII des *Opuscules* contient en fait deux autres mémoires, le 56 et le 58, formés de paragraphes portant sur des sujets aussi divers que la mécanique céleste, l'équilibre des fluides, les mathématiques pures, les probabilités, et nécessitant, par là-même, l'implication de nombreux autres chercheurs du Groupe D'Alembert spécialisés dans l'histoire de ces disciplines.

Parallèlement, mais de façon non disjointe de ce travail sur l'édition critique et commentée des Mémoires 4, 51 § IV, et 57, nous nous sommes par ailleurs consacrés à notre sujet de recherche : l'examen de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique dans la période 1766-1783. Le fruit de ces recherches, présenté de ce volume, répond à une problématique précise, dont il convient désormais de décrire le processus de définition. Nous commencerons, pour ce faire, par présenter les textes sur lesquels porte notre étude.

Présentation du corpus de recherche

Les années 1766-1783 correspondent à une étape de l'histoire de l'hydrodynamique au XVIII^e siècle encore peu étudiée. La discipline vit pourtant là une phase de polémiques et de vifs affrontements entre deux communautés d'hydrodynamiciens, celle des géomètres, et celle des ingénieurs, toutes deux obnubilées par la nécessité d'accorder les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience, car conscientes du besoin de faire progresser le versant pratique et appliqué de cette science. Cette phase prend les traits d'une crise, la « crise de l'hydrodynamique des années 1770 », notamment marquée, en France, par une violente querelle entre l'un des grands acteurs du développement théorique de la discipline, D'Alembert, et l'un des principaux initiateurs d'un renouveau expérimental, Jean-Charles Borda. La lecture, par ce dernier, de son « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices de vases »[12] à l'Académie des sciences de Paris les 5, 15 et 19 mars 1766 en constitue l'élément déclencheur. Le savant y dénonce les fondements de deux des premières théories des écoulements, l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli (1738)[13] et le *Traité des fluides* de D'Alembert (1744).

Ces deux ouvrages renvoient à une première approche théorique de la discipline, dite « du parallélisme des tranches ». C'est là le nom de l'hypothèse introduite dans l'*Hydrodynamique*. Cette hypothèse permet la mise en équation des écoulements en fonction d'une seule variable d'espace, et conduit donc à des équations différentielles ordinaires que les savants savent alors résoudre. Elle constitue non seulement le cadre d'étude de D. Bernoulli mais aussi celui de Jean Bernoulli dans son *Hydraulique* (1742), de Maclaurin dans le *Treatise of Fluxions* (1742), de D'Alembert dans son *Traité des fluides* et d'Euler dans certains de ses premiers écrits en la matière. La seconde approche, dite « analytique », consiste en l'étude d'un écoulement suivant plusieurs dimensions, une étude mathématiquement fondée sur l'application d'un outil tout juste découvert, le calcul aux dérivées partielles. D'Alembert la met en place dans sa *Cause générale des*

[12] *MARS* année 1766 (1769), p. 579-607. Nous emploierons, par la suite, l'abréviation « Mémoire sur l'écoulement » pour désigner cet écrit.

[13] Le Groupe d'édition des Bernoulli a récemment édité le cinquième volume des œuvres de D. Bernoulli : *Die Werke von Daniel Bernoulli*, vol. 5, Hydrodynamik II, G.K. Mickhailov (dir.), Birkhäuser, 2002. Ce dernier rassemble plusieurs de ses écrits sur le mouvement des fluides, dont la version latine originale de l'*Hydrodynamique*. L'ensemble est annoté et introduit par G.K. Mickhailov.

vents (1747), puis l'applique au problème de la résistance des fluides dans une pièce manuscrite de 1749 correspondant à une version préliminaire de son *Essai sur la résistance des fluides* (1752). Cette approche est ensuite développée par Euler dans une série de mémoires dont le plus célèbre, intitulé « Principes généraux du mouvement des fluides » (publié dans l'*Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin* pour l'année 1755) contient, comme l'on sait, les *équations d'Euler* pour un fluide idéal.

Née avec la parution de l'ouvrage de D. Bernoulli en 1738, la science visant à la mise en équation du mouvement des fluides dans les vases et les canaux, l'hydrodynamique, bénéficie donc, quelques dix-sept ans plus tard, d'équations aux dérivées partielles fort générales. Cet indéniable succès théorique de l'approche analytique n'apportera malheureusement pas les progrès escomptés. Les savants ne parviennent effectivement pas à résoudre les équations obtenues. Ils ne disposent donc pas de solutions théoriques permettant une confrontation avec les quelques résultats expérimentaux disponibles. Le bilan de l'approche du parallélisme des tranches est, quant à lui, tout aussi mitigé. Si l'hypothèse employée dans ce cadre permet de parvenir à des valeurs théoriques exploitables, ces dernières s'avèrent cependant trop éloignées des résultats expérimentaux disponibles. En procédant au développement de méthodes de mise en équation générale des écoulements, les quatre grands artisans de cette période, D. Bernoulli, J. Bernoulli, D'Alembert et Euler auront donc, bien malgré eux, mené la science vers un degré de perfectionnement tel qu'il se creuse un gouffre entre théorie et expérience.

C'est cet écart que Borda tente de combler dans son « Mémoire sur l'écoulement ». Le savant procède, pour ce faire, à une sévère remise en cause de la première des deux approches, telle qu'elle se trouve développée dans l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli et le *Traité des fluides* de D'Alembert. Il s'agit d'abord, selon lui, de faire évoluer l'hypothèse du parallélisme des tranches employée par ses deux prédécesseurs vers une approximation plus conforme aux trajectoires réelles d'un fluide en mouvement. Il propose, pour ce faire, de considérer l'écoulement à l'intérieur d'un vase percé d'un orifice en son fond comme s'opérant à l'intérieur de tuyaux curviligines infiniment étroits reliant les surfaces supérieure et inférieure du fluide, ce qui reviendrait, en termes actuels, à définir des *tubes de courant stationnaires*. Il ne s'en tient cependant pas là, mais s'attaque également aux principes mécaniques fondant chacun des deux ouvrages, à savoir le principe de conservation des forces vives dans l'*Hydrodynamique* et ce que nous appelons aujourd'hui le *principe de D'Alembert* dans le *Traité des fluides*. Ces deux principes, explique-t-il, ne peuvent être appliqués sans restriction dans un certain nombre de problèmes. Une perte de forces vives (c'est-à-dire d'*énergie cinétique*, en termes modernes), dont il estime la valeur théorique par analogie avec un choc entre deux corps parfaitement durs, doit être prise en compte. Borda a ainsi l'intuition d'un phénomène aujourd'hui connu sous le nom de *pertes de charges singulières*. Il parvient aussi, c'est là sa seconde principale découverte dans ce mémoire, à évaluer par le calcul la valeur du coefficient de contraction de la veine pour un ajutage rentrant. Ces deux derniers aspects se trouvent enfin vérifiés par plusieurs expériences illustrant à la fois son savoir-faire et la complémentarité théorique et pratique de sa démarche.

La lecture de ce mémoire devant l'Académie des sciences en 1766 puis sa publication en 1769 dans les volume des *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour l'année 1766 marquent le début de la crise précédemment évoquée, ce que R. Hahn appelle « l'étape du retour vers le concret » dans une conférence de 1964 portant sur l'évolution des rapports entre l'hydrodynamique théorique et l'hydrodynamique expérimentale dans le courant du XVIII^e siècle[14]. Cet historien est l'un des seuls, à notre connaissance, à s'être penché sur la crise de l'hydrodynamique des années 1770 et sur ses origines. Il n'évoque malheureusement pas le rôle crucial de cette pièce de Borda, encore moins celui que D'Alembert s'apprête à jouer. Certains autres historiens de la discipline, R. Dugas, H. Rouse et S. Ince, et J. S. Calero[15] s'étendent, a contrario, très largement sur l'intérêt scientifique et expérimental du « Mémoire sur l'écoulement », sans pourtant jamais faire mention de la crise qu'elle va déclencher.

Deux récentes études permettent partiellement de rémédier à ce manque. Dans la première[16], P. Crépel procède à la datation d'une lettre de Borda à Condorcet en établissant une chronologie fine des évènements entourant sa rédaction. Il montre, ce faisant, que la dite lettre remonte en fait au mois de février 1771, qu'elle contient un résumé des points d'une polémique scientifique consécutive à la publication du « Mémoire sur l'écoulement », que cette polémique implique directement Borda d'un côté et D'Alembert, Condorcet et Bossut de l'autre, ce dernier venant alors de faire paraître son *Traité élementaire d'hydrodynamique*, un ouvrage en deux tomes dédiés, pour l'un, à l'étude théorique et, pour l'autre, à l'étude expérimentale des écoulements. La seconde étude, due à A. Coste et M. Massot[17], consiste en la mise en perspective historique et scientifique des derniers écrits de D'Alembert en hydrodynamique. A la lumière de la correspondance de D'Alembert avec Lagrange, les deux auteurs montrent que la seconde édition de son *Traité des fluides*, publiée en 1770, renferme une première réponse du savant aux attaques de Borda, que le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) contient une nouvelle méthode de mise en équation des écoulements selon une seule dimension d'espace devant être considérée comme un second élément de réponse, et que ce même mémoire, d'une petite dizaine de pages, constitue une version préliminaire d'un travail

[14] R. Hahn, « L'Hydrodynamique au XVIII^e siècle - Aspects scientifiques et sociologiques », *Actes de la Conférence donnée au Palais de la Découverte*, Paris, le 7 novembre 1964.

[15] R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, 1950, p. 292-295 ; H. Rouse et S. Ince, *History of hydraulics*, 1963, p. 125-126 ; J. S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, 1996, p. 481-489.

[16] P. Crépel, « Une curieuse lettre de Borda à Condorcet et un non moins curieux article du *Journal encyclopédique* », *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences. Guide de recherches*, E. Brian et C. Demeulenaere-Douyère (dir.), Paris, Tec & Soc, 1996, p. 325-337.

[17] A. Coste, M. Massot, « La notion de fluide chez D'Alembert à la lumière des *Opuscules mathématiques* et la correspondance », *Sciences, musiques, Lumières : Mélanges offerts à Anne-Marie Chouillet*, Centre international d'études du XVIII^e siècle, 2002, p. 83-91.

beaucoup plus important, le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780), très largement centré sur la réfutation des différents aspects de la théorie du « Mémoire sur l'écoulement ». Ces deux études correspondent au point de départ de notre sujet de recherche. Elles nous ont permis de définir notre corpus, la seconde édition du *Traité des fluides*, le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 de D'Alembert, son cadre d'étude historique direct, la crise de l'hydrodynamique des années 1770, et son contexte scientifique immédiat, la polémique avec Borda.

Cette polémique constitue, de ce fait, une première clé pour aborder ces trois textes. Mais dégager les différents éléments de réponses afin de les comparer aux multiples facettes du « Mémoire sur l'écoulement » n'est cependant pas chose facile. La raison en est simple : D'Alembert ne mentionne jamais Borda de façon explicite. Notre premier travail a donc consisté dans le déchiffrage des nombreuses allusions et sous-entendus du savant. Nous nous sommes fréquemment appuyés, pour ce faire, sur le résumé des points de la polémique contenu dans la lettre de Borda à Condorcet de février 1771, ainsi que sur la correspondance entre D'Alembert et Lagrange. Le résultat montre que les trois textes possèdent une certaine articulation de ce point de vue. La seconde édition du *Traité des fluides* contient ainsi les premiers éléments de réponse du savant — sous forme d'additions au contenu de la première édition de l'ouvrage —, mais aussi de nouvelles pistes de recherche et la présentation d'une stratégie de riposte plus vaste aux idées avancées par Borda. L'un de ces axes de riposte est développé dans le Mémoire 51 § IV ; il consiste à supposer que la forme des tuyaux curvilignes définis par Borda puisse varier au cours du temps. Le reste de sa stratégie de réponse forme une large part du Mémoire 57. Comme tout texte des *Opuscules*, ce dernier s'avère cependant difficile d'accès. Le cheminement des travaux n'y est jamais explicité, ni même annoncé, le style est décousu, les notations sont instables, les calculs souvent erronés, abandonnés sans un mot pour de nouveaux sujets de réflexion : sur un texte de deux cent vingt pages environ, pourtant divisé en treize paragraphes, la difficulté tourne parfois au cauchemar. Le déchiffrage des allusions nous a toutefois permis de dépasser cet obstacle. C'est pour ainsi dire grâce à lui que nous sommes parvenus à dégager la structure du texte.

D'un point de vue scientifique, le Mémoire 57 ne se focalise néanmoins pas uniquement sur les aspects théoriques abordés dans le « Mémoire sur l'écoulement ». D'Alembert consacre une partie de l'ouvrage à la continuation des recherches analytiques entamées dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, puis développées dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), ainsi que dans les Mémoires 31, 32 § II et 33 des *Opuscules* t. V (1768). Il revient aussi sur le célèbre paradoxe, aujourd'hui connu sous le nom de *Paradoxe de D'Alembert*, et dont il donnait l'énoncé dans le Mémoire 34 § I des *Opuscules* t. V.

D'une manière générale, qu'ils soient ou non liés avec sa polémique avec Borda, l'ensemble des sujets traités dans ses précédentes recherches sont ici de nouveau abordés. Ils le sont, qui plus est, dans un état d'esprit un peu différent. Visiblement poussé dans ses derniers retranchements, D'Alembert est conduit à de nouvelles réflexions qui ne contiennent pas de découvertes notables, mais témoignent d'un réel approfondissement de sa part sur des sujets aussi fondamentaux que la crédibilité de l'hypothèse du parallélisme des tranches, la bonne façon de parvenir à une représentation théorique fidèle, et conforme à l'expérience, des trajectoires réelles d'un fluide s'écoulant dans un vase. D'Alembert y explicite également des concepts dont la lecture de ses travaux précédents offre souvent une vision incomplète : nous pensons aux notions de « ténacité et d'adhérence des particules fluide », de « premiers instants de l'écoulement », au statut de la loi leibnizienne de continuité, ou à sa définition de la pression d'un fluide en mouvement.

Le Mémoire 57 peut, pour ces différentes raisons, être considéré comme le quatrième et dernier traité de D'Alembert en hydrodynamique. Il correspond, avec les additions de la seconde édition du *Traité des fluides* et le Mémoire 51 § IV, à une quatrième phase de ses travaux en la matière, faisant suite à sa contribution à l'approche du parallélisme des tranches dans la première édition *Traité des fluides*, à l'approche analytique dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, à la tentative de résolution des EDP obtenues dans ce dernier ouvrage dans les t. I et V des *Opuscules*. C'est une phase influencée par son différend avec Borda, et donc particulièrement représentative de l'état et des difficultés inhérentes au développement de l'hydrodynamique à cette époque, une phase de réexploration de ses écrits antérieurs visant à en défendre le bien-fondé théorique et, dans une moindre mesure, la compatibilité avec l'expérience.

Il s'agit, pour finir, d'une terre quasimment vierge de toute étude. Mis à part l'article d'A. Coste et M. Massot précédemment signalé, le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 n'ont jamais été examinés par l'historiographie et ne sont mentionnés que par C. Truesdell qui se contente cependant, dans la seconde partie de sa célèbre introduction aux œuvres d'Euler en hydrodynamique[18], d'en évoquer l'existence. Parmi l'ensemble des études parues à ce jour dans ce domaine, qu'il s'agisse des travaux de M. Rühlmann, de R. Dugas, de H. Rouse et S. Ince, d'I. Szabò[19], ou des plus récentes contributions de J.S. Calero et O. Darrigol[20], C. Truesdell est par ailleurs le seul à avoir abordé — en plus de quelques uns des aspects de la correspondance entre D'Alembert et Lagrange dédiée à l'hydrodynamique — certains des textes de la troisième phase de son œuvre : le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I de façon partielle mais néanmoins détaillée, et les Mémoires 31, 32, 33 et 34 des *Opuscules* t. V de manière beaucoup plus lacunaire.

Cet état de fait s'explique d'abord par le manque de clarté et le style décousu des divers mémoires composant les huit tomes d'*Opuscules* publiés entre 1761 et 1780. Il

[18] C. Truesdell, « Editor's Introduction », *Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich, 1955, p. IX-CXVIII.

[19] M. Rühlmann, *Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper*, Hannover, Hahn, 1880 ; R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, 1950 ; H. Rouse, S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963 ; I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1977.

[20] J.S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, Madrid, UNED, 1996 ; O. Darrigol, *A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

faut ensuite rappeler que ces travaux succèdent au mémoire d'Euler de 1755, contenant les équations du même nom, et précèdent la publication de la *Mécanique analitique* de Lagrange (1788). Ces deux célèbres ouvrages ont probablement focalisé l'attention des historiens, les incitant, par là-même, à faire l'impasse sur la période intermédiaire et la crise que connaît la discipline dans le courant des années 1770. Cette lacune de l'historiographie vient également, selon nous, de l'appréciation portée sur la première phase des recherches de D'Alembert. Le *Traité des fluides* est ainsi généralement considéré comme dénué de réelles nouveautés scientifiques au regard des théories de Daniel, Jean Bernoulli ou d'Euler : selon Truesdell, qui exprime là un avis partagé par I. Szabò[21], la méthode de mise en équation des écoulements de D'Alembert n'apporte « aucune contribution et n'a pas d'influence permanente en mécanique des fluides »[22]. L'ouvrage n'a cependant été que partiellement étudié — C. Truesdell n'y consacre qu'une vingtaine de lignes ! —, les historiens se contentant, pour la plupart, de donner un résumé de la méthode de mise en équation à partir de l'application du principe de D'Alembert, de faire voir comment le savant parvient, à partir de là, à démontrer le principe de conservation des forces vives fondant l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli, et de livrer quelques indications sur la définition du concept de pression dans l'ouvrage. Bien que les récents travaux de J. S. Calero et O. Darrigol en offrent une synthèse plus détaillée, le *Traité des fluides* reste encore mal connu : les liens entre cette première théorie des écoulements de D'Alembert et les traités de D. et J. Bernoulli n'ont par exemple, jamais été étudiés. L'*Essai sur la résistance des fluides* a, quant à lui, bénéficié d'un examen nettement plus approfondi, notamment par G. Grimberg[23]. L'idée consistant à introduire le calcul aux dérivées partielles en hydrodynamique, l'établissement, dit en termes modernes, de l'*équation de continuité* et de l'équation caractérisant un écoulement plan potentiel, ainsi que le développement d'une méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles (EDP) fondée sur la manipulation de fonctions de la variable complexe, lui sont dûment attribués, et considérés, avec les apports de la *Cause générale des vents* de 1747, comme ayant exercé une influence déterminante sur Euler.

En somme, la partie tardive de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique reste donc méconnue. La partie précédente, mieux étudiée, ne l'est que de façon imparfaite, l'*Essai sur la résistance des fluides* mis à part. Le premier intérêt du travail que nous proposons consistera dès lors à combler la lacune de l'historiographie sur la quatrième phase des écrits du savant, et plus généralement, sur la crise des années 1770. Les nouvelles recherches qu'elles contiennent, confrontées à celles de Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » permettront, de surcroît, d'éclairer quelques unes des nombreuses zones d'ombre de ses premiers ouvrages et d'aborder ses écrits des t. I et V des *Opus-*

[21] I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien*, 1977, p. 237-243.

[22] C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1754, p. XXXVII.

[23] G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

cules. Nous constaterons ainsi que beaucoup d'historiens n'ont souvent donné qu'une vision partielle, voire partiale, des textes qu'ils ont abordés et des concepts qu'ils y ont examinés.

Précisons, pour finir, que ce travail porte exclusivement sur la théorie du mouvement des fluides. Le problème de la résistance des fluides n'y est pas évoqué, ce qui exclut le § XIII du Mémoire 57, dédié au paradoxe dit *de D'Alembert*, de notre corpus d'étude.

Définition de la problématique et description de la démarche de recherche adoptée

Notre méthode de travail dans le cadre de cette thèse a essentiellement consisté en l'étude et la mise en perspective du corpus par rapport à l'ensemble de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique, par rapport à la crise des années 1770 et par rapport à celles des grands artisans de la contruction de la discipline au XVIII[e] siècle et au début du XIX[e] siècle.

Nous sommes généralement partis, pour ce faire, d'un des points de polémique opposant D'Alembert et Borda, nous avons analysé leurs arguments respectifs et tenté de saisir l'enjeu du débat. Nous avons alors procédé à un nouvel examen de la question dans les premiers écrits de D'Alembert, dans les articles correspondants de l'*Encyclopédie* et dans les travaux de ses contemporains — essentiellement ceux de Daniel Bernoulli, Jean Bernoulli, Euler et Lagrange —, cette dernière étape nous permettant de pointer une éventuelle évolution de sa pensée entre 1744 et 1780, un élément important, susceptible d'avoir échappé aux historiens de la discipline, et motivant donc un approfondissement ou une réinterprétation de notre part.

Notre premier travail de recherche sur la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) a porté sur le principe de conservation des forces vives et sur la réfutation, par D'Alembert, de la théorie de pertes de forces vives proposée par Borda. Il avait été entamé dans le cadre de notre Mémoire de DEA. Nous y sommes ensuite longuement revenus pendant la préparation de cette thèse. Nous nous sommes rapidement aperçus, ce faisant, que ce point de polémique entre les deux hommes renvoie à des différends, passés sous silence par l'historiographie, entre D'Alembert et D. Bernoulli dans la première édition du *Traité des fluides* (1744) et l'*Hydrodynamique* (1738), et que ces différends sont eux-mêmes directement liés aux querelles mécaniciennes de la fin du XVII[e] et de la première moitié du XVIII[e] sur les lois de la communication du mouvement, sur la nature de la matière solide et sur la définition du concept de force. Cette étude nous a par ailleurs directement conduit à l'examen de quelques-uns des principaux enjeux sous-jacents à la crise des années 1770. Compte tenu du fait que la définition des principes fondant les théories des écoulements à cette époque — y compris le principe de D'Alembert, préalablement énoncé dans le *Traité de dynamique* (1743) — a été effectuée dans le cadre de la mécanique des corps solides, il s'agit en effet, pour les savants, de préciser les conditions d'application de ces principes dans le cas d'un écoulement, c'est-à-dire de les adapter à l'étude d'une matière, le fluide, dotée d'un comportement et de propriétés fort différentes de celles caractérisant la matière solide. Borda propose ainsi la prise en compte et le calcul d'une perte de forces vives calqués sur le problème du choc encore corps durs (c'est-à-dire parfaitement indéformables et sans restitution d'énergie, pour employer les termes modernes). D'Alembert, quant à lui, réfute cette théorie au nom du respect de la loi leibnizienne de continuité, selon laquelle les mouvements, dans la nature, ne s'effectuent que par degrés insensibles. Les deux savants opposent, en d'autres termes, deux conceptions physiques d'un fluide en mouvement, et par conséquent, deux façons de définir les conditions d'application des principes sous-tendant leurs théories. Ils ont recours, pour ce faire, à des arguments hérités du processus de formalisation de la mécanique des corps solides.

Nous avons aussi, par le même biais, pu mettre en évidence une très probable, et non moins notable, influence de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli sur la théorie des écoulements de D'Alembert. Cette hypothèse, méritant d'être approfondie, nous a dès lors incité à réaliser une traduction française de l'édition originale de l'*Hydraulique*, en collaboration avec B. Bru. Nous avons effectué le même travail, toujours avec B. Bru, sur un mémoire latin d'Abraham Gotthelf Kaestner de 1769[24], mémoire signalé par D'Alembert lui-même dans le Mémoire 51 § IV et consistant en une défense précise et détaillée de la théorie de J. Bernoulli contre la dizaine de pages de remarques insérée par D'Alembert dans la première édition de son *Traité des fluides*. La mise en relation de ces trois sources est venue confirmer le bien-fondé de notre postulat de départ[25].

L'examen de la querelle sur la conservation des forces vives nous a par ailleurs conduit à l'étude d'un autre sujet important : la définition dalembertienne du concept de pression d'un fluide incompressible en mouvement. Ce second axe de recherche nous a initialement été suggéré par l'absence de prise en compte, par D'Alembert comme par Borda, du rôle local joué par le concept de pression interne dans le cas d'une conduite de section variable et par les éclaircissements éventuels que la mise en avant de cette « lacune » peut, *a posteriori*, apporter quant à la teneur de leurs discussions concernant l'éventuelle intégration d'une perte de forces vives dans certains types de problèmes.

Un examen de la définition du concept dans le *Traité des fluides* et dans l'*Essai sur la résistance des fluides* nous a d'abord montré, ce que plusieurs historiens avaient par ailleurs déjà souligné, que D'Alembert n'interprète pas explicitement la pression autrement que comme un effort surfacique s'exerçant sur les parois du vase contre lequel le fluide s'écoule — nous parlerons alors de *pression externe*, afin de la distinguer de la

[24] A. G. Kaestner, « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89.

[25] Cette étude est à l'origine d'un article « La *loi de continuité* de Jean Bernoulli à D'Alembert », à paraître dans le vol. XXVIII, fasc. 2, de la revue italienne *Bolletinno di storia delle scienze matematiche*.

pression qui s'exerce à l'intérieur du fluide, et que nous qualifierons donc d'*interne*[26]. Sachant qu'en 1749, et a fortiori en 1755, Euler définit et intégre quant à lui le concept de *pression interne* par le biais d'une approche reposant sur l'application de ce que nous appellerions aujourd'hui la seconde loi de Newton, il convenait dès lors d'expliquer la persistance de l'absence de cette notion dans l'ensemble des recherches de D'Alembert postérieures à 1755.

Cette question, C. Truesdell y répond, sans malheureusement étayer son propos, en affirmant que le savant « tente d'éviter l'utilisation de la force pour la dynamique d'un point matériel »[27]. O. Darrigol avance, quant à lui, l'idée plus précise selon laquelle l'apparente lacune de la théorie de D'Alembert dans ce domaine provient de « sa volonté générale de se passer des forces internes de contact dans sa dynamique »[28], une volonté d'ailleurs en cohérence avec l'usage de son principe de dynamique — c'est-à-dire le principe dit *de D'Alembert* —, lequel permet justement de faire fi ce ces forces. S'agit-il toutefois d'une démarche délibérée de D'Alembert, qui se débarrasserait donc sciemment de la notion de pression interne en appliquant son principe de dynamique à un volume de fluide considéré comme un système de corps exerçant des actions réciproques, ou d'une méthode employée sans qu'il ait véritablement conscience d'un concept dont le rôle à l'intérieur d'un écoulement échappe, en quelque sorte, à son sens physique ? Nous constaterons, grâce à un réexamen détaillé du problème dans le *Traité de dynamique* (1743) et le *Traité des fluides* (1744), à l'étude d'une question longuement abordée dans son œuvre et pourtant méconnue des historiens, le problème de la « séparation des fluides », et grâce aux approfondissements donnés par le savant dans le Mémoire 57, que, de ces deux options, la première l'emporte sur l'autre.

Nous nous sommes par ailleurs rendu compte que l'absence du concept de pression interne dans la seconde édition du *Traité des fluides* avait été, à l'occasion d'un commentaire critique de l'ouvrage datant de 1801[29], présentée — à tort — comme une erreur par l'hydrodynamicien Gaspard Marie Riche de Prony.

Nous avons, de manière générale, appliqué la même méthode de travail pour l'ensemble des autres points de polémique entre D'Alembert et Borda. Il nous est ainsi

[26] Ce terme de *pression interne* renvoie au concept moderne de pression. Il est couramment employé par C. Truesdell et O. Darrigol dans leurs études respectives sur l'histoire de l'hydrodynamique au XVIII[e] siècle afin d'opérer la distinction entre la définition de la pression par D. Bernoulli ou D'Alembert, et celle d'Euler dans ses propres recherches. Nous l'adoptons ici pour la même raison, en lui opposant le terme de *pression externe*.

[27] C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXXVII.

[28] O. Darrigol, *Worlds of Flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 15.

[29] G. Prony, « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horisontal ; avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problême, dans son Traité des Fluides », *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1803*, t. 18, pièce n° 47, Paris, 1801. Cet écrit est consultable en annexe.

apparu que leurs sujets de discorde portent essentiellement sur deux autres questions : les limites de validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches et la détermination théorique de la vitesse d'un fluide s'échappant d'un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond.

La première joue un rôle central dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770 : il s'agit d'évaluer la crédibilité de l'hypothèse du parallélisme et de la faire évoluer. Borda propose, en ce sens, une nouvelle approximation permettant, comme la précédente, de traiter un écoulement selon une seule dimension spatiale, et consistant à supposer que le mouvement du fluide s'opère à l'intérieur de tuyaux curvilignes infiniments étroits. Cette représentation théorique, revenant à définir des tubes de courant stationnaires, est considérée par certains historiens[30] comme l'une des grandes découvertes du « Mémoire sur l'écoulement ». Nous nous sommes néanmoins aperçus, suite à une revendication de priorité de D'Alembert dans l'appendice complétant le Mémoire 51 § IV, que de tels tuyaux curvilignes apparaissent déjà dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761). Leur définition s'inscrit, de surcroît, dans le cadre de l'approche analytique.

La tentative de résolution des EDP de l'*Essai sur la résistance des fluides* dans cet écrit conduit en fait le savant à une expression générale des filets de fluide faisant intervenir une fonction de deux variables à déterminer. La détermination de cette fonction constitue cependant un problème mathématique inextricable pour D'Alembert, qui l'incitera à développer deux angles d'approche dans ses futures recherches : une tentative de résolution générale visant à parvenir à une solution analytique, c'est-à-dire formée d'une combinaison de fonctions usuelles, et la recherche d'une voie intermédiaire, revenant à se restreindre à une étude unidimensionnelle de l'écoulement à l'intérieur de canaux curvilignes définis par des paires successives de filets de fluide infiniment proches. Le premier de ces angles d'approche forme l'essentiel de ses travaux dans les Mémoires 31 et 33 des *Opuscules* t. V, ainsi que la partie du Mémoire 57 dédiée à la continuation de ses recherches dans le cadre d'une approche analytique des écoulements. Le second met en lumière le Mémoire 4 comme un texte de transition dans l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique, à partir duquel le géomètre tente de faire progresser l'approche unidimensionnelle en s'appuyant sur les outils mathématiques et les résultats obtenus dans le cadre de l'approche analytique : la définition de tuyaux curvilignes dont la figure varie en fonction du temps dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 constitue donc non seulement une réponse à l'approximation proposée par Borda, mais également un prolongement de l'approche intermédiaire initiée en 1761.

Ce constat nous a d'abord poussé à travailler sur l'édition critique et commentée du Mémoire 4 en vue de la publication du volume III/1 des *Œuvres complètes*. Il nous a, d'autre part, engagé à définir deux axes de recherche pour aborder la question de l'hypothèse des tuyaux curvilignes dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57.

Le premier relève de l'histoire des mathématiques, et plus précisément encore, de

[30] Voir notamment H. Rouse, S. Ince, *History of hydraulics*, 1963, p. 125.

l'histoire de la théorie des EDP au XVIII^{e} siècle. Afin d'être en mesure de comprendre les travaux de D'Alembert dans le t. VIII des *Opuscules*, il nous a effectivement semblé nécessaire de procéder à l'étude du contexte mathématique ayant conduit à leur émergence, à savoir la démarche de résolution adoptée par le savant face à un problème physico-mathématique faisant intervenir des EDP.

D'Alembert est aujourd'hui reconnu comme le fondateur de la théorie des EDP, ainsi que le prouvent les études de S. Engelsman, S. Demidov, J. Lützen et C. Houzel[31], portant sur la première phase de ses contributions dans ce domaine, c'est-à-dire la période 1743-1760. La résolution des EDP obtenues dans les huit tomes d'*Opuscules* avait cependant encore été peu examinée. Nous avons dès lors décidé de travailler, avec G. Jouve[32], sur un examen le plus large possible du sujet, en procédant à une étude croisée de la démarche de résolution de D'Alembert pour le problème de l'écoulement des fluides et la question des cordes vibrantes dans la période 1761-1783. Nous avons préalablement établi un inventaire exhaustif des EDP dans l'ensemble de son œuvre scientifique. Nous nous sommes ensuite attachés à caractériser cette démarche, ainsi que la notion de solution qui en découle, ce qui passe notamment par un comparatif entre les notions de conditions aux limites, d'existence et d'unicité de la solution telles que les mathématiciens du XIX^{e} et XX^{e} siècles les envisagent dans ce type de problème, et leurs possibles équivalents dans l'œuvre de D'Alembert. Nous avons enfin reconsidéré sa position et l'évolution de sa pensée dans la polémique l'opposant à Euler sur la question des fonctions arbitraires, une question dont nous avons notamment observé des résurgences dans le Mémoire 57. Cette étude est à l'origine d'un article, intitulé « La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opuscules mathématiques* de D'Alembert (1761-1783) »[33]. Elle nous aura, dans le même temps, permis d'examiner la troisième phase de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique et de préciser son articulation avec le Mémoire 57.

Notre second axe de recherche sur l'évolution de l'approche unidimensionnelle dans le cadre de la crise des années 1770 a, quant à lui, essentiellement consisté en une comparaison physique des trois hypothèses, celle du parallélisme, celle des tuyaux cur-

[31] S. Engelsman, « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, p. 27-37 ; S. Demidov, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° XXXV/1, 1982, p. 3-42 ; S. Demidov, « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Paris, 1989, p. 333-350 ; J. Lützen, « Partial differential equations », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, éd. par I. Grattan-Guiness, London, Routledge, 1994, p. 452-469 ; C. Houzel, « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'Université de Laval, 2003, p. 237-258.

[32] G. Jouve, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783) – Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1, 2007.

[33] Cet article devrait paraître dans la revue d'*Histoire des mathématiques*.

vilignes « stationnaires » et celle des tuyaux curvilignes de figure variable. Nous en avons étudié les diverses facettes, en particulier les rapports qu'elles entretiennent avec la variable temporelle, en tentant de montrer comment D'Alembert et Borda espérent pouvoir assurer, grâce à elles, une meilleure compatibilité entre la théorie et les résultats expérimentaux dont ils disposent.

Cet effort de conciliation entre la théorie et l'expérience passe notamment, chez les deux savants, par l'étude du mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. C'est un problème pour lequel ils disposent d'un résultat expérimental « de référence » relatif à la vitesse de sortie du fluide, et qui leur permet donc de tester l'efficacité des trois hypothèses. Ces dernières les conduisent cependant à des résultats contradictoires, et, par là-même, à d'intenses discussions sur le sujet dans le « Mémoire sur l'écoulement » et le Mémoire 57. Confronté à ce qui ressemble fort à une nouvelle impasse théorique, D'Alembert propose deux sauf-conduits. Le premier consiste à étudier le problème aux « premiers instants » de l'écoulement, ce que nous appellerions aujourd'hui la *phase transitoire* du mouvement. Le second, déjà formulé dans la première édition du *Traité des fluides*, s'inspire à nouveau de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli. Il consiste en la définition d'une nouvelle hypothèse, intermédiaire, revenant à appliquer le parallélisme des tranches à l'intérieur d'un vase débarrassé des portions de fluide stagnantes apparaissant dans le fond du vase du fait de la courbure prise par les trajectoires du fluide afin de gagner l'orifice.

Ce problème du mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond correspond à notre quatrième et dernier axe de recherche. Il nous a permis de préciser certains concepts datant de la première phase de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique : la notion de « ténacité et d'adhérence des particules de fluide », apparemment oubliée par l'historiographie, nous a par exemple incité à procéder à un (prudent) comparatif avec le concept moderne de *viscosité*. Il nous a conduit à examiner les contributions de Borda et de D'Alembert pour ce qui concerne la question de la détermination du rapport de contraction de la veine, un rapport indispensable à la prédiction théorique du débit d'écoulement du fluide au sortir d'un vase percé d'un orifice. Nous nous sommes enfin aperçus que les expériences rapportées par Bossut dans son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* forment le support expérimental de D'Alembert dans le Mémoire 57.

Les conditions d'application du principe de conservation des forces vives et du principe de la dynamique au mouvement d'un fluide, le statut de la loi leibnizienne de continuité dans sa théorie des écoulements, la définition du concept de pression, la continuation de ses recherches analytiques, les outils mathématiques appliqués dans ce cadre, leurs implications sur ses recherches dans le cadre de l'approche unidimensionnelle, ses différentes façons de représenter l'écoulement dans un vase, la notion de phase transitoire de l'écoulement, celle d'adhérence et de ténacité des particules de fluide, le rôle de l'expérience dans ses travaux tardifs : ces différents aspects ont donc tous été étudiés dans le travail que nous proposons. Ils constituent un panorama des enjeux théoriques de la crise de l'hydrodynamique des années 1770 concernant le problème des écoulements dans les vases et les canaux. Ils nous ont conduit à une réexploration et une réinterpétation des premiers travaux de D'Alembert en la matière, à une mise en perspective de sa théorie vis-à-vis des contributions des autres grands artisans de la discipline au XVIII^e siècle, notamment D. Bernoulli, J. Bernoulli, Euler et Lagrange. Nous serons donc finalement en mesure de répondre à la problématique suivante :

> *En quoi la quatrième et dernière phase des recherches de D'Alembert en hydrodynamique permet-elle de préciser, de situer et de redessiner la carte des principes et concepts fondamentaux de sa théorie des écoulements incompressibles, tant du point physique que mathématique ?*

Les axes de recherches précédemment déclinés seront examinés dans l'ordre suivant : la démarche mathématique sous-tendant la définition des tuyaux curvilignes infiniment étroits, l'étude physique des origines et du statut de l'hypothèse correspondante, le problème de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond, le principe de conservation des forces vives et le statut de la loi leibnizienne de continuité, et le concept de pression. Ces cinq chapitres seront par ailleurs précédés par trois parties préliminaires. La première consistera en une présentation historique détaillée de la crise de l'hydrodynamique des années 1770 et des principales étapes du développement antérieur de la discipline. Nous donnerons, dans la seconde, un descriptif des principes et concepts fondateurs des deux premiers traités de D'Alembert, le *Traité des fluides* (1744) et l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752). La troisième renfermera un résumé précis du « Mémoire sur l'écoulement » de Borda ainsi qu'un tableau de mise en relation de l'écrit avec la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

Nous livrerons en conclusion une synthèse de notre travail, elle-même suivie par un épilogue dans lequel nous évoquerons la question de la pérénnité des travaux du savant et de leur réception par les hydrodynamiciens de la fin du XVIII^e et de la première moitié du XIX^e siècle.

Chapitre I. DE L'*HYDRODYNAMIQUE* DE D. BERNOULLI À LA CRISE DE L'HYDRODYNAMIQUE DES ANNÉES 1770 : PRÉSENTATION HISTORIQUE

1. L'approche du parallélisme des tranches

*L'*Hydrodynamique *de Daniel Bernoulli (1738)*

C'est à la publication de l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, en 1738[34], qu'il nous faut remonter pour parvenir à situer le contenu des recherches menées par D'Alembert dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

Avec la parution de cet ouvrage, la discipline visant à l'étude du mouvement des fluides, anciennement appelée « hydraulique », acquiert le statut de science et prend le nom d'« hydrodynamique ». D. Bernoulli y propose une première théorie générale des écoulements fondée sur un principe mécanique, le principe de conservation des forces vives, et sur une approximation, l'hypothèse du parallélisme des tranches. Cette hypothèse consiste à diviser un fluide s'écoulant dans un vase en tranches parallèles supposées animées par des vitesses homogènes, dirigées dans le sens de l'écoulement, et inversement proportionnelles à leurs sections respectives — cette dernière propriété assurant la conservation du débit dans le vase compte tenu du caractère incompressible du fluide étudié. Elle permet de ramener l'étude du mouvement à une seule dimension d'espace, la hauteur du fluide, et, par là-même, de parvenir à des équations différentielles ordinaires que les techniques de calcul de l'époque permettent de résoudre. Il sera donc possible, dans ce cadre, de comparer les valeurs théoriques tirées des équations aux nombreux résultats expérimentaux rapportés par D. Bernoulli à la fin de chacune des treize sections de l'ouvrage[35]. En ayant recours à cette hypothèse, ce dernier définit ainsi une première approche pour l'étude du mouvement des fluides dans les vases et les canaux : l'approche du parallélisme des tranches, c'est ainsi que nous l'appellerons par la suite.

[34] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive De Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, Strasbourg, 1738. Pour plus de détails sur l'ouvrage, voir G. K. Mikhaïlov, « Introduction to Daniel Bernoulli's Hydrodynamica », *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Hydrodynamique II, vol. V, Birkhäuser Verlag, Bâle, 2002 ; C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XXIII-XXXI ; J. S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, 1996, p. 411-447 ; O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 4-9.

[35] Ces expériences, D. Bernoulli les a réalisées avec Euler entre 1730 et 1733 durant leur séjour commun à Petersbourg.

La mise en équation proprement dite repose sur le principe de conservation des forces vives. Ce principe, D. Bernoulli l'emprunte à Huygens, qui en donne le premier énoncé dans la quatrième partie, consacrée à la recherche du centre d'oscillation d'un pendule composé, de son *Horologium oscillatorium* (1673)[36]. Confronté, dans ce problème, à l'examen de forces exercées par un trop grand nombre de corps pour espérer en venir à bout, Huygens contourna la difficulté en s'inspirant de la découverte de Galilée selon laquelle un corps perdant de l'altitude acquiert une vitesse équivalente à la hauteur de chute parcourue. Ceci lui permit de formuler le principe assurant « que lorsqu'un nombre quelconque de poids commencent à se mouvoir par leur propre gravité, leur centre de gravité commun ne peut s'élever à une hauteur supérieure à celle où il se trouvait au début du mouvement »[37].

D. Bernoulli, ce faisant, passe néanmoins tout un pan d'histoire sous silence, une histoire marquée, à la fin du XVII^e^ et dans la première moitié du XVIII^e^ siècle, par une intense et durable querelle, dite « des forces vives », portant à la fois sur la crédibilité même du principe, considéré par beaucoup comme métaphysique et indirect, sur la définition du concept de force, sur l'établissement des lois du choc des corps et sur les propriétés constitutives de la matière solide. En adoptant la formulation de Huygens plutôt que celle donnée par son père, Jean Bernoulli, dans son célèbre *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (1727), il avoue d'ailleurs lui-même avoir cherché à ménager « certains Philosophes, qui ont tendance à devenir nerveux lorsqu'il est fait mention du terme de *force vive* »[38]. Considérant un écoulement dans un vase soumis à la seule accélération de la pesanteur, le principe de conservation des forces vives, tel qu'il se trouve appliqué dans l'*Hydrodynamique*, consiste ainsi à égaler la « montée potentielle » (*ascensus potentialis*), c'est-à-dire[39]

> « la hauteur à laquelle le centre de gravité du système parviendrait si l'on considère que les différentes particules, lorsque leur mouvement est changé en vitesse ascensionnelle, montent aussi haut qu'elles le peuvent »

et la « descente actuelle » (*descensus actualis*), c'est-à-dire[40]

> « la hauteur dont le centre de gravité sera descendu après que les différentes particules aient trouvé le repos ».

La montée potentielle et la descente actuelle correspondraient respectivement, en termes modernes, à l'énergie cinétique E_c et l'opposé de l'énergie potentielle $-E_p$ de la masse

[36] C. Huygens, *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Paris, 1673, Partie IV.

[37] C. Huygens, *Ibid.* note 36, Partie IV, Hypothèse I, p. 93. La traduction française citée est celle donnée par R. Dugas dans son *Histoire de la Mécanique*, Neuchatel, Editions du Griffon, 1950, p. 178.

[38] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Sect. I, § 18, p. 10. La traduction française donnée ci-dessus est de notre fait : il en sera de même des autres passages de l'ouvrage cités dans cette thèse.

[39] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Sect. III, § 1, p. 29.

[40] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Sect. III, § 1, p. 29.

totale de fluide présente dans le vase à chaque instant de l'écoulement, toutes deux exprimées par unité de masse. Leur égalité renvoie donc à ce que nous appellerions aujourd'hui la conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p.

Dans la section XII de l'*Hydrodynamique*, le savant établit également, comme l'on sait, la première formulation de la célèbre équation portant aujourd'hui le nom de *loi de Bernoulli*. Le résultat apparaît néanmoins sous une forme très différente de la nôtre. Si, en affirmant que la pression doit être « proportionnelle à l'accélération ou à l'incrément de vitesse que recevrait l'eau si tout obstacle au mouvement s'évanouissait en un instant »[41], D. Bernoulli établit en effet pour la première fois un lien direct entre la pression et la vitesse du fluide — dans le cadre d'une théorie appelée « hydraulico-statique » (*hydraulico-stattica*) —, il n'interprète pas ladite pression autrement qu'en terme d'effort exercé par le fluide sur les parois du vase contre lesquelles il s'écoule. Le résultat, qui ne fait par intervenir la notion de pression interne, ne reste donc valable que globalement[42] et se trouve cantonné à des cas très particuliers d'écoulements stationnaires.

*L'*Hydraulique *de Jean Bernoulli* (1743)

Quelques années plus tard, J. Bernoulli, père de Daniel, donne également sa propre théorie. Il publie son *Hydraulique*[43] dans le courant de l'année 1743, en l'antidatant de dix ans afin de contester à son fils la priorité des recherches de l'*Hydrodynamique*. L'ouvrage, divisé en deux parties, présente un certain nombre de similitudes avec la section XII du traité de D. Bernoulli, notamment pour ce qui concerne la définition du concept de pression, ce qui, comme le souligne C. Truesdell, pousse à croire que « le père a plagié le fils »[44].

Plagiat ou pas, l'*Hydraulique* contient de réelles avancées. Du point de vue de la méthode de mise en équation tout d'abord, si J. Bernoulli adopte la même approche que Daniel pour ce qui concerne l'hypothèse du parallélisme, il lui reproche cependant de s'être « appuyé sur un fondement indirect, la conservation des forces vives, sans doute très vraisemblable et démontrée par moi, mais qui n'est pas acceptée par tous les

---

[41] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Sect. XII, § 5, p. 257-258.

[42] Précisons néanmoins que la méthode de mise en équation d'un écoulement de D. Bernoulli, fondée sur le principe de conservation des forces vives, témoigne d'une approche globale de l'écoulement, laquelle ne nécessite pas la prise en compte des pressions (internes) s'exerçant à l'intérieur du fluide.

[43] J. Bernoulli, « Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732 », *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1743, p. 387-493.

[44] C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XXXII. Pour plus de détails sur l'ouvrage, voir C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XXXI-XXXVII, G. Maltese, *La storia di "$F = ma$". La seconda legge del moto nel XVIII secolo*, Firenze, 1992, p. 166-179, et O. Darrigol, *Words of Flow*, 2005, p. 9-11.

philosophes »[45]. Il emploie donc un autre principe, ce que nous appellerions la seconde loi de Newton, qu'il applique au mouvement de chaque tranche infinitésimale de fluide. C'est là une démarche fort différente de celle, globale, de son fils, qui inspirera directement la future théorie des écoulements d'Euler. J. Bernoulli a, outre cela, recours au principe de l'hydrostatique aujourd'hui connu sous le nom de *théorème de Pascal*, ce dernier lui permettant de « translater » l'expression de l'ensemble des forces s'exerçant au sein du fluide au niveau de la surface supérieure de l'écoulement. Sa méthode repose enfin sur le constat d'un phénomène « négligé et considéré jusqu'alors comme de nulle importance », la « formation d'une gorge », c'est-à-dire d'une variation de la section réelle de l'écoulement consécutive à l'apparition d'une zone de fluide tourbillonnaire ou stagnante, dans tous les cas où « le fluide passe d'un endroit plus large à un plus étroit, ou au contraire d'un plus étroit vers un plus large »[46].

Pour ce qui est de la pression, J. Bernoulli met le doigt sur le statut interne de cette notion en faisant, comme en témoigne le passage suivant, explicitement la distinction entre une « force immatérielle [qui] agit en avant et en arrière »[47] au sein de l'écoulement et la pression externe à laquelle se borne son fils dans l'*Hydrodynamique*, c'est-à-dire la force s'exerçant sur les parois de la conduite[48] :

> « Pour comprendre justement et clairement, en quoi consiste cette force qui s'exerce sur les parois d'un canal lorsqu'un liquide s'y écoule, nous devons savoir que cette force n'est rien d'autre que celle qui tire son origine de la force de compression, par laquelle les parties du fluide restent véritablement successivement contiguës ; [...] à leur contact [...], par action et réaction, est produite une force intermédiaire, que j'ai coutume d'appeler *immatérielle* [...]. Le propre de cette force est de repousser la partie du liquide qui précède *vers l'avant*, ou à l'opposé d'où elle va, et de pousser la suivante *vers l'arrière*, c'est-à-dire à l'opposé d'où elle vient ; et de faire en sorte que la partie du liquide suivante, mue par des forces de translation, et la partie de liquide précédente, à laquelle elle doit imprimer une sorte d'accélération, assurent en leur contact l'égalité des forces accélératrices ».

Quoiqu'il se restreigne, dans sa théorie, au calcul de la pression s'appliquant sur les parois du canal, il parvient cependant à établir son expression dans le cas non stationnaire, un progrès vis-à-vis de l'*Hydrodynamique* qui ne manquera pas d'attirer l'attention d'Euler, ainsi qu'en atteste sa lettre à J. Bernoulli du 18 octobre 1740, partiellement imprimée en en-tête de l'ouvrage[49] :

[45] J. Bernoulli, *Hydraulique*, 1743, préface, p. 392. La traduction française de ce passage et celle des autres extraits de l'*Hydraulique* cités dans cette thèse sont issues de la traduction intégrale de l'édition latine d'origine que nous avons réalisée en collaboration avec B. Bru en 2006 et 2007.

[46] J. Bernoulli, *Hydraulique*, 1743, préface, p. 392-393.

[47] J. Bernoulli, *Hydraulique*, 1743, Partie II, § X, p. 443.

[48] J. Bernoulli, *Hydraulique*, 1743, Partie II, § IX, p. 442.

[49] J. Bernoulli, *Hydraulique*, 1743, p. 389.

> « Quant à la question très obscure et très cachée de la pression que les parois des vases subissent du fait des eaux qui s'y écoulent, tu l'as démêlée si distinctement et si nettement, qu'il ne reste plus rien à désirer sur ce point si délicat. En effet personne n'a abordé cette question, excepté Ton très célèbre Fils, qui n'a défini la pression que de façon assez indirecte, comme si la totalité du mouvement avait atteint son état permanent. Alors que Toi, par une méthode très naturelle, Tu as déterminé de façon très précise la pression de l'eau en tout état, invention très digne de Toi dont je Te félicite de tout coeur, *Homme très excellent*, et je Te sais infiniment gré de me l'avoir communiquée ».

L'*Hydraulique*, comme nous aurons l'occasion de le démontrer, exerce également une grande influence sur D'Alembert, dont la première théorie des écoulements paraît en 1744 sous le titre *Traité de l'Equilibre et du Mouvement des Fluides, pour servir de suite au Traité de Dynamique.*

Le Traité des fluides *de D'Alembert* (1744)

Le *Traité des fluides* s'inscrit dans la droite lignée de ces deux premiers ouvrages, en ce qu'il repose sur la même approximation, le parallélisme des tranches.

Du point de vue des principes employés, son approche se démarque toutefois de celle de ses deux illustres prédécesseurs. L'année précédente, le savant publiait en effet son *Traité de Dynamique*, dont l'art. 50 contient le premier énoncé du célèbre principe, dit *de D'Alembert*, permettant de ramener la mise en équation d'un problème de dynamique à celle d'un problème auxiliaire de statique. D'Alembert dispose, grâce à lui, d'une méthode générale pour aborder tous les types de questions mécaniques, notamment celle de l'écoulement des fluides, à laquelle il consacre quelques pages à la fin de l'ouvrage avant de renvoyer les lecteurs au *Traité des fluides* pour de plus amples détails. Sa théorie des écoulements de 1744 constitue ainsi un développement de la méthode précédemment esquissée. « Comme toutes les lois du mouvement des Corps Solides entre eux, ont été réduites par ce principe aux Lois de l'équilibre de ces mêmes corps », explique-t-il dans l'art. 85 du traité, « les Lois du mouvement des Fluides, peuvent aussi se réduire par ce même moyen aux Lois de l'équilibre des Fluides ». La mise en équation des problèmes d'écoulements, considérés dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, découle, autrement dit, de l'application conjointe des principes de la dynamique et de l'hydrostatique, le premier de ces principes permettant d'employer du second. Il donne, dans la foulée, une démonstration du principe de conservation des forces vives, qui, en termes modernes, revêt donc le statut d'*intégrale première du mouvement*, un tout autre statut, donc, que dans l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli. C'est là la principale découverte de D'Alembert dans cet ouvrage.

Outre cela, le *Traité des fluides* ne renferme pas de progrès majeurs au regard des deux théories précédentes. A l'instar de D. Bernoulli, la pression est interprétée en terme d'effort exercé contre les parois. Quant à son expression théorique, qu'il s'agisse d'écoulements stationnaires ou non stationnaires, elle ne diffère aucunement de celle donnée dans l'*Hydraulique* de J. Bernoulli. De façon générale, la définition de ce concept dans la théorie des écoulements de D'Alembert constitue une question épineuse dont nous aborderons certains aspects dans le chapitre VIII.

Le principal intérêt du *Traité des fluides* réside en fait dans les questions soulevées par l'auteur, ainsi que dans les appréciations émises à l'endroit des théories de D. et J. Bernoulli. D'Alembert consacre, d'une part, une dizaine de pages au résumé et au commentaire critique de l'*Hydraulique*, lesquels ne passeront pas inaperçus, puisqu'ils feront l'objet d'un mémoire latin du savant et littérateur Abrabram Gotthelf Kaestner, publié en 1769 et intitulé « Pour l'Hydraulique de Jean Bernoulli contre les objections de Monsieur d'Alembert »[50]. Le livre II du *Traité des fluides*, consacré à la question de l'écoulement des fluides, présente, d'autre part, une structure quasiment identique à celle de la section III de l'*Hydrodynamique* : les différents problèmes d'écoulements sont abordés dans le même ordre et font systématiquement l'objet d'une comparaison de D'Alembert entre ses propres résultats et ceux obtenus par son prédécesseur. Le savant français met ainsi le doigt sur une série de divergences directement liées aux querelles mécaniciennes touchant à l'emploi du principe de conservation des forces vives. Ces désaccords, a priori anodins, reviendront bientôt avec force sur le devant de la scène scientifique française. Ils constitueront l'un des principaux sujets de polémique de la crise de l'hydrodynamique des années 1770, et feront donc, à ce titre, l'objet de nouvelles recherches et de nouveaux commentaires de D'Alembert dans la seconde édition du traité, publiée en 1770, et dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

Concernant les questions soulevées dans le *Traité des fluides*, les doutes et questionnements du savant au sujet de l'hypothèse du parallélisme s'avèreront particulièrement déterminants au regard de la direction prise par l'hydrodynamique à partir du début des années 1750. L'approximation commune aux trois premiers traités d'hydrodynamique pose en fait d'évidents problèmes de concordance avec l'expérience : la représentation théorique d'un écoulement sous forme de tranches horizontales animées de vitesses homogènes apparaît comme trop éloignée des trajectoires réelles empruntées par le fluide lors de son mouvement à l'intérieur d'un vase. En s'interrogeant explicitement sur le sujet dans l'art. 110 du traité — d'ailleurs prolongé par un long appendice —, D'Alembert définit en quelque sorte un nouveau cap à franchir pour la discipline. Sans l'hypothèse du parallélisme, écrit-il[51],

> « il n'y aurait plus alors d'autre moyen pour déterminer ce mouvement que d'examiner celui que chaque particule devrait avoir : or c'est à quoi nous ne croyons pas qu'on puisse atteindre sans connaître la nature des Fluides ».

[50] A. G. Kaestner, « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, 1769, p. 45-89.

[51] D'Alembert, *Traité des Fluides*, 1744, art. 110, p. 95-96.

2. L'APPROCHE ANALYTIQUE

*L'*Essai sur la résistance des fluides *de D'Alembert (1749-1752)*

Le franchissement de ce cap théorique majeur, D'Alembert s'y attelle lui-même quelques années plus tard à l'occasion du prix proposé en 1748 pour l'année 1750 par l'Académie de Berlin sur « la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide ». Le manuscrit en latin[52] qu'il soumet à la fin de l'année 1749, de même que les autres pièces concurrentes, ne sont pas retenues parce qu'elles ne répondent pas à la question de la concordance entre la théorie et l'expérience. Le prix est alors reporté, ce qui provoque les foudres de D'Alembert, suspectant Euler, commissaire et auteur du sujet, d'avoir usé de son influence dans cette affaire. Le savant français retire donc finalement sa pièce du concours, la traduit en français, l'enrichit de plusieurs additions, avant de la faire paraître en 1752 sous le titre d'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*[53].

Dans ce second traité d'hydrodynamique, D'Alembert propose une théorie qui a « l'avantage de n'être appuyée sur aucune supposition arbitraire. Je suppose seulement », explique-t-il, « qu'un Fluide est un corps composé de particules très-petites, détachées, & capables de se mouvoir librement »[54]. Il soumet en fait les questions de l'équilibre, du mouvement et de la résistance des fluides à une toute nouvelle approche, que nous qualifierons d'*analytique*. Inspiré par la *Théorie de la figure de la Terre* (1743) de Clairaut, et dans la droite ligne de la théorie proposée dans ses *Réflexions sur la cause générale des vents* (1747)[55], il y conçoit chaque élément de fluide comme un volume infinitésimal animé par une vitesse dépendant, en plus du temps, de deux variables d'espace, de telle

[52] D'Alembert, *Theoria resistentiae quam patitur corpus in fluido motum, ex principiis omnino noivs et simplissimis deducta, habita ratione tum velocitatis, figurae, et massae corporis moti, tum densitatis & compressionis partium fluidi*, Berlin-Bradenburgische Akademie der Wissenschaften Akademiearchiv, I-M478.

[53] Voir G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998. L'historien y étudie notamment le contenu du mémoire latin de 1749. Il en établit une table analytique détaillée, et le compare à l'ouvrage publié en 1752.

Dans deux de ces additions, correspondant aux chapitres VIII et IX de l'*Essai sur la résistances des fluides*, D'Alembert applique respectivement sa théorie analytique au problème de l'écoulement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'un vase ouvert en ses deux extrémités et à la question du mouvement des rivières.

[54] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, 1752, Introduction, p. xxv-xxvj.

[55] Voir, sur cet ouvrage, G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998, p. 183-194, et O. Darrigol, *Worlds of flow*, 2005, p. 16-19.

sorte que le calcul aux dérivées partielles puisse y être appliqué. Il pose, autrement dit, les prémices du concept de *champ de vitesse*, se débarrasse de l'encombrante hypothèse du parallélisme des tranches et parvient à un système de deux équations aux dérivées partielles (EDP) correspondant, en termes modernes, à l'*équation de continuité* et à l'équation caractérisant un *écoulement plan incompressible potentiel*.

Il ne manque pas, en outre, d'y faire remarquer qu'il lui[56]

> « est tombé entre les mains il y a quelques temps, une Théorie manuscrite sur le courant des rivières ; la Méthode que l'Auteur employe, quoique moins simple, ce me semble, & moins exacte que la mienne, a néanmoins quelque chose de commun avec elle ; mais je suis en état de prouver que j'avois trouvé les Principes sur lesquels est appuyée ma Méthode, dès la fin de l'année 1749, c'est-à-dire plus d'un an avant que le Mémoire dont il s'agit me tombât entre les mains ».

Les principaux mémoires d'Euler[57]

D'Alembert fait ainsi référence aux « Recherches sur le mouvement des rivières »[58], un mémoire manuscrit d'Euler daté d'août 1750 dans lequel il voit un plagiat de sa théorie analytique. Dans cet écrit, comme le montre l'historien G. Grimberg[59], le savant berlinois s'inspire en effet de la méthode proposée par son confrère français à l'occasion du prix de 1750[60].

Lorsqu'il prend connaissance de la pièce latine de D'Alembert au début de l'année 1750, Euler vient par ailleurs de présenter son mémoire « Sur le mouvement de l'eau

[56] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, 1752, chap. IX, p. 189.

[57] Les différents mémoires d'Euler cités dans ce paragraphe sont étudiés par C. Truesdell dans « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, 1954.

[58] *HAB* année 1760 (1767), p. 101-118 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 ; mémoire présenté le 6 mai 1751 devant l'Académie de Berlin (E332). D'après C. Truesdell, la publication tardive de ce mémoire indiquerait qu'Euler ne souhaitait pas le publier.

La guerre de sept ans, qui débute en 1756 et se termine en 1763, a d'importantes répercussions sur le délai de publication des volumes de mémoires et d'histoire des Académies de Berlin et de Paris. Ce délai, habituellement de deux ou trois ans, atteint souvent six ou sept ans au cours de cette période.

[59] *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

[60] Ces divers évènements conduisent finalement à une rupture de plus d'une dizaine d'années entre les deux hommes. Leur correspondance s'interrompt en effet sur une lettre à Euler du 10 septembre 1751 et reprendra suite à leur rencontre à Berlin lors du voyage de D'Alembert en Prusse de juin à septembre 1763. Il n'y sera plus jamais question d'hydrodynamique. Pour plus de détails sur ces divers épisodes, voir les p. 310-315 de l'édition annotée de la *Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange*, publiée par P. Juškevič et R. Taton, in *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, Birkhäuser Verlag, Bâle, 1980, et R. Taton, « D'Alembert, Euler et l'Académie de Berlin », Revue *Dix-Huitième Siècle*, n° 16, PUF, 1984, p. 55-68.

dans les tuyaux de conduite » devant l'Académie de Berlin[61]. Il s'y consacre à l'étude des écoulements dans l'hypothèse du parallélisme. A l'instar de Jean Bernoulli, sa méthode de mise en équation repose sur l'application de ce que nous appellerions la seconde loi de Newton au mouvement d'une tranche infinitésimale de fluide. A la différence des Bernoullis et de D'Alembert, elle fait intervenir le concept de pression interne : il parvient, ce faisant, à la formulation moderne de l'actuelle *loi de Bernoulli*.

Cette approche fondée sur l'emploi de la seconde loi de Newton et sa maîtrise du concept de pression interne lui permettent ainsi, tout en s'en inspirant, de parfaire la méthode analytique introduite par D'Alembert. A la suite de ses « Recherches sur le mouvement des rivières », il aboutit ainsi à la formulation tridimensionnelle de l'*équation d'Euler* pour un fluide idéal et incompressible dans le mémoire « Principia motus fluidorum »[62], puis à la version compressible de la même équation dans son célèbre mémoire présenté en 1755 devant l'Académie de Berlin et intitulé « Principes generaux du mouvement des fluides »[63].

La résolution des EDP obtenues

Quoique le génie de D'Alembert et d'Euler ait ainsi permis d'établir, en quelques années, les équations dont nous nous servons encore couramment de nos jours, il n'en reste pas moins que les outils mathématiques de l'époque ne permettent pas de les résoudre. Euler n'en fait aucun mystère dans ses travaux. Quant à D'Alembert, il avoue de même, dès 1752, qu'après[64]

> « avoir sacrifié à la sûreté des principes la facilité du calcul, je devais naturellement m'attendre que l'application du calcul à ces mêmes principes seroit fort pénibles, et c'est aussi ce qui m'est arrivé. Il me paroît même très vraisemblable, que du moins en certains cas la solution du Problème se refusera entièrement à l'Analyse ».

Pour autant, les deux géomètres n'en restent pas là et se penchent donc, l'un comme l'autre, sur ce problème des plus délicats.

Dans la foulée de ses « Principes generaux du mouvement des fluides », Euler consacre ainsi l'imposant mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides »[65] à la poursuite de ses travaux. Il y établit notamment les EDP gouver-

---

[61] *HAB* année 1752 (1754), p. 111-148 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 219-250 ; mémoire présenté le 23 octobre 1749 (E206).

[62] *Mémoires de Petersbourg*, vol. 6, 1761, p. 271-311 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 133-168 ; mémoire présenté le 31 août 1752 devant l'Académie de Berlin (E258).

[63] *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 ; mémoire présenté le 4 septembre 1755 devant l'Académie de Berlin (E226).

[64] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, Introduction, p. xxxiv.

[65] *HAB* année 1755 (1757), p. 316-361 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 92-132 ; mémoire présenté le 2 octobre 1755 devant l'Académie de Berlin (E227).

nant le mouvement d'un fluide idéal incompressible et compressible, soumis à des forces quelconques et s'écoulant à l'intérieur d'un canal infiniment étroit de figure variable. Il parvient, ce faisant, à l'expression générale de la *loi de Bernoulli* pour un écoulement instationnaire considéré selon trois dimensions d'espace, mais bute sur sa résolution, en particulier dans le cas compressible, ne sachant « découvrir l'intégrale de cette équation différentielle ; d'où dépend cependant toute la détermination du mouvement »[66]. Il procède donc à l'examen d'une série de cas particuliers afin de réduire la complexité du problème dans le cas général, ne boudant pas, au passage, le plaisir de faire voir comment ses propres équations permettent de retrouver celles obtenues par son confrère français.

Ses recherches dans ce mémoire s'avèrent en fait admirablement riches en découvertes du point de vue de l'établissement des équations gouvernant le mouvement d'un fluide[67], mais globalement infructueuses et peu poussées pour ce qui est de leur résolution. Il ne procèdera pas à de nouvelles tentatives.

D'Alembert fait preuve, de son côté, d'une plus grande perservérance, notamment dans le domaine mathématique, puisqu'il ne dédie pas moins de deux cents pages de recherches à la résolution du système d'EDP obtenu dans l'*Essai sur la résistance des fluides*. Le Mémoire 4 de ses *Opuscules* t. I (1761) en constitue le point de départ, les Mémoires 31, 32 § II et 33 des *Opuscules* t. V (1768), de riches et fertiles développements.

Dans le premier de ces textes, le savant présente notamment une méthode de résolution lui permettant d'aboutir, dans un cas particulier, à une expression générale de l'équation des « filets », c'est-à-dire des lignes du courant du fluide dans le vase. Cette équation, cependant, ne constitue pas une solution du problème. Elle dépend entièrement d'une fonction de deux variables dont la détermination fera d'abord l'objet d'une intense discussion entre D'Alembert et Lagrange, dans le cadre de leur correspondance — leurs contributions respectives à cet échange sont respectivement publiées dans les mémoires intitulés « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 »[68] et « Solution de différents Problèmes de calcul intégral »[69]. La question est ensuite de nouveau abordée par D'Alembert dans

[66] *HAB* année 1755 (1757), art. XXV, p. 329.

[67] Pour plus de détails, voir C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XCI-C.

[68] *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 381-396.

[69] *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 179-380 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 471-668.

Dans l'art. XLIII de son mémoire « Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique » (*Mélanges de Turin*, t. II, *pour les années 1760-1761*, 1762, p. 196-298 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 365-468), Lagrange donne par ailleurs un commentaire critique du Mémoire 4 de D'Alembert : voir, pour plus de détails, A. Coste, A. Guilbaud, présentation et annotation du Mémoire 4 dans le vol. III/1 des *Œuvres Complètes* de D'Alembert, *Opuscules Mathématiques*, tome I (1761), P. Crépel, A. Guilbaud et G. Jouve (dir.), à paraître chez CNRS Éditions.

les Mémoires 31 et 33, puis dans le Mémoire 57 § VII, art. 14-34, des *Opuscules* t. VIII (1780). La méthode du Mémoire 4 qui en est à l'origine l'incite également à proposer une voie intermédiaire entre l'approche analytique et l'approche du parallélisme des tranches. Elle le conduit enfin, comme il l'explique dans l'Avertissement du t. V des *Opuscules*, à démontrer mathématiquement l'« impossibilité de réduire au calcul, dans un très-grand nombre de cas, les loix du mouvement des fluides »[70]. Elle est donc intéressante à plus d'un titre. Elle nous permettra à la fois de caractériser sa démarche face à la résolution d'un problème physico-mathématique faisant intervenir des EDP, et de préciser les contours de sa notion de « solution ». Elle nous incitera également à reconsidérer l'importance du Mémoire 4 vis-à-vis de ses contributions ultérieures. Nous aborderons ces différents aspects dans le chapitre IV et la première partie du chapitre V.

Ces textes contiennent par ailleurs de notables découvertes dans le domaine physique : l'énoncé de ce que nous considérerions aujourd'hui comme un corollaire du théorème de conservation de la circulation de Kelvin[71] et l'introduction de la fonction courant dans le Mémoire 4[72], ainsi que l'annulation du Laplacien de la fonction courant dans le cas potentiel dans le Mémoire 33 § III[73].

Le mémoire 34 § I des *Opuscules* t. V, possède, quant à lui, un statut quelque peu particulier. Le savant revient, dans cet écrit, sur la théorie de la résistance des fluides publiée en 1752 et énonce, à cette occasion, son célèbre paradoxe, dit de D'Alembert, relatif à la résistance éprouvée par un corps solide immergé dans un fluide en mouvement. La question fera l'objet d'échanges épistolaires et contradictoires avec Lagrange, dont le Mémoire 57 § XIII constitue un prolongement.

3. La crise de l'hydrodynamique des années 1770[74]

Malgré tout, aussi fécondes soient-elles, ces tentatives de résolution des EDP par Euler et D'Alembert ne permettent pas de dégager de solutions théoriques explicites pourtant indispensables à la validation de cette nouvelle méthode de mise en équation des écoulements. Les hydrodynamiciens se retrouvent ainsi confrontés à une véritable impasse théorique. La première approche reposant sur l'hypothèse du parallélisme des tranches les avait confinés dans une représentation de l'écoulement trop éloignée des

[70] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Avertissement, p. vj-vij.

[71] En termes modernes, D'Alembert démontre que la vorticité d'un écoulement stationnaire incompressible bidimensionnel dont la circulation se conserve sur une ligne fermée est constante le long de chaque ligne de courant.

[72] Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § XII, p. 148-151.

[73] Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 33, § II, art. 6, p. 103.

[74] Cette troisième partie du Chapitre I est à l'origine de notre article « La "République des Hydrodynamiciens" de 1738 jusqu'à la fin du 18e siècle », Revue *Dix-Huitième Siècle*, n° 40, PUF, Paris, 2008, p. 153-171.

résultats expérimentaux disponibles à cette époque. L'approche analytique, censée leur permettre de dépasser cette dernière approximation, achève quant à elle, et contre toute attente, de creuser ce que l'historien R. Hahn décrit comme un « gouffre entre la théorie et l'expérience »[75].

Le « Mémoire sur l'écoulement » de Borda (1766)

La discipline connaît dès lors une transition difficile, simultanément marquée par le retour de l'expérience au premier plan et par la volonté d'en faire coïncider les résultats avec de nouvelles solutions théoriques. Compte tenu de l'échec de l'approche analytique de ce point de vue, ces dernières seront naturellement à chercher du côté du parallélisme des tranches, qu'il conviendra donc de faire évoluer. C'est là l'objectif du « Mémoire sur l'écoulement », lu à l'Académie royale des sciences de Paris les 5, 15 et 19 mars 1766, et publié en 1769 dans le volume des *MARS* pour l'année 1766. Son auteur, Jean-Charles Borda, s'y attaque au socle théorique de l'*Hydrodynamique* et du *Traité des fluides* : le parallélisme des tranches, dont il propose le rejet au profit d'une nouvelle façon de représenter l'écoulement ; la conservation des forces vives et le principe de D'Alembert, qu'il affirme respectivement devoir être remise en cause et différemment appliqué dans un certain nombre de problèmes. Fort de cette nouvelle méthode, il revient sur une grande partie des questions abordées par ses deux illustres prédécesseurs, y compris les divergences relevées par D'Alembert entre ses résultats de 1744 et ceux précédemment obtenus par D. Bernoulli. Le mémoire, dont nous donnerons un résumé détaillé dans le chapitre III, se voit enfin ponctué de comptes rendus d'expériences réalisées par Borda dans le courant de l'année 1765 à l'Académie Royale de Marine de Brest, des expériences faisant état d'un nouveau savoir-faire en la matière, et dont les résultats tendent pas à pas à confirmer les différents éléments théoriques avancés. Il s'agit donc d'une façon différente d'aborder l'hydrodynamique, en rupture avec la tradition mathématique portée en France par D'Alembert. Borda met ainsi le feu aux poudres : son « Mémoire sur l'écoulement » marque le début de la crise de l'hydrodynamique des années 1770[76].

---

[75] R. Hahn, « L'hydrodynamique au XVIIIe - Aspects scientifiques et sociologiques », Conférence donnée au Palais de la Découverte le 7 novembre 1964, p. 2-27.

[76] Ce mémoire n'est pas la seule contribution de Borda visant au développement d'une approche plus expérimentale de l'hydrodynamique au cours de cette période. Il est néanmoins le seul à porter sur le problème de l'écoulement des fluides, le seul à s'attaquer aux théories de l'*Hydrodynamique* et du *Traité des fluides* (1744) et donc le seul à provoquer une polémique avec D'Alembert. Les autres portent sur la résistance des fluides et les machines hydrauliques. En voici la liste exhaustive : « Expériences sur la résistance des fluides », *MARS* année 1763 (1766), p. 358-376 ; « Mémoire sur les roues hydrauliques », *MARS* année 1767 (1770), p. 270-287 ; « Expériences sur la résistance des fluides », *MARS* année 1767 (1770), p. 495-503 ; « Mémoire sur les pompes », *MARS* année 1768 (1771), p. 418-431.

La seconde édition du Traité des fluides *(1770) et le Mémoire 51 § IV des* Opuscules *t. VI (1773)*

D'Alembert est présent le 5 et le 19 mars 1766 à l'Académie des sciences, et assiste donc à la lecture par Borda de son mémoire. Le 25 mars de la même année, soit quelques jours plus tard, il annonce, dans une lettre à Lagrange, être en train de préparer une nouvelle édition de son *Traité des fluides*. Ce n'est probablement pas une coïncidence. La seconde édition de l'ouvrage, publiée en 1770, contient en effet un certain nombre de réponses implicites aux critiques de Borda contre sa théorie des écoulements de 1744. Ces réponses sont données sous forme d'ajouts aux articles de la première édition. Elles correspondent, le plus souvent, à de nouvelles idées théoriques, dont D'Alembert ne tardera pas à faire usage.

Les questions soulevées par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » continuent, de fait, à préoccuper D'Alembert au début des années 1770. Dans sa lettre du 14 juin 1771, il demande ainsi l'arbitrage de Lagrange sur le sujet. « Je vous serais très obligé de lire à votre loisir », lui écrit-il[77],

> « le Mémoire du Chevalier de Borda, qui est dans notre volume de 1766, sur le mouvement des fluides dans des vases ; il me paraît plein de mauvais raisonnements, dont j'ai déjà réfuté quelques-uns et dont j'espère réfuter le reste quand je donnerai mes nouvelles recherches sur le sujet ».

Les raisonnements déjà réfutés le sont, comme nous venons de l'indiquer, dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770). Pour le reste, il annonce au même savant, dans sa lettre du 8 novembre 1771, qu'il croit[78]

> « avoir trouvé une théorie du mouvement des fluides dans des vases qui expliquera les expériences d'une manière plus satisfaisante ».

Cette théorie constitue une réponse à la représentation de l'écoulement proposée par Borda en remplacement du parallélisme des tranches, ainsi qu'une alternative à sa remise en cause de l'emploi du principe de conservation des forces vives dans un certain nombre de problèmes. D'Alembert la fait paraître dans le Mémoire 51 § IV, un court écrit d'une dizaine de pages des *Opuscules* t. VI (1773) devant être considéré comme la première pierre d'une plus ambitieuse « contre-attaque » de sa part : le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

La mobilisation du « clan dalembertien »

En janvier 1771, son fidèle disciple et ami, l'abbé Charles Bossut, publie son *Traité élémentaire d'hydrodynamique*. L'ouvrage est composé de deux volumes. Le premier, de

[77] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 92, p. 202-203.
[78] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 98, p. 221.

nature théorique, reprend les différentes méthodes de mise en équation des écoulements de son aîné. Il est complété par un second volume renfermant les résultats des nombreuses expériences réalisées par l'auteur à l'Ecole royale du Génie de Mézières dans le courant de l'année 1766. Bossut le présente le 23 janvier à l'Académie des sciences de Paris, ce qui, d'après la chronologie établie par P. Crépel[79], provoque une réaction immédiate de Borda, qui en conteste certains points devant l'Académie quelques jours plus tard. Le traité est défendu le 23 février, par Bossut ou l'un de ses amis, mais la polémique ne s'en tient pas là : le 27, l'Académie nomme trois commissaires, D'Alembert, d'Arcy et Condorcet, pour arbitrer la dispute. Quoiqu'il semble qu'aucun rapport écrit n'ait finalement été rendu, l'épisode donne néanmoins une première idée du climat de tension à l'Académie autour des questions d'hydrodynamique. Les expériences rapportées par Bossut dans ce traité sont, de plus, fort attendues par D'Alembert. Elles constituent en effet une source d'informations d'autant plus importantes pour lui qu'il entend à présent répondre à Borda, ce qu'il doit non seulement faire sur le terrain théorique, mais aussi sur le terrain expérimental compte tenu de la pertinence du « Mémoire sur l'écoulement » de ce point de vue. Elles formeront ainsi, comme nous aurons l'occasion de le montrer dans le chapitre VI, le principal support expérimental du Mémoire 57.

Cette polémique, qui plus est, témoigne de la mobilisation des plus proches amis de D'Alembert, à savoir Bossut et Condorcet, contre les positions défendues par Borda. C'est ce que l'on voit dans une lettre datant de février ou mars 1771[80], et se présentant comme suit : la colonne de droite, baptisée « profession de foi de M. Condorcet » par Borda, fait état de six idées renvoyant à ses critiques du *Traité des fluides* de D'Alembert et du *Traité élémentaire d'hydrodynamique* de Bossut, complétées par une septième relative à la défense de son « Mémoire sur les roues hydrauliques »[81] ; la colonne de gauche contient les réponses point par point de Borda à ces différents sujets de litige. Le document est probablement un procédé rhétorique de Borda destiné à répondre aux arguments contradictoires donnés par Condorcet lors de leurs échanges oraux sur le sujet, mais n'en constitue pas moins un document important. Il tend d'abord à confirmer l'implication de Condorcet dans le cadre de la polémique opposant Borda à D'Alembert et Bossut. Il correspond, d'autre part, à une synthèse des principaux aspects théoriques débattus au moment de la crise des années 1770. Nous aurons donc l'occasion d'y faire référence dans la suite de notre travail.

Deux autres épisodes viennent noircir le tableau des relations entre Borda et Bossut

[79] P. Crépel, « Une curieuse lettre de Borda à Condorcet et un non moins curieux article du *Journal encyclopédique* », *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : Guide de recherches*, E. Brian et C. Demeulenaere-Douyère (dir.), Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1996, p. 325-337.

[80] La lettre est publiée, sans dates ni annotations, par G. Darboux, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, 1889, p. 222-224. Sa datation approximative est l'œuvre de P. Crépel, dans « Une curieuse lettre de Borda à Condorcet », 1996. On trouvera, dans ce même article, de plus amples détails sur les différents épisodes opposant Bossut et Borda à cette époque.

[81] Voir la note 76, p. 50.

dans cette période. En 1768, les deux savants sont en effet directement en concurrence pour une place d'associé à l'Académie royale des sciences de Paris, suite à la promotion de Deparcieux au rang de pensionnaire surnuméraire. Le premier était adjoint à l'Académie depuis 1756, où il avait déjà profité de la promotion de Deparcieux au rang d'associé, le second seulement correspondant de D'Alembert depuis 1753. Les académiciens procèdent, comme le veut le règlement, à l'élection de deux géomètres, dont les noms sont ensuite soumis au choix du roi. Les deux noms proposés, vous l'aurez deviné, sont, dans l'ordre, Borda et Bossut. C'est le premier qui se voit finalement retenu pour la place d'associé, le 30 juin 1768, libérant par le jeu académique des chaises musicales une place d'adjoint attribuée à Bossut le 6 août, faible compensation pour le disciple et son protecteur, D'Alembert[82].

Le second épisode concerne la chaire d'hydrodynamique du Louvre créée en 1775 par Turgot, ami proche de D'Alembert et Condorcet, devenu contrôleur général des finances de Louis XVI en août 1774 afin d'insuffler une nouvelle politique scientifique dans le domaine de la science hydraulique. Il confie à Bossut le soin d'y enseigner l'hydrodynamique pratique et théorique, ce qui, d'après R. Hahn[83], déplut violemment à Borda, jaloux de ne pas avoir été choisi pour assurer le cours. Au début de l'année 1775, Turgot charge d'ailleurs Bossut, avec D'Alembert et Condorcet, d'« examiner les moyens de perfectionner la navigation dans l'intérieur du Royaume »[84]. Bossut, conseillé par ses deux confrères, réalise donc en juillet, août et septembre 1776, des expériences sur le bassin de l'Ecole royale du Génie de Mézières pour évaluer la résistance qu'éprouve un corps en mouvement à l'intérieur d'un fluide. Les résultats de ces mesures sont rapportées dans l'ouvrage intitulé *Nouvelles expériences sur la résistance des fluides*, et publié l'année suivante.

Ces deux derniers évènements sont également symptomatiques de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Si Bossut, de même que Borda, doit être considéré comme l'un des pionniers de la nouvelle approche visant à réconcilier les deux grands pôles d'attraction de la discipline, la science et la pratique, leurs relations dénotent leur appartenance à deux milieux différents et entretenant des rapports difficiles, le milieu des théoriciens, auxquels appartient Bossut, du fait de sa proximité avec D'Alembert, et celui des marins et ingénieurs, dont Borda se réclame[85].

La création par Turgot de la chaire d'hydrodynamique du Louvre et sa décision de

[82] Bossut échoue à nouveau, face à Bézout, le 18 juillet de la même année. Il est finalement nommé associé le 14 août 1768, contre Messier.

[83] R. Hahn, *L'hydrodynamique au XVIII^e, Aspects scientifiques et sociologiques*, 1964 ; R. Hahn, « The Chair of Hydrodynamics in Paris, 1775-1791 : a Creation of Turgot », *Actes du X^e Congrès International d'Histoire des Sciences*, Paris, 1964, vol. 2, p. 751-754.

[84] Bossut, Condorcet, D'Alembert, *Nouvelles expériences sur la Résistance des Fluides*, Paris, 1777, p. 2.

[85] Voir J. Mascart, *La vie et les travaux du Chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799) – Episodes de la vie scientifique au XVIII^e siècle*, Annales de l'Université de Lyon, vol. II, Fasc. 33, Lyon, 1919.

financer de nouvelles expériences sur la résistance des fluides procèdent d'ailleurs d'une autre affaire, dite « du canal de Picardie ». Celle-ci concerne la création d'un canal souterrain près de Saint-Quentin dont le percement commence en 1769 sous la direction et selon les plans de l'ingénieur Pierre-Joseph Laurent[86]. Le projet revêt alors un intérêt stratégique et commercial certain, puisqu'il doit permettre, compte tenu du système de canaux déjà existant, de relier le bassin parisien avec les ports du Nord et la Hollande. Sa faisabilité fait cependant l'objet de polémiques tenant à son coût et aux contraintes techniques liées à la navigation des bateaux dans un canal étroit et peu profond. Lorsque Turgot accède au poste de contrôleur général des finances, il nomme donc, au début de l'année 1775, une commission de trois académiciens pour examiner la question, commission formée de D'Alembert, Bossut et Condorcet : c'est dans ce contexte que les expériences sur la résistance des fluides, précédemment mentionnées, leur sont confiées. Turgot, ce faisant, court-circuite néanmoins une importante institution généralement chargée de ce type de missions : le Corps des Ponts et Chaussées, dirigé par Perronet. Condorcet, proche ami et conseiller du ministre, n'est pas étranger à la mise à l'écart de cette corporation d'ingénieurs, ainsi qu'en témoigne une minute de lettre à Turgot datant de la fin de l'été 1774. S'il abhorre le système de corvées dont l'organisation des Ponts et Chaussées est détentrice, s'il déteste Perronet, cette lettre à Turgot montre que son investissement dans cette affaire vient d'abord de ce que « la théorie des fluides est trop peu avancée pour résoudre le problème général », qu'« il ne peut être bien résolu qu'après avoir fait des expériences », et qu'« il faut » donc « dans ce genre un homme qui réunisse la théorie à la pratique »[87]. Or, selon lui, un tel homme ne peut être que Bossut, et non « un mécanicien qui s'est occupé d'hydraulique », c'est-à-dire du seul versant expérimental et appliqué de la science des écoulements. Les ingénieurs des Ponts et Chaussées, parce qu'ils sont mauvais théoriciens, ne sont donc pas aptes à résoudre de telles questions : la chaire d'hydrodynamique créée par Turgot devait justement permettre de pallier le problème.

Cet autre épisode révèle de nouveau la problématique posée par la question de la concordance entre théorie et expérience à cette époque. Le clan constitué de D'Alembert, Bossut et Condorcet a clairement conscience de la nécessité de concilier les deux versants de la science des écoulements, mais ne fait pas confiance aux ingénieurs des Ponts et Chaussées pour assurer cette mission. Dans la lettre à Turgot, précédemment citée, Condorcet présentait d'ailleurs sans détour l'hydrodynamique pratique comme une discipline « peu cultivée en France », « abandonnée aux ingénieurs des ponts et

[86] Cette affaire du canal de Picardie est étudiée par P. Redondi dans « D'Alembert et la technologie : l'affaire du canal de Picardie », *Jean d'Alembert savant et philosophe. Portrait à plusieurs voix*, Paris, Édition des archives contemporaines, 1989, p. 433-460.

[87] « Minute de lettre de Condorcet à Turgot » [1774], *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits*, édition critique et commentée par B. Bru et P. Crépel, Paris, INED, 1994, p. 94. Nous remercions ici P. Crépel, à qui nous devons ces informations sur le rôle joué par Condorcet auprès de Turgot dans l'affaire du canal de Picardie.

chaussées », alors qu'« en Italie, elle a été confiée constamment aux savants les plus célèbres », ce qui dénote clairement la nature des rapports entretenus avec le milieu des hydrauliciens en France à cette époque[88].

Lagrange, alors directeur de la classe de mathématiques de l'Académie de Berlin suite à l'intercession de D'Alembert auprès de Frédéric II, joue également un rôle de premier plan à cette époque. Non pas directement, à l'instar de Bossut et Condorcet, mais par l'intermédiaire de sa correspondance avec D'Alembert. Comme en témoignent les lettres précédemment citées, leurs échanges épistolaires entre 1771 et 1773 portent régulièrement sur la polémique avec Borda. Ils offrent un éclairage facilitant la mise en perspective des recherches de D'Alembert dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57[89]. Dans sa missive du 6 février 1772, D'Alembert présente ainsi une énumération de ses points de désaccord avec l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement », en requérant l'avis de son confrère sur chacun d'eux : « Vous me ferez très-grand plaisir », lui écrit-il[90],

> « d'examiner les objections du chevalier de Borda, et vous pouvez en toute sûreté me dire ce que vous en pensez. Soyez très-sur que vous ne serez compromis en aucune manière ».

Le 24 février, Lagrange lui répond[91] :

> « Le peu de place qui me reste dans cette Lettre m'oblige à réserver pour une autre ce que j'aurais à vous dire sur ce sujet, ainsi que mes observations sur le Mémoire de M. le Chevalier de Borda, que je viens de lire et que je trouve peu digne de lui. Ses objections contre votre théorie ne sont que des *sofisticheries*, pour ne rien dire de plus ».

Il le félicite, dans la suite de la lettre, pour l'une des réponses données dans la seconde édition du *Traité des fluides*, et rejette au vol la théorie des pertes de forces

[88] Dans le t. II de son *Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique* (1787), renfermant à la fois le contenu de son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* et des *Nouvelles expériences sur la Résistance des Fluides*, Bossut joint ainsi un long appendice contenant une « Notice d'un Recueil d'Ouvrages Italiens, sur le cours des eaux », parce qu'on lui a « demandé » (p. 440) : peut-être s'agit-il justement d'une requête de Condorcet... Le recueil en question, intitulé *Nuova Raccolta di autori, che trattano del moto dell'acque* (7 vol., Parme, 1766), rassemble la quasi-totalité des nombreuses recherches effectuées par les savants italiens sur l'écoulement des eaux, notamment celles de Castelli, Guglielmini, Picard, Poleni, Frisi, etc. Un premier ouvrage de ce type, en trois tomes, avait été publié en 1723, et rassemblait déjà les œuvres d'Archimède, Galilée, Castelli, Borelli, Cassini, Guglielmini, Manfredi, Torricelli, etc. (*Raccolta di autori, che trattano del moto dell'acque*, 3 vol., Florence, 1723).

[89] Voir A. Coste, M. Massot, « La notion de fluide chez D'Alembert à la lumière des *Opuscules mathématiques* et la correspondance », *Sciences, musiques, Lumières : Mélanges offerts à Anne-Marie Chouillet*, U. Kölving et I. Passeron (dir.), Centre international d'études du XVIII[e] siècle, Ferney-Voltaire, 2002, p. 83-91.

[90] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 100, p. 226.

[91] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 101, p. 230.

vives proposée par Borda, ainsi que la façon dont ce dernier établit le coefficient de contraction de la veine pour un ajutage rentrant. Il ne donnera malheureusement jamais les observations annoncées. D'Alembert, « plus content que surpris du jugement » de Lagrange, lui confie, le 25 mars 1772, avoir « fait bien des recherches nouvelles sur le mouvement des fluides, que j'achèverai tout à mon aise et peut-être jamais », mais avoir toutefois l'intention de publier, dans son prochain tome d'*Opuscules*, le sixième[92],

> « une méthode nouvelle pour traiter cette matière, dont je crois que vous ne serez pas mécontent, et qui me paraît propre à satisfaire à tous les cas et à toutes les expériences, sans recourir à la mauvaise théorie de Borda ».

La méthode nouvelle est celle du Mémoire 51 § IV. Les recherches nouvelles seront finalement achevées et paraîtront dans le t. VIII des *Opuscules*, en 1780, sous le titre « Nouvelles Recherches sur le mouvement des Fluides dans des Vases » : il s'agit du Mémoire 57.

Le Mémoire 57 des Opuscules *t. VIII (1780)*

Du point de vue historique, le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) constitue donc une pièce à la fois indissociable et particulièrement représentative de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Pour ce qui touche au contenu scientifique de ce quatrième et dernier traité de D'Alembert en hydrodynamique, la quasi-totalité de l'écrit s'organise autour des différents points soulevés par Borda. Sa démarche vise à défendre la théorie des écoulements donnée dans la première édition de son *Traité des fluides*, à appliquer dans la même optique les idées avancées dans les ajouts de la seconde édition, à donner suite à la nouvelle méthode brièvement exposée dans le Mémoire 51 § IV. Les divergences avec Daniel Bernoulli sont également réexaminées, de même que certains points de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli dont il remettait en cause le bienfondé en 1744. Il consacre enfin une partie importante de l'ouvrage à la continuation des recherches analytiques menées dans les *Opuscules* t. I (1761) et t. V (1768), qu'il s'agisse du problème de l'écoulement des fluides ou de leur résistance.

D'Alembert revient ainsi sur l'ensemble des questions d'hydrodynamique précédemment abordées, mais dans un état d'esprit quelque peu différent. Dans le contexte de polémique avec Borda, ses nouvelles recherches font effectivement état de réels approfondissements sur des sujets aussi fondamentaux que la validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches, la bonne manière de parvenir à une représentation théorique fidèle, et conforme à l'expérience, des trajectoires réelles d'un fluide s'écoulant dans un vase, les conditions d'application du principe de conservation des forces vives, la pression exercée par le fluide sur les parois du vase à l'intérieur duquel il s'écoule, etc. Nous disposons, par là-même, d'un nouvel et précieux ensemble de réflexions dont nous ver-

[92] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 102, p. 233.

rons qu'elles permettent de préciser, voire de réinterpréter, les fondements de sa théorie des écoulements.

Avant de ce faire, certains pré-requis s'avéreront toutefois indispensables. Le Mémoire 57 repose en effet sur les principes fondant le *Traité des fluides* (1744) et l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752) : son principe de la dynamique, le principe de l'hydrostatique, ainsi que le principe de conservation des forces vives, au statut secondaire mais non moins central dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Les recherches de D'Alembert s'appuient en outre sur des concepts tels que la force d'un corps en mouvement ou la loi leibnizienne de continuité, dont les définitions remontent à la même époque. Ces derniers s'inscrivent dans la droite lignée des différentes polémiques mécaniciennes de la fin du XVII^e^ et de la première moitié du XVIII^e^ siècle. Ils se situent, qui plus est, au coeur des divergences opposant ses résultats à ceux de l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli. Ils joueront de même un rôle important dans le cadre de sa querelle avec Borda et nécessitent donc que nous en présentions préalablement les grandes lignes.

Chapitre II. LES PRINCIPES ET CONCEPTS FONDATEURS

A l'instar de la première édition du *Traité de dynamique* (1743) et du *Traité des fluides* (1744), ou de l'*Essai sur la résistance des fluides*, la théorie des écoulements de D'Alembert repose, dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV, et le Mémoire 57, sur le principe général de la dynamique, aujourd'hui appelé *principe de D'Alembert*, et, par là-même, sur différentes versions du principe de l'hydrostatique. Nous les présenterons ici successivement, en faisant voir comment le savant les applique dans le cadre d'une approche unidimensionnelle des écoulements (type parallélisme des tranches), puis dans le cadre de l'approche analytique, ce qui nous permettra finalement de présenter une synthèse des équations du mouvement de D'Alembert dans les deux cas de figure.

Nous passerons ensuite au principe de conservation des forces vives. Nous montrerons comment D'Alembert parvient à le démontrer à partir de son principe de la dynamique dans la première édition du *Traité des fluides* et quel est son statut dans sa théorie des écoulements en comparaison de celui qu'il possède dans l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli. La conservation des forces vives joue en effet un rôle central dans le cadre des divergences relevées par D'Alembert, en 1744, entre ses résultats et ceux de son prédécesseur. Ce sont ces mêmes divergences et, plus généralement encore, les conditions d'application du principe sur lesquelles portera pour partie sa controverse avec Borda. Ces deux polémiques, auxquelles nous consacrerons l'intégralité du chapitre VII, renvoient aux anciennes querelles entourant le processus de formalisation de la mécanique à la fin du XVII^e^ siècle et dans la première moitié du XVIII^e^ siècle. Il sera donc nécessaire d'en présenter ici les grandes lignes. Nous compléterons, ce faisant, notre présentation du principe de conservation des forces vives dans la première édition du *Traité des fluides*, auquel D'Alembert attache en effet une condition d'application justement héritée de ces débats mécaniciens et liée à la conception qu'il se fait de la nature de la matière fluide : la loi leibnizienne de continuité. Le statut quelque peu particulier du concept de force dans son *Traité de dynamique* (1743) n'est pas non plus sans rapport avec ces anciennes querelles. C'est une notion fondamentale en mécanique, dont il nous faudra donc également donner les principales caractéristiques dans le cadre de ses travaux sur le mouvement des fluides.

Précisons, pour finir, que nous nous intéresserons uniquement, dans cette thèse, à la théorie des écoulements *incompressibles* de D'Alembert. Le terme possède, à cette époque, sensiblement le même sens qu'aujourd'hui et désigne donc l'écoulement d'un fluide de densité constante. Il n'est pas explicitement utilisé par le savant — mais couramment employé par Euler et Lagrange —, qui le traduit de façon équivalente en supposant la densité égale à 1. C'est là une pratique courante, notamment adoptée par D. Bernoulli, J. Bernoulli, Borda et Bossut.

1. Les principes fondateurs de l'approche unidimensionnelle des écoulements de D'Alembert

L'application du principe de D'Alembert dans le Traité de dynamique *(1743) et le* Traité des fluides *(1744)*

Le principe aujourd'hui connu sous le nom de *principe de D'Alembert*, le savant l'énonce pour la première fois dans l'art. 50 du *Traité de dynamique* (1743). Il y pose le problème en ces termes[93] :

> « *Soit donné un système de corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque ; & supposons qu'on imprime à chacun de ces corps un mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres corps, trouver le mouvement que chaque corps doit prendre* ».

Sa réponse est la suivante[94] :

> « *Décomposés les mouvements a, b, c &c. imprimés à chaque corps, chacun en deux autres,* a, α ; b, β ; c, ξ ; *&c. qui soient tels, que si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens* a, b, c *&c. ils eussent pû conserver ces mouvemens sans se nuire réciproquement; & que si on ne leur eût imprimé que les mouvemens α, β, ξ, &c. le système fut demeuré en repos* ; il est clair que a, b, c seront les mouvemens que ces corps prendront en vertu de leur action ».

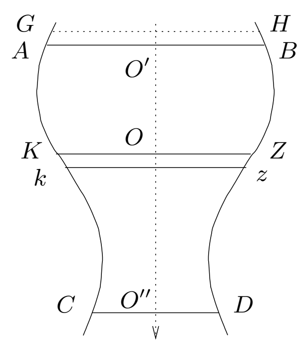


Fig. I – Ecoulement d'un volume de fluide $ABDC$ dans un vase vertical de section variable

Dans les art. 173-174 du *Traité de dynamique*[95] et le Livre II, consacré à l'étude des écoulements, du *Traité des fluides*, D'Alembert considère notamment l'écoulement

[93] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère édition, Paris, 1743, art. 50, p. 50.

[94] D'Alembert, *Ibid.* note 93, art. 50, p. 51.

[95] D'Alembert, *Ibid.* note 93, art. 173-175, p. 183-186.

d'un volume $ABDC$ de fluide incompressible et pesant dans un vase similaire à celui représenté sur la Fig. I. L'hypothèse du parallélisme, qui sous-tend sa théorie dans cet ouvrage, le conduit à représenter le fluide en mouvement sous la forme d'un ensemble de tranches horizontales, d'épaisseur infinitésimale, en contact les unes avec les autres. Chacune de ces tranches correspond au corps dont le principe de la dynamique doit permettre de trouver le mouvement emprunté compte tenu de l'action des autres corps, c'est-à-dire des autres tranches de la masse de fluide.

Soit donc une tranche quelconque de fluide $KkzZ$ animée par la vitesse v à un instant t de l'écoulement, sur laquelle s'exerce par ailleurs une force accélératrice φ, le principe de la dynamique dans l'art. 86 du *Traité des fluides* se trouve établi en ces termes[96] :

> « Il est évident qu'à la fin de l'instant dt, la vitesse v seroit $v + \varphi dt$, si les tranches n'agissoient point les unes sur les autres. Donc si à la fin de l'instant dt la vitesse v devient $v \pm dv$ par l'action mutuelle des tranches, il faudra supposer $v + \varphi dt = v \pm dv + \varphi dt \mp dv$; & il est évident que le Fluide resteroit en équilibre, si chaque tranche n'étoit animée que de la vitesse infiniment petite $\varphi dt \mp dv$ ».

Comparativement à l'énoncé du principe dans le *Traité de dynamique*, il s'agit donc de décomposer le mouvement φdt imprimé à la tranche $KkzZ$ entre les instants t et $t + dt$ en deux autres $\pm dv$ et $\varphi dt \mp dv$, lesquels correspondent respectivement au mouvement effectif du corps, c'est-à-dire le mouvement réellement acquis, et le mouvement devant être détruit du fait de son action mutuelle avec les autres corps afin que le volume entier de fluide demeure en équilibre à l'issue de l'intervalle de temps dt.

D'Alembert exprime, autrement dit, la vitesse perdue par la tranche $KkzZ$ compte tenu de l'action mutuelle des tranches au sein de l'écoulement. Sachant que la vitesse de la tranche vaut $v + dv$ à l'instant $t + dt$, sa vitesse à l'instant $t + dt$ serait en fait φdt si les tranches n'agissaient pas les unes sur les autres, ou encore gdt dans le cas où la force accélératrice φ désigne l'accélération de la pesanteur g[97]. Le principe de la dynamique assure ainsi que le fluide resterait en équilibre au bout de l'intervalle de temps dt si chaque tranche n'était animée que par la vitesse $gdt - dv$, ou la force accélératrice $g - \dfrac{dv}{dt}$, lesquelles seront donc détruites, ou perdues, au cours du mouvement.

Le principe d'« égalité de la pression en tous sens »

Dans sa théorie des écoulements, le principe de la dynamique se trouve directement associé à un autre principe, celui de l'hydrostatique. Il permet en effet, sur le fond,

[96] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 86, p. 71.

[97] L'accélération de la pesanteur n'est que très rarement notée g dans les traités et mémoires d'hydrodynamique de D'Alembert. Elle est le plus souvent désignée par la lettre p, qu'il ne faudra donc pas confondre avec la notation désignant aujourd'hui la pression du fluide.

de ramener un problème de dynamique à un problème auxiliaire de statique, et c'est donc par ce moyen que D'Alembert, dans la préface du *Traité des fluides*, explique avoir « réduit fort aisément aux Loix de l'Hydrostatique ordinaire les Problêmes qui ont pour objet le mouvement des Fluides »[98].

Le principe hydrostatique employé est celui de l'« égalité de la pression en tout sens ». Dans l'article « Fluide » de l'*Encyclopédie*[99], dont il est l'auteur, D'Alembert en attribue la paternité à B. Pascal dans son *Traité de l'équilibre des liqueurs* (1663). Son premier énoncé est en fait l'œuvre de S. Stevin qui, dans les Livres 4 et 5 de sa « De statica »[100], énonce le *principe de solidification* d'après lequel une partie quelconque d'un fluide en équilibre peut être remplacé par un corps solide de même densité sans que les pressions qui s'y exercent ne soient altérées[101]. Selon ce principe, aujourd'hui connu sous le nom de *théorème de Pascal* ou de *principe de transmission des pressions*[102],

> « un Fluide ne peut être en équilibre, à moins que chacune de ses parties ne soit pressée également de tous les côtés »,

Dans la pratique, D'Alembert donne deux méthodes permettant, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, d'établir l'équation du mouvement à partir de l'application de ces deux principes (principe de dynamique et principe d'égalité de la pression en tous sens) : la première clôt son *Traité de dynamique* (1743)[103] ; la seconde, exposée, pour le cas d'un fluide pesant, dans l'art. 100 de son *Traité des fluides*, s'appuie sur le précédent énoncé de son principe de dynamique (art. 86) et sur la loi d'équilibre d'un fluide dans un vase vertical ouvert en ses deux extrémités[104]. Nous aurons l'occasion, dans le chapitre VIII, de les examiner dans le détail et de les comparer et nous contenterons donc, pour l'heure, de présenter l'essentiel de sa démarche à la lumière du raisonnement proposé à la fin de son traité de 1743.

Pour s'assurer de la vérification du principe d'égalité de la pression en tous sens, D'Alembert y considère une tranche quelconque d'épaisseur nulle, c'est-à-dire restreinte à une ligne horizontale, par exemple KZ, séparant le fluide en deux masses $ABZK$ et $ZKDC$. L'équilibre de la masse totale $ABDC$ ne repose plus, dès lors, que sur l'égalité entre le poids s'exerçant sur KZ de O vers O'' et le poids s'exerçant de KZ de O' vers O'' (voir la Fig. I). Ces deux poids, D'Alembert les exprime comme le produit la

[98] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1744, Préface, p. xiij.

[99] *Encyclopédie*, t. VI, 1756, p. 881a-890b, signé *(O)*.

[100] *Hypomnemata mathematica*, vol. 4, Leyden, 1605.

[101] Voir, pour plus de détails, J. C. Poggendorff, *Histoire de la physique*, trad. de E. Bibart et G. de la Quesnerie, 1883, p. 204-205 ; C. Truesdell, « Rational Fluid Mechanics, 1787-1765 », 1754, p. X-XII, et J. Casey, « The Principle of rigidification », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 43, 1992, p. 329-383.

[102] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1744, Livre I, art. 9, p. 7.

[103] D'Alembert, *Traité de dynamique*, art. 173, p. 183-184.

[104] D'Alembert, *Ibid.* note 102, Livre I, art. 22-25, p. 19-21.

section y de la tranche KZ par les pressions respectivement exercées par les masses de fluide $ABZK$ et $ZKDC$, ou, ce qui revient au même en vertu de son principe de dynamique, comme le produit de la section y par la somme des forces accélératrices perdues par les tranches comprises entre les hauteurs O et O'', et O' et O''. Elles valent donc $y\int_O^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ et $-y\int_{O''}^{O'}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$, et l'équilibre du volume de fluide $ADBC$ se résume finalement à la relation

$$y\int_O^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=-y\int_{O''}^{O'}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_O^{O'}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0. \tag{1}$$

C'est là la traduction moderne de l'équation du mouvement donnée dans l'art. 100 du *Traité des fluides*[105].

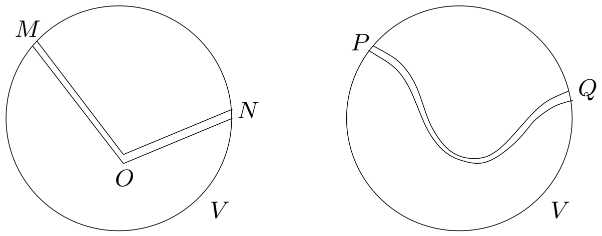
Le « principe d'équilibre des tuyaux curvilignes »

Cette même équation correspond, plus généralement, à l'équation dalembertienne d'un écoulement étudié selon une unique variable d'espace. Cependant, l'hypothèse du parallélisme, qui constitue une constante dans sa théorie de 1744, laisse peu à peu la place dans ses écrits postérieurs à de nouvelles façons de représenter le mouvement d'un fluide. Dans le courant des années 1760, nous ne tarderons pas à y revenir, D'Alembert et Borda envisagent l'écoulement dans un vase comme s'opérant à l'intérieur d'un ensemble de canaux curvilignes infiniment étroits. Les déclinaisons de cette nouvelle hypothèse jouent un rôle central dans le cadre du développement de l'approche unidimensionnelle donné dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57. Elles supposent, dans le même temps, d'apporter quelques variantes à la façon d'établir l'équation du mouvement dans le *Traité des fluides* : au lieu de se rapporter à une masse globale divisée en tranches parallèles, celle-ci se voit appliquée à l'intérieur de canaux curvilignes infiniment étroits reliant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans le vase.

Le raisonnement de D'Alembert, dans ce nouveau cas de figure, s'appuie sur un corollaire du principe d'« égalité de la pression en tous sens », le « principe d'équilibre des tuyaux rectilignes », selon lequel un canal quelconque MON formé de deux branches rectilignes MO et NO partant de la surface d'un volume de fluide V en équilibre et aboutissant en un point quelconque O situé à l'intérieur de ce volume est lui-même en équilibre. Dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, art. 14, p. 14, D'Alembert en attribue la paternité à Maclaurin, qui en fait usage le premier dans son mémoire « De

[105] Dans l'art. 100, p. 84, de la première édition du *Traité des fluides* (1744), D'Alembert écrit que « $\int dx\cdot(gdt-dv)$ doit être égale à zéro ».

Causa physica Fluxus et Refluxus Maris »[106] (1740) et son *Treatise of Fluxions* (1742). Toujours selon D'Alembert, Clairaut l'étend ensuite aux canaux curvilignes dans sa *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (1743). Le principe devient ainsi le « principe d'équilibre des tuyaux curvilignes ». Il assure l'équilibre d'un canal curviligne quelconque de fluide PQ ralliant, par ses deux extrémités P et Q, la surface de la portion de fluide V en équilibre à l'intérieur de laquelle le dit canal se trouve creusé. Dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), p. 49, D'Alembert précise que D. Bernoulli en donne, quelques années plus tôt, un premier énoncé dans la section II, § 3, de son *Hydrodynamique* (1738), tout en reconnaissant le mérite revenant à Clairaut pour ce qui est de son application dans le cadre du problème de la Figure de la Terre.



(a) (b)

Fig. II – (a) Tuyau rectiligne MON.
(b) Tuyau curviligne PQ.

Dans son étude sur l'histoire de la théorie de la figure de la Terre, I. Todhunter[107] précise que le « principe d'équilibre des tuyaux curvilignes », énoncé et démontré par Maclaurin dans le mémoire « De Causa physica Fluxus et Refluxus Maris » et le *Treatise of Fluxions* correspond à une extension du *principe d'équilibre des colonnes* de Newton[108], principe selon lequel deux colonnes, c'est-à-dire deux canaux rectilignes, passant par le centre et joignant la surface d'une sphère de fluide en équilibre sont en équilibre mutuel. Il note d'ailleurs, en faisant référence aux détails donnés par D'Alembert p. 49 de la seconde édition du *Traité des Fluides* (1770), que « cette extension du principe d'équilibre des colonnes semble avoir été considérée comme importante à cette époque »[109]. Concernant le « principe d'équilibre des tuyaux curvilignes », I. Todhunter, C. Truesdell et J. L. Greenberg s'accordent, dans leurs travaux respectifs[110], à en attri-

[106] *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1740*, Paris, 1741, p. 193-234.

[107] I. Todhunter, *A history of mathematical theories of attraction and the figure of the Earth, from the time of Newton to that of Laplace*, Londres, Macmillan, 1873, vol. I : voir notamment les § 24, 55, 245 et 302.

[108] Cf. I. Newton, *Philosophiae naturalis principa mathematica*, Londres, 1687 (2nde éd., 1713 ; 3e éd., 1726), vol. III, art. 20, § III.

[109] I. Todhunter, *Ibid.* note 107, § 246, p. 136.

[110] I. Todhunter, *Ibid.* note 107, § 55, p. 30 ; C. Truesdell, « Rational Fluid Mechanics 1687-1765 »,

buer la paternité à Clairaut pour ce qui concerne le problème de la Figure de la Terre, mais précisent néanmoins que Huygens, quoiqu'il ne le démontre et ne l'applique pas, le formule dès 1690 dans son *Discours de la cause de la pesanteur*, ce dernier déclarant en effet que le « principe d'équilibre des colonnes » de Newton « doit arriver de quelque maniere qu'on conçoive que le canal soit fait, pouvû qu'il aboutisse de part et d'autre de la surface »[111].

Dans le mémoire 57, ces deux principes d'équilibre des tuyaux rectilignes et curvilignes se trouvent couramment utilisés. Combinés avec l'emploi du principe de la dynamique, ils permettent d'appliquer l'équation du mouvement (1) à l'intérieur de n'importe quel canal ou portion de fluide ralliant ou bien les surfaces supérieure et inférieure, ou bien la même surface, supérieure ou inférieure, de la masse de fluide s'écoulant dans un vase. La méthode permettant de l'établir est donnée dans le § XVI, p. 157-158 du Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761). Elle consiste à définir des éléments de fluide perpendiculaires aux parois du canal, et donc assimilables à des tranches. Dans le Mémoire 57, D'Alembert travaille également sur de simples éléments infinitésimaux de fluide dont la forme n'est pas précisée. Dans un cas comme dans l'autre, sa démarche permet de se ramener au cas de figure traité dans le *Traité des fluides*.

2. Les principes fondateurs de l'approche analytique des écoulements de D'Alembert

L'emploi récurrent, dans le Mémoire 57, de ces deux corollaires du principe d'« égalité de la pression en tout sens » constitue une première illustration de l'influence de l'approche analytique sur les futurs développemements des travaux de D'Alembert dans le cadre d'une approche unidimensionnelle des écoulements — nous aborderons précisément ce sujet dans le chapitre V. Les principes d'équilibre des tuyaux rectilignes et curvilignes fondent en effet sa théorie dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752). Leur traduction en termes mathématiques, combinée avec l'application de son principe de dynamique, le conduit à l'une des deux équations du système d'EDP gouvernant l'écoulement plan d'un fluide incompressible dans un vase. Nous détaillerons ici les principales étapes du raisonnement correspondant de D'Alembert dans son traité de 1752, puis nous procéderons de même pour la seconde EDP obtenue par le savant : l'équation traduisant le caractère incompressible du fluide.

1954, p. XV et XX; J. L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995, p. 650, note 8.

[111] C. Huygens, *Traité de la lumière... avec un discours de la cause de la pesanteur*, Leyden, 1690, p. 156.

La formulation analytique du principe de l'hydrostatique

Pour ce qui est de la question de l'équilibre d'un fluide dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752), la théorie de D'Alembert se situe dans le prolongement de celle de Clairaut. Dans sa *Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique* (1743), ce dernier est en effet parvenu à établir la condition d'équilibre d'un fluide incompressible[112]. Soient $R(x,z)$ et $\mathcal{Q}(x,z)$ les composantes de la force dans les directions z et x, cette condition assure que l'intégrale de l'« effort » $Rdz + \mathcal{Q}dx$ (nous parlerions aujourd'hui de *travail élémentaire*) s'exerçant sur l'élément ds d'un canal curviligne infinment étroit ne dépend que de ses bornes d'intégration. Ceci revient à affirmer que $Rdz + \mathcal{Q}dx$ est une forme différentielle complète (c'est-à-dire *exacte* pour employer le terme moderne), ou que l'équation $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{d\mathcal{Q}}{dz}$ se trouve vérifiée[113]. Dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, D'Alembert donne deux nouvelles démonstrations de ce résultat. Nous n'évoquerons que la première, pour l'intérêt qu'elle présente du point de vue mathématique[114].

Ayant montré, préalablement à cette démonstration, que le « principe d'équilibre des canaux rectilignes » et le « principe des canaux curvilignes » constituent des conséquences du principe d'« égalité de la pression en tout sens »[115], D'Alembert applique ce dernier à un rectangle infinitésimal de fluide H ou $MNOQ$ de longueur $dz = MN$ et de largeur $dx = MO$, sur lequel s'exercent les forces quelconques $R(x,z)$ et $\mathcal{Q}(x,z)$ dans les directions $AP = x$ et $PM = z$ (voir la Fig. III). Là où Clairaut établissait l'équilibre à l'échelle du tuyau curviligne, D'Alembert définit, quant à lui, un élément de fluide de densité $\delta(x,z)$ soumis à des forces de composantes $R(x,z)$ et $\mathcal{Q}(x,z)$, ces trois quantité δ, R et $\mathcal{Q}$ étant explicitement considérées comme des fonctions de x et z

[112] Pour plus de détails sur l'établissement de cette condition d'équilibre dans la *Théorie de la figure de la Terre* de Clairaut, voir I. Todhunter, *Ibid.* note 107, vol. I, § 301-307, p. 193-197 ; I. Passeron, *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIII^e siècle – Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1994, 3^e partie, chap. II ; J. L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995, p. 453-458.

[113] L'équivalence entre ces deux formulations est assurée, à cette époque, par un critère selon lequel $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{d\mathcal{Q}}{dz}$ si et seulement si $Rdz + \mathcal{Q}dx$ est une forme différentielle complète. Nous reviendrons plus précisément sur l'histoire et le statut de ce critère dans le chapitre IV, p. 101.

[114] La seconde démonstration est donnée dans l'art. 161, p. 190-194. Pour une étude détaillée des travaux de D'Alembert sur les questions de l'équilibre et de la résistance des fluides dans cet ouvrage, voir C. Truesdell, « Rational Fluid Mechanics, 1787-1765 », 1754, p. L-LVIII, et G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

[115] Cf. *Essai sur la résistance des fluides*, art. 13-18, p. 13-15. Dans l'art. 18, en considérant un canal curviligne comme une succession de canaux rectilignes de longueur infinitésimale, D'Alembert montre par ailleurs que le « Principe de l'équilibre des Canaux curvilignes, n'est qu'un Cororralire du principe plus simple de l'équilibre des Canaux triangulaires rectilignes, aboutissans à la surface du Fluide : Principe dû à *M. Maclaurin* » (p. 15).

différentiables suivant ces deux variables d'espace. Il traduit ainsi mathématiquement le fait que le fluide est un milieu continu, ce qui va lui permettre d'y appliquer le calcul aux dérivées partielles : aussi, comme le note G. Grimberg, « c'est surtout dans le traitement mathématique [des] grandeurs que D'Alembert se différencie de Clairaut »[116].

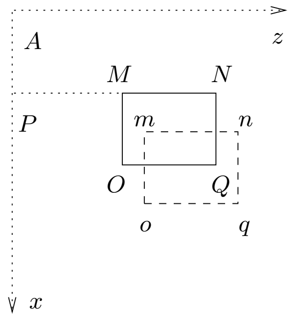


Fig. III – Mouvement de la particule de fluide H entre deux instants t ($MNOQ$) et $t + dt$ ($mnoq$).

Le principe d'« égalité de la pression en tous sens » se trouve, quant à lui, formulé en terme d'égalité entre « la force des colonnes MN & NQ suivant MN & NQ » et « celle des colonnes MO & OQ suivant MO & OQ »[117]. Observant que la force de la colonne MO suivant MO correspond au produit $\delta R dx$, D'Alembert obtient la force de la colonne NQ suivant NQ grâce à la différentiation de $R(x, z)$ et $\delta(x, z)$ à x constant : celle-ci vaut donc

$$dx \left(R + dz \frac{dR}{dz} \right) \left(\delta + dz \frac{d\delta}{dz} \right).$$

De même, les forces des colonnes MN et OQ suivant MN et OQ sont respectivement données par $\delta \mathcal{Q} dz$ et

$$dz \left(\mathcal{Q} + dx \frac{d\mathcal{Q}}{dx} \right) \left(\delta + dx \frac{d\delta}{dx} \right).$$

Le principe d'égalité de la pression en tout sens conduit ainsi à l'égalité

$$\delta \mathcal{Q} dz + \left(R + dz \frac{dR}{dz} \right) \left(\delta + dz \frac{d\delta}{dz} \right) dx = \delta R dx + \left(\mathcal{Q} + dx \frac{d\mathcal{Q}}{dx} \right) \left(\delta + dx \frac{d\delta}{dx} \right) dz,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d(\delta R)}{dz} = \frac{d(\delta \mathcal{Q})}{dx},$$

en négligeant les termes du 3$^{\text{e}}$ ordre. En posant $\delta = \text{Cste}$, D'Alembert se ramène au cas incompressible et parvient ainsi à la condition d'équilibre $\dfrac{dR}{dz} = \dfrac{d\mathcal{Q}}{dx}$ précédemment

[116] G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998, p. 22.

[117] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, art. 19, p. 17.

obtenue par Clairaut.

Du principe de l'hydrostatique à la première équation du mouvement

D'Alembert établit sa première équation « analytique » du mouvement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'un vase $ABFE$ ouvert en ses deux extrémités AB et EF (voir la Fig. IV) dans l'art. 149 de l'*Essai sur la résistance des fluides.*

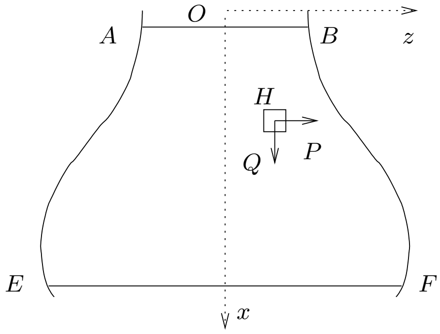


Fig. IV – Ecoulement d'un volume de fluide dans un vase $ABEF$ ouvert en ses deux extrémités AB et EF.

Il se refère, pour ce faire, à la méthode donnée dans l'art. 48 de l'ouvrage pour le problème de la résistance éprouvée par un corps solide immergé à l'intérieur d'un fluide en mouvement, méthode procédant de l'application de son principe de la dynamique. Ce dernier permettant de ramener un problème de dynamique (celui du mouvement du fluide), à un problème de statique (l'équilibre de ce même fluide), le raisonnement de D'Alembert consiste à substituer, dans la condition d'équilibre d'un fluide incompressible $\frac{dR}{dz} = \frac{dQ}{dx}$ les composantes F_x et F_z des forces accélétratices perdues par l'élément de fluide au cours du mouvement aux composantes des forces R et Q s'exerçant selon les mêmes directions dans le cas de l'équilibre. En d'autres termes, sachant, d'après le principe de D'Alembert, que l'élément de fluide resterait en équilibre pour peu que les forces F_x et F_z qui s'y appliquent dans les directions x et z soient détruites au cours du mouvement, ces forces vérifieront[118]

$$\frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz}.$$

Il ne reste plus, dès lors, qu'à y injecter l'expression de F_x et F_z.

D'Alembert définit respectivement, pour ce faire, les composantes horizontale et verticale de la vitesse animant l'élément de fluide H sous la forme de deux fonctions

[118] Cela équivaut, en termes modernes, à écrire que le champ de forces (F_x, F_z) est conservatif.

$P(t, x, z)$ et $Q(t, x, z)$ différentiables suivant les deux variables d'espace z et x et la variable temporelle t — il définit par là-même, les prémices du concept moderne de *champ de vitesse* : voir la Fig. IV. Il remarque ensuite que la contiguité de l'écoulement au niveau des parois du vase, c'est-à-dire pour $z = y$, conduit à la relation $\frac{Q}{P} = \frac{dx}{dy}$, ce qui l'incite à procéder à la séparation des variables spatiales et temporelles au sein des deux composantes, d'abord au niveau de la paroi du vase, puis, de façon plus générale, en tout point de l'écoulement, de telle sorte que $P(t, x, z) = \theta(t)p(x, z)$ et $Q(t, x, z) = \theta(t)q(x, z)$ — nous reviendrons plus longuement sur les implications physiques de cette opération dans le chapitre IV.

Sachant que[119]

$$\begin{cases} F_x = g - \dfrac{dQ(t, x, z)}{dt}, \\ F_z = -\dfrac{dP(t, x, z)}{dt}, \end{cases}$$

D'Alembert procède dès lors à la différentiation des composantes P et Q de la vitesse en considérant implicitement les variables spatiales x et z comme des fonctions de la variable temporelle t. Il obtient ainsi[120]

$$\begin{cases} F_x = g - \dfrac{d(\theta(t)q(x, z))}{dt} = g - \dfrac{qTdt + \theta Adx + \theta Bdz}{dt} = g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp \\ F_z = -\dfrac{d(\theta(t)p(x, z))}{dt} = -\dfrac{qTdt + \theta A'dx + \theta B'dz}{dt} = -pT - \theta^2 A'q - \theta^2 B'p, \end{cases}$$

avec $T = \frac{d\theta(t)}{dt}$, $A = \frac{dq(x, z)}{dx}$, $B = \frac{dq(x, z)}{dz}$, $A' = \frac{dp(x, z)}{dx}$ et $B' = \frac{dp(x, z)}{dz}$, c'est-à-dire, compte tenu de la condition d'équilibre $\frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz}$:

$$\frac{d(g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp)}{dz} = \frac{d(-pT - \theta^2 A'q - \theta^2 B'p)}{dx}. \tag{2}$$

Cette équation, donnée par D'Alembert dans l'art. 149, p. 182, de l'*Essai sur la résistance des fluides*, est aujourd'hui connue sous le nom d'*équation de vorticité de Helmholtz*. Elle caractérise un écoulement instationnaire incompressible dans la circulation

---

[119] Les composantes des forces détruites F_x et F_z correspondent, en termes modernes, à la résultante des forces extérieures $(g, 0)$, ici restreintes à la gravité, et des forces d'inertie $\left(-\frac{dQ}{dt}, -\frac{dP}{dt}\right)$.

[120] Dans ce chapitre VIII de l'*Essai sur la résistance des fluides*, de même que dans le Mémoire 4 de ses *Opuscules* t. I (1761), D'Alembert commet une erreur de calcul : il obtient θ au lieu de θ^2 dans les expressions suivantes de F_x et F_z. L'erreur sera signalée par Lagrange dans l'art. XLIII de son mémoire « Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique » (*Mélanges de Turin*, t. II, *pour les années 1760-1761*, 1762, p. 196-298 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 365-468). D'Alembert l'en remerciera dans sa lettre du 15 novembre 1762 et corrigera le calculs dans l'art. 17, p. 47-49, du Mémoire 31 de ses *Opuscules* t. V (1768).

se conserve. Nous l'écririons

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathsf{v}}{\partial t} - \mathsf{v} \times (\nabla \times \mathsf{v})\right] = 0,$$

avec v le champ de vitesse bi-dimensionnel de composantes $P = \theta p$ et $Q = \theta q$ en coordonnées cartésiennes.

Partant de là, D'Alembert se contente finalement de montrer que l'équation $A' = B$, ou $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, y satisfait, restreignant ainsi son statut à celui de condition suffisante du problème[121]. En termes modernes, cette dernière équation s'écrirait $\nabla \times \mathsf{v} = 0$. Elle caractérise un *écoulement irrotationnel* ou *potentiel*[122], et correspond à la première des deux EDP gouvernant, selon la théorie analytique du savant, le mouvement d'un fluide incompressible dans un vase.

La seconde équation du mouvement

La seconde équation du mouvement découle, quant à elle, de l'incompressibilité du fluide. Elle correspond à l'équation de conservation du volume. D'Alembert considère, pour l'établir, le mouvement de l'élément rectangulaire de fluide H ou $MNQO$ (voir la Fig. III) entre deux instant t et $t + dt$, de telle sorte que $MNQO$ devienne $mnqo$ au bout de l'intervalle de temps dt (avec, rappelons-le, $MO = dx$ et $MN = dz$). Il vient ainsi

$$\begin{cases} mo = Q(t, x + dx, z)dt = dx + dx\dfrac{dQ}{dx}dt = \left(1 + \dfrac{dQ}{dx}dt\right) dx, \\ mn = P(t, x, z + dz)dt = dz + dz\dfrac{dP}{dz}dt = \left(1 + \dfrac{dP}{dz}dt\right) dz. \end{cases}$$

Sachant, d'autre part, que la conservation du volume de fluide de la particule entre les deux instants t et $t + dt$ s'écrit $MO \times MN = dx \times dz = mo \times mn$, D'Alembert obtient, après avoir négligé les termes d'ordre 2 en dt

$$dxdz = dxdz \left(1 + \frac{dQ}{dx}dt + \frac{dP}{dz}dt\right),$$

[121] Cette déduction équivaudrait, en termes actuels, à assimiler l'ensemble des écoulements dont la circulation se conserve à des écoulements potentiels. Cependant, les deux propriétés ne sont pas équivalentes : l'irrotationalité ou le caractère potentiel d'un écoulement implique l'existence d'un champ de force conservatif, mais la réciproque est fausse. Dans le Mémoire 4 de ses *Opuscules* t. I (1761), D'Alembert, poussé par les critiques émises par Euler dans son mémoire « Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides » (*HAB* année 1755 (1757), p. 316-361), fera état d'un raisonnement plus satisfait de ce point de vue. Voir, pour plus de détails, A. Coste, A. Guilbaud, « Présentation du Mémoire 4 », in D'Alembert, *Œuvres Complètes*, vol. III/1, *Opuscules Mathématiques* tome I (1761), P. Crépel, A. Guilbaud et G. Jouve (dir.), CNRS Éditions, parution prévue pour la fin 2008.

[122] Tel que la vitesse dérive, autrement dit, d'un potentiel ϕ vérifiant $\mathsf{v} = \nabla\phi$.

c'est-à-dire $\dfrac{dP}{dz} = -\dfrac{dQ}{dx}$, ou encore

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx},$$

compte tenu de $P(t,x,z) = \theta(t)p(x,z)$ et $Q(t,x,z) = \theta(t)q(x,z)$. Cette équation, connue sous le nom d'*équation de continuité*[123], s'écrirait aujourd'hui $\nabla \cdot \mathsf{v} = 0$.

Synthèse : les équations du mouvement de D'Alembert

• Dans le cadre de l'étude du mouvement d'un fluide selon deux variables d'espace, D'Alembert dispose donc du système de deux EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre suivant[124] :

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz}, \\ \dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{dq}{dx}. \end{cases}$$

C'est là le système que D'Alembert tente de résoudre dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), les Mémoires 31 et 33 des *Opuscules* t. V (1768), ainsi que le Mémoire 57 § VII, art. 14-34, des *Opuscules* t. VIII (1780).

• Dans le cadre de l'approche unidimensionnelle, l'équation du mouvement, rappelons-le, s'écrit

$$\int \left(g - \frac{dv}{dt} \right) dx = 0.$$

L'intégrale porte sur le volume de fluide sur lequel elle s'applique, c'est-à-dire l'ensemble du fluide dans le vase dans le cas du parallélisme des tranches, ou le volume de fluide s'écoulant dans l'un quelconque des tuyaux curvilignes infiniment étroits dans le cas des nouvelles hypothèses introduites dans le courant des années 1760. Du point de vue des principes employés, cette équation renvoie à la première des deux EDP précédentes. Elle est également complétée par une équation de continuité assurant la constance du débit de l'écoulement dans le vase ou le canal curviligne considéré. Il s'agit de la relation $yv = \text{Cste}$, dans laquelle $v(x)$ désigne la vitesse du fluide situé à un endroit de la conduite de hauteur x et de section y.

---

123 Cette appellation apparaît dès 1755, dans le mémoire d'Euler « Principes généraux du mouvement des fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315.

124 Il découvre donc, dans le même temps, ce que les mathématiciens du siècle suivant appelleront les *conditions de Cauchy-Riemann*.

3. Le principe de conservation des forces vives, le statut de la loi leibnizienne de continuite et la définition du concept de force

La démonstration du principe de conservation des forces vives dans le Traité des fluides *(1744)*

Les principes de la dynamique et de l'hydrostatique ne sont pas les seuls employés par D'Alembert dans le cadre de l'approche unidimensionnelle. « Un des plus grands avantages qu'on tire de notre Théorie », écrit-il en effet dans la préface du *Traité des fluides*[125],

> « c'est de pouvoir démontrer que la fameuse Loi de Méchanique, appellée *la conservation des forces vives*, a lieu dans le mouvement des Fluides comme dans celui des Corps solides ».

Ce principe de conservation des forces vives, D'Alembert reproche tout d'abord à D. Bernoulli de l'avoir appliqué sans le démontrer dans son *Hydrodynamique* (1738). Quant au mémoire préliminaire à cet ouvrage, publié en 1729 dans le volume des anciens Mémoires de Petersbourg pour l'année 1727[126], il juge que son prédécesseur n'apporte[127]

> « d'autre preuve de la conservation des forces vives dans les Fluides, sinon qu'on doit regarder un Fluide comme un amas de petits Corpuscules élastiques qui se pressent les uns sur les autres, & que la conservation des forces vives a lieu, de l'aveu de tout le monde, dans le choc d'un système de Corps de cette espéce ».

La démonstration de D. Bernoulli repose, autrement dit, sur les lois de la communication du mouvement entre corps solides. C'est d'abord, nous y reviendrons plus longuement dans un instant, une première illustration de l'influence de la mécanique des corps solides sur le processus de fondation théorique de l'hydrodynamique à partir de 1738. C'est, d'autre part, une preuve qui, selon D'Alembert, « ne doit pas être regardée comme d'une grande force »[128]. Comme il s'y était employé dans son *Traité de dynamique* pour le cas du mouvement des corps solides, il propose donc de remédier à ce manque dans le cas du mouvement des fluides, en en déduisant l'expression à partir de l'équation du mouvement obtenue par l'application de son principe de la dynamique.

La démonstration proprement dite se trouve à l'art. 90, p. 74-76, de la première édition du *Traité des fluides* (1744). Elle s'applique au cas du mouvement d'un fluide

---

[125] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, préface, p. xvj.

[126] D. Bernoulli, « Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium », *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. 2, 1727 (1729), p. 111-125.

[127] D'Alembert, *Ibid.* note 125.

[128] D'Alembert, *Ibid.* note 125.

non pesant considéré dans l'hypothèse du parallélisme des tranches (voir la Fig. I, p. 60). D'Alembert part, dans ce cadre, de l'équation du mouvement $\int_{O'}^{O''} dvdx = 0$, et y injecte la relation $GH \times u = yv$ assurant la constance du débit de l'écoulement entre une tranche de référence de section GH et de vitesse u et une tranche quelconque $KkzZ$ de section y et de section v. Il obtient ainsi

$$\int_{O'}^{O''} \frac{ydx \times dv}{y} = \int_{O'}^{O''} \frac{ydx \times vdv}{u \times GH} = 0,$$

ou encore $\int_{O'}^{O''} ydx \times d(v^2) = 0$, de telle sorte que

$$\int_{O'}^{O''} ydx \times v^2 = \text{Cste}.$$

Il s'agit là d'une des formulations du principe de conservation des forces vives, selon laquelle, d'après la définition que D'Alembert en donne dans l'article « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives » de l'*Encyclopédie*, « la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses fait toujours une quantité constante »[129].

Dans le cas d'un fluide pesant, traité dans l'art. 100, p. 84-85 de la première édition du *Traité des fluides*, l'équation du mouvement s'écrit $\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$. D'Alembert opère tout d'abord une première réécriture grâce à la relation $dt = \frac{dx}{v}$, c'est-à-dire $dt = \frac{ydx}{u \times GH}$ puisque $GH \times u = yv$. Il parvient ainsi à

$$\int_{O'}^{O''} gdx = \int_{O'}^{O''} \frac{u \times GH \times dxdv}{ydx}.$$

L'hypothèse du parallélisme des tranches et la relation $ydx = \text{Cste}$ découlant de l'incompressibilité du fluide le conduisent ensuite à

$$(ydx) \int_{O'}^{O''} gdx = \int_{O'}^{O''} ydx \times vdv,$$

soit

$$(ydx) \int_{O'}^{O''} gdx = \int_{O'}^{O''} ydx \times d\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

puis

$$(ydx) \int_{O'}^{O''} gdx = d\left(\int_{O'}^{O''} \frac{v^2}{2} \times ydx\right),$$

[129] *Encyclopédie*, art. « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives », t. VI, 1756, p. 114a.

c'est-à-dire, sachant que $v^2 = \frac{GH^2}{y^2}u^2$:

$$(ydx) \times g \times O'O'' = d\left(\frac{1}{2}Nu^2\right), \tag{3}$$

avec $N = \int \frac{GH^2dx}{y}$. Cette équation (3) correspond à la version différentiée, sur l'intervalle de temps dt, de l'équation d'égalité entre la descente actuelle et la montée potentielle du centre de gravité de la masse totale de fluide, c'est-à-dire une version différentiée de la formulation du principe de conservation des forces vives employée par D. Bernoulli. Dans son *Hydrodynamique*, ce dernier différentie en effet, afin de parvenir à une établir l'équation différentielle du mouvement, une formule équivalente à[130]

$$\int_{O'}^{O''} gx \times ydx = \int_{O'}^{O''} \frac{v^2}{2} \times ydx,$$

avec ydx la masse de chaque tranche, c'est-à-dire

$$\int_{O'}^{O''} \left(\frac{v^2}{2} - gx\right) ydx = 0,$$

ou, plus simplement encore,

$$gMh = \frac{1}{2}Nu^2, \tag{4}$$

avec $M = \int_{O'}^{O''} ydx$ et $h = O'O''$ la masse et la hauteur totales du fluide dans le vase. Nous parlerions aujourd'hui d'égalité entre l'opposé de l'énergie potentielle $-E_p$ et l'énergie cinétique E_c, ou encore d'invariance de l'énergie mécanique $E_M = E_c + E_p$ d'un fluide considéré comme un système de corps (les tranches) soumis à l'accélération de la pesanteur g.

Principe premier dans l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli, la conservation des forces vives revêt donc un tout autre statut dans la théorie des écoulements de D'Alembert, celui d'*intégrale première du mouvement*. Cependant, l'énoncé, tel que nous venons d'en rendre compte, est encore incomplet.

Dans l'article « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives » de l'*Encyclopédie*, D'Alembert précise en effet que[131]

[130] Dans l'*Hydrodynamique*, Sect. III, § 4 à 7, p. 30-33, D. Bernoulli y raisonne essentiellement de manière géométrique. Pour plus de détails sur sa méthode de mise en équation, voir G. K. Mikhailov, « Introduction to Daniel Bernoulli's Hydrodynamica », *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Hydrodynamique II, vol. V, Birkhäuser Verlag, Bâle, 2002, p. 49-55.

[131] *Encyclopédie*, art. « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives », t. VI, 1756, p. 115a.

> « le principe de la conservation des *forces vives* n'a jamais lieu lorsque les corps qui agissent les uns sur les autres passent subitement d'un mouvement à un mouvement différent, sans passer par les degrés de mouvement intermédiaires, à moins que les corps ne soient supposés à ressort parfait ».

D'Alembert fait ici référence à la « loi de continuité », un axiome métaphysique énoncé par Leibniz selon lequel les mouvements, dans la nature, ne changent que par degrés insensibles. Cette loi avait joué un rôle crucial dans le cadre de deux crises profondes touchant directement aux conditions d'application du principe de conservation des forces vives : la querelle des forces vives et la question des lois de la communication du mouvement. Son statut vis-à-vis du principe de conservation des forces vives dans sa théorie des écoulements de 1744, de même que sa conception de la force animant un fluide en mouvement à l'intérieur d'un vase, en constituent, comme nous allons le voir, un héritage direct.

La querelle des forces vives et la question des lois de la communication du mouvement : rappel historique

La première de ces deux polémiques mécaniciennes éclate à l'énoncé par Leibniz, dans son écrit « Brevis Demonstratio erroris Memorabilis cartesii et aliorum circa legem naturalem » (1686)[132], de sa théorie des forces vives. Le savant et philosophe allemand, séduit par l'application du principe de Huygens au problème des lois de la communication du mouvement[133], propose une doctrine de la « montée potentielle » (« ascensus potentialis »), rebaptisée « vis viva » ou « forces vives », doctrine au sein de laquelle la conservation de la montée potentielle dans le choc des corps élastiques doit permettre de préciser une définition physique et métaphysique du concept de « force ».

Leibniz établit une distinction de nature entre le comportement « statique » d'un corps posé sur un plan horizontal, et la « dynamique » d'un corps lancé verticalement, dont la force doit se consumer à mesure que s'exerce la pesanteur. Dans le premier cas, la force en jeu, appelée « force morte », sera représentée par le produit de la masse par la vitesse. Dans le second, équivalent à un mouvement uniformément retardé, on fera appel à la « force vive », estimée par le produit de la masse par le carré de la vitesse. La doctrine de Leibniz, ébranlant toute l'Europe mécanicienne, oppose donc partisans et adversaires des forces vives : partisans, selon lesquels la « force vive » — ce que nous appellerions aujourd'hui l'*énergie cinétique* — doit permettre d'évaluer la force des corps en mouvement, et adversaires pour qui cette même force doit être mesurée par la « force morte », c'est-à-dire la quantité de mouvement — le terme est couramment employé par les savants de l'époque.

---

[132] *Acta Eruditorum*, mars 1686.

[133] C'est rappelons-le, à l'énoncé de ce principe par Huyghens que D. Bernoulli se réfère dans son *Hydrodynamique* : voir Chapitre I, p. 40.

Dans ce contexte, la question de l'admissibilité du principe des forces vives devient un problème emblématique de la querelle leibnizienne dans la première moitié du XVIII^{e} siècle. En 1724 et 1726, elle focalise tout particulièrement l'attention des savants à l'occasion de deux prix proposés par l'Académie Royale des Sciences de Paris sur les lois de la communication du mouvement. Jean Bernoulli, père de Daniel et fervent partisan de la doctrine leibnizienne, y présente successivement son *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (1724) ainsi qu'une version du même texte enrichie[134] d'un long appendice, publiée en 1727.

Jean Bernoulli, père de Daniel et fervent partisan de la doctrine leibnizienne, y présente son *Discours sur les lois de la communication du mouvement* (1724). Célèbre plaidoyer pour un recours exclusif aux forces vives dans le problème du choc, sa pièce illustre également un autre aspect de la querelle : la question de la constitution physique des corps. Grâce à la loi métaphysique, dite de continuité, selon laquelle aucun changement ne peut se faire par saut dans la nature — *natura non operatur per saltum*, c'est ainsi que Leibniz l'énonce —, J. Bernoulli justifie le caractère naturellement élastique des corps contre les défenseurs d'une matière infiniment « dure » — c'est-à-dire *parfaitement indéformable et sans restitution d'énergie*, pour employer des termes actuels. « La dureté », y écrit-il[135],

> « est absolumment impossible, & ne peut subsister avec la loy de continuité. Un peu de reflexion mettra cette vérité dans son jour. Supposons que deux corps durs en ce sens, & parfaitement égaux, se rencontrent directement avec des vîtesses égales, je dis qu'ils doivent de toute nécessité ou s'arrêter tout court en se choquant, ou rebrousser chemin après s'être choquez ; il impliqueroit que des corps durs se penetrassent ; mais ces corps ne sçauroient s'arrêter tout court, sans passer subitement du mouvement au repos, de l'être au non-être, ce qui répugne à la loy de continuité ; ni reflechir dans le second cas, qu'ils ne changent tout d'un coup leurs vîtesses affirmatives [comprendre positives], en une vîtesse negative, sans avoir parcouru auparavant toutes les dimensions successives de la premiere vîtesse, jusqu'à la destruction totale, & de la remonter par de pareilles augmentations, en une vîtesse en sens contraire ; ce qui est également oposé à cette loy »

Il s'agit là, en somme, d'un nouveau sujet de division entre les partisans de forces vives et les adeptes de la quantité de mouvement, ces derniers étant persuadés que la dureté naturelle des corps se traduit par une inévitable perte de forces vives lors de la rencontre de deux masses solides. Soient deux corps lancés l'un contre l'autre, les premiers, ralliés au point de vue de J. Bernoulli, considèrent que le choc s'opère sur un intervalle de temps non négligeable, durant lequel l'échange de forces vives, et donc l'évolution des

[134] J. Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement. Qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724. & 1726. & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans les dites années*, Paris, 1727.

[135] J. Bernoulli, *Ibid.* note 134, p. 6.

vitesses de chacune des deux masses, s'accomplit par degrés insensibles. Ce phénomène allant nécessairement de pair avec la déformation des corps durant cet intervalle de temps, il sous-entend donc l'élasticité naturelle de la matière solide. Leurs détracteurs y voient quant à eux une rencontre instantanée entre deux masses infiniment dures.

Le principe de conservation des forces vives s'applique donc chez les leibniziens comme une loi constante de la communication du mouvement. La loi de continuité, telle qu'énoncée par Leibniz dans sa *Brevis Demonstratio* de 1686, correspondait à un axiome, un « ordre immuable et perpetuel, établi depuis la création de l'Univers » en vertu duquel « tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits »[136]. « Mécanisée » par Jean Bernoulli pour la question du choc des corps élastiques, elle devient une condition inhérente à l'application du principe de conservation des forces vives[137].

D'Alembert et le concept de force

Si, comme nous l'avons vu, D. Bernoulli passe sciemment ces deux débats sous silence dans son *Hydrodynamique* afin de se prémunir contre les critiques des adversaires des forces vives, on ne peut guère en dire autant de D'Alembert dans la première édition de son *Traité des fluides*. Ce dernier présente en effet sa théorie des écoulements de 1744 comme une suite logique des recherches menées dans son *Traité de dynamique* (1743). Celui-ci s'achève en particulier sur un paragraphe de quelques pages, intitulé « De la conservation des forces vives dans les fluides ». Confirmant son projet de filiation des deux mécaniques, celle des corps solides, et celle des fluides, D'Alembert y annonce la ligne directrice de ses futures recherches en hydrodynamique[138] :

> « M. Daniel Bernoulli dans son excellent ouvrage [...] a tiré les lois du mouvement des Fluides dans des vases, de la conservation des forces vives, mais sans la démontrer. Comme notre Principe général [...] nous a conduit à en trouver la démonstration, il est évident que nous aurions pu déduire immédiatement de ce même principe le Mouvement du Fluide, ce qui aurait encore été plus lumineux et plus direct [...]. Nous entrerons là-dessus dans un détail beaucoup plus grand, lorsque nous donnerons notre Traité des Fluides »

Naturellement, ce choix le contraint à prendre position, dans les deux traités, sur les deux querelles précédemment évoquées.

---

[136] J. Bernoulli, *Ibid.* note 134, p. 5.

[137] Voir, pour plus de détails, R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, Éditions du Griffon, 1950, p. 209-211 et 225-228 et D. Ismaël Youssouf, *Les phénomènes de choc et les principes de conservation – Débats historiques et processus d'apprentissage*, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1, 1999, p. 33-130. On pourra également consulter l'*Histoire des Mathématiques* de J.-E. Montucla, vol. III, Part. V, Liv. III, « § V. De la question des forces vives », Paris, 1799-1802, p. 629-643.

[138] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1743, p. 185-186.

Sur la querelle leibnizienne tout d'abord, D'Alembert renvoie les deux camps dos à dos en présentant cette question comme une simple dispute métaphysique. Les deux notions sont en effet tout à fait équivalentes selon lui, pour peu que l'on se borne à considérer les effets de la force plutôt que leurs causes[139] :

> « Le mot de force ne nous représente qu'un être vague, dont nous n'avons point d'idée nette, dont l'existence même n'est pas trop bien constatée, et qu'on ne peut connaître tout au plus que par ses effets. Tous les géomètres conviennent entre eux sur la mesure de leurs effets, et cela doit suffire »

Pourvu qu'il soit appliqué dans les bonnes conditions, le principe de conservation des forces vives doit donc conduire aux mêmes résultats que celui de la quantité de mouvement.

Le concept de force chez D'Alembert est, de ce fait, un concept secondaire. Le savant lui préfère le concept de vitesse, comme en témoigne l'énoncé de son principe de dynamique. Il définit, à partir de là, la notion de force accélératrice φ comme la simple expression du rapport entre l'incrément de vitesse dv acquis par un corps et l'intervalle infinitésimal de temps correspondant dt, c'est-à-dire $\varphi = \frac{dv}{dt}$[140].

D'Alembert, ce faisant, se démarque également d'une autre facette de la doctrine leibnizienne, selon laquelle la force correspond à un coefficient de proportionalité entre la cause et l'effet. Il se débarasse ainsi de cet « unique axiome vague et obscur, que l'effet est proportionnel à la cause »[141], c'est-à-dire de toute idée de détermination causale, jugée trop métaphysique, pour ne considérer que l'effet produit sur le mouvement par l'action d'une force accélératrice pendant un certain intervalle de temps. La force, selon D'Alembert, n'est rien d'autre que le coefficient d'une équation différentielle caractérisant l'évolution du concept premier de sa dynamique : la vitesse[142]. Elle correspond à la dérivée première de cette dernière par rapport au temps, et équivaudra donc à une *accélération* pour le lecteur moderne : c'est ainsi que le terme de « force » doit être interprété dans le cadre de sa théorie des écoulements, et plus généralement, dans le cadre de ses recherches en mécanique. D'Alembert fait aussi quelquefois référence à la notion de « force motrice ». Il entend simplement par là le produit de la masse du corps par la force accélératrice qui lui est appliquée[143].

Notons par ailleurs que cette position n'évoluera pas chez l'auteur, et qu'on pourra donc s'en tenir à cette interprétation pour aborder son œuvre tardive sur la théorie des écoulements. Dans la seconde édition de son *Traité de dynamique*, publiée en 1758, il

---

[139] D'Alembert, « Mémoire historique sur la vie & les ouvrages de M. Jean Bernoulli », *Mercure de France*, mars 1748, p. 39-79.

[140] Cf. D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère édition, Paris, 1743, art. 19, p. 16-17.

[141] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère édition, Paris, 1743, p. xl.

[142] Nous rejoignons ici le point de vue de G. Grimberg dans sa thèse de Doctorat, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Université Paris 7, 1998, p. 250-253.

[143] La pesanteur sera donc une force accélératrice, le poids une force motrice.

fait effectivement de nouveau état de son opposition à la doctrine leibnizienne sur le sujet, en critiquant, au passage, les opinions de D. Bernoulli et d'Euler[144] :

> « La plûpart des Géometres présentent sous un autre point de vûe l'équation $\varphi dt = du$ entre les tems & les vitesses [...]. Comme l'accroissement de la vitesse est l'effet de la cause accélératrice, & qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces Géometres ne regardent pas seulement la quantité φ comme la simple expression du rapport de du à dt ; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant constant. M. *Daniel Bernoulli* [...] prétend que ce principe est seulement de vérité contingente [...]. M. *Euler*, au contraire, s'est efforcé de prouver fort au long dans sa Mécanique, que ce principe est de vérité nécessaire. Pour nous, sans vouloir distinguer ici si ce principe est de vérité nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition. »

Il revient de même à la charge dans le Mémoire 51 § III des *Opuscules* t. VI (1773), intitulé « Réflexions sur quelques loix de Méchanique », en affirmant que le principe $\varphi dt = du$[145],

> « envisagé comme purement géométrique, ou plus exactement, comme une expression purement analytique, peut toujours être vrai [...] ; parce que dans cette équation [$\varphi dt = du$], on n'est point obligé de regarder [φ] comme autre chose que comme un simple coefficient de dt. Voyez sur cela notre *Traité de Dynamique*, seconde Edition, art. 22 ».

Nous aurions, sur le même sujet, également pu aborder sa façon de concevoir les forces s'exerçant à l'intérieur d'un fluide en mouvement dans un vase. Nous traiterons en fait la question dans le chapitre VIII, dédié à sa définition de la pression d'un fluide en mouvement.

Le statut de la loi leibnizienne de continuité dans le Traité des fluides *(1744)*

Revenons, pour l'heure, sur l'influence de la seconde querelle mécanicienne, celle portant sur les lois de la communication du mouvement, sur sa théorie des écoulements de 1744. Comme les historiens J. Viard et I. Youssouf le mettent en évidence[146], l'opinion de D'Alembert penche intuitivement, dans ce cadre, en faveur de l'existence d'une « dureté originaire et primitive » des particules élémentaires constituant les corps dans la nature. C'est là le sens de sa critique à l'égard de la position de J. Bernoulli dans

[144] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 2$^{\text{nde}}$ éd., Paris, 1758, art. 22, p. 24-25.

[145] D'Alembert, *Opuscules*, t. VI, 1773, Mémoire 51, § III, p. 374.

[146] J. Viard, I. Youssouf, « Les relations entre l'élasticité et dureté dans le *Traité de Dynamique* sont-elles compatibles avec celles de l'*Encyclopédie* ? », *Revue de Synthèse*, n° 4, 1998, p. 123-145.

son *Discours sur les loix de la communication du mouvement* : « comment se former une idée de la matière », explique-t-il en effet dans son éloge consacré au savant, « si on n'accorde pas une dureté originaire et primitive aux éléments dont elle est composée et qui sont proprement les vrais corps ? »[147].

Pour autant, montrent-ils, ces mêmes corps présents dans la nature, ceux « que nous connaissons » par l'expérience, c'est-à-dire par l'entremise de nos sens, le savant ne les considère pas moins comme étant à la fois dotés d'une certaine dureté et d'une certaine élasticité. En fait, dans le *Traité de dynamique*, D'Alembert « n'examine point [...] s'il y a des Corps parfaitement durs », ceci étant « une question qui appartient plutôt à la Physique qu'à la Mécanique », mais se contente de supposer « des Corps parfaitement durs, que comme on suppose d'ordinaire dans la Mécanique des Leviers inflexibles, des Machines sans frottement, &c. »[148]. Il y envisage ainsi la parfaite dureté et élasticité de la matière solide comme des hypothèses théoriques, relatives à des corps idéaux, et aborde donc les deux cas de figure dans l'ouvrage. En revanche, si son principe de la dynamique lui permet de travailler dans les deux hypothèses, le principe de conservation des forces vives doit, quant à lui, être employé avec précaution, ce qui l'amène à tenter d'en définir les conditions d'application dans le problème du choc de deux corps[149] :

> « Nous pourrions démontrer la conservation des forces vives dans le choc des Corps Elastiques, en regardant ces corps comme durs, & supposant que la compression et la restitution du ressort se fit en un instant [...] ; mais comme nous avons observé que cette hypothèse ne pourrait souvent conduire aux véritables lois du choc des Corps Elastiques, nous l'abandonnerons ici, & nous démontrerons la proposition dont il s'agit, en supposant un ressort placé entre les Corps ».

La conservation des forces vives pourra donc être appliquée à la question du choc, pour peu que l'on ait pris la peine de rajouter un ressort parfait entre les corps. Dans le cas plus général d'une interaction mécanique par contact, D'Alembert s'assure ainsi du changement par degrés insensibles de la vitesse[150] :

> « Nous avons dit *soit en se poussant, soit en se choquant*, & nous distinguons *la pulsion* d'avec le *choc*, parce que la conservation des *forces vives* a lieu dans les mouvemens des corps qui se poussent, pourvû que ces mouvemens ne changent que par degrés insensibles, ou plutôt infiniment petits ; au lieu qu'elle a lieu dans les corps élastiques qui se choquent, dans le cas même où le ressort agiroit en un instant indivisible, & les feroit passer sans gradation d'un mouvement à un autre ».

---

[147] D'Alembert, « Mémoire historique sur la vie & les ouvrages de M. Jean Bernoulli », *Mercure de France*, mars 1748, p. 58. On pourra également consulter l'article « Dureté » de l'*Encyclopédie*, t. V, 1755, p. 171b-172b, signé *(O)*.

[148] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère édition, Paris, 1743, art. 137, 144-145.

[149] D'Alembert, *Traité de dynamique*, *Ibid.* note 148, art. 169, p. 180.

[150] *Encyclopédie*, art. « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives », t. VI, 1756, p. 114b-115a.

En d'autres termes, le principe de conservation des forces vives se voit conditionné, dans le *Traité de dynamique*, par cette hypothèse énoncée par Leibniz sous le nom de loi de continuité. C'est là un choix physique essentiel à la bonne compréhension des futurs travaux de D'Alembert en hydrodynamique, puisque le *Traité des fluides* hérite clairement de ce présupposé. Considéré comme une interaction mécanique entre masses de fluide (les tranches), l'écoulement devra s'opérer par degrés insensibles. En voici, pour preuve, un extrait de la préface à l'ouvrage[151] :

> « Il est toujours [note de D'Alembert : Voyez le *Traité de Dynamique*, art. 155 & 156] certain qu'on ne doit point employer le Principe de la conservation des forces vives pour trouver le mouvement d'un système de Corps, lorsqu'on suppose qu'il y a dans ce système quelque Corps dont la vitesse varie en un instant d'une quantité finie. ».

Quel intérêt cette caractéristique de sa théorie des écoulements de 1744 revêt-elle vis-à-vis de l'étude de son œuvre tardive en hydrodynamique ? Dans le *Traité des fluides*, D'Alembert procède en fait à un comparatif systématique entre ses résultats, successivement tirés de l'application de son principe et de celui de la conservation des forces vives, et ceux obtenus par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique* grâce à l'usage du second. Il en conclut que leurs solutions divergent dans un petit nombre de problèmes[152] :

> « Ce sont ceux où cet habile Géomètre a employé le Principe de conservation des forces vives, pour déterminer le mouvement d'un fluide dans lequel il y a quelque partie dont la vitesse diminue ou augmente en un instant d'une quantité finie ».

Ce sont ceux, autrement dit, pour lesquels D. Bernoulli emploie la conservation des forces vives dans un cas où la loi de continuité ne se trouve pas respectée. Ce désaccord reviendra sur le devant de la scène au moment de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Il constituera l'un des sujets de critique de Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » à l'égard de ses prédécesseurs. Les réponses de D'Alembert dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) nous permettront, comme nous le verrons dans le chapitre VII, de préciser le rôle et le statut de la loi de continuité dans sa théorie des écoulements.

Nous nous contenterons, pour l'heure, de donner un aperçu général du contenu du « Mémoire sur l'écoulement ». Après avoir précisé les principes et concepts fondant les méthodes de D'Alembert pour la mise en équation du mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un vase dans le *Traité des fluides* (1744) et l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752), il nous faut maintenant exposer les principaux aspects scientifiques du texte déclencheur de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Cette présentation

[151] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Préface, p. xix.

[152] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Préface, p. xvij-xviij.

du mémoire de Borda de 1766 nous permettra, dans le même temps, de dégager la structure du plus difficile des trois écrits composant notre corpus de recherche : le Mémoire 57, quatrième et dernier traité de D'Alembert en hydrodynamique.

Chapitre III. LE « MÉMOIRE SUR L'ÉCOULEMENT » DE BORDA : GUIDE DE LECTURE DU MÉMOIRE 57 DES *OPUSCULES MATHÉMATIQUES*

La seconde édition du *Traité des fluides*, parue en 1770, se distingue essentiellement, nous l'avons déjà mentionné, par un certain nombre d'ajouts faits aux articles de la première édition. Pour le reste, la structure reste parfaitement identique. L'ouvrage contient trois livres. Le premier concerne la question de l'équilibre des fluides, le second celle du mouvement des fluides dans des vases, le troisième, plus hétérogène, porte sur le problème de la résistance éprouvée par les corps immergés dans des fluides en mouvement, sur les lois de la réfraction des corps solides, ainsi que sur celles des fluides qui se meuvent en tourbillon. Chacun de ces livres se trouve subdivisé en chapitres, en paragraphes, puis en articles, la numérotation de ces trois niveaux hiérarchiques restant inchangée entre les deux éditions. Du point de vue de la structure, la seconde édition du *Traité des fluides* ne pose donc pas de problème. Il n'en est malheureusement pas de même pour le Mémoires 51 § IV et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VI et VIII.

1. Le Mémoire 57 : un écrit difficilement abordable

Les *Opuscules mathématiques* correspondent à un nouveau mode de publication du savant. Avec quelques écrits publiés entre 1768 et 1772 dans les volumes des *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris*, et des extraits factices de sa correspondance avec Lagrange insérés dans les *Mélanges de Turin* et les volumes d'*Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, il s'agit même de son seul support d'expression scientifique à partir de la décennie 1760. Fâché avec les Académies de Paris et de Berlin suite à plusieurs incidents relatifs à des revendications de priorité et des polémiques scientifiques pour lesquelles il estime ne pas avoir reçu le soutien escompté, ou ne pas avoir bénéficié d'un jugement impartial de leur part[153], D'Alembert cesse effectivement, à cette époque, de faire paraître ses recherches sous forme de traités ou de « mémoires académiques ». Il s'en explique partiellement dans sa lettre du 2 mars 1765 à Lagrange, après que ce dernier lui eût justement proposé d'insérer certains de ses travaux dans les *Mélanges de Turin*[154] :

[153] Voir, pour plus de détails, l'« Introduction générale des éditeurs » du vol. III/1 des *Œuvres Complètes* de D'Alembert, *Opuscules mathématiques* tome I (1761), P. Crépel, A. Guilbaud et G. Jouve (dir.), CNRS Éditions, parution prévue pour la fin 2008. On y trouvera notamment une présentation détaillée des origines et des principales caractéristiques du nouveau mode d'expression scientifique que constituent les *Opuscules*. Voir aussi, sur ce sujet, P. Crépel, « Angoisses et passions concernant l'édition des *Œuvres Complètes* de D'Alembert », *Matapli* n° 69, 2002, p. 87-101.

[154] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 13, p. 34-35.

« c'est un honneur auquel je suis très-sensible et auquel je désire fort de pouvoir répondre. Mais comme je veux éviter les tracasseries avec l'Académie, où je ne donne point de Mémoires par les raisons que je vous ai dites, et même avec l'Académie de Berlin, où depuis longtemps je n'en envoie pas non plus, voici ce que je pourrais faire : ce serait de vous écrire une grande Lettre où je traiterais fort sommairement différentes matières [...] Vous pourriez donner à cet écrit le titre d'*Extrait de différentes Lettres de M. d'Alembert à M. de la Grange* ».

Ce nouveau mode de publication s'accompagne d'une nette détérioration du style de rédaction proprement dit, celle-ci s'aggravant notablement entre 1761 et 1783. Dans les *Opuscules*, D'Alembert s'adresse en fait essentiellement à une dizaine de personnes, parmi lesquelles, selon les volumes : Lagrange et Condorcet, Euler, D. Bernoulli, Bossut, Clairaut, Frisi, Boscovich, Fontaine et, Borda, naturellement, dans le cas du Mémoire 51 § IV et du Mémoire 57 — il est d'ailleurs probable que ce dernier ne les ait jamais lus ! Les sujets de recherche se trouvent fréquemment dispersés au sein d'un même volume, au gré des envies de l'auteur. Le Mémoire 51 § IV correspond par exemple au quatrième paragraphe d'un écrit qui en compte sept, qui porte le titre de « Recherches sur différens Sujets » et qui rassemble des travaux sur la mécanique céleste, sur les lois de la mécanique, sur le calcul intégral et, bien-entendu, sur la théorie des écoulements dans les vases. Il est par ailleurs complété par un Appendice dont D'Alembert ne fait nulle mention, mais qui contient néanmoins une revendication de priorité concernant l'hypothèse des tuyaux curvilignes proposée par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » — nous y reviendrons dans le chapitre V. De manière générale, le résultat se révèle désastreux pour le commun des lecteurs. Il désarçonne de même nombre de ses amis et confrères, ainsi qu'en témoigne cet extrait de la lettre de Keralio à Frisi du 27 mai 1773 :

« Ce que vous me dites de la Sensation qu'a faite en Italie le Dernier volume des Opuscules [il s'agit du t. VI] n'a rien qui m'etonne. Les Matieres y sont encore plus hachées que dans les Volumes Precedens. Il est certain, que Si jamais l'auteur pouvoit prendre Sur luy de reunir les differens Memoires Sur le même Sujet Eparpillés dans Ses Opuscules, et en faire des Corps d'ouvrages, Il rendroit le plus grand Service aux Sciences, et procureroit infin[i]m[en]t leur avancement. Mais c'est ce qu'il n'est pas raisonable d'Esperer ».

La lecture du Mémoire 57, vous l'aurez compris, nécessite donc de s'armer de patience — le Mémoire 51 § IV pose le même problème, mais à une moindre échelle : il ne contient qu'une petite douzaine de pages, centrées sur un seul sujet de recherche. La structure du texte n'est jamais explicitée, le style décousu, les notations ne sont pas stables, et sont même fréquemment issues des ouvrages antérieurs de D'Alembert. De nombreux passages donnent l'impression d'une réflexion à haute voix. De longs calculs, souvent difficilement abordables compte tenu de l'opacité du contexte, se trouvent avortés, sans explications ni conclusion, au profit de nouvelles pistes de recherche.

La division du texte en treize paragraphes, eux-mêmes subdivisés en articles, pourrait rassurer le lecteur, de prime abord désarçonné par l'absence d'articulations et d'exposés de la démarche entreprise par l'auteur. Les titres de la plupart d'entre eux ne reflètent malheureusement que très imparfaitement le sujet des recherches qu'ils contiennent. D'Alembert ne fait, qui plus est, aucune mention de la quarantaine de pages d'appendices relatifs au mémoire, si ce n'est dans l'« Avertissement » commun aux VII^{e} et VIII^{e} tome d'*Opuscules*, mais uniquement reproduit en tête du premier, dans lequel il indique que l'« on pourra aussi, pour certains éclarcissemens, consulter l'*Appendice* qui termine chaque volume ». L'ensemble donne finalement l'apparence d'un obscur « patchwork » sans cohérence : c'est probablement la raison pour laquelle aucun historien des sciences n'a jusqu'alors jamais pris la peine de l'examiner, ou même d'en faire mention dans les différentes études dédiées au développement de l'hydrodynamique au cours de cette période.

En précisant la structure de chaque paragraphe et le contenu des articles qui le composent, la table analytique que nous avons dressée dans le cadre de la préparation du volume III/8 des *Œuvres Complètes* de D'Alembert, facilite quelque peu l'abord du mémoire, mais ce n'est naturellement pas suffisant. Le Mémoire 57 présente en effet une particularité que nous avons déjà eu l'occasion de mentionner : il répond pour une large part aux critiques adressées par Borda, dans son « Mémoire sur l'écoulement », contre la théorie des écoulements de D'Alembert dans la première édition du *Traité des fluides* (1744). Borda n'est cependant jamais explicitement mentionné, ce qui suppose un travail de déchiffrage des allusions, dont nous avons restitué l'essentiel au sein des annotations accompagnant le texte du mémoire, du moins tel que ce dernier se trouvera publié dans le volume III/8.

Pour autant, ces divers outils ne fournissent qu'un éclairage local sur l'articulation entre les réponses de D'Alembert et les différents points soulevés par son contradicteur. Seul un comparatif d'ensemble entre le Mémoire 57 et le « Mémoire sur l'écoulement » permet en fait de mettre en évidence la structure générale du texte, ce qui nous a incité à établir un tableau restituant les liens entre les deux écrits. Ce tableau s'organise naturellement autour des différentes questions abordées par Borda. C'est donc par là qu'il nous faut commencer.

2. Présentation des aspects et enjeux scientifiques du « Mémoire sur l'écoulement » de Borda

Dans le « Mémoire sur l'écoulement », présenté les 5, 15 et 19 mars 1766 devant l'Académie des sciences de Paris, publié en 1769[155], et contenant un total de trente-deux articles, Borda propose[156]

> « de reprendre les questions que M.rs Daniel Bernoulli & d'Alembert ont traitées, l'un dans le livre de l'Hydrodynamique, l'autre dans sa Théorie des Fluides ».

Sa démarche consiste, comme nous l'avons déjà souligné, en une remise à plat des différents éléments théoriques relevant de l'approche du parallélisme des tranches, des éléments qu'il convient de faire évoluer et de faire coïncider avec les résultats expérimentaux, suite à l'échec de l'approche analytique de ce point de vue. « On ne saurait donner trop d'éloges aux ouvrages que je viens de citer, mais », écrit-il en guise de présentation de ses recherches[157],

> « il faut avouer que les solutions qu'on y trouve ne s'accordent pas toujours, il reste encore une grande incertitude dans cette partie de la théorie des fluides, incertitude qu'il est étonnant que personne n'ait cherché à lever en examinant plus particulièrement les hypothèses & l'emploi des principes sur lesquels les solutions sont fondées ».

1°. *L'hypothèse des tuyaux curvilignes (art. 1-2)*

La première des hypothèses adoptées par D. Bernoulli et D'Alembert dans l'*Hydrodynamique* et le *Traité des fluides* est celle du parallélisme des tranches. Cette approximation consistant à diviser un fluide en mouvement dans un vase en tranches horizontales de vitesses homogènes suscite déjà quelques doutes dans le courant des années 1740, ainsi qu'en témoignent les interrogations de D'Alembert dans l'art. 110 de son traité de 1744[158].

C'est donc un point de départ forcé pour Borda qui, dans l'art. 1 du « Mémoire sur l'écoulement », avoue en effet que si l'hypothèse paraît pouvoir être appliquée au mouvement des tranches supérieures, le parallélisme des tranches inférieures pose problème. Considérant un vase percé d'un orifice en son fond, il semble selon lui difficile de concevoir comment la tranche sur le point de s'échapper du vase pourrait voir sa section passer en un instant d'une section égale à celle du vase à une nouvelle valeur, correspondant au diamètre de l'ouverture inférieure. Il faudrait supposer, dans ce cas, que

[155] J.-C. Borda, « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases », *MARS* année 1766 (1769), p. 579-607. Le mémoire est intégralement retranscrit en annexe.

[156] *Ibid.* note 155, p. 579.

[157] *Ibid.* note 155, p. 579.

[158] Voir chapitre I, p. 44.

les particules du fluide les plus éloignées de l'axe du vase à l'intérieur de cette tranche puissent subitement acquérir une vitesse infinie afin d'être en mesure de franchir l'orifice.

Pour résoudre la difficulté, Borda propose donc une autre façon de représenter les trajectoires du fluide à l'intérieur du vase. Son hypothèse consiste à restreindre le parallélisme aux seules surfaces supérieure et inférieure de l'écoulement, et à supposer que le mouvement du fluide entre ces deux surfaces s'opère à l'intérieur d'un ensemble de tuyaux infiniments étroits s'incurvant « d'une manière quelconque »[159] dans la partie inférieure du vase afin d'atteindre l'orifice. Dans l'art. 2, Borda procède à la mise en équation de l'écoulement. Il applique, pour ce faire, le principe de conservation des forces vives à l'intérieur de chacun de ces tuyaux.

2°. *Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique (art. 3)*

L'équation obtenue est une équation différentielle ordinaire dans laquelle, comme dans celles obtenues par D. Bernoulli et D'Alembert, la vitesse ne dépend que d'une seule variable d'espace, la hauteur du fluide dans le vase. Elle renferme toutefois un terme différent de celui apparaissant dans l'équation de ses deux prédécesseurs.

Ce terme résulte de son hypothèse des tuyaux curvilignes. Borda pense non seulement disposer, grâce à lui, d'un moyen d'évaluer la crédibilité théorique de l'hypothèse du parallélisme des tranches, mais également d'une équation plus rigoureuse que celle de D. Bernoulli et de D'Alembert, laquelle conduit en effet selon lui à « un faux résultat » dans le cadre de l'étude des premiers instants du mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Il réfute ainsi frontalement leurs conclusions dans le cadre de ce problème :

- la force accélératrice animant la tranche supérieure du fluide dans les premiers instants du mouvement n'est pas égale, comme le soutiennent les deux savants, à la force accélératrice de la pesanteur, sinon aucune pression ne s'exercerait sur le fond du vase, ce qu'il considère comme physiquement impossible ;
- la partie du fluide animée par l'accélération de la pesanteur dans les premiers instants du mouvement, sera, *a contrario*, fort voisine de l'orifice inférieur.

3°. *Arbitrage sur un point de désaccord entre D'Alembert et D. Bernoulli (art. 4)*

Borda revient dans la foulée sur les critiques émises par D'Alembert contre l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli au sujet des conditions d'application de la conservation des

[159] Borda, *Ibid.* note 155, art. 1, p. 580.

forces vives. Dans le *Traité des fluides*, D'Alembert applique successivement le principe des forces vives et son propre principe de la dynamique au problème de l'écoulement dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Il obtient la même équation que D. Bernoulli par le biais du premier, mais parvient néanmoins à un résultat fort différent en employant le second, preuve selon lui que le principe de conservation des forces vives ou le principe de dynamique ne peuvent être employés lorsque la tranche inférieure ou toute autre partie du fluide passe subitement d'une vitesse à une autre, dans un cas donc, où la la loi de continuité ne se trouve pas respectée.

Dans l'art. 4, Borda se place dans la même hypothèse, le parallélisme des tranches et démontre, calculs à l'appui, que la divergence entre les deux équations obtenues par D'Alembert vient de la façon dont celui-ci a pris en compte le mouvement de la tranche inférieure dans le cadre de l'application de son principe de la dynamique.

4°. *La contraction de la veine (art. 6-10)*

Dans les art. 6-7 du mémoire, Borda traite ensuite la question de la contraction de la veine, un phénomène mis au jour par Newton selon lequel la veine de fluide au sortir d'un vase se contracte, c'est-à-dire possède une section plus petite que celle de l'ouverture qu'elle vient de franchir. Il s'agit là d'un des deux passages ayant fait la réputation du « Mémoire sur l'écoulement ». Borda parvient en effet à y calculer le coefficient de contraction de la veine dans le cas d'un ajutage cylindrique rentrant (voir la Fig. V-b). Sa démonstration repose sur le principe de conservation de la quantité de mouvement et sur la considération de la pression contre les parois du vase (à l'instar de D'Alembert, D. Bernoulli et J. Bernoulli, Borda n'envisage pas la pression autrement que comme un effort exerçé par le fluide sur les contours de la conduite à l'intérieur de laquelle il s'écoule). Les art. 8 à 10 renferment les résultats d'expériences réalisées par Borda, lesquelles confirment sa valeur théorique du rapport de contraction de l'ajutage rentrant (voir la Fig. V-b), et lui fournissent une mesure du rapport de contraction pour un ajutage sortant (voir la Fig. V-a).

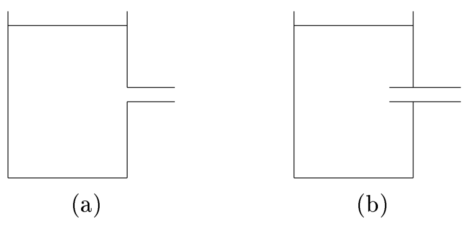


Fig. V – (a) Ajutage sortant
(b) Ajutage rentrant.

5°. *La théorie des pertes de forces vives (art. 11-12)*

Les art. 11 et 12 constituent le second passage incontournable de l'ouvrage. Commenté dans de nombreuses études consacrées à l'histoire de l'hydrodynamique au XVIIIe siècle[160], il est consacré aux « Questions d'Hydrodynamique, dans lesquelles on doit admettre une perte de forces vives ».

Borda s'y intéresse à deux problèmes d'hydrodynamique, dont nous dirions aujourd'hui qu'ils présentent une brusque augmentation de leur section d'écoulement : le mouvement d'un fluide dans un vase lui-même immergé dans un autre et dans un vase percé de plusieurs diaphragmes. Il propose de tenir compte, dans ces deux cas, d'une perte de forces vives, car[161]

> « le mouvement de l'eau dans les vases, peut être regardé comme celui d'un système de corps durs qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ».

Quoique cette justification physique du phénomène soit incorrecte, le savant ne met pas moins le doigt sur un phénomène connu, en termes modernes, sous le nom de *pertes de charges singulières*. Il parvient, de surcroît, à une évaluation théorique de ces pertes strictement conforme à la valeur du terme dissipatif que nous introduisons de nos jours dans le cas d'un brusque élargissement de la section d'écoulement. Cette valeur correspond à ce que nous appelons encore, comme ce fut l'usage au XIXe siècle, le *théorème de Borda* ou *théorème de Borda-Carnot*[162].

6°. *Ecoulement dans un vase immergé (art. 13-18)*

Les art. 13 à 18 sont dès lors consacrés à la mise en équation de l'écoulement d'un fluide s'écoulant dans un vase cylindrique immergé dans un autre vase de plus grande contenance. Borda travaille dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, et y applique successivement le principe de conservation des forces vives et le principe de D'Alembert. L'introduction, dans les deux cas de figure, de la perte précédemment calculée, le conduit à une équation différente de celle obtenue par ses deux prédécesseurs. De même que dans la question de la contraction de la veine, il termine, dans les art. 19 et 20, en faisant état de deux expériences dont les résultats sont en accord avec la solution de son équation.

---

[160] Voir, par exemple, R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Neuchâtel, 1950, p. 292-295, H. Rouse et S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963, p. 125-126, et J. S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, Madrid, UNED, 1996, p. 481-489.

[161] *Ibid.* note 155, art. 11, p. 590.

[162] A. Barré de Saint-Venant parle par exemple du théorème de Borda dans son « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44, 1888, p. 193-244. I. E. Idel'cik emploie, quant à lui, l'appelation théorème de Borda-Carnot dans son *Mémento des pertes de charge*, trad. du russe par M. Meury, Editions Eyrolles, Moscou, 1986.

7°. *Ecoulement dans un tuyau adapté à un vase (art. 22-28)*

Dans les art. 22 à 28, Borda étend le champ d'application de sa théorie des pertes de forces vives aux problèmes des vases auxquels des tuyaux horizontaux, cylindriques ou de section divergente, se trouvent adaptés. Son interprétation physique du phénomène est parfaitement identique à celle donnée dans l'art. 11, si ce n'est dans le cas où l'orifice percé dans la paroi latérale du vase — afin de permettre l'adaptation du tuyau — est infiniment petit. D'après la relation assurant la constance du débit dans le vase (c'est-à-dire $yv = \text{Cste}$, y et v désignant respectivement la section et la vitesse), une section d'écoulement infiniment petite conduit à une valeur infiniment grande de la vitesse, une valeur impossible à admettre selon Borda, qui justifie donc la prise en compte d'une perte dans le cadre de l'application du principe de conservation des forces vives.

8°. *Ecoulement dans un siphon (art. 29)*

Vient ensuite le problème de l'écoulement d'un fluide dans un siphon à deux branches. Le savant prône, là encore, l'introduction d'une perte de forces vives au sein des équations établies par D. Bernoulli et D'Alembert dans l'*Hydrodynamique* et le *Traité des fluides*. Il évoque tout d'abord, dans cette optique, le cas d'une conduite présentant un étranglement de diamètre infiniment petit, lequel implique, comme ci-dessus, une vitesse infiniment grande à son passage. Dans tous les cas intermédiaires, conclut-il, le principe de conservation des forces vives se verra donc mis en défaut. Il n'aura, par conséquent, « véritablement lieu que lorsque le siphon a par-tout la même grosseur »[163]. Borda étend, autrement dit, sa théorie des pertes forces vives aux cas des conduites présentant une variation continue de leur section d'écoulement.

9°. *Le Paradoxe de D'Alembert (art. 30)*

Cette dernière remarque l'incite, dans l'art. 30, à brièvement évoquer la question du paradoxe énoncé par D'Alembert dans le Mémoire 34 § I de ses *Opuscules* t. V (1768), paradoxe selon lequel un corps solide à symétrie de révolution, se mouvant à l'intérieur d'un fluide, n'éprouve aucune résistance de la part de ce dernier. Borda prétend en fait que la nullité de la résistance provient de ce que le principe de conservation des forces vives a été appliqué sans restriction dans le cadre de ce problème. Il suffit pour s'en convaincre, explique-t-il, de remarquer que les particules de fluide se meuvent à l'intérieur de petits canaux courbes assimilables à des siphons infiniment étroits et de section variable. Compte tenu du résultat précédent, la mise en équation du mouvement autour du corps doit donc tenir compte d'une perte de forces vives dont Borda tend

[163] Borda, *Ibid.* note 155, art. 29, p. 604.

à penser qu'elle influera sur la valeur de la résistance s'exerçant sur le corps solide immergé[164].

10°. *La question de la séparation du fluide (art. 32)*

Dans le dernier article du « Mémoire sur l'écoulement », le savant donne enfin « une solution très-simple d'un problème résolu par M. d'Alembert, dans lequel il s'agit de trouver le cas où un fluide, qui se meut dans un vase, doit cesser de faire une masse continue »[165]. Il revient, autrement dit, sur la question de la séparation des fluides. Il formule, dans ce cadre, un critère différent de celui de son prédécesseur, critère permettant de déterminer, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, l'endroit au niveau duquel un fluide s'écoulant dans un vase de section variable perdra sa cohésion et se divisera en deux nouvelles masses de fluide indépendantes l'une de l'autre.

3. La structure du Mémoire 57

Les ajouts de la seconde édition du Traité des fluides *(1770)*

L'articulation entre ces différents aspects du « Mémoire sur l'écoulement » de Borda et l'argumentaire du Mémoire 57 recquiert également, pour être complète, de prendre en compte les premiers éléments de réponse donnés dans la seconde édition du *Traité des Fluides* (1770). D'Alembert y défend de fait les points de sa théorie de 1744 remis en cause par Borda mais, plus intéressant encore, propose également de nouvelles pistes de recherches sur ces mêmes sujets. Ces nouvelles idées constituent un état préliminaire de sa future stratégie de réponse dans le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI et dans le Mémoire 57. Dans cette nouvelle édition du *Traité des fluides*, D'Alembert insère, qui plus est, un long « Avertissement » concluant la partie de l'ouvrage dédié à la théorie du mouvement des fluides[166]. Cet ajout de quelques pages donne un résumé de toutes ses précédentes contributions. Il contient également un état des lieux des difficultés théoriques générales inhérentes aux solutions apportées par Borda.

Dans le Mémoire 57 lui-même, D'Alembert fait très fréquemment référence à ces additions de la seconde édition du traité de 1744. Il travaille par ailleurs à d'autres endroits comme si nous avions l'ouvrage à portée de la main — notons qu'il l'avait probablement sous les yeux au moment de rédiger le mémoire. Compte tenu de leur

[164] D'un point de vue moderne, le contenu de cet article du « Mémoire sur l'écoulement », d'une dizaine de lignes, constitue la première tentative de résolution, en terme de conservation / dissipation d'énergie, du Paradoxe de D'Alembert.

[165] Borda, *Ibid.* note 155, art. 31, p. 606.

[166] Cet « Avertissement », consultable p. 212-214 du traité, est placé à la suite de l'art. 228.

statut intermédiaire entre le « Mémoire sur l'écoulement » de Borda et le Mémoire 57, nous avons donc jugé pertinent d'insérer ces ajouts dans le tableau que nous vous promettions à l'issue de la première partie de ce chapitre.

Une grille de lecture pour le Mémoire 57

Ce tableau, reproduit ci-dessous, présente donc quatre colonnes. Les trois premières, ordonnées de façon antéchronologique, mettent respectivement en relation les recherches du Mémoire 57, présentées dans l'ordre d'origine, les additions de la seconde édition du *Traité des fluides*, repérées par leurs numéros d'article — numéros identiques, rappelons-le, à ceux de la première édition de l'ouvrage — et leurs numéros de pages, ainsi que les différents aspects de la théorie de Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement », signalés par les titres et numéros mentionnés dans le résumé qui précède. Une quatrième colonne indique le passage de la présente thèse auquel se référer pour un examen des travaux de D'Alembert dans le passage correspondant du Mémoire 57. Notons enfin que si le Mémoire 51 § IV n'apparaît pas dans le tableau, c'est qu'il ne concerne qu'un seul et unique paragraphe du Mémoire 57, le § IX, intégralement dédié au développement de la nouvelle méthode qu'il renferme.

Mémoire 57 (1780)	*Traité des fluides* **(1770)**	**Mémoire de Borda (1766)**	**Thèse**
§ I, art. 1-18	Avertissement art. 110, p. 101-104	1°. L'hypothèse des tuyaux curvilignes	Chap. V et VI
§ II, art. 1-4	art. 109, p. 97	2°. Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique	Chap. VI
§ III, art. 1-25	art. 109, p. 97	2°. Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique	Chap. VI
§ IV, art. 1-10	Avertissement art. 110, p. 101-104	1°. L'hypothèse des tuyaux curvilignes	Chap. V et VI
§ V, art. 1-24	art. 109, p. 94 art. 112, p. 106-108	2°. Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique	Chap. VI
....	....	....	....
§ V, art. 25-46	art. 109, p. 95-97	2°. Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique	Chap. VI
....	....	....	....
§ V, art. 47-54	art. 129, p. 128	8°. Ecoulement dans	Chap. VII

		un siphon	
§ V, art. 55-56	art. 143, p. 136-137	6°. Ecoulement dans vase immergé	Chap. VII
§ VI, art. 1-20 art. 25-31		4°. Contraction de la veine (art. 6-10)	Chap. VI
§ VI, art. 21-24		7°. Ecoulement dans un tuyau adapté à un vase	Chap. VII
§ VII, art. 1-13	art. 110, p. 101-104	1°. L'hypothèse des tuyaux curvilignes	Chap. V et VI
§ VII, art. 14-34 + 3 Appendices			Chap. IV
§ VIII, art. 1-25		2°. Premiers instants de l'écoulement dans un vase cylindrique	Chap. VIII
§ IX, art. 1-15	Avertissement art. 110, p. 101-104	1°. L'hypothèse des tuyaux curvilignes	Chap. VI
§ IX, art. 16-23		5°. Théorie des pertes de forces vives	Chap. VII
§ X, art. 1-4		4°. Contraction de la veine (art. 6-10)	
§ X, art. 5-25 + 1 Appendice			
§ XI, art. 1-8 art. 27-33		5°. Théorie des pertes de forces vives	Chap. VII
§ XI, art. 9-26	art. 113, p. 109-112	3°. Arbitrage sur un point de désaccord entre D'Alembert et D. Bernoulli	Chap. VII
§ XI, art. 34	art. 129, p. 128	8°. Ecoulement dans un siphon	Chap. VII
§ XI, art. 35-36	Avertissement	1°. L'hypothèse des tuyaux curvilignes	Chap. VII

§ XII, art. 1-81	art. 149, p. 141 art. 159, p. 151-152	10°. La question de la séparation des fluides	Chap. VIII
§ XIII, art. 1-7			
....	....	....	....
§ XIII, art. 8-18			
....	....	....	....
§ XIII, art. 19-57	Avertissement	9°. Le Paradoxe de D'Alembert	

Nous venons de donner une présentation générale des différents aspects du « Mémoire sur l'écoulement » de Borda. Nous les avons mis en relation avec notre corpus de recherche. Nous avions préalablement exposé la teneur des principes et concepts fondateurs de la théorie des écoulements de D'Alembert dans ses deux premiers traités. Nous disposons donc à présent de toutes les informations nécessaires pour entamer l'examen et la mise en perspective scientifique de ses travaux dans la seconde édition du *Traité des Fluides*, dans le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII. Nous commencerons, pour ce faire, par l'hypothèse des tuyaux curvilignes, dont nous déclinerons l'étude en deux principales étapes.

La première portera, dans le chapitre suivant, sur les outils mathématiques développés et la démarche adoptée par D'Alembert dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752) et le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761) pour résoudre le système d'EDP gouvernant, selon lui, le mouvement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'un vase ouvert en ses deux extrémités, sur leurs enjeux et leurs prolongements dans les Mémoires 31 et 33 des *Opuscules* t. V (1768) et le Mémoire 57 § VII des *Opuscules* t. VIII (1780). Ce premier aspect sera croisé avec un examen de sa méthode de résolution du problème des cordes vibrantes. Il nous permettra d'appréhender les différents aspects et enjeux mathématiques propres à sa théorie des écoulements, et, par là-même, de comprendre le sens des nouvelles recherches analytiques données en 1780.

Nous aborderons, dans un second temps, la question sous un angle d'étude physique. Les enseignements du chapitre précédent nous permettront de saisir le processus d'émergence de l'hypothèse des tuyaux curvilignes dans le Mémoire 4 et de celle des tuyaux de figure variable dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57. Nous verrons qu'elles correspondent, l'une comme l'autre, à une voie intermédiaire entre l'approche analytique et l'approche du parallélisme des tranches dans l'œuvre du savant. Nous terminerons en les resituant dans leur contexte historique direct, la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Il s'agira, ce faisant, de comprendre en quoi consistent, physiquement, les améliorations apportées à l'hypothèse du parallélisme des tranches, et ce que D'Alembert et Borda en espérent, ou peuvent en espérer, vis-à-vis d'un des principaux enjeux scientifiques à cette époque : la concordance entre la théorie et l'expérience.

Chapitre IV. LES PRINCIPAUX ASPECTS ET ENJEUX MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE DES ÉCOULEMENTS DE D'ALEMBERT (1752-1783)

Dans son « Mémoire sur l'écoulement », Borda propose de pallier les insuffisances du parallélisme des tranches « en employant quelqu'autre hypothèse plus vraisemblable »[167] : l'hypothèse des tuyaux curvilignes. Cette représentation de l'écoulement consiste plus précisément à partager le vase en « plusieurs petits canaux », et à « supposer que le fluide se meut dans ces petits canaux, du moins pendant un instant », l'expression « du moins pendant un instant » signifiant que la forme desdits canaux ne dépend pas de la variable de temps. Borda définit donc ce que nous appellerions des *tubes de courant stationnaires*, avec lesquels il suppose que les trajectoires des particules de fluide se confondent.

Cet aspect de sa théorie est aujourd'hui considéré comme une découverte par certains historiens. H. Rouse et S. Ince ont ainsi affirmé que « Borda est le premier à introduire le concept de tubes élémentaires de courant à la place des tranches parallèles »[168]. Il s'agit cependant d'une erreur : l'hypothèse des tuyaux curvilignes invariables remonte en fait aux travaux de D'Alembert dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761).

Cette précision est d'importance dans le cadre de l'étude du Mémoire 57. Dans le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et dans le Mémoire 57 § IX des *Opuscules* t. VIII (1780), D'Alembert propose en effet une nouvelle théorie des écoulements fondée sur une extension de cette hypothèse des tuyaux invariables : il s'agit de supposer que la figure des canaux curvilignes puisse varier au cours du temps. Compte tenu du fait que ces deux textes constituent avant tout une réponse au « Mémoire sur l'écoulement », il serait donc naturel de penser que l'introduction, par D'Alembert, de cette hypothèse des tuyaux variables s'inscrit dans la seule et droite ligne du travail de Borda. Quoique cela soit une interprétation pertinente du point de vue historique, comme le confirme la lettre de D'Alembert à Lagrange du 8 novembre 1771[169], ou même l'« Avertissement » ajouté à la fin du second Livre de sa nouvelle édition du *Traité des fluides*, l'idée d'une filiation théorique entre ces deux hypothèses ne reflète qu'imparfaitement la démarche de D'Alembert.

Comme il l'explique lui-même dans le Mémoire 51 § IV, la définition de tuyaux de forme variable est d'abord un prolongement de la « méthode directe & rigoureuse »[170] donnée dans l'*Essai sur la résistance des fluides* pour déterminer le mouvement des

[167] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 1, p. 580.

[168] H. Rouse, S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963, p. 125.

[169] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 98, p. 221. Voir le chapitre I, p. 51.

[170] D'Alembert, *Opuscules*, t. VI, 1773, Mémoire 51, § IV, art. 2, p. 380.

fluides dans des vases. Il ne s'agit pas de la même méthode, mais d'une nouvelle théorie qui n'aura pas, comme celle de 1752, « l'inconvénient de se refuser souvent à l'Analyse »[171]. Ce constat d'échec de D'Alembert face à la résolution des EDP établies dans l'*Essai sur la résistance des fluides* intervient dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I. Il le pousse, dans le même temps, à l'exploration d'une voie intermédiaire entre l'approche analytique et l'approche unidimensionnelle du *Traité des Fluides*. Ceci le conduit précisément à une première formulation de l'hypothèse des tuyaux invariables, antérieure à celle de Borda, et dont il revendique donc justement la priorité dans l'Appendice relatif au Mémoire 51 § IV, en précisant que[172]

> « cette maniere de considérer les particules du fluide comme se mouvant [...] dans des tuyaux différents & très-petits [...], je l'ai supposé le premier, Tome I *Opusc.*, p. 157 ».

Le Mémoire 4 constitue, en somme, un texte de transition dans l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique, à partir duquel certaines de ses recherches viseront à concilier les approches unidimensionnelle et analytique, ou, plus précisément, à faire progresser la première à partir de la seconde.

Il correspond, dans le même temps, au début d'un certain « acharnement » du savant à résoudre les EDP obtenues en 1752, comme s'il n'avait pas encore désespéré de pouvoir en venir à bout. Cet état d'esprit, D'Alembert en rend compte de façon explicite dans l'« Avertissement » placé en en-tête du V^e^ tome de ses *Opuscules*. Au sujet du Mémoire 31 qui, après le Mémoire 4, constitue son premier retour sur le problème de la résolution des EDP dans un cadre d'étude analytique, il écrit en effet[173]

> « Le Mémoire [...] a pour objet de confirmer aussi par de nouvelles preuves, ce que j'avois avancé dans le IV^e^ Mémoire du premier Volume de mes *Opuscules*, sur l'impossiblité de réduire au calcul, dans un très-grand nombre de cas, les loix du mouvement des fluides. Je donne en même-temps des méthodes pour trouver les cas où ce mouvement peut être calculé analytiquement ».

Le passage dédié, dans le même « Avertissement », à la présentation du Mémoire 33, second opus en la matière dans ce volume, atteste du même entêtement[174] :

> « Le [...] Mémoire est entiérement destiné à l'examen des équations qui représentent, d'après ma Théorie, le mouvement des Fluides. Je cherche les cas où ces équations peuvent avoir lieu ; je donne les moyens de les faire quadrer (lorsque la chose est possible) avec l'équation qui exprime la figure du vase ; & j'entre à ce sujet dans plusieurs détails analytiques, que les Géomètres ne trouveront peut-être pas indignes de leur attention ».

---

171 D'Alembert, *Ibid.* note 170.

172 D'Alembert, *Ibid.* note 170, « Appendice pour le LI. Mémoire, §. IV, art. 23, page 390 », p. 440.

173 D'Alembert, *Opuscules* t. V, 1768, « Avertissement », p. vj-vij.

174 D'Alembert, *Ibid.* note 173, p. vij-viij.

Ces recherches, comme nous avons déjà eu l'occasion de le mentionner, sont également poursuivies dans le § VII du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780), ainsi que dans les trois appendices qui lui sont relatifs. L'introduction de D'Alembert à cette ultime tentative de résolution de son système d'EDP est absolument admirable. Elle résume en effet le problème mathématique qui l'occupe depuis le Mémoire 4[175] :

> « J'ai démontré ailleurs qu'au premier instant du mouvement, dans un vase [$ABFE\dots$], le mouvement du fluide se déterminoit par l'équation
>
> $$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1},$$
>
> M étant une constante pour chacun des filets du fluide. Voyez les Tomes I & V de mes *Opuscules*, IV^{e} & XXXI^{e} Mémoires, &c. ainsi que mon *Essai sur la résistance des Fluides* [...]. Il s'agit [...], la courbure des parois [BF] étant donnée, de déterminer la fonction φ »

Cette équation découle de sa tentative de résolution de 1761 pour le système d'EDP

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dq}{dz}, \\ \dfrac{dp}{dz}=-\dfrac{dq}{dx}. \end{cases}$$

Nous disons « tentative », parce que la démarche du savant demeure, de son propre aveu, encore incomplète : il reste encore à déterminer la fonction φ, dépendant elle-même de l'équation $y(x)$, supposée connue, des parois du vase à l'intérieur duquel le fluide s'écoule — voir la Fig. IV, p. 68. Ceci dit, si D'Alembert parvenait à une expression de cette fonction, l'équation

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1} \tag{5}$$

correspondrait-elle pour autant à une solution du problème ? Qu'entend-il en effet par ce terme de « solution » ? Quelle démarche adopte-t-il vis-à-vis d'un problème physico-mathématique faisant intervenir un tel système d'EDP ?

Si nous avons paru quelque peu médisant en parlant d'entêtement ou d'acharnement du savant, ce n'était pas là l'objectif recherché. Soyons donc plus clair : l'obstination de D'Alembert à résoudre ce problème nous offre un corpus de recherche unique en son genre. Ce dernier nous permettra de caractériser sa démarche de résolution, de préciser les contours de ce qu'il entend par « solution », de constater qu'il met le doigt, dans ce cadre, sur certains concepts suffisamment explicites pour que nous soyons à même de les comparer — prudemment, cela va sans dire —, avec les notions d'*unicité*, d'*existence* d'une *solution* d'un problème physico-mathématique faisant intervenir des EDP ainsi que les notions de *conditions initiales* et de *conditions aux limites*, telles que les mathématiciens les appréhenderont dans le courant du XIX^{e} et du XX^{e} siècle.

[175] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § VII, art. 14, p. 125-126.

Nous nous placerons, pour ce faire, dans un cadre d'étude le plus large possible, à savoir la question de la résolution des EDP dans les neuf tomes d'*Opuscules*. Nous procéderons ensuite à la sélection d'un corpus adapté, qui comprendra finalement les textes dédiés à l'approche analytique des écoulements que nous venons de présenter, ainsi que les écrits consacrés à la question des cordes vibrantes. Ce travail, réalisé avec l'historien G. Jouve[176], aura également des répercussions sur des domaines adjacents mais néanmoins liés aux recherches de D'Alembert en hydrodynamique. Il nous invitera à reconsidérer sa position et l'évolution de sa pensée dans la polémique sur les fonctions arbitraires, une évolution tardive, datant justement de 1780, dont nous avons observé certaines résurgences dans certains passages bien cachés des appendices au § VII du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

Nous aurons ainsi donné un panorama complet des caractéristiques mathématiques de l'équation (5) des lignes de courant d'un fluide s'écoulant dans un vase. Il ne nous restera plus, dès lors — ce sera le sujet du chapitre V —, qu'à examiner l'hypothèse des tuyaux curvilignes sous un angle physique, de son émergence à partir de l'équation (5) dans le Mémoire 4 jusqu'à son rôle et ses différentes déclinaisons dans la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

1. Premier examen de l'approche de D'Alembert en matière d'équations aux dérivées partielles[177]

Dans son mémoire intitulé « Recherches sur le système du Monde »[178], publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris* pour l'année 1775, Laplace, l'un des protégés de D'Alembert, rend ainsi hommage à ce dernier pour sa contribution au développement de la théorie des équations aux dérivées partielles[179] :

[176] G. Jouve vient de soutenir sa thèse de Doctorat sur les différents aspects mathématiques du traitement du problème des cordes vibrantes dans les *Opuscules* de D'Alembert (*Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783) – Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Université Lyon 1, 2007). Le travail de recherche que nous vous proposons ici est, pour une large part, extrait de l'article « La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opuscules mathématiques* de D'Alembert (1761-1783) » que nous avons cosigné avec lui et qui se verra prochainement publié dans la *Revue d'Histoire des Mathématiques*. Son contenu a fait l'objet d'un exposé, intitulé « Les équations aux différentielles partielles et les fonctions dans les travaux de D'Alembert sur les cordes vibrantes et les fluides », dans le cadre du séminaire *Mathématiques et fondements de la physique aux XVIII*e *et XIX*e *siècles* organisé par M. Panza, au REHSEIS UMR 7596 du CNRS, Paris, le 20 février 2006.

[177] Nous parlons ici d'*équations aux dérivées partielles* par commodité, mais nous reviendrons sur cette expression anachronique dans la suite : voir p. 100.

[178] Laplace, « Recherches sur plusieurs points du Système du Monde », *MARS* année 1775 (1778), p. 75-182.

[179] Laplace, *Ibid.* note 178, p. 91.

« je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à ses excellentes *Réflexions sur la cause des vents*, j'en suis principalement redevable à ces Réflexions elles-mêmes et aux belles découvertes de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul aux différences partielles, dont on voit les premières traces dans l'ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une matière aussi compliquée ; si l'on fait attention aux progrès immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque toutes entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il a le premier ouverte ».

Les nombreux articles et ouvrages historiques parus ces vingt-cinq dernières années vont dans le même sens, et s'accordent à juste titre sur le rôle majeur de D'Alembert dans la naissance de cette nouvelle branche des mathématiques permettant d'aborder les problèmes relevant de ce que nous appelons aujourd'hui la mécanique des milieux continus. Les conclusions de leurs auteurs, S. S. Demidov, S. B. Engelsman, J. Lützen et G. Grimberg, sont fondées sur une étude des textes de jeunesse de l'Encyclopédiste : le *Traité de dynamique* (1743), dans lequel la première équation aux dérivées partielles voit le jour, les *Réflexions sur la cause des vents* (1747), les « Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration »[180], et l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752).

L'invention du calcul aux différences partielles résulte d'un long processus de gestation, initié dès la fin du XVII^e^ siècle par les recherches de Leibniz, Jacques I, Jean I et Nicolas I Bernoulli sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre, puis continué par Euler dans le courant des années 1730 via sa théorie des équations modulaires[181]. L'apport de D'Alembert repose essentiellement, d'après les quatre historiens des sciences évoqués, sur l'introduction de cet outil dans le cadre des sciences physico-mathématiques. Le savant ouvre la voie, grâce à cela, à une nouvelle méthode de mise en équation pour les problèmes du fil pesant, des cordes vibrantes, du mouvement de l'atmosphère, et de l'écoulement des fluides dans les vases et les tuyaux. Cette méthode est d'autant plus innovante, selon S. S. Demidov, qu'elle est complétée, avec plus ou moins de succès suivant la question abordée, par une volonté d'intégrer les équations obtenues, ce qui permet de considérer D'Alembert comme le fondateur de la théorie des

[180] D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *HAB* année 1747 (1749), p. 214-219 ; « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 220-249.

[181] Voir S. Engelsman, *Family of Curves and the Origin of Partial Differentiation*, North-Holland Mathematics Studies, 93, 1984 ; G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998 ; J. L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut – The rise of mathematical science in eighteeth-century Paris and the fall of "normal science"*, Cambridge University Press, 1995, p. 225-243.

équations aux dérivées partielles.

La contribution de D'Alembert à la naissance de la théorie des équations aux dérivées partielles constitue donc un sujet relativement balisé. Cependant, l'historiographie dont nous avons connaissance se concentre principalement sur la première phase de ses recherches en la matière (1743-1752) : la période des grands traités et des mémoires les plus célèbres, essentiellement avant l'*Encyclopédie*. Dans les huit tomes de ses *Opuscules*, parus entre 1761 et 1780, et dans divers manuscrits non publiés de son vivant, le savant consacre par ailleurs de nombreux mémoires à la continuation de ses travaux dans ce domaine.

Notre étude, dans ce contexte, requiert donc l'établissement d'un inventaire exhaustif sur lequel nous reposer afin de faire le choix d'un corpus adapté. Avant de livrer et de commenter le résultat de cette minitieuse recherche dans les deux phases de l'œuvre scientifique du savant, nous écrirons cependant encore quelques mots de la forme sous laquelle le lecteur sera susceptible de voir apparaître une équation aux dérivées partielles dans les textes de D'Alembert et de ses contemporains.

L'inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert

• DÉSIGNATION, FORMULATION

Commençons donc par préciser la désignation et la formulation, au XVIIIe siècle, de ce que nous avons aujourd'hui coutume d'appeler les *équations aux dérivées partielles.*

Signalons tout d'abord qu'aucune appellation de ce type n'apparaît dans les travaux de D'Alembert, qu'il s'agisse de ses traités, mémoires, ou de ses contributions à l'*Encyclopédie*. Bien que le savant ne rechigne jamais à revendiquer la priorité de ses découvertes, il ne le fait étrangement pas pour cet aspect de son œuvre. Il faut attendre les travaux de Condorcet, Lagrange ou Laplace, au début des années 1770, pour voir souligner le rôle de D'Alembert dans ce domaine, et constater l'apparition de la désignation : « équations aux différences partielles »[182].

Cependant, quoique cette dernière terminologie soit assez proche de la nôtre, il n'en va pas de même de l'aspect sous lequel les EDP apparaissent à cette époque. On peut

[182] C'est sous cette appellation que le concept apparaît par exemple dans :
- le traité *Du calcul intégral*, 1765, de Condorcet ;
- le « Mémoire sur les équations aux différences partielles » de Condorcet, *MARS* année 1770 (1773), p. 151-178 ;
- le mémoire « Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1er ordre » de Lagrange, *NMAB* année 1772 (1775), p. 353-372 ;
- ou le mémoire « Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles » de Laplace, *MARS* année 1773 (1777), p. 341-402.

Dans un souci de lisibilité, nous utiliserons invariablement l'abréviation « EDP » pour désigner une « équation aux différences partielles ».

effectivement distinguer trois types de formulations, résumées et mises en relation sur la Fig. VI[183].

Le lien entre ces trois formulations est assuré par l'utilisation répétée du critère, dit d'Euler, selon lequel[184] $p(x,t)dx + q(x,t)dt$ est une différentielle complète, ou une *forme différentielle exacte* pour employer le terme moderne[185], si et seulement si $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$[186].

EDP (formulation moderne)		Système d'EDP du 1er ordre		Système de formes différentielles complètes
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$	$\Longleftrightarrow$	$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx} \\ \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\begin{cases} du = qdt + pdx \\ dy = pdt + qdx \end{cases}$

Fig. VI – Les trois formulations d'une EDP.

Précisons que ce critère est pour la première fois énoncé par Euler dans deux mémoires présentés à l'Académie des sciences de Pétersbourg le 12 juillet 1734 et publiés en 1740[187]. Clairaut, qui n'a pas encore eu connaissance des travaux de son prédécesseur, propose le même théorème dans deux mémoires publiés dans les volumes des *MARS* pour les années 1739 et 1740[188]. D'après J. L. Greenberg, le jour même (le 4 mars 1739) de la lecture par Clairaut du premier de ces deux écrits devant l'Académie Royale des sciences de Paris, Fontaine présentait également une démonstration écrite de ce critère pour des formes différentielles de deux et trois variables[189].

Comme nous aurons l'occasion de le montrer par la suite, ces trois types de for-

183 Les trois exemples figurant sur ce schéma correspondent aux trois formulations relatives au problème des cordes vibrantes. Nous expliquerons précisément p. 107 comment on passe de l'une à l'autre.

184 Ce critère est implicitement utilisé comme une équivalence à cette époque, bien que les démonstrations mathématiques qui en sont données ne posent pas explicitement la question : voir J.L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut – The rise of mathematical science in eighteeth-century Paris and the fall of "normal science"*, Cambridge University Press, 1995, p. 243-399.

185 A savoir, telle qu'il existe une fonction $y(x,t)$ vérifiant $dy = pdx + qdt$. Le terme de « différentielle exacte » est ponctuellement employé par D'Alembert dans le Mémoire 1 de ses *Opuscules* t. I (1761).

186 Conformément aux conventions de l'époque, nous désignerons l'opérateur de différentiation partielle par la notation d au lieu de la notation moderne ∂.

187 Euler, « De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7, 1740, p. 174-183 ; « Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7, 1740, p. 184-200.

188 Clairaut, « Recherches générales sur le calcul intégral », *MARS* année 1739 (1741), p. 425-436 ; « Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre », *MARS* année 1740 (1742), p. 293-323.

189 Voir J. L. Greenberg, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, 1995, p. 368.

mulation sont, à quelques exceptions près, simultanément présentes dans les travaux de D'Alembert. Elles correspondent de fait au chemin emprunté pour intégrer une EDP. Les descriptions de la mise en équation des problèmes de la corde pincée et de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un vase nous donneront plus loin une illustration du rôle et de l'emploi du critère d'Euler dans ce cadre.

• INVENTAIRE

Comme nous le précisions à l'instant, l'abord d'un concept dans le corpus dalembertien, notamment dans la seconde phase des écrits scientifiques du savant, demande un certain nombre de précautions, sans lesquelles il serait facile de passer à côté d'un aspect crucial du sujet. Dans de nombreux cas, certains travaux, apparemment sans lien avec l'objet considéré, peuvent en effet s'avérer tout à fait éclairants, voire indispensables à la bonne compréhension de la démarche de l'auteur. Nous nous sommes donc, avant toute autre chose, employés à établir une liste exhaustive des EDP étudiées ou mentionnées par l'auteur dans l'ensemble de ses travaux, manuscrits ou imprimés. De cette étude préliminaire, il résulte un inventaire que le lecteur pourra consulter en annexe du présent volume[190], et dont nous proposons à présent de dire quelques mots, avant d'en extraire les informations servant notre objectif.

Concernant la question de la formulation des EDP, tout d'abord, nous avons dû trancher entre les trois déclinaisons précédemment mentionnées. Nous avons opté pour la forme moderne synthétique, lorsque celle-ci apparaît dans l'œuvre de l'encyclopédiste. Dans la situation contraire, c'est le cas des *Réflexions sur la cause des vents*, nous avons présenté l'objet sous la forme d'un système d'EDP du 1er ordre. Nous avons également pris soin de préciser les références de l'imprimé ou du manuscrit concerné, le type mathématique de l'équation, et nous avons enfin formulé quelques remarques visant à éclairer le contexte et la démarche de l'auteur vis-à-vis de chaque équation.

Un premier tour d'horizon de l'inventaire nous montre que les EDP apparaissent dans six types de problèmes physiques :

– le problème du fil pesant,
– le problème du mouvement de l'air à l'intérieur d'un canal formé par deux chaînes de montagnes parallèles, sous l'action de la rotation de la Terre autour de son axe et des forces d'attraction du soleil et de la lune,
– le problème des cordes vibrantes, en lien avec la question de la propagation du son,

L'historien se fonde sur une note insérée par Clairaut dans son second mémoire, note dans laquelle le savant affirme ne pas être « le seul qui aye trouvé ce théorème, M. Fontaine l'avoit trouvé aussi de son côté, comme il l'a fait voir par un Ecrit qu'il a montré à l'Académie le jour même que je lûs ce Mémoire ; & M. Euler, célèbre Mathématicien, a donné à l'Académie de Petersbourg, dans le volume qui est actuellement sous presse, un morceau rempli de belles recherches sur le Calcul Intégral, où il employe cette même découverte » (*MARS* année 1740 (1742), p. 294).

[190] Voir p. 331. Une bibliographie lui est spécifiquement dédiée.

– la résistance des fluides et la question des écoulements dans les vases et les canaux,
– la question de l'équilibre des fluides, en lien avec le problème de la Figure de la Terre,
– la recherche de la courbe tautochrone, c'est-à-dire de la courbe où le temps pris par un corps pour en atteindre le point le plus bas est indépendant de son point de départ.

Les cinq premiers problèmes renvoient d'abord aux premiers ouvrages de l'auteur, à savoir la première édition du *Traité de dynamique* pour le fil pesant, les *Réflexions sur la cause des vents* pour le mouvement de l'atmosphère, les trois mémoires de l'Académie de Berlin de 1747 et 1750 pour les cordes vibrantes, ainsi que l'*Essai sur la résistance des fluides* pour ce qui concerne l'équilibre, le mouvement et la résistance des fluides.

Cependant, l'inventaire permet également de voir apparaître une somme de travaux plus tardifs prolongeant chacun des cinq premiers thèmes d'étude précédents et, par là même, les premiers écrits que D'Alembert leur a consacrés. Le tableau ci-dessous consacré à la période postérieure à 1758 permet de se faire une idée de leur ampleur, problème par problème[191] :

• Problème du fil pesant	– *Traité de Dynamique*, 2$^{\text{nde}}$ édition, 1758
• Mouvement de l'air entre deux chaînes de montagne parallèles	– *Opuscules* t. VIII, Mémoire 58 § XII (1780)
• Cordes vibrantes / Propagation du son	– *Opuscules* t. I, Mémoire 1 (1761) – *Opuscules* t. I, Mémoire 25 (1761) – *Opuscules* t. V, Mémoire 34 § II (1768) – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 § VI – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 § VII
• Mouvement des fluides / Résistance des fluides	– *Opuscules* t. I, Mémoire 4 (1761) – *Opuscules* t. V, Mémoire 31 (1768) – *Opuscules* t. V, Mémoire 33 (1768) – *Opuscules* t. V, Mémoire 34 § I (1768) – *Opuscules* t. VIII, Mémoire 57 § VII (1780)
• Equilibre des fluides	– *Opuscules* t. V, Mémoire 30 (1768) – *Opuscules* t. VIII, Mémoire 56 § I (1780)

A cela s'ajoutent également les écrits où D'Alembert considère les EDP comme un objet d'étude mathématique en tant que tel, indépendamment des problèmes physiques auxquels elles sont attachées. C'est ainsi le sujet du Mémoire 26 des *Opuscules* t. IV

[191] D'Alembert ne consacre qu'un seul écrit à la recherche de la courbe tautochrone : « Sur les tautochrones », *HAB* année 1765 (1767), p. 381-413. Il s'agit, qui plus est, d'un mémoire tardif. Nous ne le faisons donc pas apparaître dans le tableau.

L'entrée « Mouvement des fluides » recoupe par ailleurs les informations données dans les trois précédents chapitres de notre travail. Il s'agit donc uniquement d'un rappel.

(1768)[192] et du Mémoire 58 § VI des *Opuscules* t. VIII (1780)[193].

Concernant la nature mathématique des EDP manipulées par le savant, notre inventaire nous permet de constater qu'il s'agit, dans la plupart des cas, d'EDP linéaires portant sur des fonctions de deux ou trois variables, et dont l'ordre ne dépasse presque jamais 2. Les seules équations non linéaires apparaissent dans les Mémoires 4, 30, 33 et 56 § I, des *Opuscules*, mais ne feront pas l'objet d'études mathématiques particulières de la part du géomètre.

Précisons encore qu'outre les nombreuses études portant sur la première phase de ses écrits, plusieurs historiens, spécialistes des EDP, se sont d'ores et déjà ponctuellement penchés sur certains des travaux tardifs dont nous dressions la liste à l'instant. Signalons ainsi que, dans l'état de nos connaissances :

- le Mémoire 58 § VI, en lien avec les cordes vibrantes et la propagation du son, l'est par C. Houzel[194] et par A.P. Youschkevitch[195]. Quant aux Mémoires 1 et 25, dans lesquels D'Alembert polémique avec Euler et Daniel Bernoulli sur les cordes vibrantes, ils sont abordés par H. Burkhardt[196], C. Truesdell[197], S. Demidov[198], I. Szabò[199] et J. Lützen[200].
- les Mémoires des 4, 31 et 33, concernant l'écoulement des fluides dans les vases et les tuyaux, sont partiellement examinés par C. Truesdell[201], qui en relève les principaux résultats.
- le Mémoire 26, traitant des EDP sous un angle exclusivement mathématique, est partiellement abordé par C. Houzel[202] et, de façon plus détaillée, par S. Demi-

[192] D'Alembert, *Opuscules*, t. IV, 1768, Mémoire 26 : « Recherches de Calcul intégral », p. 225-253.

[193] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 58, § VI : « Sur les Fonctions discontinues », p. 302-308.

[194] C. Houzel, « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'université de Laval, 2003, p. 237-258.

[195] A.P. Youschkevitch, « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.

[196] H. Burkhardt, « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Erster Haupteil : Dis Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen und astronomischen Problemen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. X-2, 1908, p. 1-894.

[197] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788*, in Euler, *Opera Omnia*, série II, vol. 11, Sect. 2, Zürich, 1960.

[198] S. Demidov, « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Actes du Colloque organisé par le Centre International de Synthèse les 15-18 juin 1983, Paris, 1989, p. 333-350.

[199] I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1977.

[200] J. Lützen « Partial differential equations », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guiness, London, Routledge, 1994, p. 452-469.

[201] C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954.

[202] C. Houzel, *Ibid.* note 194.

dov[203].

Naturellement, de nombreux autres commentaires mériteraient encore d'être faits. L'inventaire soulève par exemple la question de l'indépendance du Mémoire 26 vis-à-vis des écrits physico-mathématiques du savant. Partant du constat que D'Alembert manipule des EDP parfois relativement semblables pour deux problèmes physiques distincts, on pourrait également se demander s'il a véritablement conscience de ces similitudes et s'il les utilise. Cette seconde partie de son œuvre scientifique, recèle ainsi tout un ensemble de nouveaux éléments, dont beaucoup restent encore à étudier.

Pour l'heure, nous nous concentrerons essentiellement sur la question suivante : quelle est la démarche de D'Alembert pour « résoudre » des problèmes faisant intervenir des EDP ? Nous nous restreindrons, pour ce faire, au champ des problèmes physico-mathématiques, seul cadre dans lequel l'auteur recherche des solutions suivant un schéma *apparemment* proche de la démarche des mathématiques modernes.

Pour mieux faire comprendre les raisons de ce choix, quelques précisions concernant la terminologie dalembertienne dans ce domaine sont tout d'abord nécessaires. Le vocabulaire mathématique employé par l'auteur n'est effectivement pas forcément le même qu'aujourd'hui. Il n'est, qui plus est, pas complètement stabilisé. Le terme d'« équation », par exemple, désigne généralement une égalité sans qu'il y ait de véritable spécification des inconnues, des paramètres ou des variables. Le terme « résoudre », au même titre que celui de « solution », est le plus souvent attaché à un problème au sens large. Il ne correspond pas à la résolution d'une équation mathématique, telle que nous en concevons le sens actuellement, mais recouvre l'ensemble des étapes conduisant de la mise en équation d'un problème physico-mathématique jusqu'à l'expression d'une solution.

Nous montrerons dans un instant que ces étapes, souvent entremêlées dans les écrits de D'Alembert, sont plus précisément au nombre de trois :

- une première étape de mise en équation du système physique permettant d'aboutir à l'écriture d'une EDP ;
- une seconde étape d'« intégration » de l'EDP, laquelle consiste, dans le contexte qui nous intéresse, en un simple processus de réécriture, c'est-à-dire une reformulation de l'EDP par le moyen du critère d'Euler ;
- suivie d'une phase où le savant introduit d'autres conditions physiques caractéristiques du problème abordé.

Centrés sur l'« intégration » des EDP, ses écrits purement mathématiques n'abordent donc pas la question dans son entier. C'est le cas du Mémoire 26 des *Opuscules* t. IV (1768) où D'Alembert se lance dans une étude systématique de larges classes d'EDP linéaires. Il cherche à dégager des méthodes pour les intégrer et aboutir à des solutions générales s'exprimant sous forme de combinaisons linéaires de fonctions arbitraires. Mais,

[203] S. Demidov, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° XXXV/1, 1982, p. 3-42.

dans cette démarche novatrice pour l'époque, il fait abstraction du contexte physique dans lequel ces EDP interviennent et ne se soucie donc pas de ce que nous appellerions les conditions initiales et conditions aux limites du problème. C'est pourquoi nous excluons ce texte de notre corpus d'étude.

Précisons aussi que, dans ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, D'Alembert procède à l'étude mathématique de deux EDP[204], exhibe, ce faisant, des méthodes d'intégration qu'il applique ensuite, dans la troisième et dernière partie de l'ouvrage[205], à la résolution de problèmes physiques particuliers. Quoique, dans ce cadre, il s'interroge pour la première fois sur ce que nous pourrions anachroniquement appeler la question de l'*existence* d'une solution, et affirme ainsi que, dans certaines conditions, le problème pourrait être « impossible »[206], il s'agit cependant d'une remarque ponctuelle et isolée, précisément étudiée par S. Demidov[207]. La continuation de ces recherches dans le Mémoire 58 § XII des *Opuscules* t. VIII (1780) se borne d'ailleurs à un cadre d'étude exclusivement mathématique et ne fait donc plus apparaître les caractérisques physique du problème. C'est la raison pour laquelle ces aspects mathématiques du traité, non seulement examinés par S. Demidov[208], mais aussi par J. Lützen[209] et G. Grimberg[210], nous intéresseront peu vis-à-vis de la question que nous souhaitons ici aborder.

Enfin, nous ne nous attarderons pas sur les EDP liées à la théorie l'équilibre des fluides et au problème de la courbe tautochrone parce que D'Alembert ne tente pas de les « résoudre ».

Nous nous intéresserons ainsi essentiellement aux écrits consacrés au mouvement des fluides et aux cordes vibrantes. Ce sont les deux questions dans lesquelles la démarche de « résolution » de D'Alembert se trouve suffisamment développée pour que nous puissions procéder à un examen pertinent. Nous allons à présent étudier comment les trois étapes qui la caractérisent se déclinent dans ces deux cas de figure.

« Résoudre » le problème des cordes vibrantes

D'Alembert se penche pour la première fois sur le problème des cordes vibrantes dans les mémoires de l'*Histoire de l'Académie des sciences et des belles-lettres de Berlin* des années 1747 et 1750. Dans le Mémoire 1 des *Opuscules* t. I (1761), il revient rapidement sur la mise en équation du problème, et développe plus avant la question de la recherche

[204] D'Alembert, *Réflexions sur la cause générale des Vents*, Paris, 1747, art. 87-89, p. 164-172.

[205] D'Alembert, *Ibid.* note 204, p. 172-189.

[206] D'Alembert, *Ibid.* note 204, § V, p. 177.

[207] S. Demidov, *Ibid.* note 203, p. 13-14.

[208] S. Demidov, *Ibid.* notes 198 et 203.

[209] J. Lützen, *Ibid.* note 200.

[210] G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

de solutions. Comme cet écrit constituera, avec le Mémoire 25, le cœur de notre étude dans la seconde partie de l'article, nous en résumerons ici les premiers paragraphes[211].

Le problème consiste à considérer une corde de longueur a fixée en ses deux extrémités A et B. Suite à sa mise en mouvement, il s'agit alors de déterminer la fonction $y(x,t)$ donnant l'ordonnée, c'est-à-dire l'excursion de chaque point de la corde d'abscisse x, à chaque instant t (voir la Fig. VII). Dans l'œuvre de D'Alembert, le problème de la corde vibrante à deux extrémités fixes apparaît sous trois formes distinctes, qui diffèrent par leur état initial :

- La corde est écartée de sa position rectiligne à $t=0$, et lâchée sans vitesse initiale, c'est le cas de la corde pincée.
- La corde est à l'état rectiligne à $t=0$, et une vitesse initiale lui est imprimée, c'est le cas de la corde frappée.
- Reste un cas mixte où ni les ordonnées, ni la vitesse initiale ne sont nulles.

Comme nous allons le voir, le choix d'une de ces trois situations intervient après la mise en équation et la première phase de traitement de l'EDP obtenue.

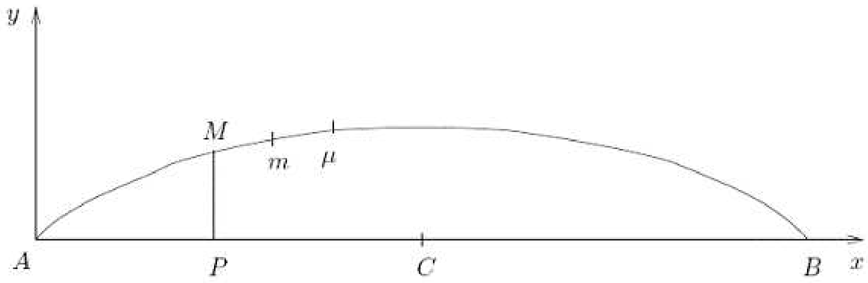


Fig. VII – Corde AMB fixée entre ses deux extrémités A et B.

Afin de mettre en équation le mouvement de la corde, D'Alembert se place avant tout dans l'hypothèse de petites vibrations, ceci permettant de confondre l'abscisse curviligne s et l'abscisse x. Il établit ensuite un lien entre la force retardatrice animant chaque portion infinitésimale de la corde et les termes $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Il en déduit ainsi, après simplification, l'EDP gouvernant la dynamique du système[212] :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Débute alors la phase d'« intégration » que nous évoquions à l'instant. Pour « intégrer » l'EDP précédente, D'Alembert pose d'une part $dy = pdt + qdx$, avec $p=\dfrac{dy}{dt}$ et $q=\dfrac{dy}{dx}$,

[211] D'Alembert, *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Mémoire 1 : « Recherches sur les vibrations des cordes sonores », p. 1-7.

[212] D'Alembert remarque, dès 1747, que l'EDP obtenue peut également représenter les vibrations longitudinales d'une colonne d'air, et donc correspondre à l'équation de la propagation du son. Nous aborderons la question dans la troisième partie de ce chapitre.

l'équation se résumant dès lors au système d'EDP du 1er ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx}, \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dt}. \end{cases}$$

Il applique d'autre part le critère d'Euler, selon lequel cette formulation équivaut à la considération des deux différentielles complètes $qdt + pdx$ et $pdt + qdx$, c'est-à-dire telles qu'il existe deux fonctions $u(x,t)$ et $y(x,t)$ vérifiant $du = qdt + pdx$ et $dy = pdt + qdx$[213]. L'addition et la soustraction de ces deux expressions conduisent ainsi au système :

$$\begin{cases} dy + du = (p+q)(dt+dx), \\ dy - du = (p-q)(dt-dx). \end{cases}$$

L'intégration (au sens moderne) de chacune des deux différentielles donne alors :

$$\begin{cases} y + u = \Phi(x+t), \\ y - u = \Delta(x-t), \end{cases}$$

nouveau système à partir duquel D'Alembert parvient à l'expression générale[214] :

$$y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t).$$

Φ et Δ correspondent ici à ce que nous appellerons par la suite des fonctions arbitraires, c'est-à-dire des fonctions quelconques d'une variable dont la définition, relative aux seules EDP, est similaire à celle des *constantes arbitraires* apparaissant lors de l'intégration d'équations différentielles ordinaires. $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ correspond ainsi à une nouvelle formulation de l'EDP $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ à l'aide de deux fonctions arbitraires. Son obtention clôt la phase d'« intégration ».

D'Alembert revient dès lors au problème physique, caractérisé par la fixité des extrémités de la corde en A et en B : le savant pose donc $y(0,t) = 0$ (fixité en A) et $y(a,t) = 0$ (fixité en B). De la première de ces deux équations, il découle $\Phi(t) = -\Delta(-t)$, et la relation $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ s'écrit alors :

$$y(x,t) = \Phi(x+t) - \Phi(t-x).$$

[213] Dans les art. 87 à 89, p. 164-172, de ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, dédiés à l'« intégration » des deux EDP présentées dans notre inventaire — voir p. 331 —, D'Alembert suit le chemin inverse, et part donc d'un système de différentielles complètes pour aboutir à un système d'EDP du 1er ordre. La démarche d'« intégration », telle que nous la décrivions p. 105, reste cependant identique : il s'agit encore d'une réécriture de l'EDP par le moyen du critère d'Euler, c'est-à-dire d'un passage, dans un sens ou dans l'autre, entre les deux formulations de droite de la Fig. VI, p. 101.

[214] Le coefficient $\frac{1}{2}$, qui découle de l'addition des deux termes, est directement intégré dans les fonctions Φ et Δ.

La seconde équation entraîne quant à elle $\Phi(a+t) - \Phi(t-a) = 0$, c'est-à-dire la $2a$-périodicité de la fonction Φ.

Si l'on se place maintenant dans le cadre du problème de la corde pincée comme le fait le savant dans ce Mémoire 1 des *Opuscules*, sa corde peut être représentée à $t = 0$ par la fonction non nulle $y(x,0)$ et une vitesse initiale $\frac{dy}{dt}(x,0) = 0$. Cette seconde caractéristique physique implique la parité de la dérivée de la fonction Φ, et par conséquent l'imparité de Φ.

La solution générale peut alors s'écrire

$$y(x,t) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t).$$

Compte tenu du fait que $y(x,0) = 2\Phi(x)$, et puisque la fonction arbitraire Φ est impaire et $2a$-périodique, Φ est donc entièrement déterminée par la position de la corde à l'instant $t = 0$. Nous sommes ici dans le cas très particulier d'une résolution explicite, ce qui n'est naturellement pas le cas du problème de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un vase.

« Résoudre » le problème de l'écoulement des fluides

Le processus visant à « résoudre » ce problème se décline de même en trois phases. La première consiste en la mise en équation du problème physique, à savoir le mouvement plan d'un fluide incompressible dans un vase $ABFE$ ouvert en AB et EF (voir la Fig. VIII). Elle comprend trois étapes.

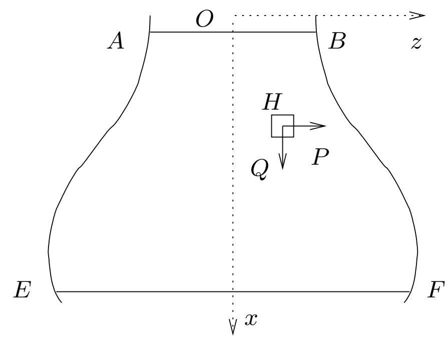


Fig. VIII – Ecoulement d'un volume de fluide dans un vase $ABEF$ ouvert en ses deux extrémités AB et EF.

Deux d'entre elles sont précisément décrites dans le chapitre II : la formulation analytique du principe de l'hydrostatique, p. 66, et l'expression de la conservation du volume du fluide au cours de l'écoulement, p. 70. Elles permettent à D'Alembert de mettre en équation le mouvement sous la forme d'un système d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx}(t,x,z) = \dfrac{dQ}{dz}(t,x,z), \\ \dfrac{dP}{dz}(t,x,z) = -\dfrac{dQ}{dx}(t,x,z), \end{cases}$$

dans lequel $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ représentent respectivement les composantes horizontale et verticale de la vitesse d'un élément rectangulaire infinitésimal de fluide H repéré, dans le vase, par les coordonnées spatiales x et z.

Elles se trouvent néanmoins précédées, comme nous avions déjà eu l'occasion de le souligner, par une étape consistant, en termes modernes, à séparer les variables spatiales et temporelle au sein des deux composantes $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$. D'Alembert a, dans ce cadre, recours à une hypothèse physique dont on verra qu'elle joue également un rôle fondamental dans la recherche d'une solution au problème. Cette hypothèse se résume à considérer que « le fluide contigu aux parois [...] coule le long de ces parois »[215]. Posant $z = y$ au niveau de BF et AE, de telle sorte que la fonction $y(x)$ corresponde à l'équation des contours du vase, la relation

$$\frac{Q(t,x,z)}{P(t,x,z)} = \frac{dx}{dy}$$

liant les composantes de la vitesse en cet endroit, peut en effet, du fait de la fixité de parois, être considérée comme indépendante du temps. Il devient ainsi possible de séparer les variables spatiales et temporelle au sein de la vitesse, ce qui incite D'Alembert à définir une fonction θ du temps t, telle qu'en tout point (x,z) du fluide les composantes horizontale et verticale $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse vérifient :

$$\begin{cases} Q(t,x,z) = \theta(t)q(x,z) \\ P(t,x,z) = \theta(t)p(x,z). \end{cases}$$

Une telle opération revient naturellement à se restreindre à la considération d'un type très particulier d'écoulement pour lequel, comme D'Alembert le remarque lui-même dans le § VI du Mémoire 4 — voir plus loin dans ce chapitre, p. 125 —, les lignes de courant, répondant à l'équation $\dfrac{dz}{P(t,x,z)} = \dfrac{dx}{Q(t,x,z)}$, c'est-à-dire

$$p(x,z)\,dx - q(x,z)\,dz = 0,$$

ne varient pas au cours du temps — ce qui n'est pas pour autant le cas des trajectoires du fluide. Dans l'art. XLIII de son mémoire « Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique »[216] (1762), contenant un commentaire critique du Mémoire 4, Lagrange en contestera d'ailleurs explicitement la généralité en affirmant que :

[215] D'Alembert, *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, p. 137.

[216] *Mélanges de Turin*, t. II, *pour les années 1760-1761*, 1762, p. 196-298 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 365-468.

> « M. d'Alembert prétend que les équations $\left[\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}, \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}\right]$ sont les seules vraiment exactes pour déterminer les lois du mouvement des fluides ; il se fonde sur ce que le rapport des vitesses [...] doit être indépendant du temps t dans les particules qui coulent le long des parois du vase ; d'où il infère qu'il doit l'être aussi en général dans toutes les particules du fluide ; mais cette conséquence, si j'ose le dire, ne me paraît point assez juste ».

Cette critique poussera D'Alembert, dans les art. 14 à 17 du Mémoire 31 de ses *Opuscules* t. V (1768), à justifier le cadre d'étude dans lequel il se place dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, c'est-à-dire à démontrer que l'opération de séparation des variables de temps et d'espace peut être admise *a minima* dans les premiers instants du mouvement[217]. Quoiqu'il en soit, et qu'il s'agisse des Mémoires 4, 31, 33 ou 57 § VII de ses *Opuscules*, il travaillera exclusivement dans ce cadre pour ce qui est de la question de la « résolution » du problème, son but étant de parvenir à une expression analytique de l'équation des lignes du courant — indépendantes du temps, rappelons-le, dans ce cas de figure — du fluide dans le vase. Nous considérerons donc, dans tout ce qui suit, le système d'EDP du 1[er] ordre auquel se restreint lui-même le géomètre, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx}(x,z) = \frac{dq}{dz}(x,z), \\ \frac{dp}{dz}(x,z) = -\frac{dq}{dx}(x,z) \cdot \end{cases}$$

De même que dans le problème des cordes vibrantes, D'Alembert entame dès lors la phase d'« intégration », ceci grâce à une technique mathématiquement innovante donnée dans l'*Essai sur la résistance des fluides*[218]. Quoique cette méthode soit aujourd'hui fort bien connue des historiens des sciences[219], rappelons toutefois en quoi elle consiste.

Les relations $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$ et $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$ reviennent, d'après le critère d'Euler, à considérer $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ comme deux différentielles exactes. Les différentielles

$$qdx + \sqrt{-1}\frac{pdz}{\sqrt{-1}}$$

et

$$\sqrt{-1}pdx + \frac{qdz}{\sqrt{-1}}$$

---

[217] Dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, chap. VIII, art. 148, p. 181, D'Alembert pose effectivement le problème en ces termes : « Imaginons d'abord un vase [...] dans lequel soit renfermée une quantité de Fluide $ABFE$, qui, soutenue par le fond FE, soit stagnante dans ce vase, & qu'ensuite on ôte tout-à-coup le fond FE : on demande quel doit être le mouvement du Fluide ».

[218] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, 1752, art. 57 à 60, p. 60-63.

[219] Voir C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. LIV-LV ; G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998, p. 53-61 ; I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, 1977, p. 237-239.

le sont donc aussi[220], de même que leur somme

$$(q+\sqrt{-1}p)\times\left(dx+\frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$$

et leur différence

$$(q-\sqrt{-1}p)\times\left(dx-\frac{dz}{\sqrt{-1}}\right).$$

Ces deux combinaisons linéaires induisent ainsi le changement de variables

$$\begin{cases} u = x+\sqrt{-1}z \\ v = x-\sqrt{-1}z, \end{cases}$$

à partir duquel deux nouvelles différentielles exactes

$$(q+\sqrt{-1}p)\,dv$$

et

$$(q-\sqrt{-1}p)\,du,$$

ou $(p-\sqrt{-1}q)\,dv$ et $(p+\sqrt{-1}q)\,du$, sont obtenues. Celles-ci permettent, pour finir, d'exprimer $p-\sqrt{-1}q$ et $p+\sqrt{-1}q$ sous la forme de fonctions quelconques Φ et Δ des variables complexes u et v. Il vient ainsi $\Delta(v) = p-\sqrt{-1}q$ et $\Phi(u) = p+\sqrt{-1}q$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} p = \dfrac{\Phi(u)+\Delta(v)}{2}, \\[2ex] q = \dfrac{\Phi(u)-\Delta(v)}{2\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} p(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)+\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}, \\[2ex] q(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)-\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Ce résultat conduit, dans le même temps, à l'expression des différentielles $pdz+qdx$ et $pdx-qdz$ en fonction de u et v, de telle sorte que

$$\begin{cases} pdz+qdx = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}[\Phi(u)\times(dx+\sqrt{-1}dz)-\Delta(v)\times(dx-\sqrt{-1}dz)], \\[2ex] pdx-qdz = \dfrac{1}{2}[\Phi(u)\times(dx+\sqrt{-1}dz)+\Delta(v)\times(dx-\sqrt{-1}dz)], \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} pdz+qdx = \dfrac{\Phi(u)du-\Delta(v)dv}{2\sqrt{-1}}, \\[2ex] pdx-qdz = \dfrac{\Phi(u)du+\Delta(v)dv}{2}. \end{cases}$$

[220] Le terme $\sqrt{-1}$ employé par D'Alembert correspond ici à la quantité i.

Cette méthode d'« intégration » par passage dans le champ complexe, d'un système d'EDP (*) renvoyant à ce qu'on appellera les *conditions de Cauchy-Riemann* dès le siècle suivant, constitue les prémices de l'actuelle théorie des fonctions d'une variable complexe — théorie jouant, comme on sait, un rôle essentiel dans l'étude des écoulements potentiels bidimensionnels[221]. Comme le remarque J.-L. Verley, la différentielle du et sa conjuguée dv, induites par le changement de variables $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$, correspondent à « la première description [...] des fonctions harmoniques que Riemann prendra comme point de départ de sa théorie des fonctions de la variable complexe dans sa dissertation inaugurale de 1851 »[222]. Par ailleurs, I. Szabò[223] et G. Grimberg[224] notent que cette méthode conduit aussi D'Alembert, dans les art. 54 et 55 de l'*Essai sur la résistance des fluides*, à introduire ce qui deviendra le concept de *potentiel complexe* et à s'interroger sur la dérivabilité de la fonction $q(x, z) - \sqrt{-1}p(x, z)$, aujourd'hui appelée *vitesse complexe*.

L'idée consistant à introduire l'imaginaire $\sqrt{-1}$ afin d'intégrer le système d'EDP (*) s'inspire très probablement, quant à elle, de la méthode d'intégration appliquée dans le problème des cordes vibrantes, méthode par ailleurs déjà employée dans ses *Réflexions sur la cause des vents* (1747)[225]. Nous avons en effet récemment constaté que le savant s'appuie explicitement, dans le Mémoire 33 § I de ses *Opuscules* t. V (1768) — toujours consacré à la résolution du système (*) —, sur les recherches données dans le Mémoire 1 des *Opuscules* t. I, relatif aux cordes vibrantes[226]. Les systèmes d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre (*) et (**) respectivement manipulés dans les deux cas de figures diffèrent, de fait, très peu l'un de l'autre. Il y a donc fort à penser que cette maigre différence, tenant en la présence du signe « $-$ » dans la seconde EDP du système (**), ait justement incité

[221] Pour un exposé des méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe appliquées à la résolution de problèmes physiques, voir, par exemple, M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la theorie des fonctions d'une variable complexe*, Editions Mir, Moscou, 1952. Les deux auteurs présentent d'ailleurs, dans cet ouvrage, D'Alembert et Euler comme les premiers initiateurs de cette théorie.

[222] J.-L. Verley, *Les fonctions analytiques*, in J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1986, p. 128.

[223] Voir I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel/Stuttgart, Birkhäuser, 1976, p. 239.

[224] Voir G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998, p. 55-58.

[225] Comme le notent S. Demidov et G. Grimberg, D'Alembert pratiquait déjà, dans cet ouvrage, des combinaisons de formes différentielles à coefficients complexes en vue de faire les changements de variables adéquats : voir, pour plus de détails, S. Demidov, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1982, p. 6-13, et G. Grimberg, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998, p. 218-228.

[226] Cet élément a été mis au jour à l'occasion du mémoire de l'UE « Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences » du Master 1 de Mathématiques de l'Université Lyon 1, intitulé « Etude et annotation du Mémoire 33 des *Opuscules mathématiques* (1768) de D'Alembert » et réalisé par F. Colin, M. Garcia et A.-S. Paumier sous notre direction en mars, avril et mai 2007.

D'Alembert à introduire l'imaginaire $\sqrt{-1}$:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dq}{dx} \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz} \\ \dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{dq}{dx} \end{cases}$$

Pour autant, quoique le savant parvienne à une résolution explicite du problème de la corde pincée, il n'en sera pas de même dans le cas du mouvement d'un fluide. Les conditions physiques associées au système d'EDP dans la troisième et dernière phase de la démarche visant à « résoudre » le problème sont en effet déterminantes dans ce cadre. Elles se traduisent par deux types d'équations dans le cas d'une corde vibrante : des équations faisant intervenir la variable d'espace x, et des équations faisant intervenir la variable de temps t. Les deux conditions prises en compte par le savant dans le cas d'un écoulement stationnaire font, quant à elles, intervenir des fonctions de *plusieurs* variables d'espace x et z. Elles donnent lieu, de ce fait, à un problème autrement plus complexe.

La première de ces deux conditions correspond à la symétrie du vase par rapport à son axe, exprimée, selon les propres termes de l'auteur, par le fait que « la ligne CD divise le vase en deux parties égales & semblables »[227]. De cette symétrie, il découle l'annulation de la composante horizontale de la vitesse en tout point de la droite CD : ce qui revient à poser $p(x, z) = 0$ lorsque $z = 0$.

La seconde coïncide avec l'hypothèse incitant D'Alembert à séparer les variables spatiales et temporelle au sein des composantes de la vitesse : ceci en vertu, rappelons-le, de la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase, c'est-à-dire pour $z = y$. La relation qui en découle,

$$\frac{dP(x, y, t)}{dQ(x, y, t)} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)} = \frac{dx}{dy},$$

fournit l'équation suivante pour les courbes ANE et BMF :

$$p(x, y)dx - q(x, y)dy = 0.$$

Synthèse

Qu'il s'agisse de la question des cordes vibrantes, ou de celle de l'écoulement d'un fluide, il semble que le processus visant à « résoudre » permette effectivement, d'après les descriptions précédentes, de valider un schéma composé de trois phases, synthétiquement représentées sur la Fig. IX.

---

[227] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § IV, p. 139.

Une première phase de mise en équation du mouvement, sous-tendue par l'application de principes mécaniques, consiste en la traduction du comportement dynamique du système étudié en termes d'EDP.

Au cours d'une seconde phase d'« intégration », D'Alembert part de l'EDP, prise seule, et parvient, via l'application du critère d'Euler, à une nouvelle expression générale formée de fonctions arbitraires.

Dans une troisième phase, la démarche du savant s'étend finalement au-delà du cadre strictement mathématique. Un ensemble de considérations physiques se trouvent en effet prises en compte sous la forme d'*équations complémentaires*[228]. Ces équations, adjointes à l'expression générale découlant de la phase d'« intégration », forment un nouveau problème qu'il ne reste plus, dès lors, qu'à tenter de *résoudre*. Non pas « résoudre » dans le sens dalembertien du terme, mais résoudre dans le sens de déterminer la solution du problème.

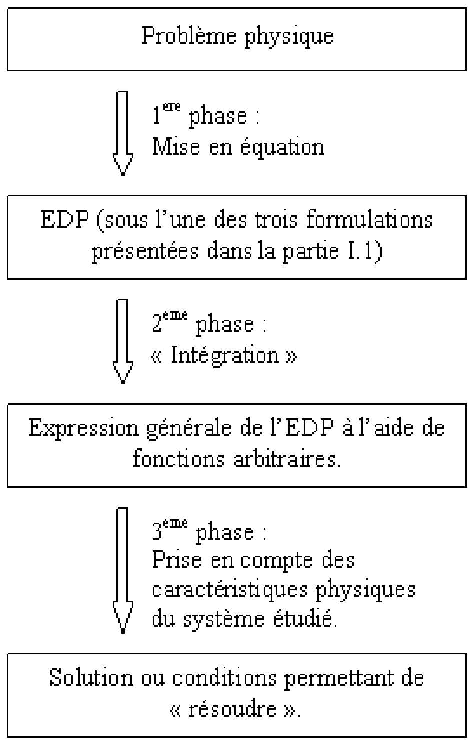


Fig. IX – La démarche visant à « résoudre » un problème physico-mathématique faisant intervenir une EDP.

Comment D'Alembert procède-t-il dans ce cadre ? Quelles sont les spécificités de sa

[228] Le terme d'« équations complémentaires » est de notre fait. Il nous permettra de désigner les équations introduites par D'Alembert afin de traduire certaines caractéristiques physiques des problèmes étudiés sans avoir à recourir aux termes anachroniques de *conditions initiales* et de *conditions aux limites*.

démarche, et quelle idée se fait-il d'une solution d'un problème faisant intervenir une EDP ? C'est là l'objet de la seconde partie de ce travail de recherche.

2. « Résoudre » un problème physico-mathématique faisant intervenir une EDP : spécificités de la démarche de D'Alembert

Nous nous pencherons exclusivement ici sur la troisième phase de la démarche de D'Alembert, au cours de laquelle le savant se lance dans la recherche de solutions.

Nous commencerons, dans ce cadre, par nous concentrer sur le statut des équations complémentaires dans le problème des cordes vibrantes. Nous réfuterons ainsi l'emploi des termes modernes de *conditions initiales* et de *conditions aux limites* pour caractériser ce type d'équations.

Revenant ensuite au problème de l'écoulement des fluides, avant d'achever notre examen de la question des cordes vibrantes, nous remarquerons que la manière de concevoir l'interaction mathématique entre l'EDP et les équations complémentaires est une spécificité de D'Alembert qui a des implications sur le concept de solution. Nous évoquerons enfin la présence des notions d'unicité et d'existence dans l'œuvre du savant. Cette étude nous permettra de comparer l'approche de D'Alembert à celles de ses contemporains comme à celles des futures générations de mathématiciens.

Les « équations complémentaires »

Dans le Mémoire 1[229], D'Alembert défend l'idée que la fonction Φ intervenant dans la solution $y(x,t) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$, « ne doit pas changer de forme », c'est-à-dire d'expression, pour que la solution du problème puisse avoir lieu. Il tente même de le démontrer. Dans le Second « Supplément » du Mémoire 25[230], il essaie d'apporter de nouveaux arguments en exposant un problème que l'on peut considérer comme une variante du cas classique des cordes vibrantes pincées, mais où les extrémités de la corde deviennent mobiles dès que $t > 0$[231] :

> « Supposons que dans l'instant où la corde se met en mouvement, ses deux extrémités deviennent tout-à-coup mobiles, de fixes qu'elles étoient auparavant »

Peu perturbé par le faible réalisme de la situation, il énonce le résultat suivant[232] :

[229] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 1, p. 29-37.

[230] D'Alembert, *Opuscules*, t. IV, Paris, 1768, Mémoire 25, Second Supplément, p. 181-199.

[231] D'Alembert, *Ibid.* note 230, p. 180.

[232] D'Alembert, *Ibid.* note 230, p. 180-181.

« Il n'est pas moins certain qu'on aura $y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}$, par la condition que $\frac{dy}{dt}$ soit $= 0$ lorsque $t = 0$, quelle que soit x & que la seule condition qu'il y ait à remplir, c'est que $y = 0$ lorsque x & $t = 0$; ce qui a lieu en effet dans l'équation qu'on vient de donner, puisque $x = 0$ donne $\Phi(x)$ ou $y = 0$, lorsque $t = 0$ ».

La méprise de D'Alembert, dans ce passage, est significative à plus d'un égard. Quoique privé de certaines de ses équations complémentaires, le savant pense effectivement encore disposer d'une solution parfaitement déterminée :

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Qu'en est-il en réalité ? Puisque le géomètre ne détaille pas les calculs en cet endroit, nous les mènerons à sa place. Ses équations complémentaires, présentées de façon moderne, sont désormais :

$$\begin{cases} y(x,0) = \Phi(x) \text{ sur } [0,a], \text{ avec } \Phi(0) = \Phi(a) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(x,0) = 0. \end{cases}$$

En injectant cette dernière relation dans la solution générale $y = \frac{\varphi(x+t) + \Delta(x-t)}{2}$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, il vient[233] :

$$\varphi'(x) = \Delta'(x),$$

ce qui entraîne, après intégration :

$$\varphi(x) = \Delta(x) + k,$$

avec k constante arbitraire, et permet donc d'écrire, en incluant k dans les fonctions arbitraires :

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2}.$$

Or, sitôt cette expression obtenue, il apparaît immédiatement que $\varphi = \Phi$, et la solution devient

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Toutefois, cette expression ne représente pas pour autant une solution déterminée du problème gouverné par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$. La fonction Φ n'est en effet connue et déterminée que sur l'intervalle $[0, a]$, sa périodicité et son imparité étant perdues du fait de la mobilité des extrémités de la corde.

Quelles sont donc, dans ce cadre, les raisons poussant D'Alembert à soutenir la détermination de sa « solution » ? Observons le passage suivant[234] :

[233] Les fonctions φ' et Δ' correspondent aux dérivées des fonctions φ et Δ.

[234] D'Alembert, *Ibid.* note 230, p. 181.

« Si dans cette équation $y = \dfrac{\Phi(x+t)}{2} + \dfrac{\Phi(x-t)}{2}$, on se permettoit de faire changer de forme aux fonctions $\Phi(x+t)$ & $\Phi(x-t)$, le problême auroit une infinité de solutions possibles. Car en continuant la courbe initiale (dont l'équation est $y = \Phi x$) par-delà les deux points extrêmes, & lui donnant telle forme qu'on voudroit, sans s'assujettir à l'équation $y = \Phi x$, on satisferoit toujours à l'équation $y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$, dans laquelle Φx changeroit de forme à volonté, au-delà des deux extrémités de la corde ; cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique ».

Pour resituer cet extrait, précisons que l'objectif de D'Alembert dans cette variante du problème des cordes vibrantes est de prouver rigoureusement qu'il est indispensable que Φ ne change pas d'équation sur son ensemble de définition, qu'elle vérifie, autrement dit, un postulat que nous nommerons désormais *permanence de la forme*. Signalons ici que, bien que cette idée ne soit pas partagée par Euler, elle est loin d'être incongrue par rapport aux habitudes de l'époque dans le traitement des problèmes physico-mathématiques.

Pour parvenir à ses fins, D'Alembert affirme que, pour des raisons intuitives liées à son appréhension physique du phénomène, le problème tel qu'il l'a posé doit avoir une solution déterminée, c'est-à-dire unique[235]. Dès lors, pour rendre compte mathématiquement de cette unicité, il explique qu'il faut nécessairement interdire à la fonction Φ de changer d'expression, sinon celle-ci peut prendre n'importe quelle valeur en dehors de l'intervalle $[0, a]$. En somme, son raisonnement est le suivant : Φ étant déterminée sur $[0, a]$, elle doit l'être également partout puisqu'il y a permanence de la forme. Ce n'est donc qu'au prix de l'introduction d'un postulat arbitraire qu'il récupère une solution déterminée. Bien entendu, il ne prétend pas que la fonction Φ reste impaire et $2a$-périodique, et ce n'est évidemment pas le cas. Erroné d'un point de vue moderne de par l'introduction du postulat de permanence de la forme, le raisonnement du savant n'en reste pas moins scrupuleusement cohérent.

Au-delà de cet aspect, ce problème présente l'intérêt de montrer que les termes de conditions initiales et conditions aux limites ne sont pas adaptés à ce que fait D'Alembert, car ce dernier n'a pas une idée claire du nombre de conditions nécessaires mathématiquement. C'est l'une des raisons pour lesquelles il nous paraît justifié de parler d'équations complémentaires, plutôt que de conditions initiales et de conditions aux limites. Cette question du dénombrement des conditions nécessaires, qui suscitera des interrogations dès la fin du XVIII^{e} siècle (Laplace, Monge), restera longtemps un problème délicat, car la réponse dépend de la structure de l'EDP, de son ordre et du nombre de variables.

[235] L'unicité à laquelle nous faisons ici référence, celle de D'Alembert, ne doit pas être confondue avec la notion moderne. Nous reviendrons précisément sur cette question : voir p. 132.

A cela s'ajoute un argument tiré de notre étude préliminaire de la démarche de D'Alembert. Nous avions pu constater qu'il commence par étudier l'EDP, prise seule (phase « d'intégration »), avant de confronter ce qu'il obtient aux équations tirées des caractéristiques physiques du problème, les équations complémentaires autrement dit. Au cours de ce processus, il ne pose évidemment pas le problème tel que nous le ferions aujourd'hui, mais semble considérer que l'EDP et les équations complémentaires ont le même statut, comme dans un système ordinaire d'équations. Ce dernier point nous conforte dans notre décision d'utiliser le terme d'équation complémentaire à la place de ceux de conditions initiales et aux limites.

Les interactions entre l'EDP et les « équations complémentaires »
dans le problème de l'écoulement des fluides

Après avoir précisé le statut des équations complémentaires, il nous faut à présent nous pencher sur le rapport qu'elles entretiennent avec l'EDP, ainsi que sur leur rôle dans le cadre de la recherche de solutions. Revenons, pour ce faire, sur la question de l'écoulement des fluides. Comme nous le précisions dans la première partie, D'Alembert pose explicitement deux équations complémentaires :

– $pdx - qdz \mid_{z=y} = 0$, traduisant la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase,
– et $p(x,z) \mid_{z=0} = 0$, découlant de la symétrie du vase par rapport à son axe CD.

Ces deux équations sont naturellement à rapporter, comme nous l'avons vu, à l'expression générale des composantes horizontale et verticale de la vitesse (résultant de l'« intégration » du système d'EDP du 1er ordre) :

$$\begin{cases} p(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) + \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}, \\ q(x,z) = \dfrac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) - \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Vis-à-vis de la seconde équation complémentaire, D'Alembert propose le raisonnement suivant[236] :

> « Lorsque $z=0$, on a $\Phi(x+z\sqrt{-1}) + \Delta(x-z\sqrt{-1}) = 0$; donc $\Delta x = -\Phi x$; donc $\Delta(x-z\sqrt{-1}) = -\Phi(x-z\sqrt{-1})$ »

Partant de $p(x,z) \mid_{z=0} = 0$, et sachant que

$$p = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z) + \Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2},$$

le savant parvient, autrement dit, à la relation fonctionnelle

$$\Delta(x-\sqrt{-1}z) = -\Phi(x-\sqrt{-1}z) \mid_{z=0},$$

[236] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § IV, p. 140.

c'est-à-dire
$$\Delta(x) = -\Phi(x). \tag{6}$$
La seconde déduction le conduit à
$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z). \tag{7}$$
Cette relation (7), c'est-à-dire $\Delta(v) = -\Phi(v)$ compte tenu de $v = x - \sqrt{-1}z$, D'Alembert la rapporte à la première des deux équations complémentaires
$$pdx - qdz\ |_{z=y} = 0.$$
Sachant que l'expression
$$\frac{\Phi(u)du + \Delta(v)dv}{2}$$
de la différentielle $pdx - qdz$ pour $z = 0$ correspond à l'équation des parois du vase
$$\Phi(u)du + \Delta(v)dv = 0,$$
l'injection de la relation $\Delta(v) = -\Phi(v)$ lui permet en fait d'obtenir
$$\Phi(u)du - \Phi(v)dv = 0,$$
c'est-à-dire
$$\varphi(u) - \varphi(v) = 2M,$$
ou
$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) - \varphi(x - \sqrt{-1}y) = 2M, \tag{8}$$
M et φ désignant respectivement une constante réelle arbitraire et une primitive de la fonction Φ. D'Alembert parvient ainsi à la forme générale (8) de l'équation des parois AE et BF du vase $ABFE$. En remontant à la phase d'« intégration » du système d'EDP et en opérant de nouvelles combinaisons linéaires des différentielles complètes $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ — qui le conduiront elles-mêmes à de nouveaux changements de variables —, il montrera par ailleurs, dans le § II du Mémoire 33, que cette même équation (8) possède de nombreuses variantes, dont
$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) - \varphi(x - \sqrt{-1}y) = 2M\sqrt{-1}, \tag{9}$$
avec M une constante réelle.

L'opération consistant à déduire l'équation (6) de l'équation (7) mérite que nous nous y arrêtions quelques instants. Cela revient effectivement à passer, en termes modernes, d'une relation fonctionnelle valable sur le champ des nombres réels à son équivalent sur le champ des nombres complexes.

Ce raisonnement de D'Alembert sous-entend d'abord l'hypothèse, courante à cette époque, selon laquelle les fonctions Φ et Δ peuvent être réduites sous forme de séries polynomiales ou trigonométriques à coefficients réels[237].

D'autre part, dans ce passage de $\Delta(x) = -\Phi(x)$ à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

D'Alembert étend mathématiquement une propriété locale, initialement définie pour $z = 0$ — c'est-à-dire au niveau de l'axe du vase —, à l'ensemble des particules de fluide (x, z) s'écoulant dans le vase. Ce raisonnement pourrait n'avoir mérité aucun commentaire, si le savant avait physiquement traduit la propriété de symétrie du vase, en remarquant qu'au-delà de l'annulation de la composante verticale de la vitesse sur l'axe, la symétrie implique également la relation $p(x, -z) = p(x, z)$ en tout point de l'écoulement. De là, sachant que

$$p = \frac{\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z)}{2},$$

il aurait pu déduire

$$\Delta(x + \sqrt{-1}z) = \Delta(x - \sqrt{-1}z),$$

qui ne correspond pas à la relation

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z)$$

induite par son raisonnement. La déduction proposée par D'Alembert n'a donc rien à voir avec la traduction d'une propriété physique de l'écoulement. Elle consiste au contraire en une manipulation exclusivement mathématique de l'équation complémentaire de départ,

$$\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z) = 0,$$

laquelle lui permet d'aboutir à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

ou $\Delta(v) = -\Phi(v)$[238].

[237] La détermination de la fonction φ dans l'équation (8) repose de même fréquemment, c'est notamment le cas dans le Mémoire 33 des *Opuscules* t. V (1768), sur l'écriture sous forme de séries polynomiales ou trigonométriques à coefficients réels. D'Alembert n'est toutefois pas sans se poser de questions sur la légitimité d'un tel raisonnement. Dans le même Mémoire 33, § III, art. 6, p. 108, il affirme en effet que la réduction de φ en série « ne donne pas la valeur réelle & générale de cette quantité ». Il s'interroge plus longuement à ce sujet dans les Mémoires 25 et 28 des *Opuscules* t. IV (1768). Pour plus de détails sur cette question, voir G. Jouve, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783) – Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1, 2007.

[238] Rappelons que $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$.

Revenons à présent sur l'équation générale des parois du vase obtenue dans le Mémoire 4. Cette équation

$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) - \varphi(x - \sqrt{-1}y) = 2M, \tag{8}$$

ou l'une des variantes exhibée dans le § II du Mémoire 33, à savoir

$$\varphi(x + \sqrt{-1}y) - \varphi(x - \sqrt{-1}y) = 2M\sqrt{-1}, \tag{9}$$

pose la question de la détermination de la fonction φ des variables x et y, cette fonction dépendant elle-même de l'équation $y(x)$, supposée connue, des contours du vase. Nous verrons que la démarche de D'Alembert vis-à-vis de ce problème dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I, et les Mémoires 31 et 33 des *Opuscules* t. V (1768), illustre sa façon de concevoir la nature des interactions existant entre le système d'EDP et les équations complémentaires qui lui ont été adjointes. Nous constaterons par ailleurs que la possibilité d'obtenir une solution dépend, selon lui, de la nature même de ces interactions.

Ces équations (8) et (9) correspondent également, d'après D'Alembert, à l'expression analytique des « filets », c'est-à-dire de ce que nous appellerions les *lignes de courant* du fluide à l'intérieur du vase. La constante M devient alors un paramètre, caractéristique de chaque filet, et la question de la détermination de la fonction φ acquiert un degré supérieur de complexité. Ce nouveau problème, le savant l'aborde principalement dans le Mémoire 33 et le Mémoire 57 § VII des *Opuscules* t. VIII (1780). Il fait aussi l'objet d'un échange épistolaire avec Lagrange dans le courant des années 1764 et 1765. Son examen nous permettra de caractériser le statut réciproque de l'équation (8), ou (9), avec l'équation $y(x)$ des contours du vase, statut dont dépendra de même la possibilité de résoudre le problème.

• Sur la possibilité de déterminer la fonction φ, M étant constant

L'équation (8) obtenue dans le Mémoire 4 correspond manifestement, selon D'Alembert, à une expression analytique compatible avec les deux équations complémentaires associées au système d'EDP. Pour ce qui est du rôle qu'il lui attribue, la réponse ne tarde pas à venir[239] :

> « Ainsi le Problême ne pourra être résolu, toutes les fois qu'on ne pourra donner à l'équation de la courbe BF [désignant la paroi du vase] la forme
>
> $$[\varphi(x + \sqrt{-1}y) - \varphi(x - \sqrt{-1}y) = 2M] \text{ ».}$$

Afin d'illustrer son propos, il propose l'exemple d'un vase dont la paroi BF répondrait à l'équation $x + y = a$, avec a constante[240] :

[239] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § V, p. 140.

[240] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § V, p. 140-141.

« Pour faire sentir un exemple très-simple de la vérité de ce que nous avonçons, soit, par exemple, $x + y = a$, l'équation de la courbe BF, qui sera pour lors une ligne droite ou portion de ligne droite [...] ; on aura en substituant pour x & y leurs valeurs $\frac{u+v}{2}$ & $\frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$ l'équation

$$= u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a,$$

qui ne peut être réduite à cette forme $[\varphi(u) - \varphi(v) = 2M]$ », puisqu'il faudroit qu'on eût

$$u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right) = a \text{ ».}$$

Dans ce cas de figure, le problème ne possèdera donc pas de solution, parce que l'équation $x + y = a$ ne peut se mettre sous la forme $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M$: elle ne répond pas, autrement dit, à la condition découlant des restrictions imposées par la prise en compte des équations complémentaires.

On trouve un exemple du même type dans le § IV, art. 7, p. 113 du Mémoire 33. D'Alembert y exhibe une équation $\phi(u, v) = C$, avec C constante complexe, telle que

$$\varphi(u, v) = \frac{A + Bu}{A + Bv} = C = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

avec α et β deux constantes réelles. Il montre

- que cette équation peut, d'une part, se mettre sous la forme $y = P + Qx$, c'est-à-dire sous la forme $y(x)$, laquelle correspond à la fonction, supposée connue, donnant la courbure des parois du vase. Il faudra, pour ce faire, que les constantes réelles P, Q, α et β vérifient $\alpha = \frac{A^2 - B^2P^2}{A^2 + B^2P^2}$ et $\beta = \frac{2ABP}{A^2 + B^2P^2}$, avec $\frac{P}{A} = \frac{Q}{B}$.
- que le logarithme (népérien, en termes modernes) de cette équation conduit à une expression
$$\log(A + Bu) - \log(A + Bu') = \log(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$
compatible avec l'équation générale $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$ (9) de la paroi du vase.

Paradoxalement, D'Alembert remarque alors que l'équation $y = P + Qx$, c'est-à-dire la fonction $y(x)$, ne peut être ramenée à l'expression, pourtant théoriquement équivalente, de l'équation générale des contours de vase, puisqu'elle conduit en effet à

$$\frac{u - v}{2\sqrt{-1}} = (P + Q)\left(\frac{u + v}{2}\right)$$

au lieu de

$$\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}.$$

Il montre, autrement dit, que l'on peut disposer d'une solution φ vérifiant l'équation $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$ sans que la fonction équivalente $y(x)$ puisse s'écrire sous une forme similaire. Sachant que la possibilité de résoudre le problème tient justement, selon lui, à la possibilité d'écrire $y(x)$ sous la forme $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$, la solution sera donc impossible, quoiqu'une solution φ vérifiant cette dernière équation ait pourtant été mise au jour !

Les équations $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M$ (8) et $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$ (9) conditionnent donc la possibilité de résoudre le problème[241]. Il ne s'agit pas ici d'une exigence liée à la notion de permanence de la forme, comme dans le problème des cordes vibrantes, mais d'une nécessaire compatibilité entre l'équation de la paroi du vase, considérée comme une donnée du problème, et la forme $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M$ ou $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$ que requiert la prise en compte de l'EDP et des deux équations complémentaires. Ces deux équations complémentaires, mathématiquement réunies en une expression analytique de la paroi, rentrent ainsi en conflit avec le système d'EDP du 1[er] ordre auxquelles elles sont initialement adjointes. C'est là une conclusion à laquelle le savant ne déroge pas dans ses écrits ultérieurs[242]. Citons, pour preuve, cet extrait du Mémoire 31[243] :

> « on ne peut trouver la loi du mouvement du fluide au premier instant, à moins que le vase ne soit assujetti à une figure telle qu'elle a été déterminée dans le Mémoire

[241] La *possibilité de résoudre* renvoie, dans les travaux de D'Alembert, à la notion d'existence d'une solution, tout du moins telle que ce dernier la conçoit. Nous reviendrons bientôt sur la question : voir p. 133.

[242] Dans l'art. XLIII de son mémoire « Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique » (1762), contenant un commentaire critique du Mémoire 4, Lagrange critique explicitement cette conclusion de D'Alembert concernant la possibilité de résoudre le problème. « Dans le cas où le temps t n'entre point dans l'expression des vitesses [...] », c'est-à-dire le cas $P = \theta p$ et $Q = \theta q$ auquel se restreint D'Alembert, « il pourra arriver », explique-t-il en effet,

> « que $\left[\text{l'équation } \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz}\right]$ ne se vérifie qu'en supposant que [...] le vase ait une certaine figure ; c'est ce que M. d'Alembert a déja remarqué dans un excellent Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, imprimé dans le premier volume de ses *Opuscules Mathématiques*. Mais ce savant Géomètre prétend de plus que, lorsque le vase aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être soumis au calcul ; c'est de quoi je ne saurais tomber d'accord avec lui ; car il me semble que tout ce qu'il faudrait conclure alors, c'est que la supposition particulière de $\left[\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz}\right]$ cesserait d'être exacte, et que par conséquent les valeurs de $[p]$, $[q]$ dépendraient de la résolution générale des équations (k) ».

Les « équations (k) » de Lagrange correspondent à la forme développée, pour un écoulement tridimensionnel incompressible, de l'équation bidimensionelle (2) — ce que nous appellerions l'*équation de vorticité de Helmholtz* : voir le chapitre II, p. 69 — à partir de laquelle D'Alembert déduit l'équation $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dz}$ dans le chapitre VIII de l'*Essai sur la résistance des fluides* et dans le Mémoire 4. En d'autres termes, Lagrange fait donc ici remarquer, à juste titre, que la conclusion de son confrère français n'est pas valide en ce qu'elle se rapporte seulement à un cas particulier — le cas d'un écoulement potentiel — de l'équation générale du mouvement.

[243] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 31, art. 15, p. 47.

> [4] ».

ou ce passage du Mémoire 33, tout aussi explicite[244] :

> « Pour pouvoir déterminer analytiquement le mouvement d'un fluide dans un vase, il faut que la figure de ce vase soit assujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de $[\varphi(x)]$ »

Cette conclusion n'est d'ailleurs pas spécifique à ces deux équations complémentaires. Dans la suite du Mémoire 4, le géomètre ajoute en effet[245] :

> « Il faut que cette nouvelle équation de [la surface supérieure du fluide] s'accorde avec celle qui a été trouvée précédemment [...]. Si elles sont différentes, & si l'une ne peut être réduite à l'autre, c'est une marque que la solution analytique du Problême est impossible.
> Ce n'est pas tout ; ce que nous avons dit de la surface supérieure, doit avoir lieu de même pour la surface inférieure ; nouvelles conditions qui limitent encore davantage la solution du Problême [...].
> On voit par-là qu'il y a bien peu de cas où l'on puisse trouver analytiquement & rigoureusement le mouvement d'un fluide dans un vase ».

D'Alembert s'intéresse ici, en termes modernes, aux deux surfaces libres du fluide AB et EF. Il évoque les nouvelles équations complémentaires relatives au comportement de l'écoulement au niveau de ses frontières supérieure et inférieure, nouvelles équations dont il pense qu'elles restreindront encore ses chances de pouvoir résoudre la question.

• Sur la possibilité de déterminer la fonction φ, M étant un paramètre

Ce que nous venons d'exposer pour la paroi du vase, et plus synthétiquement, pour les deux surfaces libres, s'applique également aux filets, c'est-à-dire aux lignes du courant du fluide. Cette nouvelle considération conduit D'Alembert, comme nous allons le voir, à un problème plus difficile à résoudre, en ce qu'il intégre également la notion de paramètre. Les conclusions du savant, pour ce qui est de la possibilité de parvenir à une solution, n'en seront pas moins similaires. Cette question est essentiellement abordée dans le Mémoire 33 et le Mémoire 57 § VII. Elle requiert néanmoins de revenir une nouvelle fois au Mémoire 4 des *Opuscules* t. I.

Dans cet écrit, D'Alembert imagine en effet une courbe bmf analogue à la paroi BMF (voir la Fig. X). « Il est clair », explique-t-il dans le § VI[246],

> « que les particules du fluide suivront toujours chacune de ces courbes bmf ; car il est évident que dans ces courbes bmf on a $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{q}{p} = \dfrac{\theta q}{\theta p}$; d'où l'on voit encore

[244] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 33, § I, p. 96-97.
[245] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § IX, p. 145.
[246] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § VI, p. 141.

que le rapport des vitesses verticale & horizontale, en un point quelconque m, dépendra uniquement de la position de ce point, & non du tems ; & que ce rapport sera toujours le même pour chaque point m ».

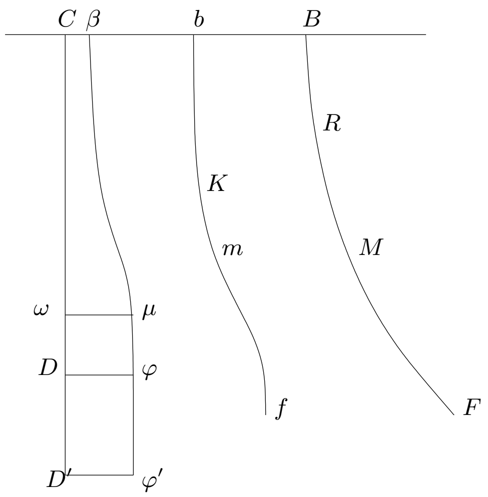


Fig. X – Ligne de courant bmf, à un instant t, d'un fluide s'écoulant dans un vase d'axe CD délimité par la paroi BMF.

Il définit, ce faisant, les lignes du courant du fluide — invariantes au cours du temps compte tenu de l'hypothèse $P = \theta p$ et $Q = \theta q$ —, chacune de ces lignes d'équation générale $p(x,z)dx - q(x,z)dz = 0$ se voyant caractérisée par une certaine valeur du rapport $\dfrac{q(x,z)}{p(x,z)}$, c'est-à-dire, compte tenu de sa précédente méthode de « résolution », par une valeur de la constante arbitraire M dans l'équation

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M$$

ou

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}.$$

Il est parfaitement clair à ce sujet dans le Mémoire 33, en affirmant qu'il[247]

> « est aisé de voir que dans l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, [...] la constante M est ce qui distingue les courbes décrites par les filets de fluide »,

ou dans le Mémoire 57 § VII en écrivant que « le mouvement du fluide se détermin[e] par l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, M étant une constante pour chacun des filets du fluide »[248]. Cette constante possède le statut de « paramètre »,

[247] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 33, § III, art. 8, p. 109. Nous avons ici substitué la notation φ à la notation d'origine ϕ.

[248] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 57, § VII, art. 14, p. 125.

ce terme ayant sensiblement, à cette époque, le même sens qu'aujourd'hui, ainsi qu'en témoigne l'article de l'*Encyclopédie* du même nom, signé *(O)*, selon lequel « on appelle en général *parametre*, la constante qui se trouve dans l'équation d'une courbe »[249].

Il s'agit donc à présent de s'assurer de la compatibilité entre :

– l'équation $\varphi(u) - \varphi(v) = 2M\sqrt{-1}$ des filets du fluide tirée de la résolution du système d'EDP
– et l'équation complémentaire $y(x)$, ou $y(u, v) = A$ avec A constante réelle et avec le changement de variables $u = x + y\sqrt{-1}$ et $v = x - y\sqrt{-1}$, de l'équation, supposée connue, de la paroi du vase,

cette compatibilité se traduisant mathématiquement, dans l'esprit de D'Alembert, en terme de résolution du système formé par ces deux équations à deux variables et un paramètre.

C'est ce qui l'incite à proposer « un essai de méthode »[250], dans les art. 16 à 26 du Mémoire 57 § VII, consistant à se débarrasser de l'une de ces deux variables, ainsi que de ce paramètre, par des opérations de différentiation et de comparaison successives des deux équations du système.

La résolution de ce problème fera aussi l'objet d'un échange épistolaire entre D'Alembert et Lagrange[251], longuement commenté dans le Mémoire 33 et le Mémoire 57 § VII, et fort intéressant vis-à-vis de notre sujet : nous allons voir pourquoi.

Dans sa lettre du 13 novembre 1764[252], Lagrange, témoignant ainsi de son intérêt pour la question, propose une solution pour l'équation

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$$

dans le cas particulier où l'équation de la paroi du vase répond à la relation

$$y(x) = f + hx,$$

avec f et h deux constantes réelles quelconques — il publiera la méthode correspondante dans les art. 20-24 de son mémoire « Solution de différents Problèmes de calcul

[249] *Encyclopédie*, art. « Paramètre », t. XI, 1765, p. 916b.

[250] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 57 § VII, art. 14, p. 125.

[251] Dans le cadre de son introduction aux œuvres d'Euler postérieures à 1765 et portant sur la mécanique des fluides et le problème de la propagation du son (*Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich, 1955, p. IX-CXVIII), C. Truesdell donne également la suite du travail entamé dans le vol. 12 des *Opera Omnia*, à savoir une histoire du développement de la mécanique rationnelle entre 1766 et 1788 (« Rational Fluid Mechanics 1765-1788 », p. LXIII-CII), dates de publication respectives des trois derniers mémoires d'Euler en hydrodynamique et de la *Méchanique analitique* de Lagrange. Il se penche, dans ce cadre, sur la correspondance entre D'Alembert et Lagrange (1762-1781) relative aux problèmes de l'équilibre, de l'écoulement et de la résistance des fluides. Quoique la discussion que nous allons aborder y soit étudiée (voir p. LXXXV-XC), C. Truesdell se borne pour une très large part à l'examen des recherches de Lagrange qui s'y rapportent — d'un point de vue, qui plus est, plus physique que mathématique.

[252] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 10, p. 20-23.

intégral »[253] (1766). Cette solution s'écrit

$$\varphi(x) = \frac{M \log(f + h\,x)}{\theta\pi} + A(f + h\,x)^{\frac{\mu}{\theta}} + B,$$

avec A et B deux constantes réelles, μ un entier quelconque, π le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, et θ un nombre tel que $\tan\theta\pi = h$.

D'Alembert lui répond dans sa lettre du 12 janvier 1765[254] en lui proposant une méthode et une solution plus générale, lesquelles constitueront le § II de son mémoire « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 »[255] (1766). Dans le Mémoire 33 § III, il s'intéresse au premier terme

$$\varphi(x) = \frac{M \log(f + h\,x)}{\theta\pi}$$

de la solution de Lagrange, terme dont il remarque qu'il ne permet pas d'annuler la quantité

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1})$$

lorsque $y(x) = f + hx = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = -\dfrac{f}{h}$, bien que l'équation

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1},$$

considérée en $y(x) = 0$, doive conduire à $M = 0$. Dans ce cas de figure, comme le souligne ici le savant, la quantité $\varphi(x) = \dfrac{M \log(f + h\,x)}{\theta\pi}$ tend en effet vers l'infini lorsque $y(x) = f + hx = 0$.

En d'autres termes, D'Alembert montre que la solution $\varphi(x) = \dfrac{M \log(f + h\,x)}{\theta\pi}$ pour l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$ des filets des fluides n'est pas compatible avec l'équation $y(x) = f + hx$ des parois du vase parce qu'elle conduit, dans certains cas, à l'annulation du paramètre M[256]. Il en déduit ainsi que la constante M ne pourra jouer le rôle de paramètre dans le cas où elle interviendrait dans la solution, c'est-à-dire dans l'expression de la fonction $\varphi(x)$.

Il revient enfin sur la question dans le Mémoire 57 § VII, essentiellement pour apporter une correction à cette dernière déduction. Il faudra plutôt, explique-t-il[257],

[253] Lagrange, « Solution de différents Problèmes de calcul intégral », *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 179-380 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 471-668.

[254] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 11, p. 23-29.

[255] *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 381-396.

[256] Il dresse le même constat dans le § II de son mémoire « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 », *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 381-396.

[257] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 57, § VII, art. 32, p. 135.

> « dire que l'équation
>
> $$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1},$$
>
> peut représenter tous les filets, quand même M entreroit dans φx, pourvu que M ne varie pas dans φx, & varie seulement dans le second membre $2M\sqrt{-1}$ ».

En quoi ce raisonnement nous intéresse-t-il du point de vue des interactions existant entre le système d'EDP et les équations complémentaires ? Il montre que D'Alembert considère le problème comme un système d'équations à résoudre. L'expression $\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$ tirée du système d'EDP correspondait en effet à l'équation générale des parois du vase : elle s'applique maintenant à l'intérieur même du fluide. Elle doit, qui plus est, être compatible, pour chaque valeur du paramètre M, avec l'équation, supposée connue, des parois du vase $y(x)$, que D'Alembert n'hésite pas non plus à considérer en tout point du fluide. Ce dernier cherche donc à résoudre, quelque soit M, le système d'équations à deux variables suivant :

$$\begin{cases}\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}\\ y=y(x),\end{cases}$$

quelque soient x et y dans le vase. Ce système, selon D'Alembert, doit pouvoir être résolu pour que la solution du problème soit possible.

Une telle situation, comme nous allons le voir, se retrouve également dans ses recherches sur le problème des cordes vibrantes.

Notons ici qu'une autre idée semble émerger de cette étude de la démarche de résolution de D'Alembert pour le problème de l'écoulement des fluides. Il n'envisage pas de solution autre qu'analytique, non pas, en termes modernes, dans le sens de la théorie des fonctions analytiques, mais dans le sens d'une expression fonctionnelle explicite. Il s'agit là d'un élément caractéristique de sa façon d'appréhender le concept de solution sur lequel nous ne manquerons pas de revenir.

La polémique entre D'Alembert et Euler sur les cordes vibrantes

Nous avons précédemment mentionné le rejet des « sauts de courbure » par D'Alembert et le lien que cette exigence entretenait avec le postulat de permanence de la forme. Revenons à présent sur le cas classique d'une corde pincée, c'est-à-dire fixée en ses deux extrémités, écartée de son état de repos, puis lâchée avec une vitesse nulle à l'instant $t=0$. La résolution proposée[258] conduisait à la solution $y=\Phi(x+t)+\Phi(x-t)$. La fonction Φ, impaire et $2a$-périodique du fait de la fixité des extrémités, se voyait

[258] Cf. D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 230-231, et *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 1, p. 2-7.

entièrement déterminée par l'allure initiale de la corde et correspondait à l'équation complémentaire $y(0,x) = 2\Phi(x)$, pour x dans $[0,a]$.

Pour D'Alembert, la possibilité de résoudre le problème dépend, à ce stade, des propriétés de « régularité » de cette fonction Φ. Cette question constitua le cœur d'une célèbre polémique avec Euler, dont il nous faut à présent dire quelques mots. Dans un mémoire inédit de 1755[259], pièce préparatoire au Mémoire 1 des *Opuscules*, D'Alembert résume la querelle en ces termes :

> « Nous différons en ce que M. Euler tire de cette équation $[y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)]$ une construction qu'il prétend s'appliquer à toutes sortes de courbes, au lieu que j'ay prétendu que cette équation ne pouvoit s'appliquer qu'à certaines courbes, et que dans les autres cas la solution analytique et rigoureuse du problême étoit impossible ».

D'Alembert consacre effectivement un passage important du Mémoire 1 à démontrer que les fonctions Φ impaires, $2a$-périodiques (définies sur $]-\infty,+\infty[$) et présentant des « sauts de courbure », doivent être exclues de l'ensemble des solutions admissibles[260]. Il décrit ainsi les fonctions qui pourront être tolérées[261] :

> « Ainsi la construction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe AMB fait un saut en quelque point M, ou qu'elle n'est pas nulle, tant en A, qu'en B. Aucun de ces deux inconvéniens n'a lieu dans ma solution ; car lorsque les courbes AMB [...], $B\mu a$, Amb &c. sont assujetties à une même loi, 1°. la courbe AMB n'a point de sauts dans sa courbure, puisque tous ses points sont assujettis à une même équation ; 2°. la courbure en A & en B est nulle, puisque la similitude des parties AMB, $B\mu a$, Amb &c. donne à la courbe (supposée continue) un point d'infléxion en A & un en B, ensorte que la courbure est nulle en ces deux points ».

Plus précisément, il nous faut ici distinguer deux étapes.

1°. Dans un premier temps, D'Alembert montre que la courbe initiale Φ prolongée, c'est-à-dire rendue impaire et $2a$-périodique, ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Les raisons invoquées pour étayer ce critère sont de trois natures :

- analytique : les différentielles secondes en x intervenant dans l'équation régissant le phénomène, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, ne peuvent être calculées pour les points présentant un « saut de courbure ».
- physique : la détermination de la force accélératrice, liée à cette différentielle seconde, présente la même difficulté.

[259] D'Alembert, « Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les Mémoires de 1753 », Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften.

[260] Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 1, p. 17-29.

[261] D'Alembert, *Ibid.* note 260, p. 28.

- métaphysique : quoiqu'elle ne soit pas générale, la loi de continuité, selon laquelle « la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusquement & par sauts »[262], doit cependant s'appliquer dans ce cas.

2°. Dans un second temps, D'Alembert s'attache à prouver que cette absence de « sauts de courbure » équivaut au fait que la fonction Φ prolongée soit « assujettie à une même loi »[263] ; qu'elle conserve, autrement dit, la même expression sur l'ensemble des réels. C'est l'idée de permanence de la forme que nous avons déjà évoquée.

Dans le cas où la fonction Φ ne répondrait pas aux exigences requises, l'encyclopédiste affirme, dès 1750, qu'une telle situation « surpasse les forces de l'analyse connües »[264]. D'un point de vue moderne, on peut trouver raisonnable d'exiger l'absence de sauts de courbure, car cela correspond à la notion de solution exacte ou stricte. En revanche, son équivalence avec la permanence de la forme est évidemment fausse car on peut raccorder des fonctions d'expressions différentes de telle sorte que leur dérivée seconde soit continue, et donc ne fasse pas de sauts.

Comme nous l'avions constaté sur la question de l'écoulement des fluides, nous retrouvons ici l'existence de « conflits » entre les équations complémentaires et l'EDP, ou l'expression générale qui en découle à l'issue de la phase « d'intégration ». Cela constitue la spécificité de l'approche de D'Alembert par rapport à ses contemporains. Ces conflits peuvent être liés aux sauts de courbure de la fonction représentant l'allure initiale de la corde, ou au fait que celle-ci viole un postulat en partie extérieur à l'analyse : la permanence de la forme. Dans le premier cas, on peut juger le point de vue de D'Alembert pertinent, et dans le second cas, il est très discutable.

Il n'en reste pas moins que cet état de fait le conduit à un certain pessimisme quant à sa capacité de venir à bout des deux problèmes évoqués.

Dans la question de l'écoulement des fluides, nous avons vu que le problème, selon D'Alembert, ne peut être résolu si les rapports qu'entretiennent l'EDP et ses équations complémentaires ne permettent pas d'aboutir à une solution analytique. Quoique cette dernière notion coïncide avec la nôtre, nous savons néanmoins aujourd'hui que la résolution explicite de ce genre de problèmes représente un cas de figure assez rare : les mathématiciens sont, le plus souvent, contraints de recourir à une résolution approchée du problème via l'application de méthodes numériques adéquates. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la démarche du savant, fondée sur la recherche de solutions explicites, ne le mène à un système d'EDP et d'équations complémentaires analytiquement « intordable ».

[262] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 260, p. 23-24.

[263] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 260, p. 29-36.

[264] D'Alembert, « Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* année 1750 (1752), p. 355-360, et *Ibid.* note 260, p. 38.

Dans le problème des cordes vibrantes, l'idée de D'Alembert selon laquelle la généralité d'une solution dépend de sa compatibilité avec différents types d'équations complémentaires, n'a également rien d'aberrant d'un point de vue moderne. Cependant, les problèmes d'irrégularité auxquels D'Alembert se trouve confronté le poussent à conclure à l'impossibilité de « résoudre ». Dans de semblables situations, les mathématiciens envisageraient aujourd'hui la recherche de solutions moins régulières, ou solutions faibles, via la définition de nouveaux espaces fonctionnels dotés de conditions de régularité adéquates.

Aussi, ces deux démarches s'avèrent nécessairement infructueuses, parce que le cadre mathématique conceptuel dans lequel D'Alembert se débat, et la nature même des problèmes abordés, ne lui permettent, pas, en l'état, d'obtenir des « solutions » telles qu'il en conçoit les contours dans son œuvre. Elles n'en recèlent pas moins un grand nombre d'idées innovantes : l'étude des rapports à l'EDP et les équations complémentaires, le passage dans le champ des nombres complexes en hydrodynamique, ou encore ses réflexions sur la « régularité » admissible d'une solution.

Caractérisation de la démarche de D'Alembert

• Unicité de la solution

Nous avons précédemment évoqué le cas d'une corde vibrante dont on lâche les deux extrémités à $t = 0$, cas de figure abordé par D'Alembert dans le Mémoire 25 de ses *Opuscules*[265]. Persuadé que ce problème devait avoir une solution déterminée, le savant l'avait utilisé pour justifier le postulat selon lequel une fonction ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Il s'exprimait alors en ces termes[266] :

> « cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique. »

Cette phrase, emblématique du point de vue de l'auteur, nous permet de clarifier la notion d'unicité de la solution chez D'Alembert. Il déduit le caractère « unique » d'une solution grâce à deux types d'arguments :
- la constatation qu'un phénomène physique précis se produit,
- ses intuitions quant aux facteurs déterminant ce phénomène, ou, en d'autres termes, ce qui fait qu'un phénomène se produit plutôt qu'un autre.

Le premier argument pourrait être qualifié d'empirique, si les problèmes envisagés par D'Alembert ne correspondaient pas le plus souvent, comme ici, à des situations

[265] Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. IV, Paris, 1768, Mémoire 25, p. 180-184.

[266] D'Alembert, *Ibid.* note 265, p. 181.

théoriques sans vérification expérimentale possible. Le second relève d'intuitions plus ou moins pertinentes concernant les équations complémentaires, leur nombre et leur nature. Fondamentalement, l'unicité de la solution émerge donc d'une forme de déterminisme physique implicitement associée à la nature physico-mathématique de ses recherches.

• Existence et possibilité de déterminer la solution

La situation est semblable pour ce qui concerne la notion d'existence. Le rôle des considérations physiques est prépondérant : le simple fait, selon lui, qu'un phénomène ait lieu garantit l'existence d'une solution. On ne rencontre d'ailleurs pas de polémique entre D'Alembert et ses contemporains autour du concept moderne équivalent. De plus, et contrairement aux mathématiciens actuels, le savant ne s'intéresse pas à l'existence abstraite d'une solution, mais plutôt à la *possibilité de résoudre*, notion que nous allons maintenant tenter d'éclaircir.

D'Alembert a conscience qu'une solution peut exister, sans disposer pour autant des outils mathématiques lui permettant de l'expliciter. Dans ses mémoires sur les cordes vibrantes, il répète en effet régulièrement à partir de 1750[267] :

> « dans plusieurs cas le Probleme ne pourra être resolu, & surpassera les forces de l'analyse connue ».

Essayons donc de comprendre ce que le savant entend par *possibilité de résoudre*. Voyons cela sur deux citations extraites de ses recherches sur l'écoulement des fluides[268] :

> « Le vase doit avoir une certaine figure pour que le mouvement du fluide puisse être représenté par une formule analytique ».

> « Pour pouvoir déterminer analytiquement le mouvement d'un fluide dans un vase, il faut que la figure de ce vase soit assujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de φx, forme qui dépend elle-même de la condition
> $$\varphi(b+u) \pm \varphi(b-u) = 0 \text{ ».}$$

On remarque que D'Alembert y emploie les termes de « formule analytique » et de « détermination analytique », lesquels correspondent à la notion moderne de solution analytique, ou explicite, que l'on peut, autrement dit, exprimer à l'aide de fonctions usuelles[269]. Les méthodes qu'il propose visent donc uniquement à l'obtention d'une formule ou d'une équation, seules formes sous lesquelles la « solution » puisse exister selon lui.

En somme, la possibilité de résoudre peut revêtir deux sens, qui ne s'excluent pas mutuellement, et ne sont pas nécessairement distingués par D'Alembert :

---

[267] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 1, p. 38.

[268] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 31, p. 42, et Mémoire 33, p. 96-97.

[269] Rappelons qu'une solution analytique s'exprime explicitement à l'aide de fonctions usuelles. Le terme analytique n'a pas le même sens ici que lorsque l'on parle d'une fonction analytique, qui se développe localement en une série entière convergente.

- la capacité à « résoudre » avec les outils mis à disposition par l'Analyse du moment,
- la possibilité d'expliciter la « solution » à l'aide de fonctions, que l'on dirait aujourd'hui usuelles.

Il y aura donc *impossibilité de résoudre* lorsque :

- l'Analyse s'avère incompétente à l'état présent. C'est l'argument invoqué par le savant lorsqu'il se trouve confronté à des problèmes d'irrégularité des équations complémentaires, ou d'incompatibilité de ces équations avec l'EDP ;
- il n'existe pas de solution pouvant être exprimée à l'aide de fonctions usuelles et l'Analyse est définitivement incompétente. Le cas d'une courbe tracée arbitrairement pousse ainsi le savant à conclure[270] :

> « Donc si la courbe initiale est tracée au hasard, & n'a point d'equation, [...] la solution ne pourra avoir lieu ».

Bien que D'Alembert ne s'intéresse pas à l'existence d'une solution, qu'il ne serait pas apte à déterminer, il n'hésite pas à envisager des stratégies alternatives lorsque la sienne se trouve mise en défaut. Confronté à certaines situations délicates dans le problème des cordes vibrantes, il explique ainsi, dès 1747, qu'il[271] :

> « n'y a donc point autre chose à faire, que de chercher le mouvement de la corde, en la regardant comme composée d'un grand nombre de points, unis ensemble par des fils extensibles ».

Il applique cette stratégie pour quelques cas simples, mais ce sera surtout Lagrange qui en fera usage dans ses « Recherches sur la nature, et la propagation du son »[272]. Dans la polémique des années 1750, ce dernier poursuivra d'ailleurs l'objectif de conforter, du moins dans un premier temps, le point de vue d'Euler contre celui de D'Alembert.

• Synthèse et mise en perspective

La démarche dalembertienne est donc simultanément marquée par un attachement profond aux expressions formelles des fonctions, au détriment notamment de leur représentation géométrique, ainsi que par une très forte imbrication entre l'Analyse et les considérations émanant de la physique. Le premier de ces deux aspects conduit l'encyclopédiste à nourrir un certain pessimisme quant aux moyens lui permettant de venir à bout des problèmes abordés. Et la réunion de ces deux aspects constitue la spécificité de son approche. Bien qu'elle soit parfois sous-estimée par certains historiens et qu'elle puisse paraître incongrue à un regard moderne, cette démarche ne restera pas sans répercussions. Avant de nous pencher sur un exemple particulier de celles-ci, nous pouvons

---

[270] D'Alembert, *Opuscules*, t. IV, Paris, 1768, Mémoire 25, p. 198.

[271] D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 246.

[272] Lagrange, « Recherches sur la nature, et la propagation du son », *Mélanges de Turin*, t. I, *pour l'année 1759*, 1760, p. 1-112.

dresser un panorama général de la postérité des différents aspects de la démarche du savant.

Tout d'abord, l'imbrication entre mathématiques et physique telle que la concevait D'Alembert laissera la place à une plus nette distinction, par ses successeurs directs, entre l'étape d'analyse physique du problème et la phase mathématique de traitement de l'équation. Néanmoins, il serait hâtif de conclure que ces aspects resteront à jamais disjoints. Si nous nous penchons par exemple sur le rôle du déterminisme physique dans l'approche moderne, nous observons que son lien avec la notion d'unicité dans l'approche de D'Alembert n'est pas aberrant. Cependant, ce lien prend aujourd'hui une toute autre forme car il faut distinguer deux niveaux dans la démarche actuelle : le choix d'un modèle dont la mise en équation garantit a priori l'existence et l'unicité d'une solution, et la preuve de cette unicité à l'aide de théorèmes mathématiques. Le déterminisme physique intervient donc en amont de la phase de résolution. Il n'est pas directement responsable de l'unicité comme chez D'Alembert. En somme, les considérations physiques ne font plus ingérence dans les lois de l'Analyse de nos jours.

Concernant l'existence et l'unicité, les concepts dalembertiens ne sont bien sûr pas équivalents aux nôtres, même si on peut les considérer comme des versions embryonnaires. Il faut ajouter que, bien que les mathématiciens disposent de théorèmes d'existence et d'unicité dès le début du XIX^e^ siècle, leur démarche générale s'articulera encore très souvent en trois phases[273], à l'instar du schéma de la Fig. IX — voir p. 115 — décrivant la façon de faire de D'Alembert. Chacune de ses étapes pourra en revanche faire appel à des outils différents émanant de l'algèbre ou de la géométrie. Ce n'est que plus tard que les théorèmes prendront tout leur intérêt avec l'apparition de méthodes de résolution approchées rendant indispensable la connaissance a priori de l'existence et l'unicité de la solution.

Pour ce qui est des préoccupations présentes chez D'Alembert concernant la régularité des équations complémentaires, il faudra attendre Riemann[274] et, plus tard, des théories comme celles des distributions, pour que la difficulté soit prise en compte et trouve des réponses. Néanmoins, cette question est intimement liée à celle concernant la notion même de fonction. Elle entraînera d'ailleurs un débat sur le sujet entre les principaux géomètres contemporains de D'Alembert. Cette polémique, sur laquelle nous proposons à présent de nous pencher, constitue ainsi une répercussion de l'approche au-delà de la seule question des EDP.

[273] Particulièrement pour des problèmes se résolvant explicitement comme celui des cordes vibrantes.

[274] B. Riemann, « Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie », *Œuvres Mathématiques*, 1898 p. 177-206. Ce mémoire est initialement publié en allemand dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Göttingen*, t. VIII, 1860.

3. Impact sur le débat concernant le concept de fonction

Comme nous l'avons vu, l'un des aspects importants de la démarche de D'Alembert, la *possibilité de résoudre*, dépend de la nature des fonctions arbitraires intervenant dans les données du problème, c'est-à-dire dans les équations complémentaires. L'enjeu crucial du débat sur la nature des fonctions arbitraires apparaît ainsi clairement. Ses conclusions éventuelles sont cruciales pour la validité des solutions des problèmes faisant appel à des EDP, comme notamment celui des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides. En l'occurrence, il est déterminant de savoir si l'on doit accepter ou rejeter les fonctions changeant d'expression.

Certains des aspects et des protagonistes de ce débat, tels qu'Euler et Lagrange, ont déjà été abordés par A. Youschkevitch[275] et J. Dhombres[276]. Comme nous nous intéressons aux recherches plus tardives de D'Alembert, nous nous concentrerons pour notre part sur la période allant du début des années 1770 à la mort du géomètre en 1783, et nous analyserons chronologiquement les réflexions de D'Alembert dans ce domaine et leurs répercussions.

Origines de la position de D'Alembert et premiers doutes

• La défense de la permanence de la forme

Les premières interrogations de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires apparaissent au sein de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes. Nous avons déjà fait observer que sa position, dans ce contexte, consiste à affirmer que, pour pouvoir intervenir dans la solution du problème, une fonction donnée ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Cela implique, selon lui, qu'elle ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Au passage, il nous faut apporter des précisions indispensables pour la suite quant à l'emploi des termes *continu* et *discontinu* par D'Alembert et ses contemporains, ceux-ci n'ayant pas le même sens qu'aujourd'hui. Comme l'explique très justement A. Youschkevitch[277] :

> « continuité signifie invariabilité, immuabilité de la loi de l'équation déterminant la fonction sur tout le domaine des valeurs de la variable, alors que la discontinuité d'une fonction signifie un changement de la loi analytique, l'existence de lois différentes sur deux intervalles ou plus de son domaine ».

[275] A. Youschkevitch, « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68.

[276] J. Dhombres, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181.

[277] A. Youschkevitch, *Ibid.* note 275, p. 42.

En somme, la *continuité* des savants du XVIII^e correspond à ce que nous avons appelé *permanence de la forme.* Deux motifs poussent donc D'Alembert à exiger la *continuité* des fonctions :
1°. Le savant observe tout d'abord, exemples à l'appui, qu'un changement d'expression d'une fonction engendre souvent une difficulté dans la détermination de ses dérivées première et seconde[278]. Constatant les difficultés liées aux changements d'expression, D'Alembert tire ainsi la conclusion suivante : *toute* fonction changeant d'expression doit être rejetée. On interpréterait aujourd'hui cette affirmation comme une généralisation hâtive d'observations faites sur une série de cas particuliers. Soulignons toutefois qu'il est l'un des seuls à s'intéresser à ce type de problème local, avec, par ailleurs, des intuitions assez pertinentes.
2°. L'autre motif relève de ce que D'Alembert estime être les fondements de l'Analyse, comme en témoigne cet extrait du Mémoire 1 des *Opuscules*[279] :

> « J'ajoute qu'il est contre toutes les règles de l'analyse, de faire ainsi changer de forme, suivant le besoin qu'on croit en avoir, à l'intégrale d'une équation différentielle ».

La crainte sous-jacente est que l'infraction à ces règles conduise à multiplier le nombre de solutions, là où le bon sens impose qu'il n'y en ait qu'une, ainsi que nous l'avons précédemment remarqué. D'Alembert considère également que certaines de ces nouvelles solutions seraient des lois parfaitement arbitraires, les changements d'expression n'étant pas contrôlables.

Cependant, contrairement au préjugé répandu par certains de ses pairs[280], et malgré le nombre de pages écrites pour en défendre le bien fondé, la position du géomètre n'est pas figée dans le temps. Examinons donc ce qui nous semble correspondre, à partir de 1768, à la première étape d'une évolution de son point de vue sur la question.

• La question de la propagation du son

En 1747, D'Alembert notait que l'équation des cordes vibrantes, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, pou-

---

[278] Précisons toutefois qu'en termes modernes, les situations envisagées par le géomètre correspondent à des problèmes d'existence de la dérivée, plutôt qu'à des problèmes de discontinuité.

[279] D'Alembert, *Opuscules*, t. I, Paris, 1761, Mémoire 1, p. 32.

[280] Dans son *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Didot l'aîné, Paris, 1787, Discours préliminaire, p. xv, Jacques-Antoine-Joseph Cousin écrit en effet :

> « C'est encore M. Euler qui a dit le premier que rien ne devoit limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales completes des équations aux différences partielles ; qu'on y devoit comprendre les fonctions irrégulieres et discontinues. M. d'Alembert a combattu cette idée tant qu'il a vécu ; il n'a jamais voulu reconnoître toute l'étendue des solutions qu'il avoit données lui-même dans ses *Réflexions sur la cause des vents*, dans son *Mémoire sur les Cordes vibrantes*, et dans l'*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides* ».

vait également représenter les vibrations longitudinales d'une colonne d'air, et donc correspondre à l'équation de la propagation du son[281] :

> « Si on supposoit que la corde fit des vibrations longitudinales de C vers A, au lieu de les faire perpendiculairement à sa longueur, alors imaginant que y fut l'espace décrit par un point quelconque, on auroit la même équation que ci-dessus [...] entre y & s. Par là on pourroit calculer la vitesse du son d'une maniére beaucoup plus génerale, qu'on ne l'a fait jusqu'ici ».

Après que Lagrange s'est intéressé au problème[282], D'Alembert va mettre en pratique cette remarque dans le Mémoire 34 § II de ses *Opuscules* t. V (1768), intitulé « Sur la vitesse du son ». Désignant par $y(x,t)$ l'excursion longitudinale de la particule d'abscisse x à l'instant t, il reprend l'expression issue de « l'intégration » de l'équation $\dfrac{d^2y}{dt^2} = k^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$[283] :

$$y = \Phi(x+kt) + \Psi(x-kt),$$

et dispose, dans ce nouveau cadre d'étude, de l'équation complémentaire :

$$y(x,0) = 0.$$

La confrontation de ces deux relations le conduit dès lors aux équations :

$$y = \Phi(x+kt) - \Phi(x-kt)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = k\Delta(x+kt) + k\Delta(x-kt),$$

dans laquelle Δ désigne la dérivée de la fonction Φ. La vitesse initiale de chaque particule d'abscisse x se trouve ainsi décrite par la fonction $2k\Delta(x)$, ce qui n'est pas sans lui poser de difficultés. Ce résultat doit effectivement s'accorder avec son appréhension physique du phénomène de propagation sonore, considéré comme une transmission d'oscillations entre particules d'air successives. Puisqu'une impulsion doit être donnée à une petite portion de la colonne d'air afin d'initier les vibrations, la fonction Δ présentera nécessairement le profil de la Fig. XI[284] (nous parlerions aujourd'hui d'une fonction à support compact). Il s'en justifie ainsi[285] :

---

[281] D'Alembert, « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 248.

[282] Voir Lagrange, « Recherches sur la nature, et la propagation du son », *Mélanges de Turin*, t. I, *pour l'année 1759*, 1760, p. 1-112.

[283] Pour des raisons de lisibilité, nous prenons la liberté de poser $k = \dfrac{2a\lambda}{\theta}$, λ et a désignant respectivement la hauteur de la ligne d'air et l'espace parcouru dans le temps θ.

[284] Il s'agit d'une reproduction de la Fig. 27 de l'imprimé d'origine.

[285] D'Alembert, *Opuscules*, t. V, Paris, 1768, Mémoire 34, § II, p. 140.

« Cela posé, soit A le point de l'air qui a été mis en mouvement par le corps sonore, & supposons que l'agitation s'étende dans le premier instant jusqu'en B & C ; la courbe BDC, des vîtesses initiales, sera telle que faisant $AP = x$, $Pm = \frac{dy}{dt}$, on aura $PM = 2\Delta x$; ensorte que $\Delta(x)$ sera $= 0$, si $x > +AC$ ou $> -AB$ »

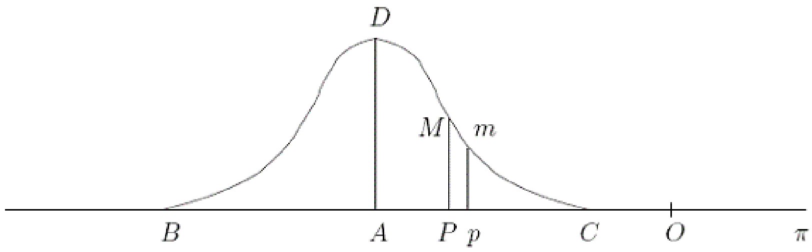


Fig. XI – Profil de la fonction Δ à l'instant $t = 0$.

Cette condition sur Δ le contraint toutefois à faire face à une situation délicate, résumée en ces termes[286] :

> « En premier lieu, les mêmes difficultés que nous avons exposées ailleurs & dont il paroît qu'on a reconnu la solidité, prouvent que la courbe qui représente les vîtesses initiales, doit être telle que toutes ses branches soient assujetties à une même équation, & liées par la loi de continuité. Or c'est ce qui n'a point lieu ici ; car l'équation $u = 2\Delta x$, est telle que quand $x > AC$ ou $< -AB$, u est $= 0$; or il n'y a point de fonction algébrique qui puisse représenter cette condition »

C'est là une difficulté dont le savant ne parvient pas à se défaire. Au terme du mémoire, il conclut ainsi sur une note passablement défaitiste[287] :

> « On voit donc qu'en faisant même les suppositions les plus favorables au calcul, il ne paroît pas possible de réduire à des formules analytiques exactes les loix du mouvement des particules de l'air, ni par conséquent de rendre raison par ces formules de la propagation du son, telle que l'expérience nous l'a fait connoître »

Pour résumer, les restrictions raisonnables que lui imposait la permanence de la forme dans le problème des cordes vibrantes deviennent ici exorbitantes, parce qu'elles excluent les seules fonctions que le bon sens physique aurait toléré. D'Alembert en est ainsi réduit à renoncer momentanément à traiter le problème du son par le moyen de l'Analyse. Si cet état de fait l'incite à un certain pessimisme, il motive également de nouvelles réflexions, plus tardives, dont nous ne manquerons pas d'aborder la teneur.

Avant de ce faire, nous nous pencherons d'abord sur quelques travaux de Monge (1746-1818) et de Condorcet (1743-1794) publiés dans la première moitié des années

[286] D'Alembert, *Ibid.* note 285, p. 141.

[287] D'Alembert, *Ibid.* note 285, p. 144-145.

1770, travaux dont nous verrons qu'ils ont un lien avec les recherches de l'encyclopédiste sur les EDP et les fonctions arbitraires[288].

Les interventions de Condorcet et de Monge

Dans la seconde phase de sa production scientifique, D'Alembert devient un personnage important pour une nouvelle génération de savants. Il exerce d'ailleurs une influence considérable sur certains d'entre eux. Il entretient notamment une étroite relation avec Condorcet, une correspondance active avec Lagrange, et se trouve au centre d'un univers d'une dizaine de géomètres de renom, dont Monge et Laplace. Les derniers tomes de ses *Opuscules*, nous l'avons déjà signalé, leur sont presque exclusivement destinés[289].

Comme nous l'avons constaté, le traitement de problèmes physiques à l'aide d'EDP se caractérise, chez D'Alembert, par une forte imbrication entre l'Analyse et des considérations émanant de la physique. Bien sûr cela n'est pas complètement étranger au fait que sa démarche ait été conçue dans le contexte de problèmes physico-mathématiques. Cependant, cet état de fait évoluera considérablement dans les années 1770. D'une part, l'approche dalembertienne ne sera pas reprise par ses successeurs directs. Qu'ils privilégient une approche algébrique et formelle, comme Condorcet, Lagrange et Laplace, ou plus géométrique comme Monge, l'attitude de ces nouveaux savants dans leurs mémoires physico-mathématiques consistera en effet à se défaire de considérations physiques dans la phase de manipulation des équations. D'autre part, la période que nous examinons va voir la publication de mémoires de plus en plus mathématiques sur les EDP, dans la lignée du Mémoire 26 des *Opuscules* t. IV (1768). Dans ces textes, les EDP sont étudiées comme un objet mathématique sans même être associées à un problème physique. Bien que nous ayons fait le choix de ne pas examiner cet aspect dans cet article, nous mentionnerons certains des mémoires en question car on y trouve des répercussions du débat sur la nature des fonctions arbitraires.

• CONDORCET, UNE APPROCHE PROGRAMMATIQUE DE L'INTÉGRATION DES EDP

Dans l'article « Partielles, équations aux différences partielles » du *Supplément Panckoucke*[290], Condorcet rend hommage à l'« éclatante » découverte de son aîné :

---

[288] Ce choix résulte d'un impératif chronologique sans lequel nous ne rendrions qu'imparfaitement compte de l'enchaînement des idées.

[289] Il existe des correspondances à caractère scientifique entre la plupart des membres de cette communauté. On peut s'en faire une idée grâce aux tomes XIII et XIV des *Œuvres* de Lagrange, Paris, 1882 et 1892, au tome XIV de celles de Laplace, Paris, 1912, ainsi qu'aux recherches de R. Taton : « Une correspondance mathématique inédite de Monge », *Revue Scientifique*, 85, p. 963-989, et *L'Œuvre scientifique de Monge*, PUF, Paris, 1951.

[290] t. IV, 1777, p. 243a-245a.

> « M. D'Alembert est l'inventeur de cette branche de l'analyse, sans laquelle on ne pouvoit résoudre d'une manière rigoureuse & générale, les problèmes où il s'agit de corps fluides ou flexibles. Cette découverte, aussi importante & peut-être plus difficile que celle du calcul intégral, n'a été moins éclatante que parce que son auteur a exprimé une chose nouvelle par des mots & des signes déjà connus ».

L'insistance significative de Condorcet sur l'innovation que représente le calcul aux différences partielles est probablement liée à l'influence tant scientifique que philosophique de D'Alembert. Les deux savants effectuent d'ailleurs ensemble un voyage à Ferney et dans le Sud de la France du 16 septembre au 20 novembre 1770, afin de rendre visite à Voltaire[291]. Dans les mois suivant leur retour à Paris, Condorcet présente deux écrits sur les EDP, parus dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour les années 1770 et 1771[292]. Ces deux pièces s'inscrivent dans la droite lignée des recherches de Fontaine sur le calcul intégral et du Mémoire 26 des *Opuscules* t. IV (1768), car Condorcet y considère l'EDP comme un objet d'étude mathématique, indépendamment de toute considération physique.

Cependant, dans sa seconde pièce datée de 1771, Condorcet consacre une section à la question de la continuité des fonctions arbitraires[293], en faisant allusion à la polémique ayant impliqué D'Alembert. Quoique moins abouties que les travaux que son aîné produira quelques années plus tard, ses recherches insistent toutefois sur la nécessité d'un bon « raccord » entre des fonctions non soumises au critère de permanence de la forme. Il présente ainsi deux exemples de fonctions polynomiales par morceaux, dont il ajuste les coefficients afin que les valeurs des dérivées premières et seconde coïncident aux points de changement d'expression. Il parvient, dans ce cadre, à une conclusion qui ne laisse guère de doutes sur le fond de sa pensée[294] :

> « On voit qu'il suffiroit ici que cette courbe fût composée de lignes qui courbes ou droites, se touchent, c'est-à-dire qu'elle fût continue quant à sa description & non quant à son équation analytique »

• Monge, de la géométrie aux EDP

Si Gaspard Monge semble apparemment moins influencé par la teneur des réflexions dalembertiennes, ses écrits, de même que ceux de Condorcet, s'inscrivent cependant

[291] Voir Lagrange, *Œuvres*, t. XIII, Paris, 1882, p. 182-189 et A.-M. Chouillet, P. Crépel, « Un voyage d'Italie manqué ou trois encyclopédistes réunis », *Recherche sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 17, octobre 1994, p. 9-53.

[292] Condorcet, « Mémoire sur les équations aux différences partielles », *MARS* année 1770 (1773), p. 151-178, et « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 49-74.

[293] Cf. Condorcet, « Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 69-72.

[294] Condorcet, *Ibid.* note 293, p. 71.

dans une effervescence caractéristique de l'intérêt des savants pour la théorie des EDP au début des années 1770[295].

En novembre 1771, ses premières réflexions sur le sujet aboutissent à la présentation, à l'Académie Royale des Sciences de Paris, d'un mémoire intitulé « Sur les intégrales des équations aux différences partielles »[296]. Il insiste notamment à cette occasion sur le lien à établir entre les EDP et l'étude analytique de surfaces courbes.

Cet aspect sera plus largement développé dans deux autres mémoires lus en 1773 et publiés en 1776 dans le tome VII des Savants étrangers[297]. Dans ces écrits, le savant se concentre sur des expressions formées de fonctions arbitraires représentant un ensemble de surfaces, et tente systématiquement de déterminer la surface à laquelle appartient une courbe donnée de l'espace.

Grâce à son approche géométrique, Monge se montre moins soucieux que ses contemporains des changements de forme algébrique. Dans l'énoncé des problèmes abordés, il prend cependant systématiquement soin de préciser que les fonctions attachées à l'expression de ses conditions particulières peuvent être « continues ou discontinues », ce qui n'est pas innocent. Le savant participe en effet au débat sur la nature des fonctions arbitraires, comme en témoigne cet extrait d'une lettre du 12 février 1772, adressée à son ami du Breuil du Marchais (1739-1823)[298] :

> « M. D'Alembert n'a jamais voulu admettre l'introduction des fonctions discontinües dans l'analyse et je lui ai démontré aussi évidemment qu'aucune proposition d'Euclide que la surface qu'engendre une courbe donnée au hazard dans l'espace en tournant autour d'un axe donne toujours :
>
> $$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0 \text{ ».}$$

Quoiqu'il y adopte une position antagoniste à celle de D'Alembert, nous constatons donc que ses travaux ne sont pas sans lien avec les recherches de l'encyclopédiste dans ce domaine[299].

---

[295] Monge correspond d'ailleurs sur ces sujets avec D'Alembert et Condorcet : voir R. Taton, « Une correspondance mathématique inédite de Monge », *Revue Scientifique*, 85, p. 963-989.

[296] D'Alembert est nommé commissaire pour l'examen de ce mémoire, aux côtés de Bossut et Vandermonde. Leur rapport, consultable dans les *Registres Manuscrits de l'Académie des Sciences*, 1772, Archives de l'Académie des science de Paris, f. 7-10, et présenté le 22 janvier 1772, constitue une précieuse source d'informations sur cet écrit, car nous ne disposons que de la seconde partie, publiée en 1950 dans le 9^{e} tome de la revue *Osiris*.

[297] Cf. G. Monge, « Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées*, t. VII, 1773, p. 267-300, et « Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées*, t. VII, 1773, p. 305-327.

[298] R. Taton, *L'Œuvre scientifique de Monge*, PUF, Paris, 1951, p. 185.

[299] Dans son article « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées

L'évolution du point de vue de D'Alembert

Ces travaux de Monge et Condorcet nous permettent de mettre en perspective les dernières réflexions de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires, qui, comme nous le laissions précédemment entendre, révèlent une nette évolution de sa position sur le sujet. Le Mémoire 58 § VI de ses *Opuscules* t. VIII (1780), intitulé « Sur les fonctions discontinues », permet de s'en faire une première idée.

Dans cet écrit, D'Alembert envisage l'EDP $\frac{dz}{dx} + \frac{adz}{dy} = 0$ et l'expression issue de son intégration, $\Phi(ax - y)$, dans laquelle la fonction Φ change d'expression pour une certaine valeur[300] c vérifiant : $ax - y = c$. Ψ & Γ représentant respectivement les expressions de la dérivée première de Ψ avant et après c, il remarque à l'art. 9[301] :

> « Au reste, il y a des cas où la fonction, quoique discontinue, satisfait à l'équation
>
> $$\left[\frac{dz}{dx} + \frac{adz}{dy} = 0\right].$$
>
> Par exemple, si lorsque $z = [c]$, les quantités Ψ & Γ étoient égales, alors la discontinuité de la fonction $\Phi(ax - y)$ ne l'empêcheroit pas de satisfaire à l'équation différentielle proposée »

Plus loin dans le mémoire[302], ce critère se trouve même généralisé au cas des fonctions arbitraires intervenant dans les EDP d'ordre n : les valeurs de leur différentielle à tout ordre, jusqu'à n, doivent coïncider aux points de changement d'expression, selon le géomètre.

Dans le t. IX de ses *Opuscules*, un imposant ensemble de manuscrits inédits, non publiés de son vivant, D'Alembert livre deux mémoires dans lesquels les réflexions précédentes sont appliquées aux problèmes des cordes vibrantes et de la propagation du son.

Dans le Mémoire 59 § VII, intitulé « Sur les cordes vibrantes », il donne ainsi l'exemple d'une fonction « discontinue » polynomiale par morceaux solution du problème[303].

---

partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° XXXV/1, 1982, p. 3-42, l'historien des sciences S. Demidov remarque que « les argumentations avancées lors de la discussion [sur la nature des fonctions arbitraires], en particulier l'analyse géométrique du sujet effectuée par Monge, ont fait renoncer D'Alembert [...] à l'exigence primitive de la « continuité » de la fonction primitive. Dans son mémoire « Sur les fonctions discontinues » [il s'agit du Mémoire 58 § VI], publié en 1780, il utilise les fonctions « discontinues » dans la construction des solutions des équations différentielles faite dans le pur style de Monge » (p. 37-38).

300 Pour des raisons de lisibilité, nous modifions ici les notations originales de D'Alembert.

301 D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 58, § VI, p. 306.

302 Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 301, p. 307.

303 Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. IX (inédit), Mémoire 59, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 275.

Dans le Mémoire 59 § VI, « Sur la vîtesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et des problèmes semblables », il reformule le critère évoqué ci-dessus, portant sur les fonctions « discontinues » admissibles dans la résolution d'une EDP d'ordre n[304]. Grâce à ces nouvelles fonctions, il obtient ainsi des solutions au problème, ceci lui permettant d'achever ses recherches sur la propagation du son sur une note plus optimiste qu'en 1768.

Nous nous sommes par ailleurs aperçus que cette évolution de pensée sur le sujet se retrouve également dans quelques-uns de ses textes les plus tardifs consacrés aux questions de l'équilibre et du mouvement des fluides. Dans deux des trois appendices complétant le Mémoire 57 § VII, dans le Mémoire 56 § I, ainsi que dans le Mémoire 59 § VII[305], D'Alembert envisage en effet d'avoir recours à des solutions exprimées sous la forme de fonctions « discontinues ». Voyons donc précisément de quoi il s'agit.

Notons, avant de ce faire, que quoique ces derniers travaux fassent indéniablement état d'une considérable évolution de son approche vis-à-vis de la notion de fonction, ce n'est pas, pour autant, un ralliement à la position défendue par Euler. D'Alembert continue à exiger l'absence de sauts de courbure, même s'il a renoncé à la permanence de la forme. La combinaison de ces deux aspects fait que son point de vue est plus pertinent que celui d'Euler car il est en fait assez proche de la notion moderne de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Les résurgences de l'évolution de son point de vue sur ses recherches en hydrodynamique

Il n'avait, jusqu'alors, jamais été question de ce problème dans les travaux de D'Alembert en hydrodynamique. En étudiant le Mémoire 57, il nous est cependant apparu que l'évolution de la position du savant sur le problème des changements d'expression dans le Mémoire 58 § VI, l'incite, contre toute attente, à examiner le sujet dans le cadre de sa théorie analytique pour l'écoulement d'un fluide incompressible à l'intérieur d'un vase ouvert en ses deux extrémités.

Dans le second des trois appendices relatives au Mémoire 57 § VII, intitulé « Remarque sur le LVII^e^ Memoire, §. VII, art. 30 », D'Alembert considère en effet[306]

> « un vase dont les parois soient courbes, & terminé en-haut & en-bas par deux vases, dont les parois soient des lignes droites parallèles ».

[304] Cf. D'Alembert, *Opuscules*, t. IX (inédit), Mémoire 59, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 105.

[305] Quoique que cet écrit soit principalement dédié à la poursuite de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes, D'Alembert consacre néanmoins quelques pages à la question de la « discontinuité » des fonctions dans le cas de l'équilibre des fluides.

[306] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VII, Second Appendice, art. 1, p. 372.

Il est, poursuit-il[307],

> « aisé de voir que l'équation
>
> $$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1},$$
>
> ne peut appartenir à-la-fois à la partie curviligne de ce vase, & à sa partie rectiligne, tant supérieure qu'inférieure ».

D'après D'Alembert, l'expression générale $\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$ de l'équation des parois du vase, tirée de la résolution de son système d'EDP pour l'écoulement d'un fluide doit, rappelons-le, être compatible avec l'équation $y(x)$, considérée comme une donnée du problème, de la paroi du vase, afin que la solution soit possible. L'examen d'un vase bordé par une portion de paroi courbe et par deux portions de paroi rectilignes suppose naturellement deux équations $y(x)$: l'expression

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$$

ne pourra, de ce fait, être compatible qu'avec l'une d'entre elles.

Pour autant, le changement d'expression de $y(x)$ ne rebute pas le savant, et c'est en toute cohérence avec l'évolution de point de vue précédemment mise au jour qu'il avance l'idée d'une combinaison des solutions dans le cas particulier d'un vase constitué d'une portion supérieure rectangulaire et d'une portion inférieure triangulaire. Dans le dernier des trois appendices relatifs au Mémoire 57, intitulé « Appendice sur le LVII^e^ Memoire, §. VII, à la fin », il se réfère ainsi à la solution donnée dans son mémoire « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 »[308] (1766) — la partie de ce mémoire relative au problème de l'écoulement des fluides a déjà été abordée : voir p. 127 —, et propose la chose suivante[309] :

> « On trouve dans le troisième Tome des Mémoires de Turin, les valeurs de φx pour le cas où $y=a$, & pour celui où $y=b+fx$, c'est-à-dire, pour le cas d'un vase rectangle & d'un vase triangulaire. Si donc on a un vase qui soit rectangle dans sa partie supérieure, & triangulaire dans l'inférieure, on pourroit, en combinant la solution de ces deux problêmes, essayer de trouver la valeur de φx pour un tel vase ; ce qui donneroit le mouvement du fluide au premier instant. »

D'Alembert ne s'en tient pas, toutefois, à l'examen de ce cas de figure, mais se lance, de façon beaucoup plus générale, dans une opération de réécriture des EDP fondant sa théorie analytique des écoulements. Cette opération passe d'abord par un retour sur le processus de mise en équation du principe d'égalité de la pression en tous sens pour un fluide incompressible non pesant soumis à une force de composantes $P(x,y)$ et $\mathcal{Q}(x,y)$

---

[307] D'Alembert, *Ibid.* note 306. Nous avons susbtitué la notation M à la notation d'origine A.

[308] *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 381-396.

[309] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VII, Troisième Appendice, p. 375.

dans les directions x et y, processus dont nous donnions le détail dans le chapitre II — voir p. 66. De la considération d'un vase caractérisé par une « discontinuité » de la forme de ses parois, « il s'ensuit », écrit-il en effet dans le second appendice au Mémoire 57 § VII[310],

> « que dans la différentielle $Pdx + \mathcal{Q}dy$, les fonctions P & $\mathcal{Q}$ ne doivent pas nécessairement être des fonctions continues ; & cette conclusion est d'autant plus naturelle [...] que dans le cas de l'équilibre d'une masse fluide les fonctions P & $\mathcal{Q}$ qui représentent les forces agissantes sur cette masse, peuvent être discontinues. Donc elles peuvent l'être aussi dans le cas du mouvement de ce même fluide ».

Pour ce qui est de la seconde équation gouvernant, selon lui, le mouvement d'un fluide dans un vase, à savoir l'équation de conservation du volume, il la traduit en considérant l'état d'équilibre du fluide dans l'instant précédant, à l'instant même, et dans l'instant suivant le passage de la « discontinuité » induite par le changement de forme des contours du vase. Voici plus précisément comment il procède.

Dans l'instant précédant le passage, l'équilibre du fluide à l'intérieur d'un canal quelconque infiniment petit équivaut, comme nous l'expliquions dans le chapitre II, à considérer $Pdx + \mathcal{Q}dy$ comme une différentielle complète, ou, ce qui revient au même — en vertu du critère d'Euler : voir p. 101 —, à la vérification de l'EDP $\dfrac{d\mathcal{Q}}{dx} = \dfrac{dP}{dy}$, avec

$$\begin{cases} \mathcal{Q} = -\dfrac{dp(x,y)}{dt} = -\left(\dfrac{dp}{dx} \times \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dp}{dy} \times \dfrac{dy}{dt}\right) = -p\dfrac{dp}{dy} - q\dfrac{dp}{dx}, \\ P = -\dfrac{dq(x,y)}{dt} = -\left(\dfrac{dq}{dx} \times \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dq}{dy} \times \dfrac{dy}{dt}\right) = -q\dfrac{dq}{dx} - p\dfrac{dq}{dy}, \end{cases}$$

$p(x,z)$ et $q(x,z)$ désignant respectivement, rappelons-le, les composantes de la vitesse suivant les directions y et x. Dans l'instant suivant le passage, il vient donc :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}' = -p'\dfrac{dp'}{dy} - q'\dfrac{dp'}{dx}, \\ P' = -q'\dfrac{dq'}{dx} - p'\dfrac{dq'}{dy}, \end{cases}$$

$P'(x,y)$ et $\mathcal{Q}'(x,y)$, $q'(x,y)$ et $p'(x,y)$, correspondant respectivement aux nouvelles composantes de la force et la vitesse agissant sur le fluide dans les directions x et z.

La méthode pour traiter l'instant même du passage de la « discontinuité », D'Alembert la donne dans le Mémoire 56 § I des *Opuscules* t. VIII, dédiée à la question de l'équilibre des fluides. Il en livrera également une variante dans le Mémoire 59 § VII, à laquelle nous préférons ici nous référer, du fait de sa plus grande clarté. Son point de départ, commun avec celle la méthode du Mémoire 56, consiste à supposer que le fluide

[310] D'Alembert, *Ibid.* note 306, art. 2, p. 372-373. Dans cette dernière partie du chapitre, y correspond à ce que nous notions précédemment z, c'est-à-dire la coordonnée horizontale d'une particule quelconque de fluide à l'intérieur du vase.

se trouve partagé en deux par une cloison solide d'épaisseur nulle détruite à l'instant du changement de forme du vase, de telle sorte que les deux doublets (p, q) et (p', q') vérifient respectivement les relations $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dq}{dy}$ et $\dfrac{dp'}{dx} = \dfrac{dq'}{dy}$ l'instant d'avant la disparation de la cloison — il s'agit d'une des deux équation de son système d'EDP pour le mouvement d'un fluide dans le cas « continu », celle caractérisant ce que nous appellerions un *écoulement potentiel*. Pour le reste, voici comment il raisonne[311] :

> « il faut observer, que lorsque ces fonctions seront discontinues, $\dfrac{dq}{dy}$, par exemple ne designera point le coefficient de dp en ne faisant varier que y, il exprimera la difference de deux valeurs de p repondantes à deux dx infiniment proches, égales et paralleles, cette difference etant divisée par dy ; il en sera de même de $\dfrac{dq}{dx}$; en sorte qu'on aura $(p' - p)dx = (q' - q)dy$ ».

L'équation d'équilibre du fluide à l'instant même du passage de la discontinuité s'écrit ainsi

$$\frac{p - p'}{dy} + \frac{q' - q}{dx} = 0.$$

D'Alembert obtient ainsi un nouveau système d'EDP, dont il donne une brève mais limpide synthèse dans le second des trois appendices relatifs au Mémoire 57 § VII[312] :

> « En supposant P & Q des fonctions discontinues, mais telles cependant que le canal quelconque infiniment petit $Pdx + Qdy$ soit en équilibre, on aura [...] $-\dfrac{qdq}{dx} - \dfrac{pdq}{dy} = P$, & $-\dfrac{pdp}{dy} - \dfrac{qdp}{dx} = Q$. On aura de même dans l'instant suivant P' & Q' en p' & q' ; de plus [...] on a $\dfrac{p' - p}{dy} + \dfrac{q' - q}{dx} = 0$. Ces équations renferment les loix générales du mouvement du fluide ».

Epilogue

Ce changement de position de D'Alembert dans le problème des cordes vibrantes, de la propagation du son, de l'équilibre et du mouvement des fluides, aussi explicite soit-il, reste pourtant ignoré par la plupart des historiens. Youschkevitch[313] l'avait certes

[311] D'Alembert, *Opuscules*, t. IX (inédit), Mémoire 59, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 309-310. Nous avons substitué les notations p, p', q et q' aux notations d'origine, R, R', Q et Q', ce qui ne change rien au raisonnement du savant, portant ici sur des fonctions et sur leurs différences partielles.

[312] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VII, Second Appendice, art. 3, p. 373.

[313] Voir A. Youschkevitch, « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231, et « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX[e] siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 50.

remarqué, mais il en a minimisé à tort la portée en omettant que l'encyclopédiste maintient son opposition aux sauts de courbure. De plus, il faut ajouter qu'un savant éminent de la génération suivante, Laplace, échange encore en 1782 avec D'Alembert à propos des fonctions et des cordes vibrantes, ainsi qu'en témoigne la lettre qu'il lui adresse le 10 mars[314]. Dans son « Mémoire sur les suites », il développe d'ailleurs un point vue similaire à la position tardive de son aîné, en déclarant que[315] :

> « la loi de continuité ne paroît nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les constructions géométriques qui représentent ces intégrales ; il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre n, & que l'on nomme u sa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\dfrac{\delta^{n-r}u}{\delta x^s \delta t^{n-r-s}}\right)$ ».

En dépit de tenaces préjugés, les dernières recherches de D'Alembert continuent donc d'être pertinentes et influentes, et ce à de nombreux points de vue. L'œuvre tardive de D'Alembert présente un indéniable intérêt : cette étude en constitue une première illustration pour les aspects mathématiques.

Ce sont, dès lors, aux aspects physiques qu'il nous faut à présent revenir. Car si le problème des cordes vibrantes constitue, comme nous l'avons précédemment mentionné, un exemple de résolution explicite, la question de l'écoulement des fluides reste, quant à elle, le plus souvent inextricable : la solution, pour employer les propres termes du savant, est, la plupart du temps, analytiquement impossible. Cet état de fait le pousse, dès le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), à la recherche d'une voie intermédiaire entre l'approche du parallélisme des tranches du *Traité des fluides* (1744), et l'approche analytique, telle que nous venons d'en rendre compte.

---

[314] Laplace, *Œuvres*, t. XIV, Paris, 1912, p. 351-354.

[315] Laplace, « Mémoire sur les suites », *MARS* année 1779 (1782), p. 300.

Chapitre V. LES HYPOTHÈSES DES TUYAUX CURVILIGNES DE D'ALEMBERT ET BORDA

Dans l'« Avertissement » du Ier tome de ses *Opuscules* (1761), D'Alembert résume le Mémoire 4 en ces termes[316] :

> « Le quatriéme Mémoire a pour objet la réduction des loix du mouvement des fluides aux équations analytiques les plus générales qu'il est possible ; après avoir donné ces équations, je fais voir qu'il y a très-peu de cas où le mouvement des fluides puisse y être réduit, & par conséquent être déterminé par un calcul rigoureux ; d'où il s'ensuit qu'en général les loix de l'Hydrodynamique, entant qu'on les soumet au calcul, ne peuvent être connues qu'à-peu-près ».

Cet échec, du point de vue mathématique, le conduit à une conclusion, dans le mémoire lui-même, teintée d'un pessimisme à peine dissimulé[317] :

> « On peut donc s'en tenir, ce me semble, dans le plus grand nombre de cas, à la méthode que j'ai donnée dans mon *Traité des Fluides*, laquelle fournit des résultats assez conformes à l'expérience, quoiqu'elle ne soit pas dans la rigueur Mathématique ».

Sachant que D'Alembert est le premier à douter de la validité de l'hypothèse du parallélisme fondant sa théorie dans le *Traité des Fluides*, qu'il est l'initiateur d'une approche analytique de la discipline, la perspective de devoir revenir à l'approximation à laquelle il estimait justement pouvoir se soustraire dans l'*Essai sur la Résistance des Fluides* n'est évidemment pas alléchante. Elle illustre néanmoins le dilemme de cette période quelque peu particulière du développement de l'hydrodynamique au XVIIIe siècle, à savoir la nécessité de faire concorder la théorie avec l'expérience : un dilemme auquel s'attaque Jean-Charles Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement », déclenchant, par là-même, la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

Pour un théoricien tel que D'Alembert qui n'a jamais effectué, et n'effectuera en fait jamais d'expériences dans ce domaine — ni dans un autre —, l'incapacité à fournir des solutions que l'on puisse confronter avec l'expérience, marque, en quelque sorte, un « point d'arrêt » difficilement admissible, ainsi qu'en témoigne son entêtement, dans le Ve tome des *Opuscules* (1768), à venir à bout du système d'EDP obtenu en 1752. C'est en fait, de façon paradoxale, la « charge » de Borda contre les fondements de son *Traité des fluides* qui lui donnera l'occasion de rebondir dans ce domaine. Son espoir renaît ainsi dans le Mémoire 51 § IV, des *Opuscules* t. VI (1773), qui contient une extension de la nouvelle hypothèse, dite des tuyaux curvilignes invariables, proposée par l'auteur

[316] D'Alembert, *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Avertissement, p. v-vi.

[317] D'Alembert, *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § IX, p. 145.

du « Mémoire sur l'écoulement », laquelle extension lui « paraît », comme il le confie à Lagrange dans sa lettre du 25 mars 1772, « propre à satisfaire à tous les cas et à toutes les expériences, sans recourir à la mauvaise théorie de Borda »[318].

Dans l'appendice de ce même mémoire, il revendique également, nous l'avons déjà signalé, la priorité de l'approximation proposée par son contradicteur, dont il explique avoir posé les prémices dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), et dont il reprend par ailleurs l'étude dans le Mémoire 32 § II des *Opuscules* t. V (1768). Pour autant, c'est là un fait étrange, l'« Avertissement » inséré à la fin de la partie dédié aux écoulements de sa seconde édition du *Traité des Fluides* (1770), et contenant une première annonce de sa stratégie de réponse à Borda, reste profondément pessimiste quant à la possibilité de tirer une quelconque solution exploitable de son hypothèse des tuyaux curvilignes du Mémoire 4[319] :

> « La difficulté est de trouver une hypothèse qui représente, au moins d'une maniere approchée, le mouvement des différens filets du Fluide, & la figure de ces filets ; problême d'autant plus difficile, qu'il est vraisemblable que la figure de ces filets ne s'assujettit pas, au moins dans tous les cas, à la figure du vase [...]. J'ai fait voir, dans le Tome V de mes Opuscules, pag. 78 & suivantes [Mémoire 32 § II], la difficulté d'assigner le mouvement du Fluide dans ces sortes de filets ou tuyaux fictifs, dans lesquels on suppose qu'il se meut ».

Comment donc expliquer le regain d'intérêt de D'Alembert dans le courant de l'année 1772 ? Il nous semble que la mise en forme de sa théorie des tuyaux curvilignes de forme variable, pourtant en germe dans le Mémoire 4, c'est-à-dire dès 1761, en constitue l'élément déclencheur. Non pas du point de vue de sa querelle avec Borda, mais d'un point de vue strictement mathématique. L'achèvement de sa nouvelle théorie repose en effet sur la différentiation d'une fonction de plusieurs variables, un procédé employé dans l'*Essai sur la Résistance des Fluides*. Il prend autrement dit conscience, à ce moment-là, de l'intérêt de la voie intermédiaire proposée dans le Mémoire 4, et plus généralement, des possibilités offertes par l'idée d'appliquer les outils mathématiques de l'approche analytique au perfectionnement de l'approche unidimensionnelle des écoulements. C'est en ce sens que le Mémoire 4 doit être considéré comme un texte de transition dans son œuvre en hydrodynamique.

Nous entamerons donc notre étude des hypothèses des tuyaux curvilignes de D'Alembert et Borda en montrant en quoi leurs démarches respectives consistent, et comment elles se distinguent de ce point de vue, à la lumière de nos recherches dans le précédent chapitre.

Nous procèderons, dans un second temps, à un examen comparatif des différentes hypothèses de l'approche unidimensionnnelle vis-à-vis de leur principal enjeu en cette

[318] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 102, p. 233.

[319] D'Alembert, *Traité des Fluides*, Paris, 1770, « Avertissement », p. 213.

période de crise : la concordance avec l'expérience. Nous montrerons, ce faisant, qu'elles n'offrent rien de plus qu'un moyen d'évaluer leurs propres limites de validité : qu'elles sont bien loin, en d'autres termes, de permettre d'atteindre leur objectif initial.

1. Formulations des hypothèses des tuyaux curvilignes et méthodes de mise en équations associées

Dans le Mémoire 4 des Opuscules *t. I (1761)*

Dans le Mémoire 4 des *Opuscules*, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, D'Alembert parvient à une expression générale,

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M,$$

indépendante du temps, de l'équation du filet du fluide contigu à la paroi d'un vase ouvert en ses deux extrémités. Chaque valeur de M, constante réelle considérée comme un paramètre, fournit ainsi l'équation

$$\varphi(x + z\sqrt{-1}) - \varphi(x - z\sqrt{-1}) = 2M, \tag{10}$$

d'un quelconque des filets du fluide en mouvement à l'intérieur de ce vase.

Constatant, suite à son échec face au problème de la détermination d'une expression explicite de la fonction φ, qu'« il est aisé de voir par toute la théorie expliquée dans ce Mémoire, que le mouvement des fluides peut rarement être soumis à un calcul analytique rigoureux », on ne pourra pas moins, explique-t-il cependant, « dans le cas où les particules du fluide se meuvent suivant des lignes courbes invariables »[320]

> « regarder le fluide, contenu entre deux quelconques de ces lignes courbes infiniment proches l'une de l'autre, comme s'il se mouvoit dans un tuyau isolé, de figure quelconque & infiniment étroit ».

D'Alembert propose en effet, dans le § VI du mémoire, une approche intermédiaire consistant à construire, au voisinage de l'axe du vase — nous en expliquerons la raison dans un instant —, des canaux contigus curvilignes infiniment étroits reliant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans le vase à partir de l'expression (10) des lignes de courant du fluide, puis à y restreindre l'hypothèse du parallélisme des tranches. Il définit, en d'autres termes, un canal curviligne invariable et infiniment étroit grâce aux équations

$$\varphi(x + \sqrt{-1}z) - \varphi(x - \sqrt{-1}z) = 2M$$

[320] D'Alembert, *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § XVI, p. 156.

et

$$\varphi(x+\sqrt{-1}z)-\varphi(x-\sqrt{-1}z)=2(M+dM)$$

de deux filets consécutifs qui en représenteront donc les deux contours latéraux[321]. Ces équations étant indépendantes du temps, il introduit, ce faisant, ce que nous appellerions aujourd'hui un *tube de courant stationnaire*. Partant de là, il procède à une évaluation de la composante verticale $q(x,z)$ de la vitesse grâce à des opérations de différentiation successives en fonction de la largeur infinitésimale $z \ll 1$ de ce tuyau. Sachant que (voir le Chapitre IV, p. 112)

$$q(x,z)=\frac{\Phi(x+z\sqrt{-1})-\Delta(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

avec $\Delta(x-z\sqrt{-1})=-\Phi(x-z\sqrt{-1})$ (voir le Chapitre IV, p. 119), il obtient tout d'abord

$$\begin{aligned} q(x,z) &= \frac{\Phi(x+z\sqrt{-1})+\Phi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\Big|_{z\ll 1} \\ &\simeq \frac{\Phi(x)+\sqrt{-1}z\dfrac{d\Phi}{dx}+\Phi(x)-\sqrt{-1}z\dfrac{d\Phi}{dx}}{2\sqrt{-1}}\Big|_{z\ll 1}=\frac{\Phi(x)}{\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Se rappelant, d'autre part, que φ correspond à une primitive de la fonction Φ (voir le Chapitre IV, p. 120), il fait observer que

$$\begin{aligned} \varphi(x+\sqrt{-1}z)-\varphi(x-\sqrt{-1}z)|_{z\ll 1} &\simeq 2\sqrt{-1}z\times\frac{d\varphi(x)}{dx}\Big|_{z\ll 1} \\ &= 2\sqrt{-1}z\times\Phi(x), \end{aligned}$$

ce qui lui le conduit finalement à la relation

$$q(x,z)|_{z\ll 1}\simeq\frac{1}{2z},$$

ce qui revient à montrer que la composante verticale de la vitesse d'un élément de fluide pris à l'intérieur de ce tuyau évolue en fonction inverse de la section infinitésimale correspondante z. Sachant que la composante horizontale de la vitesse vérifie $p(x,z)\simeq 0$ au voisinage de l'axe (compte tenu de la propriété de symétrie du vase), toutes les conditions sont dès lors réunies pour pouvoir procéder à une mise en équation du mouvement à l'intérieur de ce canal curviligne « par les Méthodes que j'ai expliquées dans mon *Traité des Fluides* »[322].

D'Alembert ne s'en tient d'ailleurs pas là, mais examine également, dans le même écrit, le cas où « les particules ne décrivent pas des courbes invariables », c'est-à-dire,

[321] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 320, § VI, p. 141-142.

[322] D'Alembert, *Ibid.* note 320, § VI, p. 142.

en termes modernes, le cas où les lignes du courant du fluide varient d'un instant à l'autre du mouvement. Il faudra alors imaginer, explique-t-il (voir la Fig. XII), « depuis la surface supérieure du fluide CK [...] jusqu'à l'inférieure LO, une suite de points infiniment proches, dont les vitesses forment par leurs directions une courbe continue KGO ». « Soient imaginées de plus », poursuit-il[323],

> « des perpendiculaires Gg à cette courbe, lesquelles soient entr'elles en raison inverse de la vitesse en chaque point G ; il est certain qu'on pourra, au moins dans un instant, regarder le fluide comme s'il se mouvoit dans le tuyau infiniment mince $KGOok$ ».

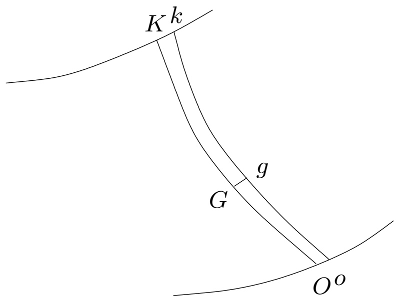


Fig. XII – Tuyau curviligne infiniment étroit $KkoO$ à un instant donné t.

En présentant ainsi la ligne KGO comme la courbe formée à chaque instant par les directions des vitesses, D'Alembert donne donc ici la définition exacte de ce que nous appellerions aujourd'hui les *lignes de courant d'un écoulement instationnaire*. Il construit de plus, comme dans le cas permanent, un tuyau $KGOok$ formé par deux des ces lignes, c'est-à-dire un *tube de courant* de l'écoulement dans lequel il démontre — en supposant implicitement que les particules formant chacune des sections infinitésimales perpendiculaires aux parois de ces tuyaux se trouvent animées de vitesses homogènes à chaque instant t —, que son principe de la dynamique et, par corollaire, le principe de conservation des forces vives, s'y trouvent vérifiés. Cette démonstration, relative au cas d'un fluide non pesant, s'inspire de celle donnée dans l'art. 90 de son *Traité des fluides* mais s'applique ici à un champ de vitesse quelconque à l'intérieur d'un canal infiniment étroit de figure variable au cours du temps : en 1744, le savant supposait *a contrario*, hypothèse du parallélisme oblige, « que la vitesse verticale soit la même dans tous les points d'une même tranche horizontale, & qu'on n'ait aucun égard à la vitesse horizontale de ces mêmes points »[324].

Quoiqu'elles ne débouchent pas, ni dans ce Mémoire 4, ni dans le Mémoire 32 § II

[323] D'Alembert, *Ibid.* note 320, § XVI, p. 157.

[324] D'Alembert, *Ibid.* note 320, § XVI, p. 157-158.

des *Opuscules* t. V (1768)[325], sur l'écriture proprement dite des équations différentielles du mouvement, la définition de ces hypothèses des tuyaux invariables et variables à partir de son approche analytique des écoulements forme néanmoins les prémices de la nouvelle théorie établie par D'Alembert dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VI (1773) et t. VIII (1780).

La première mise en équation de l'écoulement dans l'hypothèse des tuyaux invariables et dans le cadre de l'approche unidimensionnelle est, quant à elle, l'œuvre de Jean-Charles Borda.

Borda et la mise en équation de l'écoulement dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes

Dans son « Mémoire sur l'écoulement »[326], Borda applique, pour ce faire, le principe de conservation des forces vives à l'intérieur d'un canal curviligne quelconque $abef$ reliant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans le vase (voir la Fig. XIII).

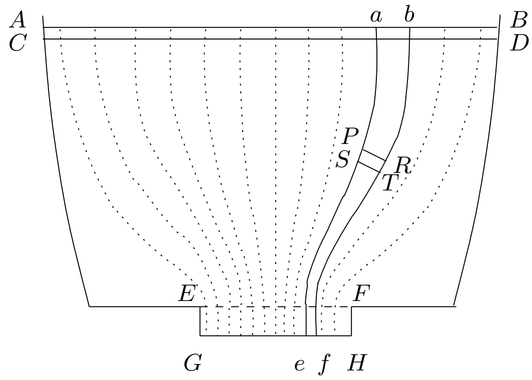


Fig. XIII – Ecoulement dans un vase percé d'un orifice EF en son fond, le mouvement du fluide étant supposé s'opérer à l'intérieur de canaux curvilignes invariables du type $abfe$.

Il évalue donc d'abord la force vive — ou l'*énergie cinétique*, pour employer le terme moderne — du petit élément de fluide rectangulaire $PRST$ de vitesse v, d'épaisseur $PS = ds$, de section $PR = y$ (s désignant l'abscisse curviligne des parois) et perpendiculaire aux parois de ce tuyau, par la quantité[327]

[325] D'Alembert se consacre en effet, dans ce dernier écrit, à l'étude du mouvement dans les tuyaux précédemment définis, mais dans une optique exclusivement analytique.

[326] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 2, p. 580-582.

[327] Nous avons volontairement modifié la nomenclature originale du « Mémoire sur l'écoulement » de Borda afin de faciliter la comparaison ultérieure de sa solution avec celles obtenues par D'Alembert : dans le détail, les notations y, α, β, k, K, x, dx ont respectivement été substituées à celles d'origine z, a, b, A, B, X, $\mathcal{C}$.

$$\frac{1}{2g}v^2 \times yds,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{\beta u}{y}\right)^2 \times yds,$$

avec $ef = \beta$, u la vitesse du fluide en ef, et sachant que $vy = \beta u$ d'après la constance du débit de l'écoulement dans le tuyau. Il en déduit ensuite la somme des forces vives de l'ensemble du canal par intégration de cette dernière expression, soit

$$\int_{ab}^{ef} \frac{1}{2g}\left(\frac{bu}{y}\right)^2 yds,$$

puis l'incrément de forces vives équivalent, à savoir :

$$d\left[\int_{ab}^{ef} \frac{1}{2g}\left(\frac{bu}{y}\right)^2 yds\right].$$

Il ne lui reste plus, d'après le principe employé, qu'à égaler cette quantité avec « l'incrément du moment du fluide par rapport à l'horizontale AB »[328], c'est-à-dire

$$efgh \times EX = abcd \times EX = \alpha x dx.$$

Il vient ainsi

$$d\left[\int_{ab}^{ef} \frac{1}{2g}\left(\frac{\beta u}{y}\right)^2 yds\right] = \alpha x dx,$$

avec

$$d\left[\int_{ab}^{ef} \frac{1}{2g}\left(\frac{\beta u}{y}\right)^2 yds\right] = \frac{\beta^2 udu}{g}\int_{ab}^{ef}\frac{ds}{y} + \frac{\beta^2 u^2}{2g} d\left(\int_{ab}^{ef}\frac{ds}{y}\right).$$

Remarquant enfin que

$$d\left(\int_{ab}^{ef}\frac{ds}{y}\right) = \frac{\alpha dx}{\beta^2} - \frac{dx}{\alpha},$$

et supposant un rapport constant entre les deux surfaces supérieure et inférieure du fluide $AB = k$ et $EF = K$ et celles ab et ef du canal considéré, de telle sorte que $\dfrac{k}{K} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, Borda obtient l'équation

$$\frac{K^2}{k^2}\frac{udu}{g}\int_{ab}^{ef}\frac{\alpha ds}{y} + \frac{k^2 - K^2}{k^2} \times \frac{u^2}{2g}dx - xdx = 0.$$

Pour en faciliter une comparaison ultérieure avec celles obtenues par D'Alembert, nous préférerons y faire apparaître plus explicitement la force vive $\dfrac{u^2}{2g}$ de la tranche inférieure du fluide. Après division de l'équation par dx, il vient donc :

$$\frac{K^2}{k^2}\int_{ab}^{ef}\frac{\alpha ds}{y} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right) + \left(1 - \frac{K^2}{k^2}\right)\frac{u^2}{2g} = x. \tag{11}$$

[328] Borda, *Ibid.* note 326, art. 2, p. 582.

L'étape suivante de notre présentation des hypothèses des tuyaux curvilignes de D'Alembert et Borda consisterait logiquement, d'un point de vue chronologique tout du moins, à aborder l'hypothèse des tuyaux de figure variable au cours du temps proposée par D'Alembert dans le Mémoire 51 § IV de ses *Opuscules* t. VI.

Nous ferons cependant un bref intermède, compte tenu du fait qu'Euler s'intéresse dès 1755, dans son mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides »[329], à l'écoulement d'un fluide dans un canal curviligne invariable. De même que D'Alembert dans le Mémoire 4 et le Mémoire 51 § IV, sa démarche revient, c'est là ce qui nous intéresse, à appliquer les outils de l'approche analytique pour la mise en équation du mouvement à l'intérieur d'un tel tuyau — il la présente lui-même comme une tentative de résolution, dans un cas particulier, des célèbres équations de son mémoire « Principes generaux du mouvement des fluides »[330]. Nous verrons que son approche, dont nous aurons, par là-même, l'occasion de présenter les grandes lignes, nous aidera dans notre travail de comparaison entre les différentes hypothèses unidimensionnelles examinées dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

Euler et la mise en équation du mouvement à l'intérieur d'un canal curviligne infiniment étroit

Dans son mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides », Euler considère donc un fluide, compressible dans un premier temps, s'écoulant[331]

> « dans un tuyau [...] dont l'amplitude soit partout quasi infiniment petite, [mais] néanmoins variable, ce qui [...] tiendra lieu de la seconde équation tirée de la continuité du fluide ».

Il définit, à l'intérieur de ce tuyau, un « endroit fixe » et un « endroit quelconque »[332], le premier étant caractérisé par une section m, une densité δ et une vitesse du fluide u ne dépendant que du temps t, le second par une section y ne dépendant que du lieu, c'est-à-dire de l'abscisse curviligne s (définie par la relation $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, avec x, y, z les trois coordonnées d'espace *cartésiennes*, pour employer le terme moderne), et par une densité q ainsi qu'une vitesse du fluide v dépendant à la fois du temps et du lieu[333].

[329] Euler, « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 316-361 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 92-132 (E227).

[330] Euler, *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 (E226).

[331] Euler, *Ibid.* note 329, art. XIX, p. 325.

[332] Euler, *Ibid.* note 329, art. XIX, p. 325.

[333] Nous avons ici modifié la nomenclature originale du mémoire d'Euler afin de faciliter la comparaison de ses résultats avec ceux de Borda, D'Alembert et D. Bernoulli dans la suite du chapitre : dans le détail, les notations m, δ, u, y, v ont respectivement été substituées aux notations d'origine f^2, φ, ω,

La quantité de fluide renfermée à l'instant t dans une certaine portion du tuyau de longueur l (et de section m en amont) vaut $\int_l qyds$. A l'instant $t + dt$, sachant que la densité q devient $q + \frac{dq}{dt}dt$, la quantité de fluide renfermée dans la même portion correspond à

$$\int_l \left(q + \frac{dq}{dt}dt\right) yds,$$

terme auquel il faut par ailleurs :

- ajouter la petite portion $qyvdt$ correspondant à l'espace vdt parcouru par le fluide en aval de la longueur l,
- et soustraire la petite portion $\delta mudt$ correspondant à l'espace udt parcouru en amont de la longueur l.

Euler obtient ainsi

$$\int_l qyds = \int_l \left(q + \frac{dq}{dt}dt\right) yds + qyvdt - \delta mudt,$$

c'est-à-dire

$$yqv = mu\delta - \int y\frac{dq}{dt}ds.$$

Pour établir la seconde équation du mouvement, il considère un parallélépipède élémentaire de côtés dx, dy et dz dans ce tuyau, soumis aux composantes P, Q et R de la force accélératrice selon les trois directions x, y et z, et y applique, c'est là une variante de sa méthode de mise en équation dans son mémoire « Principes generaux du mouvement des fluides », une version rapportée à l'élément curviligne $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ du principe aujourd'hui connu sous le nom de seconde loi de Newton. Sachant que

- ce volume infinitésimal subit le différentiel de pression $\frac{dp}{q}$ — rappelons que l'approche d'Euler, à la différence de celles de D'Alembert, Borda, et D. Bernoulli, repose sur la prise en compte du concept de pression interne : nous y reviendrons dans le chapitre VIII, intégralement dédié à la question —,
- qu'il s'y exerce l'effort élémentaire $Pdx + Qdy + Rdz$, c'est-à-dire gdx dans le cas d'un fluide soumis à la seule accélération de la pesanteur g,
- et qu'il se voit animé par l'accélération $\frac{dv}{dt} + v\frac{dv}{ds}$ (ces deux termes correspondant respectivement à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, indépendamment des variables d'espaces, et à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, les variables d'espace se trouvant prises en compte),

il vient

$$\frac{dp}{q} = gdx - ds\frac{dv}{dt} - vdv.$$

---

r^2, γ.

Le système d'équation

$$\begin{cases} yqv = m\delta u - \int y\dfrac{dq}{dt}ds, \\ \dfrac{dp}{q} = gdx - ds\dfrac{dv}{dt} - vdv, \end{cases} \tag{12}$$

affirme-t-il dès lors, « renferme toutes les déterminations du mouvement du fluide par le tuyau »[334] curviligne infiniment étroit considéré.

Ce système de deux EDP, Euler doit, nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre I, « avoüer, que dans cette grande étenduë on ne sauroit [en] découvrir l'intégrale »[335]. Il se restreint donc à un cas d'étude plus simple : l'écoulement d'un fluide incompressible. Les densités q et δ devenant alors égales et constantes — nous les prendrons égales à 1, comme le font D'Alembert et Borda —, le système (12) devient

$$\begin{cases} yv = mu, \\ dp = gdx - ds\dfrac{dv}{dt} - vdv. \end{cases}$$

En injectant la première équation, l'équation de continuité, à l'intérieur de la seconde, puis en intégrant le tout sur l'ensemble du canal, Euler obtient ainsi l'équation suivante pour l'écoulement d'un fluide dans un tuyau curviligne infinitésimal de figure invariable,

$$\frac{p}{g} = x - \frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)\int \frac{mds}{y} - \frac{m^2}{y^2} \times \frac{u^2}{2g} + C, \tag{13}$$

équation dans laquelle « la constante » C, selon lui, « peut renfermer le tems t »[336] — ce détail, comme nous le verrons, aura son importance.

Passons à présent à l'hypothèse des tuyaux de figure variable, telle qu'elle se trouve formulée par D'Alembert dans le Mémoire 51, § IV de ses *Opuscules* t. VI (1773).

L'hypothèse des tuyaux curvilignes variables de D'Alembert

L'idée de D'Alembert consistant à faire varier la forme des tuyaux curvilignes apparaît pour la première fois, comme nous venons de le voir, dans le Mémoire 4 de ses *Opuscules* t. I (1761). Elle est par ailleurs à nouveau évoquée dans l'« Avertissement » concluant la partie dédiée aux écoulements de la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770). Le savant y explique en effet que, selon lui, les « filets ou tuyaux fictifs doivent vraisemblablement varier à chaque instant »[337]. Comme nous le montre

[334] Euler, *Ibid.* note 329, art. XXIV, p. 328-329.

[335] Euler, *Ibid.* note 329, art. XXV, p. 329.

[336] Euler, *Ibid.* note 329, art. XXVI, p. 330.

[337] D'Alembert, *Traité des fluides*, Paris, 1770, Avertissement, p. 214.

sa correspondance avec Lagrange, il s'attèle à sa formulation théorique dans le courant de l'année 1771, année dont les premiers mois, rappelons-le, se trouvent marqués par une vive querelle entre Borda et Bossut à la suite de la présentation, par ce dernier, de son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* devant l'Académie des sciences de Paris. Sa nouvelle méthode de mise en équation des écoulements, fondée sur cette hypothèse des tuyaux variables, paraît finalement en 1773, dans le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI.

D'Alembert y part d'abord du postulat selon lequel[338]

> « la surface supérieure d'un Fluide qui se meut dans un Vase, demeur[e] toujours sensiblement horizontale »

Il propose ensuite (voir la Fig. XV)[339]

> « d'imaginer un tuyau infiniment étroit, $ABOo$ (...), lequel tuyau $ABOo$ devienne dans l'instant suivant une autre figure, comme $ab\gamma id$ ».

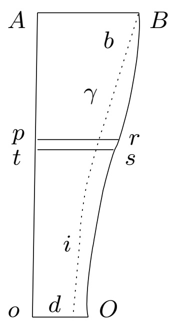


Fig. XIV – Tuyau curviligne de figure $ABOo$ à l'instant t et de figure $ABb\gamma ido$ à l'instant $t + dt$.

Soit un élément de fluide quelconque, assimilable à une tranche et perpendiculaire aux parois de ce tuyau, soient y et $v = \dfrac{um}{y}$ ses section et vitesse à l'instant t de l'écoulement, avec m et u les section et vitesse d'une tranche de référence dans le tuyau, la méthode de D'Alembert consiste à considérer qu'au bout de l'intervalle de temps dt, les sections m et y de ces tranches de fluide deviennent respectivement $m + \delta m$ et $y + \delta y + dy$:

– δm désigne la variation de la section m de la tranche de référence — fixe dans l'espace, par définition — à hauteur constante dans le vase, c'est-à-dire sa variation en fonction du temps t ;
– δy désigne la variation de y à x constante, c'est-à-dire sa variation en fonction du temps t, dy sa variation consécutive à l'avancée de la tranche dans le vase de section variable, c'est-à-dire sa variation dans le cas stationnaire.

[338] D'Alembert, *Opuscules* t. VI, Paris, 1773, Mémoire 51 § IV, art. 4, p. 380-381.
[339] D'Alembert, *Ibid.* note 338.

Partant de là, il procède à la différentiation de la vitesse v en fonction des trois variables u, m et y, ce qui le conduit à l'expression suivante de l'incrément de vitesse dv acquis par la tranche correspondante à l'instant $t + dt$ de l'écoulement :

$$dv = \frac{mdu}{y} + \frac{u\delta m}{y} - \frac{umdy}{y^2} - \frac{um\delta y}{y^2}. \tag{14}$$

En injectant cette expression dans l'équation

$$\int_A^o \left(g - \frac{dv}{dt} \right) dx = 0$$

décrivant, selon sa théorie, le mouvement du fluide à l'intérieur d'un tel tuyau — voir le chapitre II —, il parvient à

$$\frac{m^2udu}{kdx} \int_A^o \frac{dx}{y} + \frac{u^2m\delta m}{kdx} \int_A^o \frac{dx}{y} - m^2u^2 \int_A^o \frac{dy}{y^3} - \frac{m^2u^2}{kdx} \int_A^o \frac{dx\delta y}{y^2} = \int_A^o gdx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{K^2}{k^2} \int_A^o \frac{kdx}{y} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) + \left(1 - \frac{K^2}{k^2} \right) \frac{u^2}{2g} - \frac{K^2u^2}{kdx} \int_A^o \frac{dx\delta y}{y^2} = x, \tag{15}$$

après avoir posé $\delta m = 0$ puis $m = K$, de telle sorte que u corresponde à la vitesse de la tranche inférieure.

Il s'agit là, selon D'Alembert, de l'équation du mouvement de la tranche inférieure dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes de forme variable.

D'un point de vue mathématique, la traduction, par D'Alembert, de la variation de la figure des canaux curvilignes au cours du temps procède de l'emploi du calcul aux différences partielles, et se situe donc, comme nous venons de l'expliquer, dans la continuité de l'approche, intermédiaire entre l'analytique et l'unidimensionnel, développée dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761). La prise en compte des variations de la section y à x et t constants, telle qu'elle se voit introduite dans le Mémoire 51 § IV, équivaudrait en effet, en termes modernes, à considérer les quantités δy et dy comme les coefficients différentiels partiels résultant de la différentiation de y en fonction de x et t, de telle sorte que

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial t} dt$$

et

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Supprimer la dépendance temporelle de la section y du tuyau revient ainsi à travailler sur une fonction de la seule variable x. L'incrément de vitesse dv, donné par la formule (14) dans le cas variable, s'écrit alors

$$dv = \frac{mdu}{y} - \frac{umdy}{y^2}.$$

Son injection dans l'équation

$$\int \left(g - \frac{dv}{dt} \right) dx = 0$$

conduit logiquement à l'équation (11) obtenue par Borda dans le cadre de l'hypothèse des tuyaux invariables.

D'un point de vue physique, la formulation de cette nouvelle hypothèse montre que D'Alembert a conscience qu'un écoulement instationnaire ne peut être décrit en assimilant le fluide à un solide déformable. Toutefois, la lecture du Mémoire 57 § IX des *Opuscules* t. VIII (1780), dans lequel le savant procède à son application, laisse à penser que son principal objectif est surtout de contester différents points de la théorie proposée par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement ».

Le premier d'entre eux est la théorie des pertes de forces vives, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre VII. Le second concerne la valeur théorique de la vitesse d'un fluide au sortir d'un vase : il constitue une question cruciale du point de vue de la concordance entre la théorie et l'expérience. Dans le Mémoire 57, D'Alembert aborde ce problème dans l'hypothèse des tuyaux invariables, variables, et dans celle du parallélisme des tranches : les § I à V, le § VI, le § VIII et le § IX leur sont consacrés. Compte tenu de la présence simultanée de ces trois cadres d'étude distincts, il convient donc d'abord de se faire une idée de leurs différences et de leurs singularités théoriques respectives vis-à-vis de la question générale de l'écoulement dans un vase de section variable, percé d'un orifice en son fond. Nous verrons ensuite dans quelle mesure elles permettent de répondre aux enjeux de la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

2. Les hypothèses des tuyaux curvilignes et les enjeux théoriques de la crise de l'hydrodynamique des années 1770

Comparaison des trois hypothèses : parallélisme des tranches, tuyaux curvilignes variables et invariables

Comparer les trois hypothèses à la disposition des savants dans le cadre d'une approche théorique unidimensionnelle des écoulements nécessite de revenir à la première d'entre elles, celle du parallélisme des tranches.

Dans l'*Hydrodynamique* et la première édition du *Traité des Fluides* (1744), D. Bernoulli et D'Alembert procèdent, grâce à elle, à la mise en équation du mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un vase de section variable, le premier par le biais du principe de conservation des forces vives, le second en employant son principe de la dynamique. Ils parviennent tous deux à la même équation, à savoir[340]

$$\frac{K^2}{k^2}\int\frac{kdx}{y}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)+\left(1-\frac{K^2}{k^2}\right)\frac{u^2}{2g}=x, \tag{16}$$

dans laquelle u désigne la vitesse de la tranche inférieure de fluide.

La comparaison de cette dernière équation (16) avec celle (11) de Borda dans le « Mémoire sur l'écoulement » et celle (15) de D'Alembert dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 § IX, montre que, quelle que soit l'hypothèse employée, le résultat obtenu est de la forme

$$\Phi+\left(1-\frac{K^2}{k^2}\right)\frac{u^2}{2g}=x. \tag{17}$$

Dans le cas du parallélisme des tranches, le terme Φ vaut

$$\Phi(x,k,K)=\frac{K^2}{k^2}\int\frac{kdx}{y}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right),$$

l'intégrale s'appliquant au volume total de fluide dans le vase — y désigne donc ici la section du vase à la hauteur x. Dans l'hypothèse des tuyaux invariables, il vaut

$$\Phi(x,k,K)=\frac{K^2}{k^2}\int\frac{\alpha ds}{y}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right),$$

l'intégrale s'appliquant au volume de fluide s'écoulant dans l'un quelconque des tuyaux curvilignes — s, y et α désignent respectivement l'abscisse curviligne, la section à la hauteur x et la section supérieure de ce tuyau. Dans celle des tuyaux variables, il correspond à la somme de deux quantités : la première, Φ_x, correspond au terme Φ dans l'hypothèse des tuyaux invariables, la seconde Φ_t dépend du temps t — de part la présence du terme δy — et vaut

$$\Phi_t(t,x,k,K)=-\frac{K^2u^2}{kdx}\int\frac{dx\delta y}{y^2}.$$

L'équation (13) obtenue par Euler ne décrit pas, quant à elle, l'écoulement d'un volume de fluide délimité par deux surfaces libres comme chez D. Bernoulli, D'Alembert et Borda, mais celui d'un volume indéfini de fluide à l'intérieur d'un canal infiniment étroit de longueur infinie — nous ferons donc abstraction du terme de pression $\frac{p}{g}$. Elle n'en conduit pas moins, cependant, en plus du terme en $\frac{u^2}{2g}$ et du terme x, à une somme de deux quantités : la première Φ_t, apparaissant sous la forme de la constante $C(t)$, dépend du temps t, la seconde, Φ_x, s'écrit

$$\Phi_x(k,K)=\frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)\int\frac{mds}{y},$$

[340] Cf. D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, sect. III, § 6, p. 33 ; D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 105, p. 88.

avec s l'abscisse curviligne, y une section quelconque du tuyau et m la section au niveau de laquelle le fluide s'écoule avec la vitesse u.

Si nous appliquions l'actuel *théorème de Bernoulli* le long d'une ligne de courant reliant les surfaces supérieure et inférieure du fluide, nous obtiendrions, quant à nous, l'équation

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \left(1 - \frac{K^2}{k^2}\right)\frac{u^2}{2g} = x, \tag{18}$$

pour peu que l'écoulement puisse être supposé incompressible et irrotationnel. Le terme $\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$ caractérise un écoulement instationnaire. Il est respectivement nul et négligeable dans le cas d'un écoulement stationnaire ou quasi-stationnaire — c'est-à-dire dans lequel les variables caractéristiques du mouvement évoluent suffisamment lentement au cours du temps pour ne pas en dépendre.

Compte tenu du fait que la forme des canaux curvilignes dépend explicitement du temps dans l'hypothèse des tuyaux variables, la quantité Φ_t obtenue par D'Alembert dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 § IX correspond donc à un équivalent de ce terme $\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$.

Dans son mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides », Euler obtient, quant à lui, une constante d'intégration dont il est conscient qu'elle peut dépendre du temps : son terme $C(t)$ correspond donc de même à un équivalent de la quantité $\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$.

Dans ces deux cas de figure, D'Alembert et Euler mettent ainsi le doigt sur ce que nous appelerions aujourd'hui le *terme instationnaire* de l'*équation de Bernoulli*.

La quantité Φ — ou celle Φ_x vérifiant $\Phi = \Phi_x + \Phi_t$ —, constitue, quant à elle, un problème plus délicat.

Quelle que soit l'hypothèse adoptée, D. Bernoulli, D'Alembert ou Borda considèrent en fait le fluide comme un empilement de solides déformables, les tranches : celles-ci s'étendent sur la totalité de la largeur du vase dans le cas de parallélisme des tranches, ou sur la largeur d'un tuyau curviligne infiniment étroit dans les deux autres cas de figure. Cette façon de concevoir le mouvement du fluide les contraint à tenir compte du chemin dx (ou ds) parcouru par ces tranches entre deux instants t et $t + dt$, et donc de l'évolution de v en fonction du temps t.

Lorsque, dans son processus de mise en équation du problème par le principe de la dynamique, D'Alembert différentie la vitesse v, c'est effectivement, même si c'est implicite, en fonction de t. Il obtient, pour preuve, dans le cadre des hypothèses du parallélisme des tranches et des tuyaux invariables, la relation

$$dv = d\left(\frac{mu}{y}\right) = \frac{mdu}{y} - \frac{umdy}{y^2},$$

dont le terme faisant intervenir l'incrément de vitesse du, une fois injecté et intégré dans l'équation $\int \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$ conduit justement à la quantité Φ — l'autre terme menant à $\left(1 - \frac{K^2}{k^2}\right) \frac{u^2}{2g}$.

L'application du principe de conservation des forces vives passe de même par la différentiation de Nu^2, de telle sorte que

$$d(Nu^2) = Nudu + u^2dN.$$

Le premier terme $Nudu$ conduit, de la même façon, à la quantité

$$\Phi(x, k, K) = \frac{K^2}{k^2} \int \frac{kdx}{y} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g}\right)$$

dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, avec, rappelons-le, $N = \int \frac{dx}{y}$.

Φ correspond ainsi à l'intégrale des « progressions » de chaque tranche, entre deux instants du mouvement, à l'intérieur du vase ou du canal curviligne considéré. C'est d'ailleurs là l'expression employée par J. Bernoulli qui, dans son *Hydraulique* (1742), interprète le calcul de Φ en terme de « progression instantanée » (« progressum momentaneum ») ou de « distance parcourue » (« progressu actuali »)[341] par chaque tranche au sein de la conduite d'écoulement.

Cette dépendance de Φ, ou de Φ_x, par rapport à la variable temporelle est nettement plus explicite dans le mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides » d'Euler. Sa méthode, qui revient à se restreindre à l'hypothèse du parallélisme des tranches à l'intérieur du canal considéré[342], le conduit en effet à un terme

$$\Phi_x(k, K) = \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dt}\right) \int \frac{mds}{y},$$

dans lequel nous retrouvons la quantité $N = \int \frac{mds}{y}$ propre à l'hypothèse des tuyaux invariables et nous voyons apparaître $\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)$ sous la forme $\frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)$. Ces deux derniers termes n'en sont pas moins équivalents : il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que $dt = \frac{dx}{u}$, de telle sorte que

$$\frac{1}{g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{1}{g} \times \frac{udu}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right).$$

Le terme Φ, ou Φ_x, dépend donc de la variable temporelle t.

Précisons par ailleurs que le parallélisme des tranches et l'approximation des tuyaux

[341] J. Bernoulli, *Hydraulique*, *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1742, Partie 2, art. III, p. 434.

[342] Dans le mémoire, Euler précise en effet *a posteriori* s'être « fondé sur cette hypothese, que par toute l'étendüe de chaque section horizontale du vaisseau [canal] l'eau ait le même mouvement » (*HAB* année 1755 (1757), art. XXVII, p. 330).

invariables consistent respectivement à travailler sur des tranches ou des tuyaux curvilignes dont la forme ne varie pas au cours du temps. Φ, ou Φ_x, correspond par conséquent à l'équivalent d'un terme quasi-stationnaire dans l'*équation de Bernoulli.* Nous l'écririons, comme nous l'expliquions ci-dessus, $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$ et il vérifierait $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} \simeq 0$, ce qui équivaut à affirmer que le mouvement varie suffisamment lentement par rapport au temps t pour que l'influence de cette dernière variable puisse être négligée. Dans l'hypothèse du parallélisme des tranches et des tuyaux invariables, les termes du type $\Phi(x,k,K)$ doivent donc être nuls ou suffisamment petits par rapport à l'autre terme $\left(1-\frac{k^2}{K^2}\right)\frac{u^2}{2g}$ dans les équations (16) et (11) pour que les conditions d'application de l'actuelle loi de Bernoulli coïncident avec l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement. Il en sera de même de Φ_x dans l'hypothèse des tuyaux variables de D'Alembert et dans le cadre d'étude d'Euler dans son mémoire « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides », c'est-à-dire dans les équations (13) et (15), si ce n'est qu'il subsistera les termes non-stationnaires $C(t)$ et $\Phi_t(t,x,k,K) = -\frac{K^2u^2}{kdx}\int\frac{dx\delta y}{y^2}$.

Les hypothèses des tuyaux curvilignes et la question de la concordance entre théorie et expérience

Naturellement, les savants de l'époque considèrent différemment le problème. Ils ne sont toutefois pas moins conscients de son enjeu.

Ils disposent en effet d'un résultat confirmé par l'expérience et admis de tous, selon lequel la vitesse du fluide s'échappant d'un petit orifice percé au fond d'un vase cylindrique est due au poids de la hauteur x de fluide les surplombant, c'est-à-dire vérifie $u = \sqrt{2gx}$[343]. Cette valeur correspond justement à la solution donnée par le théorème de Bernoulli dans le cas quasi-stationnaire $\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} \simeq 0\right)$. Elle correspond également à la solution des équations (16) et (15), pour peu que Φ puisse être supposé négligeable. Ce terme devient donc, à cette époque, un critère d'évaluation de la validité de l'hypothèse employée. C'est là le principal objectif de la représentation de l'écoulement adoptée par Borda qui, à l'issue de la mise en équation du mouvement dans ses tuyaux curvilignes, conclut que pour[344] :

> « déterminer par la solution générale la vitesse du fluide à sa sortie du vase, il

[343] Rappelons qu'il s'agit de la *loi de Torricelli* énoncée par le savant italien du même nom dans son *De Motu Aquarum* publié à Florence en 1644, lequel fait partie du Livre II du traité intitulé *De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum libri duo.* Voir, pour plus de détails, M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007.

[344] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 5, p. 584-585. Les crochets indiquent que les notations des expressions qu'ils renferment ont été modifiées afin de faciliter l'intelligibilité de l'extrait : voir, pour le détail de ces modifications, la note 327.

> faudroit connoître la quantité $\left[\int \frac{\alpha dx}{y}\right]$, c'est-à-dire le mouvement des molécules contenues dans le vase, mais c'est à quoi les Géomètres n'ont encore pu parvenir : ainsi la solution que nous avons donnée est encore très-incomplète, & on ne peut la regarder comme exacte que dans le cas où le terme $\left[\frac{K^2}{k^2}\int \frac{\alpha dx}{y} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)\right]$ peut être négligé, c'est-à-dire lorsque l'orifice [inférieur] est fort petit, eu égard à la capacité du vase ».

Dans le Mémoire 57 § V, D'Alembert explique de même que, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, « la détermination de la vitesse du fluide, dépend de la quantité $\int \frac{dx}{y}$ »[345], c'est-à-dire du terme $\frac{K^2}{k}\int \frac{dx}{y} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)$.

Dans l'étude du mouvement d'un fluide dans un vase percé d'un orifice en son fond, sa démarche et celle de Borda consistent donc finalement, en termes actuels, à évaluer et combler l'écart existant entre leurs hypothèses et la solution idéale donnée par l'application de l'actuel théorème de Bernoulli dans le cas stationnaire. Ils se restreignent, pour ce faire, au cas d'un orifice inférieur de section suffisamment petite pour que le terme Φ puisse être négligé, ce qui revient à considérer ce que nous appelons un *écoulement de Torricelli.*

Dans le Mémoire 57 § IX, D'Alembert travaille dans un contexte théorique différent. Comme nous le notions à l'instant, son hypothèse des tuyaux variables le conduit effectivement à l'apparition d'un autre terme,

$$\Phi_t = -\frac{K^2u^2}{kdx}\int \frac{dx\delta y}{y^2},$$

traduisant, dans le langage moderne, le caractère instationnaire de son nouveau cadre d'étude. Celui-ci, comme nous le savons de nos jours, n'a pas vocation à disparaître, et c'est bien là le sens du constat de D'Alembert, qui affirme qu'il[346]

> « résulte d'abord de cette supposition que la vitesse du fluide à la sortie d'un vase ordinaire percé d'une petite ouverture, peut n'être pas exactement $\left[\sqrt{2gx}\right]$ ».

Partant de son équation du mouvement dans cette hypothèse, à savoir

$$\frac{m^2udu}{kdx}\int \frac{dx}{y} + \frac{u^2m\delta m}{kdx}\int \frac{dx}{y} - m^2u^2\int \frac{dy}{y^3} - \frac{m^2u^2}{kdx}\int \frac{dx\delta y}{y^2} = \int gdx,$$

ou

$$\frac{K^2udu}{kdx}\int \frac{dx}{y} - K^2u^2\int \frac{dy}{y^3} - \frac{K^2u^2}{kdx}\int \frac{dx\delta y}{y^2} = \int gdx,$$

avec $m = K$ et $\delta m = 0$ — de telle sorte que u corresponde à la vitesse de la tranche inférieure du fluide —, puis se restreignant à l'étude d'un vase percé d'un orifice de

[345] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § V, art. 1, p. 80.

[346] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § IX, art. 2, p. 151.

section négligeable, de telle sorte que $K \ll k$ et

$$-K^2u^2 \int \frac{dy}{y^3} = K^2 \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{k^2}\right) \frac{u^2}{2} \simeq \frac{u^2}{2},$$

D'Alembert obtient

$$\int gdx = \frac{u^2}{2} - \frac{K^2u^2}{kdx} \int \frac{dx\delta y}{y^2},$$

c'est-à-dire

$$u^2 = 2gx + \frac{2K^2u^2}{kdx} \int \frac{dx\delta y}{y^2}.$$

Cette valeur, qui correspond au carré de la vitesse du fluide au sortir d'un vase « percé d'une très-petite ouverture »[347], D'Alembert s'attache donc à montrer qu'elle est « est sensiblement égal[e] à [$2gx$] »[348]. Il cherche ainsi à s'assurer que sa méthode, ici restreinte à l'étude d'un écoulement stationnaire compte tenu de la très petite taille de l'orifice, conduit à la bonne valeur, confirmée par l'expérience, de la vitesse de sortie du fluide.

« Il n'en serait cependant pas de même », précise-t-il, « si le vase étoit de figure très-irrégulière, ou même simplement non-cylindrique »[349], avant d'ajouter, quelques articles plus loin, que la même remarque « s'applique évidemment aux vases submergés dans des fluides ou percés de plusieurs diaphragmes », car le mouvement d'une certaine partie du fluide doit y « être très irrégulier »[350]. Le manque de résultats expérimentaux ne lui permet toutefois pas de trancher la question.

D'Alembert, en somme, réfléchit donc ici sur l'influence de son nouveau terme Φ_t sur les solutions théoriques obtenues à partir des hypothèses du parallélisme et des tuyaux invariables. Il se méprend malheureusement sur sa véritable signification physique, comme nous le verrons en détail dans le chapitre VII, en le présentant comme une quantité supplémentaire permettant de réfuter la théorie des pertes de forces vives de Borda.

Concluons, pour l'heure, que ces différentes hypothèses n'apportent donc rien d'autre qu'un critère permettant d'évaluer leur validité dans un nombre très réduit de problèmes, compte tenu des rares résultats expérimentaux disponibles. Le bilan de ces tentatives d'amélioration de l'approximation fondant l'approche unidimensionnelle des écoulements ne débouche même que sur un unique résultat dont les hydrodynamiciens avaient par ailleurs déjà conscience avant que Borda ne fasse connaître ses recherches en 1766 : la théorie ne s'accorde avec l'expérience que dans le cas d'un vase percé d'un orifice de très petite taille.

---

[347] D'Alembert, *Ibid.* note 346, art. 9, p. 154.

[348] D'Alembert, *Ibid.* note 346, art. 9, p. 154.

[349] D'Alembert, *Ibid.* note 346, art. 10, p. 154.

[350] D'Alembert, *Ibid.* note 346, art. 16, p. 156.

Lorsque D'Alembert, dans la première édition de son *Traité des Fluides* (1744), énonce le résultat concluant son étude du mouvement d'un fluide à l'intérieur un vase de section variable dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, c'est effectivement avec le soin d'apporter cette précision sur la taille de l'orifice inférieur : « *le Fluide* », écrit-il[351],

> « *sort quand l'ouverture est fort petite, avec une vitesse qui est la même que celle qu'il auroit acquise, en tombant d'une hauteur égale à celle de la surface supérieure du Fluide au-dessus de l'ouverture* »,

c'est-à-dire avec la vitesse $\sqrt{2gx}$. Dans l'*Histoire de l'Académie royale des sciences de Paris* pour l'année 1766, l'auteur du compte rendu sur le « Mémoire sur l'écoulement » précise de même que[352]

> « L'équation à laquelle M. de Borda parvient par cette méthode, ne diffère de celle des solutions de M.rs Bernoulli & d'Alembert, que par le seul terme qui est relatif à la quantité de l'ouverture par où s'écoule le fluide (...), mais malgré cette différence, la solution même de M. de Borda ne peut être regardée comme exacte, que lorsque cette ouverture est très-petite ».

Cette limite des solutions théoriques deviendra d'ailleurs un résultat à proprement parler. Il ne s'agira plus de tenter de le dépasser, mais d'affiner le critère correspondant. Dans son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* (1771), l'abbé Charles Bossut s'attaque ainsi à la question par le biais de l'expérience, ce que n'avait pas fait Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement ». Plutôt que de citer directement cet ouvrage, nous préférerons néanmoins donner un extrait, plus significatif du point de vue de la crise de l'hydrodynamique, puisque tiré de l'*Encyclopédie Méthodique. Marine*, c'est-à-dire des trois volumes 160, 161 et 162 de l'*Encyclopédie Méthodique* rassemblant l'état des connaissances destinées, comme son nom l'indique, à l'usage des marins. L'article qui nous intéresse, à savoir l'article « Fluide », entrée « Fluides. (*mouvement des*) »[353], appartient au second de ces trois volumes, publié en 1786. Il est signé par Nicolas-Claude Duval-Leroy (1731-1810), professeur de mathématiques à l'Ecole d'artillerie de Marine de Brest durant une grande partie de sa carrière[354]. Faisant justement référence au *Traité élémentaire d'hydrodynamique*, ce dernier y résume ainsi la question de la détermination de la vitesse du fluide s'échappant d'un vase percé d'un orifice en son fond[355] :

---

351 D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 108, p. 89.

352 *HARS 1766*, 1769, p. 144.

353 *Encyclopédie Méthodique. Marine*, vol. 2, 1786, art. « Fluide », entrée « Fluides. (*mouvement des*) », signé *(Y)* — il s'agit de la signature de Duval-Leroy dans cet ouvrage —, p. 328-340.

354 Son nom reste aujourd'hui associé à la traduction française du *Traité d'optique* de R. Smith, publiée en 1767

355 *Ibid.* note 353, p. 329.

> « la vîtesse d'un *fluide* qui s'échappe d'un vase par un orifice infiniment petit, est la même que celle qu'acquerroit un corps pesant, en tombant d'une hauteur égale à celle du *fluide* au-dessus de l'orifice.
>
> Tout ce qu'on vient de voir est encore vrai dans les cas des orifices horizontaux de grandeur finie, pourvu qu'ils n'excèdent pas la vingtième partie d'une section du vase. Car, suivant M. l'abbé Bossut, la vîtesse du *fluide*, est sensiblement la même que si cet orifice étoit infiniment petit ».

Il poursuit quelques lignes plus loin, en affirmant que[356] :

> « Si la grandeur des orifices passe la limite assignée ci-dessus, on ne peut plus supposer que la vîtesse de l'écoulement est due à la hauteur du *fluide* au-dessus de l'orifice, & par conséquent la détermination précédente devient fautive. Il devient alors difficile de trouver la vîtesse avec laquelle le *fluide* s'échappe ».

Si Duval-Leroy fait longuement mention de la méthode de mise en équation de l'écoulement dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, il ne dit par ailleurs aucun mot de l'hypothèse des tuyaux invariables de Borda, ou de celle des tuyaux variables du Mémoires 51 § IV, et du Mémoire 57 des *Opuscules* de D'Alembert — qu'il n'a très certainement jamais lus.

Ces deux nouvelles approximations n'apportent ainsi aucun progrès vis-à-vis de la question de la concordance entre théorie et expérience. Elles ne constituent pas même un moyen d'affiner leurs expressions théoriques des vitesses d'écoulement. Il aurait effectivement fallu, pour ce faire, que les savants soient en mesure de calculer le terme Φ, c'est-à-dire les intégrales $\int \frac{\alpha ds}{y}$ et $\int \frac{dx\delta y}{y^2}$, ce qui suppose de connaître l'équation $y(x)$ des parois du canal curviligne correspondant. Cette question constituait déjà un problème dans le cas de l'hypothèse du parallélisme des tranches, puisque le terme Φ fait de même intervenir une quantité $\int \frac{dx}{y}$ indéterminable sans l'équation $y(x)$ des parois du vase étudié.

Il s'agit, en somme, d'une nouvelle impasse théorique. L'application, par D'Alembert, des outils mathématiques employés dans le cadre de son approche analytique des écoulements, lui permettent bien de définir ce que nous appellerions des tubes de courant stationnaires, de mettre le doigt sur le décalage existant entre ces tubes stationnaires et les trajectoires du fluide dans le cas instationnaire. Ces innovations n'apportent néanmoins aucun progrès décisif dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

La mise en équation dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes proposée par Borda se révèle aussi infructueuse. Censée, de l'aveu de l'auteur, constituer une approximation « plus vraisemblable »[357] car plus proche des trajectoires dans les parties « voisines de

[356] *Ibid.* note 353, p. 329.

[357] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 1, p. 580.

l'orifice »[358], elle ne permet pas de lever « la grande incertitude de cette partie de la théorie des fluides »[359].

Borda ne propose pas moins, dans le même écrit, une véritable petite révolution en hydrodynamique : en abordant avec succès, tant du point de vue théorique qu'expérimental, la question de la prise en compte du rapport de contraction de la veine pour certains types d'ajutage, il résout en effet l'une des principales difficultés posées par la détermination de la vitesse d'un fluide au sortir d'un vase percé d'un orifice.

Il adresse, dans le même temps, deux critiques directes à l'encontre des résultats de D. Bernoulli et de D'Alembert dans l'*Hydrodynamique* et le *Traité des fluides*, concernant la valeur, au commencement du mouvement, de la force accélératrice animant les surfaces supérieure et inférieure d'un fluide s'écoulant à l'intérieur d'un vase cylindrique percé d'une ouverture en son fond. Ces critiques, associées à sa volonté de franchir l'obstacle théorique résultant de ses recherches sur l'hypothèse des tuyaux curvilignes, pousseront D'Alembert vers un réexamen complet de sa théorie unidimensionnelle de 1744 pour ce problème dans les § I à V, la première partie du § VII — la seconde étant intégralement dédiée, rappelons-le, au prolongement de ses travaux dans le cadre de l'approche analytique : voir le chapitre IV —, ainsi que le § VIII du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII. Il revient également, motivé par les progrès accomplis par Borda, sur la question de la contraction de la veine dans le § VI du mémoire.

Nous traiterons ainsi, dans le chapitre suivant, des différentes facettes de sa théorie pour l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Nous serons, ce faisant, à même d'étudier certaines notions déjà présentes dans son traité de 1744 : la ténacité et l'adhérence du fluide, sa théorie des « parties stagnantes », les premiers instants d'un écoulement. Leur examen dans ce contexte de polémique avec Borda nous permettra de donner un premier état des lieux concernant sa façon de concevoir, physiquement, le comportement d'un fluide en mouvement. Ce premier panorama sera ensuite complété, dans les chapitres VII et VIII, par l'étude du statut de la loi leibnizienne de continuité et du principe de conservation des forces vives ainsi que par l'examen de la définition du concept de pression dans les deux éditions de son *Traité des fluides* et le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VIII.

---

[358] Borda, *Ibid.* note 357.

[359] Borda, *Ibid.* note 357, p. 579.

Chapitre VI. LE PROBLÉME DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DANS UN VASE CYLINDRIQUE PERCÉ D'UN ORIFICE EN SON FOND

Le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) de D'Alembert est, pour une large part, consacré à l'étude unidimensionnelle du mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. L'une des raisons de son retour, pour le moins conséquent, sur cette question, tient aux critiques adressées par Borda contre la première édition de son *Traité des fluides* (1744). Ce dernier parvient en effet, dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes, à des résultats différents de ceux de son prédécesseur pour ce qui concerne la force accélératrice animant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans les premiers instants du mouvement — voir le chapitre III, p. 87. D'Alembert donne ses premiers éléments de réponse dans la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770). Il ne se contente pas de rétorquer point par point aux remarques de son contradicteur, mais propose de nouvelles méthodes pour aboutir sur cette question. Certaines d'entre elles sont totalement nouvelles, d'autres constituent des extensions d'idées déjà présentes dans la première édition de l'ouvrage. L'essentiel tient sous la forme de deux ajouts aux art. 109 et 112 de son traité de 1744. C'est a priori peu de choses, six pages au total : six pages dont il sera toutefois fort difficile de se passer pour aborder les travaux du Mémoire 57, qui en constitue un prolongement direct. En d'autres termes, les réponses théoriques du savant de 1780 datent, sur le fond, de la période de rédaction des ajouts de la seconde édition du *Traité des fluides*, c'est-à-dire de la tranche d'années 1766-1770.

Les critiques de Borda à l'encontre de ses résultats de 1744 ne constituent toutefois pas la raison principale de son retour sur le problème. Elles motivent sans aucun doute la défense de sa théorie et correspondent à un fil conducteur dans les différents paragraphes du Mémoire 57 dédiés à la question, à savoir les § I à V, la première moitié du § VII et le § VIII. Il n'en reste pas moins que les axes de recherche développés par D'Alembert dans le cadre de cette polémique correspondent avant tout à des sauf-conduits consécutifs à l'échec des différentes versions de l'hypothèse des tuyaux curvilignes pour ce qui est de la conciliation entre théorie et expérience. Désireux de se sortir de cette nouvelle impasse, le savant propose en effet deux échappatoires.

Le premier consiste en la définition d'une nouvelle hypothèse intermédiaire entre celle du parallélisme des tranches et celle des tuyaux invariables. Il s'agit, plus précisément, de justifier l'existence de parties stagnantes de fluide au fond du vase en partant de la seconde approximation, puis d'utiliser les contours de ces parties afin de définir un vase fictif à l'intérieur duquel restreindre le parallélisme des tranches.

Le second consiste à étudier le problème aux « premiers instants » de l'écoulement, ce qui présente notamment l'avantage de garantir l'horizontalité de la surface supérieure, et par là-même, la crédibilité de son hypothèse intermédiaire.

L'étude de ces deux principaux aspects de ses recherches dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) ne débouchera pas directement sur la mise en avant d'une thèse générale sur le traitement de ce problème par D'Alembert, ou sur sa conception physique d'un tel écoulement. Nous aurons effectivement besoin, pour ce faire, de procéder à l'examen du statut de la loi de continuité, des conditions d'application du principe de conservation des forces vives, et du concept de pression — ces deux questions seront respectivement traitées dans les chapitres VII et VIII. Nous aurons, en revanche, l'occasion d'aborder l'étude de notions importantes dans sa théorie des écoulements passées sous silence par l'historiographie. Son premier axe théorique, celui des parties stagnantes, nous incitera à examiner le concept, plutôt obscur dans la première édition du *Traité des fluides*, de « ténacité et d'adhérence des particules de fluide entre elles », à prendre conscience de son importance vis-à-vis de sa façon de représenter le comportement physique d'un fluide dans le cas unidimensionnel. Le second nous permettra de montrer que ces premiers instants de l'écoulement correspondent à ce que nous appellerions aujourd'hui la *phase transitoire* du mouvement. Compte tenu du fait que ces deux aspects de ses recherches sur le problème du vase cylindrique s'inscrivent dans le cadre de la polémique l'opposant à Borda, nous les traiterons, cela va sans dire, également sous cet angle.

Nous verrons, dans le même temps, que les expériences rapportées par Bossut dans le *Traité élémentaire d'hydrodynamique* (1771) constituent une référence sur laquelle D'Alembert s'appuie constamment, et souvent de façon implicite, pour justifier ses idées théoriques et répondre aux critiques de Borda. Nous terminerons d'ailleurs ce chapitre en évoquant la question de la contraction de veine. Cette question revêt une importance capitale pour ce qui touche à la concordance entre théorie et expérience dans le problème de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice. Elle nous permettra donc d'enrichir notre panorama sur les différents aspects de ce problème, tels qu'ils apparaissent à cette époque. La comparaison entre l'admirable travail de Borda sur le sujet dans le « Mémoire sur l'écoulement » et la faiblesse des recherches de D'Alembert données dans le § VI du Mémoire 57 illustrera, d'autre part, le fossé séparant les deux hommes du point de vue de leurs approches respectives de l'hydrodynamique. Nous mettrons ainsi en exergue l'approche purement théorique de D'Alembert et celle théorico-expérimentale de Borda, un mérite, dans cette période de crise de l'hydrodynamique, que ce dernier partage avec Bossut.

1. L'hypothèse des « parties stagnantes »

De l'hypothèse des tuyaux curvilignes invariables à celle des « parties stagnantes » de fluide

Dans l'« Avertissement » concluant la partie, dédiée aux écoulements, de la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770), D'Alembert revient sur l'impasse théorique évoquée dans le chapitre précédent, c'est-à-dire la difficulté inhérente à la formation d'une[360]

> « hypothèse qui représente, au moins d'une maniere approchée, le mouvement des différens filets du Fluide, & la figure de ces filets ».

Il évoque, dans la foulée, un autre embarras lié à la définition de ces canaux curvilignes : le problème sera « d'autant plus difficile », explique-t-il[361],

> « qu'il est vraisemblable que la figure de ces filets ne s'assujettit pas, au moins dans tous les cas, à la figure du vase, & qu'il y a une partie du Fluide qui à chaque instant reste à peu près stagnante, ou dont le mouvement est beaucoup plus lent que celui du reste de la masse, & fort irrégulier, tant dans sa quantité que dans sa direction ».

Cette remarque s'adresse en fait implicitement à Borda, dont la mise en équation du problème de l'écoulement dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond repose sur l'hypothèse des canaux curvilignes. Elle correspond en effet au septième et dernier des points de désaccord énumérés dans sa lettre à Lagrange du 6 février 1772[362] :

> « 7°. Ces canaux ont d'ailleurs un autre inconvénient : c'est de rendre *stagnante* une partie considérable du fluide, autre supposition dont on peut aisément démontrer l'impossibilité ».

La teneur de l'objection de D'Alembert est en fait assez simple. Compte tenu du fait que les canaux curvilignes relient les surfaces supérieure AB et inférieure EF du fluide (voir la Fig. XV), ceux contigus aux parois latérales AQ et BN du vase, contourneront nécessairement les deux portions de fluide QCE et FND afin de rejoindre l'orifice : ces deux portions seront donc stagnantes.

Sa stratégie sur ce point est tout aussi claire : il suffira de démontrer l'impossibilité de l'existence de ces parties de fluide au repos au fond du vase pour réfuter l'hypothèse des tuyaux variables de Borda. Pour autant, cette démonstration ne s'avèrera pas aussi simple ni aussi concluante que prévu. Elle l'incitera, à terme, à travailler dans une nouvelle hypothèse unidimensionnelle justement fondée sur l'existence de ces parties de fluide. Voyons donc précisément en quoi elle consiste.

[360] D'Alembert, *Traité des fluides*, 2$^{\text{nde}}$ édition, Paris, 1770, Avertissement, p. 213.

[361] D'Alembert, *Ibid.* note 360.

[362] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 100, p. 228.

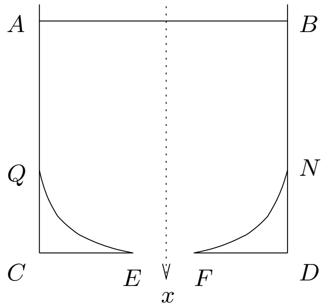


Fig. XV – Ecoulement, avec apparition de parties stagnantes QCE et FND, d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond.

D'Alembert y consacre l'intégralité du Mémoire 57 § I. Son raisonnement comprend trois étapes.

La première, occupant les art. 1 à 12, consiste à prouver qu'il est[363]

> « impossible qu'aucune portion de fluide, quelque petite qu'on veuille la supposer, reste au repos au premier instant [du mouvement] ».

Cette notion de « premier instant du mouvement », nous y reviendrons plus longuement par la suite, présente un avantage essentiel, celui de garantir l'horizontalité de la surface supérieure du fluide, horizontalité sur laquelle repose aussi bien l'hypothèse du parallélisme des tranches que celles des tuyaux curvilignes. Pour ce qui concerne la preuve proprement dite, D'Alembert raisonne par l'absurde. Dans l'hypothèse où la portion de fluide NFD se trouve au repos, il montre d'abord que les principes de la dynamique et de l'hydrostatique — il s'agit, plus précisément, des principes de la dynamique et de l'équilibre des tuyaux curvilignes : voir le chapitre II, p. 60 et 63 — fondant sa théorie des écoulements impliquent des expressions contradictoires des poids de la colonne ND et du canal NF. Il montre ensuite qu'un canal reliant le point N au point D en restant extérieur à la portion de fluide stagnante ne sera pas en équilibre avec le canal ND, ainsi que l'imposent les deux principes précédents.

La seconde étape, traitée dans les art. 13 à 15, correspond à une simple extension de la proposition aux instants suivant le commencement du mouvement. Le même raisonnement par l'absurde et l'application des mêmes principes le conduisent, dans ce cas, à une valeur négative de la pression s'exerçant au point N, et donc à une contradiction compte tenu de sa définition de cette notion, telle que nous aurons l'occasion d'en rendre compte dans le chapitre VIII.

La troisième étape, correspondant aux trois derniers articles du paragraphe, est de loin la plus intéressante. Dans l'art. 16, D'Alembert précise en effet que les démonstrations qu'il vient de donner[364]

[363] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § I, art. 2, p. 52.

[364] D'Alembert, *Ibid.* note 363, art. 16, p. 59.

> « supposent qu'on fasse abstraction de la ténacité des particules du fluide, de leur adhérence aux parois du vase, & de la résistance causée par le frottement »,

avant de conclure, quelques lignes plus loin, qu'en y ayant égard, il sera néanmoins possible de « supposer qu'il y ait une petite partie du fluide [...] qui soit stagnante »[365]. Ces notions de ténacité, d'adhérence et de résistance causée par le frottement contre les parois du vase correspondent, selon D'Alembert, aux propriétés physiques réelles du fluide. Si leur prise en compte implique l'existence de portions de fluide au repos au fond du vase, c'est donc « qu'il doit y avoir, physiquement parlant, une petite partie [...] stagnante de fluide »[366], tandis que le raisonnement « mathématique » des art. 1 à 15, faisant abstraction de ces propriétés, permettait de démontrer le contraire. D'Alembert termine, de fait, le paragraphe sur un espèce de compromis, selon lequel il sera « permis de supposer cette partie stagnante [...] aussi petite qu'on voudra »[367].

Ce compromis pourra paraître des plus étranges au lecteur moderne. Dans le chapitre précédent, nous expliquions en effet que le savant se restreint, c'est le cas dans les § I à V, VII et VIII du Mémoire 57, à la considération d'un orifice infiniment petit afin de s'assurer de la validité de ses différentes hypothèses unidimensionnelles. Cela revient, en termes modernes, à l'examen d'un écoulement stationnaire ou quasi-stationnaire, cadre d'étude dans lequel les parties dites stagnantes — nous y verrions aujourd'hui des zones tourbillonnaires —, n'ont pas, comme l'on sait, vocation à se former. La démonstration « mathématique » de l'impossibilité des parties stagnantes de D'Alembert, dans le § I du mémoire, n'a donc rien d'incohérent, tout du moins de ce point de vue. Le savant doit cependant composer avec deux autres impératifs. Les expériences, comme nous allons le voir, réalisées par Bossut — et par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique* —, font état d'une courbure des trajectoires du fluide à l'approche de l'orifice. D'Alembert doit également garantir une évolution progressive, ou par degrés infinitésimaux, de la vitesse des tranches inférieures du fluide. La prise en compte de ces parties stagnantes, comme il l'explique dans le § I, devient ainsi un impératif physique qu'il justifie donc logiquement par le biais d'une notion, la ténacité et l'adhérence, renvoyant à sa façon d'appréhender les propriétés physiques réelles du fluide, et qu'il tente par ailleurs de concilier avec la possibilité d'un futur traitement mathématique en les supposant « aussi petite[s] qu'on voudra ».

Dans son *Traité élémentaire d'hydrodynamique* (1771), l'abbé Charles Bossut propose donc une série d'expériences sur le problème de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique. Parmi celles-ci, deux retiennent particulièrement l'attention de D'Alembert dans les recherches qu'il donne sur la question dans le Mémoire 57 — les expériences de Bossut concernant la détermination du rapport de contraction de la veine

[365] D'Alembert, *Ibid.* note 363, art. 16, p. 59.
[366] D'Alembert, *Ibid.* note 363, art. 18, p. 60.
[367] D'Alembert, *Ibid.* note 363, art. 18, p. 60.

seront abordées dans la dernière partie de ce chapitre.

La première consiste à observer le mouvement « de corpuscules étrangers, comme de la limaille, des petits morceaux d'ardoise pilée, mélés »[368] dans de l'eau s'écoulant dans un vase cylindrique percé d'un orifice horizontal en son fond. Le vase utilisé par Bossut dans le cadre de cette expérience possède une hauteur de 17 pouces environ, soit 46 cm, un diamètre de 5 pouces $\frac{1}{2}$, soit 15 cm, ainsi qu'une ouverture inférieure d'une section de 4 lignes, soit 9 mm. Compte tenu du rapport entre sa section et celle de son ouverture inférieure, ses dimensions respectent donc l'hypothèse d'un orifice très-petit. Bossut entretient l'écoulement à l'intérieur de ce vase et constate que les petits morceaux d'ardoise pilée « descendent d'abord suivant des directions verticales », puis, une fois parvenus « à la distance de 3 ou 4 pouces du fond »[369] (soit 8,1 ou 10,8 cm),

> « se détournent visiblement de cette direction, & viennent de tous côtés, suivant des mouvements plus ou moins obliques, gagner l'orifice ».

La seconde expérience de Bossut s'intéresse à la question de l'horizontalité de la surface supérieure. Bossut a recours au même vase, mais n'entretient pas l'écoulement. Il remplit donc le vase d'eau jusqu'à la hauteur de 16 pouces, soit 43,3 cm, puis procède à l'ouverture de l'orifice inférieur. Voici son compte-rendu de l'expérience[370] :

> « la surface du fluide en s'abaissant est demeurée horisontale jusqu'à la distance d'environ 6 lignes de l'orifice [soit 13,5 mm]. A cette hauteur, il s'est formé à la surface une espèce de petit *entonnoir* creux, dont la pointe répondoit au centre de l'orifice. La cavité de cet entonnoir s'est agrandie de plus en plus ; & vers la fin de l'écoulement l'eau glissoit sur l'arête de l'orifice en forme de *nappe* ».

D'Alembert fait implicitement référence à ces expériences dans l'art. 17, p. 60, du Mémoire 57 § I, dans l'art. 2, p. 62, du § II, l'art. 2, p. 74 du § IV, ainsi que dans l'art. 1, p. 118, du § VII. Le premier de ces deux résultats avait, par ailleurs, déjà été rapporté par D. Bernoulli qui, dans la section IV de son *Hydrodynamique*, explique en effet que[371]

> « chaque particule descend par un mouvement [...] presque vertical, jusqu'à ce qu'elle arrive près du fond, où elle détourne alors peu à peu sa course vers l'ouverture, de telle sorte que les particules proches du fond s'écoulent par un mouvement presque horizontal. J'ai pu souvent observer de tels mouvements, avec des particules de cire qu'on appelle Hispaniques ».

D'Alembert l'évoque dans l'art. 111 du *Traité des fluides* (1744). Sachant, nous y reviendrons dans un instant, que cet article de sa première théorie des écoulements fait

[368] Bossut, *Traité élémentaire d'hydrodynamique*, Paris, 2$^{\text{nde}}$ édition, 1775, t. II, art. 311, p. 3.

[369] Bossut, *Ibid.* note 368.

[370] Bossut, *Ibid.* note 368, art. 313, p. 3-4.

[371] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, sect. IV, § 3, p. 61.

déjà état de l'idée de prendre en compte les parties stagnantes de fluide, il est donc possible que le savant se réfère également, dans ces différents passages du Mémoire 57, à cette expérience de D. Bernoulli.

Quoiqu'il en soit, une synthèse de ces divers endroits du mémoire consacrés à la question de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond permet de dégager sa propre interprétation des deux résultats. Le premier montre, selon lui, que la surface supérieure du fluide demeure horizontale « jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à une assez petite distance du trou »[372] : elle conserve donc son parallélisme dans les premiers instants du mouvement, ainsi que dans les suivants. Le second confirme son assertion du § I, selon laquelle les parties de fluide stagnantes au fond du vase sont de très petite taille, compte tenu des trajectoires presque horizontales prises par les morceaux d'ardoise pilée à l'approche de l'ouverture. Elle prouve également[373]

> « que les tranches inférieures [...] se meuvent aussi horizontalement jusqu'à une assez petite distance du trou ».

Partant de là, D'Alembert procède à un nouvel examen de l'hypothèse du parallélisme des tranches dans le § IV. Il fait tout d'abord remarquer que Borda, malgré la définition des tuyaux curvilignes, ne conserve pas moins l'hypothèse du parallélisme des tranches supérieure et inférieure du fluide dans son « Mémoire sur l'écoulement », comme l'ont fait « tous les Auteurs [...] qui ont traité jusqu'ici du mouvement des fluides dans des vases »[374]. Il lui semble par conséquent naturel, si l'on suppose l'horizontalité des deux surfaces extrêmes, de « conclure que toutes les tranches [...], ou presque toutes, descendent parallèlement à elles-mêmes »[375]. Il rejette, autrement dit, l'hypothèse des tuyaux curvilignes au profit d'un parallélisme des tranches restreint au vase se terminant « par les courbes presqu'horizontales QE, NF »[376], c'est-à-dire un vase fictif $ABQEFNB$ débarrassé des très petites parties stagnantes QEC et FND (voir la Fig. XVI).

Cette idée n'est pas nouvelle chez D'Alembert, qui en fait effectivement déjà part dans les art. 111 et 112, p. 96-97, de la première édition de son *Traité des fluides* (1744). Compte tenu de la relation $yv =$ Cste garantissant la constance du débit de l'écoulement dans la portion $QEFN$ de ce vase fictif, elle assure une évolution par degrés insensibles, c'est-à-dire conforme à la loi de continuité, de la vitesse des tranches inférieures, et permet donc de répondre à la principale objection de Borda, selon lequel il faudrait, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, que « la tranche qui appuye sur le fond,

---

[372] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § IV, art. 2, p. 74.

[373] D'Alembert, *Ibid.* note 372.

[374] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 2, p. 74-75.

[375] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 3, p. 75.

[376] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 4, p. 75.

changeât brusquement sa figure pour sortir par l'ouverture EF »[377] — les question du rôle de l'hypothèse des parties stagnantes vis-à-vis de la question de la loi de continuité, et de la querelle entre D'Alembert et Borda sur le sujet, seront examinées dans le chapitre VII.

Cette hypothèse du parallélisme des tranches restreinte à un vase fictif n'a par ailleurs aucun sens, explique D'Alembert, si l'on ne tient pas compte d'une « autre force pour maintenir le parallélisme »[378], à savoir « la force intérieure de tenacité ou d'adhérence »[379]. Celle-ci justifie d'une part, comme il l'affirme dans le § I, l'existence physique des parties stagnantes sur laquelle repose la définition de son vase. Elle assurera d'autre part, conformément à son principe de la dynamique, la destruction des forces accélératrices horizontales tendant à faire dévier les particules fluide de leurs trajectoires verticales, de telle sorte que l'hypothèse du parallélisme des tranches puisse être restreinte à l'intérieur du vase $ABQEFNB$. Cette contribution de la force de ténacité et d'adhérence au maintien du parallélisme apparaît déjà de façon explicite dans l'art. 110 de son *Traité des fluides* (1744) : « il faut nécessairement supposer », y écrit-il[380],

> « qu'il y a dans les parties du Fluide quelque force interne qui détruit cette vitesse [à savoir la composante horizontale de la vitesse], comme pourroit être, par exemple la force qui cause l'adhérences des particules entr'elles »

Le parallélisme restreint à un vase fictif repose donc entièrement, dans l'esprit de D'Alembert, sur la notion d'adhérence et de ténacité du fluide.

La ténacité et l'adhérence des particules fluide entre elles

Cette notion, essentielle à la bonne compréhension de la conception physique d'un fluide selon D'Alembert, n'a jamais été mentionnée dans l'historiographie. Elle est pourtant au centre des art. 42 à 55, p. 37-47, de la première édition du *Traité des fluides* (1744), un ouvrage déjà étudié par plusieurs auteurs[381]. Elle est également abordée

---

[377] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 5, p. 75.

[378] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 6, p. 76.

[379] D'Alembert, *Ibid.* note 372, art. 6, p. 77.

[380] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 110, p. 95.

[381] Voir R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, 1950, p. 278-283 ; C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXXVII ; C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer Verlag, New-York, 1968, p. 227 ; I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1979, p. 237-243 ; S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, UNED, Madrid, 1996, p. 471-481 ; O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 6-9.

dans les articles « Adherence ou Adhesion »[382], « Cohesion »[383] et « Fluidité »[384] de l'*Encyclopédie*.

Rappelons tout d'abord que D'Alembert appréhende physiquement la matière solide comme étant composée d'un agrégat de corpuscules, durs, solides et impénétrables tels qu'on ne puisse pas les séparer les uns des autres. Les fluides, explique-t-il dans l'art. « Fluide » de l'*Encyclopédie*, sont de mêmes constitués de particules ayant « les mêmes propriétés que les particules des solides », mais[385]

> « la cause de la fluidité paroît consister en ce que les parties des fluides ont bien moins d'adhérence entr'elles, que n'en ont celles des corps durs ou solides, & que leur mouvement n'est point empêché par l'inégalité de la surface des parties, comme dans un tas de poussiere, de sable, &c. ».

Le niveau d'adhérence mutuelle des particules constitutives de la matière permet donc de distinguer la « fluidité » de la « solidité » : « Fluidité est directement opposée à solidité », explique-t-il en effet dans l'article « Fluidité »[386]. C'est là une définition fort importante aux yeux de D'Alembert, comme en témoigne ce nouvel extrait de l'article « Fluide »[387] :

> « On peut considerer dans les *fluides* quatre choses ; 1°. leur nature ou ce qui constitue la fluidité [...] ; 2°. les lois de leur équilibre ; 3°. celles de leur mouvement ; 4°. celles de leur résistance. ».

Pour ce qui concerne les fluides, l'eau par exemple, D'Alembert distingue dès lors deux types d'adhérence :

- « l'adhérence mutuelle des parties de l'eau entr'elles »,
- et celles des parties de l'eau « aux corps qu'elle touche »[388], c'est-à-dire les parois du vase dans le cas présentement examiné.

La première, l'adhérence des particules entre elles, coïncide avec la notion de tenacité. Elle est attribuée, d'après l'art. 42, p. 37, du *Traité des fluides* (1744) et conformément aux explications de l'art. « Fluide » de l'*Encyclopédie*, à[389]

> « une force qui tient les particules Fluides entre elles, & qui fait qu'elles ne se laissent séparer qu'avec difficulté ».

D'Alembert discute longuement de la nature de cette force, que ce soit dans son traité de 1744 ou dans l'article « Fluide ». Il y hésite entre une force passive, c'est là l'opinion

---

[382] *Encyclopédie*, t. I, 1751, p. 132a, signé *(O)*.

[383] *Encyclopédie*, t. III, 1753, 605b-606a, signé *(O)*.

[384] *Encyclopédie*, t. VI, 1756, 890b-892a, signé *(O)*.

[385] *Encyclopédie*, art. « Fluide », t. VI, 1756, p. 881b, signé *(O)*

[386] *Encyclopédie*, *Ibid.* note 384, p. 890b.

[387] *Encyclopédie*, *Ibid.* note 385.

[388] *Encyclopédie*, art. « Adherence ou Adhesion », *Ibid.* note 382.

[389] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre I, art. 42, p. 37.

des Cartésiens, provenant de l'« aspérité des Particules Fluides qui se touchent »[390], et une force active, c'est là l'opinion des Newtoniens, d'attraction mutuelle, c'est-à-dire « une force agissante qui tende à unir ces particules & à les approcher les unes des autres »[391]. Se réfusant à trancher entre ces deux options, il suggère seulement « qu'il y a bien de l'apparence que les deux causes concourent à la fois »[392].

Pour ce qui est de son effet sur le comportement d'un fluide en mouvement, la force d'adhérence des particules fluides entre elles contribue, selon lui, à « empêcher que l'équilibre du fluide ne se rompe »[393]. En d'autres termes, la notion de ténacité et d'adhérence des particules entre elles se traduit donc par une force de résistance aux mouvements internes permettant le maintien du fluide dans un état d'équilibre hydrostatique. L'adhérence du fluide aux parois correspond, quant à elle, à la force de résistance causée par le frottement : nous vous renvoyons, pour ce qui concerne cette seconde notion, au chapitre VIII — voir p. 262.

Après ce bref exposé, certains lecteurs modernes pourraient être tentés de voir les prémices du concept actuel de *viscosité* dans sa façon de considérer la force d'adhérence des particules fluides entre elles. Les art. 1 à 13 du Mémoire 57 § VII apportent en fait de nouvelles informations permettant de rejeter cette interprétation.

L'objectif implicite, mais non moins central, des treize premiers articles du § VII, n'est rien d'autre que le sixième des points de désaccord énumérés par D'Alembert dans sa lettre à Lagrange du 6 février 1772. « Je crois », écrit-t-il[394],

> « qu'on peut démontrer aisément qu'en supposant, avec le Chevalier de Borda, les petits canaux de la figure seconde, le fluide ne descendrait pas également dans ces petits canaux, et qu'ainsi, contre l'expérience et contre la supposition même de l'auteur, la surface supérieure ne demeurerait pas horizontale ».

Dans le § IV du Mémoire 57, D'Alembert propose, comme nous venons de le voir, une version du parallélisme restreint à un vase cylindrique amputé de ses parties stagnantes, dont la justification théorique se fonde sur la prise en compte de la force d'adhérence des particules du fluide. Dans le § VII, il fait donc *abstraction de cette force* afin de montrer que, dans ce cas, la surface supérieure du fluide ne conserve pas son parallélisme, même dans l'hypothèse des tuyaux invariables adoptée par Borda.

Ce cadre d'étude lui impose logiquement, d'après le § I du mémoire, de travailler sur un vase cylindrique sans parties stagnantes. Il procède, dans les art. 3-9, à une minitieuse description de ce que nous appellerions aujourd'hui le *champ de vitesse* du fluide, c'est-à-dire à une détermination de l'évolution des vitesses au sein de ce vase en fonction

390 D'Alembert, *Ibid.* note 389.

391 D'Alembert, *Ibid.* note 389, p. 38.

392 D'Alembert, *Ibid.* note 389, p. 38.

393 D'Alembert, *Ibid.* note 389, art. 43, p. 40.

394 *Œuvres* de Lagrange, lettre 100, p. 227-228.

de la localisation du fluide (il travaille toujours, ce faisant, sur un écoulement quasi-stationnaire). Son raisonnement, à nouveau fort inspiré de sa façon d'aborder l'étude des écoulements selon l'approche analytique, fait essentiellement appel aux principes de la dynamique et de l'équilibre des tuyaux curvilignes. Il consiste, plus précisément, à étudier l'agencement des vitesses à l'intérieur de canaux rectilignes traversant verticalement et horizontalement la masse de fluide surplombant l'ouverture, puis celle située au-dessus du fond du vase. Il parvient, à l'issue de cette étude, au résultat suivant : la vitesse verticale des particules doit diminuer en s'éloignant de l'axe dans la partie supérieure du fluide ainsi que dans la partie surplombant le fond du vase, elle doit au contraire augmenter en s'éloignant de l'axe dans la petite portion de fluide située dans le voisinage de l'orifice inférieur.

Cette « photographie » de la répartition des vitesses dans le vase l'amène à établir deux conclusions. La première est[395]

> « que l'hypothèse la plus exactement rigoureuse qu'on puisse faire sur le mouvement des particules du fluide, est d'imaginer qu'elles se meuvent, non par tranches parallèles, mais suivant des [...] tuyaux [...] courbes en tout ou en partie, & qui s'étendent même jusque dans l'espace cylindrique [...] qui a l'ouverture [...] pour base »

La seconde est que « la surface [supérieure] ne descendra point parallèlement à elle-même »[396], comme l'a supposé Borda, les vitesses des particules qui la composent diminuant à mesure que l'on s'éloigne de l'axe du vase. Cette dernière remarque le conduit d'ailleurs à définir ce que nous appellerions, en termes modernes, un *profil de vitesse* pour la tranche supérieure : il impose, plus précisément, l'équation

$$w(x) = v + \frac{(V-v)z^n}{k^n},$$

donnant la valeur $w(x)$ de la vitesse d'un point de cette tranche, de section k, situé à la distance z de la paroi, de telle sorte que $v = w(0)$ et $w(k) = v + (V - v) = V$. Nous savons aujourd'hui que ce type de profils provient de l'effet de la viscosité du fluide, ce qui prouve que la force d'adhérence des particules fluide entre elles, négligée dans ce § VII, n'a rien de comparable avec ce concept moderne. Nous verrons néanmoins, dans le chapitre VIII, que le second type d'adhérence pris en compte par D'Alembert, l'adhérence des particules fluide aux parois du vase, possède certains points communs avec le phénomène justement connu, de nos jours, sous le nom d'*adhérence* aux parois, et dont nous attribuons l'origine à la viscosité du fluide.

En somme, D'Alembert démontre ainsi que l'hypothèse des tuyaux variables constitue la meilleure façon de représenter l'écoulement dans le cas où l'on néglige la force

---

395 D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57 § VII, art. 10, p. 123.

396 D'Alembert, *Ibid.* note 395, art. 12, p. 125.

d'adhérence du fluide, mais que l'adoption de cette hypothèse interdit néanmoins de supposer le parallélisme de la tranche supérieure du fluide : la théorie de Borda est donc incorrecte de ce point de vue. Dans le cas où l'on tient compte de la force d'adhérence, l'hypothèse la plus rigoureuse consiste, à l'inverse, à supposer le parallélisme des tranches à l'intérieur d'un vase fictif correspondant au vase cylindrique débarrassé de ses parties stagnantes. Il s'agit là, selon lui, de l'option théorique la plus plausible, car « confirmée autant qu'il est possible par l'expérience »[397].

Ce résultat de son examen des hypothèses du parallélisme et des tuyaux invariables détermine, nous semble-t-il, sa stratégie de réponse concernant un autre des points de litige l'opposant à Borda : la question des forces accélératrices animant les surfaces supérieure et inférieure du fluide au premier instant du mouvement.

Des trois paragraphes du Mémoire 57 consacrés au sujet, le plus court, le § II, long de quatre articles seulement, fait effectivement état d'un vase cylindrique sans parties stagnantes, et d'un raisonnement fort semblable à celui des art. 2 à 9 du § VII. Dans les § III et V, nettement plus conséquents, D'Alembert travaille sur un vase présentant des parties stagnantes de fluide. Il aborde toutefois le problème dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes dans le § III, puis dans son hypothèse du parallélisme restreinte dans le § V. Peut-être cherche-t-il, par ce moyen, à démontrer la fausseté des résultats de Borda dans tous les cas de figure possibles...

Quoiqu'il en soit, ces trois paragraphes ne visent à établir qu'un seul et même résultat : les forces accélératrices animant les tranches supérieure et inférieure du fluide sont respectivement inférieure ou égale et supérieure ou égale à l'accélération de la pesanteur dans les premiers instants du mouvement. Ce résultat vise à défendre sa théorie des écoulements du *Traité des fluides* contre les critiques adressées par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement ». L'examen des § III et V du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) nous permettra ainsi de rendre compte de la teneur des réponses théoriques apportées par D'Alembert. Il constitue surtout, comme nous l'annoncions au début de ce chapitre, une occasion de comprendre le sens physique que le savant attribue à cette notion de « premiers instants de l'écoulement ».

2. Les « premiers instants » de l'écoulement

L'accélération des tranches supérieure et inférieure du fluide dans les « premiers instants » de l'écoulement

Dans l'art. 3 de son « Mémoire sur l'écoulement », consécutif à la mise en équation du mouvement d'un fluide dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes invariables, Borda

[397] D'Alembert, *Ibid.* note 395, art. 1, p. 118.

affirme que[398] :

> « l'équation de M$^{\text{rs}}$. Bernoulli & d'Alembert donne un faux résultat, comme, par exemple, lorsqu'on veut déterminer la vîtesse du fluide dans les premiers instants du mouvement. En effet, on prouve par cette équation que, si le vase est cylindrique, la surface supérieure du fluide doit se mouvoir dans les premiers instants du mouvement comme les corps libres abondonnées à l'action de la gravité, quel que soit l'orifice par lequel le fluide sort du vase ; or, cela est impossible, parce qu'il suivroit de-là que le fluide descendroit dans le commencement du mouvement avec la même vitesse que si le fond ne lui faisoit aucun obstacle ».

Pour ce qui concerne la force accélératrice animant la surface inférieure dans les premiers instants du mouvement, il en déduit, compte tenu de la constance du débit de l'écoulement, qu'il[399]

> « est facile de voir, par notre équation, que la partie du fluide qui, dans le commencement du mouvement, se meut comme les corps libres, est fort voisine de l'orifice [...] lorsque cet orifice est très-petit par rapport à [la section de la tranche supérieure] ».

Après avoir fait remarquer que[400]

> « l'Expression [...] de la vitesse du Fluide qui sort d'un vase [de section variable] dont le trou est fort petit, n'est pas exactement vraye, & est même fort différente de la véritable expression de la vitesse au commencement du mouvement »,

D'Alembert démontrait, quant à lui, dans la première édition de son *Traité des fluides* (1744), que, comme[401]

> « M. *Daniel Bernoulli* l'a déja remarqué, [...] la surface [supérieure] au commencement du mouvement, s'accélere comme les Corps qui tombent librement »,

c'est-à-dire descend sous le seul effet de l'accélération de la pesanteur. Dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII, il commence, dans ce contexte, par prendre ses distances avec le résultat de D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique*. Ce dernier, précise-t-il en effet[402],

---

[398] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 3, p. 582.

[399] Borda, *Ibid.* note 398, art. 3, p. 583.

[400] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1$^{\text{ère}}$ édition, Paris, 1744, Livre II, art. 109, p. 90.

[401] D'Alembert, *Ibid.* note 400, art. 109, p. 91.

[402] D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § V, art. 2, p. 81. Dans la section III, § 14, p. 36-37 (au lieu de la p. 38 indiquée par D'Alembert dans cet extrait du Mémoire 57) de son *Hydrodynamique*, dédié à « ce qui se rapporte à l'écoulement des eaux issues de cylindres posés verticalement à travers une ouverture quelconque horizontale percée en leurs fonds », D. Bernoulli affirme qu'« à l'égard du premier début du mouvement [...], l'équation indique que $v = a - x$ », avec $a - x$ la hauteur parcourue par la surface supérieure dans le premier instant de l'écoulement, et v

> « dit expressément dans son *Hydrodynamique*, pag. 38, que dans un vase cylindrique percé à son fond d'une ouverture quelconque, la surface AB descend au premier instant avec toute la force de la pesanteur. J'ai dit simplement dans mon *Traité des Fluides*, art. 109, première édition, qu'elle s'accéléroit au premier instant comme les corps pesans qui tombent librement, & quoique je cite en cet endroit M. Daniel Bernoulli, il ne s'ensuit pas que j'ai pensé entièrement comme lui, que la force accélératrice au premier instant étoit égale à la pesanteur g dans la surface AB ; car dans l'endroit dont il s'agit, je parle de vases de figure quelconque ».

Il ne cherchera donc pas, explique-t-il dans la foulée, à démontrer que la force accélératrice animant la surface supérieure d'un fluide s'écoulant à l'intérieur d'un vase cylindrique percé d'un très petit orifice en son fond est exactement égale, mais à peu-près égale, car parfois inférieure, à l'accélération de la pesanteur dans les premiers instants du mouvement. Ce désaccord avec D. Bernoulli provient d'ailleurs, selon lui, de ce (voir la Fig. XVI, p. 174)[403]

> « qu'il fait entièrement abstraction des courbes NF, QE, supposant que ces courbes sont les lignes droites même FD, CE, & que les points N, Q tombent en C, D ».

L'auteur de l'*Hydrodynamique* n'a, en d'autres termes, pas tenu compte des portions de fluide stagnantes au fond du vase. C'est là l'erreur que D'Alembert propose justement d'éviter en procédant au calcul de la force accélératrice animant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans son hypothèse des parties stagnantes. Il travaille d'abord, dans ce cadre, avec des tuyaux curvilignes invariables dans le § III du Mémoire 57, puis avec un parallélisme des tranches restreint à l'intérieur du vase fictif $AQEFNB$ dans le § V.

Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre de ces deux paragraphes, sa démonstration se fonde sur la méthode énoncée dans l'ajout à l'art. 109 de la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770) : « on peut encore trouver d'une manière très-simple », y explique-t-il[404]

> « la vitesse de la tranche [supérieure] au commencement du mouvement ; soit du cette vitesse, on aura $\frac{kdu}{y}$ pour la vitesse d'une tranche quelconque ; donc

la hauteur dont la tranche supérieure doit descendre afin d'acquérir la vitesse u, c'est-à-dire $v = \frac{u^2}{2g}$. L'équation $v = a - x$, ou $u = \sqrt{2g(a-x)}$, signifie donc qu'au tout début du mouvement, la tranche supérieure descend sous le seul effet de l'accélération de la pesanteur.

[403] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § V, art. 2, p. 82.

[404] D'Alembert, *Traité des fluides*, 2$^{\text{nde}}$ édition, Paris, 1770, Livre II, art. 109, p. 97. Nous avons substitué les notations K et g, correspondant respectivement à la section de la tranche inférieure et à l'accélération de la pesanteur, aux notations d'origine a et p. Notons également que u désigne ici la vitesse la tranche supérieure, $\frac{ku}{K}$ celle de la tranche inférieure.

> $\int \left(pdt - \frac{kdu}{y}\right) dx = 0$, ou $du = \frac{pKdt}{\int \frac{kdx}{y}}$; & la vitesse de la tranche inférieure PL sera $= \frac{kdu}{K} = \frac{pKdt}{\int \frac{Kdx}{y}}$ [...] ; mais il faut remarquer que la vitesse de la tranche supérieure CD doit être $<$ ou $=$ pdt, & celle de la tranche inférieure PL $=$ ou $>$ pdt, afin que l'équilibre subsiste ».

Cette méthode, redémontrée dans les art. 1 à 9 du § III pour l'hypothèse des tuyaux invariables, repose donc sur l'équation du mouvement obtenue à partir des principes de la dynamique et de l'hydrostatique, c'est-à-dire $\int_A^C \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$ — voir le chapitre II —, ou encore

$$g \times AC = \int_A^C \frac{dvds}{dt}$$

lorsqu'elle s'applique au mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un canal curviligne $ABDC$ (ou $abcd$: voir la Fig. XVI).

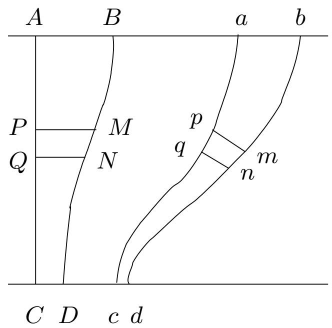


Fig. XVI – Tuyaux curvilignes invariables $ABDC$ et $abdc$.

D'Alembert exprime ensuite la constance du débit de l'écoulement entre la tranche quelconque $PMNQ$ de section y et de vitesse v et la tranche supérieure de section $AB = \alpha$ et de vitesse v_{AB}, puis entre la même tranche quelconque et la tranche inférieure de section $CD = \beta$ et de vitesse v_{CD}, ce qui le conduit à $yv = \alpha \times v_{AB}$ et $yv = \beta \times v_{CD}$, puis à $\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha}{y} \times \frac{dv_{AB}}{dt}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{\beta}{y} \times \frac{dv_{CD}}{dt}$, avec $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv_{AB}}{dt}$ et $\frac{dv_{CD}}{dt}$ les forces accélératrices des tranches $PMNQ$, AB et CD. En injectant ces deux dernières relations dans l'équation du mouvement précédente, il obtient

$$\frac{dv_{AB}}{dt} = \frac{g \times AC}{\int \frac{\alpha dx}{y}}$$

et

$$\frac{dv_{CD}}{dt} = \frac{g \times AC}{\int \frac{\beta dx}{y}},$$

ce qui lui fournit donc finalement un critère de comparaison selon lequel les forces accélératrices animant les tranches supérieure et inférieure du fluide dans le canal curviligne seront respectivement inférieure ou égale et supérieure ou égale à l'accélération de la pesanteur g si

$$\frac{AC}{\displaystyle\int \frac{\alpha dx}{y}} \leq 1$$

et

$$\frac{AC}{\displaystyle\int \frac{\beta dx}{y}} \geq 1.$$

Pour autant, l'utilisation de ce critère impose, comme nous le faisions précédemment remarquer, de connaître l'équation $y(x)$ du contour BMD du tuyau curviligne infiniment étroit $ABDC$ afin d'être en mesure de calculer les quantités $\displaystyle\int \frac{\alpha dx}{y}$ et $\displaystyle\int \frac{\beta dx}{y}$. D'Alembert applique donc sa méthode sur plusieurs exemples dans le § III :

- l'équation $y(x) = \dfrac{\beta(c - x^n)}{(c-h)^n}$ d'une portion de « parabole » paramétrée par le réel n[405], avec $h = AC$ et c une constante telle que $c - h \ll 1$, dans les art. 10-19,
- ainsi qu'une ellipse de demi-axes AB et AC, dans l'art. 20.

Il montre, sur ces deux exemples, que les forces accélératrices animant les tranches supérieure et inférieure du tuyau curviligne seront respectivement plus petite ou en rapport fini, et toujours beaucoup plus grande que l'accélération de la pesanteur g.

Cependant, sa tentative de démonstration ne s'avère que partiellement concluante vis-à-vis de son contentieux avec Borda. Dans les art. 22 à 25, il passe en effet de l'étude des accélérations des tranches extrêmes d'un fluide s'écoulant dans un canal curviligne, à celles du fluide s'écoulant dans le vase cylindrique à l'intérieur de ces mêmes canaux. Ce dernier calcul le conduit à un bilan mitigé, selon lequel la force accélératrice est belle et bien égale à l'accélération de la pesanteur au voisinage de l'ouverture inférieure, ainsi que l'affirme Borda.

Dans le § V du Mémoire 57, il s'agit encore de prouver, contre Borda, que l'accélération de la surface supérieure du fluide s'écoulant dans un vase cylindrique est égale ou très-peu inférieure à l'accélération de la pesanteur dans les premiers instants de l'écoulement. D'Alembert abandonne toutefois l'hypothèse des tuyaux curvilignes considérée dans le § III pour son hypothèse du parallélisme restreinte au vase fictif $AQEFNB$ (voir la Fig. XVI, p. 174).

Il procède tout d'abord, compte tenu de ce nouveau cadre d'étude, à l'adaption du critère de comparaison énoncé dans l'art. 109 de la seconde édition de son *Traité des fluides*. Sachant, d'après les explications précédentes, que la force accélératrice animant

[405] Le terme de « parabole » renvoie ici au sens de l'époque. D'après l'article « Parabole » de l'*Enyclopédie*, t. XI, 1765, p. 883a-884a, signé *(O)*, une parabole peut être de degré n.

la tranche supérieure AB est égale à l'accélération de la pesanteur g si

$$\frac{h}{\displaystyle\int_{AQEFNB} \frac{AB \times dx}{y}} = 1,$$

avec $h = AC$, sachant que $\displaystyle\int_{ABDC} \frac{dx}{y} = \frac{h}{AB}$, le vase $ABDC$ étant cylindrique, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \int_{AQEFNB} \frac{dx}{y} &= \int_{ABDC} \frac{dx}{y} - \int_{QCE,FND} \frac{dx}{y} \\ &= \frac{h}{AB} - \int_{QCE,FND} \frac{dx}{y}, \end{aligned}$$

la force accélératrice de la tranche supérieure du fluide dans le vase fictif sera donc égale à l'accélération de la pesanteur si

$$\int_{QCE,FND} \frac{AB \times dx}{y} \ll h.$$

La principale difficulté réside par conséquent, dans ce cas, dans le calcul de la quantité $\displaystyle\int_{QCE,NFD} \frac{dx}{y}$ relative aux parties de fluide stagnantes QCE et NFD, dont il faudra donc connaître l'équation $y(x)$ des contours. De même que dans le § III, D'Alembert considère ainsi plusieurs exemples :

– les courbes QE et NF sont d'abord représentées, dans les art. 4 à 10, par l'équation

$$\frac{a}{y} = 1 + \frac{x^{n-1}b^{2-n}}{a}$$

d'une branche d'« hyperbole » paramétrée par le réel n[406], avec $a = \dfrac{AB}{2}$;

– elles sont ensuite décrites, dans les art. 11-18, par un arc de « parabole » paramétrée par un réel r[407],

– puis par une branche d'ellipse dans l'art. 19.

L'opération se révèle cependant être un échec, ainsi qu'en témoigne la conclusion de D'Alembert dans l'art. 20[408] :

> « on voit par ces exemples, que la force initiale de la surface AB peut être ou presque $= [g]$, ou plus petite en rapport fini, ou beaucoup plus petite, selon la supposition qu'on fera sur la nature des courbes QE, NF, & sur le rapport de ND à EF. »

[406] Le terme d'« hyperbole » renvoie ici au sens de l'époque. D'après l'article « Hyperbole » de l'*Encyclopédie*, t. VIII, 1765, p. 402b-404a, signé *(O)*, une hyperbole peut être de degré n.

[407] Voir la note 405.

[408] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § V, art. 20, p. 90.

Ce bilan illustre à la fois l'inefficacité de sa méthode et l'impasse théorique à laquelle il se trouve confronté, ses savants calculs ne lui permettant pas de trancher le contentieux l'opposant à Borda. Il est, plus généralement même, caractéristique de cette période de crise de l'hydrodynamique.

Dans la « profession de foi » qui lui est prêtée par l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement » dans le courant des mois de février ou mars 1771 — voir le chapitre I, p. 52 —, Condorcet fait effectivement part de sa totale indécision sur le sujet :

> « Je ne crois pas que dans un vase qui se vuide par un trou percé en son fond la dernière tranche tombe (dans les premiers instans) comme un corps libre »,

avant d'ajouter que cette conclusion donnée dans l'art. 3, p. 583 du « Mémoire sur l'écoulement », lui paraît « plus extraordinaire encore que celle de M. d'Alembert, sur laquelle je suspens aussi mon jugement ». La question reste donc pleine et entière...

Traduction mathématique des premiers instants du mouvement

Suite à cet échec, D'Alembert ne se laisse toutefois pas décourager et repart à l'assaut du sujet dans les art. 36 à 44 du § V, grâce à une autre méthode esquissée dans l'art. 109 de la première édition du *Traité des fluides* (1744), puis reprise et développée dans l'ajout correspondant de la seconde édition. Cette méthode consiste en une étude mathématique des premiers instants du mouvement. Son examen détaillé nous permettra de mieux appréhender le sens physique de cette dernière notion.

Il s'agit, sommairement, de supposer que la hauteur q dont est descendue la tranche supérieure du fluide au bout du premier instant de l'écoulement est très petite en comparaison de la hauteur totale h du fluide dans le vase à l'instant initial : q vérifie donc $q = h - x \ll 1$, x désignant la hauteur du fluide dans le vase à l'issue du premier instant du mouvement. Cette simple opération lui permet d'effectuer une linéarisation de l'expression de la force vive (c'est-à-dire l'*énergie*, ou la *charge cinétique*, en termes modernes) $s = \dfrac{u^2}{2g}$ de la tranche inférieure du fluide, qui correspond également, d'après le principe de conservation des forces vives, à sa montée potentielle, c'est-à-dire la hauteur s dont elle pourrait remonter grâce à la vitesse acquise u. Il part, pour ce faire, de l'équation du mouvement dans un vase de section variable — cette équation est la plus adaptée, compte tenu de la variation de la section du vase fictif $AQEFNB$ dans sa partie inférieure —, puis procède à une opération de réduction en série de s en fonction de l'infiniment petit $\dfrac{kq}{N}$, avec $N = K^2 \displaystyle\int \frac{dx}{y} = \lambda K^2 \left(\lambda = \int \frac{dx}{y}\right)$.

Cette équation du mouvement dans un vase de section variable découle, plus précisément, de l'application du principe de la dynamique ou du principe de conservation des forces vives. D'Alembert part par exemple, dans ce second cas de figure — voir le chapitre II, p. 73 —, de l'équation

$$(-ydx) \times g \times AC = d\left(\frac{1}{2}Nu^2\right),$$

c'est-à-dire

$$-2gyxdx = 2Nudu + u^2dN,$$

avec $AC = x$, u la vitesse de la tranche inférieure et[409] $dN = -\frac{k^2 - K^2}{k^2}kdx$, k et K désignant, rappelons-le, les sections respectives des tranches supérieure AB et inférieure EF du fluide dans le vase. D'Alembert obtient ainsi, dans l'art. 105 de son traité de 1744, l'équation du mouvement[410]

$$-2k^2gxdx = -(k^2 - K^2)u^2dx + 2Nkudu. \tag{19}$$

Dans l'art. 109 du *Traité des fluides*, il pose ensuite, comme nous venons de l'expliquer, $s = \frac{u^2}{2g}$, et parvient à

$$ds + \frac{(-k^2dx + K^2dx)}{kN}s = -\frac{k}{N}xdx,$$

dont découle l'expression suivante de s :

$$sc^{\int \frac{(-k^2dx + K^2dx)}{kN}} = \int -\frac{kx}{N}c^{\int \frac{(-k^2dx + K^2dx)}{kN}}dx,$$

avec c le nombre dont le logarithme népérien vaut 1, c'est-à-dire ce que nous appelons aujourd'hui e. Sachant que la section de l'orifice inférieure est supposée très petite, ce qui équivaut à supposer que $K \ll k$, cette expression devient

$$sc^{\int \frac{-kdx}{N}} = \int_h^{h-q} -\frac{kx}{N}c^{\int \frac{-kdx}{N}}dx. \tag{20}$$

D'Alembert, qui étudie ici le commencement du mouvement, considère alors que la hauteur $q = h - x$ (avec h la hauteur du fluide dans le vase à l'instant initial) dont descend la tranche supérieure dans ce premier instant de l'écoulement est très petite en

[409] Cf. D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 88, p. 72-73.

[410] En remplaçant dx par $-dx$ (x correspondait à la hauteur du fluide considérée à partir de la surface supérieure : elle renvoie ici à la hauteur de fluide surplombant la tranche inférieure, prise à partir de cette dernière, ce qui explique l'apparition d'un signe $-$), puis en procédant à une réécriture de l'équation, nous parviendrons à la forme (16), c'est-à-dire

$$\frac{K^2}{k}\int \frac{dx}{y} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right) + \left(1 - \frac{K^2}{k^2}\right)\frac{u^2}{2g} = x,$$

sous laquelle nous la présentions dans le chapitre V, p. 162.

comparaison de h, de telle sorte que $q \ll h$ et $q \ll x$.

L'intégrale $\int -\frac{dx}{N}$, prise entre les bornes h et $h-q$, vérifie d'abord

$$\int_h^{h-q} -\frac{kdx}{N} = -\frac{k}{N}[(h-q)-h] = \frac{kq}{N} = \frac{k(h-x)}{N}.$$

Grâce à une intégration par partie, l'équation (20) conduit ensuite à l'expression suivante de s :

$$s = x - hc^{-\frac{kq}{N}} + \frac{N}{k} - \frac{N}{k}c^{-\frac{kq}{N}}. \tag{21}$$

Partant de là, D'Alembert procède à une série d'approximations.

Se rappelant que $K \ll k$ et supposant que $\lambda = \int_A^C \frac{dx}{y} \simeq \frac{h}{k}$ dans les premiers instants du mouvement (le vase étant cylindrique), il vient, d'une part, $\frac{N}{k} = \frac{K^2 h}{k^2} \ll h$, et l'équation (21) se réduit donc à

$$s \simeq x - hc^{-\frac{kq}{N}}. \tag{22}$$

En supposant, d'autre part, que $\frac{kq}{N} \ll 1$, ce qui revient à considérer la hauteur de descente q de la tranche supérieure comme un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à 2 (compte tenu de la relation $\frac{kq}{N} \simeq \frac{k^2 qh}{K^2}$, avec $K \ll k$), D'Alembert procède à une réduction en série de la quantité $c^{-\frac{kq}{N}}$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} s &= x - h\left(1 - \frac{kq}{\lambda K^2} + \frac{k^2q^2}{2\lambda^2K^4} - \frac{k^3q^3}{6\lambda^3K^6} + \dots\right) \\ &= (x-h) + \frac{khq}{\lambda K^2} - \frac{k^2hq^2}{2\lambda^2K^4} + \frac{k^3hq^3}{6\lambda^3K^6} + \dots \end{aligned}$$

Sachant que $q = h - x \ll 1$, il vient donc

$$s \simeq \frac{khq}{\lambda K^2} - \frac{k^2hq^2}{2\lambda^2K^4} + \frac{k^3hq^3}{6\lambda^3K^6} + \dots, \tag{23}$$

ou encore, compte tenu de l'expression (22) de s :

$$s \simeq x - hc^{-\frac{kq}{\lambda K^2}} \simeq h\left(1 - c^{-\frac{kq}{\lambda K^2}}\right). \tag{24}$$

Nous reconnaissons ici l'expression caractérisant aujourd'hui la *phase transitoire* de nombreux systèmes physiques, c'est-à-dire la phase de transition entre l'instant initial et l'établissement du régime stationnaire.

Dans l'équation (24), le temps t transparaît au travers de la hauteur q qui, passant d'une valeur infinitésimale du second ordre au premier instant du mouvement, à une valeur d'ordre 1, puis à une valeur finie, décrit donc l'évolution temporelle de la hauteur de chute de la tranche supérieure, et, par là-même, le passage de la vitesse de la surface inférieure

– de sa valeur primitive $\frac{k}{K}\sqrt{2gq}$, puisque

$$s = \frac{u^2}{2g} \simeq \frac{khq}{\lambda K^2} = \frac{khq}{N}$$

d'après l'équation (23), avec $\frac{N}{k} \simeq \frac{K^2 h}{k^2}$ de telle sorte que

$$s = \frac{u^2}{2g} = \frac{k^2}{K^2} q$$

(q étant alors un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à 2)

– à sa valeur stationnaire $\sqrt{2gx}$, que l'on pourra directement obtenir à partir l'équation du mouvement (19) (q possède alors une valeur finie), ou encore tirer de l'équation (22) en considérant q comme un infiniment petit d'ordre 1, car

$$-\frac{kq}{N} = -\frac{k^2 q}{K^2} \longrightarrow -\infty$$

(compte tenu de la relation $\frac{N}{k} \simeq \frac{K^2 h}{k^2}$ et de l'hypothèse $K \ll k$), de telle sorte que

$$s = \frac{u^2}{2g} \simeq x.$$

C'est là l'expression, confirmée par l'expérience à cette époque, de la vitesse d'un fluide s'échappant d'un vase percé d'un très petit orifice en son fond.

En somme, D'Alembert traduit donc mathématiquement le concept, bien obscur jusqu'alors, de « premiers instants du mouvement ». Cette traduction mathématique semble permettre d'assimiler ce concept à la notion moderne de *phase transitoire* du mouvement.

C'est d'ailleurs au calcul du temps nécessaire à l'établissement du régime stationnaire, ou, pour employer ses propres termes, au calcul du temps mis par la tranche inférieure du fluide pour acquérir la valeur $\sqrt{2gx}$, qu'il destine cette méthode dans les art. 36 à 44 du Mémoire 57 § V. Il estime en effet ce temps dans le cadre de deux hypothèses différentes portant sur la valeur de la vitesse de la surface inférieure au premier instant.

La première, correspondant au résultat défendu par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement », établit que la force accélératrice animant le fluide au niveau de l'orifice dans le premier instant du mouvement est égale à l'accélération de la pesanteur.

La seconde n'est rien d'autre que le résultat contesté par Borda et soutenu par D'Alembert, résultat selon lequel la force accélératrice valant g au premier instant est celle de la tranche supérieure, dont la vitesse primitive vérifie alors $\sqrt{2gq}$, tandis que celle de la tranche inférieure vaut $\frac{k}{K}\sqrt{2gq}$ (compte tenu de la constance du débit de l'écoulement).

Il parvient, ce faisant, à un temps fini dans le premier cas, et à un temps infiniment petit dans le second. Il démontre, autrement dit, la fausseté de la solution de Borda, car, explique-t-il, « il seroit difficile de concevoir », en partant de la solution de son contradicteur[411],

> « comment cette vitesse, au bout d'un temps fini très-court, deviendroit [$\sqrt{2gx}$] comme le donne la théorie [...], au lieu que dans notre supposition, le temps de la descente par q seroit infiniment plus court, & le fluide sortant par l'ouverture, acquerroit au bout de ce temps très-court la vitesse [$\sqrt{2gx}$] ».

Notons, pour finir sur cette question, que la notion de premiers instants de l'écoulement, ou de *phase transitoire*, n'aurait pas grand sens aujourd'hui, compte tenu des cadre d'étude adoptés par D'Alembert et Borda dans leurs travaux respectifs. L'application du théorème de Bernoulli qui correspond à l'équivalent moderne des méthodes de mise en équation des savants selon l'approche unidimensionnelle, requiert en effet, d'un point de vue moderne, l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement. L'étude de la phase transitoire proprement dite déboucherait, quant à elle, sur la formulation d'équations aux dérivées partielles dont la résolution constitue un problème inextricable à cette époque. Rappelons d'ailleurs que, dans le cadre de l'approche analytique des écoulements, D'Alembert se restreint aux premiers instants du mouvement afin de justifier la séparation des variables de temps et d'espace au sein des composantes de la vitesse, ceci lui permettant de simplifier le système d'EDP à résoudre — voir le chapitre IV, p. 110. Ce n'est, de façon générale, pas un cas de figure isolé au XVIII^e siècle. Du point de vue théorique, la manipulation de la variable temporelle en hydrodynamique demeure artisanale. Il en est de même dans le domaine expérimental, compte tenu du manque de précision des outils de mesure du temps dont les géomètres disposent.

C'est sur une question cruciale vis-à-vis du problème de concordance entre théorie et expérience que nous terminerons d'ailleurs ce chapitre consacré à la question de l'écoulement d'un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond : le phénomène de contraction de la veine.

[411] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § V, art. 44, p. 98-99.

3. La question de la contraction de la veine

Cette question est abordée dans le Mémoire 57 § VI des *Opuscules* t. VIII. Le phénomène correspondant, mis au jour par Newton dans la seconde édition de ses *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1713), se traduit par le resserrement de la section de la veine de fluide au sortir d'un orifice percé au fond ou sur l'une des parois latérales d'un vase. Ce phénomène avait été très brièvement étudié par D'Alembert dans la première édition de son *Traité des fluides* (1744), ce dernier se contentant de renvoyer à la section IV de l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli, « ne croyant pas qu'on puisse ajouter rien à ce qu'il a dit là-dessus »[412].

Il y avait également consacré quelques travaux — d'ailleurs prolongés dans le Mémoire 57 § VI — dans le cadre de l'approche analytique, de façon indirecte dans les articles 137 à 147 de l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752), initialement dédiés à l'étude de l'action d'une veine de fluide qui sort d'un vase et frappe un plan, et de façon directe dans le Mémoire 32 § IV, des *Opuscules* t. V (1768). S'il revient donc ici sur la question, c'est probablement en raison des remarquables recherches que Borda donne à voir sur ce sujet dans les art. 6 à 10 de son « Mémoire sur l'écoulement ».

La question de la contraction de la veine dans le « Mémoire sur l'écoulement » de Borda

Le phénomène de contraction de la veine constitue une parfaite illustration de l'importance de l'expérience en hydrodynamique, et par là-même, un sujet emblématique de la crise des années 1770. A part dans de très rares cas de figure, dont l'un, comme nous allons le voir, se trouve d'ailleurs résolu par Borda, la théorie ne permet effectivement pas de parvenir à une expression du rapport de contraction. Il faut donc avoir recours à l'expérience pour l'évaluer. Les rapports de contraction constituent, dans le même temps, et de manière quelque peu paradoxale, un besoin expérimental crucial, puisque les mesures de vitesse du fluide s'effectuent, à cette époque, à partir des valeurs du débit de l'écoulement au sortir du vase, et que la formule théorique permettant de passer de ces valeurs expérimentales du débit à celles de la vitesse fait directement intervenir le rapport de contraction de la veine...

Borda rend, en guise d'introduction à ses recherches sur le sujet, très clairement compte de cet enjeu dans son « Mémoire sur l'écoulement », en affirmant que[413]

> « quoiqu'on trouve que la vîtesse du fluide est dûe à toute la hauteur du vase, on ne sait pas pour cela déterminer la quantité qui s'en écoule dans un temps donné : cela vient de ce que la colonne qui sort de ce vase se resserre à une petite distance de

[412] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 118, p. 104.

[413] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 5, p. 585.

> l'orifice, & que ce resserrement, connu sous le nom de *contraction de la veine*, n'a point encore été déterminé par la théorie. Comme j'ai eu besoin, pour la solution de quelques problèmes contenus dans ce Mémoire, de connoître exactement cette contraction, j'ai fait des recherches à ce sujet ».

Borda, dans son mémoire, y étudie donc d'abord le problème sous l'angle théorique. Il se place, pour ce faire, dans le cas particulier aujourd'hui connu sous le nom d'*ajutage rentrant* et qui consiste à adapter « un tube [...] prolongé dans le vase d'une quantité finie »[414]. Le succès de sa démonstration repose en fait sur l'idée d'avoir considéré un tube de diamètre infiniment petit.

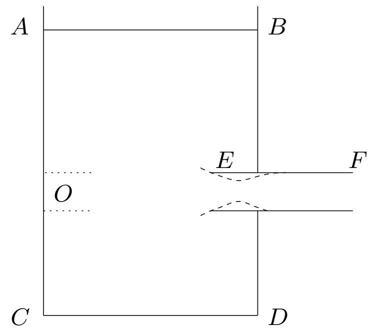


Fig. XVII – Ajutage rentrant EF dans un vase cylindrique.

Posant h la hauteur de fluide au-dessus du tube, R la force de réaction du fluide contre le vase, e et me les sections respectives du tube et de la veine au point de plus grande contraction (voir la Fig. XVII), Borda considère en effet que :

– le vase, qu'il imagine posé sur un plan parfaitement poli, aura tendance, « par effet de la réaction », à prendre « un petit mouvement du côté opposé à la sortie du fluide, de manière cependant que le centre de gravité de l'ensemble de tout le fluide & du vase, rest[e] immobile »[415] ; ainsi la quantité de mouvement imprimée au vase par la réaction R dans l'espace de temps T, c'est-à-dire RT, sera égale à la quantité de mouvement du fluide sorti du vase dans le même temps, soit $meT \times 2gh$. Il vient donc $R = 2ghme$;
– la pression du fluide, qui s'exprime chez lui, de même que chez D'Alembert, comme une force *externe* s'exerçant sur les parois du vase, peut être estimée de même la même façon que si le fluide était parfaitement stagnant, parce qu'en raison du très petit diamètre du tube adapté, « les molécules qui sont contre les parois du vases & au pied du tube, ne peuvent se mouvoir qu'avec une vîtesse infiniment petite »[416]. La réaction R sera donc égale à la différence de pression entre les côtés

[414] Borda, *Ibid.* note 413, art. 6, p. 586.
[415] Borda, *Ibid.* note 413, art. 7, p. 586.
[416] Borda, *Ibid.* note 413, art. 7, p. 587

AC et BD, c'est-à-dire égale à la pression du fluide contre la partie O de la paroi opposée à l'orifice, de telle sorte que $R = ghe$.

Il ne lui reste plus, dès lors, qu'à égaler ces deux expressions de la réaction R. Il vient $m = \frac{1}{2}$, d'où Borda conclut finalement que « la section de la veine, au point de plus grande contraction, est exactement la moitié de la section du tube »[417].

Malgré l'astuce théorique consistant à se placer dans le cas d'un tube horizontal adapté infiniment fin, Borda n'en est pas moins conscient que la contraction de la veine n'a lieu que dans le cas d'un orifice de taille finie. Dans les art. 8 à 10 de son mémoire, consacrés à la vérification de son rapport pour l'ajutage rentrant ainsi qu'à la détermination du rapport pour un ajutage sortant, il suppose en effet que la valeur erronée, à savoir $\frac{1}{\sqrt{2}}$, obtenue par Newton dans le vol. 2, prop. 36, de ses *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, vient de ce que son prédécesseur « a fait son expérience sur un orifice trop petit »[418]. Cette erreur vient également, selon lui, de la méthode expérimentale utilisée, laquelle consiste à mesurer la diamètre de la veine à l'endroit le plus étroit. « La manière de mesurer la contraction par la mesure de la veine contractée n'étant pas assez précise », explique-t-il en effet[419],

> « j'ai voulu chercher cette contraction par la méthode dont M. Bernoulli parle dans son Hydrodynamique, *page 79* : cette méthode consiste à mesurer le temps qu'une certaine quantité de fluide emploie à sortir d'un vase par un orifice donné, on calcule après cela le temps qu'il auroit dû employer s'il n'y avoit pas eu de contraction, & le rapport des deux temps, donne celui de la grandeur de l'orifice à la section de la veine contractée ».

Il parvient ainsi à mesurer un rapport de contraction de $\frac{10}{16}$ pour l'ajutage sortant, ainsi qu'un rapport de 100 à $194\frac{1}{5}$ pour un ajutage rentrant, c'est-à-dire à peu près $\frac{1}{2}$, conformément au résultat obtenu par la voie théorique.

Dans le t. II de son *Traité élémentaire d'hydrodynamique*, Bossut rend également compte, comme le note explicitement D'Alembert dans le Mémoire 57 § VI, d'expériences réalisées sur un ajutage sortant[420].

Il dresse d'abord, ce faisant, un constat identique à celui de Borda pour ce qui concerne l'écart obtenu par les méthodes consistant respectivement à mesurer la section de la veine contractée et à comparer le débit théorique du fluide au sortir du vase (sans contraction) avec celui mesuré (avec contraction). Il obtient un rapport de 100 à 150, soit $\frac{2}{3}$, par la première méthode, ce qui le pousse à conclure que[421]

---

[417] Borda, *Ibid.* note 413, art. 7, p. 587.

[418] Borda, *Ibid.* note 413, art. 8, p. 587. Les expériences sur lesquelles se fonde Newton pour établir le rapport de contraction de la veine sont en fait principalement dues à Roger Cotes (1682-1716) : voir M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007, p. 139-150.

[419] Borda, *Ibid.* note 413, art. 9, p. 588.

[420] Cf. Bossut, *Traité élémentaire d'hydrodynamique*, 2nde édition, 1775, t. II, art. 322-325, p. 12-14.

[421] Bossut, *Ibid.* note 420, art. 361, p. 34.

> « le rapport de l'aire de l'orifice à l'aire de la section de la veine contractée, tel que la mesure immédiate du diamètre de la veine nous l'a donné [...] est sensiblement moindre qu'on ne le trouve par les dépenses »

Il parvient par la seconde méthode — celle des dépenses, c'est le nom que Bossut lui attribue dans l'extrait précédent —, à un rapport de $\frac{5}{8}$[422] :

> « Il suit de-là qu'on pourra déterminer d'une manière exacte & conforme à l'expérience [...] les écoulemens des fluides qui sortent des vases [...] en diminuant simplement l'aire véritable de l'orifice dans le rapport de 8 à 5 à-peu-près, sans faire aucun changement dans les autres données du problème ».

Ce rapport de $\frac{5}{8}$ pour un ajutage rentrant coïncide parfaitement avec le résultat obtenu par Borda, c'est-à-dire $\frac{10}{16}$. Bossut fait ainsi remarquer, à l'instar de son précédesseur, que « celui [...] donné par Newton est absolument défectueux »[423].

Il établit enfin un résultat ayant échappé à l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement » et qui, nous semble-t-il, assurera la supériorité de son ouvrage dans ce domaine — quoique Borda soit parvenu, comme nous l'avons vu, à établir le rapport de la contraction pour un ajutage sortant par la théorie *et* par l'expérience. Comme le souligne en effet Duval-Leroy dans l'article « Fluide », entrée « Fluides. (*mouvement des*) », déjà cité de l'*Encyclopédie Méthodique. Marine*[424],

> « on conçoit que cette contraction de la veine de *fluide* n'est pas la même dans tous les cas, ainsi que MM. Daniel Bernoulli & l'abbé Bossut l'ont observé. Plus les bords de l'orifice sont minces, plus, toutes choses égales d'ailleurs, la contraction est forte. »

Dans le t. II de son *Traité élémentaire d'hydrodynamique*, Bossut affecte en effet le rapport de contraction de $\frac{5}{8}$ aux orifices percés dans les parois minces d'un vase. Il établit en revanche un nouveau rapport de contraction de $\frac{13}{16}$ dans le cas de parois épaisses, ce qu'il traduit expérimentalement en considérant un tuyau adapté à l'orifice — le tuyau est totalement situé à l'extérieur du vase, il s'agit donc toujours d'un ajutage sortant. Il montre ainsi, comme le rappelle Duval-Leroy[425],

> « que lorsque les bords de l'orifice sont minces, l'aire de cette section est à celle de l'orifice comme 5 à 8 [...]. Le *fluide* se contracte encore s'il sort par des tuyaux

[422] Bossut, *Ibid.* note 420, art. 361, p. 34. Nous attirons votre attention sur le fait que le rapport de contraction est défini, par certains auteurs, comme le rapport entre la section de l'orifice et celle de la veine contractée (c'est le cas de Borda, et de D'Alembert dans le Mémoire 57, § VI) ; il est défini, par d'autres auteurs, comme le rapport entre la section de la veine contractée et celle de l'orifice (c'est le cas de Bossut dans l'extrait suivant).

[423] Bossut, *Ibid.* note 420, art. 361, p. 34-35.

[424] *Encyclopédie Méthodique. Marine*, vol. 2, 1786, art. « Fluide », entrée « Fluides. (*mouvement des*) », signé *(Y)*, p. 328.

[425] *Encyclopédie Méthodique. Marine*, *Ibid.* note 424, p. 128

cylindriques ou prismatiques adaptés aux orifices des vases. Mais lorsqu'ils sont assez longs pour que le *fluide* touche les parois en sortant, l'effet de la contraction ou la diminution de la dépense est moins sensible. M. l'abbé Bossut a trouvé que, lorsque ces tuyaux sont de deux ou trois pouces, la dépense est diminuée dans le rapport de 16 à 13.

Lorsque que Du Buat, autre célèbre expérimentateur à cette époque, fait mention du problème de contraction de la veine dans ses *Principes d'hydraulique*, publiés en 1779, c'est aux expériences de Bossut dans le *Traité élémentaire d'hydronamique* qu'il fait référence, ainsi qu'en témoigne l'extrait suivant de l'ouvrage[426] :

> « M. l'abbé Bossut a fait voir, dans son Hydrodynamique, que si l'orifice est formé de parois très-minces, la dépense effective est à la dépense théorique comme 5 : 8 [c'est-à-dire 5 et 8]. Mais que si l'écoulement a lieu par un tuyau additionnel de quelques pouces de longueur, les dépenses sont comme 13 : 16 [c'est-à-dire 13 à 16] ».

Borda et Bossut font donc finalement preuve d'un incontestable savoir-faire expérimental sur cette question de la contraction de la veine. Les résultats du second font date pour ce qui concerne l'écart des rapports entre parois minces et épaisses. Quant à la solution théorique, confirmée par l'expérience, du premier des deux savants pour le cas d'un ajutage rentrant, elle porte encore aujourd'hui le nom *d'ajutage de Borda*[427].

La question de la contraction de la veine dans le Mémoire 57 § VI de D'Alembert

Il n'en est évidemment pas de même des recherches de D'Alembert sur le sujet. Compte tenu de l'approche exclusivement théorique de D'Alembert dans le Mémoire 57 § VI des *Opuscules* t. VIII (1780), ses travaux ne renferment en effet aucun aspect particulièrement novateur.

Il conclut ainsi, c'est là un exemple particulièrement représentatif de sa faiblesse dans le domaine expérimental, le paragraphe en commettant une double erreur d'interprétation des résultats obtenus par ses prédécesseurs. « M. l'Abbé Bossut », écrit-t-il[428],

> « dans son *Hydrodynamique*, trouve par ses expériences que la contraction de la veine est $= \frac{2}{3}$ de l'ouverture ; & M. Borda trouve de son côté par les siennes $\frac{1}{2}$. Ces deux savans Géomètres different aussi sur la construction de la veine dans les tuyaux additionels. Ainsi cet objet pourroit encore mériter de nouvelles recherches de la part des Géomètres Physiciens ».

[426] Du Buat, *Principes d'hydraulique*, Paris, 1779, art. 139, p. 125.

[427] Voir, par exemple, G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambrige, 2000, p. 390.

[428] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § VI, art. 31, p. 117.

D'Alembert donne donc, d'après ce que nous venons d'indiquer concernant les expériences de Bossut et Borda sur le sujet, la valeur du rapport de $\frac{100}{150}$ obtenue par Bossut par la première méthode expérimentale (mesure directe de la section de la veine contractée), au lieu de la valeur de $\frac{5}{8}$ obtenue par la seconde méthode, et présentée par son confrère comme le bon résultat dans le cas de parois minces. Il confond, d'autre part, les rapports obtenus par les deux savants, le premier dans le cas d'un ajutage rentrant, le second dans le cas d'un ajutage sortant !

Parmi les recherches du Mémoire 57 § VI, nous pourrons encore dire quelques mots de la continuation, dans les art. 25 à 30, des recherches analytiques entamées dans l'*Essai sur la résistance des fluides* et le Mémoire 32 § IV des *Opuscules* t. V (1768). Celles-ci constituent un nouvel exemple de l'obstination de D'Alembert dans une approche exclusivement théorique vis-à-vis de cette question. Elles le mènent, comme nous allons le voir, à un résultat indéniablement intéressant, puisqu'il consiste en une nouvelle démonstration de la fausseté de la cataracte de Newton, mais malheureusement sans rapport avec l'objet premier de ses recherches, la contraction de la veine.

Dans son traité de 1752, art. 137-147, p. 163-180, D'Alembert était en effet parvenu à établir une équation analytique susceptible de représenter les contours d'une veine contractée. Il n'y avait pas directement étudié le problème de la contraction de la veine, mais « l'action d'un veine de fluide qui sort d'un vase, & qui frappe un plan », problème dans lequel le calcul de la pression du fluide contre le plan le contraint préalablement à déterminer l'équation de la veine. Dans l'art. 144, p. 169-171, il se consacrait ainsi à cette dernière question dans le cas où les parties du fluide se trouvent soumises à la pesanteur. Voyons précisément en quoi sa méthode consiste.

Soient $x = AP$, $PM = y$, $BM = s$, $AB = K$ (AB désignant la demi-section de l'orifice inférieur), et v la vitesse des particules au point A, Pp et Mm représentent les espaces parcourus par les particules P et M pendant l'instant dt (voir la Fig. XVIII). L'hypothèse du parallélisme des tranches impose d'autre part une vitesse homogène et verticale dans chacune des tranches du fluide : la vitesse de la tranche PM sera donc $= \dfrac{vK}{y}$, d'où D'Alembert tire

$$dt = \frac{dx}{\frac{vK}{y}} = \frac{ydx}{vK}.$$

Le savant applique dès lors le principe de la dynamique, selon lequel l'incrément de vitesse

$$-dv(m) = -d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -\frac{d^2s}{dt}$$

perdu par la particule m dans l'instant dt doit faire équilibre à la composante tangentielle de l'incrément de vitesse $pdt \times \dfrac{dx}{ds}$ acquis sous l'action de la pesanteur, de telle sorte qu'il en résulte une force perpendiculaire à la surface de la courbe BMm. Il vient

$$gdt\frac{dx}{ds} - \frac{d^2s}{dt} = 0, \tag{25}$$

soit encore

$$ds \times d^2s = \frac{gy^2dx^2}{v^2K^2}dx,$$

sachant que $dt = \frac{dx}{\frac{vK}{y}} = \frac{ydx}{vK}$. L'intégration de cette dernière relation donne ensuite

$$\frac{ds^2}{2} = \frac{gy^2dx^2}{v^2K^2}(x+C),$$

la constante $C = h$ étant déterminée par les conditions $ds = dx$ et $v^2 = 2gh$ pour $x = 0$ et $y = K$. D'Alembert obtient ainsi l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2gy^2dx^2}{v^2K^2},$$

c'est-à-dire, compte tenu de $v^2 = 2gh$,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dx^2(x+h)}{K^2h}. \tag{26}$$

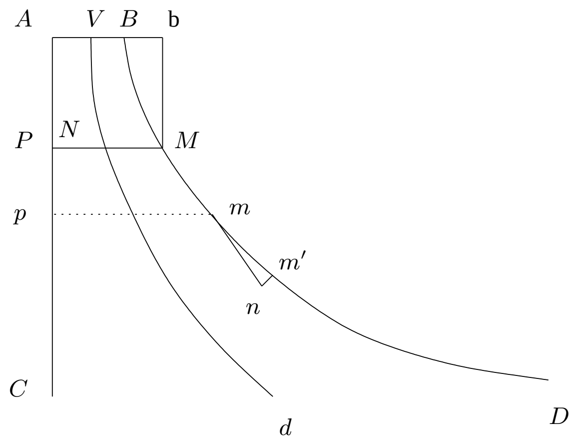


Fig. XVIII – Représentation de la partie droite d'une veine de fluide délimitée par l'axe médiant AC et le contour $BMmm'D$.

Dans le Mémoire 32 § IV des *Opuscules* t. V (1768), D'Alembert tentait, sans succès, d'intégrer cette équation (26). Il cherche donc à montrer, dans les art. 25 à 30 du Mémoire 57 § VI qu'elle peut effectivement être considérée comme une expression explicite des contours de la veine contractée.

Il se place, pour ce faire, dans le cas particulier

$$y^2 = \frac{K^2 h}{x+h}, \tag{27}$$

lequel correspond également à l'équation obtenue dans l'hypothèse où la vitesse de la tranche de la veine contractée située à la distance x de l'orifice vérifie $\sqrt{2g(x+h)}$, c'est-à-dire dans l'hypothèse où cette tranche se meut sous le seul effet de l'accélération de la pesanteur, compte tenu de la relation $y\sqrt{2g(x+h)} = K\sqrt{2gh}$ imposée par la constante du débit de l'écoulement. Il montre dès lors que cette équation (27) ne satisfait ni aux conditions $g\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ — c'est là l'équation (25) — et $\dfrac{dv}{dt} = g$ tirées de l'application de son principe de la dynamique, ni à la condition $ydx =$ Cste correspondant à l'expression de l'incompressibilité du fluide. Il conclut de là que « la veine du fluide ne peut avoir pour équation $y^2 = \dfrac{K^2h}{x+h}$ »[429].

Cette étude le conduit donc à un nouvel échec, mais lui donne néanmoins l'occasion de donner une nouvelle démonstration, la première étant due à J. Bernoulli dans son *Hydraulique*[430], de l'irrecevabilité de la théorie de la cataracte de Newton. « Les mêmes raisons », explique-t-il[431],

> « prouvent que cette équation ne peut représenter, comme l'a cru M. Newton, la cataracte ou courbe suivant laquelle le fluide se meut au-dedans du vase. M. Bernoulli, dans son Hydraulique, a déjà fait voir, par d'autres raisons, l'impossibilité de cette prétendue cataracte. »

Dans la seconde édition de ses *Principia Mathematica Philisophae Naturalis* (1713)[432], Newton définit en effet, afin de rendre compte du phénomène de contraction de la veine, une cataracte $ABNFEM$ devant guider le mouvement d'un fluide pesant jusqu'à l'orifice EF percé au fond d'un vase cylindrique $ABCD$ (voir la Fig. XIX)[433] :

> « Supposez un cylindre de glace [...] de la même largeur que l'intérieur du vase, qui ait le même axe, & qui descende continuellement avec un mouvement uniforme ; & que ses parties, dans le moment qu'elles auront atteint la superficie AB, se

[429] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VI, art. 30, p. 117. Nous avons substitué, dans cet extrait, la notation K désignant la demi-section de l'orifice inférieure à la notation d'origine a.

[430] Cf. J. Bernoulli, *Hydraulique*, *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1743, Partie II, § LX, p. 483-484. J. Bernoulli y réfute la théorie de cataracte de Newton parce qu'elle contredit les lois de l'hydrostatique.

[431] D'Alembert, *Ibid.* note 429.

[432] Cf. Newton, *Principia Mathematica Philisophae Naturalis*, 2[nde] édition, vol. II, prop. XXXVI, p. 303-313.

[433] Newton, *Principia Mathematica Philisophae Naturalis*, trad. de la Marquise du Châtelet, t. I, 1759, p. 358.

liquifient, & en se convertissant en eau, qu'elles s'écoulent dans le vase par leur gravité, & forment, en tombant, une cataracte ou colonne d'eau $ABNFEM$ qui passe par le trou EF & qui l'emplisse entierement ».

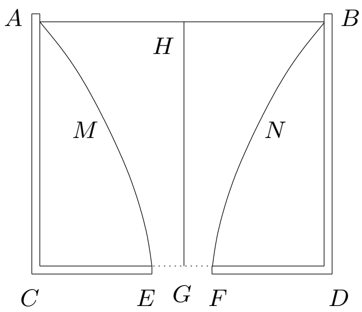


Fig. XIX – Cataracte $AMEFNB$ guidant, selon Newton, le fluide de la surface supérieure AB jusqu'à l'orifice inférieur EF.

La figure de cette cataracte sera donnée, selon Newton, par l'équation $y^2 = \dfrac{a^2h}{x}$, y et a désignant les sections des tranches MN et AB, h et x les hauteurs du vase et du fluide en MN, repérées par rapport à la surface supérieure[434].

L'absence de résultats concrets de D'Alembert sur cette question de la contraction de la veine fait mieux sentir la nature de la querelle l'opposant à Borda dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Il s'agit d'une polémique entre un savant porteur d'un nouveau savoir faire expérimental et un pur théoricien.

Remis en perspective par rapport à la question plus générale de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond, les résultats de Borda concernant la détermination des rapports de contraction, ainsi que ceux de Bossut, constituent une réelle avancée pour ce qui est de concilier théorie et expérience. Nous avions cependant pu constater, dans le chapitre précédent, qu'il en est pas de même de l'hypothèse des tuyaux curvilignes adoptée dans le « Mémoire sur l'écoulement » afin d'affiner la détermination théorique de la vitesse d'écoulement du fluide au sortir d'un tel vase. La nouvelle version du parallélisme des tranches, dite des parties stagnantes, proposée dans le Mémoire 57 ne conduit pas non plus à de réels progrès dans ce domaine. Elle ne permet pas même à D'Alembert de démontrer l'irrecevabilité des critiques de Borda au sujet des forces accélératrices animant les surfaces supérieure et inférieure du fluide au commencement du mouvement.

---

[434] Pour plus de détails sur la théorie de la cataracte de Newton, voir G.E. Smith, « Was Wrong Newton Bad Newton ? », *Wrong for the Right Reasons*, éd. par J. Z. Buchwald et A. Franklin, *Archimedes*, vol. 11, Springer, 2005, p. 127-160, et M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007, p. 139-150.

Les recherches du savant sur cette version intermédiaire entre le parallélisme et l'hypothèse des tuyaux curvilignes constituent en outre une riche source d'informations, grâce à laquelle nous sommes parvenus à appréhender sa façon de concevoir la notion de premiers instants de l'écoulement comme l'équivalent de ce que nous appelons aujourd'hui la *phase transitoire* du mouvement. Elles font également intervenir le concept de ténacité et d'adhérence des particules fluides entre elles, un concept remontant à sa théorie de 1744 dont nous avons conséquemment pu mettre en évidence le sens physique, en rejettant notamment l'idée de prémices du concept moderne de *viscosité*, telle que sa définition par D'Alembert peut le suggèrer au premier abord. Nous avons enfin, dans le courant de ce chapitre, évoqué une seconde utilité de cette hypothèse des parties stagnantes dans la théorie du savant : assurer le respect de la loi leibnizienne de continuité.

Cette nécessité de garantir une évolution par degrés insensibles de la vitesse du fluide s'écoulant à l'intérieur d'un vase dont la section varie brusquement — c'est le cas d'un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond — constitue, selon D'Alembert, une condition nécessaire à l'application du principe de conservation des forces vives. Elle correspond également, comme nous allons le voir, au principal argument que le savant oppose à la théorie des pertes de forces vives avançée par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement ». Suite à l'échec, du point de vue de la conciliation avec l'expérience, de sa méthode de mise en équation du mouvement d'un fluide dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes, Borda revient en effet à l'approximation du parallélisme, et assimile le mouvement mutuel des tranches à un choc avec perte de forces vives entre corps solides dans l'ensemble des questions faisant intervenir une conduite dont la section augmente, soit brusquement, soit de façon continue. Il s'ensuit une polémique avec D'Alembert, farouchement opposé à cette idée, dont nous proposons de présenter les tenants et les aboutissants dans le chapitre suivant.

Cette querelle est d'autant plus intéressante, de notre point de vue, que la théorie des forces vives de Borda s'inspire d'une idée soumise par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique* (1738) et dont D'Alembert rejette de même la teneur dans le Mémoire 57. Elle renvoie également à un différend entre la solution de ces deux derniers savants sur un problème que nous connaissons bien, l'écoulement dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Ce différend, mis en avant par D'Alembert dans la première édition de son *Traité des fluides* (1744), Borda pense l'avoir résolu dans son « Mémoire sur l'écoulement », ce qui provoquera de même réponses et contre-propositions de l'Encyclopédiste dans la quatrième et dernière phase de son œuvre. L'examen de cet autre sujet de conflit se trouve, nous le verrons, directement lié à la question des pertes de forces vives. Il nous permettra de clore l'étude panoramique, largement entamée dans ce chapitre, sur l'abord du problème du vase cylindrique percé d'un orifice en son fond dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

Ce nouveau versant de notre travail engage donc une étude de la première édition du *Traité des fluides* jusqu'au Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII de D'Alembert. Il nous apprendra beaucoup sur sa façon de concevoir, physiquement, le comportement d'un fluide en mouvement, en nous offrant notamment l'occasion de préciser sa position sur le sujet par rapport à celles de D. Bernoulli et Borda, et, de façon inattendue, de prendre conscience de l'influence de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli sur sa théorie des écoulements.

Chapitre VII. LE STATUT DE LA LOI LEIBNIZIENNE DE CONTINUITÉ DANS L'ŒUVRE DE D'ALEMBERT EN HYDRODYNAMIQUE (1744-1780)

Avec la question des limites de validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches et du choix de la meilleure représentation théorique des trajectoires d'un fluide s'écoulant à l'intérieur d'un vase, le problème des conditions d'application du principe de conservation des forces vives constitue l'un des deux principaux sujets de la querelle opposant D'Alembert à Borda dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770.

Cet sujet de polémique remonte en fait à une hypothèse émise par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique*, consistant à tenir compte d'une perte de forces vives dans le cas de brusques variations de la section d'écoulement. Dans son « Mémoire sur l'écoulement », Borda propose, résultats expérimentaux à l'appui, de faire passer l'hypothèse de D. Bernoulli au rang de théorie, en généralisant l'idée de prendre en compte une perte de forces à tous les types de canaux ou de vases présentant une augmentation, brusque ou continue, de leurs sections. Il met ainsi intuitivement le doigt sur le phénomène aujourd'hui connu sous le nom de *pertes de charges singulières*. Il établit, qui plus est, une formule permettant d'évaluer la valeur de cette perte dans un cas particulier de conduite : il s'agit de l'actuel *théorème de Borda-Carnot*. Avec ses recherches, présentées dans le chapitre précédent, concernant la question de la contraction de la veine, cette découverte forme l'un des deux éléments ayant concouru à la pérennité de son mémoire de 1766. Elle correspond, dans le même temps, à l'aspect de sa théorie le plus couramment relevé par l'historiographie.

Si l'on excepte le physicien Barré de Saint-Venant qui, nous y reviendrons, publie un mémoire[435] à la fin du XIXe siècle contenant notamment un historique détaillé de ce théorème ainsi qu'une discussion approfondie de la pertinence des démontrations proposées par D. Bernoulli et Borda, les historiens de l'hydrodynamique ayant abordé le sujet[436] n'ont toutefois, et plutôt étrangement, jamais relevé les erreurs commises par l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement ». Celui-ci, nous le mettrons en évidence, étend en effet sa théorie des pertes de forces vives aux vases ou conduites présentant une augmentation continue de leur section d'écoulement, là où la mécanique des fluides moderne la restreint aux seuls cas de brusques variations. Sa justification et son évalua-

[435] Adhémar Barré de Saint-Venant, « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44 (1888), 193-244.

[436] Voir notamment R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Neuchâtel, 1950, p. 292-295, H. Rouse et S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963, p. 125-126 et J. S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, Madrid, UNED, 1996, p. 481-489.

tion théorique du phénomène reposent, d'autre part, sur une assimilation, physiquement erronée, entre le mouvement des tranches du fluide et les lois de la communication du mouvement des corps solides : une perte a lieu, selon lui, au sein de l'écoulement de la même façon qu'une perte se produit lors du choc de deux masses non parfaitement élastiques.

Les réponses apportées par D'Alembert dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) ne manquent pas, comme nous le verrons, de cibler ces défauts de la théorie des pertes de forces vives de Borda, théorie par ailleurs brillante compte tenu de l'intuition physique dont son auteur fait preuve concernant un phénomène encore aujourd'hui considéré comme difficile. Elles rejettent donc également, à tort, la découverte de son contradicteur, ainsi que l'idée initialement émise par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique*. Ce n'est toutefois peut-être pas là l'aspect le plus intéressant de notre examen de ce sujet de polémique.

Nous montrerons en effet que ces réponses de D'Alembert constituent avant tout une défense en régle d'une mécanique des fluides *continue*. Cette conception, propre au savant, nous sera préalablement révélée par l'étude d'un autre différend entre D'Alembert et Borda, remontant lui-même à un sujet de désaccord du premier des deux savants avec D. Bernoulli. Dans la première édition de son *Traité des fluides* (1744), D'Alembert reproche généralement à ce dernier d'avoir, dans un certain nombre de problèmes, fait usage du principe de conservation des forces vives alors même que la loi leibnizienne de continuité ne se trouve pas respectée. Il donne, dans cette optique, une illustration précise de la pertinence de son point de vue sur la question, considérée dans l'hypothèse du parallélisme, de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond, une question que reprendra ensuite Borda de façon polémique dans son « Mémoire sur l'écoulement » en faisant voir comment les solutions de ses deux prédécesseurs peuvent s'y accorder.

Cette loi de continuité, directement héritée, nous l'avons vu, des querelles mécaniciennes de la fin du XVII^e et début du XVIII^e siècles — voir le chapitre II, p. 79 —, constitue, dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770) et dans le Mémoire 57, le leit-motiv de D'Alembert contre la théorie des pertes de forces vives de Borda. Elle correspond également à sa stratégie de réponse contre la méthode proposée et permettant, d'après l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement », de régler le différend entre ses deux prédécesseurs concernant le mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond.

C'est cet argument même de continuité de l'écoulement qui incite D'Alembert, dès 1744, à proposer l'hypothèse des parties stagnantes dont nous venons de détailler le rôle dans le cadre du débât l'opposant à Borda sur les limites de validité des hypothèses unidimensionnelles des écoulements. Cette hypothèse joue donc de nouveau un rôle important vis-à-vis de cet autre sujet de querelle. Nous sommes par ailleurs tombés, dans le Mémoire 51, § IV, des *Opuscules* t. VI (1773), sur une référence de D'Alembert à un certain mémoire latin d'A. G. Kaestner, intitulé « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones »[437], c'est-à-dire « Pour l'Hydraulique de Jean Bernoulli contre les objections de Monsieur d'Alembert », et publié en 1769. Ce texte, comme son titre l'indique, correspond à une défense de l'*Hydraulique* (1742) de J. Bernoulli contre la dizaine de pages de commentaires critiques visant cet ouvrage dans la première édition du *Traité des fluides* (1744) de D'Alembert. Sa traduction en français, ainsi que celle de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli — traité dont il n'existait qu'une traduction anglaise par T. Carmody et H. Kobus —, toutes deux réalisées en collaboration avec B. Bru, nous ont permis de réaliser une étude croisée des trois écrits, laquelle nous permettra ici de montrer que cette théorie des parties stagnantes de D'Alembert, de même que cette idée récurrente du respect de la loi de continuité, constituent très probablement une influence directe de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli sur la théorie des écoulements de D'Alembert[438].

Ces diverses facettes du différend initial entre D. Bernoulli et D'Alembert sur la question du vase cylindrique percé d'un orifice en son fond formeront le corps de la première partie de ce chapitre. Elles sont également, comme nous le verrons, directement liées avec la polémique entre D'Alembert et Borda sur la question des pertes de forces vives. Quant à la conception des écoulements qui s'en dégage, conception « Jean-Bernoullienne » fondée sur la loi de continuité, elle constituera, comme nous l'avancions, une clé pour l'abord de la seconde partie de notre étude, consacrée au nœud central de ce même polémique. Nous montrerons en effet comment elle permet à D'Alembert de cibler, avec beaucoup de justesse, les impairs de son contradicteur, et comment elle le fait passer à côté de la principale découverte du « Mémoire sur l'écoulement » : le phénomène de *perte de charge singulière*. Nous nous appuierons, ce faisant, sur le point de vue d'Adhémar Barré de Saint-Venant dans le mémoire que nous évoquions plus avant[439].

---

[437] « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89.

[438] Cette étude a fait l'objet d'une communication intitulée « Le statut de la *loi de continuité* dans l'*Hydraulique* de Jean Bernoulli et le *Traité des fluides* de D'Alembert à la lumière d'un mémoire d'Abraham Gotthelf Kaestner » et destinée à être publiée dans le vol. XXVIII, fasc. 2, de la revue italienne *Bolletinno di storia delle scienze matematiche* rassemblant les actes du colloque « D'Alembert, i Lumi, l'Europa » ayant eu lieu à *Levico Terme* (Italie) du 24 au 29 septembre 2006.

[439] Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 435.

1. D'un différend entre D'Alembert et D. Bernoulli et de ses répercussions dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770

Nature du différend entre D'Alembert et D. Bernoulli

Le différend entre D. Bernoulli et D'Alembert, dont Borda pense être venu à bout dans son « Mémoire sur l'écoulement », provient d'une divergence de leurs résultats pour le problème de l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond (voir la Fig. XX), une divergence volontaire, comme nous allons le voir, puisque mise en avant par l'auteur du *Traité des fluides* (1744) afin d'illustrer l'erreur qui consisterait à appliquer le principe de conservation des forces vives ou le principe de dynamique dans des cas où la loi de continuité ne se trouve pas respectée. Notons dès à présent, ce détail ayant son importance, que les trois géomètres travaillent sur cette question, dans leurs écrits respectifs, avec une ouverture inférieure EF de taille quelconque.

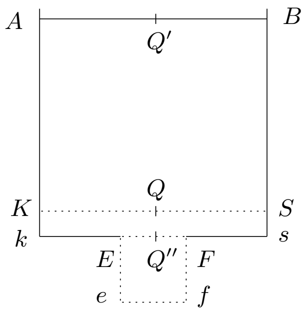


Fig. XX – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond. Les volumes $KSsk$ et $EFfe$ correspondent à l'état de la tranche inférieure avant et après le passage de l'orifice.

Dans l'art. 113 de la première édition de son *Traité des fluides*, D'Alembert en aborde successivement l'étude par le biais du principe de conservation des forces vives, puis par celui de son propre principe de la dynamique. Dans le premier cas, l'équation du mouvement, identique à celle obtenue par D. Bernoulli dans la section III de son *Hydrodynamique*, découle du processus de mise en équation pour un vase de section variable. Le passage de l'une à l'autre n'étant cependant pas immédiat, reprenons donc ici le calcul à partir de l'équation tirée de l'application du principe de conservation des forces vives — voir le chapitre II, p. 73 —, c'est-à-dire, compte tenu du vase considéré,

$$Nudu + \frac{1}{2}u^2dN = (ydx) \times g \times Q'Q'',$$

avec $N = \int_{Q'}^{Q''} \frac{m^2 dx}{y}$, m et u désignant la section et la vitesse d'une tranche de référence. Sachant que $Q'Q'' = x$, et $dN = \left(\frac{k^2 - K^2}{kK^2}\right) mdx$[440], avec $y = \text{Cste} = k$ et K les sections du vase et de l'ouverture EF, il vient

$$kK^2 Nudu + m^2(k^2 - K^2)\frac{u^2}{2}dx = K^2 k^2 gxdx,$$

qui correspond à l'équation du mouvement d'un fluide dans un vase de section variable, telle qu'elle se trouve établie dans l'art. 105 du *Traité des fluides*[441]. Dans ce problème du vase cylindrique, D'Alembert considère néanmoins la tranche $KSsk$ toujours dans le vase à l'instant considéré, et pose donc $m = k$ afin que u désigne sa vitesse. Remarquant alors que $N = \int_{Q'}^{Q''} \frac{m^2 dx}{y} = kx$ compte tenu de $y = \text{Cste} = k$, il parvient ainsi à une équation du mouvement similaire à celle obtenue par D. Bernoulli dans la section III de son *Hydrodynamique*[442], à savoir

$$x\frac{udu}{g} - \left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\frac{u^2}{2g}dx = xdx,$$

une équation que nous préférerons, afin d'en faciliter une comparaison ultérieure, mettre sous la forme :

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right) - \left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\frac{u^2}{2g} = x. \tag{28}$$

L'application de son principe de la dynamique conduit cependant D'Alembert à un résultat différent.

Cette seconde méthode consiste à examiner le mouvement des différentes tranches composant la masse de fluide dans le vase entre deux instants t et $t+dt$ de l'écoulement. « Il est clair », comme l'explique D'Alembert dans le même art. 113, qu'il faudra, dans ce cas de figure[443]

---

[440] Cf. D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 88, p. 72-73.

[441] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 440, Livre II, art. 105, p. 88. Notons que, dans cet article, D'Alembert obtient l'équation $kK^2 Nudu - m^2(k^2 - K^2)\frac{u^2}{2}dx = -K^2 k^2 gxdx$. Cette différence de signes avec l'équation que nous reproduisons ci-dessus vient de ce que le savant y repère implicitement la variable x par rapport au fond du vase au lieu de la repérer par rapport à la surface supérieure du fluide (dx se change ainsi en $-dx$). D'Alembert adoptera cependant la « convention » inverse dans le Mémoire 51 § IV et en certains endroits du Mémoire 57 de ses *Opuscules*, c'est-à-dire la convention que nous avions précédemment adoptée et à laquelle nous nous tiendrons donc, par souci de cohérence et de lisibilité, dans toute la suite de cette étude.

[442] Cf. D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, 1738, Sect. III, § 16, p. 36.

[443] D'Alembert, *Ibid.* note 440, Livre II, art. 113, p. 98. Nous avons substitué, dans cet extrait, la notation g désignant l'accélération de la pesanteur à la notation d'origine p.

> « regarder la vitesse u de la tranche $KSsk$, au moment qu'elle se change en V, comme composée de la vitesse V & de la vitesse $u - V$, & que les particules qui sont dans l'espace $ksSK$, animées de la vitesse $V - u$ suivant $[Q''Q']$, devroient faire équilibre au reste du Fluide animé de la vitesse $gdt - du$ ».

L'application du principe de la dynamique le contraint, autrement dit, à faire un cas particulier de la tranche inférieure, dont la vitesse passe de la valeur u dans le vase à la valeur V hors du vase pendant l'intervalle de temps dt, tandis que les autres tranches se contentent d'acquérir l'incrément de vitesse du sous l'effet de l'accélération de la pesanteur g. La tranche inférieure et chacune des tranches composant la masse de fluide en mouvement à l'intérieur du vase perdent ainsi respectivement les vitesses $u - V$ et $gdt - du$. Elles doivent, dans le même temps, se faire mutuellement équilibre, ce qui conduit donc à D'Alembert à l'équation

$$QQ'' \times (V - u) = \int_{Q'}^{Q''} (gdt - du)dx,$$

c'est-à-dire

$$QQ'' \times (V - u) = Q'Q'' \times (gdt - du),$$

ou encore

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right) - 2\left(1 - \frac{k}{K}\right)\frac{u^2}{2g} = x. \tag{29}$$

Cette différence entre (28) et (29) ne surprend pas D'Alembert. La seconde, fait-t-il en effet remarquer, est celle qui donne une « détermination fautive du mouvement », parce qu'en[444]

> « y supposant l'ouverture K fort petite, on ne pourroit pas en déduire que la vitesse du fluide qui sort, fût égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement de la hauteur $[Q'Q'']$, quoique ce fait soit constaté par l'Expérience ».

Elle ne donne pas, en d'autre termes, la bonne expression de la vitesse de sortie du fluide, à savoir $\sqrt{2gx}$, avec $Q'Q'' = x$, dans le cas d'un orifice très petit — voir le chapitre V, p. 165. Cet état de fait, explique-t-il, vient de ce que la méthode de mise en équation repose, dans ce cas, sur la supposition que[445]

> « la vitesse u de la tranche $KsSK$ se change subitement d'un instant à l'autre dans la vitesse V que doit avoir le Fluide qui sort par [l'ouverture inférieure] ».

Au travers de cet exemple, D'Alembert présente donc une preuve de la pertinence de son principal reproche à l'égard de la théorie de D. Bernoulli qui a eu, selon lui, le tort d'appliquer le principe de conservation des forces vives à un certain nombre de

[444] D'Alembert, *Ibid* note 440, Livre II, art. 113, p. 98-99.

[445] D'Alembert, *Ibid* note 440, Livre II, art. 113, p. 98.

problèmes, l'écoulement dans un vase immergé dans un autre pour citer le principal, « dans la supposition, que la vitesse du Fluide [...] varie brusquement en un instant d'une quantité finie »[446], c'est-à-dire dans une hypothèse contraire au respect de la loi leibnizienne de continuité.

La résolution du différend dans le « Mémoire sur l'écoulement » de Borda

Dans l'art. 4 de son « Mémoire sur l'écoulement », Borda n'est pas du même avis que l'auteur du *Traité des fluides.* L'inexactitude de l'équation (29) ne vient pas, selon lui, du fait d'avoir employé le principe de la dynamique dans la supposition « qu'une tranche acquiert une vîtesse finie dans un temps infiniment petit », mais plutôt « de la manière dont M. d'Alembert a appliqué son principe à la question dont il s'agit »[447].

Il propose dès lors, pour démontrer la justesse de son propos, de considérer l'équilibre de la tranche inférieure dans deux situations différentes. La première, c'est là le cas de figure envisagé par D'Alembert, consiste à supposer que la tranche sur le point de s'échapper par l'orifice du vase n'a pas encore commencé à sortir. Elle conduit donc logiquement à la même équation que celle de son prédécesseur, à savoir[448]

$$-QQ'' \times (u - V) = Q'Q'' \times (gdt - du). \tag{30}$$

La seconde correspond au cas où la tranche se trouve toute entière à l'extérieur du vase, ce qui, du fait du caractère incompressible du fluide ($ydx = \text{Cste}$), impose la prise en compte d'une nouvelle expression de son épaisseur, $\dfrac{BQ \times k}{K}$, et permet d'établir une seconde équation

$$\frac{QQ'' \times k}{K} = Q'Q'' \times (gdt - du). \tag{31}$$

Constatant que les « deux équations ne donnent pas la même chose », et qu'il ne sera donc « pas indifférent de supposer l'équilibre au commencement ou à la fin du mouvement de la tranche »[449], Borda considère la moyenne des deux situations, c'est-à-dire la valeur de la vitesse perdue par la tranche « au milieu de l'instant » dt. Il parvient ainsi à l'équation

$$\frac{QQ''}{2}\left(1 + \frac{k}{K}\right) = Q'Q'' \times (gdt - du),$$

[446] D'Alembert, *Ibid* note 440, Livre II, art. 143, p. 121.

[447] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 4, p. 583.

[448] Cf. Borda, *Ibid.* note 447, art. 4, p. 584. Par souci de cohérence, nous avons, ici et dans la suite, susbtitué les notations adoptées par D'Alembert à celles originales de Borda. Dans l'art. 4 du « Mémoire sur l'écoulement », V et u désignent en particulier, à l'inverse du *Traité des fluides* et de la convention que nous avons retenue, les vitesses du fluide à l'intérieur et à l'extérieur du vase.

[449] Borda, *Ibid.* note 447, art. 4, p. 584.

qui s'écrit également

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right) - \left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\frac{u^2}{2g} = x,$$

et coïncide donc avec le résultat (28) obtenu par D'Alembert et D. Bernoulli via l'application du principe de conservation des forces vives.

Examen des raisonnements de D'Alembert et Borda dans ce cas de figure

La difficulté mise en avant par D'Alembert dans son *Traité des fluides* et réexplorée par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » vient d'abord de ce que le parallélisme des tranches constitue une hypothèse inadaptée à l'étude d'un problème présentant une brusque variation de sa section de l'écoulement. C'est le cas du mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice de section finie en son fond, puisque la tranche inférieure, dans cette hypothèse, doit passer d'une conduite, le vase, de section k, à une autre conduite de section K, virtuelle quant à elle, car coïncidant avec la veine du fluide après le franchissement de l'orifice (abstraction faite du phénomène de contraction de la veine). Cette brusque variation de la section de la tranche impose, du même coup, un changement instantané de la valeur de sa vitesse, laquelle valeur passe effectivement de u à $V = \dfrac{ku}{K}$ dans l'intervalle de temps dt, compte tenu de la relation $yv = \text{Cste}$ assurant la conservation du débit de l'écoulement.

Cette discontinuité de la vitesse de la tranche inférieure au moment de son passage à travers l'orifice justifie ici — pourvu, naturellement, que l'orifice soit de diamètre non négligeable comparativement à celui du vase[450] — la prise en compte de ce que nous appellerions aujourd'hui une *perte de charge singulières*, consécutive au changement subit de sa section d'écoulement. Cette perte, dite de « forces vives » à cette époque, Borda en est le découvreur dans son « Mémoire sur l'écoulement ». Il en donne, dans le cas d'un brusque augmentation de la section d'écoulement, une estimation conforme à la valeur que nous lui attribuons de nos jours, à savoir $\dfrac{1}{2}(u-V)^2$, u et V correspondant respectivement à la vitesse du fluide en amont et en aval du changement de section[451]. Pour autant, sa solution fait ici abstraction de ce phénomène et consiste à considérer la moyenne de deux situations physiques distinctes : la tranche inférieure du fluide à

[450] Lorsque la section de l'orifice est négligeable par rapport à celle du vase, le phénomène de *pertes de charge singulières* n'a pas lieu et la question se ramène à l'étude d'un *écoulement de Torricelli*.

[451] Les *pertes de charges singulières*, également appelées *pertes de charges accidentelles*, correspondent à une résistance à l'écoulement provoquée par des accidents de parcours au sein de la conduite, tels qu'un brusque rétrécissement ou élargissement de la section d'écoulement. Elles se traduisent, comme leur nom l'indique, par une diminuation de la *charge*, c'est-à-dire de la quantité $\dfrac{u^2}{2} + p - gx$, p désignant la pression, dans le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible idéal — la densité étant supposée égale à l'unité.

l'intérieur, puis à l'extérieur du vase. Il a, ce faisant, recours à un artifice de calcul qui ne permet pas de résoudre le fond du problème alors même qu'il possède la solution permettant de dépasser la difficulté mise au jour par D'Alembert dans la première édition de son *Traité des Fluides*.

Nous verrons, dans la suite de ce chapitre, que Borda se contente en fait d'intégrer une perte de forces vives dans les seuls problèmes engageant une *augmentation* brusque, ou continue, de la section d'écoulement : le passage de la tranche inférieure par l'orifice percé au fond du vase cylindrique induit ici une brusque diminuation et ne rentre donc pas dans ce cas de figure. Le raisonnement qu'il propose dans cette question n'a, de ce fait, rien de contradictoire ni d'incohérent avec son approche générale dans le « Mémoire sur l'écoulement ».

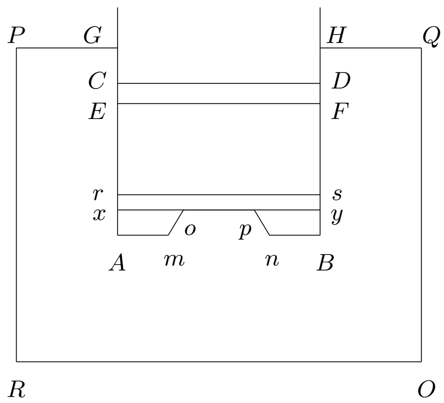


Fig. XXI – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique $GHBA$ percé d'un orifice en son fond et immergé dans un vase $PROQ$ de plus grande contenance.

Nous avons néanmoins besoin, afin de saisir le sens de la méthode de mise en équation de D'Alembert par le moyen de son principe de dynamique, de faire prématurément état de l'une des deux méthodes permettant à Borda d'estimer théoriquement la perte de forces vives $\frac{1}{2}(u-V)^2$ dans le cas d'un subit accroissement de la section de la conduite. La première, dont nous donnerons le détail dans la suite du chapitre, repose sur le principe de conservation des forces vives. La seconde fait appel au principe de la dynamique de D'Alembert. Elle est donnée par Borda dans l'art. 14 de son mémoire et s'applique au mouvement ascendant de la tranche de fluide $rsxy$ lors de son passage à travers l'orifice mn (voir la Fig. XXI). « Il est clair », explique-t-il, que cette tranche « perdra dans un instant la vitesse » $V-u$, et qu'on peut donc « supposer qu'elle a été animée pendant cet instant par une force »[452] accélératrice $\frac{u-V}{dt}$, ce qui équivaut, compte tenu

[452] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 14, p. 593. Notons que, dans l'art. 14 du « Mémoire sur l'écoulement », V et u désignent respectivement la vitesse de la tranche $rsxy$ en amont et en aval de l'orifice inférieur mn.

de la distance dx parcourue après avoir franchi l'orifice — cette distance correspond à l'épaisseur de la tranche $rsxy$ dans le vase —, à ce qu'il appelle un « moment » (nous parlerions aujourd'hui de *travail*), $\frac{u-V}{dt}dx$, c'est-à-dire $u(u-V)$ sachant que $u = \frac{dx}{dt}$.

Il suffit alors de se rappeler que la tranche possède respectivement les forces vives $\frac{V^2}{2}$ et $\frac{u^2}{2}$ avant et après le passage de l'ouverture inférieure du vase : la quantité

$$\frac{V^2}{2} + u(u-V) - \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}(u-V)^2$$

correspondra donc à la force vive perdue par la tranche dans le cas d'un brusque élargissement de la section d'écoulement.

Il sera dès lors intéressant de constater que ce raisonnement s'avère très proche, sur le fond, de celui mis en œuvre par D'Alembert dans l'art. 113 de la première édition du *Traité des fluides* afin de mettre en équation le mouvement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond par le moyen de son principe de la dynamique. Rappelons que cette méthode le contraignait en effet à faire un cas particulier de la tranche inférieure $ksSK$ (voir la Fig. XX). Elle consistait, d'une part, à prendre en compte la vitesse $u - V$ ou la force accélératrice $\frac{u-V}{dt}$ perdue, c'est-à-dire, pour reprendre les termes du raisonnement de Borda, le « moment » $QQ'' \times \frac{u-V}{dt}$ ou $u(u-V)$ perdu par cette tranche dans l'intervalle de temps dt nécessaire à son passage à travers l'orifice EF. Elle le conduisait ensuite à écrire l'équation traduisant l'équilibre existant, d'après son principe, entre cette tranche et l'ensemble des autres tranches de la masse de fluide en mouvement dans le vase, de telle sorte que

$$-QQ'' \times (u-V) = \int_{Q'}^{Q''} (gdt - du)dx.$$

Faisant abstration de la pesanteur g et se rappelant que $BQ = dx$ et $u = \frac{dx}{dt}$, nous remarquons ainsi que cette relation divisée par dt s'écrit également

$$u(u-V) = -\int_{Q}^{Q''} d\left(\frac{du^2}{dt}\right) = -\frac{V^2}{2} + \frac{u^2}{2},$$

et que la différence entre les deux membres de cette nouvelle équation vérifie

$$\frac{V^2}{2} + u(u-V) - \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}(u-V)^2.$$

De notre point de vue, la méthode de D'Alembert revient par conséquent à intégrer la quantité $\frac{1}{2}(u-V)^2$ correspondant, d'après Borda, à l'expression des pertes de forces vives induites par un brusque également de la section d'écoulement. C'est d'ailleurs l'équation obtenue par cette méthode, c'est-à-dire l'équation (29), que D'Alembert considérait, dans la première édition du *Traité des fluides*, et qu'il considèrera encore, dans la seconde, comme « une détermination fautive du mouvement », ce de façon parfaitement cohérente avec son rejet de la théorie des pertes de forces vives proposée dans le « Mémoire sur l'écoulement ».

L'artifice de calcul de Borda permet, à l'inverse, de se débarrasser de la perte de forces vives inconsciemment introduite par D'Alembert, et dont il défendra lui-même la cause, face à ce dernier, sur d'autres types de questions.

La réponse de D'Alembert dans la seconde édition du Traité des fluides *(1770) et le Mémoire 57 des* Opuscules *t. VIII (1780)*

Penchons-nous, pour l'heure, sur les objections de D'Alembert dans l'ajout à l'art. 113 de la seconde édition de son *Traité des fluides* et dans le Mémoire 57 § XI, intitulé « Du principe de conservation des forces vives dans le mouvement des fluides », de ses *Opuscules* t. VIII (1780). Nous venons de voir que D'Alembert n'a pas conscience d'avoir introduit une perte de forces vives par le biais de l'application de son principe de la dynamique. Il ne fait donc aucune mention de ce problème, mais ne cible pas moins le caractère artificiel du calcul proposé par Borda ainsi que son incapacité à pallier ce qu'il considère, dès 1744, comme le nœud de la question, à savoir le respect la loi de continuité.

Si le raisonnement de Borda lui paraît « bien vague et précaire », comme il le confie à Lagrange dans sa lettre du 6 février 1772[453], c'est qu'il repose en fait d'abord, selon lui, sur des « hypothèses [...] arbitraires », dont rien d'autre ne justifie la pertinence que « le besoin qu'on a d'arriver à un résultat tel qu'on le désire »[454], à savoir l'équation (28). Il pointe donc, dans le Mémoire 57 § XI, l'artifice de calcul sur lequel repose la démonstration du « Mémoire sur l'écoulement », un artifice d'autant plus frappant, ajoute-t-il, qu'on[455]

> « ignore absolument suivant quelle loi la vitesse u passe à V, & par conséquent si c'est lorsque la tranche est sortie à moitié [...] que la vitesse u a pris de son accroissement, & est devenue $u + \dfrac{V-u}{2}$ ».

Le raisonnement de Borda ne permet pas, d'autre part, de pallier ce qu'il mentionnait dans la première édition du *Traité des fluides* (1744) comme la principale difficulté du problème : assurer une évolution par degrés insensibles de la vitesse de la tranche inférieure, c'est-à-dire conforme au nécessaire respect de la loi de continuité. Compte

[453] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 100, p. 226.

[454] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XI, art. 10, p. 173.

[455] D'Alembert, *Ibid.* note 454, art. 12, p. 174.

tenu de cet impératif, la solution la plus exacte consisterait donc plutôt, d'après lui, à exprimer la vitesse de la tranche à moitié sortie sous la forme

$$u + \frac{V-u}{r},$$

avec « r un nombre constant, mais inconnu »[456], ou, mieux encore, à rendre compte du caractère nécessairement progressif du franchissement de l'orifice par la tranche grâce à la définition d'une expression paramétrée par n de son épaisseur à chaque instant, par exemple

$$\left[QQ''\frac{k}{nK} + QQ''\left(\frac{n-1}{n}\right)\right],$$

les quantités $QQ''\dfrac{k}{nK}$ et $QQ''\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ correspondant aux fractions de la tranche respectivement situées en-dehors et au-dedans du vase à l'instant considéré. Cette dernière alternative, déjà présente dans l'ajout à l'art. 113 de la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770), ne débouche naturellement sur rien de vraiment concluant puisque le résultat de sa mise en équation du problème par le principe de la dynamique correspond, selon lui, à un résultat incorrect. Elle le conduit, en se plaçant dans l'hypothèse d'un orifice infiniment petit, à une valeur de la vitesse V du fluide au sortir du vase vérifiant $V = \sqrt{\dfrac{k}{K}gx}$, c'est-à-dire une vitesse infinie — sachant que $K \ll k$ —, et donc différente de la valeur $\sqrt{2gx}$ confirmée par l'expérience, ce dont il conclut en 1770, conformément à sa position de 1744 face à D. Bernoulli, que son équation (29)[457]

> « est donc réellement celle qui convient à la supposition que la vîtesse de la tranche $ksSK$ passe brusquement de la valeur u à la valeur V & par conséquent le peu d'accord du résultat de cette Equation avec l'Expérience, prouve la fausseté de la solution ».

Le respect de la loi de continuité reste donc fondamentale à ses yeux sur cette question. Cet autre extrait, consécutif à la présentation de la précédente alternative dans le Mémoire 57 § XI en constitue une nouvelle confirmation[458] :

> « Il est vrai que dans mon *Traité des Fluides* (article 113), j'ai supposé pour l'équilibre que la tranche inférieure soit animée de la vitesse $V-u$ avant que de commencer à sortir du vase [...] ; j'ai remarqué en même-temps, que cette supposition, absolument nécessaire pour établir l'équilibre entraîne elle-même une supposition choquante, savoir, que la tranche inférieure se contracte dans un instant indivisible, & qu'elle ait pout ainsi dire à-la-fois la largeur k de la surface, & la largeur K de l'ouverture. Aussi l'équation qui résulte de cette supposition donne-t-elle un résultat opposé à celui que donne la vraie théorie, & que l'expérience confirme ».

[456] D'Alembert, *Ibid.* note 454, art. 14, p. 175.
[457] D'Alembert, *Traité des fluides*, 2$^{\text{nde}}$ édition, Paris, 1770, Livre II, art. 113, p. 110-111.
[458] D'Alembert, *Ibid.* note 454, art. 23, p. 178.

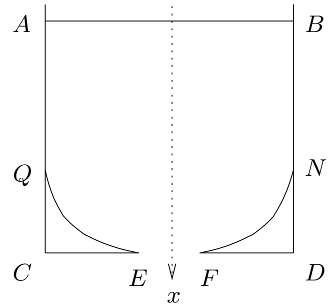


Fig. XXII – Ecoulement, avec apparition de parties stagnantes QCE et FND, d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond.

Pour s'assurer du respect de la loi de continuité, D'Alembert a en fait recours à une idée, dont nous avons déjà longuement étudié le rôle, dans le chapitre précédent, pour ce qui concerne la question des limites de validité des hypothèses unidimensionnelles. Elle se trouve pour la première fois formulée par le savant dans les art. 111 et 112 de la première édition de son *Traité des fluides* afin d'éviter que[459]

> « la vitesse de la tranche $ksSK$ se change en un instant, en une autre vitesse qui diffère de la premiére d'une quantité finie »

« On ne peut sauver cette espece d'absurdité », poursuit-il[460] (voir la Fig. XXII),

> « qu'en imaginant que les particules du Fluide qui sont proches du fond, s'approchent de ce fond par des mouvemens fort obliques suivant des lignes Courbes [QE], [ND], tandis que les parties du Fluide contenues dans les espaces [QCE], [FND] sont regardées comme stagnantes (...).
> De-là il s'ensuit qu'on peut substituer au vase donné, le vase factice [$AQENFB$] dans lequel on supposera que le Fluide se meuve ».

Il s'agit donc de ce que nous avons précédemment appelé l'hypothèse des parties stagnantes, consistant à restreindre le parallélisme des tranches à l'intérieur d'un vase fictif correspondant au vase cylindrique amputé des parties stagantes qui apparaissent du fait de la courbure prise par le fluide afin de gagner l'orifice inférieur. Le fait d'assimiler les parois de la partie inférieure du vase aux lignes QE et NF, c'est-à-dire aux contours des parties QCE et NFD, garantit en effet une diminution progressive, ou continue, de la section entre QN et l'orifice EF, et par là même, une augmentation progressive de la vitesse dans l'espace $QEFN$, compte tenu de la relation $yv = \text{Cste}$ imposée par la constance du débit de l'écoulement. Elle est, autrement dit, compatible avec le respect de la loi de continuité, et sera donc la seule à permettre l'application de son principe

[459] D'Alembert, *Traité des Fluides*, 1[ère] édition, Paris, 1744, art. 111, p. 96.
[460] D'Alembert, *Ibid.* note 459, art. 111 et 112, p. 96-97.

de la dynamique et du principe de conservation des forces vives pour l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique : ces principes donneront dès lors la même équation du mouvement, à savoir l'équation (28). C'est en partie pour le démontrer que le savant se livre à la mise en équation du problème selon les deux méthodes dans l'art. 113 de la première édition du *Traité des fluides* (1744) : « il est si essentiel », écrit-il en effet à cet endroit de l'ouvrage[461],

> « de supposer que les particules du Fluide s'approchent du fond $[EF]$ par des courbes $[QE]$, $[ND]$, que sans cela on devroit trouver pour la vitesse de l'eau qui sort par $[EF]$ une expression très-différente de $\sqrt{2gx}$ ».

Il confirme l'intérêt de son hypothèse vis-à-vis de ce problème dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII, en affirmant que la violation de la loi de continuité par la tranche inférieure[462]

> « n'a point lieu, si on suppose [...] que les particules qui sont proches du fond, s'en approchent par des lignes courbes QE et NF ».

Cet argument de continuité jouera, nous le verrons bientôt, un rôle central dans le cadre de sa polémique avec D. Bernoulli et Borda concernant l'idée de tenir compte d'une perte de forces vives dans certains types de problèmes. Il nous faut cependant préalablement souligner qu'il ne constitue pas une caractéristique spécifique de l'approche dalembertienne des écoulements. Il est effectivement fort probable que l'importance accordée à la loi de continuité, de même que la définition de l'hypothèse des parties stagnantes, constituent un héritage direct de la théorie de J. Bernoulli dans son *Hydraulique* (1742)[463]. C'est ce que nous proposons à présent de faire voir, en procédant à une étude de la question dans ce dernier ouvrage, ainsi qu'à un comparatif avec la théorie de D'Alembert, le tout à la lumière d'un mémoire latin peu connu des historiens de l'hydrodynamique[464], et rédigé par un auteur, Abraham Gotthelf Kaestner (1717-1800), dont le nom se trouve notamment associé à son « Histoire des mathématiques depuis le renouvellement des sciences jusqu'à la fin du XVIIIe siècle »[465] publiée en quatre volumes entre 1796 et 1800.

---

[461] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, art. 113, p. 97-98.

[462] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § V, art. 5, p. 75-76.

[463] Nous avons réalisé, en collaration avec B. Bru, une traduction française de l'intégralité de l'ouvrage. Les extraits de l'*Hydraulique* cités dans ce chapitre en sont directement issus.

[464] C. Truesdell et I. Szabò sont, à notre connaissance, les seuls à en faire mention : voir C. Truesdell, « Editor's Introduction », *Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich, 1955, p. LXXIII et LXXXIX ; I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1977, p. 237.

[465] A. G. Kaestner, *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Göttinguen, 4 vol., 1796-1800. Le quatrième volume, paru après sa mort, n'est pas achevé.

De la probable influence de l' Hydraulique *de Jean Bernoulli (1742) sur la théorie des écoulements de D'Alembert*

D'Alembert fait soudainement mention de cet auteur dans le dernier article du Mémoire 51 § IV de ses *Opuscules* t. VI (1773). Laissant, en guise de conclusion, les géomètres seuls juges de son hypothèse des tuyaux variables, la même raison l'empêche, écrit-il en effet[466],

> « de répondre ici aux observations que M. Kæstner a faites dans le second Volume des *Mémoires de Göttingen* sur mes objections contre la Théorie de M. Jean Bernoulli ; observations qui, à dire vrai, ne m'ont point fait changer d'avis, & ne me paroissent pas fort propres à détromper ceux qui auront examiné la Théorie de ce grand Géomètre, & pesé mes objections ».

Ce mémoire latin de Kaestner, intitulé « Pour l'Hydraulique de Jean Bernoulli contre les objections de Monsieur d'Alembert »[467] et publié en 1769, D'Alembert en apprend l'existence par l'intermédiaire de Lagrange. Dans sa lettre du 16 décembre 1771, ce dernier indique lui avoir fait parvenir ce volume des mémoires de Göttingue pour une raison bien particulière[468] :

> « c'est qu'il renferme un Mémoire qui vous intéresse particulièrement et qui est une espèce de défense de l'Hydraulique de Jean Bernoulli contre vos objections insérées dans le Traité des Fluides. L'auteur de ce Mémoire est un M. Kästner, qui a une grande réputation en Allemagne comme géomètre et comme littérateur : vous jugerez combien cette double réputation est fondée par la simple lecture du Mémoire dont je vous parle ; vous verrez que l'auteur y prétend aussi briller du côté de l'esprit et de la plaisanterie, et vous vous tiendrez les côtes de rire ».

Après avoir demandé conseil à Lagrange, et quelque peu hésité, D'Alembert, à qui il semble que les objections du géomètre et littérateur allemand « ne valent pas trop la peine », comme il le confie dans sa lettre à son confrère berlinois du 6 février 1772[469], finit donc par évoquer le dit mémoire et son auteur dans le Mémoire 51 § IV : c'est, il est vrai, une mention pour le moins stérile du point de vue scientifique, sans laquelle nous serions pourtant probablement passés à côté de ce texte. Nous allons voir que, pour ce qui concerne la loi de continuité et l'hypothèse des parties stagnantes, ce travail

---

466 D'Alembert, *Opuscules*, t. VI, Paris, 1773, Mémoire 51, § IV, art. 23, p. 390.

467 « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89. Nous avons réalisé, en collaration avec B. Bru, une traduction française de l'intégralité de ce mémoire Les extraits cités dans cette partie de notre thèse en sont directement issus.

468 *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 99, p. 222.

469 *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 100, p. 224.

de Kaestner, qui « passe surtout », selon Lagrange, « pour un des meilleurs écrivains allemands »[470], constitue en effet une pièce particulièrement éclairante.

Kaestner n'est pas un débutant pour ce qui concerne la théorie de l'écoulement des fluides, puisqu'il est également l'auteur d'un traité d'hydrodynamique[471], rédigé dans sa langue natale, l'allemand, et contenant un état des lieux des recherches expérimentales et théoriques menées jusqu'alors. Le mémoire auquel nous ferons ici référence est directement issu de cet ouvrage. Traduit en latin par les propres soins de Kaestner, qui cherche probablement par ce moyen à le faire parvenir jusqu'en France, il répond à l'objectif suivant[472] :

> « Comme dans les éléments d'Hydrodynamique que j'ai publiés récemment, j'ai présenté la théorie de Jean Bernoulli, je n'ai pas pu faire autrement que d'examiner avec soin les objections de d'Alembert. J'en ai conclu, après un examen attentif, que certaines choses de la doctrine de Bernoulli n'ont pas tant besoin d'être modifiées que d'être expliquées. Un adversaire de Bernoulli moins important que d'Alembert pouvait être dédaigné. Aussi grand qu'apparaisse ce dernier, la piété ordonne de défendre Bernoulli ».

Dans la première édition de son *Traité des fluides* (1744), D'Alembert consacre en effet une dizaine de pages au résumé et au commentaire du traité de Jean Bernoulli. Si le parti pris pour l'*Hydraulique* ne fait aucun doute, si, à l'instar de ce premier extrait du mémoire, les formules de Kaestner, réputé pour son esprit caustique et mordant, paraissent souvent bien sarcastiques à l'égard de D'Alembert, le mémoire n'en renferme pas moins un remarquable exposé des travaux de Jean Bernoulli, ainsi que des réponses aussi précises que pertinentes aux critiques émises par l'Encyclopédiste français. L'*Hydraulique* et le *Traité des fluides* étant des ouvrages difficiles, ou tout du moins réputés comme tels, nous profiterons de surcroît de la clarté des explications de Kaestner, qui dut également sa réputation à la qualité de l'enseignement qu'il prodigua en tant que titulaire de la chaire de mathématiques de Göttingue.

• La théorie de la « gorge » et le statut de la loi leibnizienne de continuité dans l'*Hydraulique* de J. Bernoulli

Nous avons déjà eu l'occasion — voir le chapitre II, p. 76 — de souligner le rôle de J. Bernoulli dans le cadre des querelles mécaniciennes du début du XVIIIe siècle. Nous le présentions notamment comme un fervent défenseur de la doctrine leibnizienne des forces vives, et donc de la loi de continuité selon laquelle, dans la nature, « tout ce qui

[470] *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 109 du 15 octobre 1772, Lagrange à D'Alembert, p. 247.

[471] A. G. Kaestner, *Anfangsgründe der Hydrodynamik welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten*, Göttingen, 1769.

[472] A. G. Kaestner, « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 47.

s'exécute, s'exécute par des degrés infiniment petits »[473].

Nous donnions également — voir le chapitre I, p. 41 —, un bref aperçu de son *Hydraulique*, au cours duquel nous précisions que s'il adopte, dans cet ouvrage, l'approximation du parallélisme des tranches utilisée par son fils D. Bernoulli, il renonce néanmoins à l'emploi du principe de conservation des forces vives fondant l'*Hydrodynamique*, le but étant, compte tenu de la persistance de la querelle des forces vives à cette époque, de proposer une « méthode directe, qui soit appuyée uniquement sur des principes dynamiques niés par personne »[474]. Il n'en a cependant pas moins recours à la loi de continuité. Celle-ci constitue, comme nous allons le voir, une composante cruciale de sa théorie des écoulements.

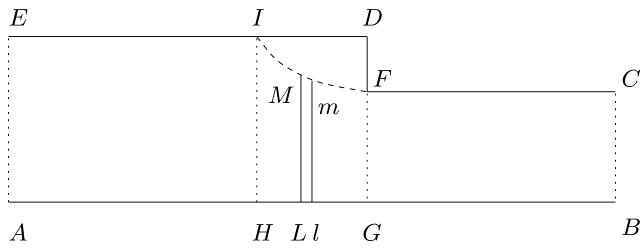


Fig. XXIII – Ecoulement d'un fluide dans un canal $ABCFDE$, avec apparition d'une « gorge » $IFGH$

Dans le cadre du premier problème de l'ouvrage, l'écoulement d'un fluide dans un canal $ABCFDE$, représenté sur la Fig. XXIII et composé de deux tubes cylindriques horizontaux de sections différentes accolés l'un à l'autre, la loi leibnizienne de continuité se trouve énoncée en ces termes[475] :

> « Lorsque le liquide passe d'un tube à l'autre, sa vitesse varie évidemment en raison inverse de leur section ; mais nul changement n'est subit, il est au contraire successif et graduel, passant par tous les états possibles intermédiaires du plus petit au plus grand, ou du plus grand au plus petit ».

Compte tenu du nécessaire respect de cette loi, il faudra donc, assure-t-il, qu'à une petite distance HG du brusque rétrécissement de la section de la conduite ayant lieu en GF, les parties du fluide[476]

> « commencent à accélérer, et poursuivent leur chemin en accélérant, jusqu'à ce qu'à l'entrée GF, elles aient acquis la vitesse du liquide qui s'écoule dans le tube BF [...]. Il se forme ainsi, sur la petite largeur HG, une sorte de gorge $IFGH$,

[473] J. Bernoulli, *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, Paris, 1727, chap. I, art. 5, p. 6.

[474] J. Bernoulli, *Hydraulique*, *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1743, Partie 1, art. VIII, p. 399.

[475] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. III, p. 398.

[476] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. V, p. 398.

> se resserrant du tube large au tube étroit, par lequel le liquide, accéléré de façon continue mais cependant graduelle, doit passer, une petite portion très minime du liquide (qui remplit l'espace IFD) restant perpétuellement en repos ».

La prise en compte de cette gorge lui permet, autrement dit, de s'assurer de l'évolution par degrés insensibles de la vitesse entre sa valeur v en EA, ou IH, et sa valeur $\frac{m}{h}v$ en GF ou BC, m et h désignant respectivement les sections des tubes cylindriques $EDGA$ et $FCBG$. D'après l'hypothèse du parallélisme et la constance du débit de l'écoulement, les vitesses v et u des tranches de fluide situées en EA et GF répondent effectivement à la relation $mv = hu$, de telle sorte que $u = \frac{m}{h}v$. La tranche quelconque $MmlL$ possède de même une vitesse homogène inversement proportionnelle à sa propre surface y, laquelle vitesse croît donc théoriquement aussi vite que la section de la conduite décline. Afin que l'écoulement respecte la loi de continuité au moment de franchir le brusque rétrécissement de la section, tout doit ainsi se passer comme si le mouvement s'opérait au sein d'une conduite virtuelle $EIMFCBA$. La partie stagnante de fluide IDF garantit une diminution progressive de la section de l'écoulement entre IH et GF, et par là même, une augmentation progressive de la vitesse dans l'espace $IFGH$. Pour ne pas laisser de zones d'ombres sur le raisonnement de l'auteur, on pourra également se référer au mémoire de Kaestner, dont la clarté de l'exposé demande que nous en citions un passage[477]

> « Que la vitesse de l'eau dans le vase puisse passer subitement à celle beaucoup plus grande qu'elle a en s'écoulant par l'orifice, Bernoulli le nie, puisque cela violerait la loi de continuité. Et il conçoit la chose ainsi : dans la partie plus étroite du fond du vase, l'eau se meut de plus en plus vite, et donc la vitesse qu'elle avait dans le vase, croît jusqu'à celle avec laquelle elle doit sortir. La partie de cette eau se contracte de plus en plus depuis la section du vase à celle plus étroite de l'orifice, au voisinage de celle-ci, aux angles du vase, l'eau apparaît comme immobile. On trouvera difficilement quelqu'un qui n'ait pas vu quelque part ce phénomène dans un cours d'eau, où le lit se resserre, et l'eau entre les rives plus proches, se meut d'autant plus rapidement que les rives sont plus proches. On appelle cela une *gorge* dans le cas d'un cours d'eau, et Bernoulli utilise le même terme ».

L'existence de cette gorge constitue, selon Jean Bernoulli, le « pivot de toute la chose »[478], c'est-à-dire le fondement de sa théorie du mouvement des fluides dans les canaux de section variable. Cependant, le savant se garde bien d'insister sur le rôle de la loi de continuité. Après l'avoir énoncée, sans la nommer, dans ce premier cas de figure, il n'en fera plus mention dans la suite de l'ouvrage. Le constat qu'une gorge se forme dans le cas d'une conduite de section non uniforme disparaîtra également de l'exposé, au profit de la force motrice immatérielle p que le savant introduit afin d'expliquer sa formation

[477] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, p. 48-49.

[478] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. IX, p. 400.

et sa persistance au sein de l'écoulement.

C'est sur l'évaluation de cette force, « requise pour uniquement produire dans la gorge l'accélération nécessaire au changement de vitesse de la plus petite à la plus grande »[479], que repose effectivement sa méthode de mise en équation, qu'il s'agisse du mouvement d'un fluide dans la conduite de la Fig. XXV, dans un vase vertical auquel un tuyau horizontal se trouve adapté, ou dans un canal vertical dont la section varie de façon continue, pour ne citer que les principaux problèmes abordés. Car pour parvenir à l'équation du mouvement, il lui suffira simplement, par le biais de ce que nous appelerions aujourd'hui la seconde loi de Newton, d'exprimer la résultante des différentes forces motrices s'exerçant sur chacune des tranches du fluide, que l'écoulement soit ou non supposé uniforme, de la translater au niveau de la surface supérieure grâce au principe d'hydrostatique actuellement connu sous le nom de *loi de Pascal*, d'intégrer l'expression obtenue pour toutes les tranches composant le volume de fluide étudié, puis d'égaler le résultat à la force p.

La loi de continuité apparaît donc, de prime abord, comme un élément de second plan, relégué derrière la détermination de la force p, dont « l'oubli », explique-t-il[480],

> « est la raison pour laquelle personne, à ce jour, n'a pu donner, à partir des principes statiques et purement mécaniques, les lois des liquides s'écoulant à travers des canaux non uniformes ».

Le mémoire de Kaestner, comme nous allons le voir, nous engage cependant à une nouvelle interprétation de cette théorie de la gorge.

Il nous faut, pour ce faire, nous reporter à la question de l'écoulement d'un fluide dans le canal de section variable $ECce$ représenté sur la Fig. XXIV. Dans ce problème, Jean Bernoulli se contente, comme nous l'avancions à l'instant, d'exprimer l'équivalence entre la force motrice immatérielle et « la somme des forces absolues dans toutes les tranches »[481], ce qui le conduira à l'équation du mouvement. Il ne fait néanmoins aucune mention de l'existence d'une gorge dans ce cas de figure, comme nous avions vu qu'il le faisait dans le cadre du problème représenté sur la Fig. XX. Toutefois, comme le souligne Kaestner, nous sommes ici dans un cas « où aucune gorge ne se forme du fait de la courbure continue du canal »[482]. La force p, ajoute-t-il, ne peut donc

> « être utilisée que pour changer la vitesse de l'eau en un lieu donné du canal en la vitesse d'écoulement. Même si Bernoulli ne le dit pas explicitement, il est cependant clair que, là où aucune gorge ne se forme, il donne les raisons de cette force lorsqu'il la calcule ».

[479] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. IX, p. 400.
[480] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. VIII, p. 399.
[481] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 2, art. III, p. 434.
[482] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 70, p. 48-49.

Difficile, en effet, de concevoir l'apparition d'une partie de fluide immobile au sein d'une telle conduite. L'évolution continue de la section, combinée à l'hypothèse du parallélisme des tranches, garantit le respect de la loi de continuité. Elle garantit, autrement dit, le passage par degrés insensibles de la vitesse du fluide au niveau de la surface supérieure Ee à « la vitesse d'écoulement », c'est-à-dire la vitesse de sortie par l'orifice inférieur Cc. Qu'est-il donc advenu, dans ce nouveau cas de figure, du « pivot de toute la chose », à savoir « la considération de la gorge, remarquée de personne auparavant »[483] ? Comment Jean Bernoulli justifie-t-il l'existence physique de la force immatérielle p précédemment dédiée à la formation et la persistance de cette gorge au cours de l'écoulement ?

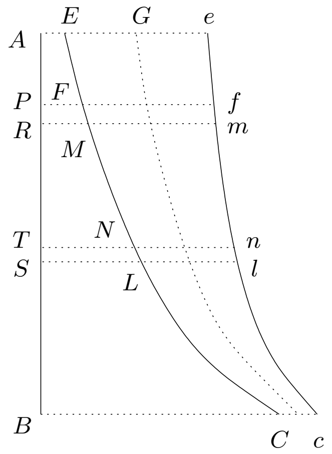


Fig. XXIV – Ecoulement d'un fluide dans un canal incliné de section variable $EecC$.

Référons-nous de nouveau, pour y voir plus clair, aux explications de Kaestner[484] :

> « Cette force, capable de faire passer l'eau de sa vitesse d'entrée à sa vitesse de sortie, la gorge est capable de la faire voir de façon imagée, de même que le mouvement diurne des corps célestes fait voir par l'imagination la révolution des sphères. Et nous calculons les phénomènes à partir de cette révolution, même si personne ne croit qu'elle ait lieu véritablement. De même la force peut être calculée exactement à partir de la gorge, même par celui qui ne croira jamais qu'une gorge se forme vraiment, ou qui comprend très difficilement comment elle se forme en supposant donnée la forme du vase et de l'orifice. ».

La gorge ne serait donc qu'une façon abstraite de se représenter le passage du fluide d'une vitesse à une autre au sein d'une conduite de section variable. La force immatérielle, autrement dit, correspondrait tantôt à la force nécessaire à la formation de la gorge, lorsque celle-ci se forme réellement, tantôt à la force nécessaire à l'évolution de la vitesse

483 J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Partie 1, art. VIII, p. 399.

484 A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 43, p. 62.

d'une valeur à une autre, lorsque la géométrie de la conduite exclut l'existence d'une partie stagnante de fluide. Mais ce n'est pas tout. Il apparaît en effet, selon Kaestner, que la gorge[485]

> « présente surtout l'avantage de permettre un calcul plus facile de la force grâce à laquelle la vitesse de l'eau dans le vase se change en sa vitesse d'écoulement. Une gorge se forme, si la vitesse dans le vase est constamment $\frac{mv}{h}$ et ne peut se changer instantanément en v. Si quelqu'un admet que cette vitesse peut se modifier instantanément, il peut se passer de la gorge, mais il ne peut pas négliger pour autant la considération de la force que j'ai appelée force *de gorge* ».

Les explications de Kaestner sont suffisamment claires, et nous n'avons rien à y redire. Contentons-nous juste de résumer : le débat éventuel entre partisans et détracteurs de ce phénomène ne concerne donc pas l'existence de cette force motrice, mais bien la façon de se représenter le comportement d'un fluide s'écoulant à travers une conduite de section variable. Dans le cas d'un brusque rétrécissement de cette section, situation correspondant au problème représenté sur la Fig. XXIV, les opposants à la théorie de la gorge considéreront que la vitesse pourra violer la loi de continuité, et de ce fait, passer instantanément de la vitesse $\frac{m}{h}v$ du fluide dans le tube $EDGA$ à la vitesse v dans le tube $FCBG$.

Partant de là, la théorie de la gorge ne laisse désormais plus aucun doute sur sa véritable signification. Il ne s'agit pas d'un phénomène constamment observé dont Jean Bernoulli propose ici de tenir compte, mais d'un présupposé, ou d'une abstraction de l'esprit, par laquelle le savant garantit le respect de la loi de continuité. En d'autres termes, le « pivot de toute la chose » renvoie donc plus à cette hypothèse physique implicite reflétant sa conception de la matière fluide en mouvement, qu'elle ne tient au constat qu'une gorge se forme dans certaines situations.

• De l'objection de D'Alembert à l'encontre de la théorie de la gorge de J. Bernoulli

Passons à présent au *Traité des fluides* de D'Alembert et à l'argumentaire qu'il renferme contre certains aspects de la théorie de son prédécesseur. Parmi les critiques exprimées contre la définition et le calcul de la pression dans l'*Hydraulique*, ainsi que la méthode de mise en équation de J. Bernoulli, peu lumineuse selon l'Encyclopédiste, ce dernier fait également l'observation suivante[486]

> « Lorsque M. *Bernoulli* donne l'Equation générale des vitesses d'un Fluide qui sort d'un vase Cylindrique [...], il semble donner cette Equation pour exactement vraye, cependant il est aisé de voir par ce que nous avons dit *art.* 112 que cette

[485] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 43, p. 62.

[486] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 189, p. 161.

> Equation n'est qu'une Equation approchée, dans laquelle on néglige une partie de la force qui accélére dans la cataracte [comprendre gorge], qu'on regarde comme nulle par rapport au reste ».

D'Alembert évoque ici un problème nous étant à présent bien familier, l'écoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Il fait, plus précisément, référence à l'art. 112 de son *Traité des fluides*, dans lequel, nous le mentionnions il y a peu de temps, le savant définit son hypothèse des parties stagnantes comme la seule alternative permettant d'assurer le respect de la loi de continuité au niveau de l'ouverture inférieure — voir la Fig. XXIII, p. 217.

Dans l'*Hydraulique*, J. Bernoulli conçoit ce cas de figure comme un corollaire du problème représenté sur la Fig. XXIV, la seule distinction tenant à la prise en compte de la pesanteur du fluide. Sa théorie prévoit donc l'existence d'une gorge $QEFN$, ou, ce qui est la même chose, l'existence de parties stagnantes QCE et FND, par lesquelles le savant s'assure de l'évolution progressive de la vitesse entre la section QN et la section EF de l'ouverture inférieure du vase. Dans ce problème, comme dans les autres situations abordées dans l'ouvrage, il parvient ainsi à des résultats qui, de l'aveu même de D'Alembert, « s'accordent d'ailleurs parfaitement avec ceux qui se tirent de [ses] principes »[487], c'est-à-dire son équation (28) dans le cas d'un vase cylindrique.

L'argumentation de D'Alembert concernant le respect de la loi de continuité et la nécessité de travailler dans l'hypothèse des parties stagnantes n'évoluent pas, comme nous venons de le voir, de la première édition du *Traité des fluides* (1744) jusqu'au Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780). Elle se révèle ainsi parfaitement identique à celle de l'auteur de l'*Hydraulique*. Kaestner, en accord avec ces propos, affirmera donc, au sujet du premier de ses traités, qu'« il est visible qu'en réalité cela soit semblable à ce que fait Jean Bernoulli »[488].

La critique de D'Alembert concernant la force accélérant le fluide au niveau de son passage à l'intérieur de la gorge $QEFN$ ne porte donc aucunement sur l'équation du mouvement obtenue par J. Bernoulli, identique à la sienne dans l'hypothèse des parties stagnantes, mais, comme l'explique Kaestner[489], sur

> « la force par laquelle les particules d'eau venant des tranches précédentes d'un mouvement parallèle, s'incurvent en ces trajectoires courbes, par lesquelles elles doivent sortir ».

Dans le *Traité des fluides*, D'Alembert affirme, à ce sujet, que « ces Courbes [FE], [ND] sont très-petites l'une & l'autre », et que le résultat, dans ces circonstances, « diffère très-peu de ce qu'elle seroit, si on n'avoit aucun égard à ces Courbes ». Il s'évertue de même, dans le Mémoire 57 § I — voir le chapitre VI, p. 173 —, à montrer qu'il est « permis

[487] D'Alembert, *Ibid.* note 486, art. 187, p. 159.

[488] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 128, p. 82.

[489] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 128, p. 82-83.

de supposer cette partie stagnante $[QCE]$ aussi petite qu'on voudra », concluant même que « plus on la supposera petite, plus on se rapprochera de ce que donne la théorie rigoureuse »[490]. Il se consacre, de surcroît, dans le § V du même ouvrage, à l'évaluation précise de cette force responsable de la courbure des trajectoires du fluide à l'approche de l'ouverture inférieure. Il procède, pour ce faire, au calcul de la vitesse horizontale grâce à celui du rapport $-\dfrac{dx}{dy}$ de la vitesse horizontale à la vitesse verticale du fluide dans tous les points des courbes QE et NF[491], ces dernières étant supposées décrites par une équation déjà employée par le savant pour évaluer les forces accélératrices animant les tranches supérieure et inférieure du fluide dans les premiers instants du mouvement — voir le chapitre VI, p. 186 —, à savoir l'équation $\dfrac{K/2}{y} = 1 + \dfrac{x^{n-1}b^{2-n}}{K/2}$ d'une branche d'« hyperbole » paramétrée par le réel n. Il en conclut, conformément à sa position de 1744, que[492]

> « la vitesse horizontale, ou le rapport de $-dy$ à dx peut commencer à ne devenir très-grand qu'à une distance de l'ouverture EF, beaucoup plus petite que ND, [...] en sorte que l'inconvénient prétendu de l'extrême rapidité pourra n'avoir lieu que dans une partie absolumment insensible du fluide ».

C'est l'éventuelle influence de cette vitesse horizontale, ou de la force accélératrice correspondante, qui lui fait pourtant reprocher à J. Bernoulli de n'avoir pas précisé que son résultat ne constitue qu'une « Equation approchée ». L'argument de D'Alembert dans le *Traité des fluides* est donc pour le moins abusif, et restera d'ailleurs caduc d'après les éléments apparaissant, sur cette question, dans son quatrième et dernier traité d'hydrodynamique, le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780). Il ne s'agit que d'un détail sans importance, voire d'un prétexte à critique de l'Encyclopédiste, les deux savants s'entendant par ailleurs sur l'essentiel : la vérification de la loi de continuité, et par conséquent, l'existence de parties stagnantes à proximité de l'orifice.

Prenant la défense de Jean Bernoulli, Kaestner conclura ainsi que, « par conséquent si on doit imputer une faute à Bernoulli, il faut également en faire grief à D'Alembert lui-même »[493] ! Nous ne le contredirons pas, bien au contraire, puisque nous venons de voir que cette étonnante similitude perdure dans les derniers travaux de l'Encyclopédiste français. Aussi, quoique nous ne disposions pas d'argument direct en faveur d'une influence de Jean Bernoulli sur D'Alembert concernant cette question, la filiation des deux théories semble cependant faire peu de doutes.

Il est par ailleurs un autre point sur lequel le savant français semble suivre l'opinion

[490] D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § I, art. 18, p. 60.

[491] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 490, § V, art. 25-33, p. 91-95.

[492] D'Alembert, *Ibid.* note 490, § IV, art. 8, p. 79.

[493] A. G. Kaestner, *Ibid.* note 472, art. 128, p. 83.

du géomètre bâlois en 1780. Dans l'*Hydraulique*, J. Bernoulli précisait en effet que[494]

> « la formation d'une gorge s'effectue sans dépense sensible de forces vives, relativement à la quantité qui se trouve dans la masse totale de l'eau ».

Il s'opposait, ce faisant, à l'idée émise par son fils, Daniel, dans son *Hydrodynamique* (1738), et consistant à envisager une perte de forces vives dans le cas d'une brusque variation de la section de l'écoulement. Cette idée constitue, une trentaine d'années plus tard, le socle du « Mémoire sur l'écoulement » (1766). D'Alembert, en s'opposant à Borda et D. Bernoulli sur ce point dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VI (1773) et VIII (1780), fait de nouveau état, comme nous allons le voir, de son penchant pour une conception « Jean-Bernoullienne » d'un fluide en mouvement. Nous constaterons notamment que son argumentaire repose essentiellement sur la loi leibnizienne de continuité.

Nous commencerons, pour ce faire, par une présentation des théories de D. Bernoulli et de Borda sur le sujet. Nous mettrons ensuite leurs arguments physiques respectifs en perspective, en nous appuyant à la fois sur le point de vue d'un hydrodynamicien du XIX^e^ siècle, Adhémar Barré de Saint-Venant, ainsi que la façon dont nous considérons aujourd'hui le phénomène découvert par les deux savants, à savoir le phénomène de *pertes de charge singulières*. Nous passerons ensuite à l'examen des arguments donnés par D'Alembert dans la dernière phase de son œuvre en hydrodynamique.

2. La polémique sur la théorie des pertes de forces vives

L'hypothèse de D. Bernoulli

Dans la section VII de son *Hydrodynamique*, D. Bernoulli fait remarquer que les cas où le fluide s'écoule à travers une ouverture avec une vitesse notablement plus grande que celle qu'il avait avant de la franchir posent problème. « Il est [...] selon moi évident », explique-t-il[495],

> « que lorsque l'eau s'écoule à travers une ouverture avec une vitesse plus grande que celle qui se trouve dans l'eau intérieure ascendante, l'excès produit de nouveau un certain mouvement intérieur dans la même eau intérieure ».

La variation brusque de section va autrement dit de pair, selon lui, avec l'existence d'un mouvement intestin, ce qu'il appelle ici le « mouvement intérieur » — nous parlerions aujourd'hui de mouvement *tourbillonnaire* —, au sein de l'écoulement. Il propose,

[494] J. Bernoulli, *Ibid.* note 474, Préface, p. 393.

[495] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Strasbourg, 1738, Sect. VII, § II, p. 124.

pour expliquer ce dernier, de raisonner à la manière des mécaniciens, pour lesquels une collision entre corps mous se traduit nécessairement par une perte de forces vives. De même, poursuit-il sans pousser plus avant la comparaison avec la question des lois de la communication du mouvement, sera-t-il probablement nécessaire de calculer, dans le cadre d'un écoulement[496],

> « combien de force vive est employée à produire dans le fluide le mouvement intestin et est perdue par conséquent sans retour pour le mouvement progressif ».

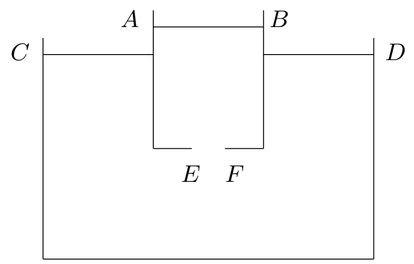


Fig. XXV – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond, et immergé dans un vase de plus grande contenance.

Cette force vive perdue par le jet principal du fluide, ce que D. Bernoulli appelle le « mouvement progressif », pourrait être simplement égale, d'après lui, à la différence entre la force vive du fluide de masse M en aval et en amont de la variation de section, c'est-à-dire $M\frac{u^2}{2} - M\frac{V^2}{2}$. Considérant un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond, immergé dans une plus large étendue d'eau de largeur CD (voir la Fig. XXV), il explique en effet que[497] :

> « Si la section de l'ouverture $[EF]$ est posée égale à 1, et la section $[AB]$ du cylindre égale à n, la *montée potentielle* de l'élément de volume jaillissant égale à $\left[n^2\frac{v^2}{2}\right]$, et sa vitesse égale à $[nv]$, cette particule retiendra , par le mouvement qu'elle a en commun avec le reste de l'eau interne, la vitesse $[v]$, et par conséquent la montée potentielle $\left[\frac{v^2}{2}\right]$. Mais on doit considérer que le reste de la *montée potentielle*, c'est-à-dire $\left[n^2\frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right]$ est transféré au mouvement intérieur des particules ».

[496] D. Bernoulli, *Ibid.* note 495.

[497] D. Bernoulli, *Ibid.* note 495. Dans l'*Hydrodynamique*, D. Bernoulli adopte la façon de faire des partisans de la théorie des forces vives. La quantité v, telle qu'elle apparaît dans l'ouvrage, correspond ainsi, *stricto sensu*, au carré de la vitesse acquise par un corps tombant en chute libre d'une hauteur h, c'est-à-dire $2gh$. Le lecteur moderne qui se réfèrera au texte d'origine trouvera donc v et h là où il s'attend à trouver $\frac{v^2}{2}$ et gh. Nous procédons ici directement à ces changements (indiqués entre crochets), afin de faciliter la compréhension du raisonnement de l'auteur.

Cette valeur et l'idée même d'une perte, le savant les présente néanmoins comme une simple hypothèse à méditer, car permettant d'expliquer ce qui se passe. Il n'en tient donc pas compte dans ses calculs.

La théorie des pertes de forces vives de Borda

La plus grande partie du « Mémoire sur l'écoulement » concerne l'étude des questions d'hydrodynamique dans lesquelles, « comme l'a remarqué M. Daniel Bernoulli, le principe de la conservation des forces vives n'a pas lieu sans restriction »[498]. L'idée proposée dans l'*Hydrodynamique* perd néanmoins son statut d'hypothèse pour devenir une loi relative à certains types d'écoulement, fondée, en tant que telle, sur un lemme établissant l'expression théorique générale de la perte à prendre en considération. Si Borda fait, de plus, explicitement référence à D. Bernoulli, sa justification de l'existence de ce phénomène diffère également de celle proposée par son prédécesseur. Il n'est plus question d'une force nécessaire à la formation d'un mouvement intestin au sein du fluide, mais uniquement d'une perte semblable à celle observée dans le choc des corps solides, puisque le mouvement de l'eau dans les vases peut, selon lui[499],

> « être regardé comme celui d'un système de corps durs qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ».

Considérant ainsi un vase $ABGH$ enfoncé dans un autre vase $PROQ$, ainsi que la petite tranche de fluide $mopn$ entrant par l'orifice mn pour devenir la tranche $rsxy$ du fluide dans le vase immergé (voir la Fig. XXVI), Borda affirme[500] :

> « qu'avant d'occuper cette place $rsxy$, la petite tranche aura perdu, contre le fluide supérieur, une partie de son mouvement, & qu'elle l'aura perdu de la même manière que si c'eût été une masse isolée qui eût frappé une autre masse isolée : mais dans le cas des deux masses isolées, il y aurait eu une perte de forces vives : donc il y en aura eu aussi dans le cas que nous examinons ».

La démonstration lui permettant d'établir son lemme consiste à observer que deux masses de fluide de vitesses et de masses respectives v, v' et m, m', se meuvent ensemble après leur choc du fait du manque d'élasticité des particules qui les constituent. Il suffira donc, comme on le fait habituellement pour déterminer les lois de la communication du mouvement entre corps durs, de déterminer la différences de forces vives de l'ensemble de ces deux masses avant et après leur rencontre. Soit la somme des forces vives des deux masses de fluides avant le choc,

$$\frac{mv^2 + m'v'^2}{2g},$$

[498] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 11, p. 590.

[499] Borda, *Ibid.* note 498.

[500] Borda, *Ibid.* note 498, art. 11, p. 591.

la somme des forces vives de l'ensemble après le choc,

$$\frac{m+m'}{2g}\left(\frac{mv+m'v'}{m+m'}\right)^2,$$

la différence vaut

$$\frac{m+m'}{2g}\left(\frac{mv+m'v'}{m+m'}\right)^2-\frac{mv^2+m'v'^2}{2g}=\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{(v-v')^2}{2g}.$$

La quantité $\frac{mm'}{m+m'}\times\frac{(v-v')^2}{2g}$ correspondra donc à la force vive perdue. Nous avons vu par ailleurs, dans la première partie de ce chapitre, que le savant propose également une démonstration reposant sur l'application du principe de D'Alembert, démonstration moins explicite mais néanmoins identique du point de vue de sa justification physique.

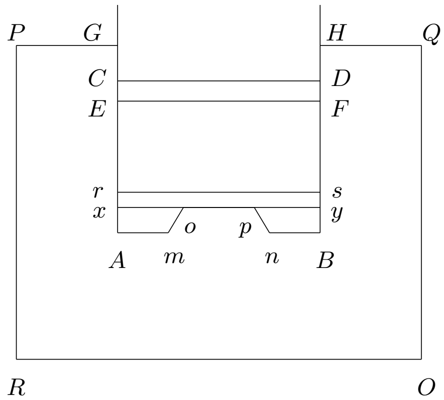


Fig. XXVI – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique $GHBA$ percé d'un orifice en son fond, et immergé dans un vase $PROQ$ de plus grande contenance.

Borda propose, pour finir, un compte rendu d'expériences réalisées afin de valider sa théorie. Ces expériences concernent uniquement le problème de l'écoulement dans un tube cylindrique immergé dans un vase. Elles reposent sur un dispositif du même type que celui employé par D. Bernoulli dans les cadre des expériences rapportées à la fin de la section VII de son *Hydrodynamique*, ce dispositif consistant à enfoncer un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond dans un grand vase rempli d'eau, à fermer l'ouverture supérieure du vase immergé afin que le fluide ne puisse y pénétrer, puis à en déboucher subitement l'orifice inférieur afin d'observer la hauteur à laquelle l'eau monte au-dessus de la surface de celle contenue dans le grand vase. Les mesures de son prédécesseur s'étant cependant révélées quelque peu contradictoires, Borda, faisant à nouveau preuve de son savoir-faire dans ce domaine, procède donc à quelques modifications. Il augmente, d'une part, la section des tubes utilisés, ceux dont D. Bernoulli s'était servi « étant d'un trop petit diamètre pour qu'on pût en conclure rien de bien certain »[501]. Il tient compte, d'autre part, du rapport de contraction de la veine dans la phase de comparaison avec ses solutions théoriques — il considère d'ailleurs les deux types d'ajutage, entrant et sortant, examinés dans le cadre de ses expériences sur ce phénomène : voir le chapitre VI, p. 193. Ses résultats se révèlent être en accord avec les solutions de ces équations et confirment donc sa théorie des pertes de forces vives dans le cas d'un problème présentant une augmentation subite de la section d'écoulement.

Mise en perspective de la théorie de Borda et de l'hypothèse de D. Bernoulli

Borda établit, ce faisant, ce que nous appelons le *théorème de Borda-Carnot*, c'est-à-dire l'expression des *pertes de charge singulières* apparaissant dans le cas d'un brusque élargissement de la section.

D'un point de vue moderne, le problème d'un vase immergé dans un autre revient effectivement, en première approximation, à considérer le mouvement d'un fluide dans une conduite présentant un changement subit de la section d'écoulement. Nous savons aujourd'hui que ces pertes sont consécutives à la formation d'un volume de fluide séparé du milieu ambiant par une surface qui se désagrège et s'enroule en tourbillons contre le jet central $EcCDdF$ de l'écoulement (voir la Fig. XXVII). Elles naissent de la dissipation visqueuse de ce jet contre les zones tourbillonnaires apparaissant dans les angles[502].

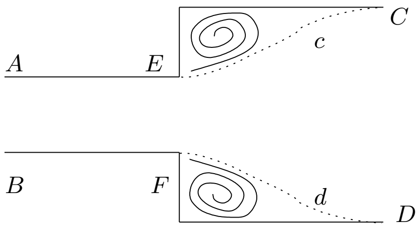


Fig. XXVII – Ecoulement dans une conduite présentant un brusque élargissement de sa section d'écoulement.

Dans son « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où la section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement » (1886)[503], Barré de Saint-Venant donne une description physique de ce phénomène relativement proche de la nôtre. Considérant l'écoulement d'un fluide dans un tuyau rectiligne horizontal qui passe rapidement

[501] Borda, *Ibid.* note 498, art. 19, p. 597.

[502] Voir, pour plus de détails sur la théorie moderne, I. E. Idel'cik, *Mémento des pertes de charge*, trad. du russe par M. Meury, Editions Eyrolles, Moscou, 1986.

[503] A. Barré de Saint-Venant, « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44, 1888, p. 193-244.

du diamètre AA à un diamètre plus grand BB (voir la Fig. XXVIII), il explique en effet que[504]

> « Le Fluide, au lieu de se détourner de manière à suivre les parois AB, comme il arriverait si leur évasement était extrêmement allongé, coule, en s'infléchissant moins, entre deux parties qui ne participent point à son mouvement, et les fait tourbillonner par l'engrènement moléculaire ou l'action latérale qu'il y exerce comme ferait une crémaillère sur une roue dentée. Il se détache continuellement, de ces parties, de petits tourbillons que le courant emporte [...]. Le frottement du fluide contre les parois modère ces mouvements irréguliers et visibles, et le frottement du fluide sur lui-même, contribue également à les éteindre en les disséminant et en les transformant peu à peu en oscillations et vibrations moléculaires invisibles [...] ; en sorte que l'on peut dire que le frottement ou l'engrènement moléculaire du fluide, cause de la naissance des tourbillons, est aussi ce qui les dissout et les éteint finalement ou reporte au dehors leur force vive ».

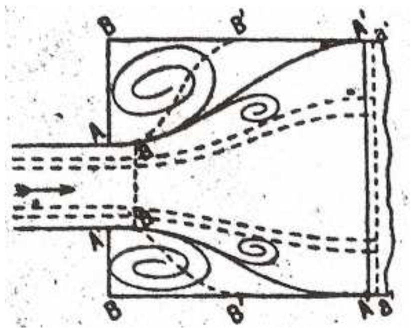


Fig. XXVIII – Fac-similé de la Fig. 1, p. 211, du mémoire de Barré Saint-Venant.

Ce phénomène de pertes de charges singulières, ou de perte de force vive, Barré de Saint-Venant le présente de surcroît comme un problème complexe, qui « exigerait, sur les lois du fluide, des connaissances que l'on est loin de posséder encore »[505]. D'après nos connaissances actuelles, son évaluation repose en effet sur le calcul des forces visqueuses agissant au niveau de la frontière entre le jet central et la zone tourbillonnaire de l'écoulement. Quoique la notion de viscosité transparaisse quelque peu au travers du rôle accordé aux frottements « du fluide contre les parois » et « du fluide sur lui-même »[506] dans cet extrait du mémoire de Saint-Venant, ce calcul reste donc hors de

[504] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 503, p. 216-217.

[505] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 503, p. 216.

[506] Le frottement « du fluide contre les parois » et le frottement « du fluide sur lui-même » rappellent les deux types de dissipation visqueuse prises en compte par la mécanique des fluides moderne : les pertes de charge linéiques, dues aux frottements visqueux du fluide contre la conduite, et les pertes de charge singulières, nées de la dissipation visqueuse d'une partie du fluide en mouvement contre des

portée à cette époque.

Il en va d'ailleurs de même aujourd'hui : les formules dont nous disposons proviennent effectivement, dans la plupart des situations, de méthodes empiriques[507]. L'écoulement dans la conduite représentée sur la Fig. XXVII correspond en fait au seul cas de figure pour lequel l'application des principes mécaniques conduise à une expression théorique des pertes de charge singulières. Cette expression coïncide, nous l'avons déjà signalé, avec celle obtenue par Borda par le biais de l'étude du mouvement d'un fluide dans un vase immergé dans un autre.

Quoique ces précisions sur le phénomène soient hors de portée au XVIII^e^, nous constatons ainsi que l'interprétation donnée par D. Bernoulli en constitue une description physique somme toute pertinente, dans laquelle les mouvements « progressif » et « intestin » renvoient respectivement au jet central $EcCDdF$ et aux zones tourbillonnaires représentées sur la Fig. XXVII — ou encore au jet central $AA'A'A$ et aux zones tourbillonnaires ABA', tels que Barré de Saint-Venant les représente sur la Fig. XXVIII.

Celle de Borda paraît, quant à elle, beaucoup plus éloignée de notre façon de concevoir l'origine du phénomène. Il assimile, nous l'avons vu, le comportement de l'écoulement au niveau de l'orifice au problème du choc de deux masses de fluide suffisamment inélastiques pour rester agglutinées l'une avec l'autre à l'issue de leur rencontre. Compte tenu de la description que nous en donnions à l'instant, il en donne donc une justification physique incorrecte, conclusion par ailleurs partagée par Barré de Saint-Venant qui, dans son mémoire de 1886, juge de même que son raisonnement[508]

> « n'est nullement rigoureux ; car rien n'autorise à calculer la diminution dont nous parlons, comme si les deux masses fluides contenues entre les parois du tuyau et d'autres masses, étaient deux corps *libres* qui se choquent ».

Sa démonstration correspond à une simple transposition d'un raisonnement de type mécanique des corps solides, une transposition nullement rigoureuse à nos yeux, mais néanmoins naturelle à cette époque, compte tenu, nous aurons l'occasion d'y revenir, de l'influence du développement de la science du mouvement des solides sur celui de l'hydrodynamique.

Cette théorie des pertes de forces vives, Borda l'applique, dans un premier temps, aux questions du mouvement d'un fluide dans un vase submergé dans un autre, dans un vase percé de plusieurs diaphragmes et dans un tuyau horizontalement adapté à un vase. Il s'agit, compte tenu de ses hypothèses de travail, de trois problèmes caractérisés par une brusque augmentation de la section d'écoulement et requiérant donc la prise en compte d'une perte[509].

---

tourbillons apparaissant au sein de l'écoulement.

[507] Voir I. E. Idel'cik, *Ibid.* note 502.

[508] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 503, p. 203.

[509] Cf. Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 13-17, p. 592-596 (vase

Borda étend cependant, dans un second temps, le champ d'application de sa théorie aux vases de forme irrégulière, ainsi qu'aux siphons de grosseur non uniforme : « Nous venons de démontrer que la conservation des forces vives n'avoit pas lieu sans restriction » dans plusieurs problèmes, explique-t-il en effet dans l'art. 29 de son mémoire, avant de préciser que[510]

> « cette démonstration s'appliqueroit également aux vases d'une forme irrégulière [...], & on peut même l'étendre jusqu'aux syphons qui n'ont pas la même grosseur dans toute leur longueur ».

Il fait, dans l'art. suivant, la même remarque à propos de petits canaux de fluide possédant une partie « plus étroite que » l'autre[511].

Si, comme nous le savons aujourd'hui, la prise en compte d'une perte de charge singulière se justifie dans le cas de conduites présentant des étranglements ou certains accidents de parcours[512], ce phénomène n'a toutefois pas lieu dans les conduites dont la section varie de façon continue. C'est donc à tort que Borda généralise ici sa théorie des pertes de forces vives aux « siphons qui n'ont pas la même grosseur dans toute leur longueur ».

Passons à présent aux réponses données par D'Alembert dans le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VIII (1780) contre l'hypothèse de D. Bernoulli et la théorie de Borda. Celles-ci renvoient à deux arguments. Le premier, et le principal, tient au respect de la loi de continuité. Le second en constitue une sorte de corollaire : il consiste à défendre la possibilité d'appliquer le principe de conservation des forces vives sans restriction en hydrodynamique, ce principe étant, selon lui, conditionné par cette même loi. Suite à cette mise au point sur la théorie des forces vives de Borda, nous verrons ainsi que D'Alembert manque, d'un côté, le phénomène de pertes de charges singulières mis au jour par son contradicteur, mais que sa théorie n'en reste pas moins correcte dans le cas d'une conduite dont la section ne varie pas brusquement. Sa position lui permet également de pointer la faiblesse de la justification physique apportée par Borda. L'ensemble, ce sera là notre conclusion, constituera un tout cohérent, témoignant d'une conception continue de l'écoulement d'un fluide.

---

immergé dans un autre), art. 23-28, p. 599-603 (tuyau adapté à un vase), art. 21, p. 599 (vase percé de plusieurs diaphragmes).

[510] Borda, *Ibid.* note 509, art. 29, p. 602.

[511] Borda, *Ibid.* note 509, art. 30, p. 605.

[512] Notons que, dans son « Mémoire sur les pompes » (*MARS* année 1768 (1771), p. 418-431), Borda s'attache à déterminer l'« effet des *étranglemens* ou *contractions* que les colonnes d'eau qui se meuvent dans les Pompes, éprouvent en traversant les passages des *soupapes* » (p. 418), ce par la voie théorique, en se fondant sur la théorie des pertes de forces vives mise au jour dans son « Mémoire sur l'écoulement », et par la voie de l'expérience.

D'Alembert et le respect de la loi leibnizienne de continuité

Dans sa lettre à Lagrange du 6 février 1772, D'Alembert note que le lemme de Borda[513]

> « ne peut s'appliquer aux fluides, qui, dans leur équilibre, et par conséquent dans leur choc, ne doivent pas suivre les mêmes lois que les corps solides ».

Cette première réaction à l'égard de la théorie des pertes de forces vives du « Mémoire sur l'écoulement » constitue l'un des deux axes de sa stratégie de réponse dans le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VIII (1780). Il développe l'argumentaire correspondant dans les art. 1 à 8 et 27 à 36 du § XI.

Ses critiques s'adressent d'une part, à D. Bernoulli, dont il précise, en le citant explicitement — c'est rappelons-le, chose rare dans cet écrit —, qu'il est[514]

> « le premier qui ait employé le principe de la conservation ou de la perte de forces vives dans la théorie du mouvement des fluides ».

D'Alembert dénonce l'ambiguïté physique attenant à sa façon d'envisager la nature des particules de fluide, rappelant que le savant suisse considère

- tantôt le fluide comme de petits corpuscules élastiques lorsqu'il traite de la conservation des forces vives. D'Alembert renvoie, dans ce cas, au mémoire « Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium » de D. Bernoulli (1727), correspondant à une version préliminaire de la section III de l'*Hydrodynamique*, et dans lequel ce dernier « considère » en effet « que les très petits corpuscules composant un fluide sont parfaitement élastiques »[515] ;
- tantôt comme des corps mous, lorsqu'il envisage une perte dans la section VII de son *Hydrodynamique*.

On ignore toutefois, d'après lui, si les particules fluides sont des corps mous, durs ou élastiques, et plus grave encore, les lois du choc de ces mêmes particules les unes contre les autres sont sûrement[516]

> « très différentes de celles du choc mutuel d'un systèmes de corps élastiques, ou mous, ou durs ».

Cette remarque concerne d'ailleurs aussi le raisonnement de Borda, ce qui le pousse à conclure, à l'adresse des deux géomètres, que « cette comparaison du choc des particules

---

513 *Œuvres* de Lagrange, t. XIII, lettre 100, p. 227.

514 D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, 1780, Mémoire 57, § XI, art. 27, p. 169.

515 D. Bernoulli, « Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium », *Mémoires de l'Académie des sciences de Pétersbourg*, vol. 2, 1727, p. 112. Ce mémoire, comme son titre l'indique, est rédigé en latin. Ne l'ayant pas traduit dans son intégralité, voici donc le texte d'origine correspondant à l'extrait que nous venons de citer : « Pono autem corpuscula minima fluidum aliquod componentia esse perfecte elastica ».

516 D'Alembert, *Ibid.* note 514.

fluides à celui de petits corps élastiques ou mous est donc fautive en elle-même »[517]. Il met ainsi le doigt sur ce nous présentions ci-dessus comme une justification physique incorrecte du phénomène de perte de forces vives.

La démonstration de Borda suppose, qui plus est, que[518]

> « la tranche de fluide qui perd [...] une partie de sa vitesse, passe brusquement & sans gradation de la largeur qu'elle a dans l'endroit où elle est rétrécie, à une largeur qui diffère de celle-là d'une quantité finie ».

C'est là une hypothèse « impossible » à admettre selon lui, parce qu'indiscutablement en contradiction avec le nécessaire respect de la loi de continuité. Il ne faut effectivement pas confondre, explique-t-il[519],

> « l'effet d'un changement rapide, mais qui se fait par degrés infiniment petits, avec celui d'un changement brusque, subit & sans gradation ».

Nous savons, pour autant, que D'Alembert a lui-même tendance à considérer les particules élémentaires constituant aussi bien les solides que les fluides comme infiniment dures et impénétrables — voir le chapitre II, p. 79. Il n'est pas non plus en désaccord avec la loi selon laquelle les corps durs perdent une partie de leur vitesse en se choquant. Ce qu'il reproche à D. Bernoulli et à Borda dans le § XI du Mémoire 57 vient donc plutôt de sa façon d'appréhender le comportement « macroscopique », pour employer un terme moderne, d'un fluide en mouvement. Etant à la fois persuadé que les lois d'interaction des particules au sein du fluide n'ont rien à voir avec celles des corps solides, mais dans l'incapacité de les déterminer par le biais d'une quelconque théorie, D'Alembert, influencé en cela par J. Bernoulli, comme nous l'avons montré dans la première partie de ce chapitre, exprime ainsi sa conception d'un écoulement par le biais d'une loi d'origine métaphysique, la loi de continuité. Celle-ci garantit en fait, quoique de façon implicite, le comportement « continu », en toutes circonstances, d'un fluide en mouvement.

Les arguments de D'Alembert face à l'introduction, par Borda, d'une perte de forces vives dans les problèmes du vase immergé dans un autre, du tuyau adapté à un vase ou d'un siphon de section variable, confirment également ce point de vue.

Dans la première de ces trois questions, sa théorie de 1744 fait effectivement état d'une toute autre approche. Il y assimile la trajectoire des particules fluides au niveau de l'ouverture inférieure avec l'écoulement d'un fluide dans un siphon à deux branches : il n'y a, selon lui (voir la Fig. XXIX), qu'à[520]

> « regarder le Fluide qui sort par PL comme composé de deux parties, qui après être descendues verticalement ensemble au sortir du vase [...], changent ensuite

[517] D'Alembert, *Ibid.* note 514.

[518] D'Alembert, *Ibid.* note 514, art. 5, p. 172.

[519] D'Alembert, *Ibid.* note 514, art. 32, p. 174.

[520] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 141, p. 120.

de direction peu à peu, pour aller l'une vers KZ, l'autre vers NV, à peu près de la même manière qu'un Fluide change de direction [...] pour passer d'une branche de Syphon dans l'autre ».

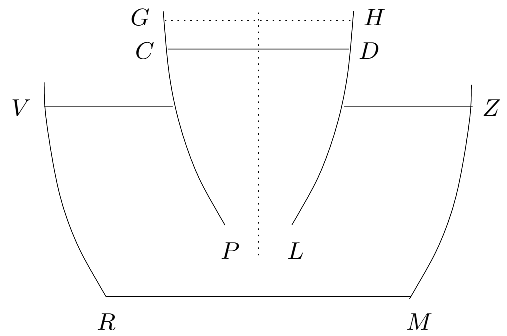


Fig. XXIX – Ecoulement d'un fluide dans un vase $GPLH$ de section variable immergé dans un vase $VRMZ$ de plus grande contenance.

Cette analogie permet naturellement de s'assurer du respect de la loi de continuité du fluide au niveau du changement de section de la conduite, et c'est donc en toute logique qu'il rappelle, d'abord dans l'ajout à l'art. 143 de la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), puis dans le Mémoire 57 § V de ses *Opuscules* t. VIII, que[521]

> « quand un fluide sort d'un vase submergé dans un autre fluide indéfini, on peut regarder ce fluide comme mu dans un syphon ».

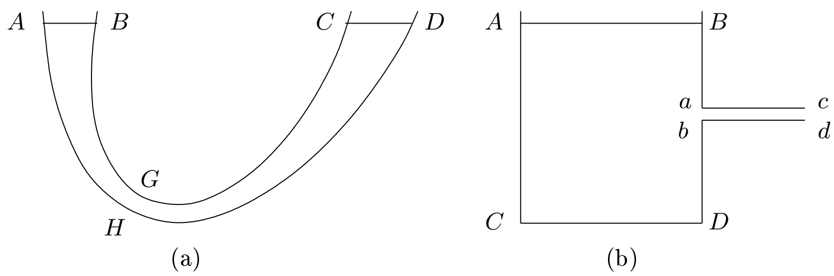


Fig. XXX – (a) Ecoulement dans un siphon $ABDC$ à deux branches.
(b) Ecoulement dans un vase cylindrique $ABDC$ auquel est adapté un tuyau cylindrique $abcd$ en ab.

La loi de continuité joue de même un rôle de premier plan dans la réponse qu'il adresse à Borda au sujet de sa façon de justifier l'existence d'une perte de forces vives dans les problèmes d'un tuyau adapté à un vase (voir Fig. XXX-a) et d'un siphon de section variable (voir Fig. XXX-b). L'argument de l'auteur du « Mémoire sur l'écoulement » repose en effet, dans ces deux cas de figure respectifs, sur la considération d'un

[521] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § V, art. 55, p. 103.

orifice ab — cet orifice percé dans la paroi du vase $ABDC$, permet d'y adapter le tuyau $abcd$ — et d'un étranglement GH du siphon $ABDC$, infiniment petits. D'après la relation $yv =$ Cste assurant la constance du débit de l'écoulement, cette situation conduit à une valeur infiniment grande de la vitesse, ce qui ne saurait être selon lui, et impose donc l'introduction d'un terme de perte dans l'expression du principe de conservation des forces vives.

D'Alembert rejette d'abord l'idée même d'un orifice ou d'un étranglement infiniment petit, « l'infiniment petit n'existant pas dans la nature »[522]. Aussi, l'hypothèse de la vitesse infinie, dont il réfute également l'existence[523]

> « résulte de la supposition même de l'étranglement *infiniment petit*, & n'est impossible, que parce qu'un étranglement *infiniment petit* est également impossible ».

Borda n'obtient donc, selon lui, une vitesse infinie que parce qu'il admet préalablement l'existence d'un étranglement infiniment petit.

Dans l'art. 33 du Mémoire 57 § XI, portant sur le problème du siphon, D'Alembert fait ensuite remarquer que Borda n'a aucune raison de refuser l'idée d'une vitesse infiniment grande au niveau de l'étranglement, compte tenu du fait qu'il[524]

> « admet, au moins tacitement, cette vitesse infinie dans le changement subit de figure qu'on suppose aux tranches de fluide ».

En d'autres termes, supposer un choc dur entre deux masses de fluide revient à admettre l'existence d'une vitesse infinie, puisqu'il s'agit d'une hypothèse contraire au respect de la loi de continuité, sous-entendant des variations finies de la vitesse et de la section de la tranche pendant un instant infiniment court.

Comme nous l'avions fait remarquer dans le chapitre II — voir p. 81 —, le respect de cette loi autorise par ailleurs, selon lui, l'emploi de la conservation des forces vives. Elle constitue de même un préalable à l'application de son principe de dynamique : c'est ce dont témoigne notre étude de l'art. 113 du *Traité des fluides* dans lequel, rappelons-le, D'Alembert montre que l'usage de son principe dans le cas d'un non respect de la loi de continuité conduit à une détermination fautive du mouvement. En somme, la considérer comme une propriété caractéristique d'un fluide en mouvement revient donc à revendiquer la possibilité d'appliquer ces deux principes à tous les types d'écoulement. C'est là le deuxième axe de sa stratégie de réponse, laquelle repose du même coup, nous allons voir pourquoi, sur la mise en avant de son hypothèse des tuyaux variables dans le Mémoire 51 § IV et le Mémoire 57 § IX des *Opuscules* t. VI et VIII.

---

[522] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VI, art. 22, p. 113. On pourra, à ce sujet, consulter les articles « Différentiel », « Infini » et « Infiniment petit » de l'*Encyclopédie*, tous trois signés *(O)*.

[523] D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XI, art. 33, p. 185.

[524] D'Alembert, *Ibid.* note 523, art. 33, p. 184-185.

D'Alembert et la possibilité d'appliquer, en toutes circonstances, le principe de conservation des forces vives et son principe de dynamique en hydrodynamique

D'Alembert rappelle d'abord avoir[525]

> « prouvé dans le Tome VI de nos *Opuscules*, pag. 383, art. 8, & dans le Tome I des mêmes *Opuscules*, IV^{e} Mém. §. XVI, que la conservation des forces vives a toujours lieu dans le mouvement du fluide, quelqu'irrégulier que soit le vase, quoique cette conservation puisse très-bien n'avoir pas lieu dans les tranches parallèles à l'ouverture, dont les différens points peuvent avoir un mouvement fort inégal ».

Il nous renvoie ici au Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), dans lequel il établit, à partir de l'expression de son principe de dynamique, la démonstration de la conservation des forces vives dans l'hypothèse des tuyaux invariables, puis au Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI pour ce qui est de l'hypothèse des tuyaux variables. Ce rappel, donné dans son œuvre tardive, est crucial, puisqu'il montre que ce principe, comme celui dont il découle, à savoir le principe de dynamique, a toujours lieu, selon lui, dans le cas d'un écoulement et que, par conséquent, la condition autorisant son emploi, la loi de continuité, sera de même toujours vérifiée.

Il contient aussi une critique implicite à l'encontre de Borda qui, bien qu'il travaille dans l'hypothèse des tuyaux variables pour la mise en équation de l'écoulement dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond, ne continue pas moins d'adopter celle du parallélisme des tranches dans les tous les problèmes nécessitant la prise en compte d'une perte de forces vives. Difficile de donner tort à D'Alembert, qui pointe là une contradiction entre les arguments avancés dans le « Mémoire sur l'écoulement » pour justifier la définition de tuyaux curvilignes, ces derniers devant assurer une évolution progressive de la vitesse des particules de fluide situées à proximité l'orifice, et la justification donnée pour expliquer l'existence d'une perte, à savoir un choc entre deux tranches assimilées à des corps durs. Cette contradiction conduit Borda, comme nous l'avons vu — voir la première partie de ce chapitre —, à une étrange façon de traiter le mouvement de la tranche inférieure pour le problème de l'écoulement dans un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond.

Ce rappel de D'Alembert, pour finir, contient également la clé de la solution théorique qu'il propose pour pallier le problème, problème d'autant plus difficile, rappelons-le, que les pertes se voient confirmées par les expériences effectuées par Borda pour la question d'un vase immergé dans un autre. Dans l'art. 36 concluant le Mémoire 57 § XI, il explique ainsi qu'il sera[526]

[525] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § IX, art. 18, p. 156-157.

[526] D'Alembert, *Ibid.* note 525, § XI, art. 36, p. 186.

> « bien plus naturel, pour arriver à des résultats conformes à l'expérience, d'employer le principe des tuyaux variables à chaque instant, pour déterminer le mouvement dans tous les cas, même ceux où il paroît le plus irrégulier ».

Son hypothèse des tuyaux variables conduit en effet — voir le chapitre V, p. 158 — à l'apparition d'un terme supplémentaire, $\int \frac{dx\delta y}{y^2}$. C'est là le terme qui suffira, selon lui, à « expliquer tous les phénomènes de mouvement qu'on observera dans les vases les plus irréguliers »[527]. L'inadéquation entre la théorie et l'expérience, dans le cas où l'on ne tiendrait pas compte d'une perte, ne viendrait donc pas de la mise en défaut du principe de dynamique ou du principe de conservation des forces vives, la loi de continuité devant toujours être vérifiée, mais de l'hypothèse dans laquelle ces principes se trouvent appliqués. L'idée est tout à fait ingénieuse, mais néanmoins incorrecte sur le fond. D'Alembert confond en fait ici ce que nous appelerions aujourd'hui le *terme instationnaire* de l'équation de Bernoulli — le statut de ce terme supplémentaire est étudié dans le chapitre V, p. 161 —, découlant de son hypothèse des tuyaux variables, et le terme de *pertes de charges singulières* introduit par Borda.

Synthèse

Le savant passe donc sans aucun doute à côté du phénomène découvert et évalué par son contradicteur dans le « Mémoire sur l'écoulement ». Sa position face à la théorie des pertes de forces vives de Borda est toutefois loin d'être entièrement erronée, puisqu'elle s'applique aussi bien aux problèmes engageant une conduite dont la section varie brusquement, qu'une conduite dont la section varie de façon continue, et à l'intérieur de laquelle la perte de forces vives n'a pas lieu d'être prise en compte. Elle est, de surcroît, tout à fait cohérente, en ce qu'elle repose sur une seule et même idée, traduisant, comme nous l'avons montré, sa façon de penser le comportement d'un fluide en mouvement : la loi leibnizienne de continuité. Il fait montre, en cela, d'une conception physique de l'écoulement similaire, de ses premiers à des derniers écrits en hydrodynamique, à celle de J. Bernoulli dans son *Hydraulique*, et dont elle s'inspire très certainement, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre.

La théorie de Borda possède, de son côté, la même cohérence. Son raisonnement repose, de bout en bout, sur une comparaison explicite entre le mouvement mutuel des tranches et les lois du choc entre corps solides imparfaitement élastiques, ce qui lui permet d'intuiter le phénomène aujourd'hui connu sous le nom de pertes de charges singulières. D. Bernoulli, nous l'avons vu, est parti d'une idée similaire dans la section VII de son *Hydrodynamique*, avant de bifurquer pour une explication physique plus « moderne » du processus, puisqu'envisageant une éventuelle perte de forces vives comme un échange entre le mouvement progressif et le mouvement intestin, c'est-à-dire, pour

[527] D'Alembert, *Ibid.* note 525, § IX, art. 18, p. 157.

employer nos propres termes, entre le flux central de l'écoulement et ses zones tourbillonnaires.

Quoiqu'il en soit, la polémique entre Borda et D'Alembert sur cette question ne correspond donc à rien d'autre qu'à une confrontation entre deux conceptions physiques d'un fluide en mouvement radicalement opposées : le premier propose, en quelque sorte, une théorie du choc des tranches de fluide, là où le second tend constamment à s'assurer que la vitesse des écoulements évolue par degrés insensibles, conformément à la loi de continuité. Les deux savants font tous deux appel, dans ce cadre, à des notions issues du processus de gestation de la mécanique à la fin du XVII[e] et dans la première moitié du XVIII[e] siècle — voir le chapitre II, p. 75. Leur querelle dans cette période de crise de l'hydrodynamique témoigne ainsi de l'influence persistante des anciennes querelles mécaniciennes sur le processus de développement de la science des écoulements. Elle résulte, de fait, de la volonté des hydrodynamiciens d'appréhender le comportement physique d'un fluide en mouvement, lesquels s'appuient, pour ce faire, sur leur façon de penser la dynamique et la notion de contacts entre corps solides.

Prélude au chapitre VIII

Notre étude du sujet laisse, malgré tout, encore une question en suspens. Nous avons en effet, et à de nombreuses reprises, souligné que Borda étend à tort sa théorie de perte de forces vives aux conduites dont la section augmente de façon continue. L'argument de la loi de continuité opposé par D'Alembert dans ce cas de figure ne constitue pas, cela va sans dire, un éclaircissement recevable. Le problème reste donc plein et entier.

Si nous attendons cette fin de chapitre afin d'en faire part, c'est qu'il semble que le cœur de cette question repose sur l'étude d'un autre sujet, tout à fait capital mais des plus délicats, nécessitant donc un chapitre à part entière : le concept de pression.

Nous savons que dans l'hypothèse du parallélisme, c'est-à-dire dans le cas unidimensionnel, chacune des tranches, pour peu que la section soit variable, doit subir des forces de pression différentes sur chacune de ses deux surfaces, cette différence — ou ce *gradient*, pour employer le terme moderne — générant une accélération locale décélérant ou accélérant le fluide selon que la section croît ou décline en cet endroit. En un mot, la pression, *à l'intérieur du fluide*, est plus faible aux endroits où le mouvement est le plus rapide.

Nous avons toutefois déjà eu l'occasion de préciser que D. Bernoulli, D'Alembert et Borda n'envisagent pas explicitement le concept sous cet angle. Ils ne définissent pas de *pression interne*, mais conçoivent en revanche la pression comme une force *externe*, s'exerçant à l'extérieur de la masse de fluide en mouvement sur les parois du vase ou de la conduite contre lequel elle s'écoule. Il semble néanmoins que cette façon de considérer cette notion pose implicitement problème dans le cadre de la polémique que nous venons d'étudier, les savants se trouvant effectivement confrontés à des discontinuités dans le cas de variations de la section. Borda ne s'en cache pas dans ses travaux : c'est d'ailleurs, rappelons-nous, le besoin de pallier l'existence d'une vitesse trop grande dans le cas d'un étranglement trop petit du siphon qui le pousse à introduire une perte de forces vives, puis à en étendre l'usage à tous les cas intermédiaires, c'est-à-dire à tous types d'étranglements, ou encore, tout simplement, aux conduites dont la section varie de façon continue. D'après les explications que nous venons de donner, il est donc possible que le savant avance l'idée d'une perte là où nous verrions l'absence de prise en compte des différentiels de pression au sein de sa théorie.

Dans son « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement » de 1886, Adhémar Barré de Saint-Venant semble se poser la même question. Dans son commentaire sur l'hypothèse émise par D. Bernoulli dans la section VII de son *Hydrodynamique*, hypothèse selon laquelle la force vive $M\dfrac{V^2}{2} - M\dfrac{V'^2}{2}$ pourrait être perdue par le fluide lors de son passage à travers l'orifice percé au fond d'un vase immergé dans un autre, V et V' correspondant respectivement aux vitesses du fluide en amont et en aval de cet orifice, l'hydrodynamicien du XIX$^{\text{e}}$ rétorque en effet, contre ce raisonnement, que[528]

> « tout ou partie de [la] force vive consommée $M\dfrac{V^2}{2} - M\dfrac{V'^2}{2}$ peut très bien s'être convertie en autre chose, par exemple en travail de pression, et avoir contribué par là à la translation générale du fluide du tuyau ».

Précisons, pour comprendre le sens de cette remarque, que le jet central dans le cas d'une brusque variation de la section d'une conduite, c'est-à-dire la zone $EcCDdF$ sur la Fig. XXVII — voir p. 232 — correspond à un écoulement dans une conduite virtuelle dont la section varie de façon continue (la quantité de force vive perdue étant consommée par sa friction contre les zones tourbillonaires apparaissant en périphérie). Si l'on tient donc compte des pressions p et p' « aux endroits où V et V' sont les vitesses translatoires », et que l'on écrit l'équation des forces vives avec le différentiel de pression $p - p'$ consécutif à la variation de la section du jet central, cette équation étant[529],

> « comme l'on sait, lorsque le mouvement est permanent :
>
> $$M\frac{V^2}{2} - M\frac{V'^2}{2} = M(p - p')\text{ »,}$$

« on voit », précise Barré de Saint-Venant[530],

---

[528] A. Barré de Saint-Venant, « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44, 1888, p. 198.

[529] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 528, p. 199. Nous avons fait abstraction, dans la formule extraite de ce mémoire, et reproduite ci-dessous, du terme de travail de frottement T_f ainsi que de la densité du fluide ρ, la première de ces deux notions n'apparaissant pas dans les écrits de D. Bernoulli, D'Alembert et Borda, la seconde étant égale à 1.

[530] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 528, p. 199

> « que la diminution de force vive $M\frac{V^2}{2} - M\frac{V'^2}{2}$ n'est point nécessairement une *perte*. Une portion considérable peut toujours avoir servi *utilement* à la translation de tout le fluide, savoir par l'augmentation de p', en poussant celui qui coule en aval du réélargissement, et, par la diminution de p, en attirant celui qui vient d'amont ».

Il donne enfin une remarque du même type concernant l'une des deux démonstrations — celle reposant sur le principe de D'Alembert, résumée dans la première partie du chapitre, p. 213 — données par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » afin d'établir l'expression des pertes de forces vives dans le problème d'un vase immergé dans un autre. Cette démonstration, écrit-il[531],

> « ne tient pas compte du travail des pressions qui ont lieu à la jonction des deux parties du tuyau, et elle suppose que la vitesse V de chaque tranche affluente devient V' instantanément, ce qui n'est pas, même lorsque l'élargissement est brusque [...], et ce qui est même incompatible avec la continuité que suivent généralement les changements des vitesses des corps ».

Il pointe donc ici le rapport existant entre l'absence du terme de pression, la variation de la section de la conduite, et la question de la continuité de l'évolution de la vitesse dans le jet central de l'écoulement, ce qui, de la même façon que nous soulevions l'idée d'un rapport entre l'extension, par Borda, de sa théorie des pertes de forces vives aux problèmes engageant une variation de section continue et l'absence du différentiel de pression dans ses équations, nous incite également à penser que le respect de la loi de continuité avancée par D'Alembert constitue une manière différente de remédier à ce manque théorique. Il serait, partant de là, tentant de conclure que l'auteur du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII se trouve justement contraint de recourir à cet argument de nature quasi-métaphysique parce qu'il ne maîtrise pas, en 1780, le concept de pression interne.

La pertinence de cette idée bute cependant sur une question importante, celle de la définition de cette notion dans son œuvre en hydrodynamique. Il nous faudra donc, pour l'éclaircir, préciser cette définition dans son premier ouvrage en la matière, le *Traité des fluides* (1744), puis en étudier l'évolution dans ses écrits ultérieurs. Cette interrogation se pose avec d'autant plus de force pour la phase tardive de ses recherches qu'il a, entre temps, pris connaissance des deux mémoires d'Euler de 1755, le célèbre « Principes generaux du mouvement des fluides »[532] et son prolongement « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides »[533], dans lesquels le concept de pression interne se trouve explicitement défini et intégré, que ce soit dans le cas incompressible ou compressible.

[531] A. Barré de Saint-Venant, *Ibid.* note 528, p. 209

[532] *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 (E226).

[533] *HAB* année 1755 (1757), p. 316-361 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 92-132 (E227).

Chapitre VIII. D'ALEMBERT ET LE CONCEPT DE PRESSION D'UN FLUIDE EN MOUVEMENT

En 1801, Gaspard Marie Riche de Prony (1755-1839), auteur de nombreux travaux en hydrodynamique, dont sa *Nouvelle architecture hydraulique*[534], publie un court écrit d'une dizaine de pages, destinée à ses élèves de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole des Ponts et Chaussées, deux écoles dont il occupa respectivement la chaire d'analyse et de mécanique de 1794 à 1815, et le siège de directeur de 1798 jusqu'à sa mort. Cette pièce, intitulée « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horisontal ; *avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problême, dans son Traité des Fluides* »[535], répond à l'objectif suivant :

> « D'Alembert a donné, il y a 30 ou 40 ans, dans son Traité des Fluides (art. 100 & suiv.), une solution de ce problême, qui a paru depuis dans quelques ouvrages élémentaires ; la considération de la pression des tranches fluides y est entièrement omise, ce qui rend l'analyse incomplette, sans l'abréger. La solution suivante, que j'ai publiée, en 1790, dans la première partie de mon Architecture hydraulique [...], n'exige pas plus de calcul que celle de d'Alembert, et s'étend indistinctement à la pression et à la vîtesse ; c'est même à la réunion de ces objets de recherche qu'elle doit sa clarté et sa rigueur. Après avoir exposé cette solution, je me permettrai quelques observations sur celle de d'Alembert, qui pourront faciliter aux élèves l'étude d'un des chapitres les plus difficiles du Traité des Fluides ».

G. Prony fait ici référence au Livre II de la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), et remarque que D'Alembert ne tient apparemment pas compte des forces de pression s'exerçant sur les tranches du fluide.

Il commente, ce faisant, la théorie des écoulements de D'Alembert dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, c'est-à-dire dans le cas unidimensionnel. La « considération de la pression des tranches de fluide » dont il fait mention renvoie aux pressions s'exerçant sur chacune des deux faces de n'importe laquelle des tranches composant l'écoulement étudié. Lorsque la section du vase ou de la conduite varie (abstraction faite de la pesanteur), ces pressions donnent lieu, il s'agit là d'une approximation spécifique au cas unidimensionnel, à deux forces différentes, cette différence — nous parlerions aujourd'hui de *gradient* — étant équivalente, relativement à l'épaisseur de la tranche

[534] G. Prony, *Nouvelle Architecture Hydraulique*, 1ère Partie, Paris, 1790 ; 2nde Partie, Paris, 1796.

[535] G. Prony, « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horisontal ; *avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problême, dans son Traité des Fluides* », *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1801*, t. 18, pièce n° 47, Paris, 1803. Cette pièce est intégralement reproduite en annexe.

correspondante, à la force accélératrice locale qui accélère ou décélère la tranche selon que la section croît ou décline. A l'échelle d'un ensemble de tranches, c'est-à-dire d'un certain volume de fluide, ces forces accélératrices donnent lieu à un différentiel de pression correspondant, comme son nom l'indique, à la différence entre les pressions s'exerçant sur chacune des deux surfaces extrêmes du volume pris en compte. C'est en considérant ce différentiel entre un endroit quelconque du fluide, caractérisé par une pression p, et l'une des surfaces libres de l'écoulement, sur laquelle s'exerce généralement la pression de l'atmosphère p_0, que nous définissons aujourd'hui la *pression dynamique* $\frac{1}{2}v^2 = p - p_0$ pour un écoulement incompressible[536]. Cette relation établit une équivalence directe entre l'évolution de la valeur de pression et celle de la vitesse au sein du fluide.

La pression p renvoie à ce que les historiens versés dans l'histoire de la discipline au XVIIIe siècle ont coutume d'appeler la *pression interne*. Pour comprendre le sens de ce terme, il suffira de préciser, comme nous l'expliquions à l'instant — dans le prélude établissant le lien entre ce chapitre et le précédent —, que D'Alembert n'envisage pas explicitement la pression comme s'exerçant *à l'intérieur* de l'écoulement, mais comme une force *externe* s'exerçant à l'extérieur de la masse de fluide sur les parois du vase ou de la conduite contre lequel elle s'écoule. Ce n'est pas un cas isolé à cette époque — D. Bernoulli et Borda font, par exemple, de même —, mais c'est du moins ce qui pousse G. Prony à constater que le savant omet de considérer les forces de pression des tranches dans la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770), et ce qui nous incite ici, du moins pour partie, à nous pencher sur cette question peu étudiée jusqu'alors. C. Truesdell et O. Darrigol[537] sont, à notre connaissance, les seuls à l'avoir véritablement abordée.

Il faut, là-dessus, rappeler qu'Euler définit le concept de pression interne et le prend en compte dans sa méthode de mise en équation dès 1749 dans le cas unidimensionnel, c'est-à-dire dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, dès 1752 dans le cadre de l'approche analytique, et donc a fortiori dans son célèbre mémoire « Principes generaux du mouvement des fluides » de 1755. Nous avons par ailleurs l'assurance que D'Alembert a pris connaissance en 1761 de ce dernier écrit de son confrère[538]. Il s'agira donc égale-

---

[536] Voir, par exemple, I. L. Ryhming, *Dynamique des fluides*, Presses Polytechniques Romandes, 1985, p. 90.

[537] Voir C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXXVII, et O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 15.

[538] D'Alembert mentionne les deux mémoires « Principes generaux du mouvement des fluides » et « Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides » d'Euler de 1755 dans :
- l'article « Hydrodynamique », signé *(O)*, de l'*Encyclopédie*, vol. 8, Neufchastel, 1765, p. 373a (précisons que la rédaction de cet article remonte au plus tard au mois de mai 1758),
- le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I, Paris, 1761, Mémoire 4, § V, p. 140, note (*),
- le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VII, art. 34, p. 135,
- le § XL(2) du Mémoire 59, *Opuscules* (inédit), Bibliothèque de l'Institut (Paris), MS 1793, f. 553.

ment de comprendre pourquoi sa définition de la pression n'évolue pas sur ce point dans la phase tardive de ses recherches en hydrodynamique. Passe-t-il à côté de cet aspect de la théorie d'Euler, ou s'agit-il d'une intention délibérée de faire fi, conformément à sa conception d'un volume de fluide en mouvement, de ce concept pour établir sa théorie des écoulements ?

Pour tenter d'y apporter quelques premiers éléments de réponse, nous nous livrerons d'abord à un premier examen de sa définition de la pression dans le *Traité des fluides* (1744), dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752) ainsi que dans son œuvre tardive — à savoir le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) —, un premier examen dont il nous faut préalablement dire quelques mots afin de bien nous faire comprendre sur le sens de notre démarche. Qu'il travaille dans l'hypothèse du parallélisme des tranches ou dans le cadre de l'approche analytique, nous constaterons que D'Alembert se borne à une définition de la pression dans le cas unidimensionnel. Cet état de fait nous incitera, dès notre examen de la question dans le traité de 1744, à établir une distinction importante pour la suite de notre étude : nous distinguerons la pression considérée dans la direction de l'écoulement et la pression s'exerçant perpendiculairement aux parois du vase (ce que nous appelions la pression externe). La seconde renvoie à sa définition, proprement dite, du concept. La première ne fait, pour ainsi dire, que très rarement l'objet de précisions explicites de la part du savant. Elle possède néanmoins un statut, propre à sa façon de mettre l'écoulement en équation, dont il nous faut nécessairement tenter de définir les contours.

Nous observerons, en d'autres termes, que sa définition « officielle » de la pression renvoie constamment à une force externe s'exerçant sur les parois du vase contre lequel le fluide s'écoule. Nous constaterons par ailleurs que la description du statut physique de cette notion, considérée dans la direction de l'écoulement, constitue une question intimement liée à la façon dont D'Alembert applique le principe de dynamique dans le cas unidimensionnel et à la façon dont ce dernier s'articule avec un autre principe fondateur de sa théorie des écoulements : le principe d'égalité de la pression en tous sens. Ce premier volet de notre étude nous permettra également de clore l'étude entamée dans le chapitre VI sur la notion d'adhérence des particules fluides : nous verrons, dans la dernière partie de ce chapitre, que la question n'est pas sans rapport avec notre sujet.

La seconde partie de cette étude montrera comment la méthode d'intégration du concept de pression dans le cas unidimensionnel varie selon le principe employé. Nous présenterons d'abord les principaux aspects de l'approche eulérienne concernant la prise en compte du concept de pression interne. Ceci nous conduira à faire état de la teneur des observations de G. Prony sur la définition de la notion dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), et de la façon dont ce dernier conçoit, avec Poisson, l'application

---

Le § XL (2) correspond à une sorte de testament de priorité, rédigé quelques mois avant sa mort, sur ses découvertes en hydrodynamique.

du principe de D'Alembert au mouvement d'un fluide incompressible dans un vase de section variable. Nous verrons enfin comment le même principe, pour peu que l'on considère globalement le volume de fluide comme un système de corps exerçant des actions réciproques, permet de se passer de la prise en compte du concept de pression interne : c'est là, par exemple, l'approche adoptée par Navier.

Il s'agira, pour finir, de montrer que la démarche de D'Alembert revient à se ramener à ce dernier cas de figure, puis de faire voir comment son principe concourt, avec le principe d'égalité de la pression en tous sens, à la définition du concept. Nous nous appuierons, pour ce faire, sur un autre aspect du sujet dans l'œuvre du géomètre, la question de la « séparation des fluides », dont nous analyserons les tenants et les aboutissants dans le cadre d'une polémique entre D'Alembert et D. Bernoulli, dite de la « pression négative », arbitrée par Euler à la fin de l'année 1746, ainsi que ses tardives répercussions sur les recherches sur la séparation des fluides données par D'Alembert dans le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VIII (1780). Nous terminerons ce chapitre en nous interrogeant, à la lumière de certains éléments dissiminés dans le Mémoire 57, sur le statut des forces internes dans l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique : nous constaterons ainsi que, dans le corpus d'étude qui est le nôtre, la notion adhérence apparaît, de façon explicite, comme la seule *force* susceptible selon lui de s'exercer à l'intérieur d'un fluide en mouvement.

1. Premier examen de la définition dalembertienne du concept de pression entre 1744 et 1780

La définition de la pression dans le Traité de dynamique *(1743) et le* Traité des fluides *(1744)*

L'étude du statut du concept de pression dans la théorie unidimensionnelle des écoulements de D'Alembert nécessite, comme nous l'expliquions à l'instant, de revenir à sa méthode de mise en équation du mouvement d'un fluide dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Dans le *Traité des fluides* (1744) ou dans les quelques pages du *Traité de dynamique* (1743) rassemblant les bases de sa théorie de 1744, cette méthode se décline en deux temps : D'Alembert établit premièrement les lois de l'équilibre de ce fluide puis applique son principe de la dynamique au cas de l'écoulement, ce principe lui permettant de réduire « aux Loix de l'Hydrostatique ordinaire les Problêmes qui ont pour objet le mouvement des Fluides »[539]. Dans le *Traité de dynamique*, ces deux étapes occupent respectivement les art. 173 et 174 du paragraphe intitulé « De la conservation des forces vives dans les fluides ». Le *Traité des fluides* se trouve quant à lui divisé en trois livres dédiés à l'établissement des lois de l'équilibre, du mouvement et de la

[539] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Préface, p. xiij.

résistance des fluides : on trouvera les deux étapes susmentionnées dans les art. 23 à 25 du Livre I et les art. 90 et 100 du Livre II. Voyons à présent plus précisément de quoi il retourne.

Que ce soit dans l'art. 173 du *Traité de dynamique* ou dans l'art. 23 du *Traité des fluides*, D'Alembert considère d'abord l'équilibre d'une masse de fluide $ADCZ$ divisée en tranches parallèles (du type FG) dans le vase de section variable $POQT$, et construit un diagramme répondant aux règles suivantes[540] :

> « soit imaginé ce fluide divisé en tranches FKG parallèle à AD ; & que tous les points de chaque tranche soient animés par une force accélératrice représentée par l'ordonnée correspondante kf de la Courbe dfb, (les ordonnées ad représentant les forces accélératrices positives, c'est-à-dire qui tendent de L vers B, & les ordonnées kf celles dont la direction est en sens contraire). »

Reproduit sur la Fig. XXXI, ce diagramme représente la force accélératrice φ animant la tranche quelconque FKG, de section y, de vitesse v et d'épaisseur dx. Il fait apparaître une succession de parties négatives, correspondant aux endroits du fluide où la force accélératrice φ tend à entraîner les tranches vers la surface supérieure, et de parties positives, correspondant aux endroits du fluide où la force accélératrice φ tend à les entraîner vers le fond. Partant de ce même diagramme, D'Alembert établit la condition d'équilibre du volume $ADCZ$ par deux méthodes différentes dans le *Traité de dynamique* et le *Traité des fluides*.

D'après l'art. 173 du traité de 1743, il faut, pour que l'équilibre du volume $ADCZ$ soit assuré[541],

> « qu'une tranche quelconque FKG soit pressée également de bas en haut, & de haut en bas : or la pression de la tranche FKG suivant LB est la même que si elle étoit chargée du Cylindre $EHFG$, dont le poids, en appelant LK, x, & φ la force accélératrice de chaque tranche, sera $FG \times \int \varphi dx$, ou $FG \times (adin - nfk)$; on prouvera de même que la pression de FG suivant BA sera $FG(kfm - mog + gcb)$ & comme ces deux pressions doivent être égales, on aura
>
> $$adin - nfk = kfm - mog + gcb \text{ »}.$$

De la relation

$$adin - nfk = kfm - mog + gcb,$$

D'Alembert déduit que « l'Aire ou surface $adnmobc$ sera zéro »[542], c'est-à-dire

$$\int_L^B \varphi dx = 0, \tag{32}$$

[540] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1$^{\text{ère}}$ édition, Paris, 1743, art. 173, p. 183-184.

[541] D'Alembert, *Ibid.* note 540, art. 173, p. 184.

[542] D'Alembert, *Ibid.* note 540, art. 173, p. 184.

qui correspond à la formulation moderne de la condition d'équilibre.

Partant de là, l'équation du mouvement est obtenue par le biais de son principe de la dynamique en substituant à la force accélératrice φ dans la condition d'équilibre précédente l'incrément de vitesse dv, ou $gdt - dv$ dans le cas d'un fluide pesant, perdu ou gagné par chaque tranche, « c'est-à-dire [...] la vitesse par laquelle chaque tranche seroit restée en équilibre avec les autres »[543], ou encore la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$, ou $g - \frac{dv}{dt}$ dans le cas pesant, détruite par le mouvement de chaque tranche dans l'intervalle dt compte tenu de l'action des autres tranches du fluide. D'Alembert obtient ainsi l'équation du mouvement, à savoir

$$\int_L^B \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0 \tag{33}$$

dans le cas non pesant.

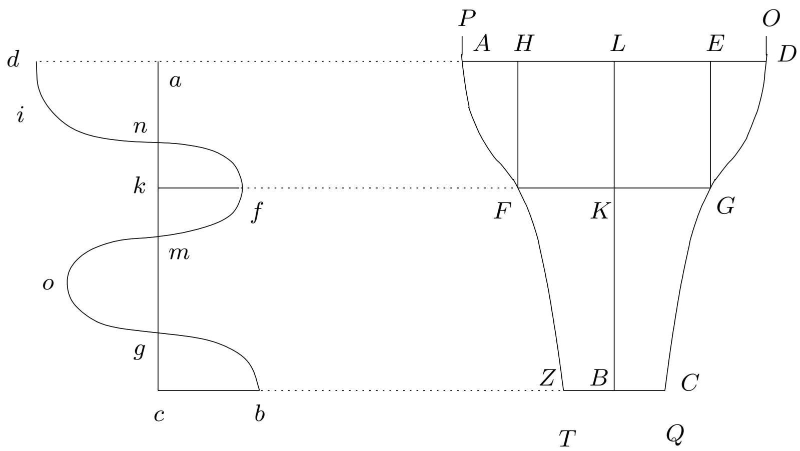


Fig. XXXI – A droite : écoulement d'un volume $ADCZ$ de fluide dans un vase $POQT$ de section variable. A gauche : diagramme des forces accélératrices animant les différentes tranches FG du fluide.

A l'occasion du résumé de la méthode dalembertienne de mise en équation d'un écoulement dans le cas unidimensionnel que nous donnions dans le chapitre II, nous affirmions que l'équation du mouvement (33) découle de l'égalité entre la force de pression

$$y \int_L^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx \tag{34}$$

s'exerçant de L vers K sur une section y quelconque du vase située à la hauteur K, et la force de pression

$$y \int_B^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx \tag{35}$$

[543] D'Alembert, *Ibid.* note 540, art. 174, p. 184.

s'exerçant de B vers K sur la même section, de telle sorte que

$$y\int_L^K\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=y\int_B^K\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_L^B\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0$$

Il s'agit donc bien du même raisonnement, si ce n'est que la force de pression s'exerçant de L vers K se voit plus précisément assimilée, dans l'art. 173 du *Traité de dynamique*, au poids du cylindre $EHFG$ sur la tranche FG (voir la Fig. XXXI), le terme de « poids » renvoyant à la somme des forces accélératrices détruites dans le mouvement de ce cylindre entre les deux instants t et $t+dt$.

Dans l'art. 23 du *Traité des fluides*, D'Alembert propose une méthode d'établissement de la condition d'équilibre (32) quelque peu différente de celle donnée dans le *Traité de dynamique* : au lieu d'égaler, ainsi que nous venons de le voir, les forces de pression s'exerçant en sens opposés sur les surfaces supérieure et inférieure d'une tranche quelconque de fluide, D'Alembert traduit l'annulation du poids que la masse de fluide $ADCZ$ exerce sur le fond du vase, supposé fermé et immobile à l'instant considéré.

« Supposons », écrit-il en guise de démonstration dans l'art. 22 du traité de 1744[544],

> « que le vase soit terminé par un fond immobile ZC, la pression de ce fond sera $= ZC \times adnmobc$. Donc si l'Aire $adnmobc$ n'étoit pas $= 0$, ce fond souffriroit une certaine pression ; par conséquent si on l'imaginoit anéanti, le Fluide descendroit nécessairement, & ne seroit plus en équilibre, ce qui est contre l'hypothèse. »

Au raisonnement de l'art. 173 du *Traité de dynamique* qui consiste en la traduction d'un équilibre local, celui d'une tranche quelconque, il préfère donc, dans le *Traité des fluides*, établir la condition (32) à partir de l'équilibre global du volume de fluide. C'est probablement là un indice, comme le note l'historien O. Darrigol[545], de la volonté de D'Alembert de se débarrasser des forces internes aux écoulements : nous verrons que l'étude donnée dans ce chapitre confirme ce point de vue.

Pour autant, l'égalité des forces de pression s'exerçant de part et d'autre d'une tranche quelconque de fluide n'en reste pas moins de mise puisque, précise D'Alembert dans l'art. 24, « il ne suffit pas pour qu'il y ait équilibre, que l'Aire $adnmobc$ soit zero », c'est-à-dire que $\int_L^B \varphi dx = 0$, mais « il faut encore »[546]

> « 1°. que la force qui anime la surface AD, tende de L vers B, & que celle qui anime ZC, tende de B vers L [...] 2°. il faut que l'Aire $adnmobc$ qui commence & qui finit

[544] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre I, art. 22, p. 20.

[545] O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 15.

[546] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre I, art. 24, p. 20-21.

> par zero, & dont les différentes parties *adin* expriment les pressions des tranches FG correspondantes, n'ait aucune partie exprimée négativement, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune point où la somme des Aires négatives surpasse la somme des Aires positives. Car alors une des tranches seroit plus pressée vers le haut que vers le bas, & l'équilibre seroit rompu : cette seconde condition renferme la premiere, comme on le peut voir aisément ».

En se rappellant que, dans l'art. 173 du *Traité de dynamique*, D'Alembert assimile les forces de pression s'exerçant de part et d'autre de la tranche quelconque FG aux poids des cylindres de fluide situés de part et d'autre de cette tranche, il convient dès lors de se demander quel rôle jouent les forces accélératrices dans les portions AHF et EDG compte tenu du fait que la force de pression ou le poids $FG \times (adin - nfk)$ correspond aussi à la somme des forces accélératrices s'exerçant dans *toute* la partie supérieure $ADGF$ (voir la Fig. XXXI). La réponse est donnée en deux temps dans l'art. 23 du *Traité des fluides* (D'Alembert y fait référence à une version quelque peu modifiée de la Fig. XXXXI : voir la Fig. XXXII)[547] :

> « 1°. Si on mene les lignes ZH, CE, parallèles à LB, l'effort du Fluide contre les parois du vase, sera égal au poids du Fluide contenu dans les espaces AHZ, DCE ».

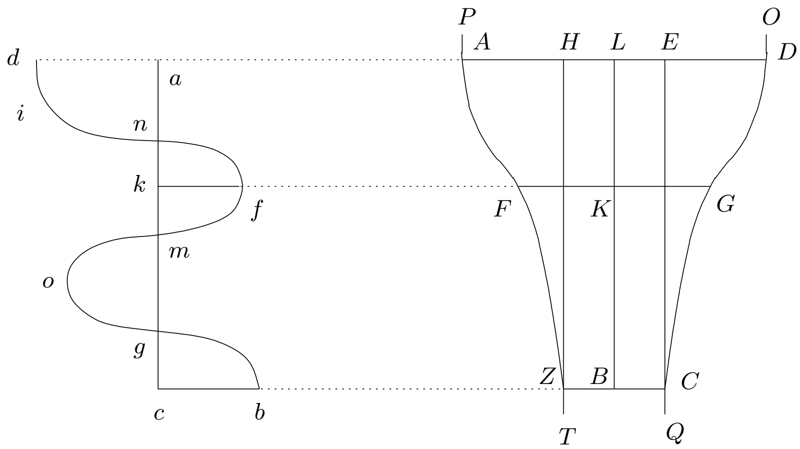


Fig. XXXII – A droite : écoulement d'un volume $ADCZ$ de fluide dans un vase $POQT$ de section variable. A gauche : diagramme des forces accélératrices tendant à mouvoir les différentes tranches FG du fluide.

Cette partie des forces accélératrices paraît donc, selon D'Alembert, être à l'origine de la force de pression s'exerçant sur les parois du vase. Par ailleurs, précise-t-il dans ce même art. 23 :

[547] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre I, art. 23, p. 20.

« 2°. En général, un point quelconque G du vase est pressé perpendiculairement avec une force proportionnelle à l'Aire $adin - nfk$ »

La force de pression sur la paroi au niveau de la tranche FG est donc proportionnelle à la quantité $\int_L^K \varphi dx$, c'est-à-dire la somme des forces accélératrices s'exerçant sur les différentes tranches de la partie supérieure $ADGF$ du volume de fluide.

Pour ce qui est de l'obtention de l'équation du mouvement à partir de la condition d'équilibre (32), la méthode employée dans le *Traité des fluides* est tout à fait identique à celle synthétiquement exposée dans le *Traité de dynamique* : le principe de dynamique permet à D'Alembert de substituer à la force accélératrice φ l'incrément de vitesse dv dans le cas non pesant, ou $gdt-dv$ dans le cas pesant, avec laquelle chaque tranche tend à se mouvoir entre deux instants t et $t+dt$, ou, de façon équivalente, la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$ dans le cas non pesant, ou $g - \frac{dv}{dt}$ dans le cas pesant, perdue par chaque tranche dans le même intervalle de temps dt[548].

Nous verrons dans un instant que l'expression de la force de pression s'exerçant sur les parois du vase dans le cas d'un écoulement s'obtient de la même façon, c'est-à-dire en substituant à la force accélératrice φ, dans l'expression de la force de pression donnée dans l'art. 23-2° du traité, la force accélératrice détruite dans le mouvement de chaque tranche.

Rappelons toutefois, avant de ce faire, les principales informations sur le concept de pression ressortant de cet exposé des méthodes de mise en équation d'un écoulement dans le *Traité de dynamique* et le *Traité des fluides*.

Le principe d'égalité de la pression en tout sens auquel le principe de dynamique permet de se ramener se trouve directement ou indirectement assuré par l'égalité, pour une tranche quelconque FG, entre les sommes des forces accélératrices détruites $\int_L^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ et $\int_B^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ dans les parties $ADFG$ et $FGCZ$: D'Alembert s'assure ainsi de l'équilibre du volume global de fluide $ADCZ$ et parvient à l'équation de l'écoulement

$$\int_L^B \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0.$$

Pour ce qui est de la pression, D'Alembert l'assimile, dans la *direction de l'écoulement*, aux sommes des forces accélératrices détruites dans les deux portions du cylindre de section FG situées au-dessus et au-dessous de la tranche FG. Il conçoit d'autre part une force de pression s'exerçant contre les parois du vase et découlant de la destruction des forces accélératrices dans les parties situées de part et d'autre de ce même cylindre.

La distinction entre la pression s'exerçant dans la *direction de l'écoulement* et celle s'exerçant *perpendiculairement aux parois du vase* apparaît par ailleurs sous un autre

[548] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre II, art. 90, p. 75 (cas d'un fluide non pesant) ; art. 100 (cas d'un fluide pesant), p. 84.

angle dans la préface du *Traité des fluides.* « Pour déterminer la pression mutuelle des particules du Fluide », y explique-t-il[549],

> « il suffit d'observer que si les tranches se pressent les unes sur les autres, c'est parce que la figure & la forme du vase les empêche de conserver le mouvement qu'elles auroient, si chacune d'elles étoit isolée ».

« Il faut donc par notre Principe », c'est-à-dire son principe de la dynamique, poursuit-il[550],

> « regarder ce mouvement comme composé de celui qu'elles ont réellement, & d'un autre qui est détruit. Or c'est en vertu de ce dernier mouvement détruit qu'elles se pressent mutuellement, avec une force qui réagit contre les parois du vase ».

D'Alembert présente, autrement dit, la notion de pression mutuelle comme étant ce qui résulte de la destruction du mouvement que les tranches du fluide possèderaient si elles étaient isolées et si ce mouvement était indépendant de la forme du vase. Il s'agit, d'après son principe de dynamique, de la force qui naît de la nécessaire destruction de l'action mutuelle des tranches dans la direction de l'écoulement et qui s'applique, de ce fait, perpendiculairement aux surfaces latérales de ces tranches, c'est-à-dire perpendiculairement aux parois du vase contre lesquelles ces dernières se trouvent être en contact.

Cette notion de pression mutuelle semble donc devoir être distinguée des forces de pression ou des poids $\int_L^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ et $\int_B^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ qui s'exercent de part et d'autre d'une tranche quelconque FG dans la direction de l'écoulement et dont l'égalité permet à D'Alembert, ainsi que nous venons de le voir, d'établir la condition d'équilibre du volume global de fluide. Nous remarquons d'ores et déjà une différence évidente de vocable : la première est appelée « pression mutuelle des particules » tandis que les secondes apparaissent sous la dénomination de « pression de la tranche FKG », que ce soit, comme nous l'avons vu plus avant, dans l'art. 173 du *Traité de dynamique* ou dans l'art. 24 du *Traité des fluides.* Cette notion de « pression de la tranche » apparaît, qui plus est, dans la première phase de la méthode de mise en équation d'un écoulement de D'Alembert, à savoir l'établissement de la condition d'équilibre d'un volume de fluide dans un vase. Il reste donc à voir comment elle se voit définie dans la partie du *Traité des fluides* dédiée à l'exposé proprement dit de sa théorie des écoulements.

La notion de « pression de la tranche » disparaît en fait dans le Livre II au profit de l'appellation « pression à la hauteur x ». D'Alembert en explicite la définition dans les art. 146 à 150 de l'ouvrage[551] :

[549] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Préface, p. xv. Dans l'article « Pression » de l'*Encyclopédie*, signé *(0)*, vol. 13, Neufchastel, 1765, p. 324a, D'Alembert renvoie, pour ce qui concerne « la *pression* des fluides », à l'article « Fluide » du vol. 6, Paris, 1756, dans lequel il reproduit mot pour mot, p. 886b, cet extrait, et le suivant, de la préface de son traité de 1744.

[550] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Préface, p. xv.

[551] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre II, art. 146, p. 124. Nous avons substitué, dans cet extrait,

> « Puisque [...] $\frac{gdx}{v} - dv$ représente la petite vitesse avec laquelle chaque tranche devroit tendre à se mouvoir pour rester en équilibre, il s'ensuit que $\frac{gdx}{vdt} - \frac{dv}{dt}$ représente la force accélératrice indéterminée, en vertu de laquelle chaque tranche resteroit en repos. Donc (n. 2. *art.* 23.) à une hauteur quelconque AO, x, [...] la pression est $\int gdx - \int \frac{dxdv}{dt}$ ».

L'expression de cette pression « à la hauteur x » $\int gdx - \int \frac{dxdv}{dt}$ renvoie donc à celle de la pression en un point quelconque de la paroi du vase donnée dans l'art. 23-2°, c'est-à-dire, après application du principe de la dynamique, à la quantité

$$P(x) = \int_L^K \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx,$$

ou encore

$$P(x) = \int_{O'}^O \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$$

si l'on se réfère au vase de la Fig. XXXIII. Elle répond, d'après le titre du passage, à la définition « De la pression qu'un Fluide qui se meut dans un vase, exerce contre ses parois »[552] et n'est donc, comme le confirme l'art. 149, pas envisagée autrement que comme « la pression en un endroit quelconque Z »[553] (voir la Fig. XXXIII), c'est-à-dire comme une pression *externe* s'exerçant *perpendiculairement aux parois du vase.* Cette expression établit par ailleurs la relation de dépendance existant entre la vitesse d'une tranche de fluide et la pression s'exerçant contre la paroi du vase à la hauteur correspondante : elle est identique à celle précédemment obtenue par J. Bernoulli dans l'*Hydraulique* (1742)[554].

Considérée *dans la direction de l'écoulement*, la notion de « pression à la hauteur x » ne semble donc pas, compte tenu de l'existence d'une force égale et dirigée en sens opposé, exercer de force effective au sein du fluide. Elle ne devient en fait opérante qu'à partir du moment où elle s'exerçe sur le fond d'un vase percé d'un orifice en son fond

---

la notation g correspondant à l'accélération de la pesanteur à la notation d'origine p, afin que cette dernière ne soit pas confondue avec la lettre communément employée, de nos jours, pour désigner la pression.

[552] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre II, art. 146, p. 124.

[553] D'Alembert, *Ibid.* note 544, Livre II, art. 147, p. 125.

[554] Comme nous le notions dans le Chapitre I — voir p. 41 —, D. Bernoulli est le premier à établir, dans son *Hydrodynamique* (1738), la relation de dépendance existant entre la vitesse d'une tranche et la pression contre les parois : son résultat se borne cependant au cas d'un écoulement stationnaire. Dans l'*Hydraulique*, son père J. Bernoulli généralise le résultat de son fils au cas d'un écoulement non stationnaire. Voir, pour plus de détails, O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 4-15.

— voir la Fig. XX, p. 208. Elle génère dès lors une force de pression *externe* égale à

$$\int_{Q'}^{Q''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right)(y' - EF)dx,$$

avec $y' = y - EF$ (la pression étant nulle au niveau de la surface libre EF), ou encore

$$\int_{Q'}^{Q''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydx - EF \times \int_{Q'}^{Q''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right),$$

qui correspond à l'expression de la pression sur le fond d'un vase percé d'un orifice EF donnée dans l'art. 150 du traité. Le tout, de ce point de vue, possède donc une certaine cohérence.

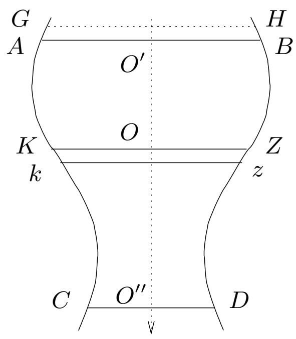


Fig. XXXIII – Ecoulement d'un volume de fluide $ABDC$, divisé en tranches parallèles $KZzk$, dans un vase de section variable.

Après ce premier état des lieux des différentes versions, formulations et définitions du concept de pression dans la théorie unidimensionnelle de 1744, il apparaît que la notion de pression, considérée dans le sens de l'écoulement, constitue un problème des plus délicats. D'un côté, la définition de la pression « à la hauteur x » des art. 146 à 150 de l'ouvrage correspond à la « définition officielle » du concept dans le cas d'un fluide en mouvement. Elle renvoie à une force externe et n'évoluera pas ou très peu dans ses futures recherches en hydrodynamique. De l'autre côté, la « pression mutuelle des parties du fluide » n'apparaît pas de façon explicite dans le corps même du *Traité des fluides* : sa seule mention correspond au passage de la préface de l'ouvrage que nous citions plus avant. La distinction entre pression considérée dans la direction de l'écoulement et pression considérée perpendiculairement aux parois ne relève donc pas d'une définition claire et stable du concept, mais de la façon dont cette dernière émerge de sa méthode de mise en équation de l'écoulement d'un fluide.

Partant de là, voici un résumé des informations dont nous disposons :

– nous avons, d'une part, la « pression à la hauteur x ». Nous avons constaté qu'elle correspond à la somme des forces accélératrices détruites dans la portion supérieure de fluide surplombant une tranche, que cette même force de pression, par ailleurs assimilée à un poids, est égale à la somme des forces accélératrices détruites dans la portion inférieure de ce même volume. Cette égalité garantit, par le biais du principe de dynamique de D'Alembert, l'équilibre du volume total de fluide dans le vase. Elle n'exerce pas, pour finir, de force effective à l'intérieur du fluide, mais une force externe dirigée perpendiculairement aux parois ;

– nous avons, d'autre part, eu affaire à la notion de « pression mutuelle des parties du fluide ». Elle renvoie, quant à elle, à la destruction d'une partie du mouvement dans la direction de l'écoulement et conduit, par là-même, à l'existence d'une force réagissant perpendiculairement aux parois.

Dans le premier cas, la définition assure la vérification du principe d'égalité de la pression en tout sens dans la direction de l'écoulement. Dans le second, la définition se trouve intimement liée à l'application de son principe de la dynamique.

Il s'agira donc de comprendre en quoi, ou plutôt comment ces deux notions de « pression à la hauteur x » et de « pression mutuelle » se trouvent être compatibles, si elles sont identiques ou s'il les perçoit différemment, ce qui passera nécessairement par une étude de la façon dont il conçoit l'application de son principe de la dynamique dans le cas unidimensionnel et de la façon dont ce dernier s'articule localement et globalement avec le principe d'égalité de la pression en tous sens.

Contentons-nous, pour l'heure, d'un passage en revue des définitions de la pression dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752) et dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780). Nous nous assurerons ainsi de la persistance d'un cadre d'étude unidimensionnel pour ce qui concerne cette question, y compris dans son traité de 1752. Nous verrons, dans le même temps, que D'Alembert s'obstine à appréhender l'effet de la pression sous la forme d'une force *externe*, ou ce qui est la même chose, comme la force dérivant de la quantité $\int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$, considérée perpendiculairement aux parois. Nous reviendrons ensuite sur le statut physique de la pression considérée dans la direction de l'écoulement, en nous penchant plus précisément sur sa méthode de mise en équation du mouvement dans le cas unidimensionnel.

*La définition de la pression dans l'*Essai sur la résistance des fluides *(1752)*

Dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, D'Alembert abondonne, comme nous le savons, l'hypothèse du parallélisme des tranches au profit d'une théorie, dite analytique, ayant « l'avantage de n'être appuyée sur aucune supposition arbitraire »[555]. Il définit, grâce à cette nouvelle approche, les prémices de la notion moderne de *champ de vitesse*, en considérant les composantes horizontale et verticale $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse animant, à un instant t, un élément infinitésimal de fluide repéré par les deux

[555] D'Alembert, *Essai sur la résistance des fluides*, Paris, 1752, Introduction, p. xxv.

coordonnées d'espace x et z.

De façon distincte de la démarche d'Euler dans son mémoire « Principes generaux du mouvement des fluides » de 1755, où ce dernier explique que « pour connoitre bien le mouvement, dont le fluide sera porté, il faut déterminer pour chaque instant & pour chaque lieu, tant le mouvement que la pression du fluide qui s'y trouve »[556], D'Alembert n'établit pas la pression en tout point (x, z) à chaque instant t de l'écoulement comme il le fait pour la vitesse, mais en donne une définition proche, sur le fond, de celle de l'art. 146 du *Traité des fluides*.

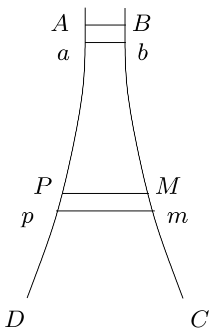


Fig. XXXIV – Ecoulement d'un fluide divisé en tranches parallèles $PMmp$ dans un canal infiniment étroit de section variable.

Cette définition, il en fait état dans les art. 27 à 34 du chapitre III de l'ouvrage, intitulé « Principes généraux de la pression des Fluides, soit en repos, soit en mouvement ». Il y étudie l'écoulement d'un fluide dans le canal vertical $ABCD$ infiniment étroit et de section variable représenté sur la Fig. XXXIV et cherche à déterminer, dans ce cadre, « la vitesse du Fluide en un point quelconque P du Canal $ABCD$, & la pression du point P »[557]. Comme dans son traité de 1744, il adopte d'abord, pour ce faire, l'hypothèse du parallélisme des tranches, dont il justifie la crédibilité grâce à la considération d'une conduite infiniment étroite, et grâce à la notion, précédemment étudiée — voir le chapitre VI, p. 178 —, de ténacité et d'adhérence des particules du fluide entre elles. « Il est évident », explique-t-il en effet[558],

> « que toutes les parties du Fluide contenues dans une tranche quelconque PM ont toutes la même vitesse du moins à très-peu près, tant parce que PM est supposée très-petite, que parce qu'on peut imaginer dans les particules du Fluide une certaine tenacité, en vertu de laquelle les particules qui sont contigües l'une à l'autre dans un même tranche PM soient adhérentes entr'elles, & aient une vitesse égale ».

[556] Euler, « Principes generaux du mouvement des fluides », *HAB* année 1755 (1757), art. 5, p. 276.

[557] D'Alembert, *Ibid.* note 555, art. 27, p. 23.

[558] D'Alembert, *Ibid.* note 555, art. 27, p. 23.

A l'instar de l'art. 146 du *Traité des fluides*, il applique ensuite son principe de la dynamique, selon lequel les particules de la tranche PM animée par la vitesse homogène u qui se retrouvent en pm au bout de l'intervalle de temps dt passent d'une position d'équilibre à une autre entre les deux instants t et $t+dt$, cette seconde position d'équilibre étant assurée par la destruction de la force accélératrice $-\frac{du}{dt}$ du fait de l'action mutuelle de cette tranche avec les autres tranches du fluide. Donc, dans le cas d'un fluide non pesant[559],

> « la pression en P sera la même, que si les particules PM de chaque tranche étoient sollicitées par une force $= -\frac{du}{dt}$: or dans ce cas on trouve que faisant $Pp = ds$, la pression en P seroit $\int Pp \times \frac{-du}{dt} = \int ds \times \frac{-du}{dt}$ »,

c'est-à-dire $\int_A^P \frac{-du}{dt} ds$. Dans le cas d'un fluide soumis à la pesanteur g, la pression en P sera de même donnée par « $\int ds \left(g - \frac{du}{dt}\right)$ »[560], c'est-à-dire

$$\int_A^P \left(g - \frac{du}{dt}\right) ds.$$

C'est là une expression de la pression à une hauteur $s = x = AP$ similaire à celle de l'art. 146 du *Traité des fluides* (1744) : elle correspond ici à la pression imprimée par le fluide qui s'y écoule sur la paroi du canal infinitésimal.

Cette même conception fonde encore, nous allons le voir, sa définition de la « pression à la hauteur x » dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780). D'Alembert, dans cet écrit, travaille néanmoins successivement dans les trois hypothèses unidimensionnelles que sont l'hypothèse du parallélisme des tranches, l'hypothèse du parallélisme des tranches restreinte à l'intérieur d'un vase fictif amputé de ses parties stagnantes — ce que nous appelions l'hypothèse des parties stagnantes dans les deux chapitres précédents —, et l'hypothèses des tuyaux curvilignes invariables.

La définition de la pression dans le Mémoire 57 des Opuscules *t. VIII (1780)*

D'Alembert fait de nouveau état de sa façon de considérer la question dans le VIII^e^ paragraphe du Mémoire 57, dont l'intitulé « De la pression qu'un fluide mu dans un vase, exerce contre les parois de ce vase »[561] laisse d'ores et déjà peu de place à une éventuelle évolution de la définition du concept.

---

[559] D'Alembert, *Ibid.* note 555, art. 27, p. 23.

[560] Cf. D'Alembert, *Ibid.* note 555, art. 29, p. 25.

[561] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VIII, p. 136.

Ces nouvelles recherches sont ici motivées par sa polémique avec Borda concernant la valeur des forces accélératrices animant les surfaces supérieure et inférieure du fluide dans le premier instant du mouvement d'un fluide à l'intérieur d'un vase cylindrique percé d'un orifice en son fond. Il tente, plus précisément, de répondre à l'objection formulée par son contradicteur dans son « Mémoire sur l'écoulement » selon laquelle la force accélératrice animant la surface supérieure ne peut être égale à l'accélération de la pesanteur g[562],

> « parce qu'il suivroit de-là que le fluide descendroit dans le commencement du mouvement avec la même vitesse que si le fond ne lui faisoit aucun obstacle ».

Le premier aspect de la question renvoie à ses travaux dans les § II, III et V du mémoire, dont nous rendions compte dans le chapitre VI — voir p. 182. D'Alembert s'intéresse donc ici au second versant du problème et procède, pour ce faire, au calcul de la force de pression s'exerçant sur le fond du vase.

L'expression de cette force de pression correspond à celle donnée dans l'art. 150 de la première édition du *Traité des fluides* (1744), c'est-à-dire, comme nous le notions ci-dessus,

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) y dx - EF \times \int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right). \tag{36}$$

De même que dans les § II, III et V, D'Alembert adopte successivement, pour la calculer, trois cadres d'étude distincts : l'hypothèse du parallélisme restreint à l'intérieur d'un vase fictif correspondant au vase cylindrique amputé des parties stagnantes de fluide, dans les art. 1 à 9, l'hypothèse du parallélisme dans un vase cylindrique « classique » dans les art. 10 à 22, ainsi que l'hypothèse des tuyaux invariables, dans les art. 23 à 29.

Le calcul de la force de pression s'exerçant sur le fond du vase revient respectivement, dans chacune de ces trois hypothèses, au calcul de la pression s'exerçant sur les contours QE et NF des parties stagnantes, sur le fond horizontal CD et FD (voir la Fig. XXXVa) et sur le fond de l'un des deux tuyaux curvilignes $ACEea$ et $BdFfb$ contigus aux parois (voir la Fig. XXXVb). L'opération s'avère évidemment plus délicate dans le premier et le dernier cas, puisque l'expression (36) requiert de disposer de l'équation des contours QE et NF, ainsi que celle des parois des tuyaux curvilignes. Il travaille donc, comme il le faisait déjà dans les § III et V, sur des exemples arbitrairement choisis et paramétrés par un réel n, à savoir $\dfrac{k}{y} = 1 + \dfrac{x^{n-1}b^{n-2}}{k}$ pour décrire les contours des parties stagnantes et $\zeta(x) = k\left(1 - \dfrac{hx}{k^2}\right)^n$ pour décrire l'évolution de la section dans la partie courbée des tuyaux curvilignes, k et h désignant respectivement la demi-section de la surface supérieure et la hauteur du fluide dans le vase.

[562] Borda, « Mémoire sur l'écoulement », *MARS* année 1766 (1769), art. 3, p. 582.

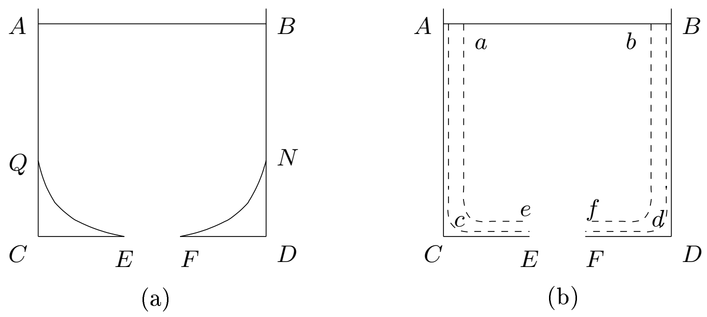


Fig. XXXV – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond, respectivement dans l'hypothèse des parties stagnantes (a) et dans l'hypothèse des tuyaux curvilignes (b).

Il parvient, dans le cadre des deux dernières hypothèses, à démontrer que la force de pression s'exerçant sur le fond d'un vase cylindrique percé d'un très petit orifice est, « très-peu de temps après le commencement du mouvement »[563],

> « à peu près égale dans un vase cylindrique [...] au poids total du fluide contenu dans le vase, quand même au premier instant cette pression seroit presqu'insensible ».

C'est là le résultat réfuté par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » et énoncé par D'Alembert sous la forme suivante dans l'art. 150 de la première édition du *Traité des fluides*[564] :

> « lorsqu'un Fluide s'écoule d'un vase par une très-petite ouverture, la puissance nécessaire pour soutenir le vase est égale au poids du Fluide ».

Dans le cadre du parallélisme restreint au vase fictif $AQEFNB$, l'expression obtenue le contraint cependant à avouer que « dans ce cas la pression du fond FD sera peu considérable, au moins en tant qu'elle vient de la pesanteur »[565]. Pour résoudre la difficulté, D'Alembert propose de tenir compte de la pression exercée du fait de l'existence de vitesses horizontales dans la partie inférieure $QEFN$. La valeur de la force de pression s'exerçant au point M du vase (voir la Fig. XXXVI) du fait de la destruction de l'action mutelle des tranches dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire $\int_K^P \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$, pourrait ainsi être complétée par la force de pression Y « qui résulte de la totalité des forces horizontales dans la tranche PM »[566].

[563] D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VIII, art. 19, p. 143.

[564] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1[ère] édition, Paris, 1744, art. 150, p. 127.

[565] D'Alembert, *Ibid.* note 563, art. 3, p. 137.

[566] D'Alembert, *Ibid.* note 563, art. 3, p. 137.

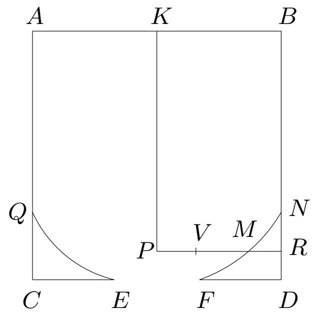


Fig. XXXVI – Ecoulement d'un fluide dans un vase cylindrique percé d'un orifice EF en son fond, dans l'hypothèse des parties stagnantes.

C'est, à première vue, une idée contradictoire avec l'argument avancé afin de justifier le maintien du parallélisme des tranches dans le vase $AQEFNB$, argument selon lequel, rappelons-le, les vitesses horizontales apparaissant dans la partie inférieure du vase se trouvent détruites par la force provenant de la ténacité et de l'adhérence des particules du fluide entre elles. D'Alembert explique cependant que l'un n'exclut pas l'autre[567]

> « parce que l'adhérence des parties du fluide qui est une force simplement passive, empêche bien que les forces horizontales ne produisent un effet pour mouvoir le fluide dans ce sens, mais n'empêche pas que ces forces ne puissent produire une pression très sensible, comme la force de frottement peut bien s'opposer au mouvement, mais non pas à la pression ».

Cet extrait du § VIII incite d'abord à établir un nouveau (et prudent) parallèle entre la notion dalembertienne d'adhérence et le concept moderne de *viscosité*. Nous avions vu, dans le chapitre VI — voir p. 180 —, que les art. 1 à 13 du § VII montraient le caractère infondé de cette comparaison pour ce que D'Alembert appelle l'adhérence des parties du fluide entre elles. Ce qu'il nomme l'adhérence des parties du fluide au vase, et dont il est question dans cet extrait, semble néanmoins présenter quelques points communs avec ce que nous appelons justement aujourd'hui l'*adhérence* des particules s'écoulant contre une paroi solide et que nous attribuons à la *viscosité* du fluide. L'idée, déjà présente dans l'art. 115 de la première édition du *Traité des fluides*, que les « particules contigues au vase descendront moins vîte que les autres »[568] est d'ailleurs présentée par certains historiens[569] comme une première appréhension de cette notion. Peut-être D'Alembert a-t-il donc une certaine intuition du phénomène moderne de *pertes de charge linéïques*.

---

[567] D'Alembert, *Ibid.* note 563, art. 4, p. 137-138.

[568] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 115, p. 101.

[569] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, éd. française dir. par P. Appell, d'après l'éd. allemande dir. par J. Molk, Paris, Gauthier-Villard, 1912, t. IV, vol. 5, fasc. 1, p. 93-94, note 99, et M. Rühlmann, *Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper*, Hannover, Hahn, 1880.

C'est ce que laisse à penser cet autre passage du Mémoire 57 § XI, dans lequel le savant avoue qu'il lui semble « bien plus naturel de penser qu'une partie du fluide qui entre dans le vase, perd son mouvement en se dissipant latéralement », que « d'admettre [la] perte de forces vives »[570] introduite par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » — laquelle correspond, à nos yeux, à une *perte de charge singulière*.

Nous nous sommes pour l'heure assuré, grâce à cet examen de la question dans le Mémoire 57, que la définition de la « pression à la hauteur x » demeure similaire, en 1780, à celle donnée dans l'art. 146 de la première édition du *Traité des fluides* : il s'agit d'une force externe s'exerçant sur les parois du vase contre lequel le fluide s'écoule. Il convient donc à présent de comprendre le rôle éventuel au sein de sa théorie de cette même pression $\int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ considérée dans la direction de l'écoulement, puis de comprendre le sens physique de la notion de « pression mutuelle des tranches ».

La clé de cet examen, comme nous l'expliquions plus avant, réside dans la façon dont il articule, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, l'application de son principe de la dynamique avec la vérification du principe d'égalité de la pression en tous sens. Nous commencerons, dès lors, par prendre un peu de recul sur le sujet en nous faisant une idée plus précise du premier de ces deux principes.

Nous présenterons, dans cette optique, la méthode de mise en équation d'Euler dans son mémoire « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite »[571] pour l'écoulement, considéré dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, d'un fluide incompressible dans une conduite de section variable. Nous verrons que son approche, reposant sur l'application de ce que nous appellerions aujourd'hui la seconde loi de Newton, nous est plus familière, notamment du point de vue de la prise en compte du concept de pression interne. Nous exposerons ensuite l'essentiel des critiques de Prony à l'égard de la définition du concept dans le *Traité des fluides*, ce qui nous conduira à faire état de la façon dont ce dernier et deux autres grandes figures de l'hydrodynamique au XIX^{e} siècle, Poisson et Navier, font usage du principe de D'Alembert dans le cadre de la mise en équation du mouvement d'un fluide incompressible considéré selon une seule dimension d'espace. Nous n'en saisirons que mieux, pour finir, la spécificité et les principales caractéristiques du principe tel qu'il se voit appliqué par D'Alembert dans le *Traité des fluides*.

---

[570] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XI, art. 33, p. 183.

[571] Euler, « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite », *HAB* année 1752 (1754), p. 111-148 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 219-250 ; mémoire présenté le 23 octobre 1749 devant l'Académie de Berlin (E206).

2. Le principe de D'Alembert et la question de la prise en compte du concept de pression

La méthode de mise en équation d'Euler dans son mémoire « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite »

Dans ce mémoire présenté devant l'Académie de Berlin le 23 octobre 1749, mais imprimé dans le volume pour l'année 1752, Euler s'intéresse à « l'action des pompes pour refouler l'eau dans les tuyaux de conduite qui la dégorgent enfin dans un réservoir situé à une certaine hauteur au-dessus du niveau de l'eau »[572]. Soit la pompe $ABDC$, le tuyau de conduite $EHGD$ supposé « d'une figure quelconque »[573] et le réservoir J (voir la Fig. XXXVII), il cherche d'abord à « trouver à chaque instant le mouvement de l'eau et la pression qu'elle exerce sur tous les points du tuyau »[574], ce qui passe par la mise en équation de l'écoulement dans le tuyau $ABDC$.

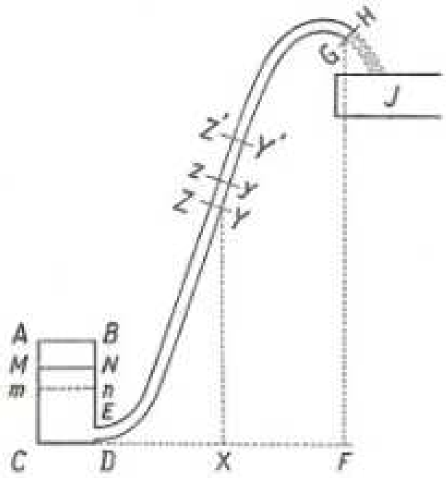


Fig. XXXVII – Ecoulement d'un fluide, mis en mouvement par une pompe $ABDC$, dans un tuyau de conduite $EHGD$ de section variable.

Euler travaille ici selon une seule variable d'espace, correspondant à l'abscisse curviligne $s = DY$ du tuyau de conduite $EHGD$ et remarque donc d'abord qu'en regardant « la vitesse de l'eau en MN comme connue », il sera possible d'« assigner sa vitesse partout, tant dans la pompe que dans le tuyau »[575]. Ceci revient à considérer la vitesse v

[572] Euler, « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite », *HAB* année 1752 (1754), art. 1, p. 111.

[573] Euler, *Ibid.* note 572, art. 11, p. 116.

[574] Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 117.

[575] Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 118.

de la tranche MN comme la vitesse d'une tranche de référence, et permet effectivement d'exprimer la vitesse $w = \frac{z}{a}v$ de l'eau en YZ, compte tenu de la constante du débit de l'écoulement, z et a désignant respectivement la section de la conduite en Y et celle de la pompe en M[576].

La première étape de son raisonnement consiste à établir la force accélératrice par unité de masse $V = \frac{dw}{dt}$ de l'eau en YZ à partir de l'expression du différentiel de vitesse dw qu'elle acquiert entre deux instants t et $t + dt$ de l'écoulement[577].

Il s'agit ensuite, explique-t-il, de trouver « la force accélératrice qui agit sur la section YZ » compte tenu des forces qui y agissent, afin de l'égaler à $V = \frac{dw}{dt}$, ce qui lui impose de « donner à cette section une épaisseur infiniment petite comme Yy, pour avoir la couche d'eau $YZzy$ »[578]. Euler applique, autrement dit, ce que nous appellerions aujourd'hui la seconde loi de Newton à la tranche de fluide située en Y.

Il ne lui reste plus, dès lors, qu'à exprimer les forces s'exerçant sur cette tranche. Celles-ci sont de deux types. La première correspond au propre poids de la couche d'eau $YZzy$, c'est-à-dire $gzds$, avec $ds = Yy$.

La seconde s'obtient en constatant qu'« outre cela »[579]

> « cette couche se trouve du côté YZ sollicitée par la pression de l'eau suivante, et du côté yz de la pression de l'eau précédente »,

Notant p « la pression de l'eau sur la surface YZ », et constatant que p est une fonction de s, et que donc « la pression sur la surface yz sera exprimée par [...] $p + dp$ », Euler observe ainsi que la pression[580]

> « agissant sur la base YZ, qui est $= z$, donnera une force égale au poids d'un volume d'eau $= zp$, dont la couche sera poussée dans la direction YY' ; or de l'autre côté yz elle sera repoussée par la force qui vaut un volume d'eau $= z(p + dp)$ ».

De ces deux forces zp et $z(p + dp)$, conclut-il, « résultera donc une force motrice, qui pousse la couche $YZzy$ en arriere, et qui sera $= zdp$ ». Cette force motrice, « étant

---

576 Euler adopte, dans ce mémoire, la façon de faire des partisans de la théorie des forces vives : il considère v comme « la hauteur, dont un grave en tombant acquiert la même vitesse » (art. 14, p. 117), ce que nous écririons $\frac{v^2}{2g}$. La vitesse vaut ainsi $\sqrt{\frac{v}{2g}}$. Nous rétablissons ici une nomenclature plus familière aux yeux d'un lecteur moderne. Nous avons également modifié certaines notations afin de les rendre plus intelligibles vis-à-vis de ce qui précède.

577 Nous ne détaillons pas le calcul permettant à Euler d'exprimer cette force accélératrice, celui-ci présentant peu d'intérêt vis-à-vis de la question qui nous occupe.

578 Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 120.

579 Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 121.

580 Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 121. Nous avons susbtitué, dans cette citation et les suivantes, la notation z désignant la section de la tranche $YZzy$ à la notation d'origine $\frac{1}{4}\pi z^2$, z correspondant au rayon de la section Zz supposée circulaire.

divisée par la masse même de la couche zds, donne la force accélératrice »[581] par unité de masse $\frac{dp}{ds}$. En ajoutant cette dernière à l'accélération de la pesanteur g, puis en égalant le tout avec la force accélératrice $\frac{dw}{dt}$, Euler obtient ainsi l'équation locale

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{dp}{ds} + g. \tag{37}$$

En l'intégrant entre la section MN de la pompe, qui exerce une force de pression supposée connue, et la section quelconque YZ, Euler parvient enfin à l'expression cherchée de « la pression de l'eau sur le tuyau dans tous ses points »[582]. Il considère donc, dans ce mémoire, à la fois la force interne due à la pression, dont la différence s'exerçant sur les deux faces d'une tranche équivaut à la force accélératrice locale du fluide, et la force externe s'exerçant du fait du mouvement du fluide contre les parois de la conduite.

Sur l'absence du différentiel de pression dans l'équation du mouvement de D'Alembert

Considérant un écoulement incompressible dans un vase $ABDC$ de section variable dans l'hypothèse du parallélisme des tranches (voir la Fig. XXXIII, p. 256), l'application de la seconde loi de Newton à la tranche quelconque de vitesse v, d'épaisseur dx, de section y — donc de masse ydx, la densité étant égale à l'unité —, et de hauteur x dans le vase, nous conduirait aujourd'hui à l'équation

$$(ydx)\frac{dv}{dt} = y(x)p(x) - y(x+dx)p(x+dx) + gydx,$$

avec $p(x)$ et $-p(x+dx)$ les pressions s'exerçant respectivement, dans la direction de l'écoulement, sur les surfaces supérieure et inférieure de cette tranche (repérées par les hauteurs x et $x+dx$). En effectuant l'approximation $y(x) \simeq y(x+dx)$, puis en procédant à un développement limité à l'ordre 1 de la pression entre x et $x+dx$,

$$y(x)[p(x) - p(x+dx)] \simeq -\frac{dp}{dx} ydx,$$

nous obtiendrions ainsi

$$g - \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dx}, \tag{38}$$

qui correspond à l'équation (37). Sachant que $v = \frac{dx}{dt}$, nous parviendrions également à

$$\frac{d(v^2)}{2} = -dp + gdx,$$

[581] Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 122.

[582] Euler, *Ibid.* note 572, art. 14, p. 122.

c'est-à-dire, après intégration entre AB et CD, à l'équation de Bernoulli

$$\frac{v_{AB}^2}{2} - \frac{v_{CD}^2}{2} = p_{CD} - p_{AB} - gx, \tag{39}$$

avec p_{AB}, p_{CD} les pressions en AB et CD, et x la hauteur totale du fluide dans le vase à l'instant considéré.

C'est là la forme de l'équation obtenue par Euler après intégration de (37), mais à une différence près cependant, déjà longuement évoquée dans le chapitre V — voir p. 161 —, et consistant en la présence d'une quantité Φ telle que

$$\frac{v_{AB}^2}{2} - \frac{v_{CD}^2}{2} = \Phi + p_{CD} - p_{AB} - gx.$$

Cette quantité résulte de l'expression de la force accélératrice $\dfrac{dv}{dt}$ dans l'approximation du parallélisme des tranches. Elle correspond à l'équivalent du terme quasi-stationnaire de l'équation de Bernoulli et doit donc, les géomètres en sont conscients à cette époque, pouvoir être considérée comme négligeable par rapport aux autres termes de l'équation compte tenu de leurs hypothèses de travail.

Qu'il s'agisse du *Traité des fluides* ou du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII, D'Alembert dispose, comparativement, de l'équation

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0 \tag{40}$$

pour décrire le mouvement du fluide à l'intérieur de ce vase. Obtenue, via son principe de la dynamique, grâce à la traduction de l'équilibre global du volume de fluide, cette équation le conduit ensuite, rappelons-le, à l'expression du principe de conservation des forces vives, puis au final, à la nouvelle équation

$$\Phi + \left(1 - \frac{K^2}{k^2}\right) \frac{v_{CD}^2}{2g} = x, \tag{41}$$

avec

- $AB = k$, $CD = K$,
- $\Phi = \dfrac{K^2}{k} \displaystyle\int_{AB}^{CD} \frac{dx}{y} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2g}\right)$, ou $\Phi = Nk\dfrac{du}{dt}$ avec $N = \dfrac{K}{k} \displaystyle\int_{AB}^{CD} \frac{Kdx}{y}$, et tel que $\Phi \simeq 0$,

c'est-à-dire

$$\frac{v_{CD}^2}{2g} - \frac{v_{AB}^2}{2g} = x. \tag{42}$$

A première vue, le différentiel de pression $p_{CD} - p_{AB}$ existant entre les deux sections extrêmes du fluide n'apparaît donc pas dans le résultat du savant. Pour autant, cette équation n'a absolument rien d'erroné, compte tenu du fait que D'Alembert, dans ce problème comme dans les autres types d'écoulements étudiés, fait abstraction de la pression de l'atmosphère et considère un volume de fluide délimité par deux surfaces libres, de telle sorte que $p_{CD} = 0$ et $p_{AB} = 0$.

S'il parvient donc à une formulation correcte de l'équation du mouvement, sa démarche se distingue toutefois de celle d'Euler, tant du point de vue des principes employés, nous y reviendrons dans un instant, que de la prise en compte du différentiel de pression existant entre les deux surfaces extrêmes du volume de fluide en mouvement.

Notons en effet, à propos de ce dernier point, que l'équation (40) s'écrirait aujourd'hui, en toute rigueur,

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = p_{CD} - p_{AB} = 0, \tag{43}$$

et rappelons que D'Alembert exprime, dans l'art. 146 du *Traité des fluides*, la pression $P(x)$ à la hauteur x grâce à la relation

$$P(x) = \int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx,$$

avec $O'O = x$. Il précise par ailleurs, dans l'art. 148 du même ouvrage, qu'« il est évident que la pression est nulle [...] aux endroits du vase qui répondent à la surface tant supérieure qu'inférieure du fluide »[583] car :

- à la surface supérieure AB, on a $O'O = x = 0$,
- et à la surface inférieure CD, « on a par les solutions des Problêmes précedens $\int dx \cdot \left(g - \frac{dv}{dt}\right) = 0$ », c'est-à-dire $\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$, qui correspond à l'équation (40).

Il semble, autrement dit, que l'équation du mouvement de D'Alembert contienne l'information $p_{CD} - p_{AB} = 0$ *a priori*, tandis que l'annulation de ce différentiel de pression intervient *a posteriori* par le biais de la méthode d'Euler.

Le point de vue de Prony sur la définition dalembertienne du concept de pression

Dans la pièce déjà évoquée, contenant ses observations sur la démarche de D'Alembert dans la seconde édition du *Traité des fluides* (1770), G. Prony présente cet état de fait comme une erreur de la part du savant. Les pressions en AB et CD étant respectivement appelées P et Q dans cet écrit, au lieu de nos notations p_{AB} et p_{CD}, il y affirme qu'« il faut donner aux quantités qui se rapportent aux surfaces supérieure et inférieure du fluide, les valeurs les plus générales, ce qui introduit nécessairement $P - Q$ dans

[583] D'Alembert, *Traité des Fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, art. 148, p. 126.

l'intégrale définie » $\int_{O'}^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0$ ou, ce qui revient au même, dans l'équation (41). « Il est permis ensuite », poursuit-il[584]

> « dans les applications qu'on peut faire de cette intégrale définie, à des cas particuliers, de supposer $P=0$ et $Q=0$; mais ce n'est pas l'équation particulière et hypothètique $\int_{O'}^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0$ qui prouve que P et Q sont nuls, c'est au contraire la connoissance acquise à *priori* de la possibilité des valeurs $P=0$ et $Q=0$, qui fait voir que, dans certains cas, la quantité $\int_{O'}^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ peut être nulle ».

Il précise, quelques lignes plus loin, que[585]

> « ce n'est point, comme D'Alembert semble l'insinuer, une propriété inhérente à l'intégrale $\int\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ d'être nulle vers ces surfaces, et cette propriété n'y existe qu'autant qu'on l'y introduit expressément, *a posteriori*, en attribuant certaines valeurs à quelque-unes des quantités qui se rapportent aux limites du système fluide ».

Ce qui le pousse finalement à conclure que « la valeur de la pression donnée par d'Alembert, articles 146 et 147 » de son *Traité des fluides* est[586]

> « fautive, même dans le cas où sa manière d'évaluer l'intégrale $\int\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$, pour avoir la vîtesse à l'orifice, lui donne un résultat exact ; ce cas est celui de $P=Q$ qui fait bien disparaître P et Q dans la valeur de la vîtesse, mais non pas de celle de la pression p d'une tranche quelconque ».

En d'autres termes, Prony pointe donc ici le fait que l'annulation du différentiel de pression $p_{AB}-p_{CD}$ précède, chez D'Alembert, le processus de mise en équation du mouvement. Il s'agit d'une hypothèse posée *a priori*, là où nous verrions, comme lui, et comme le fait Euler dans son mémoire de 1749, la nécessité de déterminer ce différentiel *a posteriori*, sur la base des valeurs particulières des pressions p_{AB} et p_{CD} en AB et CD.

---

[584] G. Prony, « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horisontal ; *avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problême, dans son Traité des Fluides* », *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1801*, t. 18, pièce n° 47, Paris, 1803, p. 7. Cette pièce est intégralement reproduite en annexe. Nous avons ici substitué l'équation $\int_{O'}^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0$ à l'équation d'origine « $0=gh-\frac{1}{2}mu^2-\frac{N\omega du}{dt}$ », ceci afin de faciliter l'intelligibilité de l'extrait, et compte tenu du fait que cette équation, renvoyant aux notations de Prony, équivaut à l'équation (41), avec $\Phi=\frac{N\omega du}{dt}$, $h=x$ et $m=1-\frac{K^2}{k^2}$.

[585] G. Prony, *Ibid.* note 584, p. 8.

[586] G. Prony, *Ibid.* note 584, p. 8.

Comme nous le faisions déjà remarquer, D'Alembert considère toutefois invariablement des surfaces libres non soumises à la pression de l'atmosphère dans l'ensemble de son œuvre en hydrodynamique, ce qui lui permet d'aboutir à l'équation correcte du mouvement. Pour autant, quoique la solution de D'Alembert soit donc exacte, Prony n'en rejette pas moins sa façon de définir la pression puisque, dans un cas comme l'autre, explique-t-il, la pression p d'une tranche quelconque, c'est-à-dire le concept de pression interne, n'apparaît pas dans sa méthode de mise en équation.

Il donne là-dessus les raisons permettant, selon lui, d'expliquer l'absence de ce terme de pression interne dans la théorie des écoulements de D'Alembert : cela vient simplement de la façon dont ce dernier applique, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, son principe de la dynamique au mouvement du fluide. Voyons donc précisément ce qu'il pense à ce sujet. Nous verrons ensuite que S.D. Poisson et H. Navier, appréhendant le même problème par le biais du même principe, font état de deux approches différentes : le premier adopte une méthode fort similaire à celle de Prony tandis que la démarche du second se rapproche plus de celle de D'Alembert dans le *Traité des fluides*.

Le principe de D'Alembert appliqué par Prony, Poisson et Navier

Prony accorde d'abord à D'Alembert[587]

> « que lorsque les sections extrêmes du fluide n'éprouvent aucune pression ou éprouvent des pressions égales, le δp qui entre dans l'équation du mouvement particulier d'une tranche, peut être négligé (en laissant néanmoins le facteur dx qui résulte de l'introduction de δp) si on considère l'ensemble des tranches, c'est-à-dire si on intègre la valeur générale $dx\left(g - \dfrac{dv}{dt}\right)$ de δp dans toute l'étendue de la masse fluide ».

En d'autres termes, la différence, notée δp, entre les pressions $p(x)$ et $-p(x+dx)$ s'exerçant sur les deux faces de la tranche quelconque de hauteur x et d'épaisseur dx, n'a effectivement pas d'influence sur l'équation globale du mouvement dans le cas où $p_{AB} = 0$ et $p_{CD} = 0$. Après avoir obtenu l'équation locale (38) — c'est l'équation, rappelons-le, obtenue via l'application de la seconde loi de Newton —, c'est-à-dire

$$g - \frac{dv}{dt} = \frac{\delta p}{dx},$$

ou

$$\left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = \delta p,$$

l'intégration entre les surfaces supérieure et inférieure AB et CD revient effectivement

[587] Prony, *Ibid.* note 584, p. 6. Nous avons substitué, dans tous les extraits suivants, la notation x désignant la coordonnée verticale d'une tranche, à celle d'origine z.

à écrire

$$\int_{AB}^{CD} \delta p = p_{CD} - p_{AB} = 0,$$

c'est-à-dire à annuler le différentiel de pression $p_{CD} - p_{AB}$. Pourtant, s'interroge Prony[588],

> « comment veut-on qu'un commençant devine toutes ces choses dans une solution où on ne dit pas un seul mot de ce qui pourroit les lui faire soupçonner ? »

Ce constat le pousse à apporter la rectification suivante à la façon dont D'Alembert applique son principe de la dynamique : « Il est incontestable », écrit-il[589],

> « que D'Alembert auroit dû, au lieu de la seule vîtesse élementaire gdt employer celle [...] $gdt - \frac{\delta p}{dx}dt$; décomposant alors $v + gdt - \frac{\delta p}{dx}dt$ en $v + dv$ et
>
> $$gdt - \frac{\delta p}{dx}dt - dv,$$
>
> le principe général auroit donné, chaque tranche en particulier
>
> $$gdt - \frac{\delta p}{dx}dt - dv = 0 \text{ »},$$

c'est-à-dire l'équation locale

$$\left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = \delta p.$$

Convenablement appliqué, le principe employé doit donc conduire, selon Prony,

- à l'expression $g - \frac{dv}{dt} - \frac{\delta p}{dx}$ de la vitesse détruite par le mouvement d'une tranche entre les deux instants t et $t + dt$, au lieu de l'expression $g - \frac{dv}{dt}$ de D'Alembert,
- ou, ce qui est la même chose, à l'équation locale du mouvement

$$\left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = \delta p$$

au lieu de $\left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$.

Dans le t. II de son *Traité de mécanique* (1811), S.D. Poisson applique le principe de D'Alembert à la mise en équation de l'écoulement d'un fluide incompressible dans un vase de section variable, et dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, selon une méthode fort semblable à celle proposée par Prony. Considérant une tranche quelconque de section y, de vitesse v, d'épaisseur dx, il y pose le problème en ces termes[590] :

---

[588] Prony, *Ibid.* note 584, p. 6.

[589] Prony, *Ibid.* note 584, p. 6.

[590] S.D. Poisson, *Traité de mécanique*, Paris, 1811, t. II, art. 547, p. 446. Nous avons substitué, dans tous les extraits suivants, la notation x désignant la coordonnée verticale d'une tranche à celle d'origine z.

> « pendant l'instant dt, la vîtesse de la tranche gdx croîtrait de la quantité gdt, si cette tranche était libre et isolée ; dv est l'augmentation de vîtesse qui a réellement lieu ; $gdt - dv$ est donc la vîtesse infiniment petite, perdue à chaque instant par cette tranche ; or, d'après le principe de d'Alembert, le fluide resterait en équilibre, si toutes ses tranches étaient sollicitées par des forces motrices, capables de leur imprimer des vitesses qu'elles perdent à chaque instant ; supposons donc ces tranches sollicitées par de semblables forces, et cherchons dans cette hypothèse, les conditions de leur équilibre ».

Il estime d'abord, pour ce faire, la force motrice animant la tranche quelconque de masse ydx, laquelle force vaut $\left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) ydx$ puisque la force accélératrice quelconque doit produire, d'après ce qui précède, l'élément de vitesse $gdt - dv$ dans l'intervalle de temps dt. Notant p la « pression rapportée à l'unité de surface, que cette tranche éprouve sur sa base supérieure », il remarque ensuite que cette pression[591]

> « se transmet par l'intermédiaire du fluide dont la tranche est composée, non seulement sur sa base inférieure [...], mais aussi sur les parois du vase qui terminent sa circonférence ».

Outre la pression p, la base inférieure de la tranche de masse ydx éprouve donc[592],

> « dans l'état d'équilibre que nous considérons, une pression due à la force motrice de cette tranche, et égale à cette force ou à $\left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) ydx$; divisant par y afin d'avoir la pression due à cette même force et rapportée à l'unité de surface, il vient $\left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) dx$: par conséquent p' étant la pression entière qu'éprouve cette base inférieure, on aura
>
> $$p' = p + \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx \text{ ».}$$

« Mais », conclut-il[593],

> « la différence $p' - p$ est évidemment la différence de la fonction p, prise par rapport à la variable z ; on a donc aussi
>
> $$dp = \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dz \ ;$$
>
> équation qui fera connaître la valeur de la pression p, quand celle de la vîtesse v sera déterminée ».

---

591 S.D. Poisson, *Ibid.* note 590, art. 547, p. 447.

592 S.D. Poisson, *Ibid.* note 590, art. 547, p. 447. S.D. Poisson considère, dans ce passage du tome II de son *Traité de mécanique*, la densité ρ du fluide. Nous ne l'avons pas fait apparaître dans les extraits suivants afin de faciliter la comparaison de sa méthode avec celles précédemment exposées.

593 S.D. Poisson, *Ibid.* note 590, art. 547, p. 447-448.

Par le biais du principe de D'Alembert, en considérant l'équilibre entre la force accélératrice perdue par la tranche et le différentiel des pressions s'exerçant sur les bases supérieure et inférieure de la tranche étudiée, S.D. Poisson parvient donc à l'équation locale du mouvement obtenue par Euler dans son mémoire de 1749 et présentée par Prony comme la juste solution du problème dans le cadre de ses observations sur la théorie des écoulements de D'Alembert.

Dans le tome II de son *Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées*[594], H. Navier, procédant de même à la détermination de la « solution générale, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, de la question du mouvement d'un fluide incompressible coulant dans un vase ou un tuyau », affirme que[595],

> « d'après le principe de d'Alembert, il faut qu'il y ait équilibre dans le système, en supposant toutes les tranches animées par des forces perdues. Il faut donc que la somme des moments de ces forces, plus les moments des forces dues aux pressions exercées sur les surfaces supérieure et inférieure [du volume de fluide], soit nulle ».

Sachant que le terme de « moment » renvoie dans cette citation au concept moderne de *travail*, H. Navier estime donc d'abord, pour parvenir à l'équation du mouvement dans un vase de section variable d'un volume de fluide délimité par deux surfaces libre, le travail de la force perdue dans le temps dt par une tranche quelconque de section y et de vitesse v comme le produit de la force accélératrice $g - \dfrac{dv}{dt}$ perdue multipliée par la masse ydx de cette tranche et l'espace vdt qu'elle parcourt dans le temps dt, c'est-à-dire $\left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) ydxvdt$. Il exprime de même le travail des forces dues aux pressions p_{AB} et $-p_{CD}$ s'exerçant dans la direction de l'écoulement sur les surfaces extrêmes AB et CD de sections k et K comme le produit des forces de pression kp_{AB} et $-Kp_{CD}$ par les distances $\dfrac{mudt}{k}$ et $\dfrac{mudt}{K}$ parcourues par ces deux surfaces dans l'intervalle dt, avec u et m la vitesse et la section d'une tranche de référence dans le vase, de façon à obtenir la somme $(p_{AB} - p_{CD})mudt$ des travaux correspondante[596]. Cette somme devant enfin compenser, d'après sa formulation du principe de D'Alembert, celle des forces perdues par l'ensemble des tranches composant le volume de fluide, il parvient donc à

$$(p_{AB} - p_{CD})mudt + \int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydxvdt = 0,$$

[594] H. Navier, *Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions*, Paris, t. II, 1838.

[595] H. Navier, *Ibid.* note 594, art. 15, p. 9-10.

[596] Nous avons ici respectivement substitué les notations y, x, v, u, m, p_{AB}, p_{CD}, k et K à celles d'origine ω, z, u, U, Ω, P, P', O et O'. Notons également que Navier considère le mouvement d'un volume de fluide $abcd$ encadré par deux surfaces libres ab et cd au lieu des surfaces libres AB et CD de la Fig. XXXIII — voir p. 256. Il tient compte, pour finir, de la densité ρ du fluide, que nous ne faisons pas ici apparaître afin de faciliter la comparaison de sa méthode avec celles précédemment exposées.

ou encore, compte tenu des relations $mu = yv$ et $ydx = yvdt = \text{Cste}$, à l'équation du mouvement

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = p_{CD} - p_{AB}.$$

Comparativement à Prony et à Poisson, Navier établit donc directement l'équation globale du mouvement, sans avoir à passer par l'établissement de l'équation locale $g - \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dp}{dx}$.

Le principe de D'Alembert appliqué au mouvement d'un fluide considéré comme un système de corps exerçant des actions réciproques

L'interprétation de Prony sur la bonne façon d'appliquer le principe de D'Alembert au mouvement d'un fluide considéré comme un ensemble de tranches, de même que la méthode de mise en équation proposée par Poisson, tiennent compte du différentiel local de pression s'exerçant, dans la direction de l'écoulement, sur les deux faces d'une tranche. Cette façon d'appliquer le principe n'est cependant pas celle de D'Alembert dans le *Traité des fluides*.

D'abord parce que ce dernier considère uniquement la quantité $g - \dfrac{dv}{dt}$ comme une force accélératrice détruite par le mouvement d'une tranche du fait de son interaction avec les autres tranches du volume de fluide étudié. Dans le *Traité des fluides*, l'équation du mouvement

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$$

n'est pas obtenue à partir de l'équation locale $g - \dfrac{dv}{dt} = 0$, qui n'apparaît pas, mais découle, comme nous l'expliquions au début de ce chapitre, de la considération de l'équilibre hydrostatique de l'ensemble du volume de fluide $ABDC$, réalisé :

– en égalant, dans le *Traité de dynamique*, les forces de pression s'exerçant de part et d'autre d'une tranche quelconque $KZzk$;
– en annulant, dans le *Traité des fluides*, la force de pression s'exerçant sur le fond du vase supposé fixe à l'instant considéré.

Le fait, d'autre part, de considérer la quantité $g - \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\delta p}{dx}$ comme la bonne valeur de la force accélératrice détruite revient à appréhender la force accélératrice locale $\dfrac{\delta p}{dx}$ engendrée par la différence des pressions s'exerçant de part et d'autre d'une tranche comme une force extérieure s'appliquant sur cette tranche. Pour autant, les deux pressions $p(x)$ et $-p(x + dx)$ peuvent aussi être vues comme des forces de liaisons (ou des forces internes) entre les différents corps — les tranches — composant le volume global de fluide. Dès lors, comme le précise D'Alembert dans l'article « Dynamique » de l'*Encyclopédie*[597] :

> « pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, il faut décomposer le mouvement que chaque corps a reçu, et avec lequel il tend à se mouvoir, en deux autres mouvements, dont l'un soit détruit, et dont l'autre soit tellement dirigé que l'action des corps environnants ne puisse l'altérer ni le changer ».

Appliqué à un système de corps liés, le principe de D'Alembert, tels que les mécaniciens du XIXe et XXe siècles P. Appell, L. Landau et E. Lifchitz le présentent par exemple dans leurs traités de mécanique respectifs[598], consiste effectivement à établir l'équilibre de l'ensemble du système, cet équilibre étant réalisé à chaque instant, *en vertu des forces de liaisons*, entre les forces de pesanteur et les forces d'inertie. C'est, comme nous venons de le voir, le sens de la méthode de mise en équation proposée par H. Navier qui précise d'ailleurs, dans le tome II de son *Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées*, qu'« à l'égard d'un système de corps liés entre eux d'une manière invariable ou non », le principe de D'Alembert s'énonce en ces termes[599] :

> « En vertu de la liaison des corps, aucun ne peut céder librement aux forces qui agissent sur lui : le mouvement que chaque corps prendrait, s'il était libre, se compose en deux autres : l'un effectivement pris par le corps : l'autre détruit par les liens qui l'unissent aux autres parties du système. Le principe consiste en ce que les quantités de mouvement détruites sont nécessairement telles qu'elles se font équilibre sur le système, conformément aux lois de la statique ».

Il s'agit là, nous l'avons vu, d'une méthode fort différente de celle employée par Prony et par Poisson, qui n'appliquent donc pas véritablement le principe de D'Alembert, mais une forme locale, pourrait-on dire, ou du moins intermédiaire entre ce principe et la seconde loi de Newton, telle qu'Euler en fait usage dans son mémoire « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite ». L'équilibre, ici, n'est pas considéré relativement au mouvement d'une seule tranche, mais relativement au mouvement d'un

[597] *Enyclopédie*, vol. 5, Paris, 1755, art. « Dynamique », signé *(O)*, p. 175a.
De façon plus explicite, Paolo Frisi, dans son « Elogio del Signor D'Alembert », note que le principe de dynamique de D'Alembert comporte « une autre considération générale »,

> « à savoir que pour un système quelconque de corps reliés entre eux, mis en mouvement, poussés, attirés de quelque façon que ce soit, s'il n'y avait en chacun d'eux cette portion de mouvement qui se détruit d'un instant à l'autre par les actions réciproques, ces corps tous ensemble seraient en équilibre ».

(Texte traduit par A. Venditti et P. Crépel à partir de l'édition italienne suivante : P. Frisi, *Elogi. Galilei, Newton, d'Alembert*, Introduzione e cura di Paolo Casini, éd. Theoria, Rome, « Elogio del Signor d'Alembert », p. 177-216.)

[598] Voir P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, 6e éd., Paris, Gauthier-Villard, 1953, t. II, p. 323, et L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, trad. par C. Ligny, Editions Mir, Moscou, 1960.

[599] H. Navier, *Ibid.* note 594, art. 8, p. 3.

ensemble de tranches interagissant mutuellement les unes sur les autres. Au lieu de la relation locale

$$g - \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dx},$$

d'où nous tirerions, par la méthode d'Euler, l'équation globale

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt} \right) dx = p_{CD} - p_{AB},$$

le principe D'Alembert s'applique directement à l'échelle du volume de fluide, considéré dans son état d'équilibre, de telle sorte que

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt} \right) dx = p_{CD} - p_{AB} \quad \left[= \int_{O'}^{O''} dp \right].$$

Cela ne permet pas de répondre à notre remarque et celle de Prony concernant la déduction *a posteriori* par D'Alembert de l'annulation du différentiel de pression s'exerçant entre les surfaces supérieure et inférieure du volume de fluide $ADBC$. Il est clair toutefois, contrairement à ce qu'affirme Prony, que le principe de dynamique, tel que D'Alembert l'applique dans le cas unidimensionnel, lui permet de faire fi des forces de liaisons internes, c'est-à-dire des pressions s'exerçant de part et d'autre de chacune des tranches composant le volume de fluide étudié. Il s'agirait donc de la raison pour laquelle le savant se borne à considérer l'effet de la pression comme un effort externe s'exerçant sur les parois du vase, sans prendre en compte l'effet des forces internes correspondantes au sein du fluide.

C'est là l'interprétation de l'historien des sciences O. Darrigol qui, dans son récent ouvrage *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl* (2005), affirme que D'Alembert « n'a pas voulu fonder les équations de l'équilibre et du mouvement [des fluides] sur le concept de pression interne, conformément à sa volonté générale de se passer des forces internes de contact dans sa dynamique »[600]. Dans la même étude, O. Darrigol ajoute par ailleurs que « les conditions générales de l'équilibre d'un fluide, telles qu'elles se trouvent au début de son traité, requièrent uniquement le concept de pression contre les parois »[601]. Nous avions effectivement pu constater, dans le courant de notre premier examen de la définition du concept, que l'équation du mouvement de D'Alembert dans le cas unidimensionnel découle, dans le *Traité de dynamique*, de la considération de l'équilibre entre les forces de pression, ou les poids, s'exerçant de part et d'autre d'une tranche dans la direction de l'écoulement, puis, dans le *Traité des fluides*, de l'annulation pure et simple de la force de pression imprimée par le volume global de fluide sur sa surface inférieure.

[600] O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 15.

[601] O. Darrigol, *Ibid.* note 600, p. 15.

Nous constations par ailleurs que, dans la partie du *Traité des fluides* dédiée à l'exposé de sa théorie des écoulements, D'Alembert définit la « pression à une hauteur x » d'un fluide en mouvement à partir de la force de pression s'exerçant, dans le cas de l'équilibre, sur la face supérieure de la tranche située à cette même hauteur dans le vase, mais qu'il se borne à considérer son effet perpendiculairement aux parois. Il apparaissait finalement, à l'issue de cet examen, que la possible influence de cette pression dans la direction de l'écoulement restait encore à définir, de même que la notion de « pression mutuelle des particules de fluide », présentée, dans la préface de l'ouvrage, comme une partie du mouvement détruite au sein du fluide.

A l'issue de cet exposé sur la façon de traiter le concept de pression selon le principe employé, nous disposons à présent de tous les outils nécessaires à cet examen du rôle des forces de pression dans la direction de l'écoulement. Nous montrerons ainsi que la façon dont D'Alembert applique son principe de la dynamique dans le cas unidimensionnel se revèle être conforme à l'interprétation proposée par O. Darrigol. Nous verrons aussi que si le principe lui permet de se ramener à étudier l'équilibre du volume global de fluide, il le conduit également à assurer l'équilibre hydrostatique d'une tranche. Ce constat nous permettra de préciser les caractéristiques des deux notions que sont la « pression à une hauteur x » et la « pression mutuelle des particules de fluide ».

Nous nous pencherons, pour mener à bien ce programme, sur autre aspect de la théorie de D'Alembert directement lié à notre sujet et notamment développé dans le *Traité des fluides* (1744) et le Mémoire 57 § XII des *Opuscules* t. VIII (1780) : l'étude du problème de la « séparation des fluides ». C. Truesdell est le seul, à notre connaissance, à l'avoir abordé[602]. Il l'évoque notamment au travers de la polémique, toute aussi méconnue, entre D'Alembert et D. Bernoulli sur la question de la « pression négative ». Directement liée à la façon dont le premier de ces deux savants traite la question, cette polémique fait aussi l'objet d'un échange épistolaire particulièrement instructif entre D'Alembert et Euler à la fin de l'année 1746 et au début de l'année 1747.

3. La définition dalembertienne du concept de pression à la lumière du problème de la séparation des fluides et de divers éléments de son œuvre tardive

Le problème de la séparation des fluides

Le problème de la séparation consiste à savoir « en quels cas le Fluide doit nécessairement se diviser en plusieurs portions »[603]. D'Alembert y consacre les art. 98-99, 103, 149 et 158 à 175 de la première édition du *Traité des fluides*, le Mémoire 32,

[602] Cf. C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXXVII.

[603] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, p. 132.

§ III des *Opuscules* t. V (1768), l'intégralité du § XII du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780), long d'une vingtaine de pages, ainsi que le § XXVI d'un neuvième volume d'*Opuscules* resté inédit à la mort de l'auteur. Il donne également un ajout sur le sujet dans l'art. 159 de la seconde édition du *Traité des fluides*. L'ajout à l'art. 149, dans ce même ouvrage, et le § XVIII du Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), doivent enfin être considérées comme des répercussions de sa polémique avec D. Bernoulli sur la question de la « pression négative ». C'est donc un problème important aux yeux de D'Alembert, que C. Truesdell est jusqu'alors le seul à avoir évoqué[604].

Dans l'art. 149 de la première édition du *Traité des Fluides*, D'Alembert affirme que[605]

> « si la quantité indéterminée $\int dx \left(g - \dfrac{dv}{dt}\right)$ dont les deux valeurs extrêmes sont zero [...] a pour une hauteur quelconque [x], une valeur négative, alors le Fluide cessera [...] d'être continu ».

En d'autres termes, la masse de fluide $ABDC$ s'écoulant dans le vase représenté sur la Fig. XXXIII — voir p. 256 — se divisera à la hauteur $x = O'O$, c'est-à-dire en ZK, sous la seule condition que la « pression à la hauteur x » $\int_{O'}^{O} \left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) dx$, considérée *dans la direction de l'écoulement*, devienne négative et s'exerce dès lors de O vers O' au lieu de s'exercer de O' vers O. Cette pression n'est, dans ce cas, plus en état de contrebalancer la pression $\int_{O''}^{O} \left(g - \dfrac{dv}{dt}\right) dx$ exercée par la partie inférieure $ZKDC$. L'équilibre entre les deux masses de fluides $ABKZ$ et $ZKDC$, traduit par l'équation,

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0, \tag{44}$$

n'est donc plus assuré : celles-ci, selon D'Alembert, poursuivront donc leur mouvement dans le vase indépendamment l'une de l'autre.

Nous pourrions, autrement dit, nous représenter l'équilibre de la masse totale de fluide comme une condition de cohésion qui, dès lors qu'elle n'est plus respectée, c'est-à-dire dès lors que l'équation (44) se trouve mise en défaut, conduit à une perte de contact entre les deux masses de fluide. Cette perte de contact ne serait donc pas la résultante de l'existence d'une pression négative, telle que la citation précédente peut littéralement le laisser entendre, mais d'une simple mise en défaut de la condition d'équilibre assurant que deux volumes de fluide, considérés comme des corps solides, se meuvent en restant en contact l'un à avec l'autre. La citation suivante ne laisse aucun doute sur la pertinence de cette interprétation : « pour mieux nous faire entendre », écrit-il en effet[606],

[604] C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XXXVIII et XLVII.

[605] D'Alembert, *Ibid.* note 603, Livre II, art. 149, p. 126. Nous avons substitué, dans cet extrait, la notation g désignant l'accélération de la pesanteur à celle d'origine p.

[606] D'Alembert, *Ibid.* note 603, Livre II, art. 99, p. 83.

> « supposons que deux Corps solides soient contigus l'un à l'autre, & qu'on leur donne à chacun une impulsion différente suivant la même ligne droite. Si le Corps antérieur a reçu une vitesse moindre que le postérieur, il y aura une action entre ces deux Corps, & ils se mouvront tous deux en ne formant qu'une même masse, avec une vitesse commune, plus grande que la vitesse imprimée à l'antérieur, & moindre que la vitesse donnée au postérieur : au contraire, si le Corps antérieur a reçu plus de vitesse que le postérieur, ces deux Corps se sépareront & se mouvront, chacun avec la vitesse qu'il a reçu, sans que le mouvement imprimé à l'un change rien au mouvement donné à l'autre. De même un Fluide doit cesser de former une masse continue, lorque la vitesse des parties inférieures est telle par rapport à celle des parties supérieures, que celles-ci ne peuvent agir sur celle-là ».

Considérée dans *le sens de l'écoulement*, la quantité $\int_{O'}^{O}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ n'a, par conséquent, d'autre rôle que celui consistant à faire équilibre à la quantité $\int_{O''}^{O}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$, de telle sorte que

$$\int_{O'}^{O''}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx=0,$$

de la même façon que deux corps de masses m_1 et m_2, de vitesses v_1 et v_2 à l'instant t et v_1' et v_2' à l'instant $t+dt$, se meuvent ensemble en demeurant en équilibre mutuel si

$$m_1(v_1-v_1')+m_2(v_2-v_2')=0,$$

$v_1'-v_1$ et $v_2'-v_2$ correspondant aux vitesses reçues par ces deux corps dans l'intervalle de temps dt. L'équation d'équilibre (44) résulte donc de l'égalité, ou de la destruction, des actions par le biais desquelles les deux masses $ABKZ$ et $ZKDC$ se poussent compte tenu des vitesses qu'elles reçoivent entre deux instants de l'écoulement. Tant que la destruction de ces forces se trouve assurée, le contact perdure en KZ. Dans le même temps, les parties du fluide $ABKZ$ et $ZKDC$ exercent des mouvements réciproques et l'ensemble $ABDC$ se trouve animé d'un mouvement effectif. C'est là l'esprit du principe de la dynamique, tel que D'Alembert l'applique à l'écoulement d'un fluide.

Partant de là, il y a donc fort à penser que sa façon d'appliquer le principe consiste essentiellement à ramener l'étude du mouvement d'un volume de fluide à celui de son équilibre. C'est vrai, mais il y a plus.

Nous avions pu constater que, dans l'art. 173 du *Traité de dynamique*, D'Alembert considère l'égalité de deux pressions $\int_{O'}^{O}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ et $\int_{O''}^{O}\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dx$ de part et d'autre d'une tranche d'épaisseur dx. C'est ce qu'il rappelle dans l'art. 24 du *Traité des fluides* en affirmant que si l'équation d'équilibre (44) se voyait mise en défaut[607],

[607] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre I, art. 24, p. 21.

> « alors une des tranches serait plus pressée vers le haut que vers le bas, & l'équilibre seroit rompu ».

D'Alembert ne se contente donc pas de poser l'équilibre du volume de fluide, mais s'assure également de la vérification du principe d'égalité de la pression en tous sens pour une tranche quelconque d'épaisseur dx, ce principe étant traduit par la condition d'équilibre

$$yP(x) - yP(x+dx) = 0 \tag{45}$$

avec $P(x) = \displaystyle\int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ et $P(x+dx) = \displaystyle\int_{O''}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$.

Nous insisterons d'abord sur le fait que, dans le *Traité de dynamique*, les pressions $P(x)$ et $P(x+dx)$ s'exerçant de part et d'autre de la tranche se trouvent assimilées aux poids des deux cylindres de fluide encadrant cette tranche, et non aux poids des portions entières de fluide $ABZK$ et $KZDC$. Dans le cas contraire, les poids des deux masses de fluide $ABZK$ et $KZDC$ vaudraient rigoureusement $\displaystyle\int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydx$ et $\displaystyle\int_{O''}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydx$, et leur équilibre, traduit par l'équation

$$\int_{O'}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydx = \int_{O''}^{O} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) ydx,$$

ne permettrait pas de parvenir à l'équation du mouvement

$$\int_{O'}^{O''} \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0,$$

compte tenu de la présence du terme variable y correspondant à la section du vase dans lequel le fluide s'écoule.

Notons d'autre part que la seule condition d'équilibre (45) ne rend que partiellement compte du raisonnement par le biais duquel D'Alembert établit l'équation de l'écoulement d'un fluide incompressible.

Il ne faudrait effectivement pas penser que le savant fait purement et simplement abstraction de l'effet des pressions s'exerçant, dans la direction de l'écoulement, sur les surfaces des différentes tranches composant le volume de fluide étudié. Il ne faudrait pas, autrement dit, appréhender l'équation (45) en termes d'annulation d'un différentiel de pression $P(x) - P(x+dx)$: cette relation ne correspond à rien d'autre qu'à une équation d'équilibre, traduisant une situation d'équilibre à laquelle son principe de dynamique lui a *a priori* permis de se ramener.

D'après ce principe, l'équilibre découle en effet, à l'échelle du volume global du fluide, de la destruction d'une partie du mouvement de chacune des tranches, à savoir la force accélératrice $g - \dfrac{dv}{dt}$. Sachant que D'Alembert définit par ailleurs, dans la préface du

Traité des fluides, la « pression mutuelle des particules de Fluide » comme la partie du mouvement perdue dans le sens de l'écoulement, c'est probablement donc à la destruction de cette force accélératrice qu'il fait référence. Référons-nous, afin de préciser le lien existant entre cette pression mutuelles des parties du fluide et la destruction d'une partie du mouvement dans le sens de l'écoulement, au Mémoire 57 § XII des *Opuscules* t. VIII (1780). D'Alembert, donnant un long approndissement sur sa théorie de la séparation des fluides, y affirme notamment[608]

> « que dans l'endroit où le fluide se sépare, il faut qu'avant l'instant de la séparation, 1°. $\int gdx - \int \frac{dxdv}{dt}$ soit $= 0$; 2°. que $g - \frac{dv}{dt}$ soit $= 0$; 3°. que $\int gdx - \int \frac{dxdv}{dt}$ soit négative l'instant d'après ».

L'annulation de la quantité $g - \frac{dv}{dt}$ dans l'une des tranches correspond par conséquent, à la lumière de cet extrait, à une situation dans laquelle les deux volumes de fluide encadrant cette tranche sont amenés à se séparer l'un de l'autre. Il apparaît ainsi que l'existence même d'une force accélératrice détruite $g - \frac{dv}{dt}$ au sein d'une tranche dans son mouvement entre deux instants t et $t+dt$ garantit l'existence d'une action réciproque entre les deux volumes de fluide encadrant cette tranche, c'est-à-dire, en termes actuels, l'existence d'une pression interne. C'est ce dont témoigne un autre extrait du Mémoire 57, tiré du § VI, dans lequel D'Alembert, examinant un profil particulier (figure et vitesse) d'une veine d'un fluide s'échappant d'un vase percé d'un orifice en son fond, précise que[609]

> « si la veine avoit cette figure & cette vitesse dans les différentes tranches, il est aisé de voir que tous les points de cette veine descendroient librement comme ils le feroient par leur pesanteur, & qu'il n'y auroit aucune force anéantie, ni par conséquent aucune pression, puisque l'effet de la pesanteur seroit tout employé à mouvoir les tranches du fluide ».

La veine de fluide considérée évoluant en dehors du vase, la pression dont il est ici question renvoie donc à la notion de pression considérée dans le sens de l'écoulement. Il s'agit de la pression s'exerçant au niveau d'une tranche et garantissant, par là-même, la cohésion du volume de fluide à laquelle cette dernière appartient : ceci passe par la destruction d'une partie du mouvement au sein de cette tranche.

En d'autres termes, D'Alembert définit donc deux notions de pressions respectivement attachées aux deux étapes de sa méthode de mise en équation d'un volume de fluide en mouvement.

La première, la « pression mutuelle des particules de Fluide », équivaut à la destruction des forces accélératrices $g - \frac{dv}{dt}$ dans la direction de l'écoulement. Elle se traduit,

[608] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XII, art. 13, p. 189.

[609] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VI, art. 26, p. 115.

en vertu de son principe, par l'existence d'une action mutuelle ou, en termes modernes, d'une pression interne entre les deux volumes de fluide encadrant chacune des tranches du volume de fluide.

La seconde, la « pression à la hauteur x », renvoie à une pression dont l'équilibre avec une autre pression découle de la destruction d'une partie du mouvement dans l'ensemble des tranches composant le volume de fluide considéré.

Cette approche exclut par conséquent toute considération de gradient de pression, tel que ce dernier apparaît chez Euler. La notion de pression interne, à défaut d'être formalisée, transparaît au travers de la notion de « pression mutuelle des particules de Fluide ». Elle constitue, via la destruction d'une partie du mouvement, le garant d'une action mutuelle ou d'un contact entre les différentes tranches ou les différentes parties du volume de fluide en mouvement. Cette action mutuelle étant assurée, le volume de fluide peut être considéré dans un état d'équilibre et la pression interne s'exprime alors par le moyen de la pression à la hauteur x : cette dernière, unique car spécifique à la tranche située à la hauteur x, s'applique sur la section correspondante et se trouve contrebalancée par une pression de même valeur s'exerçant dans le sens opposé. C'est là le résultat de la destruction d'une partie du mouvement dans chacune des deux portions de fluide encadrant cette tranche ou, ce qui est la même chose, dans l'ensemble des tranches composant le volume de fluide étudié.

C'est enfin, rappelons-le, en vertu de ce mouvement détruit que les particules de fluide « se pressent mutuellement, avec une force qui réagit contre les parois du vase »[610]. La « pression mutuelle des particules de Fluide » ne semble donc pas avoir vocation, selon l'approche de D'Alembert, à exercer une force effective sur le mouvement de chaque tranche dans la direction de l'écoulement. Elle génère uniquement une force s'exerçant perpendiculairement aux contours du vase, laquelle force coïncide alors avec la « pression à la hauteur x ». Il s'agit là d'une force externe, la seule force effective, avec celle s'exerçant sur le fond du vase, mentionnée par D'Alembert lorsqu'il manipule le concept de pression. C'est ainsi, nous l'avons constaté dans la première partie de ce chapitre, qu'il définit l'effet de la « pression à la hauteur x » : comme « la pression qu'un Fluide qui se meut dans un vase, exerce contre ses parois »[611].

Sa démarche, que ce soit du point de vue de sa méthode de mise en équation ou de sa façon de définir le concept de pression, témoigne donc d'une approche globale du mouvement d'un volume de fluide.

En conclusion, les deux notions de « pression à la hauteur x » et de « pression mutuelle des particules du Fluide », considérées dans la direction de l'écoulement, possèdent donc des statuts différents et forment un tout cohérent. La première renvoie, à chaque hauteur x, à un poids constamment équilibré par un autre. La seconde équivaut,

[610] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Préface, p. xv, ou *Encyclopédie*, vol. 6, Paris, 1756, art. « Fluide », signé *(O)*, p. 886b.

[611] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, p. 124.

physiquement, à la destruction des forces accélératrices $g - \frac{dv}{dt}$ permettant d'assurer l'équilibre précédent et, par là-même, la cohésion du volume global de fluide. Les deux notions coïncident au niveau des parois du vase. Elles sont à l'origine d'une force externe et concourent à sa définition effective du concept de pression. La méthode de mise en équation dont elles sont issues, fondée sur le principe de dynamique de D'Alembert et le principe d'hydrostatique, permet à D'Alembert de mettre le mouvement du volume de fluide en équation sans avoir à faire état des forces de pression s'exerçant à l'intérieur du fluide, dans la direction de l'écoulement.

Nous allons à présent pouvoir apprécier la pertinence de ces conclusions. Nous commencerons d'abord par examiner la polémique entre D'Alembert et D. Bernoulli sur la question de la « pression négative » : nous verrons que la réponse de D'Alembert à l'arbitrage rendu par Euler confirme certains des points précédemment avancés. Il s'agira ensuite de savoir si, malgré cette approche du problème par ailleurs tout à fait justifiable, D'Alembert conçoit physiquement le rôle joué par la pression à l'intérieur du fluide en terme de force interne. Nous verrons que certains éléments disséminés au sein de son œuvre tardive, s'ils ne permettent pas d'apporter de réponse convaincante, justifient tout du moins la pertinence de cette interrogation.

La polémique entre D'Alembert et D. Bernoulli sur la question de la « pression négative »

Suite à l'exposition de son critère de séparation dans l'art. 149 de la première édition du *Traité des fluides* (1744), D'Alembert constate que dans le cas d'une « pression négative », « M. *Daniel Bernoulli* prétend alors », dans son *Hydrodynamique*, que cette pression « doit se changer en suction », ce qui, explique-t-il, lui « paroît fort difficile à concevoir »[612]. Deux façons d'interpréter l'existence d'une pression négative opposent, autrement dit, les deux géomètres dans ces deux ouvrages. Le savant français l'appréhende en terme de séparation du fluide en deux masses amenées à poursuivre leur mouvement indépendamment l'une de l'autre, là où son confrère bâlois ne voit qu'un phénomène assimilable, en termes modernes, à l'apparition d'une zone de dépression latérale du fluide.

C'est dans la section XII de son *Hydrodynamique* (1738) que D. Bernoulli fait part de cette interprétation. Cette partie de son traité se voit plus généralement dédiée à la définition de la pression d'un fluide en mouvement. Elle contient notamment, et comme chacun sait, la première formulation du théorème aujourd'hui connu sous le nom de *loi de Bernoulli*. Quoiqu'il se borne, comme D'Alembert en 1744, à considérer la pression comme un effort externe exercé par la masse globale de fluide sur les parois

[612] D'Alembert, *Ibid.* note 603, art. 149, p. 126.

du vase contre lequel elle s'écoule, quoiqu'il ne définisse donc pas le concept de pression interne et n'établisse, pour cette raison, qu'une version embryonnaire du dit théorème — limitée, rappelons-le, aux écoulements stationnaires —, cette célèbre découverte n'en repose pas moins sur une idée innovante, témoignant d'une façon différente, de celle du savant français, d'appréhender cette notion.

Partant du constat que « ceux qui traitèrent de la pression des eaux coulant à travers les conduites d'eau [...] ne rapportèrent pas d'autre chose que des lois des fluides en équilibre », il propose en effet d'y dépasser les « règles communes de l'Hydrostatique »[613]. « J'ai ainsi ajouté avec le plus grand succès », explique-t-il[614],

> « une nouvelle partie à la Théorie des eaux, qui, parce qu'elle regarde à la fois, d'une part le mouvement des fluides, d'autre part la pression, m'a très justement semblé devoir être appelée *hydraulico-statique* ».

Cette théorie « hydraulico-statique », D. Bernoulli l'explicite sur deux types de problèmes. Le premier a pour objet le mouvement d'un fluide dans un vase vertical prolongé à sa base par un tube horizontal infiniment mince. Désormais fort célèbre, car contenant la première ébauche de l'actuel *théorème de Bernoulli*, il apparaît dans la quasi-totalité des ouvrages versés dans l'histoire du développement de la mécanique des fluides au XVIIIe siècle[615]. Afin d'aborder cette théorie et la définition qui lui est associée, nous accorderons ainsi notre préférence au second qui, nous ne tarderons pas à le voir, constituera le point d'achoppement de sa polémique avec D'Alembert sur la question de la « pression négative ».

Ledit problème consiste à « trouver la pression de l'eau s'écoulant avec une vitesse uniforme dans un canal de forme et d'inclinaison quelconques »[616]. Ce canal ACD, représenté sur la Fig. XXXVIII, se termine par un orifice o par lequel le fluide s'échappe. Il est, d'autre part, surplombé d'un réservoir d'eau $NMPQ$ supposé infiniment grand, grâce auquel le savant s'assure de l'uniformité, ou de la stationnarité, de l'écoulement. La pression est cherchée en CF.

Selon la théorie « hydraulico-statique » de D. Bernoulli, celle-ci doit être[617]

> « proportionnelle à l'accélération ou à l'accroissement de la vitesse que recevrait

[613] D. Bernoulli, *Hydrodynamique*, Strasbourg, 1738, Sect. XII, § 1, p. 255.

[614] D. Bernoulli, *Ibid.* note 613, Sect. I, § 8, p. 6.

[615] Voir C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXVII-XXX ; ; H. Rouse et S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963, p. 96-106 ; C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer Verlag, New-York, 1968, p. 219-224 ; G. K. Michaïlov, « Introduction to Daniel Bernoulli's Hydrodynamica », *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Hydrodynamique II, vol. V, éditions Birkhäuser Verlag, Bâle, 2002, p. 67-73 ; O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 7-9.

[616] D. Bernoulli, *Ibid.* note 613, Sect. XII, § 10, p. 261.

[617] D. Bernoulli, *Ibid.* note 613, Sect. XII, § 5, p. 257-258.

l'eau si tout obstacle au mouvement s'évanouissait en un instant, de telle sorte qu'elle soit immédiatement éjectée dans l'air ».

Le savant suppose donc la rupture soudaine du canal au niveau de sa perpendiculaire CE et ramène ainsi le problème au calcul de l'accélération ou de la décélération que la tranche infinitésimale de fluide $CEGF$, de vitesse v et de masse dx, recevrait dans l'intervalle de temps dt suivant cette rupture.

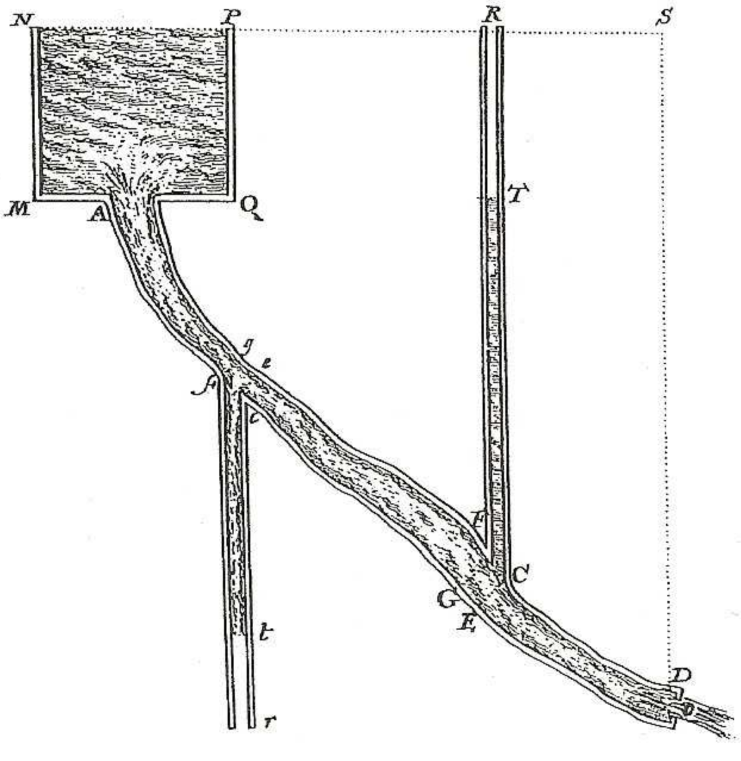


Fig. XXXVIII – Ecoulement d'un fluide dans un conduite inclinée ACD de section variable.

Il applique, pour ce faire, le principe fondant sa théorie des écoulements, à savoir le principe de conservation des forces vives — voir le chapitre I, p. 40 —, qui consistera ici à égaler la « montée potentielle » du fluide dans le canal tronqué AEC et la « descente actuelle » correspondante. Cette montée potentielle équivaut à l'accroissement de force vive engendrée par la rupture du canal en CE. Elle doit tenir compte

- de l'accroissement de la force vive $\alpha v dv$ de l'eau dans le nouveau canal AEC. Du fait de l'uniformité de l'écoulement, la force vive de l'eau après la rupture est en effet, selon Bernoulli, proportionnelle à la force vive $\dfrac{v^2}{2}$ de l'eau avant cette rupture. α désignant le rapport entre le carré des ouvertures CE et o, elle

s'exprime dès lors sous la forme $\frac{\alpha v^2}{2}$ et génère l'accroissement de force vive $\alpha v dv$;
– de l'accroissement de force vive $\frac{v^2}{2}dx$ engendré par l'éjection de la tranche en CE.

L'accroissement total de force vive vaut donc $\alpha v dv + \frac{v^2}{2}dx$. La descente actuelle correspond, quant à elle, à la vitesse acquise par la chute de la tranche $CEGF$ à travers la hauteur verticale a de l'eau au-dessus du point C. Elle vaut donc $gadx$. De l'application du principe de conservation des forces vives, D. Bernoulli tire ainsi l'équation

$$\alpha v dv + \frac{v^2}{2}dx = gadx,$$

soit

$$\alpha \frac{vdv}{dx} = ga - \frac{v^2}{2},$$

ou encore, sachant que $dt = \frac{dx}{v}$,

$$\alpha \frac{dv}{dt} = ga - \frac{v^2}{2}.$$

La pression « hydraulico-statique » p s'exerçant en FC, proportionnelle, par définition, à l'accélération $\frac{dv}{dt}$ engendrée par la rupture de la paroi en CE, correspond donc à la quantité $ga - \frac{v^2}{2}$, ou, ce qui est la même chose, à la quantité $p = g(a - b)$, pour peu que l'on considère la force vive $\frac{v^2}{2}$ comme étant due à la hauteur de chute b.

D. Bernoulli en donne deux interprétations différentes :

– cette pression $p = ga - \frac{v^2}{2}$ peut être vue comme la différence entre la pression due à la vitesse d'un fluide s'écoulant uniformément depuis une hauteur a et la vitesse qu'elle acquiert sous l'effet de la rupture du canal en CE ;
– la même pression $p = g(a - b)$ donne également la hauteur à laquelle l'eau monterait dans le tube vertical FTC si l'on perçait subitement la paroi du canal en FC.

D'un point de vue moderne, la relation $p = ga - \frac{v^2}{2}$ correspond à la forme embryonnaire de notre actuel théorème de Bernoulli. Elle en serait plus proche si, comme nous l'évoquions à l'instant, le savant avait conçu cette pression comme s'exerçant à l'intérieur du fluide au lieu de la traduire en terme d'effort s'exerçant sur la portion FC de la paroi du canal AEC. Cette définition reste néanmoins cohérente avec sa façon de considérer l'écoulement comme le mouvement d'une masse de fluide AEC restreinte à son centre de gravité, ou, ce qui est la même chose, avec l'emploi de la version « intégrale » du principe de conservation des forces vives fondant sa théorie dans l'*Hydrodynamique*. Elle n'apporte pas moins une idée physique importante, consistant à établir un lien direct entre la pression et la vitesse du fluide[618].

Consécutivement à la résolution du problème précédemment évoqué, D. Bernoulli établit le corollaire suivant[619] :

> « Lorsque a est plus grand que b, la quantité $a-b$ devient négative, et la pression se change ainsi en succion, c'est-à-dire que les parois du canal sont pressées de dehors en dedans ; ce qu'il faut entendre de la même manière, que si au lieu de la colonne CT qui pèse de haut en bas, il y avait dans une branche verticale et contiguë au tuyau, une colonne d'eau suspendue, dont l'effort pour descendre fût arrêté par l'eau qui coule dans le tuyau ».

Comformément à sa théorie « hydraulico-statique » qui, comme nous l'avons vu, repose sur l'établissement d'une relation directe entre une variation soudaine de la pression au niveau de la conduite et la naissance d'une force accélératrice susceptible de faire monter le fluide jusqu'à une certaine hauteur T dans le tuyau vertical RCF adapté à l'orifice FC (voir la Fig. XXXVIII), l'apparition d'une « pression négative » doit donc, selon lui, se traduire en terme de « succion », c'est-à-dire de dépression du fluide selon une direction perpendiculaire aux parois du canal.

Dans l'art. 149 de son traité de 1744, D'Alembert y voit, a contrario, une vérification de son critère de séparation du fluide, selon lequel une valeur négative de la pression conduit à la mise en défaut de la condition d'équilibre de la masse totale de fluide, et donc, d'après les explications précédentes, à une rupture de contact entre les deux portions supérieure et inférieure de cette masse.

Cette polémique bénéficie d'un arbitrage donné par Euler dans sa lettre à son confrère français du 29 décembre 1746. Quoique plusieurs contributions à cet échange épistolaire ait été égarées, nous disposons encore, comme le rapporte C. Truesdell[620], de deux lettres de D'Alembert datées du 29 janvier et du 24 mars 1747. Plus probablement sollicité par ce dernier que par D. Bernoulli, Euler ne se risque pas franchement, au premier abord, à prendre parti pour l'un ou l'autre des deux géomètres : « quoique d'autres occupations », écrit-il[621],

> « ne m'ayent pas encore permis d'examiner avec asses d'application vos differends avec Mr Bernoulli sur la pression d'un fluide contre les parois d'un vase, quand la

[618] Dans son « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. XXVI, C. Truesdell affirme de même que « la détermination simultanée de la pression et de la vitesse apparaît pour la première fois dans la section XII ».

[619] D. Bernoulli, *Ibid.* note 613, Sect. XII, § 11, p. 263.

[620] Voir C. Truesdell, « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XXXVIII.

[621] Correspondance Euler–d'Alembert, in Euler, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, R. Taton et A.P. Youschkevitch (dir.), Birkhaüser Verlag, 1980, lettre 3, p. 251.

formule, qui en exprime la valeur devient négative, je crois pourtant que vos raisons sont aussi bien fondées, que celles de Mr Bernoulli ».

Il n'en pointe pas moins deux aspects de la théorie de la séparation des fluides de D'Alembert. Ce dernier n'a, selon lui, pas tenu compte de la pression de l'atmosphère dans sa façon de traiter le sujet. Il fait, dans le même temps, intervenir une notion dont il conteste l'influence, l'adhérence des parties du fluide entre elles. Considérant l'écoulement d'un fluide dans un vase vertical $ABDC$ percé d'un orifice en son fond, et dont la paroi latérale se trouverait soudainement ouverte en P (voir la Fig. XXXIX[622]), Euler affirme ainsi que[623],

> « c'est une circonstance étrangere à laquelle il faut attribuer l'effet de la suction, que l'experience montre trop clairement, pour qu'on en puisse douter ; et que ce n'est pas meme l'adhrence des parties de l'eau, comme vous sembles le soutenir page 126 [*Traité des fluides*, art. 149], qui en est la cause ».

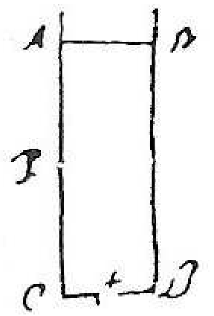


Fig. XXXIX – Ouverture soudaine, en P, de la paroi latérale d'un vase, percé d'un orifice en son fond, dans lequel s'écoule un volume de fluide $ABDC$.

« Comme il s'agit de determiner la force », poursuit-il[624],

> « dont les particules de l'eau sont comprimées ensemble, vous ne consideres que la force, qui resulte de l'action mutuelle de ces particules, qui etant posée $= q$, il est clair, que si q est une quantité positive, les parois seront pressés avec la même force [...]. Mais quand q devient une quantité négative, il n'y a aucun doute, que l'eau ne devroit cesser d'être continu dans le tuyau, (à moins faisant abstraction de

[622] Cette figure ne correspond qu'à une reproduction partielle de la figure autographe apparaissant sur la lettre d'Euler du 27 décembre. Celle-ci comporte également un tuyau adapté en P et plongé dans un vase rempli d'eau posé aux pieds du vase $ABDC$, des éléments dont nous n'avons pas tenu compte parce qu'ils ne renvoient qu'à la seconde partie du raisonnement d'Euler sur le sujet.

[623] Euler fait ici référence à « toutes les expériences que nous avons faites ensemble [avec D. Bernoulli] à Petersbourg » dans le courant de la période 1730-1733, ainsi qu'il l'explique dans la suite de la même lettre.

[624] *Ibid.* note 621.

> l'adherence des parties, dont l'effet, à ce qu'il me paroît, ne sera pas considérable), pourvu que q exprimât toute la force de compression. Or je remarque que vous n'avés pas eu egard de la pression de l'atmosphere, qui augmente de son poids la pression de l'eau, et partant nommant la pression de l'atmosphere $= h$, la pression de la particule de l'eau en P ne sera pas $= q$, quantité qui resulte de votre theorie, mais elle sera $h + q$. Donc dans le cas que q devient négative savoir $q = -p$, la pression de l'eau en P étant $= h - p$ ne laissera d'être affirmative [c'est-à-dire positive], pourvu que $p < h$ et ce sera la raison, pourquoi l'eau ne cessera pas de rester continu ».

Au sujet de la pression de l'atmosphère h, il n'y a évidemment aucun doute sur le fait que la valeur de la pression q doive en dépendre. Dans sa réponse du 29 janvier 1747, D'Alembert ne conteste d'ailleurs pas son rôle dans ce problème. Il s'interroge en revanche ouvertement sur la façon de la prendre en compte[625] :

> « J'ay fait abstraction dans toute ma theorie de la pression de l'athmosphere, et il me paroit que M. Bernoully en a fait aussy abstraction. A l'egard de la manière dont vous l'y faites entrer en l'ajoutant à la pression p, permettés moy de vous dire que je ne vois pas clairement qu'on doive prendre $h + p$ pour la pression d'une tranche. L'action de l'atmosphere sur un fluide qui coule hors d'un vase me paroit tres difficile à determiner ».

Pourquoi ne voit-il « pas clairement qu'on doive prendre $h + p$ » pour la pression de la tranche située au niveau de P ?

Rappelons-nous tout d'abord que, dans le *Traité des fluides*, D'Alembert ne détermine pas les valeurs des pressions p_{AB} et p_{CD} s'exerçant sur les surfaces supérieure et inférieure du volume de fluide à partir de l'argument selon lequel ces deux surfaces sont libres et non soumises à la pression de l'atmosphère, mais comme un corollaire de son équation du mouvement, à savoir, dans le cas présent, $\int_A^C \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$: c'est, selon lui, parce que les quantités $\int_A^A \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$ et $\int_A^C \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx = 0$ sont nulles que pressions sur les surfaces supérieure et inférieure le sont aussi. Ceci nous amenait à penser que l'annulation du différentiel de pression $p_{CD} - p_{AB}$ entre les deux sections libres du volume de fluide constitue une information posée *a priori* par le savant.

Il est donc, dans ce contexte, raisonnable de penser que la prise en compte de la pression s'exerçant sur la surface supérieure AB du vase représenté sur la Fig. XXXIX lui pose problème. Il lui faudrait en effet, pour y parvenir, considérer la quantité $\int_A^C \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ comme équivalente au différentiel $p_{CD} - p_{AB}$ et, de la même façon, la

[625] *Ibid.* note 621, lettre 5, p. 257.

pression $\int_A^P \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ à la hauteur P comme la somme de la pression interne (ou de l'action mutuelle des particules) q et de la pression s'exerçant sur AB, de telle sorte que la quantité $q + h$ corresponde à la valeur de la pression de la tranche en P. C'est ce qui lui paraît ici difficile à admettre.

D'Alembert assimile par ailleurs, dans cette lettre, la pression $h + p$ à la *pression d'une tranche*, preuve qu'il ne conçoit donc pas l'existence de deux pressions internes différentes s'exerçant de part et d'autre de cette tranche, comme le fait pour la première fois Euler dans son mémoire « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite », mais l'existence d'une unique pression $\int_A^P \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ imprimée par la portion supérieure, égale à celle $\int_B^P \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ qu'exerce la portion inférieure du volume de fluide en mouvement dans le vase. L'existence de cette unique pression interne, comme nous l'expliquions plus avant, constitue la garantie du contact entre les deux portions et, parce qu'associée à la destruction d'une partie du mouvement au sein de chaque tranche, la garantie de l'équilibre ou de la cohésion de l'ensemble.

Si le savant ajoute enfin, dans sa réponse à Euler du 29 janvier 1749, que « l'action de l'atmosphere sur un fluide qui coule hors d'un vase lui paroit tres difficile à déterminer », c'est, comme nous l'avons déjà noté, parce que le savant n'envisage pas l'influence effective de la pression à la hauteur P autrement que comme l'effort qui s'exerce sur la paroi du vase contre lequel le fluide s'écoule. On comprend ainsi que le percement d'un orifice en P complique encore, selon ce point de vue, la détermination de la pression à cette hauteur.

Au sujet de l'adhérence des particules fluide entre elles, D'Alembert, comme le souligne Euler, porte effectivement une grande attention à l'effet de cette notion sur la question de la séparation du fluide. Dans l'art. 99 du *Traité des Fluides*, consacré à ce sujet, il lui semblait effectivement certain[626]

> « que l'adhérence des parties du Fluide entr'elles, doit apporter ici quelque changement, & qu'un Fluide, par exemple, renfermé dans un vase Cylindrique, & dont la partie inférieure tendroit à se mouvoir plus vîte que la supérieure, pourroit former toujours une masse continue, si l'adhérence des parties étoit assez grande pour que la partie inférieure pût entraîner la supérieure ».

Répondant à la critique d'Euler dans sa lettre du 29 janvier 1747, D'Alembert se défend, dans un premier temps, d'avoir « voulu dire que cette adherence put produire la suction », compte tenu du fait qu'elle est à l'origine d'une force passive » au sein du fluide ne pouvant « avoir aucun effet que de résister ». Il ne persiste cependant pas moins,

[626] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, art. 99, p. 83-84.

dans un second temps, à affirmer que[627]

> « *le fluide cessera d'être continu, au moins si on fait abstraction de l'adherence des parties*, parce qu'en effet l'adherence des parties pourroit être telle qu'elle empêchat le fluide de se séparer ».

Il semble que cette notion d'adhérence constitue donc la seule force susceptible, selon lui, d'altérer la rupture de la condition d'équilibre du volume de fluide. Il s'agit apparemment, en cela, de la seule « force interne » *explicitement* prise en compte dans le cadre de sa théorie des écoulements. Nous verrons que ce terme apparaît pour la première fois dans le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) et qu'il est effectivement attaché à cette notion.

Signalons d'ailleurs, avant de ce faire, que le § XII du Mémoire 57, dans lequel D'Alembert revient longuement sur le problème de la séparation des fluides, porte les traces de cet échange épistolaire avec Euler et semble conforter les éléments que nous venons d'avancer. Après avoir défini les trois conditions de séparation du fluide — nous en faisions précédemment état : voir p. 281 —, le savant explique en effet avoir « fait abstraction dans la solution précédente de l'adhérence des parties du fluide, & de la pression de l'atmosphere »[628]. « Si on vouloit en faire état », explique-t-il, « rien ne seroit plus facile » :

> « Pour cela, on nommera A la force adhérence, & P la pression de l'atmosphère ; on cherchera ensuite à chaque instant la valeur de la pression en chaque point, savoir, $px - \int \frac{dxdv}{dt}$; & tant que la plus grande valeur négative de cette pression ne sera pas plus grande que $A + P$, il est clair que le fluide ne se divisera pas ».

En d'autres termes, D'Alembert intègre donc explicitement une force d'adhérence, contre l'avis d'Euler dans sa lettre de 29 décembre 1746, mais adopte toutefois la méthode de calcul de la pression que ce dernier lui avait opposée ainsi que le critère de séparation associé[629]. Notant (B) l'expression de la pression à la hauteur x et (C) l'équation du mouvement, il précise enfin, confirmant ce que nous expliquions plus avant concernant le statut de son équation du mouvement vis-à-vis de la prise en compte des pressions s'exerçant sur les deux surfaces libres du volume de fluide considéré[630] :

> « On ajoute $[A + P]$ à l'équation (B) & non à l'équation (C), parce que la quantité exprimée par l'équation (B) est la pression dans les parties intérieures, qui peut être

[627] *Ibid.* note 621, lettre 5, p. 257.

[628] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XII, art. 25, p. 191-192.

[629] Notons que la quantité $px - \int \frac{dxdv}{dt}$ apparaissant dans cet extrait correspond à ce que nous notions précédemment $\int_A^P \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dx$ dans la situation de la Fig. XXXIX, et que la valeur négative de cette pression, dans cette citation de D'Alembert, correspond à ce qu'Euler notait p (avec $p = -q$, q étant la pression) dans sa lettre du 29 décembre 1746.

[630] D'Alembert, *Ibid.* note 628, art. 28, p. 192.

> négative, & que la quantité exprimée par l'équation (C) exprime une quantité qui doit toujours être nulle, indépendamment de l'adhérence des particules du fluide, & du poids de l'atmosphère ».

Outre cette tardive et partielle prise en compte des remarques d'Euler dans le Mémoire 57 § XII de ses *Opuscules* t. VIII (1780) — précisons que le nom d'Euler n'y est aucunement mentionné, pas plus que celui de D. Bernoulli —, D'Alembert revient explicitement sur cette polémique de la pression négative à plusieurs endroits de son œuvre : dans le § XVIII du Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761), dans l'article « Hydrodynamique » de l'*Encyclopédie*[631] et dans l'ajout à l'art. 149 de la seconde édition de son *Traité des fluides* (1770). Il y reproche essentiellement à D. Bernoulli, comme il le fait déjà dans sa seconde réponse à Euler du 24 mars 1747, de ne pas avoir explicitement mentionné la prise en compte de la pression de l'atmosphère dans son raisonnement de la section XII, § XI, de l'*Hydrodynamique*. Ses retours sur le sujet dans l'article « Hydrodynamique » de l'*Encyclopédie* et la seconde édition du *Traité des fluides* contiennent par ailleurs un extrait de la lettre de son confrère berlinois du 29 décembre 1746.

Quant à la question consistant à savoir lequel de D'Alembert ou de D. Bernoulli a raison sur cette question de la *pression négative*, notons que si, d'un point de vue actuel, l'interprétation de D'Alembert en terme de séparation du fluide s'impose vis-à-vis de celle, erronée, de D. Bernoulli, la querelle entre les deux savants traduit avant tout deux façons différentes de concevoir le mouvement d'un volume de fluide à l'intérieur d'un vase ou d'une conduite et, par là-même, deux manières distinctes d'appréhender le concept de pression. A l'exception des points de désaccords précédemment mentionnés, Euler adopte, quant à lui, la théorie de séparation des fluides proposée par D'Alembert dans la première édition de son *Traité des fluides*, mais l'aborde, cela va de soi, selon sa propre approche des écoulements[632].

La précédente description que nous donnions du concept de pression chez D'Alem-

[631] *Encyclopédie*, t. VIII, 1765, p. 371b-373b.

[632] Voir, par exemple, la p. 323 de son mémoire « Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par Mr. Segner Prof. à Gottingue », *HAB* année 1750 (1752), p. 311-354 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 1-39 (E179).

Dans son « Rational fluid mechanics, 1687-1765 », 1954, p. XLVII, C. Truesdell cite, sur ce sujet, le § LXXXI du mémoire d'Euler intitulé « Theorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la reaction de l'eau », *HAB* année 1754 (1756), p. 227-295 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 157-218 (E222). C. Truesdell y assimile la séparation des fluides au phénomène moderne de *cavitation*. Il écrit ainsi que « D'Alembert a considéré une valeur négative de la pression contre la paroi comme révélatrice du début de la cavitation ». « Cependant », ajoute-t-il, « son argumentation ne fait aucune mention de la pression interne et est extrêment dure à suivre. Avec Euler nous avons une explication claire [du phénomène de cavitation] et substantiellement exprimée en termes actuels » (p. XLVII). Notons que ce parallèle entre le problème de la séparation des fluides et la cavitation, phénomène complexe engageant notamment la notion de pression de vapeur saturante du fluide, nous paraît quelque peu anachronique.

bert se trouve, quoi qu'il en soit, confortée par l'étude cette polémique. La notion de « pression à la hauteur x », considérée dans la direction de l'écoulement, correspond à la pression qui s'exerçe au niveau *d'une* tranche — il s'agit de *la pression* de cette tranche — et qui se trouve constamment contrebalancée par une même pression s'exerçant dans le sens inverse, du moins tant que l'équilibre du volume de fluide subsiste. Cet équilibre va par ailleurs de pair avec la destruction d'une partie du mouvement dans l'ensemble des autres tranches du fluide, cette destruction renvoyant, à chaque hauteur x, à ce que D'Alembert définit dans la préface du *Traité des fluides* comme la « pression mutuelle des particules de fluide ».

Si sa méthode de mise en équation et l'approche globale du mouvement du volume de fluide qui lui associée lui permettent ainsi d'en faire abstraction, reste maintenant à savoir s'il conçoit physiquement cette pression mutuelle des parties du fluide en terme de force interne. Certaines remarques et raisonnements disséminés au sein du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII montrent qu'il s'agit là d'une question pertinente, ne serait-ce qu'en raison de la façon dont la notion d'adhérence des parties du fluide se trouve explicitement envisagée dans ce quatrième et dernier traité d'hydrodynamique.

Des réflexions de D'Alembert sur la notion de force interne dans le Mémoire 57 des Opuscules *t. VIII (1780)*

Dans le chapitre précédent, nous avions pu constater que Borda étend à tort sa théorie des pertes de forces vives aux problèmes engageant des conduites dont la section augmente de façon continue. D'Alembert, en 1780, lui oppose le respect de la loi de continuité, une loi directement associée, comme nous l'avions vu, à sa façon de concevoir le comportement d'un fluide, et selon laquelle les vitesses évoluent par degrés insensibles au sein d'un écoulement. Nous nous étions alors étonnés de l'absence de références au rôle joué par le concept de pression interne dans ce type de conduite, pression dont la variation, consécutive à celle de la section, équivaut en effet à la force accélératrice responsable du changement de vitesse. Pourquoi D'Alembert n'use-t-il pas de cet argument pour réfuter l'idée avancée par Borda dans son « Mémoire sur l'écoulement » de 1766 ?

L'art. 2 du Mémoire 57, § VII, offre un premier élément de réponse. « Nous observerons d'abord », y écrit-il[633],

> « qu'indépendamment même de [la] force de tenacité & d'adhérence, il faut nécessairement admettre dans les tranches horisontales du fluide, une force qui tende à rapprocher & à resserrer ces parties des parois vers l'axe »,

car, poursuit-il,

---

[633] D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § VII, art. 2, p. 118.

> « il est clair que la vitesse verticale dans chaque tranche sera en raison inverse de sa largeur, ce qui ne peut être si on n'admet pas une force horisontale qui tende à resserrer les parties du fluide, c'est-à-dire, des parois vers l'axe. »

D'Alembert comprend ainsi, d'après ce passage, qu'outre la force de ténacité et d'adhérence de fluide servant au maintien de l'horizontalité des tranches et tendant à opposer une résistance au phénomène de séparation, une autre force accélératrice est nécessaire pour expliquer le resserrement des tranches du fait de la variation de la section. Il évoque néanmoins une force horizontale afin de subvenir à ce manque, ce qui peut, au premier abord, paraître étonnant.

Examinons, avant de tenter d'y voir plus clair, un autre passage du mémoire, tiré du § IV. Le savant y examine la validité de son hypothèse des parties stagnantes, c'est-à-dire la validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches restreinte à un vase fictif $AQEFND$ correspondant au vase cylindrique $ABDC$ débarrassé des parties stagnantes QCE et FND situées de part et d'autre de l'orifice inférieur EF — voir la Fig. XXXVI, p. 262. « Il est vrai », explique-t-il à ce sujet[634],

> « que cette hypothèse du parallélisme des tranches ne peut subsister rigoureusement avec les Loix de l'Hydrostatique, au moins tant qu'on n'admettra d'autre force dans les particules du fluide que celle de la pesanteur ».

Il évoque donc à nouveau, dans cet extrait, la nécessité d'introduire une autre force accélératrice, différente de l'accélération de la pesanteur. Il s'agit cependant ici de garantir le principe d'égalité de la pression en tous sens à l'intérieur du fluide.

Quelques lignes plus loin, le savant précise le nœud du problème : le mouvement des particules proches des parois devant « se faire suivant les côtés du vase », il sera donc « nécessairement oblique »[635]. Il subsiste, par conséquent, une composante horizontale de la vitesse, ou de la force accélératrice, que ses principes ne lui permettent pas de détruire. Il manque, par là-même, une force horizontale susceptible d'assurer cette destruction, une force horizontale qu'il lui semblait justement nécessaire d'introduire, d'après l'extrait sus-cité, afin d'expliquer le resserrement des parties du fluide dans un vase de section convergente.

Nous voyons donc ici apparaître une représentation bidimensionnelle pour les particules de fluide proche des parois. Nous avions néanmoins longuement insisté, notamment dans la première partie de ce chapitre, sur le cadre d'étude unidimensionnel que le savant attache à sa définition du concept de pression. Que peut-on en conclure ?

Notre étude nous montrait que, dans l'art. 173 du *Traité de dynamique* (1743), l'équilibre hydrostatique découle localement, dans la direction de l'écoulement, de l'égalité des poids exercés par les deux portions d'un cylindre de fluide encadrant une tranche. C'est par ce biais que le savant parvient à établir son équation du mouvement. Cette

[634] D'Alembert, *Opuscules* t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § IV, art. 6, p. 76.

[635] D'Alembert, *Ibid.* note 634.

distinction entre un cylindre central de fluide et les portions respectivement situées de part et d'autre de ce cylindre constitue un lieu commun dans le Mémoire 57 — voir le § II, le § IV, le § VII et le § VIII, dédié à l'examen « de la pression qu'un fluide mu dans un vase exerce sur les parois du vase ». Dans le *Traité des fluides*, D'Alembert considérait par ailleurs, rappelons-le, les forces accélératrices animant le fluide dans ces deux portions extérieures au cylindre comme étant responsables de la pression s'exerçant sur les parois du vase.

Cette façon d'établir l'équilibre des pressions au sein du fluide ne prend, cela va de soi, pas en compte les variations locales de section de la conduite. Partant de là, les particules situées à l'extérieur de ce cylindre, c'est-à-dire dans la partie du fluide soumise aux variations de la section, sont alors susceptibles de prendre des directions obliques au lieu de la direction verticale commune aux autres particules de la même tranche : l'homogénéïté de la vitesse du fluide au sein de la tranche serait ainsi remise en question, de même que la vérification du principe de l'hydrostatique dans les parties extérieures au cylindre central.

Il apparaît, autrement dit, une sorte de contradiction manifeste entre une définition unidimensionnelle de la pression et la considération d'un champ de vitesse bidimensionnel dans les portions de fluide extérieures au cylindre central de fluide. Si une telle condradiction se fait jour, c'est peut-être que l'équilibre des pressions au niveau de chaque tranche se voit établi à l'intérieur de ce cylindre, c'est-à-dire à l'intérieur d'une conduite de section constante, alors même que l'égalité des vitesses doit être garanti sur la largeur correspondante du vase. Ce pourrait de même être la raison pour laquelle il se voit contraint de discuter de la destruction des composantes horizontales des vitesses au niveau des parois, parce que son écoulement, dirions-nous en termes modernes, n'y est pas unidimensionnellement structuré.

Pour ce qui est, à présent, de la nature de cette force horizontale manquante, D'Alembert conclut, dans ce même § IV du Mémoire 57[636],

> « qu'il doit y avoir dans le fluide quelque force intérieure de tenacité ou d'adhérence, ou quelqu'autre force que ce soit ».

Cette notion d'adhérence des particules de fluide entre elles apparaissaît déjà à l'occasion de notre examen de sa réponse à l'arbitrage rendu par Euler sur la question de la pression négative. Elle constituait alors une force de résistance à la perte de cohésion du volume de fluide étudiée. Nous constations par ailleurs que D'Alembert l'introduit explicitement dans la nouvelle formulation du critère de séparation d'un fluide en mouvement qu'il donne dans le Mémoire 57 § XII de ses *Opuscules* t. VIII (1780) : il la présente, en cet endroit, sous le vocable de « force d'adhérence »[637] et l'ajoute, avec la pression de l'atmosphère, à son expression de la pression à la hauteur x. Nous avions

636 D'Alembert, *Ibid.* note 634, art. 6, p. 76-77.

637 D'Alembert, *Opuscules*, t. VIII, Paris, 1780, Mémoire 57, § XII, art. 25, p. 191.

également abordé cette notion d'adhérences des particules de fluide entre elles dans le chapitre VI de notre travail — voir p. 178. Elle permettait, rappelons-nous, de garantir l'hypothèse du parallélisme des tranches, en empêchant que les particules proches de paroi ne descendent plus vite que les autres.

Dans tous les cas, l'adhérence génére une force s'exerçant à l'*intérieur du fluide*, et, plus intéressant encore, D'Alembert la désigne explicitement sous le vocable de « force », et même de « force interne »[638], dans le Mémoire 57. Le terme, à notre connaissance, n'avait jusqu'alors jamais été employé par le savant dans le cadre de ses recherches en hydrodynamique. Il est donc curieux de voir qu'il n'ait pas été évoqué au sujet de la pression.

Nous constations en effet, dans ce chapitre, que la notion de pression interne n'est pas explicitement formalisée par le savant, mais transparaît néanmoins implicitement dans sa méthode de mise en équation du mouvement d'un volume de fluide à l'intérieur d'un vase ou d'un canal. Outre les informations que nous venons de donner concernant le statut que D'Alembert accorde à la notion d'adhérences des particules de fluide entre elles, nous ne disposons donc d'aucun élement direct permettant de trancher la question qui consisterait à savoir si, malgré sa défiance envers la notion de force, et plus particulièrement de force interne, le savant appréhende physiquement le concept de pression interne comme une force agissant à l'intérieur d'un fluide en mouvement.

Il nous faut toutefois souligner que nous nous sommes ici essentiellement contentés d'une étude du statut de ce concept dans les deux éditions de son *Traité des fluides* (1744, 1770), dans le chapitre de l'*Essai sur la résistances des fluides* (1752) dédié à sa définition dans le cas du mouvement et de l'équilibre et dans le Mémoire 57 de ses *Opuscules* t. VIII (1780). Il est ainsi un traité important du savant que l'examen de notre corpus de thèse ne nous a pas laissé le temps ni l'occasion d'aborder : ses *Réflexions sur la cause générale des vents* (1747). Cet ouvrage, dans lequel D'Alembert développe l'approche bidimensionnelle spécifiquement appliquée à l'équilibre, à la résistance et au mouvement des fluides dans l'*Essai sur la résistance des fluides*, apparaît en effet comme fort instructif de ce point de vue. C'est ce qu'il ressort notamment de l'étude que l'historien O. Darrigol en a donnée[639], étude dans le courant de laquelle ce dernier note que D'Alembert y est « conscient des deux approches permettant de parvenir à l'équation du mouvement, à savoir, par le biais de son principe de la dynamique, et par le biais d'une application de la seconde loi de Newton à un élément de fluide subissant la pression des éléments qui lui sont contigus »[640]. « Dans certaines sections », ajoute-t-il, « il a favorisé la première approche, dans les autres la seconde »[641].

---

[638] D'Alembert, *Ibid.* note 634, art. 7, p. 78.

[639] O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005, p. 16-19.

[640] O. Darrigol, *Ibid.* note 639, p. 18.

[641] O. Darrigol, *Ibid.* note 639, p. 18.

D'Alembert, à la lumière de ce constat, est donc capable d'appliquer l'approche d'Euler à un élément de fluide et, ce faisant, paraît être conscient des forces internes de pression qui s'y appliquent. C'est peut-être là la réponse que nous cherchions concernant sa façon d'appréhender le rôle du concept de pression interne : quoique conscient du rôle joué par cette notion au sein de l'écoulement, D'Alembert n'en préfère pas moins, comme l'affirme O. Darrigol[642], sa propre démarche de mise en équation du mouvement des fluides, fondée sur l'emploi de son principe de dynamique, à celle d'Euler, reposant sur l'application de la seconde loi de Newton, ce conformément à sa position sur la polémique entourant la définition du concept de force, laquelle position consiste à proscrire entièrement « les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science », la dynamique, « claire par elle-même »[643]. Cela ne l'empêchera pas cependant, comme nous venons de voir, d'introduire de façon paradoxale une « force interne » due à l'adhérence des particules de fluide entre elles dans sa théorie des écoulements du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780).

[642] O. Darrigol, *Ibid.* note 639, p. 15.

[643] D'Alembert, *Traité de dynamique*, Paris, 1743, Discours préliminaire, p. xvj.

CONCLUSION

Comme nous vous l'annoncions dans l'introduction à cette thèse, la polémique avec Borda dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770 contraint D'Alembert à défendre le bien-fondé de sa théorie de 1744. Les réponses données dans la seconde édition du *Traité des Fluides* (1770), dans le Mémoire 51 § IV des *Opuscules* t. VI (1773) et le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) contiennent ainsi un certain nombre d'approfondissements grâce auxquels nous avons été en mesure de préciser le rôle et le statut physique des concepts et principes fondateurs de son approche unidimensionnelle des écoulements.

Pour ce qui est des principes, sa théorie repose sur l'application du principe de dynamique et du principe d'égalité de la pression en tous sens, l'emploi du premier permettant de faire usage du second. Cette méthode, fondamentalement différente de l'approche eulérienne, le conduit à une équation globale du mouvement et lui permet de faire fi des forces s'exerçant à l'intérieur du fluide. De ce point de vue, sa démarche est donc comparable à celle proposée par D. Bernoulli dans son *Hydrodynamique*. C'est conformément à cette approche que D'Alembert se borne à manipuler le concept de pression comme une force s'exerçant à l'extérieur du volume de fluide, sur les parois du vase ou du canal le long desquelles s'opère l'écoulement.

Dans le même temps, cette méthode de mise en équation dans le cas unidimensionnel jette un grand flou sur ce qui se passe physiquement à l'intérieur dudit volume de fluide. Ce n'est pas sans lui poser de problèmes, lorsqu'il s'agit par exemple de démontrer la validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches ou lorsqu'il lui faut s'opposer à l'introduction d'une perte de forces vives, telle que D. Bernoulli et Borda la proposent respectivement dans l'*Hydrodynamique* et le « Mémoire sur l'écoulement ». Sa théorie de 1744 présentait certains signes avant-coureurs de ces difficultés. La polémique l'opposant à Borda dans le courant des années 1770 les font finalement surgir au grand jour. L'un des aspects du problème tient à son approche qui, nous l'avons vu, consiste à se passer de la considération des forces internes au sein de sa théorie des écoulements. Ceci le conduit ainsi localement à une discontinuité explicite dans le Mémoire 57 : il manque alors, de son propre aveu, une force permettant d'assurer la validité des principes employés lorsque la section du vase varie, et par là-même, la validité de l'hypothèse du parallélisme des tranches. Pour pallier ces difficultés, D'Alembert se repose constamment sur les deux garde-fous que sont la loi de continuité et l'adhérence des particules fluides.

Le premier est très probablement le résultat de l'influence de l'*Hydraulique* (1742) de J. Bernoulli sur sa théorie de 1744. Elle assure envers et contre tout l'évolution progressive, c'est-à-dire par degrés infinitésimaux, de la vitesse du fluide, et constitue donc l'argument principal du savant contre la théorie des pertes de forces vives de Borda. C'est ainsi que D'Alembert exprime sa conception continue des écoulements dans le cas unidimensionnel.

Le second, l'adhérence des particules fluides, renvoie à sa façon d'appréhender la notion de fluidité, c'est-à-dire à sa façon de traduire l'influence du comportement interne du fluide sur le comportement de l'écoulement à l'échelle du vase. D'Alembert la présente, dans le Mémoire 57, comme étant à l'origine d'une « force interne » devant permettre de détruire les vitesses ou forces accélératrices horizontales qui tendent à incurver les trajectoires du fluide. Elle garantit, en d'autres termes, le maintien du parallélisme, c'est-à-dire la validité de l'approximation unidimensionnelle dans le cas d'une variation de section de la conduite.

La loi leibnizienne de continuité et l'adhérence des particules fluides renferment ainsi les propriétés « réelles » d'un fluide, telles que D'Alembert les appréhende dans le cas unidimensionnel. Nous pourrions, en forçant exagérément le trait, les présenter en termes modernes comme les versants macroscopique et microscopique de sa conception physique d'un fluide en mouvement. La première notion est cependant d'origine métaphysique, la seconde d'origine intuitive, ce qui constitue une preuve manisfeste des limites de son « sens physique » pour ce qui est de traduire le comportement interne du fluide sous la forme de grandeurs physiques. Ces deux notions, soulignons-le de nouveau, ne sont pas moins essentielles à la cohérence « mathématique » de sa théorie unidimensionnelle des écoulements, c'est-à-dire à la résorption d'une discontinuité qui, à défaut d'avoir pu être résolue, ne lui a cependant pas échappé.

Dans le cas bidimensionnel, la cohérence « mathématique » de sa théorie se suffit en revanche à elle-même et le dispense d'avoir recours à de telles notions. En assimilant les grandeurs physiques, telles que la vitesse ou la force accélératrice, à des fonctions de plusieurs variables, puis en rendant ces fonctions différentiables grâce à la représentation d'un élément de fluide sous la forme d'un rectangle infinitésimal, D'Alembert ouvre en effet la voie à l'application du calcul aux différences partielles à l'étude d'un écoulement. Il définit ainsi les prémices du concept moderne de *champ de vitesse* et parvient à traduire mathématiquement la continuité de l'écoulement : le respect de la loi de continuité ou la force induite par l'adhérence des particules fluides ne sont plus nécessaires.

C'est d'ailleurs par le biais de cette approche analytique que le savant parvient à innover face à Borda dans le cadre de la crise de l'hydrodynamique des années 1770. Nous montrions ainsi que l'hypothèse des tuyaux curvilignes variables, constituant la principale nouveauté de son œuvre tardive, repose précisément sur l'emploi du calcul aux différences partielles. Cette nouvelle approximation, revenant, en termes modernes, à évaluer l'influence du caractère instationnaire de l'écoulement sur la forme des tubes de courant, forme elle-même un prolongement des recherches du Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761).

Il s'agit donc d'un autre aspect de ses travaux en hydrodynamique sans lequel nous n'aurions donné qu'une vision partielle de sa stratégie de recherche en la matière : d'où l'intérêt d'avoir procédé à un examen de sa théorie aussi bien du point de vue physique que mathématique. Notre étude de la démarche de résolution du savant face à un problème physico-mathématique faisant intervenir des EDP nous permettait en effet de mettre en évidence une forte imbrication entre Analyse et considérations physiques. Si cette imbrication le poussait d'un côté à conclure à l'impossibilité de résoudre le problème dans le cas bidimensionnel, elle engageait, de l'autre, une série d'importantes découvertes, dont l'hypothèse des tuyaux invariables que Borda présentera quelques années plus tard comme une meilleure représentation des trajectoires réelles d'un fluide s'écoulant à l'intérieur d'un vase. C'est, autrement dit, par le moyen d'un traitement mathématique qu'il parvient à la définition d'une approche intermédiaire entre l'unidimensionnel et le bidimensionnel. C'est donc par le biais d'une représentation mathématique qu'il parvient à traduire rigoureusement sa conception physique d'un fluide en mouvement, qu'il s'agisse de la continuité de l'écoulement, de la forme des trajectoires ou du rôle de la variable temporelle.

D'un point de vue mathématique, les recherches de D'Alembert en hydrodynamique n'ont, de fait, rien à envier à celles de son rival Euler. Elles constitueront également une importante source d'inspiration pour Lagrange qui lui fera d'ailleurs parvenir son « Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides » — lequel formera la dernière partie de sa *Mécanique analytique* (1788) — avec sa lettre du 2 novembre 1782 afin de le « soumettre à [son] jugement, comme à celui du créateur de cette théorie ». Leur longue correspondance sur le sujet montre à elle-seule l'intérêt que ce dernier aura porté aux recherches analytiques de son ami et confrère français.

Nous ne pourrons naturellement en dire autant de l'approche unidimensionnelle de D'Alembert. La représentation physique de l'écoulement qui lui est attachée ne lui aura effectivement pas permis de dépasser les enjeux de la crise des années 1770, c'est-à-dire les propres faiblesses de sa théorie de 1744 auxquelles Borda s'attaquait, avec plus ou moins de justesse selon les cas, mais avec pertinence, dans son « Mémoire sur l'écoulement » de 1766.

EPILOGUE

Quelques éléments de réflexion sur la pérennité et la réception de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique

Il paraissait difficile d'achever ce travail sans dire quelques mots de la réception et de la pérennité de l'œuvre de D'Alembert en hydrodynamique. Après avoir précisé plusieurs des aspects de la théorie des écoulements incompressibles du savant à la lumière de ses recherches tardives, il semblait également important de dresser un nouvel état des lieux des travaux historiques sur ces différents écrits, voire de corriger certains présupposés traînant encore couramment dans les études qui lui ont été consacrées. Nous n'en mettrons que mieux en évidence les zones d'ombres restant à défricher au sein de son œuvre.

Le Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780) n'a, pour commencer, exercé aucune influence sur le développement futur de la discipline. Comme nous le mentionnions dans le chapitre III, D'Alembert, comme dans la plupart des mémoires de ses derniers tomes d'*Opuscules*, ne s'y adresse qu'à une petite dizaine de savants. Il s'agit essentiellement ici de Lagrange, avec lequel il entretient une correspondance sur le sujet jusqu'à la fin de sa vie, de Bossut, son plus fidèle disciple, et, nous l'avons vu, « expérimentateur attitré », de Condorcet, de Borda, à qui s'adresse la majorité des critiques implicites renfermées dans ce mémoire, de Laplace, et d'Euler. Le style de rédaction et la structure labyrinthique de cette pièce auraient de toute façon découragé les plus persévérants de ses contemporains, comme elles découragèrent les futures générations d'hydrodynamiciens ainsi que l'ensemble des historiens versés dans l'étude du développement de la discipline à cette époque. Ce quatrième et dernier traité ne comporte, de surcroît, aucune découverte notable susceptible d'avoir attiré l'attention de ses pairs et de ses successeurs. C'est, comme nous l'avons montré, aux yeux d'un historien des sciences qu'il doit revêtir le plus grand intérêt, parce qu'il fait, d'une part, état des questions se posant aux géomètres dans le contexte de crise de l'hydrodynamique des années 1770, parce que les approfondissements donnés par D'Alembert permettent, d'autre part, d'aborder le reste son œuvre sous un nouvel angle.

Parmi l'ensemble de ses recherches en hydrodynamique, l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752) est incontestablement considéré comme la plus méritante de ses contributions au développement de la discipline, tout simplement parce qu'il pose, dans la continuité de ses *Recherches sur la cause générale des vents* (1747), une bonne part des fondements, notamment mathématiques, ayant permis à Euler d'établir ses célèbres équations. L'importance attribuée à ce traité est cependant le fruit du travail des historiens des sciences dans la seconde moitié du XX^e siècle : c'est grâce aux études de R. Dugas, de C. Truesdell, d'I. Szabò et de G. Grimberg, dont la récente thèse de Doctorat constitue l'examen le plus juste et le plus détaillé de ce point de vue, que l'*Essai sur la résistance des fluides* a aujourd'hui repris la place qui lui est due. Il faut effectivement souligner que les remarquables recherches d'Euler dans ses trois mémoires de 1755, et la clarté de son exposé, ont longtemps éclipsé, dès la fin du XVIII^e siècle, nous semble-t-il, cette contribution de D'Alembert au développement de la discipline. Cela n'a d'ailleurs rien de bien étonnant, compte tenu du fait que les équations obtenues par le savant français en 1752 ne constituent qu'un cas très particulier des équations générales établies par son confrère berlinois. L'indéniable supériorité des recherches d'Euler en hydrodynamique ne laissera donc que peu de place à la juste reconnaissance des innovations mathématiques introduites par son prédécesseur. D'Alembert, rappelons-le, n'est d'ailleurs de même considéré comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles que depuis fort peu de temps : il aura, là encore, fallu attendre la seconde moitié du XX^e siècle, et notamment les travaux de S. Engelsman et de S. Demidov[644], pour que cette éminente découverte lui revienne de plein droit.

Qu'il s'agisse de Condorcet, Laplace, Lagrange, et Euler, les grands géomètres de son époque reconnaîtront, quant à eux, la grande fécondité de l'approche proposée par le savant dans les *Recherches sur la cause générale des vents* et l'*Essai sur la résistance des fluides*. Il n'est ainsi jamais fait mention de la découverte d'Euler de 1755 dans les essais historiques de la seconde moitié du XVIII^e siècle sans que la contribution de D'Alembert soit aussi évoquée. Dans le t. IV de son *Histoire des Mathématiques*, Montucla ne dira même pas un mot des mémoires de Berlin de 1755[645]. Dans la section VII de la seconde partie de sa *Mécanique analitique* (1788), correspondant à une synthèse historique du développement de l'hydrodynamique depuis les travaux de Torricelli, Lagrange « oubliera » également de mentionner la contribution de l'auteur des « Principes généraux mouvement des Fluides », en se contentant d'indiquer que D'Alembert[646]

> « donna le premier, en 1752, dans son Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides, les équations rigoureuses & générales du mouvement des fluides, soit incompressibles, soit compressibles & élastiques ; équations qui appartiennent à la classe de celles qu'on nomme à différences partielles, parce qu'elles font entre les

[644] Voir notamment : S. Engelsman, « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, p. 27-37 ; S. Demidov, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° XXXV/1, 1982, p. 3-42 ; S. Demidov, « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Actes du Colloque organisé par le Centre International de Synthèse les 15-18 juin 1983, Paris, 1989, p. 333-350.

[645] Voir J.-E. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, t. III, Paris, 1802, p. 687-689.

[646] Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788, Partie 2, Sect. VII, p. 436.

différentes parties des différences relatives à plusieurs variables. ».

Cette impasse volontaire, dont nous rendons plutôt compte ici pour son caractère anecdotique que pour ses implications historiques, n'est pas le fait de son appréciation scientifique sur les recherches d'Euler, mais l'expression de la mauvaise opinion qu'il lui porte en tant qu'homme. Elle sera donc dûment rectifiée dans la seconde édition, et dans les deux suivantes, où l'on voit effectivement disparaître l'adjectif « générales », qualifiant les équations de D'Alembert, et apparaître l'ajout suivant à la suite du texte précédent[647] :

> « Mais ces équations n'avaient pas encore toute la généralité et la simplicité dont elles étaient susceptibles. C'est à Euler qu'on doit les premières formules générales pour le mouvement des fluides, fondées sur les lois de leur équilibre, et présentées avec la notation simple et lumineuse des différences partielles. (*Voir* le Volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1755.) »

Si l'*Essai sur la résistance des fluides* se trouve donc invariablement présenté comme la première pierre de l'approche analytique de l'hydrodynamique, cela n'empêche cependant pas les savants de cette époque d'être conscients de la plus grande généralité des équations obtenues par Euler. Dans l'article « Fluide (mouvement des) » du second tome de l'*Encyclopédie Méthodique. Marine* (1786), signé Duval-Leroy, la présentation des équations aux dérivées partielles gouvernant le mouvement d'un fluide compressible repose ainsi exclusivement sur la méthode d'Euler dans son mémoire « Principes généraux mouvement des Fluides »[648]. Il en est de même dans le « Mémoire contenant quelques remarques sur la théorie mathématique du mouvement des fluides »[649] et l'*Introduction à l'étude de l'astronomie physique* (1787) de J.-A.-J. Cousin[650] ainsi que dans la *Nouvelle Architecture Hydraulique* (1790, 1796)[651] ou la *Mécanique philosophique* (1800)[652] de Prony, signe que les résultats de D'Alembert, dans le courant des années 1780, sont déjà considérés comme dépassés par ceux de son rival.

Concernant la postérité des recherches du savant dans le cadre de l'approche analytique, nous dirons encore quelques mots des travaux donnés dans le Mémoire 4 des *Opuscules* t. I (1761) et les Mémoires 31 à 34 des *Opuscules* t. V (1768). Mis à part le Mémoire 34 § I, renfermant l'énoncé du célèbre *Paradoxe de D'Alembert*, leur longévité est en fait quasi-nulle, pour les mêmes raisons que celles évoquées au sujet du

---

[647] Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 3e édition, 1853, Partie 2, Sect. X, p. 271.

[648] Euler, « Principes généraux mouvement des Fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 (E226).

[649] Jacques-Antoine-Joseph Cousin, « Mémoire contenant quelques remarques sur la théorie mathématique du mouvement des fluides », *MARS* année 1783 (1786), p. 665-692.

[650] J.-A.-J. Cousin, *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Didot l'aîné, Paris, 1787.

[651] Prony, *Nouvelle Architecture Hydraulique*, 1ère Partie, Paris, 1790 ; 2nde Partie, Paris, 1796.

[652] Prony, *Mécanique Philosophique*, « Journal de l'Ecole Polytechnique », t. III, an VII (1800).

Mémoire 57, à savoir le manque de clarté de l'exposé de l'auteur. A la différence du traité de 1780, ces divers écrits recèlent pourtant un nombre important de découvertes, dont Lagrange et Euler se trouvent d'ailleurs probablement être les seuls, et ce pour pas loin de deux cents ans, à avoir mesuré l'importance.

C'est à C. Truesdell que l'on doit en fait une première mise au jour de ces nouveaux résultats. Nous n'avons effectivement pas connaissance d'une autre étude du Mémoire 4 dans l'historiographie que celle, encore partielle, qu'il propose dans son « Rational fluid mechanics, 1687-1765 »[653]. De même pour le t. V des *Opuscules*. Son examen se révèle malheureusement, dans ce dernier cas, fort sommaire, le mécanicien américain se contentant de pointer les deux ou trois résultats qui lui paraissent dignes d'être retenus. De façon générale, son étude de référence en la matière, publiée dans le cadre des vol. 12 et 13 de la série II des *Opera Omnia* d'Euler, apparaît souvent, il faut bien le dire, comme injustement cassante et rabaissante à l'endroit de D'Alembert, dont il rejette à longueur de pages les raisonnements « tortueux », « incompréhensibles », « inextricables », « compliqués », etc, et dont les récurrentes revendications de priorité l'insupportent. Il n'aura cependant pas vu que la démarche souvent labyrinthique et maladroite du savant, c'est notamment le cas dans les Mémoires 4, 31, 32 et 33 des *Opuscules* t. I et t. V, n'en cache pas moins des idées innovantes qu'Euler et Lagange se réapproprieront pas la suite.

Sa présentation du *Traité des fluides* (1744) est probablement l'exemple le plus saisissant de sa piètre opition des travaux du géomètre français. Elle ne constitue cependant pas un cas isolé dans l'historiograpie. C. Truesdell ne consacre de fait qu'une vingtaine de lignes à l'ouvrage, au cours desquelles il note que le savant « n'obtient pas d'autres résultats corrects que ceux se trouvant déjà dans l'*Hydrodynamique* » de D. Bernoulli, et que sa méthode de mise en équation des écoulements de 1744 « n'apporte rien et n'a pas d'influence permanente en mécanique des fluides »[654]. Dans son étude intitulée *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, l'historien I. Szabò affirme de même que « le *Traité des fluides* de D'Alembert n'a pas apporté de progrès au développement de l'hydrodynamique »[655]. Il donne néanmoins une synthèse de la façon dont les principe de la dynamique et de l'hydrostatique s'y trouvent appliqués, évoque le mémoire[656] de Kaestner de 1769 et les diverses critiques adressées à Maclaurin et J. Bernoulli[657]. Il justifie de surcroît son jugement sur l'ouvrage en ex-

[653] C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. CXII-CXIX.

[654] C. Truesdell, *Ibid.* note 653, p. XXXVII.

[655] I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, 1977, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser, 1977, p. 237.

[656] A.G. Kaestner, « Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89.

[657] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, « Chapitre III : *Remarques sur*

pliquant que « D'Alembert n'a pas eu l'occasion d'y exercer son point fort, à savoir les mathématiques »[658], ce qui, somme toute, se révèle être dans l'esprit de notre précédente conclusion. De manière générale, le *Traité des fluides* est un ouvrage peu abordé, pour ne pas dire négligé, ainsi que nous l'ont montré nos multiples retours sur cette première théorie des écoulements de D'Alembert. Il ne serait même pas exagéré d'affirmer que le traité se voit globalement considéré comme de peu d'importance. C'est vrai, dans un certain sens, compte tenu de l'absence de découvertes comparables à celles que renferme, par exemple, l'*Hydrodynamique* de D. Bernoulli.

Rappelons cependant que D'Alembert exerce, de son vivant, une grande influence sur la communauté scientifique française et européenne. Un tour d'horizon des principaux travaux français en hydrodynamique entre 1755 et 1800 suffit ainsi à montrer qu'il faut attendre 1790, date de parution de la première partie de la *Nouvelle architecture hydraulique* de Prony, avant que l'approche d'Euler concernant le concept de pression interne se voit adoptée dans le cadre de l'étude d'un écoulement dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Si l'approche de D'Alembert occulte si longtemps celle de son plus grand rival, c'est d'abord parce que sa méthode règne, avec celle de D. Bernoulli, en maître sur la communauté des hydrodynamiciens français. L'auteur du *Traité des fluides* signe, d'autre part, l'ensemble des articles d'hydrodynamique théorique de l'*Encyclopédie*, lesquels seront par ailleurs repris, en tout ou en partie, dans le *Supplément à l'Encyclopédie* de Panckoucke, ainsi que dans l'*Encyclopédie Méthodique. Mathématiques*. Il est, autrement dit, fort probable que son prestige ait longuement repoussé, en France, l'adoption de l'approche eulérienne, non pas celle de 1755, renvoyant à une approche analytique de la discipline, mais celle de 1749, correspondant à une étude unidimensionnelle des écoulements... La première référence directe à la démarche adoptée par Euler dans son mémoire « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite »[659] apparaît ainsi dans l'article « Fluides (mouvement des) » du t. II de l'*Encyclopédie Méthodique. Marine*, publié en 1786[660].

Concernant la pérennité du *Traité des fluides*, nous avons déjà eu l'occasion de rendre compte de la pièce[661] de Prony de 1801, dans laquelle ce dernier livre un certain nombre d'observations et de critiques à l'encontre de la théorie des écoulements de

---

les Théories que Messieurs Maclaurin *&* Jean Bernoulli *ont données du mouvement des Fluides* », p. 147-165.

658 I. Szabò, *Ibid.* note 655.

659 Euler, « Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite », *HAB* année 1752 (1754), p. 111-148 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 219-250, mémoire présenté le 23 octobre 1749 devant l'Académie de Berlin (E206).

660 *Encyclopédie méthodique. Marine*, 3 tomes, Paris, 1786-1787, art. « Fluide », entrée « Fluides (*mouvement des*) », t. II, p. 328-340.

661 Prony, « Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horizontal ; Avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problème, dans son Traité des Fluides », *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1803*, t. 18, pièce n° 47, Paris, 1801.

D'Alembert dans la seconde édition de l'ouvrage. Nous rappelerons tout d'abord que cet écrit de Prony correspond à un correctif destiné à ses élèves de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole des Ponts et Chaussées, signe que le *Traité des fluides* est encore étudié au début du XIX^e^ siècle, dans deux, qui plus est, des établissements de formation d'ingénieurs les plus prestigieux de l'époque. Le principe de dynamique de D'Alembert est d'autre part employé par Navier dans le cadre de ses cours à l'Ecole des Ponts et Chaussées pour parvenir à la « Solution générale, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, de la question du mouvement d'un fluide incompressible coulant dans un vase ou un tuyau » (1838)[662]. Il l'est également par Poisson dans le chapitre « Hypothèse du parallélisme des tranches ; mouvement de l'eau qui sort d'un vase de figure quelconque » de son *Traité de mécanique* (1811)[663]. Nous avons par ailleurs récemment découvert un manuscrit d'Ampère non daté, un double feuillet pour être plus précis, contenant des « Remarques sur le *Traité des Fluides* de monsieur D'alembert », c'est-à-dire un ensemble de commentaires sur l'article 58 de l'ouvrage, relatif à l'équilibre des fluides[664]. Ces quelques éléments, non exhaustifs, montrent que le *Traité des fluides*, ou du moins la méthode de mise en équation qu'il contient, restent en vogue jusqu'à la fin de la seconde moitié du XIX^e^ siècle.

Signalons enfin que la prédominance de la démarche de D'Alembert pour l'étude unidimensionnelle d'un écoulement tient autant à son influence sur la communauté scientifique qu'à la haute opinion de ses pairs à l'endroit du *Traité des fluides*. Nous savons, il est vrai, que D. Bernoulli émit un avis particulièrement dur à l'égard de l'ouvrage dans sa lettre à Euler du 7 juillet 1745[665] :

> « j'ai vu avec déception qu'à part quelques petites choses il n'y a rien d'autre à voir dans son hydrodynamique qu'une impertinente suffisance. Ses critiques sont puériles en effet, et montrent non seulement qu'il n'est pas un homme remarquable, mais qu'il ne le sera pour ainsi dire jamais ».

Compte tenu des critiques de D'Alembert, évoquées dans cette lettre, à l'encontre de l'*Hydrodynamique*, ainsi que du peu de résultats que contient son traité comparativement à celui de son prédécesseur, il n'est néanmoins pas étonnant que D. Bernoulli réagisse en ces termes[666]. Comme nous l'avançions à l'instant, ce jugement constitue un cas somme

[662] H. Navier, *Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions*, Paris, 1838, t. II, p. 444-451.

[663] S.D. Poisson, *Traité de mécanique*, Paris, 1811, t. II, p. 7-16.

[664] A.-M. Ampère, « Remarques sur le *Traité des Fluides* de monsieur D'alembert », Archives de l'Académie des Sciences de Paris, Papiers André-Marie Ampère, carton 7, chapitre 7, chemise 122. Nous remercions ici J.-D. Candaux, qui nous a signalé l'existence de ce document.

[665] Cette lettre est citée par C. Truesdell dans la note 2, p. XXXVII, de son « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. VII-CXXV.

[666] L'avis de D. Bernoulli est également partagé par Clairaut. Ce dernier, en très mauvais termes avec D'Alembert, écrit en effet à l'auteur de l'*Hydrodynamique*, dans sa lettre de 4 août 1762 : « votre hydrodynamique et vos mémoires de dynamique ont fait sa fortune, depuis que tout ce qu'il a pris

toute isolé du vivant de D'Alembert. Nombre de commentaires de ses contemporains sur le *Traité des fluides* montrent en effet que l'application du principe de dynamique à diverses questions d'écoulement des fluides, ainsi que la démonstration, à partir de ce dernier, du principe de conservation des forces vives employé par D. Bernoulli, ne les laissent pas indifférents. Beaucoup y voient d'ailleurs une sorte d'étape préliminaire à la production de l'*Essai sur la résistance des fluides*, qui repose sur le même principe. Citons par exemple l'« Eloge de Monsieur D'Alembert » par Paolo Frisi, dans lequel le savant italien, proche de l'auteur, affirme au sujet du Livre II de l'ouvrage, consacré au mouvement des fluides, que[667] :

> « les mathématiciens se fixèrent principalement sur la deuxième partie de ce nouveau traité et admirèrent la simplicité et l'élégance avec lesquelles on déduisait du nouveau principe la loi de la vitesse et même l'équation que Daniel Bernoulli avait ingénieusement déduite d'autres principes, sous les mêmes suppositions que les couches du fluide restent parallèles entre elles et que chacune d'entre elles conserve en chaque point des vitesses égales et des directions parallèles. Ils virent avec quel génie l'auteur avait développé et appliqué cette équation aux cas les plus curieux des fluides élastiques, doués de ténacité, ou tout à fait déliés dans leurs moindres parties, aux cas des tubes verticaux, inclinés, fixes, flexibles, mobiles, tirés par quelque poids, interrompus par quelque diaphragme, ouverts d'un ou de plusieurs trous latéralement ou dans le fond. Ils observèrent avec quelle maturité il avait remarqué les doutes qui pouvaient naître sur les autres théories des fluides proposées auparavant par Newton, Mac Laurin, par Jean Bernoulli, il avait rectifié, démontré et limité les principes sur lesquels s'appuyait la théorie de Daniel Bernoulli, remplacé, corrigé les cas dans lesquels elle était en défaut : et ainsi la deuxième partie de ce traité fut considérée comme le traité d'hydraulique le plus complet, qui eût existé jusqu'alors ».

Dans son « Eloge de D'Alembert », Condorcet donne un avis plus nuancé, pour ne pas dire plus objectif[668], essentiellement centré sur le mérite consistant à avoir donné une théorie des écoulements certes fort similaire à celle de D. Bernoulli quant aux résultats et

---

dans vos travaux lui a été attribué, sans que l'on ait réalisé que l'essentiel vous revient » (extrait de lettre cité par C. Truesdell dans la note 1, p. LXXXV, de son « Editor's Introduction », *Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich, 1955, p. IX-CXVIII).

[667] Cet extrait de l'« Eloge de Monsieur D'Alembert » par Paolo Frisi est tiré d'une traduction réalisée par A. Venditti et P. Crépel à partir de l'édition italienne suivante : Paolo Frisi, *Elogi. Galilei, Newton, d'Alembert*, Introduzione e cura di Paolo Casini, éd. Theoria, Rome, « Elogio del Signor d'Alembert », p. 177-216.

[668] P. Crépel montre que les éloges de D'Alembert et d'Euler par Condorcet rendent objectivement hommage aux apports respectifs des deux géomètres dans le domaine scientifique. Il cite, à titre de preuve, cet extrait de la lettre de Cousin à Bicquilley du 7 avril 1785 : « Nous avons eu un éloge d'Euler fort long, puisqu'il a duré plus d'une heure ; mais il m'a beaucoup intéressé. On ne s'attendroit pas que Condorcet mettroit Euler si fort au dessus de d'Alembert, et le public lui en a su gré ». Voir P. Crépel, « Qu'y a-t-il de nouveau dans l'œuvre scientifique de D'Alembert ? », *Du nouveau dans les sciences*, S.

aux hypothèses mais reposant néanmoins sur un principe des plus généraux, applicable à nombre de disciplines différentes[669] :

> « Les découvertes successives qui forment les sciences naissent les unes des autres ; celle qui appartient exclusivement à un seul homme est due à son génie, aidé des travaux de ceux qui l'ont précédé, lui ont aplani la carrière, et ne lui ont plus laissé qu'un dernier obstacle à vaincre : mais, parmi ces découvertes, il en est qui, par leur étendue, leur influence sur le progrès général des sciences, la nombreuse suite de théories nouvelles qui n'en sont que le développement, semblent former une classe particulière, et mériter à leur inventeur un rang à part dans le nombre déjà si petit des hommes de génie.
> Telle a été celle du principe de M. D'Alembert. Déjà, en 1744, il l'avait appliqué à la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides, et tous les problèmes résolus jusqu'alors par les géomètres étaient devenus en quelque sorte des corollaires de ce principe : mais il avait fallu employer en même temps les hypothèses ingénieuses de M. Daniel Bernoulli, que leur accord avec les phénomènes les plus généraux de l'hydraulique permettait presque de regarder comme des faits. Dans la théorie des fluides, comme dans celle du mouvement des corps susceptibles de changer de forme, le principe de M. D'Alembert, lorsqu'on l'employait seul, conduisait à des équations qui échappaient aux méthodes connues, et cette première découverte semblait rendre nécessaire celle d'un nouveau calcul ».

Dans son *Essai sur l'histoire des mathématiques*, paru en 1802, c'est-à-dire presque vingt ans après la mort de D'Alembert, Bossut présente quant à lui l'essence de l'ouvrage en ces termes[670] :

> « D'Alembert, après avoir fait de la Dynamique une science presque nouvelle [...], appliqua avec le même succès ce principe au mouvement des fluides. Il publia sur ce sujet, en 1744, un ouvrage fort étendu, intiulté : *Traité de l'Equilibre et du Mouvement des fluides*. Dans le problème des écoulemens par des orifices quelconques, il fait d'abord les mêmes suppositions préliminaires que Daniel Bernoulli ; mais voilà tout ce qu'ils ont de commun, quant aux bases du calcul. D'Alembert considère à

Carvallo et S. Roux (dir.), Vrin, « Recherches sur la philosophie et le langage », 2006, p. 171-223, ici p. 182.

[669] Condorcet, *Œuvres de Condorcet*, Paris, Firmin-Didot, 1847, t. II, p. 51-110. Outre le *Traité de dynamique* (1743) le *Traité des fluides* (1744), D'Alembert applique également son principe de la dynamique au problème des cordes vibrantes (1747), au mouvement de l'asmosphère dans ses *Recherches sur la cause générale des vents* (1747), à la question de la précession dans *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre dans le système newtonien* (1749), de nouveau à la résistance et l'écoulement des fluides dans l'*Essai sur la résistance des fluides* (1752), à la mécanique céleste dans ses *Recherches sur différents points importants du système du monde* (1754), divers sujets sur lesquels il reviendra, par le biais de la même méthode, dans ses huit tomes d'*Opuscules mathématiques*.

[670] Bossut, *Essai sur l'histoire des mathématiques*, Paris, 1802, t. 2, 4e période, « § XII. Progrès de l'Hydrodynamique », p. 177-178.

> chaque instant le mouvement d'une tranche quelconque, comme composé du mouvement qu'elle avait dans l'instant précédent, et d'un autre mouvement qu'elle a perdu [...]. L'auteur résout ainsi avec beaucoup de simplicité, non-seulement les problèmes des géomètres qui l'ont précéddé, mais encore plusieurs autres, entièrement nouveaux et très-difficiles ».

Ces quelques exemples illustrent l'impact de l'ouvrage sur ses pairs. Le *Traité des fluides*, en un mot, est alors considéré comme un ouvrage important. Il marquera durablement, nous semble-t-il, le développement de l'hydrodynamique française au XVIII^{e} siècle et au début du XIX^{e} siècle, le temps que l'approche d'Euler devienne incontournable chez les mécaniciens des fluides.

Le déni des historiens des sciences pour la première théorie des écoulements de D'Alembert se révèle donc quelque peu surprenant, non pas du point de vue des découvertes qu'elle renferme, mais du point de vue du développement de la discipline à cette époque. Dans deux récentes études, S. Calero et O. Darrigol[671] tentent significativement de pallier ce manque, en apportant, d'une part, une attention accrue à l'ouvrage, en le présentant, d'autre part, comme l'une des étapes du processus de formalisation de la science des écoulements entre 1738 et 1755. L'examen de cette dernière période passe effectivement par une étude précise des interactions scientifiques entre ses grands artisans, à savoir D. Bernoulli, J. Bernoulli, Maclaurin, D'Alembert et Euler. Nous avons, dans ce qui précède, entamé un travail de comparaison entre les théories de l'*Hydrodynamique*, de l'*Hydraulique* et du *Traité des fluides*. Il reste cependant encore beaucoup à faire. Le traité de D'Alembert comprend, à titre d'exemple, un long commentaire[672] de la théorie hydrodynamique donnée par Maclaurin dans son célèbre *Treatise of Fluxions* (1742)[673], théorie dont personne ne semble cependant s'être préoccupé jusqu'alors. Il comprend par ailleurs une importante somme de recherches sur les questions de la résistance des fluides et des tourbillons, dont nous n'avons de même trouvé nulle trace dans l'historiographie.

Suite à notre examen de l'œuvre tardive du géomètre pour ce qui concerne l'écoulement des fluides, le *Traité des fluides* et les travaux analytiques du t. V des *Opuscules* (1768) constituent donc les deux phases les plus méconnues de son œuvre en hydrodynamique. Il faudra encore rajouter le § XIII du Mémoire 57 des *Opuscules* t. VIII (1780), intégralement dédié au Paradoxe aujourd'hui connu sous le nom de D'Alembert, que l'étendue de notre sujet ne nous a pas permis d'aborder.

L'*Hydraulique* de J. Bernoulli, dont nous avons réalisé une traduction française avec B. Bru, constitue de même un sujet de recherche passionnant, d'abord parce qu'à l'ins-

[671] J.S. Calero, *La genesis de la mecanica de fluidos*, UNED, Madrid, 1996 ; O. Darrigol, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

[672] D'Alembert, *Traité des fluides*, 1ère édition, Paris, 1744, Livre II, chap. III, p. 147-154.

[673] C. Maclaurin, *A Treatise of Fluxions*, 2 vol., Edinburgh, 1742 ; *Traité des fluxions*, trad. fr. R.P. Pézenas, 2 vol., Paris, 1749.

tar du *Traité des fluides*, elle constitue une théorie encore peu étudiée, d'autre part, comme nous le signalions à l'instant, parce qu'il semble difficile de cerner la démarche de D'Alembert dans son traité de 1744 sans avoir préalablement examiné les travaux de son illustre précédesseur.

BIBLIOGRAPHIE*

Sources primaires

Daniel Bernoulli :

« Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 2, 1727, p. 111-125.

Hydrodynamica, sive De Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii, Strasbourg, 1738.

« Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748 », *HAB* année 1753 (1755), p. 147-172 (*).

« Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps », *HAB* année 1753 (1755), p. 173-195 (*).

Jean Bernoulli :

Discours sur les loix de la communication du mouvement. Qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences aux années 1724. & 1726. & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans les dites années, Paris, 1727.

« Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732 », *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, vol. 4, 1743, p. 387-493.

Jean-Charles Borda :

« Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases », *MARS* année 1766 (1769), p. 579-607.

« Mémoire sur les pompes », *MARS* année 1768 (1771), p. 418-431.

* Les références suivies du signe (*) renvoient essentiellement aux sources primaires et secondaires citées dans le chapitre IV et relatives aux recherches de G. Jouve dans sa Thèse de Doctorat *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783) – Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions* soutenue à l'Université Lyon 1 le 10 juillet 2007.

CHARLES BOSSUT :

Traité élémentaire d'hydrodynamique, Paris, 1771.

Nouvelles expériences sur la résistance des fluides, Paris, 1777.

Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique, t. I-II, Paris, 1786-1787.

Essai sur l'histoire des mathématiques, Paris, 1802.

ALEXIS CLAIRAUT :

« Recherches générales sur le calcul intégral », *MARS* année 1739 (1741), p. 425-436.

« Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre », *MARS* année 1740 (1742), p. 293-323.

Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris, 1743.

MARIE-JEAN-ANTOINE-NICOLAS CARITAT, marquis de CONDORCET :

Du calcul intégral, 1765 (*).

Correspondance inédite de Condorcet et de Turgot, dir. Ch. Henry, Paris, 1882, p. 253.

« Mémoire sur les équations aux différences partielles », *MARS* année 1770 (1773), p. 151-178 (*).

« Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *MARS* année 1771 (1774), p. 49-74 (*).

« Minute de lettre de Condorcet à Turgot » [1774], *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits*, Paris, INED, 1994, p. 94-95.

« Eloge de M. D'Alembert », *HARS* année 1783 (1786), p. 76-120.

Encyclopédie méthodique. Mathématiques, article « Partielles, équations aux différences partielles », tome II, Paris, 1785, p. 526-529.

JACQUES-ANTOINE-JOSEPH COUSIN :

« Mémoire contenant quelques remarques sur la théorie mathématique du mouvement des fluides », *MARS* année 1783 (1786), p. 665-692.

Introduction à l'étude de l'astronomie physique, Didot l'aîné, Paris, 1787.

Jean Le Rond D'Alembert :

Traité de dynamique, Paris, 1743.

Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, pour servir de suite au Traité de dynamique, Paris, 1744.

Lettres à Euler du 29 janvier 1747 et 24 mars 1747, in Euler, *Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange, Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, A.P. Juskevic et R. Taton (éd.), Birkhäuser, Bâle, 1980.

Réflexions sur la cause generale des vents, Paris, 1747.

« Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *HAB* année 1747 (1749), p. 214-219 (*).

« Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 220-249 (*).

« Mémoire historique sur la vie & les ouvrages de M. Jean Bernoulli », *Mercure de France*, mars 1748, p. 39-79.

Theoria resistentiae quam patitur corpus in fluido motum, ex principiis omnino noivs et simplissimis deducta, habita ratione tum velocitatis, figurae, et massae corporis moti, tum densitatis & compressionis partium fluidi, Berlin-Bradenburgische Akademie der Wissenschaften Akadamiearchiv, I-M478.

« Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* année 1750 (1752), p. 355-360 (*).

Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris, 1752.

« Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les Mémoires de 1753 », Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften (*).

Traité de dynamique, 2nde éd., Paris, 1758.

« Mémoire 1. Recherches sur les vibrations des cordes sonores », *Opuscules mathématiques*, t. I, Paris, 1761, p. 1-64 (*).

« Mémoire 4. Réflexions sur les Loix du mouvement des fluides », *Opuscules mathématiques*, t. I, Paris, 1761, p. 137-168.

« Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 », *Miscellanea Taurinensia*, t. III, 1762-1765, 1766, p. 381-396.

« Mémoire 25. Nouvelles réflexions sur les vibrations des Cordes sonores », *Opuscules mathématiques*, t. IV, Paris, 1768, p. 128-224 (*).

« Mémoire 26. Recherches de Calcul intégral », *Opuscules mathématiques*, t. VI, Paris, 1768, p. 225-253 (*).

« Mémoire 31. Nouvelles réflexions sur les Loix du mouvement des Fluides », *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 41-67.

« Mémoire 32. Suite des mêmes Recherches », *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 76-84.

« Mémoire 33. Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides », *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 95-131.

« Mémoire 34 § I. Paradoxe proposé aux Géomètres sur la Résistance des Fluides », *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 132-137.

« Mémoire 34 § II. Sur la Vitesse du Son », *Opuscules mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 138-146 (*).

Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, 2nde éd., Paris, 1770.

Registres manuscrits de l'Académie des sciences, 1772, Archives de l'Académie des sciences de Paris, f. 7-10 (*).

« Mémoire 51 § IV. Méthode nouvelle, rigoureuse & directe pour déterminer le mouvement des Fluides dans des Vases », *Opuscules mathématiques*, t. VI, Paris, 1780, p. 379-390.

« Mémoire 57. Nouvelles Recherches sur le mouvement des Fluides dans des Vases », *Opuscules mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 52-230.

« Mémoire 58 § VI. Sur les Fonctions discontinues », *Opuscules mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 302-308 (*).

« Mémoire 59 § VI. Sur la vitesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et de problèmes semblables », *Opuscules mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 95-160 (*).

« Mémoire 59 § VII. Sur les cordes vibrantes », *Opuscules mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 271-334.

« Mémoire 59 § XL (2). Sur le mouvement des fluides dans les tuyaux », *Opuscules mathématiques*, t. inédit, Bibliothèque de l'Institut (Paris), MS 1793, f. 553-555.

ENCYCLOPÉDIE : *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des Métiers*, Diderot et d'Alembert (dir.), t. I-VII, Paris, 1751-1757 ; t. VIII-XVII, Neufchastel, 1765 :
– art. « Adherence ou Adhesion », t. I, 1751, p. 132a ;
– art. « Cohesion », t. III, 1753, p. 605b-606a ;
– art. « Dureté », t. V, 1755, p. 171b-172b ;
– art. « Dynamique », t. V, 1755, p. 174b-176a ;
– art. « Fluide », t. VI, 1756, p. 881a-890b ;
– art. « Fluidité », t. VI, 1756, p. 890b-892a ;
– art. « Forces vives », entrée « Conservation des forces vives », t. VII, 1757, p. 114b-115b ;
– art. « Hydrodynamique », t. VIII, 1765, p. 371b-373b ;
– art. « Hyperbole », t. VIII, 1765, p. 402b-404a ;
– art. « Parabole », t. XI, 1765, p. 883a-884a ;
– art. « Paramètre », t. XI, 1765, p. 916b ;
– art. « Pression », t. XIII, 1765, p. 323b-324a.

ENCYCLOPÉDIE (SUPPLÉMENT À L'), éd. par Panckoucke, 4 vol., 1776-1777 :
– art. « Partielles, équations aux différences partielles », t. IV, 1777, p. 243a-245a.

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE : *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, 3 tomes, Paris, 1784-1789 : articles « Fluide », « Hydrodynamique ».

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE : *Encyclopédie méthodique. Marine*, 3 tomes, Paris, 1786-1787 :
– art. « Fluide », entrée « Fluides (*mouvement des*) », t. II, p. 328-340, signé par Nicolas-Claude Duval-Leroy (Y).

LEONHARD EULER :

« De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7, 1734, p. 174-183.

« Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 7, 1734, p. 184-200.

Lettre à D'Alembert du 29 décembre 1746, in Euler, *Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange*, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, A.P. Juskevic et R. Taton (éd.), Birkhäuser, Bâle, 1980.

« Sur la vibration des cordes », *HAB* année 1748 (1750), p. 69-85 (*).

« Sur le mouvement de l'eau par les tuyaux de conduite », *HAB* année 1752 (1754),

p. 111-148 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 219-250 ; mémoire présenté le 23 octobre 1749 devant l'Académie de Berlin (E206).

« Recherches sur l'effet d'un machine hydraulique proposée par M. Segner, professeur à Goettingue », *HAB* année 1750 (1752), p. 311-354 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 1-39 ; mémoire présenté le 2 septembre 1751 devant l'Académie de Berlin.

« Recherches sur le mouvement des rivieres », *HAB* année 1760 (1767), p. 101-118 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 ; mémoire présenté le 6 mai 1751 devant l'Académie de Berlin.

« Principia motus fluidorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 6, 1761, p. 271-311 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 133-168 ; mémoire présenté le 31 août 1752 devant l'Académie de Berlin.

« Theorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la reaction de l'eau », *HAB* année 1754 (1756), p. 227-295 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 15, p. 157-218 ; mémoire présenté le 13 septembre 1753 devant l'Académie de Berlin.

« Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli », *HAB* année 1753 (1755), p. 196-222 (*).

« Principes généraux de l'équilibre des fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 217-273 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 2-53 ; mémoire présenté le 11 octobre 1753 devant l'Académie de Berlin.

« Principes généraux du mouvement des fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 274-315 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 54-91 ; mémoire présenté le 4 septembre 1755 devant l'Académie de Berlin (E226).

« Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides », *HAB* année 1755 (1757), p. 316-361 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 12, p. 92-132 ; mémoire présenté le 2 octobre 1755 devant l'Académie de Berlin (E227).

« Sectio secunda de principiis motus fluidorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 14, 1770, p. 270-386 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 13, p. 73-153 ; mémoire présenté le 17 mars 1766 devant l'Académie de Petersbourg.

Institutionum calculi integralis volumen tertium, in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium, ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur, St-Pétersbourg, 1770.

« Sectio tertia de motu fluidorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 15, 1771, p. 219-360 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 13, p. 154-261 ; mémoire présenté le 17 mars 1766 devant l'Académie de Petersbourg.

Paolo Frisi :

« Elogio del Signor d'Alembert », *Elogi. Galilei, Newton, d'Alembert*, Introduzione e cura di Paolo Casini, Theoria, Rome, p. 177-216.

Abraham Gotthelf Kaestner :

Anfangsgründe der Hydrodynamik welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten, Göttingen, 1769.

« Johan Bernoulli hydraulica contra Dom. d'Alembert objectiones », *Novi commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, t. I, Göttingen, 1769, p. 45-89.

Christiaan Huygens :

Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, Paris, 1673.

Traité de la lumière... avec un discours de la cause de la pesanteur, Leyden, 1690.

Joseph-Louis Lagrange :

« Recherches sur la nature, et la propagation du son », *Miscellanea Taurinensia*, t. I, 1759, p. 1-112 (*).

« Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique », *Mélanges de Turin*, t. II, *pour les années 1760-1761*, 1762, p. 196-298 ; *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365-468.

« Solution de différents Problèmes de calcul intégral », *Mélanges de Turin*, t. III, *pour les années 1762-1765*, 1766, p. 179-380 ; *Œuvres* de Lagrange, t. I, p. 471-668.

« Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1$^{\text{er}}$ ordre », *NMAB* année 1772 (1775), p. 353-372 (*).

« Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides », *NMAB* année 1781 (1783), p. 151-198.

Méchanique analitique, Paris, 1788.

Œuvres de Lagrange, t. XIII, Paris, 1882.

Œuvres de Lagrange, t. XIV, Paris, 1892.

Pierre-Simon de Laplace :

« Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles », *MARS* année 1773 (1777), p. 341-40 (*).

« Recherches sur plusieurs points du Système du Monde », *MARS* année 1775 (1778), p. 75-182.

« Mémoire sur les suites », *MARS* année 1779 (1782), p. 207-309 (*).

Œuvres Complètes, t. XIV, Paris, 1912.

Gottfried Wilhelm von Leibniz :

« Brevis Demonstratio erroris Memorabilis cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in se mechanica abutuntur », *Acta Eruditorum*, mars 1686.

Colin Maclaurin :

« De Causa physica Fluxus et Refluxus Maris », *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1740*, Paris, 1741, p. 193-234.

A Treatise of Fluxions, 2 vol., Edinburgh, 1742 ; *Traité des fluxions*, trad. fr. R.P. Pézenas, 2 vol., Paris, 1749.

Gaspard Monge :

« Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées*, t. VII, 1776, p.267-300 (*).

« Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles », *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées*, t. VII, 1776, p. 305-327 (*).

Henri Navier :

Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions, Paris, 1838, t. 2.

Isaac Newton :

Principia Mathematica Philosophiae Naturalis, Londres, 1687 ; 2^{e} éd., 1713 ; 3^{e} éd., 1726.

Siméon Denis Poisson :

Traité de mécanique, Paris, 1811, t. 2.

Gaspard Marie Riche de Prony :

Mécanique Philosophique, « Journal de l'Ecole Polytechnique », t. III, an VII (1800).

« Recherches sur le mouvement d'un fluide incompressible et pesant, qui s'écoule d'un vase, par un orifice horizontal ; Avec quelques observations sur la solution que D'Alembert a donnée de ce problème, dans son Traité des Fluides », *Rapports et travaux de l'Institut de France pour l'année 1801*, t. 18, pièce n° 47, 1803.

Nouvelle Architecture Hydraulique, 1$^{\text{ère}}$ Partie, Paris, 1790 ; 2$^{\text{nde}}$ Partie, Paris, 1796.

Sources secondaires

P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, 6^{e} éd., Gauthier-Villars, Paris, 1953, t. II.

A. Barré de Saint-Venant, « Résistance des fluides : Considérations historiques, physiques et pratiques relatives au problème de l'action dynamique mutuelle d'un fluide et d'un solide, spécialement dans l'état de permanence supposé acquis par leurs mouvements », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44, 1888, p. 1-192.

A. Barré de Saint-Venant, « Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement », *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 44, 1888, p. 193-244.

G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

M. Blay, *La science du mouvement de Galilée à Lagrange*, Belin, Paris, 2002.

M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007.

H. Burkhardt, « Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Erster Haupteil : Dis Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen und astronomischen

Problemen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. X-2, 1908, p. 1-894 (*).

J.S. CALERO, *La genesis de la mecanica de fluidos*, UNED, Madrid, 1996.

J. CASEY, « The Principle of rigidification », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 43, 1992, p. 329-383.

J. CHÊNE, « Le son dans les *Opuscules Mathématiques* de D'Alembert », Mémoire de DEA Construction des Savoirs Scientifiques, Université Lyon 1, 2004 (*).

A.-M. CHOUILLET, P. CRÉPEL, « Un voyage d'Italie manqué ou trois encyclopédistes réunis », *Recherche sur Diderot et sur l'Encyclopédie* 17, 1994, p. 9-53.

A. COSTE, M. MASSOT, « La notion de fluide chez D'Alembert à la lumière des *Opuscules mathématiques* et la correspondance », *Sciences, musiques, Lumières : Mélanges offerts à Anne-Marie Chouillet*, dir. Ulla Kölving et I. Passeron, Centre international d'études du XVIII^e siècle, Ferney-Voltaire, 2002, p. 83-91.

B. BRU, P. CRÉPEL, *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits*, édition critique et commentée, Paris, INED, 1994.

P. CRÉPEL, « Une curieuse lettre de Borda à Condorcet et un non moins curieux article du *Journal encyclopédique* », *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : Guide de recherches*, E. Brian et C. Demeulenaere-Douyère, Tec et Doc Lavoisier, Paris, 1996, p. 325-337.

P. CRÉPEL, « Angoisses et passions concernant l'édition des *Œuvres Complètes* de D'Alembert », *Matapli* n° 69, 2002, p. 87-101.

P. CRÉPEL, « Qu'y a-t-il de nouveau dans l'œuvre scientifique de D'Alembert ? », *Du nouveau dans les sciences*, dir. par S. Carvallo et S. Roux, Vrin, « Recherches sur la philosophie et le langage », 2006, p. 171-223.

O. DARRIGOL, *Worlds of flow : A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

S. DEMIDOV, « Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° XXXV/1, 1982, p. 3-42.

S. DEMIDOV, « D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles », *Jean d'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix*, Actes du Colloque organisé par le Centre International de Synthèse les 15-18 juin 1983, Paris, 1989, p. 333-350.

J. DHOMBRES, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181 (*).

R. DUGAS, *Histoire de la mécanique*, Neuchâtel, Éditions du Griffon, 1950.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, éd. française dir. par P. APPELL, d'après l'éd. allemande dir. par J. MOLK, Gauthier-Villars, Paris, 1912, vol. 5, fasc. 1.

S. ENGELSMAN, *Family of Curves and the Origin of Partial Differentiation*, North-Holland Mathematics Studies, 93, 1984.

S. ENGELSMAN, « D'Alembert et les équations aux dérivées partielles », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, p. 27-37.

L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

A. FIRODE, *La dynamique de D'Alembert*, Vrin, Paris, 2001.

C. GILAIN, « Condorcet et le calcul intégral », *Sciences à l'époque de la Révolution française – Recherches historiques*, éd. R. Rashed, Blanchard, Paris, 1988, p. 85-147 (*).

C. GILAIN, « Condorcet, les mathématiques et le Supplément à l'Encyclopédie », *Lekton*, III-1, publication de l'Université du Québec à Montréal, 1993, p. 79-92 (*).

J. L. GREENBERG, *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut – The rise of mathematical science in eighteeth-century Paris and the fall of "normal science"*, Cambridge University Press, 1995.

G. E. GRIMBERG, *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1998.

G. E. GRIMBERG, « D'Alembert et les équations différentielles aux dérivées partielles en hydrodynamique », *Analyse et Dynamique – Etudes sur l'œuvre de D'Alembert*, A. Michel et M. Paty (dir.), Laval, Les Presses de l'Université Laval, 2002, p. 259-315.

A. GUILBAUD, « La "République des Hydrodynamiciens" de 1738 jusqu'à la fin du 18e siècle », Revue *Dix-Huitième Siècle*, n° 40, PUF, Paris, 2008, p. 153-171.

A. GUILBAUD, « La loi de continuité de Jean Bernoulli à D'Alembert », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, Firenze, Unione Matematica Italiana, à paraître en 2008.

R. HAHN, « The Chair of Hydrodynamics in Paris, 1775-1791 : a Creation of Turgot », *Actes du Xe Congrès International d'Histoire des Sciences*, Paris, 1964, vol. 2, p. 751-754.

R. HAHN, *L'hydrodynamique au XVIII*[e]*, Aspects scientifiques et sociologiques*, Conférence donnée au Palais de la Découverte le 7 novembre 1964.

T. L. HANKINS, *Jean D'Alembert – Science and the Enlightenment*, Oxford, 1970.

C. HOUZEL, « Les équations aux dérivées partielles : 1740-1780 », *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'Université de Laval, 2003, p. 237-258.

I. E. IDEL'CIK, *Mémento des pertes de charge*, trad. du russe par M. Meury, Editions Eyrolles, Moscou, 1986.

G. JOUVE, *Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783) – Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions*, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1, 2007.

L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Mécanique*, trad. par C. Ligny, Editions Mir en langues étrangères, Moscou, 1960.

M. LAVRENTIEV, B. CHABAT, *Méthodes de la theorie des fonctions d'une variable complexe*, Editions Mir, Moscou, 1952.

V. LE RU, Jean Le Rond D'Alembert philosophe, Vrin, 1994.

J. LÜTZEN, « Partial differential equations », *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, éd. par I. Grattan-Guiness, Routledge, London, 1994, p. 452-469.

G. MAHEU, *La vie et l'Œuvre de Jean D'Alembert. Etude bio-bibliographique*, Paris, Ecole pratique des hautes études (VI[e] section), 1967.

G. MALTESE, *La storia di "$F = ma$". La seconda legge del moto nel XVIII secolo*, Firenze, 1992.

J. MASCART, *La vie et les travaux du Chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799) – Episodes de la vie scientifique au XVIII*[e] *siècle*, Annales de l'Université de Lyon, vol. II, Fasc. 33, Lyon, 1919.

G. K. MIKHAILOV, « Introduction to Daniel Bernoulli's Hydrodynamica », *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Hydrodynamique II, vol. V, éditions Birkhäuser, Bâle, 2002.

J.-E. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, vol. III, Paris, 1799-1802.

J. PAPPAS, « Inventaire de la correspondance de d'Alembert », *Studies on Voltaire and the Eighteenth Century*, 245, 1986, p. 131-276.

I. PASSERON, *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIII*[e] *siècle – Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, 1994.

J. C. Poggendorff, *Histoire de la physique*, trad. de E. Bibart et G. de la Quesnerie, Dunod, Paris, 1883.

R. Taton, « D'Alembert, Euler et l'Académie de Berlin », Revue *Dix-Huitième Siècle*, n° 16, PUF, 1984, p. 55-68.

J. R. Ravetz, « Vibrating strings and arbitrary fonctions », *The Logic of personal knowledge, essays presented to Michael Polanyi on his seventieth birthday*, 11th March 1961, London, 1961, p. 71-88 (*).

P. Redondi, « D'Alembert et la technologie : l'affaire du canal de Picardie », *Jean d'Alembert savant et philosophe. Portrait à plusieurs voix*, édition des archives contemporaines, Paris, 1989, p. 433-460.

B. Riemann, « Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie », *Œuvres Mathématiques*, 1898 p. 177-206 (*).

H. Rouse, S. Ince, *History of hydraulics*, New-York, 1963.

I. L. Ryhming, *Dynamique des fluides*, Presses Polytechniques Romandes, 1985

M. Rühlmann, *Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper*, Hahn, Hannover, 1880.

G. E. Smith, « Was Wrong Newton Bad Newton ? », *Wrong for the Right Reasons*, éd. par J. Z. Buchwald et A. Franklin, *Archimedes*, vol. 11, Springer, 2005, p. 127-160.

I. Szabò, *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1979.

R. Taton, Une correspondance mathématique inédite de Monge, *Revue Scientifique*, 85, p. 963-989 (*).

R. Taton, *L'Œuvre scientifique de Monge*, PUF, Paris, 1951 (*).

I. Todhunter, *A history of mathematical theories of attraction and the figure of the Earth, from the time of Newton to that of Laplace*, Macmillan, Londres, 1873.

C. Truesdell, « Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687-1765 », *Opera Omnia*, série II, vol. 12, Zürich, 1954, p. VII-CXXV.

C. Truesdell, « Editor's Introduction », *Opera Omnia*, série II, vol. 13, Zürich, 1955, p. IX-CXVIII.

C. Truesdell, « Editor's Introduction : The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788 », *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, série II, vol. 11, Zürich, 1960 (*).

C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer Verlag, New-York, 1968.

J. VIARD, I. YOUSSOUF, « Les relations entre l'élasticité et dureté dans le *Traité de Dynamique* sont-elles compatibles avec celles de l'*Encyclopédie* ? », *Revue de Synthèse*, n° 4, 1998.

I. YOUSSOUF, *Les phénomènes de choc et les principes de conservation – Débats historiques et processus d'apprentissage*, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1, 1999.

A. P. YOUSCHKEVITCH, « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX[e] siècle », *Fragment d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n° 41, 1981, p. 7-68 (*).

A. P. YOUSCHKEVITCH, « A propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions "discontinues") », *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20, 1975, p. 221-231 (*).

ANNEXES

Bibliographie relative à l'Inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert

Sources manuscrites

[1755] « Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les Mémoires de 1753 », Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften.

[1781a] « Mémoire 59 § VI. Sur la vitesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et de problèmes semblables », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 95-160.

[1781b] « Mémoire 59 § VII. Sur les cordes vibrantes », *Opuscules Mathématiques*, tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut, f. 271-334.

Sources imprimées

[1743] *Traité de dynamique*, 1re édition, Paris, 1743.

[1747] *Réflexions sur la cause générale des Vents*, Paris, 1747.

[1749a] « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration », *HAB* année 1747 (1749), p. 214-219.

[1749b] « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite », *HAB* année 1747 (1749), p. 220-249.

[*Encyc.*] *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des Métiers*, t. I-VII, Paris ; t. VIII-XVII, Neufchastel.

[1752a] « Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration », *HAB* année 1750 (1752), p. 355-360.

[1752b] *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, Paris, 1752.

[1758] *Traité de dynamique*, 2de édition, Paris, 1758.

[1761a] « Mémoire 1. Recherches sur les vibrations des cordes sonores », *Opuscules Mathématiques*, t. I, Paris, 1761, p. 1-64.

[1761b] « Mémoire 4. Réflexions sur les Loix du mouvement des fluides », *Opuscules Mathématiques*, t. I, Paris, 1761, p. 137-168.

[1767] « Sur les tautochrones », *HAB* année 1765 (1767), p. 381-413.

[1768a] « Mémoire 25. Nouvelles réflexions sur les vibrations des Cordes sonores », *Opuscules Mathématiques*, t. IV, Paris, 1768, p. 128-224.

[1768b] « Mémoire 26. Recherches de Calcul intégral », *Opuscules Mathématiques*, t. VI, Paris, 1768, p. 225-253.

[1768c] « Mémoire 30. Sur l'Equilibre des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 1-40.

[1768d] « Mémoire 31. Nouvelles réflexions sur les Loix du mouvement des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 41-67.

[1768e] « Mémoire 33. Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides », *Opuscules Mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 95-131.

[1768f] « Mémoire 34 § II. Sur la Vitesse du Son », *Opuscules Mathématiques*, t. V, Paris, 1768, p. 138-146.

[1770] « Extrait de différentes Lettres de Mr. d'Alembert à Mr. de la Grange », *HAB* année 1763 (1770), p. 235-277.

[*Sup. Panck.*]*Supplément à l'Encyclopédie*, Panckoucke, tomes I-IV, Paris, 1776-1777.

[1780a] « Mémoire 56 § I. Nouvelles réflexions sur les loix de l'équilibre des fluides », *Opuscules Mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 1-35.

[1780b] « Mémoire 57. Nouvelles Recherches sur le mouvement des Fluides dans des Vases », *Opuscules Mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 52-230, avec des appendices, p. 365-387.

[1780c] « Mémoire 58 § VI. Sur les Fonctions discontinues », *Opuscules Mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 302-308.

[1780d] « Mémoire 58 § XII. Additions aux Recherches sur la Cause des Vents », *Opuscules Mathématiques*, t. VIII, Paris, 1780, p. 327-353.

Remarque : Concernant la localisation des EDP dans les traités, mémoires ou manuscrits cités dans cet inventaire, l'absence d'un numéro de paragraphe, d'article ou de page indique que l'EDP apparaît dans l'ensemble de l'écrit concerné. Notons également que les EDP apparaissant dans le *Supplément à l'Encyclopédie* [*Sup. Panck*] apparaissent aussi dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématique.*

EDP	**Traité, mémoire ou manuscrit**	**Type (en termes modernes)**	**Remarques sur l'équation – description du problème relatif à l'équation**
Problème du fil pesant			
$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{ds} - (l-s) \cdot \frac{d^2y}{ds^2}$ ou $\frac{dp}{dt} = q - (l-s) \cdot \frac{dq}{ds}$ avec $dy = pdt + qds$	[1743, art. 110] [1758, art. 133]	Linéaires à coefficients non constants	Equation représentant la vibration d'une corde uniformément pesante suspendue par l'une de ces extrémités. Il s'agit d'une généralisation du problème du pendule composé : la corde est composée d'une infinité de masses infinitésimales reliées entre elles par des fils de longueur infinitésimale. y, s, l, et t représentent respectivement l'ordonnée verticale de la corde, l'abscisse curviligne, la longueur totale de la corde, et le temps écoulé depuis le commencement du mouvement. Dans la 1re édition du *Traité de Dynamique* [1743], D'Alembert se contente d'établir l'équation (c'est d'ailleurs la 1ère de ses EDP). Il s'attache à sa résolution dans la 2de édition [1758], et tente successivement, pour ce faire, la méthode de séparation des variables et le principe de superposition des solutions.
Réflexions sur la cause générale des vents			
$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = \frac{d\beta}{ds} \\ \nu\frac{d\beta}{du} = \rho\frac{d\alpha}{ds} + \Phi(u,s) \end{cases}$ où $\Phi(u,s) = \frac{dA(u,s)}{ds} - \frac{d\Gamma(u,s)}{du}$	[1747, art. 87]	Linéaire à coefficients constants	Les inconnues sont les fonctions α et β, $\Phi(u,s)$ étant fixée. Le présent système peut être écrit sous la forme d'une unique EDP : $$\nu\frac{d^2z}{du^2} - \rho\frac{d^2z}{ds^2} = \Phi(u,s).$$
$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = \frac{d\beta}{ds} \\ \rho\frac{d\alpha}{ds} + p\frac{d\beta}{ds} = \gamma\frac{d\beta}{du} + m\frac{d\alpha}{du} + \Phi(u,s) \end{cases}$	[1747, art. 89]	Linéaire à coefficients constants	Mêmes inconnues, et même donnée $\Phi(u,s)$ qu'à la ligne précédente. Le système se ramène dans ce cas à l'EDP : $$\nu\frac{d^2z}{du^2} + (m-p)\frac{d^2z}{duds} - \rho\frac{d^2z}{ds^2} + \Phi(u,s) = 0.$$

$\frac{d^2q}{ds^2}+b\frac{d^2q}{dt^2}+e\frac{dq}{dt}+a+T\cdot S+T'\cdot S'=0$	[1780d, § XII, art. 51]	Linéaire à coefficients constants	L'inconnue est $q(s,t)$. b, e, a sont des constantes, et T, S, T', S' des fonctions données de t et de s
Cordes vibrantes et propagation du son			
$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ ou $\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$	[1749a] [1749b] [1752a] [1755] (ms) [1770] [1761a] [1768a] [1768f] [1781a] (ms) [1781b] (ms) [*Sup. Panck.*, tome I, art. « Cordes (vibration des) »]	Equation des ondes. Linéaire à coefficients constants, hyperbolique	Equation initialement présentée comme étant celle des cordes vibrantes, et utilisée dans les *Opuscules Mathématiques* pour représenter la propagation du son dans un tube. $y(x,t)$ représente l'ordonnée du point sur la corde ou l'amplitude des vibrations à l'abscisse x et à l'instant t. D'Alembert pratique une résolution explicite dans les deux cas.
$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{X(x)}\frac{d^2y}{dx^2}$	[1761a, art. III]	Linéaire à coefficients non constants	Cordes vibrantes à épaisseur variable $X(x)$. D'Alembert en propose une solution sous forme de séries de fonctions.
$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{d^2}{dx^2}$ et $\frac{d^2}{dt^2}=-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2y}{dx^2}$	[1761a, art. IV]	Linéaires elliptiques.	Lame vibrante. La résolution est inspirée de celle de l'équation des ondes.
$\frac{d^ny}{dt^2dx^{n-2}}=\frac{d^ny}{dx^n}$	[1768a, 2e suppl., art. 19 et suiv.]	Linéaire à coefficients constants.	Equation déduite de l'équation des ondes.
$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}-R\frac{dy}{dt}$	[1768a, 3e suppl., art. 3-6]	Linéaire à coefficients constants, hyperbolique	Equation envisagée pour expliquer la cessation des vibrations (cette tentative sera d'ailleurs un échec). D'Alembert en recherche les solutions sous la forme de série de fonctions $T(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$.
$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}-2\xi(x)$	[1768a, 3e suppl., art. 13 et suiv.]	Linéaire à coefficients constants, hyperbolique	Equation envisagée pour expliquer la cessation des vibrations. Elle permet d'atteindre cet objectif selon D'Alembert, qui en recherche des solutions explicites.

Mouvement et résistance des fluides			
$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x,z) = \dfrac{dq}{dz}(x,z) \\ \dfrac{dp}{dz}(x,z) = -\dfrac{dq}{dx}(x,z) - \dfrac{p}{z} \end{cases}$	[1752b]	Linéaire à coefficients non constants	Ce système d'équations se rapporte à l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible et homogène autour d'un corps solide immergé. Les variables en jeu au sein de ce système, $p(x,z)$ et $q(x,z)$, résultent de la préalable séparation des variables spatiale et temporelle au sein des composantes horizontale et verticale $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse, de telle sorte que : $$\begin{cases} P(t,x,z) = \theta(t)\cdot p(x,z) \\ Q(t,x,z) = \theta(t)\cdot q(x,z) \end{cases}$$
$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x,z) = \dfrac{dq}{dz}(x,z) \\ \dfrac{dp}{dz}(x,z) = -\dfrac{dq}{dx}(x,z) \end{cases}$	[1752b] [1761b] [*Encyc.*, art. « Hydrodynamique »] [1768d] [1768e] [1780b, § VII, art. 14 ; appendice, p. 373] [*Sup. Panck.*, tome II, art. « Hydrodynamique »]	Linéaire à coefficients constants	Ces équations se rapportent à l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible et homogène dans un vase vertical ouvert à ses deux extrémités. Les variables en jeu au sein de ce système $p(x,z)$ et $q(x,z)$, ont la même signification que dans le problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un corps immergé (voir ligne *supra*). Discussion sur la possibilité de résolution analytique de ce système d'équations dans [1761b], [1768c], [1768d], [1780b, § VII].
$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x,z) = \dfrac{dq}{dz}(x,z) \\ q\dfrac{d^2(p-q)}{dx^2}(x,z) + p\dfrac{d^2(p-q)}{dxdz}(x,z) = 0 \end{cases}$	[1761b, art. X-XI]	Non linéaire	Ces équations se rapportent à l'écoulement rotationnel d'un fluide incompressible et homogène dans un vase ouvert en ses deux extrémités.
$-\dfrac{d^3\omega}{dx^3}\cdot\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d^3\omega}{dx^2dz}\cdot\dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d^3\omega}{dz^3}\cdot\dfrac{d\omega}{dx} - \dfrac{d^3\omega}{dz^2dx}\cdot\dfrac{d\omega}{dx} = 0$	[1761b, § XII]	Non linéaire	L'équation fait intervenir ce que nous appelons aujourd'hui la fonction courant ω, découverte par D'Alembert dans ce mémoire, et définie par les deux relations $p(x,z) = \dfrac{d\omega}{dx}$ et $q(x,z) = -\dfrac{d\omega}{dz}$.
$\dfrac{d^2\omega}{dx^2} + \dfrac{d^2\omega}{dz^2} = 0$	[1768d, § II, art. 6]	Linéaire à coefficients constants	D'Alembert obtient ici l'équation d'annulation du Laplacien de la fonction courant ω dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible et homogène dans un vase ouvert en ses deux extrémités.

Equilibre des fluides			
$\frac{dQ}{dx}=\frac{dR}{dy}$ ou $\frac{d(\delta Q)}{dx}=\frac{d(\delta R)}{dy}$	[1752b, art. 19, art. 161 et suiv.] [1768c, art. 21-42] [1780a]	Linéaire à coefficients constants. Linéaire à coefficients non constants.	Equation d'équilibre d'une particule de fluide incompressible dans le cas de la 1ère équation, élastique de densité δ dans le cas de la 2de, soumise à une force de composantes R et Q suivant x et y. La 1ère équation est découverte par Clairaut dans *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris 1743. La 2de l'est par D'Alembert [1752b, art. 19 et 161].
$\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\frac{RdQ}{d\zeta}-\frac{QdR}{d\zeta}=0$	[1752b, art. 164] [1780a, art. 34]	Linéaire à coefficients non constants	D'Alembert examine le problème de la figure de la Terre, en supposant cette dernière comme étant composée d'un ensemble de couches concentriques (appelées « couches de niveau ») de fluide en équilibre. Cette EDP représente l'équation d'équilibre d'une particule de fluide incompressible ($\delta=$ cste), dans l'hypothèse où toutes les couches possèdent la même densité δ. Les composantes R et Q suivant x et y (voir ligne *supra*) dépendent ici d'une troisième variable ζ, constante pour chaque couche, mais variant d'une couche de fluide à une autre.
$\frac{d\delta}{dr}\cdot\frac{KdN}{dz}-\frac{d(Mr\delta)}{dr}=\frac{\delta d\Delta}{dz}$	[1768c, art. 14]	Non linéaire	Cette EDP correspond à l'équation nécessaire pour l'équilibre des couches, repérées en coordonnées cylindriques par le rayon r et l'angle z (la densité δ est supposée constante dans chaque couche, mais variable d'une couche à une autre). Les inconnues K, M, N et Δ correspondent à des fonctions de r et de z : elles forment les expressions des composantes radiale et normale de la force s'appliquant sur la particule de fluide considérée.
$\frac{d\delta}{dr}\cdot\frac{KdN}{dz}-\frac{d(Mr\delta)}{dr}=\frac{d(\Delta\delta)}{dz}+\frac{d\delta}{dz}\cdot\frac{d(KN)}{dr}$	[1768c, art. 17]	Non linéaire	Même équation que la ligne précédente, dans le cas où la densité δ est également supposée varier à l'intérieur de chaque couche de fluide.
$\frac{dR}{dy}+\frac{\theta dR}{dz}=\frac{dQ}{dx}+\frac{\omega dQ}{dz}$ avec $dz=\theta dy+\omega dx$	[1780a, art. 31]	Linéaire à coefficients non constants	La situation est la même que deux lignes *supra*, si ce n'est que la troisième variable z (équivalente à ζ) est ici supposée vérifier $dz=\theta dy+\omega dx$.

Mémoires purement mathématiques			
$M\dfrac{d^2q}{dxdt}+N\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{d^2q}{dx^2}=0$	[1768b, art. 6]	Linéaire à coefficients constants	Equation, d'inconnue $q(x,t)$, rencontrée en tentant de rendre deux différentielles complètes. Dans ce mémoire [1768b] dédié à l'étude des EDP sous un angle exclusivement mathématique, D'Alembert expose essentiellement des méthodes permettant de passer d'une forme différentielle complète à une EDP du 1er ordre. Il n'y donne pas de solutions explicites, quoiqu'il s'intéresse ponctuellement à l'existence de solutions et à leur nombre. Lorsqu'il amorce une résolution, c'est par la méthode de séparation des variables.
$\dfrac{d^3q}{dx^3}+F\dfrac{d^3q}{dxdt^2}+G\dfrac{d^3q}{dx^2dt}+H\dfrac{d^3q}{dt^3}=0$	[1768b, art. 7]	Linéaire à coefficients constants	L'inconnue est $q(x,t)$.
$\dfrac{dq}{dx}+\xi(x,z)\dfrac{dq}{dz}=0$ et $\dfrac{dq}{dx}+\xi(x,z)\dfrac{dq}{dz}+\omega(x,z)=0$	[1768b, art. 8, 18, et 21]	Linéaire à coefficients non constants	L'inconnue est $q(x,t)$.
$\dfrac{dq}{dx}+A\dfrac{dq}{dt}+Cq=0$	[1768b, art. 17]	Linéaire à coefficients constants	Equation d'inconnue $q(x,t)$, également envisagée avec des coefficients non constants à l'art. 22.
$\dfrac{d^2q}{dx^2}+\xi(x,t)\dfrac{dq}{dx}+\zeta(x,t)\dfrac{dq}{dt}+k(x,t)\dfrac{d^2q}{dt^2}+\lambda(x,t)q=0$	[1768b, art. 25 et suiv.]	Linéaire, étude de cas particuliers dont coefficients constants	Equation d'inconnue $q(x,t)$. D'Alembert en aborde la résolution par la méthode de séparation des variables. Il lui rajoute un second membre à partir de l'art. 30.
$\dfrac{dz}{dx}+a\dfrac{dz}{dy}=0$	[1780c]	Equation d'advection. Linéaire à coefficients constants.	Equation d'inconnue $z(x,y)$. Ce mémoire [1780c] est un mémoire de réflexion sur les fonctions « discontinues ».
Recherche de la courbe tautochrone			
$p\mu+\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{u\nu dp}{du}+\rho=0$	[1767]	Non linéaire	Nous ne faisons figurer que la principale EDP de ce mémoire. Les autres EDP en découlent et restent du premier ordre. x représente la distance à parcourir, u la vitesse et p la force accélératrice.

Extrait* de la traduction française de l'*Hydraulique* de J. Bernoulli réalisée par B. Bru et A. Guilbaud en 2006 et 2007 à partir de l'édition latine originale :

Johannis Bernoulli, « Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732 », *Johannis Bernoulli Opera Omnia*, tome IV, Bousquet, Lausanne et Genève, 1742, p. 387-493.

JEAN BERNOULLI

HYDRAULIQUE

Aujourd'hui pour la première fois découverte et directement démontrée à partir de fondements purement mécaniques.

Année 1732.

LÉONARD EULER,
MATHÉMATICIEN TRÈS PÉNÉTRANT,
À L'AUTEUR.

Déjà auparavant à la vérité, je faisais très grand cas de Ta Théorie des eaux courantes, à cause de la Méthode juste et naturelle, que Toi, Homme très excellent*, le premier et le seul, tu as découverte pour traiter efficacement les problèmes de ce genre. Aujourd'hui véritablement, ayant examiné la suite de tes méditations, j'ai été absolument stupéfait de l'application très heureuse de tes principes à la résolution des problèmes les plus ardus, cette invention aussi utile que profonde rendra éternellement ton nom très célèbre auprès de la postérité. Quant à la question très obscure et très cachée de la pression que les parois des vases subissent du fait des eaux qui s'y écoulent, tu l'as*

* Cet extrait, correspondant aux p. 387 à 410 de l'édition originale, de notre traduction du latin vers le français de l'*Hydraulique* de Jean Bernoulli a été publié dans l'ouvrage de M. Blay, *La science du mouvement des eaux de Torricelli à Lagrange*, Belin, Paris, 2007, p. 210-225.

démêlée si distinctement et si nettement, qu'il ne reste plus rien à désirer sur ce point si délicat. En effet personne n'a abordé cette question, excepté Ton très célèbre Fils, qui n'a défini la pression que de façon assez indirecte, comme si la totalité du mouvement avait atteint son état permanent. Alors que Toi, par une méthode très naturelle, Tu as déterminé de façon très précise la pression de l'eau en tout état, invention très digne de Toi dont je Te félicite de tout coeur, Homme très excellent*, et je Te sais infiniment gré de me l'avoir communiquée.*

DISSERTATION HYDRAULIQUE

Du mouvement des eaux s'écoulant dans des vases ou des canaux de figure quelconque.

PREFACE

L'HYDROSTATIQUE, qui traite des eaux stagnantes dans des vases fermés au fond, a ses lois démontrées, et ses principes déduits rationnellement ; d'où les résultats et les phénomènes sont expliqués distinctement et clairement : de sorte que, sur cette science, on ne peut guère désirer davantage. Il en est autrement en *Hydraulique*, où il s'agit non seulement de la chute des eaux et de leurs pressions, mais encore du mouvement, qui en résulte, si les eaux peuvent s'écouler par une ouverture donnée, ou si elles sont entraînées à passer d'un tube dans un autre de largeur différente, et d'autres effets admirables, qui accompagnent leur mouvement, doivent être déterminés démonstrativement. Assurément cette science, appelée communément *Hydraulique*, est tout à fait ardue et n'a pas été à ce jour ramenée aux lois et aux règles mécaniques. Quoique les auteurs aient écrit sur ce sujet, soit ils s'appuient sur les seules expériences, soit sur des raisons en tout point incertaines, et ayant peu de solidité.

Dans le Traité Hydrodynamique, que mon fils(*) a fait paraître, il y a peu de temps, il a abordé cette matière sous de plus heureux auspices, mais il s'est appuyé sur un fondement indirect, la conservation des forces vives, sans doute très vraisemblable et démontrée par moi, mais qui n'est cependant pas acceptée par tous les philosophes. Moi le premier, j'ai introduit cette hypothèse en dynamique des solides [après que HUYGENS eut utilisé le même principe pour déterminer le centre d'oscillation] et j'ai montré qu'à partir de cette hypothèse, on obtient constamment la même solution que celle donnée par les principes dynamiques ordinaires admis par tous les géomètres(†) ; et sans doute cette conformité permanente avec des solutions obtenues par une autre voie suffirait seule à combattre l'obstination des adversaires. Mais personne n'a encore donné une méthode directe permettant a priori et par les seuls

---

(*) *Danielis* BERNOULLI Hydrodynamica, sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii, *Argentorati*, 1738.

(†) Voir les Numéros CXXXV, CXXXVI, CXL.

principes dynamiques de traiter du mouvement naturel des eaux s'échappant de vases par des orifices ou s'écoulant dans des canaux de largeurs variables.

Je me suis demandé pourquoi il y a tant de difficulté à appliquer avec succès les principes dynamiques dans le cas des fluides, contrairement à ce qui se passe pour les solides ; en étudiant la chose de plus près, j'ai découvert la véritable origine de la difficulté, qui à mon avis consiste en ce qu'une certaine partie des forces de pression consacrée à la formation d'une *gorge* [c'est ainsi que je nomme ce phénomène ignoré des autres auteurs] avait été négligée et considérée jusqu'alors comme de nulle importance, il n'y a pas d'autre cause que la formation d'une gorge à partir d'une quantité très petite de fluide, et infiniment petite pour ainsi dire, ainsi qu'on l'observe lorsqu'un fluide passe d'un endroit plus large à un plus étroit, ou au contraire d'un plus étroit vers un plus large. Dans le premier cas, la gorge se forme avant le passage, dans le second cas après.

Je démontrerai que pour former une gorge, sa masse serait-elle aussi petite qu'on voudra, il faut néanmoins mettre en œuvre une force de pression qui n'est pas insensible, ni infiniment petite, mais finie et déterminée, et donc qu'on ne saurait négliger et qui est tout à fait digne d'être soumise au calcul. Car cette force requise à cet effet, ce qui peut paraître étonnant, ne dépend pas vraiment de l'importance de la gorge, qui peut être conçue plus grande ou plus petite, pourvu qu'elle soit considérée comme fort petite ; elle emploie toujours pour sa formation la même partie des forces de pression, toutes les circonstances restant identiques.

Ce qu'est une gorge et de quelle façon elle se forme, nous le comprendrons de la nature même de la chose ; et il apparaîtra en même temps que la formation d'une gorge s'effectue sans dépense sensible de forces vives, relativement à la quantité qui se trouve dans la masse totale de l'eau. On peut ainsi commencer à voir pourquoi la théorie des forces vives s'applique totalement et sans erreur en sciences Hydrauliques ; même si ceux qui usent de cette théorie ne traitent pas des gorges, dès lors qu'ils n'ignorent plus l'existence d'une gorge, ils voient que celle-ci ne déroge en rien à la conservation des forces vives ; ils ne peuvent affirmer autre chose que leur conviction de la vérité de la chose parfaitement et scientifiquement.

Je partage ce discours en deux parties : dans la première, je considérerai les eaux courantes s'écoulant à travers des vases cylindriques ou prismatiques, qu'ils soient simples ou composés de plusieurs parties, comme sont les canaux formés de divers tubes de diamètres différents, ou bien complétés par des siphons cylindriques. Dans l'autre partie, j'examinerai les choses dans leur plus grande généralité, quelles que soient les formes, tant régulières qu'irrégulière, vases percés, canaux et tubes ajustés les uns aux autres.

Pour une compréhension plus claire des choses, je commence par une suite de définitions et de lemmes, dont la vérité est manifeste tant en Dynamique qu'en Hydrostatique.

I. Une force *accélératrice* uniforme est une force qui imprime à un certain corps une vitesse donnée dans un temps donné.

II. Une force *motrice* est une force qui, lorsqu'elle agit sur un corps au repos, le met en mouvement, ou bien, si le corps est déjà en mouvement, peut ou bien l'accélérer ou bien le retarder ou bien modifier sa direction.

III. Les forces motrices sont en raison composée du rapport des masses et des forces accélératrices. Ainsi par exemple, pour mouvoir une masse double avec une force accélératrice triple, ou bien, ce qui est la même chose, pour mouvoir une masse triple, avec une force accélératrice double, une force motrice sextuple est requise.

IV. La force motrice divisée par la masse donne la force accélératrice ; divisée par celle-ci elle donne la masse.

V. La gravité absolue g, ou la cause de la gravité, quelle qu'elle soit, est une force accélératrice, qui lorsqu'elle anime la masse déterminée m d'un corps, produit sur celui-ci une force motrice $= gm$. On peut la séparer par la pensée du corps, et considérer ainsi qu'elle agit de façon extrinsèque au corps : nous concevons assurément que ce même corps, privé de gravité, doit être accéléré par une force motrice externe gm suivant la même loi par laquelle il est accéléré naturellement. Cette force gm, en tant qu'existant en dehors de la matière, il est permis de l'appeler force motrice *immatérielle* : et si, transportée en un autre lieu, elle agit sur une autre masse M, celle-ci sera accélérée par une force accélératrice $= gm : M$.

VI. Une force motrice immatérielle et invariable, agissant librement sur un corps, l'accélère de la même façon, que celui-ci soit au repos, ou déjà en mouvement : cette force accompagnant en effet toujours le corps, ils n'ont entre eux nul mouvement relatif, et la force motrice agit ainsi de la même façon sur le mouvement du corps, comme si chacun des deux était tout à fait au repos. C'est la raison pour laquelle les corps graves, en tombant, sont continuellement et uniformément accélérés au cours du temps ; en supposant évidemment que l'intensité de la force accélératrice ne change pas pendant qu'elle agit, c'est-à-dire, qu'elle n'augmente ni ne diminue ; de même qu'effectivement la force de gravité conserve continuellement la même intensité, dans la chute d'un corps grave, comme si celui-ci était au début de sa chute.

VII. On appelle *intensité* d'une force motrice invariable la grandeur, selon laquelle, dans un corps à mouvoir, plus ou moins de force accélératrice est produit. Ainsi la gravité, dans un corps en chute verticale, a une intensité plus grande que celle produite dans le même corps descendant sur un plan incliné ; dans le premier cas, en effet, la force accélératrice produite est plus grande que dans le second, mais, dans l'un et l'autre cas, la gravité est invariable.

VIII. Une *force motrice variable* est une force dont l'intensité varie au cours de son action. Ainsi par exemple, la force de tension d'un ressort a une intensité plus grande au début de sa détente, elle imprime donc au corps qu'elle meut une force accélératrice plus grande au début qu'au cours de sa détente. D'où résultent les règles suivantes : Soit x l'espace parcouru par un corps, m la masse du corps propulsé, p la force motrice à la fin de l'espace parcouru, v la vitesse acquise et t le temps relatif à x, donc $dt = \dfrac{dx}{v}$; on aura $\dfrac{pdt}{m}$, ou $\dfrac{pdx}{mv} = dv$, et ainsi $\int pdx = \frac{1}{2}mvv$, ce qui est bien connu.

IX. Les parties inférieures de l'eau contenue dans un vase quelconque sont pressées par la masse d'eau située au dessus, en fonction de la seule profondeur, quelque figure qu'ait le vase ; c'est à dire, si la masse d'eau est divisée par la pensée en tranches horizontales d'épaisseur infiniment petite, chacune de ces tranches est pressée par quantité égale à celle obtenue en plaçant au dessus d'elle un cylindre liquide de la même hauteur que celle qui correspond dans le vase à la profondeur de la tranche en question.

X. De ceci on est en droit de conclure : si les sections des tranches, de même épaisseur infiniment petite, sont égales à m, m', m'', m''', &c. et par conséquent que leurs poids propres sont de même m, m', m'', m''', &c. les gravités pourront être séparées des tranches par abstraction de l'esprit ; de sorte que leur matière reste sans poids : et si à la place des gravités enlevées, nous en substituons d'autres en même nombre, qui pressent ensemble la surface supérieure de l'eau, en poursuivant assurément cette analogie à toutes les tranches, de façon que la section d'une tranche quelconque soit à celle de la surface supérieure, comme la gravité propre de la tranche est à la gravité à substituer : alors une même pression agira sur toutes les tranches, comme si ces dernières restaient dans leur état naturel.

XI. J'appelle *translation*, cette substitution mentale. Pour être précis, posons qu'une tranche quelconque parmi les plus basses a une section égale à m, sa gravité, ou son poids propre à π ; la section de la tranche supérieure étant égale à h, la *gravité translatée* à la surface supérieure sera égale à $\frac{h}{m}\pi$, gravité qui, avec toutes les gravités restantes ainsi *translatées*, constitue la force motrice immatérielle totale, qui presse l'eau dans le vase, de la même façon que cela se passe dans le nature.

AVERTISSEMENT

Il convient, avant de commencer, d'avertir le lecteur que tout au long de ce traité sur le mouvement des eaux courantes, je fais abstraction de la considération des circonstances particulières et accidentelles, qui peuvent altérer le mouvement déterminé par les règles. De telles circonstances sont la fluidité imparfaite des eaux, leur adhérence et leur frottement sur les parois des vases, la minceur exagérée des tubes, l'étroitesse des orifices ou des ouvertures, la consistance des fluides particuliers, à cause de laquelle ceux-ci s'écoulent difficilement, et d'autres circonstances du même genre auxquelles je ne pense pas.

Je voudrais également qu'on note ceci, qu'il n'est pas absolument nécessaire de choisir des tranches d'eaux en position horizontale : on peut les imaginer, si cela s'avère plus commode, perpendiculaires à la direction du mouvement des eaux. Ainsi par exemple lorsque l'eau passe d'un vase plus large à un tube horizontal plus étroit, dont la surface de l'ouverture ou de la lumière se trouve dans un plan vertical et orthogonal au côté du tube ; il est préférable d'imaginer l'eau contenue dans le tube divisée en tranches verticales, et parallèles au plan de l'orifice ; d'autant que la nature elle-même semble adopter cette disposition : nous voyons en effet que la colonne liquide dans un tube quelconque, de diamètre n'excédant pas beaucoup deux lignes, a ses deux surfaces extrêmes disposées perpendiculairement aux parois du tube, que le tube lui même soit oblique ou tout à fait horizontal. La ligne joignant les centres de gravité des tranches, est soit une ligne droite dans le cas de tubes droits, soit courbe lorsque les tubes sont coudés, nous l'appelons la *ligne centrique*, ou simplement la *centrique* : toutes les tranches, considérées comme des masses ponctuelles placées en leurs centres de gravité, sont supposées avoir le mouvement qui affecte les tranches elles-mêmes.

PREMIÈRE PARTIE DE LA DISSERTATION HYDRAULIQUE,

Où il s'agit du mouvement des eaux à travers un vase et des canaux cylindriques, formés de plusieurs tubes cylindriques ajustés successivement les uns aux autres.

I.

Qu'on se donne d'abord un canal ABCDEF (Fig. 1), composé de deux tubes cylindriques, de sections différentes, AGDE et GBCF ; le fond GD a une ouverture GF, par laquelle il communique avec le tube plus étroit BF. On suppose que tout le canal BE est rempli d'un liquide homogène et sans gravité propre, mais tel qu'une partie de l'orifice AE soit pressée par une force motrice donnée égale à p, qui, s'exerçant également, s'étend à toute la surface du liquide AE ; on demande quelle est la loi de l'accélération, qui pousse le liquide à travers le canal ? Je suppose également que le canal reste toujours plein de liquide, ce qu'on doit comprendre en considérant qu'une nouvelle masse de liquide est fournie constamment, introduite à tout moment à la même vitesse dans le tube GE, pour compenser ce qui sort par l'autre orifice GF dans le tube GC, et s'en écoule vers l'extérieur par l'ouverture BC.

II.

Des principes hydrostatiques il résulte que la force motrice immatérielle p, par laquelle la surface du fluide AE est pressée, se propage en un instant vers la surface GF du liquide contenu dans le tube BF ; et ceci que le fluide soit au repos dans tout le canal ou qu'il s'écoule ; pourvu que le canal reste plein.

III.

Lorsque le liquide passe d'un tube à l'autre, sa vitesse varie évidemment en raison inverse de leur section ; or nul changement n'est subit, mais successif et graduel, passant par tous les états intermédiaires possibles du plus petit au plus grand, ou du plus grand au plus petit.

IV.

De là, lorsqu'un liquide s'écoule suivant un mouvement parallèle, de sorte que partout à chaque instant la même vitesse anime toutes les parties (d'une même tranche), dans la direction de AE vers GD ; avant que les parties proches de GF parviennent à l'orifice GF, il faut qu'au moins à la distance très petite HG, elles commencent à accélérer, et poursuivent leur chemin en accélérant, jusqu'à ce qu'à l'entrée GF, elles aient acquis la vitesse du liquide qui s'écoule dans le tube BF suivant un mouvement pareillement parallèle, et commun à toutes ses parties.

V.

Il se forme ainsi, sur la petite largeur HG, une sorte de gorge IFGH, se resserrant du tube large au tube étroit, par lequel le liquide, accéléré de façon continue mais cependant graduelle, doit passer, une petite portion très minime du liquide (qui remplit l'espace IFD) restant perpétuellement au repos.

VI.

Soit IMF la courbe de nature quelconque, qui limite la gorge, et il n'est en effet pas nécessaire de supposer qu'elle soit de forme déterminée ; je démontrerai bientôt qu'il faut toujours la même force motrice, pour chasser le fluide par la gorge, quelle que soit la longueur HG, pourvu qu'elle soit infiniment petite, et de quelque nature que soit la ligne IMF, qui relie les extrémités I et F.

VII.

Que personne ne pense que cette force motrice [qui donc pousse en avant à travers la gorge une portion de liquide très petite, et même infiniment petite] doit être elle-même infiniment petite, et donc qu'elle peut être négligée. Cette force motrice est en effet d'intensité finie ; parce que, si une quantité de matière en mouvement est infiniment petite, d'un autre côté, la force accélératrice doit être infiniment grande, et cela sans doute, pour que pendant le temps infiniment petit où le liquide parcourre l'espace HG, un changement fini dans sa vitesse puisse cependant se produire, et qu'ainsi la vitesse en H soit à celle qui est en G, comme GF est à HI.

VIII.

L'oubli de cette force motrice, comme si elle n'était d'aucune importance, est la raison pour laquelle personne, à ce jour, n'a pu donner, à partir des principes statiques et purement mécaniques, les lois des liquides s'écoulant à travers des canaux non uniformes ; tous ceux qui ont entrepris de déterminer ces lois exactement ont recouru, en suivant mon exemple, au principe des forces vives, qu'ils n'auraient sans doute jamais eu l'idée d'appliquer à cette affaire dans le cas des solides comme dans celui des fluides, s'ils ne m'avaient pas eu pour les précéder, moi qui, le premier, leur ai appris à se servir de la conservation des forces vives. Mais moi-même assez insatisfait de cette méthode indirecte, puisque les fondements de la théorie de ces forces ne sont pas encore admis par beaucoup, je n'ai eu de cesse de chercher une méthode directe, qui soit appuyée uniquement sur les principes dynamiques niés par personne ; jusqu'à ce qu'enfin, après une méditation un peu plus longue, un travail réalisé pendant l'année 1729, j'ai vu que le pivot de toute la chose résidait dans la considération de la gorge, remarquée de personne auparavant. Maintenant donc ma découverte, que j'avais expliquée à quelques amis en privé, je prends la décision de la communiquer publiquement. La formation de la gorge étant à présent expliquée, il est loisible de poursuivre mon projet, avec toute la clarté possible.

IX.

Considérons l'abscisse $HL = t$, l'ordonnée $LM = y$, et l'élément de la première L$l = dt$, et disons que la section du tube HE est AE ou HI $= h$, que celle du tube GC est BC ou GF $= m$, que la vitesse du liquide dans le tube GC $= v$, et donc que la vitesse du liquide dans le tube HE sera $\frac{m}{h}v$; les vitesses sont en effet inversement proportionnelles aux sections : pour la même raison, en chaque endroit de la gorge la vitesse du fluide LMml sera $\frac{m}{y}v$, que nous notons u. Soit donc γ la force accélératrice qui anime la tranche de fluide LM ; on aura, d'après la nature de l'accélération, $\gamma dt = udu$, d'où $\gamma ydt = yudu$, c'est à dire que la force agissant sur la tranche de fluide LMml est égale à $yudu$. Quant à cette force motrice, déployée sur toute la surface AE, qui, comme indiqué, doit être dans le rapport de LM à HI, ou de y à h, et ainsi de $yudu$ à $hudu$, elle sera égale à $hudu$ (c'est à dire au translaté de $yudu$), force motrice particulière au tube HE, qui peut engendrer la force motrice $yudu$ dans la tranche LMml de la gorge ; et en intégrant sur toute la gorge on obtiendra $\frac{1}{2}h\left(vv - \frac{mm}{hh}vv\right)$ ou $\frac{hh-mm}{2h}vv$, qui désigne la force motrice requise dans le tube HE pour uniquement produire dans la gorge l'accélération nécessaire au changement de vitesse de la plus petite à la plus grande, afin que le liquide passe dans le tube plus étroit GC.

Corollaire I.

D'où il résulte que la nature de la courbe IMF, comme la largeur de la gorge HG, n'affectent pas la détermination de la force motrice qui engendre le mouvement de la gorge. Les sections extrêmes HI et GF étant en effet données, soient h et m, et la vitesse v, on aura toujours une force motrice dans le tube HE égale à $\frac{hh-mm}{2h}vv$, pour engendrer le mouvement dans la gorge.

Corollaire II.

Si la vitesse v d'un liquide s'écoulant continuellement dans le tube BF reste toujours constante, il est évident que la vitesse dans l'autre tube HE reste constante, et donc que la force motrice, ou la pression p, n'apporte rien de plus au mouvement accéléré dans l'autre tube ; d'où il est clair que toute cette force p est uniquement affectée à la formation de la gorge, et à sa conservation dans le même état ; on aura pour cette raison $p = \frac{hh-mm}{2h}vv$.

Corollaire III.

Imaginons que le tube HE, ou GE, soit dressé verticalement comme un vase cylindrique, et communique avec le tube horizontal GC, et que la force p soit égale au poids de la colonne de liquide contenu dans GE, de sorte que (en notant g la force accélératrice naturelle des graves, et GA ou HA $=$ a) on ait $p = gah$ égal au poids du liquide contenu dans GE ; d'où $gha = \frac{hh-mm}{2h}vv$. Mais comme v est déterminé par la hauteur verticale z, nécessaire pour qu'un corps grave en chute libre acquière cette vitesse v, nous devons avoir $gdz = vdv$, d'où $gz = \frac{1}{2}vv$; remplaçant alors gz par $\frac{1}{2}vv$, nous obtenons $gha = \frac{hh-mm}{h} \times gz$; d'où l'on tire $z = \frac{hh}{hh-mm}a$.

X.

Théorème.

Soit (Fig. 2) un vase cylindrique AGFE dressé verticalement, dont le fond *est ajusté à un tube horizontal cylindrique FB ouvert : supposons qu'aussi bien le vase que le tube soient remplis d'eau courante, de sorte qu'il soit introduit par AE autant d'eau, à la même vitesse que l'eau dans le vase, qu'il en sort par l'orifice BC. Je dis que la vitesse de l'eau sortante (si celle-ci part du repos) tend très rapidement vers la vitesse acquise par un corps grave chutant librement de la hauteur* $= \dfrac{hh}{hh - mm} a$.

Dont la vérité résulte du *Corollaire* 3 précédent.

Corollaire I.

D'où si l'ouverture BC est assez petite, par rapport à la section du vase AE, et donc si m peut être négligé devant h, on aura $z = a$; c'est-à-dire que la vitesse de l'eau sortant du tube est égale à celle acquise par un corps grave tombant en chute libre depuis la hauteur EF ; ce qui est un théorème bien connu ; mais n'a jamais été démontré encore par les principes dynamiques surtout si le tube adapté BF est présent : puisque l'on croyait auparavant que le théorème était seulement valable pour l'ouverture en F supposée petite.

Corollaire II.

Plus l'ouverture BC est grande par rapport à la section du vase AE, plus grande est la vitesse maximale de l'eau sortante ; en effet m étant augmentée, la valeur de la fraction $\dfrac{hh}{hh - mm}$ est augmentée jusqu'à ce que, arrivant à $m = h$, la vitesse maximale devienne infinie ; ce qui est vrai ou résulte aussi de ceci : puisque maintenant le vase et le tube sont de même section, et forment un tube continu recourbé ; par conséquent la force du poids de l'eau, dans la partie AF toujours pleine, accélère continuellement la masse liquide totale jusqu'à ce qu'enfin sa vitesse, au bout d'un temps infini, soit elle-même infinie. Car en posant la longueur du tube FC égale à b, la masse de toute l'eau dans le tube recourbé AGC, sera égale à $ha + hb$; et elle ne sera pas accélérée autrement, qu'un corps solide animé par une force accélératrice $\dfrac{gha}{ha + hb} = \dfrac{ga}{a + b}$; un tel corps assurément, chutant pendant un temps infini, acquièrerait une vitesse infinie.

Corollaire III.

Si m est plus grand que h, c'est à dire si le tube horizontal est plus large que le vase vertical ; la vitesse maximale n'ait jamais déterminée, même pour un temps infini : en effet $\frac{hh}{hh - mm}$ devient négatif ; pour preuve que, l'écoulement se poursuivant indéfiniment, l'accélération de l'eau sortante ne cessera pas de croître. Dans ce cas en effet il se produira dans le tube une gorge inverse, tournée vers l'orifice BC, qui, comme il apparaîtra dans la suite, a une nature telle qu'elle accroîtra la force motrice plutôt qu'elle la diminuera, en même temps qu'elle sera comme soulevée sous l'effet de la pression venant de l'arrière, et l'eau dans le vase pourra descendre plus librement.

Scholie.

Jusqu'ici nous avons considéré un vase et un tube constamment remplis d'eau, et une eau s'écoulant à sa vitesse la plus grande, donc à vitesse régulière ou uniforme : de sorte que nulle force motrice supplémentaire n'est requise pour accélérer l'eau, ni dans le vase, ni dans le tube ; mais que toute la force motrice p est employée à maintenir la gorge, qui se forme avant la sortie, de la partie la plus large vers la plus étroite. Nous considérerons maintenant que la vitesse de l'écoulement d'eau croît et que son état initial part du repos ; et de même que pour s'accélérer, tant dans le vase que dans le tube, elle requière également une part particulière de la force motrice p. Nous examinerons d'abord le cas où le vase et le tube sont supposés constamment pleins.

XI.

Soit x la longueur de l'espace que l'eau parcoure dans le tube à partir du repos, la longueur qu'elle parcoure dans le vase pendant le même temps sera égale à $\frac{m}{h}x$. Ainsi, la vitesse dans le tube étant égale à v, on aura pareillement une vitesse dans le vase égale à $\frac{m}{h}v$; d'où la force accélératrice dans le tube est égale à $\frac{vdv}{dx}$, qui, multipliée par la masse mb de l'eau, donnera la force motrice $\frac{mbvdv}{dx}$, qui, (par le § 2), translatée dans le vase, donnera de façon équivalente $\frac{hbvdv}{dx}$, par laquelle la force $\frac{mbvdv}{dx}$ peut être produite dans le tube. Ainsi également la force accélératrice dans le vase est égale à $\frac{mm}{hh}vdv : \frac{m}{h}dx = \frac{mvdv}{hdx}$, qui induite dans la masse ha donne la force motrice

$\dfrac{mavdv}{dx}$ pour propulser l'eau dans le vase, et ainsi la somme de ces trois forces motrices dans la gorge, le tube et le vase doit égaler la force motrice totale p : d'où l'équation

$$\frac{hh-mm}{2h}vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p.$$

Soit donc, comme avant, p le poids de la colonne d'eau égal à gha, et qu'on fasse comme dans le corollaire 3, § IX, $gz = \frac{1}{2}vv$, par substitution, on obtiendra cette équation $\dfrac{hh-mm}{h}z + \dfrac{hbdz}{dx} + \dfrac{madz}{dx} = ha$, ou

$$(hh-mm)zdx + (hhb+hma)dz = hhadx,$$

d'où $dx = \dfrac{hhb+hma}{hha-hhz+mmz}dz$, qui, convenablement traitée et intégrée par les logarithmes, donnera

$$x = \left(\frac{hhb+hma}{hh-mm}\right) \times l\left(\frac{hha}{hha-hhz+mmz}\right),$$

d'où en repassant aux nombres (et en supposant $\log f = 1$)

$$z = \left(\frac{hha}{hh-mm}\right)(1 - 1 : f^{(hh-mm)x:(hhb+hma)}).$$

Et si l'eau dans le vase [qui pour faire bref est sans tube externe et a une ouverture de section m] est soumise à la gravité g' différente de la gravité naturelle g, on aura $z = \dfrac{g'hha}{g(hh-mm)}(1 - 1 : f^{(hh-mm)x:\ hhb+hma)}).$

Corollaire

Si $x = \infty$, ce qui donne le cas de vitesse maximum, vers lequel tend l'écoulement, on aura $1 - 1 : f^{(hh-mm)x:hhb+hma)} = 0$ et donc $z = \dfrac{hha}{hh-mm}$ pour la gravité naturelle g, ce qui est tout à fait conforme au corollaire 3 de l'article IX ; et si de plus m est infiniment petit par rapport à h, on obtient $z = a$, exactement comme dans le corollaire 1 § X, confirmant ainsi heureusement la méthode.

XII.

Analysons maintenant le cas où le vase AF [Fig. 2] ne reste pas rempli d'eau, mais se vide au fur et à mesure que l'eau s'en écoule, sa surface AE descendant continuellement.

Imaginons que l'eau dans le tube horizontal parcoure une longueur x, et donc expulse une quantité d'eau égale à mx [je suppose en effet que le vase et le tube sont initialement remplis d'eau], c'est à dire égale au cylindre liquide dont la base est m et la longueur x. Et si par conséquent dans EF on considère la partie EI$= \frac{m}{h}x$, il est clair que l'horizontale HI est le niveau de la surface supérieure à laquelle l'eau descend dans le vase, après que la portion d'eau mx est sortie par le tube. Il restera donc dans le vase une colonne d'eau GI $= ha - mx$, dont le poids $g(ha - mx)$ est ce que nous avons appelé p. Ainsi donc la force accélératrice de l'eau restant dans le vase [qui dans le § XI a été trouvée en général égale à $\dfrac{mvdv}{hdx}$] si on la communique à la masse liquide qui est maintenant $ha - mx$, nous aurons la force motrice $(ha - mx)\dfrac{mvdv}{hdx}$, qui est capable de pousser l'eau dans le vase, d'où en réunissant les trois forces qui animent la gorge, le vase et le tube, et en égalant leur somme à p qui est égal à $g(ha - mx)$, nous obtenons cette équation

$$\frac{hh - mm}{2h}vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = g(ha - mx) \ ;$$

où en remplaçant vdv par gdz, et $\dfrac{1}{2}vv$ par gz, comme nous l'avons fait au *Corollaire* 3, § IX, notre équation deviendra

$$\frac{hh - mm}{h}z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{mdz}{hdx}(ha - mx) = ha - mx \ ;$$

et en la multipliant par hdx,

$$(hh - mm)zdx + hhbdz + mdz(ha - mx) = (hha - hmx)dx.$$

Qui est la véritable équation, à partir de laquelle, en tirant la valeur de z, on obtiendra l'altitude, depuis laquelle un corps grave en chute libre acquière la vitesse cherchée, c'est-à-dire celle que l'eau aura dans le tube, après que la quantité mx en sera sortie.

Cette équation, dans laquelle les indéterminées se trouvent mêlées, peut être intégrée, suivant nos règles, grâce à des lemmes que nous donnerons bientôt ; on connaît ainsi la valeur de z en termes finis. Il ne convient pas d'insister davantage ici sur ce point : il me suffit d'avoir réduit le problème à une équation différentielle, en partant de principes purement mécaniques, et je ne me rappelle pas avoir jamais vu que cela ait été fait par quiconque avant moi. Il faut savoir que cette même équation est obtenue par la méthode des forces vives ; de sorte que, de cette façon, l'usage de ces forces et leur bonté se trouve recommandé contre l'opinion de leurs adversaires.

Corollaire I.

Pour déterminer la vitesse maximale du liquide sortant, et celle du liquide descendant dans le vase, on doit faire $dz = 0$, cela fait, notre équation s'écrira $(hh - mm)z = (hha - hmx)$, d'où $z = \dfrac{hha - hmx}{hh - mm}$, qui contient l'inconnue x, que rien ne détermine en vérité, si ce n'est la valeur même de z obtenue à partir de l'équation générale.

Corollaire II.

Si m est assez petit devant h, l'équation générale prend cette forme $zdx + bdz = adx$; d'où $dx = \dfrac{bdz}{a - z}$: qui donne $z = a - a : f^{x:\, b}$. Et par conséquent pour que z soit *maximum* dans ce cas, il faut que x soit infini, et on a alors $z = a$; ce qui en réalité peut être obtenu aussitôt à partir de $dx = \dfrac{bdz}{a - z}$ ou de $dx(a-z) = bdz$; en effet z étant maximum on a $dz = 0$, $a - z = 0$, et donc $z = a$. D'où il est visible que, dans un vase très large, l'eau qui s'écoule par un tube très étroit acquière aussitôt une vitesse maximale, toujours régulière et égale à celle acquise par un corps grave chutant librement de la hauteur du vase, comme nous l'avons calculé dans le *Corollaire* I, § X ; dans ce cas, le vase peut être considéré comme toujours plein, puisque, du fait de la section presque infinie du vase, relativement à l'étroitesse du tube, il faut un temps également quasi infini pour que l'eau descende sensiblement dans le vase.

XIII.

Considérons maintenant un autre cas : soit un tube [qui initialement est supposé au repos et rempli d'eau jusqu'en C] prolongé indéfiniment, si bien que lorsque l'eau descend dans le vase, rien ne peut sortir du tube, mais du liquide s'écoule sans cesse du vase dans le tube, ce liquide avec celui qui est supposé se trouver déjà dans le tube, force le liquide à s'écouler à l'intérieur du tube. On cherche la loi de l'accélération et la vitesse elle-même pour tout espace parcouru à l'intérieur du tube ? La force accélératrice dans le tube, comme montré au §. XI, sera égale à $vdv : dx$; mais la masse d'eau à propulser est maintenant $mb + mx$, par laquelle la force accélératrice $vdv : dx$ est multipliée pour donner la force motrice dans le tube $(mbvdv + mxvdv) : dx$, qui translatée à la section du vase donne la force motrice équivalente dans le vase égale à $(hbvdv + hxvdv) : dx$. Et ainsi, en mettant ensemble les trois forces motrices qui animent la gorge, le tube et le vase et en égalant le résultat à la force motrice totale p, on obtiendra, pour un vase toujours rempli d'une eau renouvelée, cette équation

$$\frac{hh - mm}{2h}vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = gha$$

[cf § XI] : mais pour un vase qui ne reçoit aucun liquide adjuvant, on obtiendra cette autre équation

$$\frac{hh - mm}{2h}vv + \frac{hbvdv + hxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{hdx}(ha - mx) = p = g(ha - mx)$$

[cf. §. XII] : en mettant gz à la place de $\frac{vv}{2}$, la première équation devient

$$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhdx)dz = hhadx,$$

et la seconde

$$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx - mmx)dz = (hha - hmx)dx.$$

Chacune de ces équations peut être intégrée grâce à un lemme que nous avons promis ci-dessus et que je démontre maintenant.

XIV.

LEMME.

Soit à intégrer l'équation [et sans qu'il soit nécessaire de séparer les indéterminés] $\alpha zdx + (\beta + \gamma x)dz = (\epsilon + \theta x)dx$. Je pose $y = \beta + \gamma x$, d'où

$dx = dy : \gamma$, et l'équation se change en $\frac{\alpha}{\gamma} zdy + ydz = (\epsilon + \theta x)dx$; qui, multipliée par $y^{\alpha:y-1}$, devient $\frac{\alpha}{\gamma} zy^{\alpha:y-1} + y^{\alpha:y} dz = (\epsilon + \theta x)dx \cdot y^{\alpha:y-1}$. En intégrant on obtient :

$$
\begin{aligned}
y^{\alpha:y} z &= \int \left((\epsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} (\epsilon + \theta x) - \int \left(\frac{\theta}{\gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \gamma dx \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\epsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma + 1} \\
&\quad - \frac{\epsilon}{\alpha} \beta^{\alpha:\gamma} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma+1}.
\end{aligned}
$$

On remarque que les deux derniers termes sont ajoutés pour corriger l'équation, afin que, x s'évanouissant, il en soit de même de z. On divise maintenant l'équation par $y^{\alpha:\gamma}$, c'est à dire $(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}$, et on en déduit la valeur vraie de z, à savoir

$$
\begin{aligned}
z = \frac{1}{\alpha} (\epsilon + \theta x) &- \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x) \\
&+ \left(\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma+1} - \beta^{\alpha:\gamma} \right) \times (\beta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}.
\end{aligned}
$$

XV.

Pour appliquer le lemme à la première équation, on écrit

$$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx)dz = hhadx,$$

on a ici $\alpha = hh - mm$, $\beta = hhh + hma$, $\gamma = hh$, $\epsilon = hha$ et $\theta = 0$, en substituant ces valeurs on obtient

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{hha}{hh - mm} \\
&- \frac{hha}{hh - mm} (hhb + hma)^{(hh-mm):hh} \times (hhb + hma + hhx)^{(-hh+mm):hh},
\end{aligned}
$$

ou ce qui est la même chose

$$z = \frac{hha}{hh - mm} \left(1 - \left(\frac{hb + ma}{hb + ma + hx} \right)^{(hh-mm):hh} \right).$$

Et dans le cas de la seconde équation, où $\alpha = hh - mm$, $\beta = hhb + hma$, $\gamma = hh$, $\epsilon = hha$ et $\theta = -hm$, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \frac{hha - hmx}{hh - mm} + \frac{hm}{2(hh - mm)^2} \times (hhb + hma + hhx - mmx) \\ &+ \left(\frac{-hm}{2(hh - mm)^2} (hhb + hma)^2 - \frac{hha}{hh - mm} (hhb + hma) \right) \\ &\quad \times (hhb + hma + hhx - mmx)^{-1} \end{aligned}$$

et en regroupant les termes convenablement on obtient finalement

$$z = \left(\frac{hhax - \frac{1}{2} hmxx}{hhb + hma + hhx - mmx} \right).$$

Corollaire I.

Si m est suffisamment petit devant h, on aura pour un vase toujours plein $z = \dfrac{ax}{b + x}$; et de même pour l'autre cas $z = \dfrac{ax}{b + x}$, ce qui doit évidemment arriver ainsi ; puisqu'en effet, comme m est infiniment petit, l'eau met un temps infini à s'écouler, avant que sa surface supérieure descende sensiblement dans le vase très large ; il est clair que c'est comme si le vase restait toujours plein, et donc ces deux cas reviennent au même.

Corollaire II.

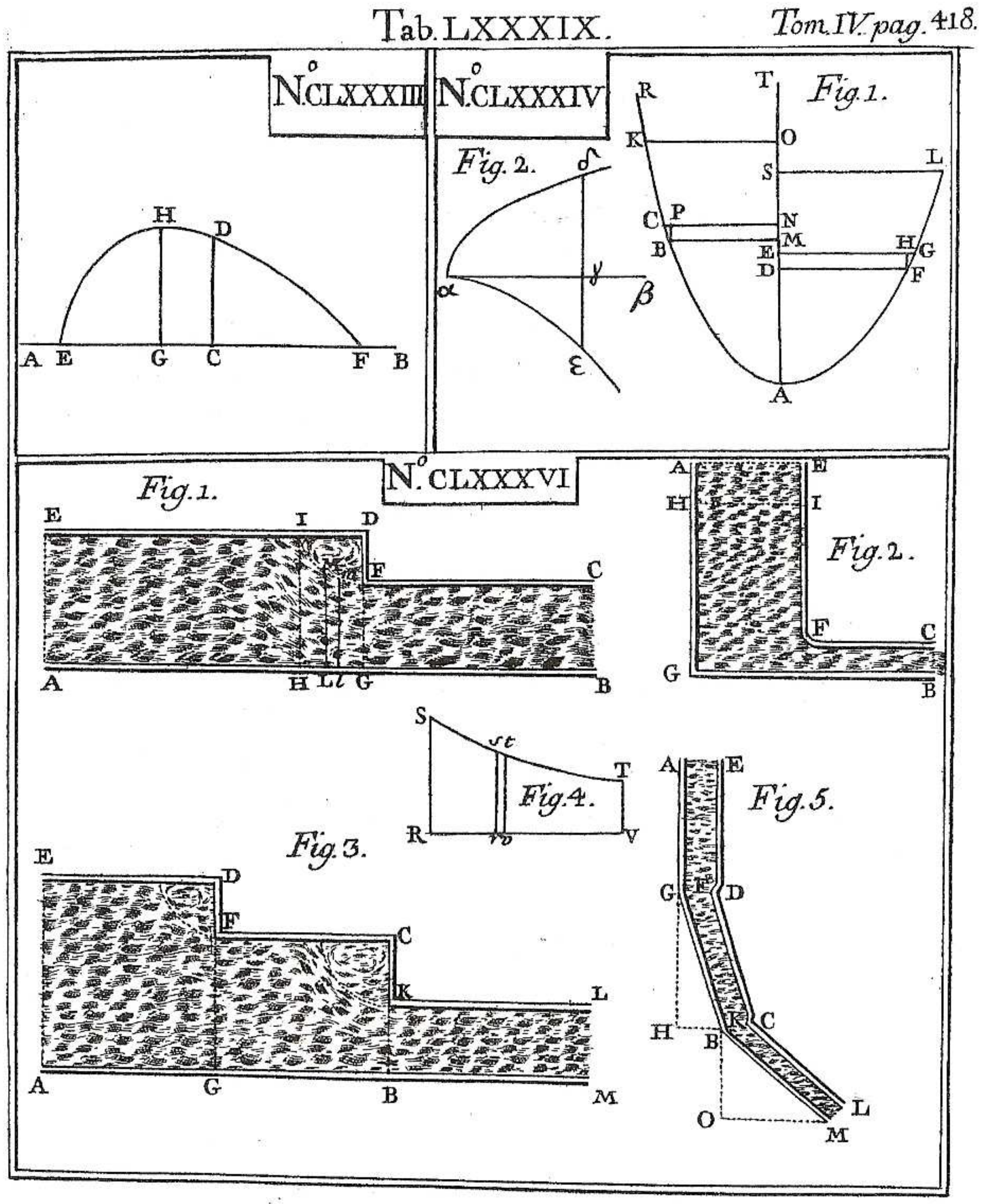
Si $b = 0$, c'est-à-dire si le tube horizontal infiniment long FB est initialement vide, on aura dans le cas d'un vase toujours plein

$$z = \frac{hha}{hh - mm} \times \left(1 - \left(\frac{ma}{ma + hx} \right)^{(hh-mm):hh} \right) \; ;$$

mais pour l'autre cas sans liquide supplémentaire, on aura

$$z = \left(\frac{hhax - \frac{1}{2} hmxx}{hma + hhx - mmx} \right).$$

Dans ce dernier cas il est également digne de noter qu'au moment où la surface du liquide atteint le fond du vase, ce qui arrive en faisant $x = \frac{h}{m}a$, et entraîne $z = \frac{a}{2}$, la vitesse de l'eau dans le tube, après la vidange complète du vase, sera celle acquise par un corps grave chutant librement de la moitié de la hauteur du vase.


Tab. LXXXIX.
Tom. IV. pag. 418.
N.° CLXXXIII
N.° CLXXXIV
Fig. 1.
Fig. 2.
N.° CLXXXVI
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

Jean-Charles Borda, « Mémoire sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases », *MARS* année 1766 (1769), p. 579-607.

---

p. 579

MÉMOIRE

SUR L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES PAR LES ORIFICES DES VASES

Par M. le Chevalier de BORDA

On a deux ouvrages célèbres sur la théorie que je me propose de traiter dans ce Mémoire, l'un est l'*Hydrodynamique* de M. Daniel Bernoulli, l'autre est le *Traité des Fluides* de M. d'Alembert : dans l'Hydrodynamique, les questions sur les fluides sont résolues par le principe de la conservation des forces vives, dont M. Bernoulli fait une application heureuse & pleine de génie; dans le Traité des Fluides, M. d'Alembert se sert d'un principe général & lumineux, dont il est l'inventeur, & qu'il avoit déja appliqué avec succès aux questions de Dynamique les plus importantes. On ne sauroit donner trop d'éloges aux deux ouvrages que je viens de citer, mais il faut avouer que les solutions qu'on y trouve ne s'accordant pas toujours, il reste encore une grande incertitude dans cette partie de la théorie des fluides, incertitude qu'il est étonnant que personne n'ait cherché à lever en examinant plus particulièrement les hypothèses & l'emploi des principes sur lesquels les solutions sont fondées; ce travail m'ayant paru mériter l'attention des Géomètres, je me suis déterminé à l'entreprendre, & ce sont mes recherches sur ce sujet que je présente aujourd'hui à l'Académie; je souhaite qu'elles puissent tourner les vues des Savans du côté de cette science importante, c'est le plus grand avantage que j'en ose espérer.

Je me propose donc dans ce Mémoire de reprendre les questions que M.[rs] Daniel Bernoulli & d'Alembert ont traitées, l'un dans le livre de l'Hydrodynamique, l'autre dans sa Théorie des Fluides; mais je me bornerai aux fluides non élastiques, & je ne parlerai même que des problèmes principaux, pour ne pas passer les bornes d'un Mémoire de l'espèce de ceux qu'on donne à cette Académie.

p. 580 (1.) Je vais examiner d'abord la solution du problème général que M.
Fig. I Daniel Bernoulli s'est proposé : il s'agit de déterminer le mouvement d'un fluide qui sort d'un vase $ABCD$ par l'orifice ef ; pour résoudre ce problème, l'Auteur suppose que le fluide contenu dans le vase, soit divisé en plusieurs branches horizontales, infiniment petites $ghlk$, $lkmn$, &c. & qu'ensuite le fluide se meut de manière que dans le même instant la tranche $ghlk$ prend la place de la tranche $lkmn$, celle-ci la place de la suivante, & ainsi de suite ; d'après cette hypothèse & en employant le fameux principe d'Huyghens sur la conservation des forces vives, M. Bernoulli a résolu le problème dont il s'agit, mais il faut avouer que cette hypothèse ne paroît applicable qu'au mouvement des tranches supérieures, comme $ghlk$, & qu'il ne paroît pas naturel de l'admettre pour les branches voisines de l'orifice ; en effet, on ne peut supposer que la tranche $OPCD$ passe en un instant de sa position $OPCD$ à la position $efrt$, qu'on ne suppose en même temps que les molécules qui sont vers D & C prennent subitement une vîtesse infinie pour parvenir à l'orifice ef, ce qui est impossible ; cette objection contre l'hypothèse de M. Daniel Bernoulli devoit faire douter de la bonté de la solution, mais pour lever tous les doutes il falloit résoudre le problème en employant quelqu'autre hypothèse plus vraisemblable, & voici celle que j'ai cru pouvoir y substituer : j'ai supposé qu'il n'y avoit que les surfaces supérieure & inférieure AB & ef qui se mouvoient en conservant leur parallélisme, & que le reste du fluide s'approchoit de l'orifice ef d'une manière quelconque : voici d'après cette hypothèse la solution du problème.

PROBLEME I.

Fig. 2 (2.) *Trouver le mouvement d'un fluide qui sort du vase $ABEF$ par l'orifice EF.*

SOLUTION.

Je supposerai, comme je viens de le dire, que les deux surfaces AB & FG se meuvent parallèlement à l'horizon, de manière qu'étant d'abord en
p. 581 AB & EF, elles parviennent en un instant en CD & GH parallèles à AB : je partage cette ligne AB en parties égales & infiniment petites ab, bl, lk, &c. & j'imagine que le point de fluide qui étoit en a est à présent en c ; que le point qui étoit en c est à présent en n, que celui qui étoit en n est en o, & ainsi de suite. Soit une courbe ape qui passe par tous ces points c, n, o, &c. & supposons de même d'autres courbes formées par les déplacemens

des points du fluide b, l, k, &c. il est clair que tout le vase se trouvera partagé en plusieurs petits canaux, & qu'on pourra supposer que le fluide se meut dans ces petits canaux, du moins pendant un instant : cela posé, nous allons d'abord chercher le mouvement du fluide dans un petit canal $abef$. Pour cela, soit $ab = a$, $ef = b$, la vîtesse en ef qui est la même que celle de toute la branche $EF = u$, la ligne ac que la surface AB parcourt dans un instant $= \mathcal{C}$, la hauteur $EX = X$, & la force de la gravité $= g$. Soit prise aussi dans le petit canal une tranche infiniment petite $PRST$, & soit $PR = z$ & $PS = ds$; il est clair qu'on pourra supposer que chaque tranche comme $PRST$, se meut en conservant toujours ses deux surfaces RP & ST perpendiculaires aux côtés du canal ; il est évident aussi que la vîtesse du fluide en ef étant u, la vîtesse en PR sera $u \cdot \dfrac{ef}{PR} = \dfrac{bu}{z}$. D'après cela, voici la manière de résoudre le problème par le principe de la conservation des forces vives ; on aura la force vive de la petite tranche $PRST = \dfrac{b^2u^2}{2gz^2} \cdot zds$, & par conséquent la somme des forces vives de tout le fluide contenu dans le petit canal sera $= \displaystyle\int \frac{b^2u^2}{2g} \cdot \frac{ds}{z}$; or on sait que, par le principe que nous employons, la différence des forces vives doit être égale à l'incrément du moment du fluide par rapport à l'horizontale AB, c'est-à-dire au produit de $efgh$ par EX : on aura donc $d\left(\displaystyle\int \frac{b^2u^2}{2g} \cdot \frac{ds}{z}\right) = efgh \cdot EX = abcd \cdot EX = a\mathcal{C}X$; mais
p. 582 $d\left(\displaystyle\int \frac{b^2u^2}{2g} \cdot \frac{ds}{z}\right) = \frac{2udu}{2g} \cdot bb \int \frac{ds}{z} + \frac{uubb}{2g} \cdot d\left(\int \frac{ds}{z}\right)$, & il faut remarquer que $d\left(\displaystyle\int \frac{ds}{z}\right) = \frac{a\mathcal{C}}{bb} - \frac{\mathcal{C}}{a}$; on aura donc

$$2g \cdot a\mathcal{C}X = 2udu \cdot bb \int \frac{ds}{z} + uu\mathcal{C} \cdot \frac{aa - bb}{a},$$

ce qui détermine le mouvement du fluide dans le petit canal $abef$; mais, par la supposition du mouvement parallèle des tranches AB & EF, on aura $AB : EF : : ab : ef : : a : b$; donc appelant AB, A, EF, B, on aura $b = \dfrac{aB}{A}$; introduisant cette expression dans l'équation que nous venons de trouver, on aura celle-ci, $\dfrac{2udu \cdot AB}{AA\mathcal{C}} . \displaystyle\int \frac{ads}{z} + u^2 \cdot \frac{AA - BB}{AA} - 2gX = 0$; ce qui donne la vîtesse du fluide à sa sortie hors du vase. *C.Q.F.T.& D.*

(3.) Cette équation ne diffère de celles de M.[rs] Bernoulli & d'Alembert, que par la quantité $\int \frac{ads}{z}$, à la place de laquelle on trouve dans la solution de ces deux auteurs la quantité $\int \frac{adx}{Z}$; dx étant l'épaisseur de chaque tranche horizontale et Z sa surface ; il est facile de voir que cette différence ne peut causer que de légères erreurs lorsque l'orifice ef est fort petit, eu égard à la capacité du vase, parce qu'alors le terme qui contient $\int \frac{ads}{z}$ influe très-peu sur la vîtesse du fluide ; mais il y a des cas où la détermination de la vîtesse dépend uniquement de ce terme, & alors l'équation de M.[rs] Bernoulli & d'Alembert donne un faux résultat, comme, par exemple, lorsqu'on veut déterminer la vîtesse du fluide dans les premiers instants du mouvement. En effet, on prouve par cette équation que, si le vase est cylindrique, la surface supérieure du fluide doit se mouvoir dans les premiers instants du mouvement comme les corps libres abondonnés à l'action de la gravité, quel que soit l'orifice par lequel le fluide sort du vase : or, cela est impossible, parce qu'il suivroit de-là que le fluide descendroit dans le commencement du mouvement avec la même vîtesse que si le fonds ne lui faisoit aucun obstacle ;
p. 583 ce faux résultat ne vient, comme je l'ai déja dit, que du terme $\int \frac{Adx}{Z}$, qui est le seul qui détermine la vîtesse dans les premiers instans du mouvement.

Il est facile de voir, par notre équation, que la partie du fluide qui, dans le commencement du mouvement, se meut comme les corps libres, est fort voisine de l'orifice EF lorsque cet orifice est très-petit par rapport à AB.

REMARQUE.

(4.) Nous venons de voir que l'hypothèse du mouvement parallèle des tranches ne donne de grandes erreurs que lorsque le terme qui contient $\int \frac{ads}{z}$ influe beaucoup sur la valeur de u ; d'où il suit qu'on peut l'employer dans tous les autres cas & même dans celui où on supposeroit qu'une tranche acquiert une vîtesse finie dans un temps infiniment petit : cependant M. d'Alembert croit qu'alors on doit rejeter cette hypothèse. Pour prouver son assertion, cet habile Géomètre fait voir qu'en l'employant à la détermination de la vîtesse

d'un fluide qui sort d'un vase cylindrique, on trouve un faux résultat ; d'où il conclut que l'hypothèse induit en erreur ; mais on va voir que cela ne vient que de la manière dont M. d'Alembert a appliqué son principe à la question dont
Fig 3 il s'agit, & non de l'hypothèse de M. Daniel Bernoulli. Pour le démontrer, soit un vase cylindrique ABC dont le fond est percé d'un trou PR, par lequel le fluide s'écoule ; proposons-nous de trouver le mouvement de ce fluide en employant le principe de M. d'Alembert, & dans cette hypothèse, que la vîtesse du fluide qui est en CD augmente en un instant dans le rapport de PR à CD ; pour cela, soit la base du cylindre $= A$, la surface de l'orifice $= B$, la force de la gravité $= g$, la vîtesse en $AB = V$, la vîtesse en $PR = u$, $AC = x$. Il faut supposer, par le principe de M. d'Alembert, que le fluide contenu dans le cylindre, étant animé par la force $g - \dfrac{dV}{dt}$, peut faire équilibre
p. 584 avec la tranche inférieure $c\delta CD$, animée par la force $\dfrac{u-V}{dt}$; mais il s'agit de savoir dans quelle position de la tranche $c\delta CD$ nous supposerons qu'il y a équilibre : en effet, si cet équilibre existe lorsque la tranche $c\delta CD$ est encore toute entière dans le vase, on aura $AC \cdot \left(g - \dfrac{dV}{dt}\right) = cC \cdot \left(\dfrac{u-V}{dt}\right)$; s'il n'existe que lorsque la tranche $c\delta CD$ est toute entière hors du vase, on aura $AC\left(g - \dfrac{dV}{dt}\right) = P\gamma \cdot \left(\dfrac{u-V}{dt}\right)$. Or il est évident que ces deux équations ne donnent pas la même chose ; donc il n'est pas indifférent de supposer l'équilibre au commencement ou à la fin du mouvement de la petite tranche. Pour savoir à présent le vrai point où cet équilibre existe, nous remarquerons que la solution du problème est qu'à la fin de l'instant, les forces qui ont animé la tranche $c\delta CD$ aient détruit l'effet de la force qui anime tout le fluide intérieur ; & puisque l'énergie de la force qui anime $c\delta CD$ varie d'une quantité finie dans un instant, on verra clairement qu'il faut prendre pour l'énergie moyenne de cette force celle qui existe au milieu de l'instant, & par conséquent on doit supposer qu'il y a équillibre lorsque la tranche $c\delta CD$ est à moitié sortie du vase & a pris la position $efik$; mais alors l'équation sera celle-ci, $AC \cdot \left(g - \dfrac{dV}{dt}\right) = (eC + Pi) \cdot \dfrac{u-V}{dt}$: or, $eC + Pi = \dfrac{eC + P\gamma}{2}$, $cC = -dx$, $P\gamma = -\dfrac{Adx}{B}$, $dt = -\dfrac{dx}{V}$, & $V = \dfrac{Bx}{A}$; mettant ces valeurs dans l'équation, on aura celle-ci, $\dfrac{2BBxudu}{AAdx} - \dfrac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot u^2 + 2gx = 0$, qui est la

même que celle que l'on trouve par la solution de M. Bernoulli ; d'où l'on voit que le principe de M. d'Alembert s'applique très-bien à cette hypothèse.

REMARQUE.

p. 585 (5.) Pour déterminer par la solution générale la vîtesse du fluide à la sortie du vase, il faudroit connoître la quantité $\int \frac{ads}{z}$, c'est-à-dire le mouvement des molécules contenues dans le vase, mais c'est à quoi les Géomètres n'ont encore pu parvenir ; ainsi la solution que nous avons donnée est encore très-incomplète, & on ne peut la regarder comme exacte que dans le cas où le terme $\frac{2udu \cdot BB}{AAC} \cdot \int \frac{ads}{z}$ peut être négligé, c'est-à-dire lorsque l'orifice ef est fort petit, eu égard à la capacité du vase : & même dans ce cas-là, quoiqu'on trouve que la vîtesse du fluide est dûe à toute sa hauteur dans le vase, on ne sait pas pour cela déterminer la quantité qui s'en écoule dans un temps donné : cela vient de ce que la colonne qui sort de ce vase se resserre à une petite distance de l'orifice, & que ce resserrement, connu sous le nom de *contraction de la veine*, n'a point encore été déterminé par la théorie. Comme j'ai eu besoin, pour la solution de quelques problèmes contenus dans ce Mémoire, de connoître exactement cette contraction, j'ai fait des recherches à ce sujet dont je vais donner le détail.

De la contraction de la veine.

(6.) M.Newton est le premier qui ait remarqué que la veine de fluide qui sort d'un vase, se contracte à une petite distance de l'orifice ; ce grand Géomètre en attribue avec raison la cause aux différens mouvemens des molécules du fluide, qui parviennent à la sortie du vase par des directions convergentes, & qui par-là tendent à diminuer la grosseur de la veine ; d'après cette explication, il est évident que cette contraction doit être différente suivant la manière dont le fluide parvient à l'ouverture par laquelle il doit sortir, & qu'elle est d'autant plus grande que le fluide parvient à l'orifice par des directions plus opposées à la direction résultante de la veine de fluide.

Ce seroit un problème d'une extrême difficulté que de déterminer la quantité de contraction pour un vase & un orifice quelconques, il faudroit pour cela résoudre le problème général du mouvement de toutes les particules de
p. 586 fluide ; la difficulté seroit encore très-grande quand même on supposeroit que le fluide sortiroit par un trou infiniment petit fait dans le fond d'un vase ;

mais il y a un cas particulier qu'on résoud assez facilement & c'est celui de la *figure 4*, dans laquelle ef est un tube d'un diamètre infiniment petit, prolongé dans le vase d'une quantité finie : ce cas étant singulier, & devant d'ailleurs me servir dans plusieurs questions sur les fluides, je vais en donner la solution.

(7.) Je supposerai, pour plus grande simplicité, que le tuyau infiniment petit ef, est horizontal, & que la veine après s'être contractée, reste dans l'état de contraction, & coule sur un plan horizontal & parfaitement poli, ainsi que le plan qui porte le vase ; je remarque 1.° que la vîtesse du fluide au point de la plus grande contraction, sera dûe à toute la hauteur du fluide au-dessus du tube ; 2.° que le vase étant sur un plan qu'on a supposé parfaitement poli, prendra peu à peu par l'effet de la réaction, un petit mouvement du côté opposé à la sortie du fluide, de manière cependant, que le centre de gravité du système de tout le fluide & du vase, restera immobile ; cela posé, soit la hauteur he du fluide au-dessus du tube $= h$, la force de la gravité $= g$, la force de la réaction du fluide contre le vase $= R$, la section du tube $= e$, la section de la veine au point de plus grande contraction $= me$; nous venons de dire que le centre de gravité de tout le système devoit rester immobile, il suit de-là que la quantité de mouvement imprimée au vase par la réaction, après un temps quelconque T, sera égale à la quantité de mouvement qu'aura tout le fluide sorti du vase après le même temps T : or il est facile de voir que la quantité de mouvement du vase après le temps T sera $= RT$, & que celle du fluide sorti sera $= meT \cdot 2gh$; on aura donc $RT = meT \cdot 2gh$, & $R = 2ghme$: ce qui fait voir que *la réaction d'un fluide contre le vase duquel il sort, est égale à l'action du poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base la section de la veine contractée, & pour hauteur le double de celle qui est dûe à la vîtesse du fluide au point de la contraction, quelle que soit cette vîtesse.* A présent pour trouver une autre valeur de la réaction, nous remarquerons que
p. 587 toutes les molécules du fluide qui sont contre les parois du vase, & au pied du tube, ne peuvent se mouvoir qu'avec une vîtesse infiniment petite, & que par conséquent la pression de chaque molécule contre les parois du vase, peut partout être estimée la même que si le fluide étoit parfaitement stagnant ; d'où il suit que la différence des pressions que le fluide exerce sur les côtés AB & CD du vase, ne vient que de la seule partie O opposée à l'orifice ; or la réaction ne peut être autre chose que cette différence de pressions, ainsi la réaction doit être égale à la pression du fluide sur la partie O, laquelle pression est évidemment égale à ghe, on aura donc $R = ghe$; mais nous

avons trouvé plus haut $R = 2ghme$; donc $ghe = 2ghme$, & par conséquent $m = \frac{1}{2}$; c'est-à-dire que la section de la veine, au point de la plus grande contraction, est exactement la moitié de la section du tube. *C. Q. F. T. & D.*

(8.) Nous venons de faire voir, dans le cas que nous avons examiné, que la veine se contractoit dans le rapport de 2 à 1 : supposons à présent qu'on ôte le tube & que le fluide sorte par l'orifice fg, la contraction sera alors plus petite que dans le premier cas, & M. Newton a trouvé par expérience, en mesurant le diamètre de la veine à l'endroit le plus étroit, & en le comparant à celui de l'orifice, que la contraction étoit dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 ; pour m'assurer de l'exactitude de ce rapport, j'ai répété l'expérience un peu plus en grand, & pour cela je me suis servi d'une cuve cylindrique qui avoit 3 pieds de diamètre, la veine sortoit latéralement par un trou de 15 lignes, fait dans une plaque de fer-blanc d'un pied de diamètre, cette plaque étoit bien polie & les bords du trou étoient tranchans ; j'ai mesuré avec le plus d'exactitude qu'il m'a été possible le diamètre horizontal de la veine contractée & le diamètre vertical, qui est toujours plus petit que l'autre, & j'ai trouvé que le diamètre moyen étoit de 12 lignes $\frac{1}{16}$; ce qui donne pour la contraction le rapport de 154 $\frac{2}{3}$ à 100, au lieu du rapport de 141 $\frac{3}{7}$ à 100, que M. Newton a trouvé ; je ne sais à quoi je dois attribuer cette grande différence dans les résultats, peut-être vient-elle de ce que M. Newton a fait son expérience sur un orifice trop petit (*voyez les Principes Math. prop. 36, liv. 2*) ; cette seule raison suffit
p. 588 pour expliquer cette différence ; en effet, il est évident que le frottement du fluide contre les bords de l'orifice doit diminuer la quantité de contraction, puisqu'elle retarde les parties qui tendent le plus à contracter la veine ; or ce frottement étoit à proportion plus grand dans l'expérience de M. Newton que dans la mienne ; donc par cela seul je devois trouver une contraction plus grande.

(9.) La manière de mesurer la contraction par la mesure de la veine contractée n'étant pas assez précise, j'ai voulu chercher cette contraction par la méthode dont M. Bernoulli parle dans son Hydrodynamique, *page 79* : cette méthode consiste à mesurer le temps qu'une certaine quantité de fluide emploie à sortir d'un vase par un orifice donné, on calcule après cela le temps qu'il auroit dû employer s'il n'y avoit pas eu de contraction, & le rapport des deux temps, donne celui de la grandeur de l'orifice à la section de la veine contractée. Voici le détail de l'expérience que j'ai faite ; je me suis en-

core servi de la cuve cylindrique qui avoit 3 pieds de diamètre, & comme je me proposois de déterminer aussi, par expérience, la quantité de contraction qui a rapport à la *figure 5*, j'avois fait placer au fond du vase un tube de
Fig. 5 fer-blanc qui avoit 6 pouces de longueur, & dont l'orifice avoit 14 lignes $\frac{1}{10}$
Fig. 6 de diamètre, j'avois fait faire outre cela un tube AB dans lequel le premier pouvoit être emboîté, & qui étoit terminé par le plateau MN de 12 pouces de diamètre, le plateau étoit percé d'un trou qui étoit parfaitement égal à l'orifice du premier tube & qui répondoit exactement à cet orifice lorsque le second tube couvroit le premier : de cette manière je pouvois faire la comparaison des deux contractions en me servant d'abord du premier tube, ensuite en le couvrant du tube à plateau ; avant de faire chaque expérience, je couvrois l'orifice du tube par un poids de plomb garni de cuir en-dessous, ensuite après avoir attendu que l'eau fût parfaitement tranquille, je levois ce poids perpendiculairement afin que le fluide se contractât régulièrement en entrant dans le tube & n'en touchât point les parois (car il faut remarquer que lorsqu'il les touchoit, l'attraction de ces parois, & ensuite la pression extérieure
p. 589 de l'atmosphère dérangeoient la contraction & forçoient même quelquefois le fluide à sortir à plein tuyau) ; l'eau s'écoulant par le tube, je comptois avec une pendule à demi-secondes le temps qu'il employoit dans le vase d'une hauteur donnée, & pour cela j'avois placé dans l'intérieur du vase deux aiguilles, qui étoient à 4 pouces l'une au-dessus de l'autre, & dont j'avois soin que la plus élevée fût submergée de 2 pouces environ avant d'ouvrir le tube ; toutes ces précautions prises, voici quel a été le résultat de mon expérience : j'ai d'abord éprouvé le tube sans plateau, & j'ai trouvé par trois différentes observations qui ont donné la même chose, que le fluide descendoit dans le vase d'une aiguille à l'autre, c'est-à-dire de 4 pouces, dans le temps de $173\frac{1}{2}$ vibrations de mon pendule ; j'ai ensuite adapté le tube à un plateau, & j'ai trouvé que le temps n'étoit plus que de 143 vibrations : or la hauteur de fluide au commencement du mouvement étoit de 11 pouces 11 lignes, & de 7 pouces 11 lignes à la fin du mouvement ; si on veut d'après ces mesures calculer le temps que le fluide auroit employé à descendre d'une aiguille à l'autre, en supposant qu'il n'y eût point eu de contraction, on trouvera 44 secondes $\frac{2}{3}$ ou 89 $\frac{1}{3}$ vibrations de mon pendule ; mais l'expérience a donné 173 $\frac{1}{2}$ vibrations pour le premier cas, & 143 pour le second : il faut donc que dans le premier cas la veine se soit contractée dans le rapport de 194 $\frac{1}{5}$ à 100, & que dans le second elle se soit contractée dans le rapport de 160 à 100.

(10.) Le rapport de 194 $\frac{1}{5}$ à 100 que nous venons de trouver pour le cas de la *figure 4*, approche beaucoup de celui de 2 à 1 donné par la théorie : la petite différence qu'il y a, peut venir du frottement des molécules le long de la surface convexe du tube, frottement qui retarde les parties qui tendent le plus à contracter la veine.

Quant au rapport de 160 à 100 que l'expérience donne pour l'autre espèce de contraction, il est encore plus fort que je ne l'avois trouvé en mesurant le diamètre de la veine ; & même s'il n'y avoit eu aucun frottement, il est probable que la contraction auroit été encore plus grande : en effet, il semble que dans le cas d'un frottement nul, les deux espèces de contraction dont
p. 590 nous avons parlé, devroient encore avoir entre elles le rapport de 143 à 173 $\frac{1}{2}$ que l'expérience vient de nous donner : par conséquent puisque dans cette supposition, la contraction de la *figure 4* devoit être dans le rapport de 2 à 1 ; celle de la *figure 5* devroit être dans le rapport de $2 \cdot \dfrac{143}{173\frac{1}{2}}$ à 1, ou de $164\frac{4}{5}$ à 100, ce qui s'éloigne encore davantage du rapport trouvé par M. Newton.

Voilà toutes les expériences que j'ai faites sur la contraction de la veine ; j'ai cru devoir entrer dans beaucoup de détails, parce que la quantité de cette contraction entre pour élément dans plusieurs questions d'Hydrodynamique, & sur-tout dans celles où le principe de la conservation des forces vives ne peut être employé sans restriction.

Des Questions d'Hydrodynamique, dans lesquelles on doit admettre une perte de forces vives.

(11.) La solution du problème général de l'écoulement des fluides par les orifices des vases, sembleroit devoir s'appliquer à plusieurs autres questions qu'on croiroit d'abord n'en être que des corollaires, telles par exemple que le mouvement des fluides dans les vases submergés ou dans les vases partagés par des diaphragmes ; mais, comme l'a remarqué M. Daniel Bernoulli, le principe de la conservation des forces vives n'a pas lieu, sans restriction, dans la plupart de ces problèmes : en effet, le mouvement de l'eau dans les vases, peut être regardé comme celui d'un système de corps durs qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ; or nous savons que le principe de conservation des forces vives n'a lieu dans le mouvement de ces corps que lorsque leur action mutuelle s'exerce par degrés insensibles, & qu'il y a nécessairement une perte de forces vives dans le système, d'abord qu'un de

ces corps vient à en choquer un autre : il suit de-là qu'il doit aussi y avoir quelquefois une perte de forces vives dans le mouvement des tranches de
Fig. 7 fluide que nous examinons. Pour faire voir cela plus clairement, supposons un vase $ABGH$, enfoncé dans un fluide indéfini $OPQR$, & imaginons que le fuide entre dans ce vase par l'orifice mn : considérons la petite tranche
p. 591 $mopn$, qui entre dans le vase pendant un instant, & qui occupe ensuite la place $rsxy$; il est clair qu'avant d'occuper cette place $rsxy$, la petite tranche aura perdu, contre le fluide supérieur, une partie de son mouvement, & qu'elle l'aura perdu de la même manière que si c'eût été une masse isolée qui eût frappé une autre masse isolée : mais dans le cas des deux masses isolées, il y auroit eu une perte de forces vives ; donc il y en aura eu aussi dans le cas que nous examinons.

Ce que nous venons de dire du principe de la conservation des forces vives, s'applique aussi à celui de M. d'Alembert, non pas que ce dernier principe ne soit toujours rigoureusement vrai, mais il y a des cas dans lesquels on doit faire quelques changements à la manière de l'appliquer au mouvement des fluides : en effet, considérons encore la *figure 7*, nous venons de voir que la tranche $rsxy$ n'agit sur le fluide supérieur que comme une masse isolée qui iroit perdre une partie de son mouvement, contre une autre masse qu'elle frapperoit ; d'où il suit que dans l'équation de l'équilibre on ne doit pas multiplier la force accélératrice de cette branche par l'espace $\frac{1}{2}mt$ qu'elle occupe le long de l'axe au milieu de l'instant, ainsi que nous l'avons fait, *article 4*, mais seulement par l'espace ot qu'elle occupe après l'instant, puisque cet espace ot représente la masse de la petite tranche, rC représentant celle du fluide $rCDs$, & que ce n'est que comme masses isolées qu'elles exercent leur action l'une sur l'autre ; les problèmes suivans éclairciront davantage ce que nous venons de dire.

LEMME.

(12.) *Soit un corps dur a dont la vîtesse est u, & qui frappe un autre corps dur A dont la vîtesse est V, on demande quelle sera la perte des forces vives qui se fera dans le choc.*

SOLUTION.

La somme des forces vives avant le choc étoit $= \dfrac{au^2 + AV^2}{2g}$, après le choc cette somme $= \dfrac{a+A}{2g} \cdot \left(\dfrac{au+AV}{a+A}\right)^2$; retranchant la seconde quantité de la première, on trouvera la perte des forces vives $= \dfrac{aA}{a+A} \cdot \dfrac{(u-V)^2}{2g}$. *C. Q. F. T.*

p. 592

PROBLEME II.

Fig. 7

(13.) *Soit un vase cylindrique ABNM qu'on suppose enfoncé dans un fluide indéfini OPQR; il faut trouver le mouvement qu'aura le fluide en entrant dans le vase ABNM.*

SOLUTION par le principe de la conservation des forces vives.

Supposons qu'après un certain temps le fluide soit parvenu en EF, & que dans l'instant suivant il soit en DC, j'appelle AE, x ; AG, a ; AB, b ; la vîtesse du fluide en E, u ; & la force de la gravité g : on aura 1.° la force vive du fluide $ROPQ = 0$. 2.° la force vive du fluide contenu dans le vase pourra être regardée comme égale à $\dfrac{uubx}{2g}$, parce qu'on peut négliger la force vive de la tranche de fluide qui entre dans le cylindre ; ainsi la différence de la force vive de tout le fluide contenu dans le vase, sera $= \dfrac{uubdx + 2bxudu}{2g}$: or pendant que le fluide acquiert cet incrément de force vive, la tranche $DCFE$ ou bdx est censée descendre de la hauteur GE ou $a-x$; donc, si le principe de la conservation des forces vives avoit lieu sans restriction, on auroit $a - x \cdot bdx = \dfrac{uubdx + 2bxudu}{2g}$; mais parce que nous venons de dire, *article 11*, il y a une perte de forces vives dans le système total du fluide, laquelle perte vient de l'action de la petite tranche $rsxy$ sur le fluide supérieur $rCDs$, & il est facile de voir par le lemme & en appelant V la vîtesse de la tranche $opmn$, que cette perte de forces vives $= \dfrac{badx}{a+dx} \cdot \dfrac{(V-u)^2}{2g} = bdx \cdot \dfrac{(V-u)^2}{2g}$; ajoutant donc cette quantité au second membre de l'équation ci-dessus, on aura la vraie équation du problème $uubdx + 2bxudu + bdx \cdot (V-u)^2 = 2g \cdot (a-x) \cdot bdx$: il ne reste plus qu'à déterminer V ; pour cela il faut remarquer que la veine de fluide qui entre

p. 593 dans le vase, se contracte de la même manière que si elle sortoit de ce vase par le même orifice, & qu'elle entrât dans un espace libre ; cela doit être, puisque dans les deux cas le fluide parvient à l'orifice en suivant les mêmes directions : or la perte de forces vives doit s'entendre de la tranche qui a le plus de vîtesse, c'est-à-dire de celle qui est au point de la plus grande contraction ; ainsi par la vitesse V, on doit entendre celle du point où la veine est le plus contractée : supposons donc que ce point soit en O & que m soit le rapport de EF à OP, on aura $V = mu$; mettant cette valeur dans l'équation, on aura $uudx + 2xudu + u^2dx(m-1)^2 = 2g \cdot (a-x) \cdot dx$, qui, étant intégrée, en supposant $x = e$ & $u = 0$ au commencement du mouvement, donnera $\dfrac{ax^{m^2-2m+2} - ae^{m^2-2m+2}}{m^2-2m+2} + \dfrac{e^{m^2-2m+3} - x^{m^2-2m+3}}{m^2-2m+3} = \dfrac{u^2 \cdot x^{m^2-2m+2}}{2g}$; *C. Q. F. T. & D.*

Autre SOLUTION par le principe de M. d'Alembert.

(14.) Soient conservées les mêmes dénominations que ci-dessus, & soit outre cela v la vîtesse d'une tranche de fluide quelconque, prise dans le vase , & dv son incrément dans un instant ; il faudra, par le principe de M. d'Alembert, que les forces $g - \dfrac{dv}{dt}$ qui animent les tranches de fluide se fassent équilibre. Soit donc op le point de la plus grande contraction de la veine du fluide, & supposons qu'une molécule après être entrée dans le cylindre, occupe la place $rsxy$, il est clair que cette molécule perdra dans un instant la vitesse $mu - u$; & par conséquent on peut supposer qu'elle a été animée pendant cet instant par une force $\dfrac{u-mu}{dt}$ vers Ro, mais cette tranche agissant librement sur le fluide supérieur, doit être regardée comme un corps libre $rsxy$ qui frapperoit un autre corps libre $rCDs$: donc pour l'équilibre il faut considérer cette tranche comme occupant seulement l'espace sy le long de l'axe du cylindre, ainsi que nous l'avons dit,
p. 594 *article 11* ; par conséquent son moment pour l'équilibre sera seulement $sy \cdot \dfrac{u-mu}{dt} = \dfrac{u-mu}{dt} \cdot dx$; d'un autre côté le moment de la partie $rCDs$, sera $x \cdot g + \dfrac{du}{dt}$, & celui du fluide $PGAmopnBHQORP$ se trouvera par la solution générale $= g \cdot BH - \dfrac{u^2(EF)^2}{2op^2} = ga - \dfrac{1}{2}m^2u^2$; on aura donc, par la

condition de l'équilibre $gx + \frac{xdx}{dt} + (u - mu) \cdot \frac{dx}{dt} = ga - \frac{1}{2}m^2u^2$, & mettant u à la place de $\frac{dx}{dt}$, on aura enfin

$$2g \cdot (a - x) \cdot dx = 2xudu + u^2 \cdot (m^2 - 2m + 2) \cdot dx \ ;$$

équation qui est la même que celle que nous avons trouvée, *article 13.*

COROLLAIRE.

(15.) Supposons qu'au commencement du mouvement il n'y ait point de fluide dans le vase, & qu'on veuille savoir jusqu'où le fluide montera, on fera dans l'équation $e = 0$ & $u = 0$, & on aura $AX = a + \frac{a}{m^2 - 2m + 2}$, & par conséquent le fluide s'élèvera au-dessus de GH d'une quantité

$$GX = \frac{a}{m^2 - 2m + 2}.$$

PROBLEME III.

(16.) *Trouver le mouvement d'un fluide qui sort d'un vase cylindrique dont la partie inférieure est plongée dans un fluide indéfini.*

SOLUTION par le principe de la conservation des forces vives.

Fig. 8 Soit le vase $ABGH$, dont la partie inférieure est plongée dans le fluide $PQRO$, je suppose que lorsqu'on ouvre l'orifice mn la surface du fluide soit en EF, & qu'après un certain temps elle soit en CD : j'appellerai GA, H ;
p. 595 EC, x ; AE, h ; la vîtesse en CD, u ; & celle qui est au point O de la plus grande contraction mu ; cela posé on aura 1.° la force vive du fluide indéfini $ROPQ = 0$, celle du fluide contenu dans le cylindre $= \frac{uu}{2g} \cdot (h - x)$, & la différence $= \frac{udu}{g} \cdot (h - x) - \frac{uu}{2g} \cdot dx$; donc si le principe avoit lieu sans restriction, on auroit $\frac{udu}{g} \cdot (h - x) - \frac{uu}{2g} \cdot dx = (h - H - x) \cdot dx$; mais la molécule $mopn$ qui sort du vase, perd toute sa force vive contre le fluide indéfini $ROPQ$; il faudra donc ajouter au premier membre de l'équation cette

force vive perdue qui est $= \dfrac{m^2u^2}{2g} \cdot dx$, & on aura la vraie équation du problème $(m^2-1)\cdot u^2dx + (h-x)\cdot 2udu = 2g\cdot(h-H-x)\cdot dx$, qui étant intégrée de la même manière que celle du Problème précédent, donnera

$$2gH\left(\frac{(h-x)^{1-m^2}-h^{1-m^2}}{1-m^2}\right)-\frac{(h-x)^{2-m^2}-h^{2-m^2}}{2-m^2}=u^2\cdot(h-x)^{1-m^2}\ ;$$

C. Q. F. T. & D.

SOLUTION par le principe de M. d'Alembert.

(17.) Conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, il est clair qu'on pourra regarder la molécule infiniment petite qui est en OP, comme animée d'une force $\dfrac{mu}{dt}$ vers OR, & comme cette molécule agit librement sur le fluide inférieur, on doit supposer, pour l'équilibre, qu'elle a l'étendue zt du fluide indéfini, & par conséquent que son épaisseur xz est infiniment petite du second ordre; d'où l'on conclut que son moment pour l'équilibre doit être regardé comme nul : donc la somme des momens de toute la partie $PQOR$ doit être égale à celle des momens de la partie intérieure $ABDC$; or la première somme $= H\cdot g$, & on trouvera par la solution générale, que la
p. 596 seconde somme

$$\begin{aligned} &= g\cdot AC - udu\cdot\frac{AC}{cC}u^2\cdot\frac{(CD)^2-(OP)^2}{2(OP)^2} \\ &= g\cdot(h-x)-udu\cdot\frac{h-x}{dx}-u^2\cdot\frac{m^2-1}{2}; \end{aligned}$$

on aura donc $(m^2-1)\cdot u^2dx + 2udu\cdot(h-x) = 2g.(h-H-x)\cdot dx$, comme ci-dessus.

REMARQUE.

(18.) Les deux problèmes que je viens de résoudre avoient déja été résolus par M.[rs] Daniel Bernoulli & d'Alembert ; l'équation de M. Bernoulli pour le premier problème, est fort différente de la mienne, 1.° parce que cet habile Géomètre n'a point fait entrer dans le calcul la contraction de la veine, parce qu'il a estimé que la perte des forces vives étoit proportionnelle à V^2-u^2, au lieu que j'ai fait voir qu'elle étoit proportionnelle à $(V-u)^2$; au reste il paroît que M. Bernoulli avoit des doutes sur sa manière d'estimer les forces vives perdues, comme on peut le voir *page 133* de son Hydrodynamique.

Quant aux solutions de M. d'Alembert, elles sont absolument différentes de celles de M. Bernoulli & des miennes, cela vient de ce que M. d'Alembert n'a pas cru qu'il y eût une perte de forces vives dans ce mouvement du fluide ; cependant, cela paroît rigoureusement démontré, & d'ailleurs l'opinion contraire conduit à des résultats absolument démentis par l'expérience.

Ma solution du premier problème étant différente de celle de M. Bernoulli, j'ai cru que je ne devois pas me contenter d'opposer démonstration à démonstration, & qu'il seroit bon de décider la question par quelques expériences faites avec soin.

EXPÉRIENCE I.

(19.) J'ai fait faire un tube de fer-blanc de 18 lignes de diamètre intérieur, & d'un pied de longueur, le fer-blanc étoit bien poli & les bords du tube tranchans : j'ai fait avec ce tube l'expérience qu'indique M. Bernoulli dans son Hydrodynamique, *page 141*, c'est-à-dire que j'enfonçois le tube dans un grand vase rempli d'eau, je fermois d'abord l'orifice supérieur de ce tube,
p. 597 afin que l'air qui s'y trouvoit renfermé, empêchât l'eau d'y entrer, ensuite je débouchois subitement l'orifice, & j'observois la hauteur à laquelle l'eau montoit au-dessus de la surface qui étoit dans le vase : après avoir fait plusieurs fois cette expérience, j'ai trouvé qu'en enfonçant le tube de 8 pouces demi-ligne, l'eau remontoit exactement jusqu'à l'orifice supérieur, c'est-à-dire qu'elle s'élevoit à 4 pouces moins demi-ligne au-dessus de la surface de l'eau contenue dans le vase : or par la solution de M. Bernoulli, l'enfoncement de 8 pouces auroit dû produire une ascension de 8 pouces au-dessus de la surface ; donc cette expérience donne un résultat deux fois plus petit que celui de la solution de M. Bernoulli : cet habile Géomètre cite, à la vérité, d'autres expériences qui paroissent contredire celle-ci, mais les tubes dont cet Auteur s'est servi, étoient d'un trop petit diamètre pour qu'on pût en conclure rien de bien certain.

Pour voir à présent si ma solution s'accorde avec l'expérience, il n'y a qu'à mettre dans la valeur générale de l'*article 15*, celle de m, qui, dans le cas dont il s'agit, se trouve par la théorie égale à 2, & par l'expérience égale à $\frac{194\frac{1}{2}}{100}$, & on aura $GX = \frac{1}{2}a$, ou $GX = \frac{100}{189}a$; je choisis cette seconde quantité, parce qu'elle est fondée sur l'expérience, & je remarque que le fluide, à cause de la compressibilité de l'air contenu dans le tube, devoit y être monté d'environ 3 lignes avant le commencement du mouvement ; & qu'ainsi l'enfoncement étoit seulement de 93 lignes $\frac{1}{2}$: multipliant donc 93 lignes $\frac{1}{2}$ par $\frac{100}{189}$, on aura 49 lignes $\frac{1}{2}$ pour la hauteur à laquelle le fluide devoit remonter au-dessus de la surface du fluide : or il est remonté à 47 lignes $\frac{1}{2}$, ainsi il n'y a que 2 lignes de différence, qu'on peut attribuer au frottement du fluide le long du tube.

Au reste, si on ne veut pas tenir compte de la correction que j'ai faite, & supposer seulement $m = 2$, l'expérience s'accordera encore davantage avec ma solution.

EXPÉRIENCE II.

(20.) J'ai fait mettre à l'orifice inférieur du tube dont je m'étois servi, un
p. 598 plateau pareil à celui de la *figure 6*, & j'ai observé qu'il falloit enfoncer le plateau jusqu'à 85 lignes de profondeur, pour que le fluide remontât exactement à l'orifice supérieur : or nous avons vu *article 9*, que dans le cas dont il s'agit ici, la veine de fluide se contracte dans le rapport de 16 à 10, à peu de chose près, & que par conséquent $m = \frac{16}{10}$; mettant cette valeur dans l'expression de GX, *article 15*, on aura $GX = \frac{100}{136}h$: mais dans le commencement du mouvement il y avoit dans le tube 2 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau par la raison que nous avons dit, *article 19* ; il faudra donc multiplier 82 lignes $\frac{1}{2}$ par $\frac{100}{136}$, & le produit 60 lignes $\frac{2}{3}$ sera la hauteur à laquelle le fluide devoit remonter : or l'expérience a donné 59 lignes, ainsi elle confirme aussi ma solution.

J'ai fait encore plusieurs autres expériences avec le même tube auquel j'adoptois un fond percé d'un trou, & je les ai variées de plusieurs manières, il me suffira de dire que j'ai trouvé le même accord entre ma théorie & ces expériences.

REMARQUE.

(21.) La solution des deux derniers problèmes mène naturellement à celle de l'écoulement d'un fluide qui sort d'un vase traversé par plusieurs dia-
Fig. 9 phragmes ; il est facile de voir que pour résoudre ce problème, il suffit de trouver la force vive perdue par les molécules de fluide qui passe par les orifices K & L ; on pourra aussi avec facilité, d'après ce que nous avons dit, y appliquer le principe de M. d'Alembert, ainsi nous ne nous arrêterons pas davantage sur cet article.

De l'écoulement d'un fluide qui sort par un tuyau adapté à un vase.

(22.) M. Bernoulli a résolu ce problème dans les *sections 3 & 4* de son Hydrodynamique, en employant le principe de conservation des forces vives, sans aucune restriction, mais en examinant les conséquences qu'on peut tirer de la solution de ce grand Géomètre, on se convaincra facilement qu'elle doit
p. 599 être rejetée, & qu'il y a une perte de forces vives dans ce mouvement du fluide, ainsi que dans les précédens : en effet, supposons un vase $MNOP$, auquel est
Fig. 10 adapté un tuyau horizontal $GDFH$, dont l'ouverture est infiniment petite ; on trouvera, par le calcul de M. Bernoulli, que la vîtesse du fluide à la sortie DF sera dûe à toute la hauteur de fluide au-dessus de ce tuyau, quelle que soit sa figure : or si cela étoit, & qu'on supposât que le diamètre GH fût infiniment plus petit que le diamètre DF, il s'ensuivroit que la vîtesse du fluide en GH, seroit infiniment grande, ce qu'il est impossible d'admettre : on doit donc conclure de-là que le principe de la conservation des forves vives, qui sert de fondement à la solution de M. Bernoulli, n'a pas lieu sans restriction dans ce problème ; il n'auroit pas même lieu quand on supposeroit, comme dans la *figure 11*, que le tube est cylindrique, parce que, dans ce cas comme dans l'autre, la veine de fluide se contractant en entrant dans le tube & agissant ensuite sur le fluide antérieur de la même manière que nous l'avons vu dans le *problème 11*, il y a nécessairement une perte de forces vives dans ce mouvement ; d'où on peut conclure que la vîtesse du fluide qui sort par un tube cylindrique, n'est pas dûe à toute la hauteur du fluide au-dessus du tube, comme on l'a cru jusqu'à présent : nous allons chercher cette vîtesse dans le problème suivant.

PROBLEME IV.

Fig. 11 (23.) *Soit un vase cylindrique $ABCD$, auquel est adapé un tuyau infiniment petit EF ; on suppose que le fluide, en sortant du tube, remplit exactement toute l'étendue de l'orifice & a dans tous ses points la même vîtesse, on demande qu'elle sera cette vîtesse !*

SOLUTION.

Ce problème se résout par les mêmes principes que celui de l'*article 13* : soit $BE = x$, la grosseur du tube $= e$, celle de la veine qui entre dans le tube, prise au point de la plus grande contraction $= me$, la vîtesse au point F ou à la sortie du tube $= u$, un élément de temps $= dt$ & la force de la gravité $= g$.

p. 600 On aura 1.° par le principe de conservation des forces vives, employé sans restriction $\dfrac{uudx}{2g} = xdx$; mais la branche qui est au point de la contraction, perd contre le fluide antérieur une vîtesse $mu-u$; donc la perte de forces vives pour le système total $= \dfrac{(mu-u^2)}{2g} \cdot dx$; ajoutant cette quantité au premier membre de l'équation ci-dessus, on aura $(m^2-2m+2)\cdot u^2 = 2gx$; *C. Q. F. T. & D.*

On aura 2.° par le principe de M. d'Alembert, le moment de tout le fluide contenu dans le vase jusqu'au point de la plus grande contraction $= gx - \dfrac{m^2u^2}{2}$; mais la branche qui est au point de la contraction perdant comme subitement une partie de sa vîtesse contre le fluide antérieur, doit être regardée comme animée par une force $\dfrac{mu-u}{dt}$: donc son moment pour l'équilibre sera $\dfrac{mu-u}{dt}\cdot dx$; ajoutant ce moment à celui qu'on a trouvé plus haut, & mettant u à la place de $\dfrac{dx}{dt}$, on aura, comme par le principe des forces vives, $(m^2-2m+2)\cdot u^2 = 2gx$; *C. Q. F. T.*

(24.) Nous avons dit, *article 9*, que le fluide sortant par une ouverture faite au fond d'un vase cylindrique, se contractoit dans le rapport de 16 à 10 ; donc, dans la supposition de la *figure 11*, on aura $m = \frac{16}{10}$: mettant cette valeur dans l'expression de la vîtesse que nous venons de trouver, on aura $\dfrac{uu}{2g} = \frac{100}{136}x$, c'est-à-dire que la vîtesse du fluide sera dûe aux $\frac{100}{136}$ de sa hauteur au-dessus du tube, & non pas à la hauteur entière.

COROLLAIRE II.

(25.) Si le tube étoit prolongé dans le vase (comme *fig. 4*), on auroit $m = \frac{1}{2}$, & par conséquent $\dfrac{uu}{2g} = \frac{1}{2}x$; c'est-à-dire que dans ce cas la vîtesse seroit dûe seulement à la moitié de la hauteur du fluide.

p. 601 COROLLAIRE III.

(26.) Si le tube avoit un plus grand diamètre que l'ouverture faite dans les parois du vase, la solution seroit encore la même, parce qu'il ne faudroit que mettre à la place de m le rapport de la grosseur du tube à celle de la veine contractée.

REMARQUE.

La solution que je viens de donner, contredit une idée reçue depuis longtemps par les Géomètres qui ont travaillé sur cette matière, & il faut convenir qu'elle laisse quelque obscurité dans l'esprit, parce qu'on ne voit pas bien que la contraction doive se faire de la même manière lorsque le tuyau est adapté au vase que lorsque rien ne trouble le mouvement du fluide à sa sortie ; cette incertitude m'a fait chercher une solution particulière pour confirmer les précédentes, & voici celle que j'ai trouvée.

SOLUTION particulière des cas des I.^{er} & II.^{e} Corollaires.

(27.) Cherchons d'abors le cas du *corollaire II*, & supposons toujours que le fluide, en sortant du tube, remplisse exactement toute l'étendue de son
Fig. 12 orifice & ait la même vîtesse dans tous ses points : soit la section du tube $= A$, la hauteur du fluide au-dessus du tube $= H$, & sa vîtesse à sa sortie $= u$; on sait, *article 7*, que le fluide sortant par l'orifice, exercera contre le vase une réaction égale au poids d'une colonne de fluide dont la base $= A$, & dont la hauteur sera double de celle qui est dûe à la vîtesse du fluide ; on aura donc cette réaction $= \dfrac{Auu}{g}$; mais nous avons vu aussi dans cet *article 7*, que cette réaction étoit égale au poids d'une colonne de fluide qui auroit A pour base, & pour hauteur celle du fluide au-dessus du tube, elle sera donc égale à $A.H$; comparant ces deux valeurs de la réaction, on aura $\dfrac{Auu}{g} = AH$ & $\dfrac{uu}{2g} = \dfrac{H}{2}$, comme nous l'avons trouvé, *article 25. C. Q. F. T. & D.*

p. 602 (28.) Cherchons à présent le cas du Corollaire premier, je supposerai
Fig. 11 d'abord qu'il n'y a point de tube adapté au vase, nous avons vu qu'alors la contraction est dans le rapport de 16 à 10, & que la vîtesse, au point de la contraction, est dûe à toute la hauteur du fluide au-dessus du tube ; d'où on conclut que la réaction est égale aux $\frac{10}{16}$ du poids d'une colonne d'eau dont la base seroit $= A$, & dont la hauteur seroit $= 2H$, c'est-à-dire que dans ce cas-là la réaction $= \frac{20}{16}AH$; je décompose cette expression en deux autres AH

& $\frac{AH}{4}$, dont la première AH exprime la pression que le fluide exerce sur la partie O, égale & opposée à l'orifice E, la seconde exprime une diminution de la pression que le fluide exerceroit sur les parties voisines de l'orifice, si ce fluide étoit stagnant, laquelle diminution est causée par le mouvement des molécules auprès du point E : or je remarque que lorsque le tube est adapté au vase, la première partie AH ne change pas, mais que le changement de vîtesse du fluide doit produire autour du point E un différent mouvement dans les molécules, & par conséquent une diminution de pression différente de $\frac{AH}{4}$; or on verra facilement que ce changement de pression doit suivre celui du carré de la vîtesse du fluide au point E ; donc si la vîtesse du fluide dans le cas du tube adapté est u, & que dans l'autre cas elle soit V, la diminution de pression dans le premier cas, sera $\frac{AH}{4} \cdot \frac{uu}{VV}$; il nous reste maintenant à déterminer V, c'est-à-dire la vîtesse du fluide à la sortie du vase, lorsqu'il n'y a point de tube : pour cela je remarque qu'alors la vîtesse au point de la plus grande contraction, seroit dûe à toute la hauteur du fluide au-dessus du tube, & que la vîtesse à la sortie du vase ou à l'entrée de l'orifice, n'est que les $\frac{10}{16}$ de celle de la plus grande contraction ; on aura donc $V = \frac{10}{16}\sqrt{(2gH)}$; mettant cette valeur dans l'expression ci-dessus $\frac{AH}{4} \cdot \frac{uu}{VV}$, on aura la diminution
p. 603 de pression dont nous avons parlé $= \frac{64}{100} \cdot \frac{uu}{2g} \cdot A$; donc la réaction totale du fluide contre le vase, sera $= \frac{AH}{4} + \frac{64}{100} \cdot \frac{uu}{2g} \cdot A$: mais on trouve aussi, *article 7*, que cette réaction $= A \cdot \frac{uu}{g}$, on aura donc $\frac{Auu}{g} = \frac{AH}{4} + \frac{64}{100} \cdot \frac{Auu}{2g}$; d'où l'on tire $\frac{uu}{2g} = \frac{100}{136}H$, comme dans l'*article 24*, ce qui ne laisse plus aucun doute sur la légitimité de la première solution, & qui me dispense d'appuyer ces résultats d'aucune expérience : je remarquerai cependant que la supposition que j'ai faite de l'égalité de vîtesse de toutes les molécules du fluide qui sortent du tube, n'étant pas exactement vraie dans la pratique, il arriveroit que les expériences qu'on pourroit faire pour déterminer cette vîtesse par les quantités d'eau écoulées, la donneroient toujours un peu plus petite que je ne l'ai assignée, il est facile d'en voir la raison par ma solution même.

REMARQUE II.

(29.) Nous venons de démontrer que la conservation des forces vives n'avoit pas lieu sans restriction, dans l'écoulement des fluides par des tubes cylindriques adaptés aux vases, & nous avions déja fait voir la même chose pour les tubes dont les côtés sont divergens, comme dans la *figure 10* : cette démonstration s'appliqueroit également aux vases d'une forme irrégulière (*comme figure 13*), & on peut même l'étendre jusqu'aux syphons qui n'ont pas la même grosseur dans toute leur longueur, mais pour démontrer cette dernière proposition, il est bon d'entrer dans quelques détails : M. Daniel Bernoulli a donné dans son Hydrodynamique, *page 115*, le problème du mouvement d'un fluide dans un siphon de figure quelconque, en employant le principe de la conservation des forces vives ; la solution de ce Savant fournit ce résultat, que quelle que soit la figure de la partie inférieure du siphon, la
p. 603 surface du fluide la plus élevée dans le commencement du mouvement descend de la même quantité ; cette solution suit nécessairement du principe employé : cependant il paroît évident qu'elle ne peut être vraie lorsqu'on supppose que dans la partie inférieure du siphon il y un étranglement dont le diamètre est infiniment plus petit que celui des parties supérieures ; il suit même de la solution, que la vîtesse au point de cet étranglement, devroit être infinie, ce qui est impossible : il faut donc nécessairement que le principe sur lequel cette solution est fondée, ne puisse être appliqué sans restriction au cas dont il s'agit, & de-là je conclus qu'il n'a véritablement lieu que lorsque le siphon a par-tout la même grosseur, cette conséquence se tire de la loi de continuité ; en effet, lorsque la grosseur du siphon est la même dans toute sa longueur, le principe s'applique à ce mouvement du fluide & donne exactement la vîtesse pour chaque instant ; mais lorsque la partie inférieure a un étranglement infiniment petit, le même principe employé sans restriction, donne une vîtesse infiniment plus grande qu'elle n'est réellement ; donc dans tous les cas intermédiaires, le principe doit donner une vîtesse trop grande, & par conséquent on ne doit l'employer à la solution du problème des siphons, que lorsque leur grosseur est uniforme : enfin, en général lorsque dans un vase quelconque quelque tranche de fluide perd une partie de sa vîtesse contre le fluide antérieur, soit subitement, soit par degrés insensibles, il y a une perte de forces vives ; on voit par-là que le principe de la conservation des forces vives n'a pas lieu dans la plupart des questions d'Hydrodynamique pour la solution desquelles on l'avoit employé jusqu'à présent.

REMARQUE.

(30.) Je prends encore dans la théorie de la résistance des fluides, un exemple du mauvais emploi qu'on peut faire de ce principe ; on sait que pour
Fig. 14 résoudre le problème de la résistance des fluides d'une manière générale, on suppose un corps fixe D dans le milieu d'un fluide indéfini $MNOP$, qui a un mouvement rectiligne & uniforme : on imagine ensuite que les molécules du
p. 605 fluide, en s'approchant du corps D, décrivent des lignes courbes $abcd$, *&c.* $efgh$, *&c.* ou plutôt se meuvent dans les petits canaux courbes $abcdefgh$, *&c.* & on cherche à déterminer par les conditions du problème, tant la figure de ces petits canaux que la pression qui en résulte contre le corps D ; mais il est facile de voir que chacun de ces petits canaux a nécessairement une partie bf plus étroite que les parties antérieures dh, & que par conséquent ils sont dans le cas des siphons dont nous avons parlé dans la remarque précédente ; on ne peut donc pas employer dans ce mouvement le principe de conservation des forces vives ; mais indépendamment de cette preuve générale, en voici une particulière à la théorie de la résistance des fluides, c'est qu'en employant sans restriction dans cette théorie le principe dont il s'agit, le résultat du calcul donnera toujours une résistance nulle ; pour le démontrer, supposons que le corps D se meuve uniformément dans un fluide tranquille, entraîné par l'action du poids P : on sait que suivant le principe, la différence de la force vive du fluide devra être égale à la différence de la descente actuelle du poids P ; mais puisque le mouvement est censé parvenu à l'uniformité, la différence des forces vives $= 0$; donc la différence de la descente actuelle sera aussi $= 0$, ce qui ne se peut pas à moins que le poids P ne soit lui-même $= 0$: or le poids P marque la résistance des fluides ; donc la supposition du principe dont il s'agit, donne toujours une résistance nulle.

SCHOLIE.

(31.) Ce Mémoire étant déjà fort long, je me dispenserai d'examiner plusieurs autres questions que M.[rs] Bernoulli & d'Alembert ont traitées dans les deux ouvrages déjà cités, on y distingue principalement la question de l'écoulement du fluide qui sort d'un vase qu'on entretient toujours plein ; un des cas de ce problème avoit échappé à M. Bernoulli & a été résolu par M. d'Alembert, dont le principe s'y applique fort naturellement, une autre question encore plus importante, est celle de la pression que les fluides en mouvement exercent contre les parois des vases ; rien ne fait plus d'honneur à la sagacité de M. Bernoulli que cette théorie, il est bon d'en voir le détail

p. 606 dans son Hydrodynamique , ainsi que les expériences satisfaisantes & fort ingénieuses qui la confirment : ces diverses questions & plusieurs autres qui sont dans les deux ouvrages, exigeroient un long examen, c'est pourquoi je ne l'entreprendrai pas ; je vais seulement en finissant ce Mémoire, donner une solution très-simple d'un problème résolu par M. d'Alembert, dans lequel il s'agit de trouver le cas où un fluide, qui se meut dans un vase, doit cesser de faire une masse continue.

PROBLEME V.

Fig. 13 (32.) *Soit un vase $ABCD$ dans lequel un fluide se meut de AB vers CD, de manière que par une cause quelconque, la vîtesse d'une tranche donnée Ko soit u : il s'agit de trouver si dans l'instant suivant, le fluide doit cesser de faire une masse continue, & dans le cas où cela arriveroit, il faut déterminer les points de séparation.*

SOLUTION.

Soit tirée dans le vase une horizontale quelconque EF, & considérons le partie $EFCD$ comme isolée ; si on appelle EF, Z ; CD, B ; PR, x ; KO, a ; la vîtesse en $KO = u$, on trouvera pour le mouvement de cette partie $EFCD$ considérée comme seule, l'équation

$$gx - \frac{a^2udu}{Zdx} \cdot \int \frac{dx}{Z} - \frac{a^2u^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{Z^2}\right) = 0 \ ;$$

d'où l'on tire

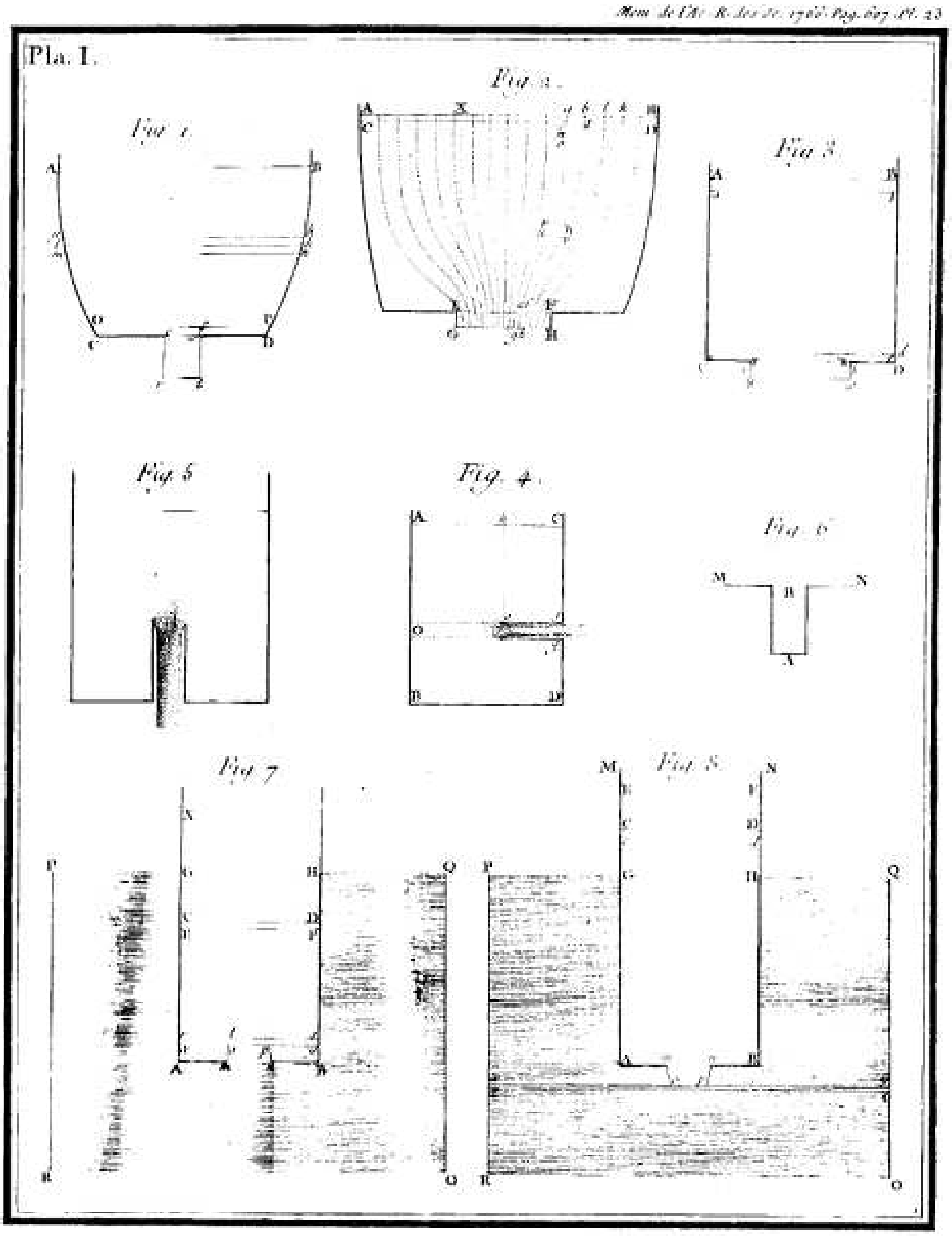
$$du = \frac{Zdx \cdot (gx - \dfrac{a^2u^2 \cdot (Z^2 - B^2)}{2B^2Z^2}}{a^2u^2 \displaystyle\int \frac{dx}{Z}} \ ;$$

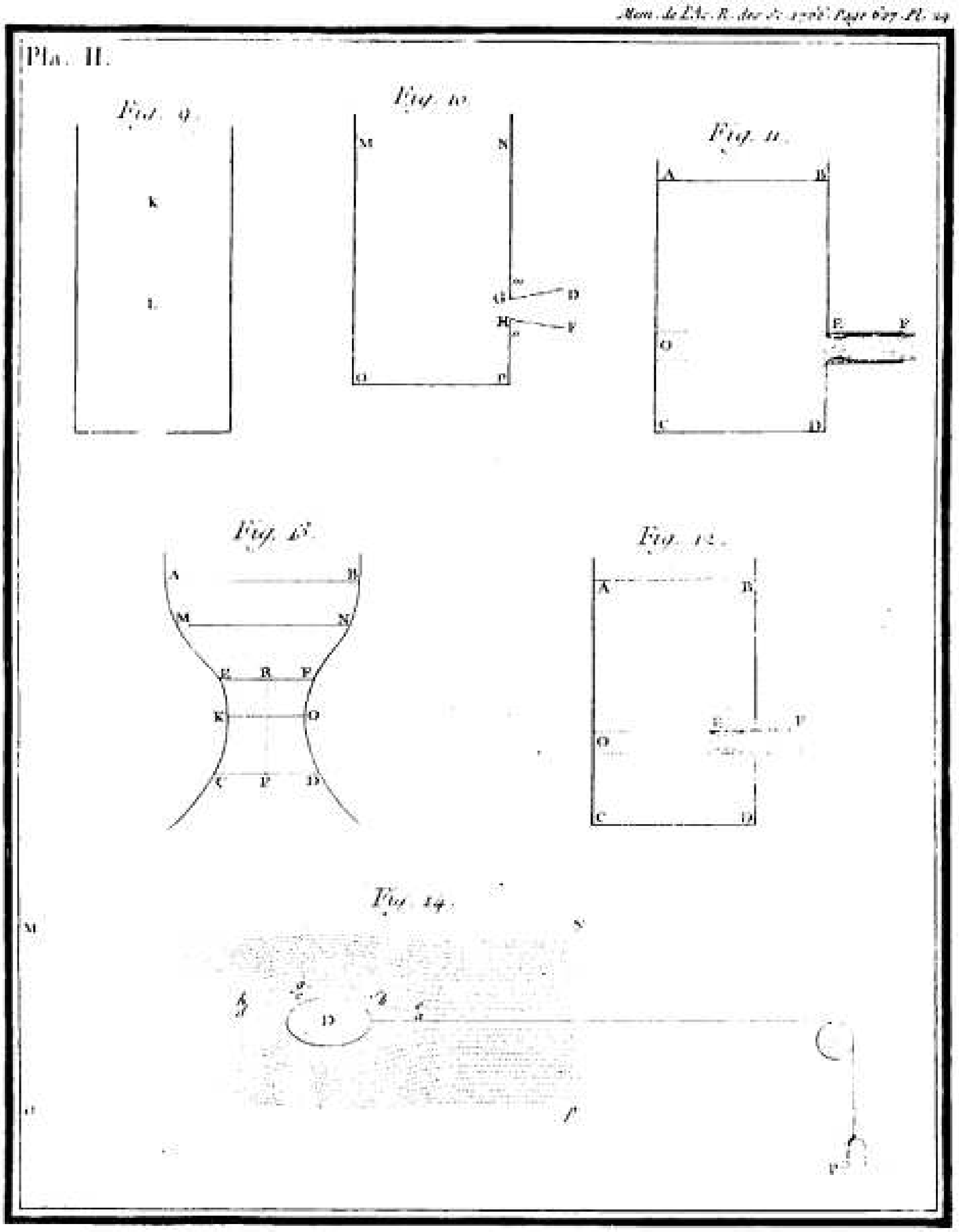
or je dis que si la partie inférieure se séparoit de la partie supérieure dans la ligne EF, l'incrément du qui répondroit à EF, seroit un *maximum*, c'est-à-dire qu'en ajoutant une autre partie quelconque $MNEF$ à la partie $CDEF$, l'incrément du' qu'on trouveroit en regardant $MNCD$ comme masse isolée, seroit plus petit que celui qui répond à la tranche EF : en effet, s'il étoit plus
p. 607 grand, cela ne pourroit venir que de ce que la partie $MNEF$ prise séparément, auroit un incrément du'' plus grand que celui de la partie $EFCD$ prise aussi séparément ; d'où il suivroit que la tranche inférieure de la partie $MNEF$ tendroit à aller plus vîte que la tranche supérieure de la partie $EFCD$, &

que par conséquent le fluide ne se séparoit pas dans la tranche EF, ce qui est contre l'hypothèse : il faut donc, pour que la ligne EF soit la ligne de séparation, que l'incrément du pour la partie $EFCD$ soit un *maximum*; ainsi il n'y aura qu'à différentier la valeur de du en faisant varier x, Z, & $\int \frac{dx}{Z}$ & égaler la différentielle à zéro, l'équation qu'on trouvera déterminera tous les points de séparation.

La difficulté ne sera pas plus grande lorsqu'on supposera le fluide pressé par le poids de l'atmosphère ; en effet, il n'y aura qu'à chercher l'incrément du en supposant que la pression aggisse sur CD, & qu'aucune pression n'agisse sur EF, ou égalera l'incrément du à un *maximum*, & on aura tous les points de la division du fluide, comme ci-dessus.

Mem. de l'Ac. R. des Sc. 1766. Pag. 607. Pl. 23




Mem. de l'Ac. R. des Sc. 1766. Page 627. Pl. 24
Pla. II.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 12.
Fig. 14.

Correspondance D'Alembert – Lagrange
Extraits relatifs à l'écoulement des fluides (1764-1782)

• Lagrange à D'Alembert
A Turin, ce 13 novembre 1764

« J'ai trouvé, par une méthode directe, mais assez singulière, la valeur de $\varphi(x)$, qui résulte de cette équation

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1},$$

lorsque $y=f+hx$. Cette valeur est

$$\varphi(x)=\frac{M(f+hx)}{\theta\pi}+A(f+hx)^{\frac{\mu}{\theta}}+B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires, μ un nombre quelconque entier, π le rapport de la circonférence au diamètre, et θ un nombre tel que $\tan g\theta\pi=h$.

Si l'on fait $h=-1$, on aura le cas de l'article V du quatrième Mémoire de vos *Opuscules.* Cela me fait croire que, quelle que soit l'équation entre x et y, on pourra toujours avoir la valeur de $\varphi(x)$ par la condition dont il s'agit ; au moins ce ne sera qu'une affaire de calcul ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 12 janvier 1765

« Votre théorème sur

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$$

est charmant ; j'ai trouvé moyen, ce me semble, de le généraliser beaucoup par les considérations suivantes :

1° Soit

$$(1+h\sqrt{-1})^{x'+y'\sqrt{-1}}=(1-h\sqrt{-1})^{x'+y'\sqrt{-1}},$$

on aura

$$y'\log\sqrt{1+hh}+x'(\omega\pm 2n\pi)=\pm\rho\pi,$$

$$y'\log\sqrt{1+hh}-x'(\omega\pm 2n\pi)=\pm\sigma\pi,$$

ω étant le plus petit des angles qui ont h pour sinus et 1 pour cosinus, et pour rayon $\sqrt{1}+hh$, n et n' des nombres entiers quelconques, et ρ, σ des nombres entiers tous deux pairs ou tous deux impairs. Si $y=0$, alors $n=n'$, ce qui revient à votre cas ; et pour lors $\rho=-\sigma$, et ρ peut être tel nombre entier qu'on voudra. Je tire ce théorème de ma méthode pour trouver la valeur de $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$, donnée dans mon *Traité des vents* et ailleurs.

2° De là je conclus aisément que, au lieu de votre terme $(f+hx)^{\frac{\mu}{\theta}}$, je puis mettre

$$(f+hx)^{x'+y'\sqrt{-1}},$$

x' et y' ayant les conditions susdites. Je puis même mettre

$$[k+A(f+hx)^{\lambda}]^{p},$$

λ étant $x'+y'\sqrt{-1}$, p un entier positif ou négatif, et k une constante quelconque. Je puis même encore, à ce qu'il me semble, mettre

$$[k+A'(f+hx)^{\lambda}]^{p},$$

pourvu que $p\lambda = x'+y'\sqrt{-1}$, x' et y' ayant les propriétés susdites.

3° Je pourrai aussi mettre tant de termes qu'on voudra de cette forme

$$[k+A(f+hx)^{\lambda}]^{p}+[k'+A'(f+hx)^{\lambda'}]^{p'}+\ldots,$$

k, k' étant des constantes quelconques et $p\lambda$, $p'\lambda'$ ayant les conditions susdites.

4° Au lieu de ces termes je pourrai mettre c (nombre dont le log = 1) élevé à des puissances dont ces termes sont les exposants.

5° Je pourrai de même former une quantité où tous ces termes, exponentiels ou non, seront ajoutés, soustraits, multipliés, divisés les uns par les autres comme on voudra. Dans tous ces cas, j'aurai la formule

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=0.$$

6° Pour avoir maintenant le cas où le deuxième membre est $2M\sqrt{-1}$, je n'ai qu'à prendre tant de termes que je voudrai,

$$a\log\frac{(1+h\sqrt{-1})^{m}}{(1-h\sqrt{-1})^{m}}+b\log\frac{(1+h\sqrt{-1}^{\,n})}{(1-h\sqrt{-1}^{\,n})},$$

que je ferai égaux à $2M\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$ma(\omega\pm 2n\pi)+nb(\omega\pm 2n'\pi)+\ldots=2M\ldots,$$

et ainsi du reste. Je ne doute pas même que cette méthode ne puisse être encore poussée plus loin, et je vois clairement qu'on résoudrait aussi le problème si l'on avait

$$a\varphi(bx+cy\sqrt{-1})+f\varphi(cx+gy\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1},$$

et, en général,

$$a\varphi(bx+cy)+f\varphi(cx+gy)=2M,$$

a, b, c, f, g, M étant quelconques, réels ou imaginaires.

Je ne suis point éloigné de penser, comme vous, que le problème de

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$$

peut se résoudre en général ; on peut même en donner une espèce de démonstration en supposant $\varphi x=q$ et remarquant que l'équation devient alors

$$\frac{ydq}{dx}-\frac{y^3d^3q}{2\cdot 3dx^3}-\ldots=2M,$$

qui est une série infinie, etc., d'où l'on peut tirer la valeur de q en série. Mais il est bon de remarquer aussi que la solution est illusoire si x fini et $=0$ donne $y=0$ en quelque point, comme il arrive dans le cas de $y=f+hx$ et dans mille autres, car vous trouverez aisément que dans ce cas M sera $=0$ pour toutes les courbes. Donc, alors, ou le problème serait indéterminé, ou les particules du fluide décriraient des courbes semblables à la courbe des parois. Or vous verrez aisément que cela est impossible. La solution est donc illusoire, quoique bonne géométriquement ».

• Lagrange à D'Alembert
A Turin, ce 26 janvier 1765

« Votre théorème sur

$$(1+h\sqrt{-1})^{x'+y'\sqrt{-1}}=(1-h\sqrt{-1})^{x'+y'\sqrt{-1}}$$

et les conséquences que vous en tirez m'ont enchanté ; ce que je vous ai envoyé là-dessus n'est qu'un cas particulier d'une solution générale par laquelle on peut trouver $\varphi(x)$ dans cette équation,

$$a\varphi(x+\alpha y)+b\varphi(x+\beta y)+\ldots=X,$$

X étant une fonction quelconque de x, et $y=A+Bx$; et cette solution elle-même n'est aussi qu'un cas particulier d'une méthode d'intégration par laquelle je tire la valeur complète de y de cette équation du degré m,

$$Py+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{dy^2}{dx^2}+\ldots=X,$$

(P, Q, ..., X étant des fonctions quelconques de x), en supposant que je connaisse m ou au moins $m-1$, valeurs particulières de y dans l'équation

$$Py+Q\frac{dy}{dx}+R\frac{dy^2}{dx^2}+\ldots=0 ».$$

• Lagrange à D'Alembert
A Turin, ce 6 septembre 1765

« J'ai trouvé, ces jours passés, une méthode de faire disparaître l'imaginaire $\sqrt{-1}$ des expressions

$$\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2} \text{ et } \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

en les réduisant en série de la manière que voici,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2} \\ = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}[\varphi(x) \quad & - \quad \frac{1}{1+1}\frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} \\ & + \quad \frac{1}{1+4}\frac{\varphi(x+2t)+\varphi(x-2t)}{2} \\ & - \quad \frac{1}{1+9}\frac{\varphi(x+3t)+\varphi(x-3t)}{2} + \ldots]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \\ = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}[\frac{1}{1+1}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{2} \quad & - \quad \frac{2}{1+4}\frac{\varphi(x+2t)-\varphi(x-2t)}{2} \\ & + \quad \frac{3}{1+9}\frac{\varphi(x+3t)-\varphi(x-3t)}{2} - \ldots],\end{aligned}$$

moyennant quoi je suis en état de déterminer, par approximation, le mouvement d'un fluide qui se meut dans un canal horizontal et rectangulaire, en supposant que le fluide soit parvenu à un état permanent et qu'on connaisse le mouvement qu'il a dans une section quelconque du canal, mouvement qui peut être quelconque comme la figure initiale d'une corde vibrante. Il est vrai que, lorsque la fonction φ est donnée soit algébriquement, soit transcendantement, on peut toujours faire disparaître l'imaginaire $\sqrt{-1}$ des expressions proposées ; mais la difficulté est de trouver la valeur de ces expressions lorsque la fonction dont il s'agit n'est donnée que par une courbe dont on ne connaît point l'équation ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 28 septembre 1765

« Votre manière de dégager l'imaginaire de l'équation

$$y = \varphi(x+t\sqrt{-1}) \pm \varphi(x-t\sqrt{-1})$$

me paraît très-curieuse ; j'entrevois différents moyens de parvenir à cette formule ou à quelque autre équivalente. Mais je ne me permets pas même d'y penser ; je ne veux pas m'occuper de Géomètrie avant trois mois, si ce n'est pour chercher dans mes paperasses de quoi composer la Lettre que je vous ai promise ».

• Lagrange à D'Alembert
A Turin, ce 15 janvier 1766

« Je conviens que votre manière de réduire en une série de termes tout réels la quantité $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$ est préférable à la mienne, en ce qu'elle donne une suite finie lorsque $\varphi(x)$ est $= Ax^m + Bx^n + \ldots$; j'ai même fait à cette occasion une remarque assez curieuse : c'est que les coefficients A , B, C,... de la formule

$$\begin{aligned}\varphi(x+my) - m\varphi[x+(m-1)y] + \frac{m(m-1)}{2}\varphi[x+(m-2)y] + \ldots \\ = Ay^m\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m} + By^{m+1}\frac{d^{m+1}\varphi(x)}{dx^{m+1}} + Cy^{m+2}\frac{d^{m+2}\varphi(x)}{dx^{m+2}} + \ldots\end{aligned}$$

(vous avez écrit par inadvertance $d^m\varphi(x)$, $d^{m+1}\varphi(x)$ au lieu de $\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}$, $\frac{d^{m+1}\varphi(x)}{dx^{m+1}}$,...) sont les mêmes que ceux de la formule

$$(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots) = Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + \ldots,$$

de sorte qu'on aura, comme l'on sait, en mettant α au lieu de $\frac{1}{2}$, β au lieu de $\frac{1}{2\cdot 3}$,... , et faisant $m = n-1$,

$$A = 1,\ B = \frac{n-1}{1}\alpha,\ C = \frac{n-2}{2}\alpha B + \frac{2n-2}{2}\beta,$$

$$D = \frac{n-3}{3}\alpha C + \frac{2n-3}{3}\beta B + \frac{3n-3}{3}\gamma,$$

et ainsi de suite

J'ai trouvé, de plus, que les coefficients de cette formule

$$\begin{aligned} y^m\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m} &= P\left(\varphi(x+my) - m\varphi[x+(m-1)y] + \frac{m(m-1)}{2}\varphi[x+(m-2)y] + \ldots\right) \\ &+ Q\left(\varphi[x+(m+1)y] - (m+1)\varphi(x+my) + \frac{(m+1)m}{2}\varphi[x+(m-1)y] + \ldots\right) \\ &+ R\left(\varphi[x+(m+2)y] - (m+2)\varphi[x+(m+1)y] + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}$$

sont les mêmes que ceux de la formule

$$(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots)^m = Px^m + Qx^{m+1} + Rx^{m+2} + \ldots$$

Si l'on fait m négatif, ces formules auront lieu également, et l'on aura

$$\frac{d^{-m}\varphi(x)}{dx^{-m}} = \int^m \varphi(x)dx^m \text{ ».}$$

• D'Alembert à Lagrange
A Turin, ce 25 mars 1766

« Je prépare une nouvelle édition de mon Traité des Fluides. Il contiendra peu de choses nouvelles ; je ne ferai guère qu'y indiquer ce qui a été fait depuis sur cette matière par moi-même ou par d'autres, parce que je n'aime pas à faire acheter de nouveau les mêmes choses au public ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 15 juillet 1769

« J'ai un peu médité sur le paradoxe qui concerne la résistance des fluides ; il me semble que tout dépend de la supposition que les particules du fluide aient le même mouvement à la partie postérieure qu'à la partie antérieure ; j'avoue que cette supposition est légitime analytiquement, mais il se peut qu'elle ne le soit pas physiquement. En effet, si l'on considère un fluide homogène et sans pesanteur qui se meuve dans un tuyau infiniment étroit, si l'on veut, et évasé en haut et en bas, en sorte que ce tuyau ait la même figure de part et d'autre de la section de la plus petite largeur, il est clair qu'on peut supposer analytiquement que le mouvement du fluide soit aussi le même des deux côtés de cette section ; cependant il est facile de concevoir que le fluide doit nécessairement quitter les parois du vase et se mouvoir comme une masse solide continue, après avoir passé par la plus petite section ; c'est aussi ce que vous avez remarqué dans votre *Traité des fluides* et ailleurs. Or, le cas qui donnerait la résistance nulle peut se réduire, si je ne me trompe, à celui dont je viens de parler, moyennant quoi on pourra expliquer le paradoxe proposé ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 12 septembre 1770

« Mais, en vérité, je voudrais bien que vous agissiez avec moi avec franchise et que vous me dissiez de votre côté ce que vous pouvez désirer en Livres de Mathématiques ou autres ; je prendrai des mesures pour que vous receviez en mon absence l'*Hydraulique* de l'abbé Bossut, si, comme je le crois, elle paraît avant mon retour ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 1er février 1771

« Je compte aussi vous envoyer incessamment une *Hydrodynamique* de l'abbé Bossut, qui vient de paraître, et où il y a des expériences bien faites et quelques recherches utiles ».

• Lagrange à D'Alembert
A Paris, ce 4 avril 1771

« Quoique j'eusse déjà autrefois bien étudié votre excellent *Traité des fluides*, je l'ai relu avec une nouvelle satisfaction et avec beaucoup de fruit. Mon amour-propre n'a pas été médiocrement flatté de la mention honorable que vous avez bien voulu faire de moi en plusieurs endroits de cet Ouvrage ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 21 avril 1771

« Au reste, je suis occupé depuis quelque temps de nouvelles recherches sur le mouvement des fluides ; je crois qu'elles pourront être assez intéressantes, si ma santé me permet de les achever, car je suis toujours dans un état qui ne me permet de me livrer au travail que très-faiblement, et, pour peu que je commette sur cet article le plus léger excès, les maux de tête et l'insomnie en sont la triste récompense ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 14 juin 1771

« Je m'occupe cependant d'un moment à l'autre de la théorie des fluides et de quelques autres recherches légères. A propos de cela, je vous serais très-obligé de lire à votre loisir le Mémoire du chevalier de Borda, qui est dans notre Volume de 1766, sur le mouvement des fluides dans des vases ; il me paraît plein de mauvais raisonnements, dont j'ai déjà réfuté quelques-uns et dont j'espère réfuter le reste quand je donnerai mes nouvelles recherches sur ce sujet ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 8 novembre 1771

« P.-S. - Je vous serai obligé de me dire, toujours à votre loisir, ce que vous pensez du Mémoire du chevalier de Borda imprimé dans notre Volume de 1766, page 579. Il me semble que sa théorie est, à beaucoup d'égards, bien précaire, et que ses raisonnements ne sont pas fort concluants. Je crois avoir trouvé une théorie du mouvement des fluides dans des vases qui expliquera les expériences d'une manière plus satisfaisante ; mais il me faudra du temps et un peu plus de tête pour mettre tout cela en ordre. Adieu, mon cher ami ; le papier m'avertit qu'il est temps de vous laisser respirer ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 16 décembre 1771

« Vous recevrez, mon cher et illustre ami, ou peut-être aurez-vous déjà reçu par M. Salomon, musicien du prince Henri, lequel vient de partir pour Paris, un Livre que je vous envoie : c'est le premier Volume des *Nouveaux Commentaires* de Goettingue, qui paraît depuis peu. Comme cet Ouvrage contient quelques Mémoires de Géométrie, j'ai cru qu'il pourrait vous faire quelque plaisir ; du moins servira-t-il à vous faire juger de l'état de cette science en Allemagne, et je doute fort qu'il vous en donne une assez bonne idée. Il y a, d'ailleurs, une autre raison particulière qui m'a engagé à vous envoyer ce Volume : c'est qu'il renferme un Mémoire qui vous intéresse particulièrement et qui est une espèce de défense de l'*Hydraulique* de Jean Bernoulli contre vos objections insérées dans le *Traité des fluides*. L'auteur de ce Mémoire est un M. Kästner, qui a une grande réputation en Allemagne comme géomètre et comme littérateur ; vous jugerez combien cette double réputation est fondée par la simple lecture du Mémoire dont je vous parle ; vous verrez que l'auteur y prétend aussi briller du côté de l'esprit et de la plaisanterie, et vous vous tiendrez les côtes de rire.

[...]

Je vous promets de lire attentivement les Mémoires de M. Borda sur les fluides et de vous en dire mon avis, à condition seulement que, si cet avis lui est en quelque façon peu favorable, vous ne me compromettiez pas vis-à-vis de lui, car je vous avoue que je n'aime pas les querelles et que je regarde mon repos comme *rem prorsus substantialem* ».

• D'ALEMBERT À LAGRANGE
A Paris, ce 6 février 1772

« M. Salomon ne m'a remis que depuis deux jours le Volume de Göttingen, dont je vous suis très-obligé. Ce Volume me paraît bien faible de Géométrie, comme à vous. La pièce de Kaestner contre moi est, ce me semble, bien mince pour le fond et surtout bien ridicule pour la forme. Je ne sais si elle vaut la peine que j'y réponde. En tout cas, ce serait en peu de mots et tout à mon aise.

[...]

Vous me ferez très-grand plaisir d'examiner les objections du chevalier de Borda, et vous pouvez en toute sûreté me dire ce que vous en pensez. Soyez très-sûr que vous ne serez compromis en aucune manière. Il me semble : 1° que le raisonnement qu'il fait à la page 584 (*Mémoires* de 1766) est bien vague et bien précaire ; 2° que son lemme de la page 591 ne peut s'appliquer aux fluides, qui dans leur équilibre, et par conséquent dans leur choc, ne doivent pas suivre les mêmes lois que les corps solides. 3° Je n'entends rien non plus au raisonnement qui précède ce lemme dans la même page. 4° Je n'entends pas davantage son raisonnement de la page 599. Il est bien vrai qu'il n'y a point de vitesse *infinie* ; mais aussi n'y a-t-il point de diamètre *infiniment petit* ; et il s'ensuivrait de ce raisonnement que la vitesse, même dans un canal infiniment étroit, n'est pas en raison inverse de la largeur, ce qu'il suppose pourtant lui-même dans son problème I (p. 581). 5° Il me semble aussi qu'il n'a pas raison, page 605, quand il dit que la différence de force vive du fluide devra être égale à la différence de descente actuelle du poids P. Je crois que la pesanteur du poids

P doit être égale, non à la différence de force vive du fluide, mais à la pression qui en résulte contre le corps plongé, et cette pression peut n'être pas $= 0$, quoique la différence de force vive soit $= 0$. Il est bien vrai qu'il y a des cas, comme celui dont j'ai parlé dans mon Tome V d'*Opuscules*, où la résistance paraît devoir être nulle ; mais ce n'est que lorsque la partie antérieure et la postérieure sont semblables, parce qu'alors non-seulement la différence de force vive, mais aussi la pression qui en résulte est égale à zéro, comme je l'ai prouvé. J'avoue que c'est là un grand paradoxe, mais je n'y saurais que faire. La plus forte objection est celle que vous m'avez faite, il y a quelque temps, sur la séparation des tranches du fluide ; mais, après l'avoir examinée, il me semble que cette objection n'a pas lieu quand le fluide est *indéfini*, comme on le suppose, au-dessus et au-dessous du corps flottant. Et, en effet, il est d'expérience que, quand une rivière, par exemple, se rétrécit en un endroit pour s'élargir ensuite, il n'y a pas de séparation, ce que la théorie peut, à ce que je crois, expliquer aisément par ce principe que, si un canal, que je suppose partout d'une largeur très-petite, va d'abord en s'élargissant pendant un assez petit espace, et qu'ensuite il reste de la même largeur, étant prolongé *indéfiniment* et rempli de fluide, et que dans la *seule partie* qui va en s'élargissant on applique à chaque tranche des forces II, constantes ou variables, il n'en résultera aucun mouvement dans le fluide ; à peu près par la même raison que, si un corps fini vient frapper une masse infinie, le tout restera en repos après le choc. 6° Je crois aussi qu'on peut démontrer aisément qu'en supposant, avec le chevalier de Borda, les petits canaux de la figure seconde, le fluide ne descendrait pas également dans ces petits canaux, et qu'ainsi, contre l'expérience et contre la supposition même de l'auteur, la surface supérieure ne demeurerait pas horizontale. 7° Ces canaux ont d'ailleurs un autre inconvénient : c'est de rendre *stagnante* une partie considérable du fluide, autre supposition dont on peut aisément démontrer l'impossibilité ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 24 février 1772

« Mais le peu de place qui me reste dans cette Lettre m'oblige à réserver pour une autre ce que j'aurais encore à vous dire sur ce sujet, ainsi que mes observations sur le Mémoire de M. le chevalier de Borda, que je viens de lire et que je trouve bien peu digne de lui. Ses objections contre votre théorie ne sont que des *sofisticherie*, pour ne rien dire de plus. La réponse que vous lui faites dans l'article 113 de la nouvelle édition de votre *Traité des fluides* me paraît très-juste, et il vous sera aisé de réfuter de même tout le reste de son Mémoire. Avez-vous remarqué le paralogisme qu'il fait à l'article 7 pour trouver la contraction de la veine ? Ne trouvez-vous pas bien pitoyables les raisonnements par lesquels il prétend prouver qu'il y a toujours une perte de forces vives, etc. » ?

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 25 mars 1772

« Je suis plus content que surpris du jugement que vous avez porté du Mémoire du chevalier de Borda sur les fluides. Il me paraît, comme à vous, plein de mauvais raisonnements, bien vagues et bien peu géométriques. J'ai fait bien des recherches nouvelles sur le mouvement des fluides, que j'achèverai tout à mon aise et peut-être jamais ; mais je donnerai dans mon premier Volume d'*Opuscules* une méthode nouvelle pour traiter cette matière, dont je crois que vous ne serez pas mécontent, et qui me paraît propre à satisfaire à tous les cas et à toutes les expériences, sans recourir à la mauvaise théorie du chevalier de Borda ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 23 avril 1772

« En attendant ce coup de cloche, je fais imprimer le sixième Volume de mes *Opuscules*, où vous pourrez trouver d'avance des symptômes d'une tête fort affaiblie. J'aurais voulu y faire entrer beaucoup de recherches sur les fluides, qui sont fort avancées ; mais je les réserve pour un autre Volume, qui peut-être ne viendra jamais ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 22 août 1772

« L'Ouvrage de Kaestner que vous m'avez envoyé me paraît assez peu de chose. Cet homme me paraît bien médiocre comme géomètre, bien ginguet comme philosophe et bien ridicule comme bel esprit. Croyez-vous que je doive répondre à ses objections sur mon *Hydrodynamique* ? Il me semble qu'elles n'en valent pas trop la peine. Je ferai pourtant ce que vous me conseillerez à ce sujet, car il y a des demi-savants à qui la réputation de cet homme peut en imposer ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 15 octobre 1772

« Je ne sais si notre Kaestner mérite que vous lui fassiez l'honneur de lui répondre ; je vous le donne pour un grand fat à certains égards ; à d'autres il ne manque pas de mérite : il passe surtout pour un des meilleurs écrivains allemands d'aujourd'hui ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 1er janvier 1773

« Il y a pourtant une méthode nouvelle pour calculer le mouvement des fluides, dont je pourrai tirer parti si le *fatum* me permet encore quelques travaux mathématiques, car je vais y renoncer au moins pendant toute l'année prochaine, et, pour ne pas me pendre d'ennui, je travaillerai à l'histoire de l'Académie française, qui me fatiguera moins et me fera une espèce d'amusement ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 9 avril 1773

« J'y ai donné une manière nouvelle d'envisager le mouvement des fluides dans des vases, qui peut servir, si je ne me trompe, à expliquer les mouvements les plus irréguliers, sans avoir recours à la théorie fausse et précaire du chevalier de Borda sur ces questions. Je me propose même de développer cette théorie, sur laquelle j'ai déjà bien des matériaux ; mais je ne me mettrai pas sitôt à ce travail, ayant résolu, pour reposer ma tête, de m'abstenir au moins pendant une année de tout travail mathématique ; j'y supplée par quelques occupations littéraires, et principalement par l'histoire de l'Académie française, dont je fais la continuation et que j'ai fort avancée cet hiver ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 13 juin 1773

« Vous ne trouverez pas grand'chose qui mérite votre attention dans le reste de mon sixième Volume, que vous avez reçu. Je crois seulement qu'on peut tirer un assez bon parti du nouveau principe d'Hydrodynamique que j'ai donné, et qui, si je ne me trompe, est la vraie clef du mouvement des fluides ; mais je n'ai plus assez de tête pour le suivre ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 6 décembre 1773

« Vous savez tout le prix que j'attache à vos observations. Je voudrais savoir ce que vous pensez de ma nouvelle méthode pour le mouvement des fluides. Il me semble qu'elle pourrait servir de base à une Hydrodynamique toute nouvelle et qu'elle expliquerait mieux les phénomènes que la mauvaise théorie du chevalier de Borda. Mais je ne sais si je pourrai en tirer grand parti, malgré tout le désir que j'en ai ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 14 avril 1775

« Cet engagement m'obligera à revenir un peu à la Géométrie, et surtout aux fluides, sur lesquels j'ai depuis longtemps bien des matériaux qui dorment. Vous ne m'avez jamais dit ce que vous pensiez de la petite méthode que j'ai donnée dans mon sixième Volume d'*Opuscules* pour déterminer le mouvement des fluides dans des vases ; je crois qu'on en peut tirer parti pour perfectionner cette théorie ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 29 mai 1775

« Adieu, mon cher et illustre ami ; je vous parlerai une autre fois de votre nouvelle méthode pour le mouvement des fluides, que j'ai trouvée très ingénieuse et qui mérite bien d'être poussée plus loin, comme vous le promettez ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 15 décembre 1775

« Je m'occupe, dans le peu de moments où je puis travailler, de ramasser des matériaux pour un septième Volume d'*Opuscules* ; mais je ne sais encore quand il sera en état de paraître, ni même s'il le sera jamais. Il contiendra de nouvelles recherches sur le mouvement des fluides et sur quelques autres objets, et je voudrais bien que dans cette production, qui sera vraisemblablement mon dernier et faible effort en Mathématique, vous pussiez trouver encore quelque chose qui vous parût digne d'attention ; mais, à vous dire le vrai, j'en doute beaucoup ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 11 décembre 1779

« J'espère trouver dans ce dernier le développement de votre nouvelle théorie des fluides ; l'idée en est aussi belle que féconde, et bien digne du créateur de cette branche des Mathématiques ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 15 avril 1781

« J'ai lu vos nouvelles recherches avec le plus grand plaisir ; elles sont très-intéressantes par la variété des matières et par la manière dont elles sont traitées, et j'y ai trouvé beaucoup à profiter ; celles qu'elles m'ont donné occasion de faire de mon côté, et dont je vous ai entièrement obligation, concernent la théorie du mouvement des fluides et ont pour but l'éclaircissement de quelques points essentiels de cette théorie. Je ne suis pas encore tout à fait content de mon travail, mais je compte le reprendre dès que je me serai débarrassé de quelques autres objets, et je soumettrai alors à votre jugement ce qui me paraîtra n'en être pas indigne. En attendant, permettez-moi de vous communiquer un théorème que j'ai trouvé, et qui sert à décider quand la quantité $pdx + qdy + rdz$ (p, q, r étant les vitesses suivant les trois coordonnées x, y, z) doit être intégrable ou non ; je démontre que, si cette quantité est intégrable dans un instant quelconque, elle le sera nécessairement pour tout le temps du mouvement, et qu'au contraire, s'il y a un instant où elle ne le soit pas, elle ne pourra jamais l'être, et voici comment :

En nommant t le temps et faisant abstraction des forces accélératrices, ou plutôt supposant ces forces P, Q, R telles que $Pdx+Qdy+Rdz$ soit intégrable, ce qui a toujours lieu dans la nature, l'équilibre des forces perdues à chaque instant exige que la quantité

$$\left(\frac{dp}{dt}+\frac{pdp}{dx}+\frac{qdp}{dy}+\frac{rdp}{dz}\right)dx \quad + \quad \left(\frac{dq}{dt}+\frac{pdq}{dx}+\frac{qdq}{dy}+\frac{rdq}{dz}\right)dy$$
$$+ \quad \left(\frac{dr}{dt}+\frac{pdr}{dx}+\frac{qdr}{dy}+\frac{rdr}{dz}\right)dz$$

soit une différentielle complète.

Retranchant la différentielle complète

$$\frac{pdp + qdq + rdr}{dx}dx + \frac{pdp + qdq + rdr}{dy}dy + \frac{pdp + qdq + rdr}{dz}dz,$$

on aura la quantité

$$\frac{dp}{dt}dx + \frac{dq}{dt}dy + \frac{dr}{dt}dz + \left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right)(qdx - pdy)$$
$$+ \left(\frac{dp}{dz} - \frac{dr}{dx}\right)(rdx - pdz) + \left(\frac{dq}{dz} - \frac{dr}{dy}\right)(rdy - qdz),$$

qui devra être une différentielle complète.

Soient p', q', r' les valeurs de p, q, r dans un instant quelconque où $t = t'$; il est clair que pour $t = t' + \theta$ (θ étant fort petit) on aura

$$p = p' + p''\theta + p'''\theta^2 + \ldots,$$

$$q = q' + q''\theta + q'''\theta^2 + \ldots,$$

$$r = r' + r''\theta + r'''\theta^2 + \ldots,$$

p', p", ..., q', q", ..., r', r", ... étant des fonctions de x, y, z et de la quantité t', qu'on regarde maintenant comme constante. Faisant ces substitutions dans la quantité précédente et prenant $dt = d\theta$, on aura une transformée de cette forme,

$$\alpha = \beta\theta + \lambda\theta^2 + \ldots,$$

en supposant

$$\begin{aligned}
\alpha \quad = \quad & p''dx + q''dy + r''dz \\
& + \left(\frac{dp'}{dy} - \frac{dq'}{dx}\right)(q'dx - p'dy) + \left(\frac{dp'}{dz} - \frac{dr'}{dx}\right)(r'dx - p'dz) \\
& + \left(\frac{dq'}{dz} - \frac{dr'}{dy}\right)(r'dy - q'dz), \\
\beta \quad = \quad & 2(p'''dx + q'''dy + r'''dz) \\
& + \left(\frac{dp'}{dy} - \frac{dq'}{dx}\right)(q''dx - p''dy) + \left(\frac{dp''}{dy} - \frac{dq''}{dx}\right)(q'dx - p'dy) \\
& + \left(\frac{dp'}{dz} - \frac{dr'}{dx}\right)(r''dx - p''dz) + \left(\frac{dp''}{dz} - \frac{dr''}{dx}\right)(r'dx - p'dz) \\
& + \left(\frac{dq'}{dz} - \frac{dr'}{dy}\right)(r''dy - q''dz) + \left(\frac{dq''}{dz} - \frac{dr''}{dy}\right)(r'dy - q'dz),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 3(p^{IV}dx + q^{IV}dy + r^{IV}dz)\\ &\quad+\left(\frac{dp'}{dy}-\frac{dq'}{dx}\right)(q'''dx - p'''dy) + \left(\frac{dp''}{dy}-\frac{dq''}{dx}\right)(q''dx - p''dy)\\ &\quad+\left(\frac{dp'''}{dy}-\frac{dq'''}{dx}\right)(q'dx - p'dy) + \left(\frac{dp'}{dz}-\frac{dr'}{dx}\right)(r'''dx - p'''dz) + \ldots,\end{aligned}$$

et il faudra que les quantités α, β, γ,... soient chacune une différentielle complète ; donc : 1° si $p'dx + q'dy + r'dz$ est complète, on aura

$$\frac{dp'}{dy}-\frac{dq'}{dx}=0,\ \frac{dp'}{dz}-\frac{dr'}{dx}=0,\ \frac{dq'}{dz}-\frac{dr'}{dy}=0\,;$$

donc

$$\alpha = p''dx + q''dy + r''dz,$$

différentielle complète ; donc : 2° on aura

$$\frac{dp''}{dy}-\frac{dq''}{dx}=0,\ \frac{dp''}{dz}-\frac{dr''}{dx}=0,\ \frac{dq''}{dy}=0\,;$$

donc

$$\beta = 2(p'''dx + q'''dy + r'''dz),$$

différentielle complète ; donc : 3°, etc.

Si donc $pdx + qdy + rdz$ est intégrable lorsque $t = t'$, elle le sera depuis $t = t'$ jusqu'à $t = t' + \theta$, et on prouvera de même, en mettant $t' + \theta$ à la place de t', qu'elle sera intégrable jusqu'à $t = t' + 2\theta$, et ainsi de suite. Donc, etc. Mais, si dans un seul instant cette quantité n'est pas intégrable, elle ne le sera jamais, car, si elle l'était dans un autre instant, elle le serait aussi dans le premier.

Lorsque le mouvement commence du repos, alors on a

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 0$$

lorsque $t = 0$; donc $pdx+qdy+rdz$ est nécessairement toujours intégrable. Mais, lorsqu'on imprime au fluide des vitesses primitives, tout dépend de la nature de ces vitesses. Si elles sont produites par une impulsion sur la surface du fluide, elles seront nécessairement telles, que $pdx + qdy + rdz$ sera intégrable ; donc cette quantité le sera toujours.

Le résultat de mes autres recherches consiste à prouver qu'on peut toujours satisfaire (analytiquement parlant) à toutes les conditions du problème ; mais je remets à une autre fois à vous en parler ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 11 mai 1781

« Ce que vous me mandez sur les fluides m'a paru très-intéressant et me donne grande envie de connaître toute la suite de vos belles recherches sur cet important sujet ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 7 décembre 1781

« On imprime actuellement mes recherches sur la libration ; aussitôt que je pourrai en avoir un exemplaire, j'aurai l'honneur de vous en faire hommage. Je voudrais pouvoir soumettre aussi à votre jugement un Mémoire que j'ai lu, il n'y a pas longtemps, sur le mouvement des fluides, et qui contient les remarques que je vous ai déjà communiquées, jointes à plusieurs autres. Mon but principal a été de faciliter l'application de la théorie générale au mouvement des fluides dans des vases et des canaux. Pour cela, j'ai supposé qu'une des dimensions du vase fût assez petite, ce qui m'a permis d'exprimer les inconnues par des fonctions en série, et j'ai obtenu, par la considération des premiers termes, les mêmes résultats que donne la méthode ordinaire fondée sur l'hypothèse du parallélisme des tranches. En même temps, mon analyse m'a fait voir que ces résultats sont exacts, aux quantités du second ordre près, en regardant la largeur du vase comme une quantité du premier ordre. J'y donne aussi des recherches sur le mouvement des ondes formées à la surface d'une eau stagnante et peu profonde, et je trouve que, lorsque l'élévation de l'eau au-dessus du niveau est très-petite, elles sont entièrement analogues aux ondes sonores formées par les condensations et dilatations successives de l'air, ce qui paraît confirmé par l'expérience ».

• D'Alembert à Lagrange
A Paris, ce 1er mars 1782

« J'attends aussi votre travail sur le mouvement des fluides, et ce que vous m'en avez dit dans votre précédente Lettre, joint à ce que vous me marquez dans celle-ci, me donne grande envie de les lire. Je ne doute pas que vous n'ayez ajouté beaucoup à mes anciennes recherches sur ce sujet. Dans le Tome Ier de mes *Opuscules*, j'ai trouvé aussi que l'équation $\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$ donne la vitesse en raison inverse de la tranche y, lorsque cette tranche est très-petite ; mais je vois que vous avez été beaucoup plus loin, et j'en suis ravi pour la Science et pour ma propre instruction ».

• Lagrange à D'Alembert
A Berlin, ce 2 novembre 1782

« Je vais maintenant mettre sous presse mon Mémoire sur le mouvement des fluides ; je suis empressé de le soumettre à votre jugement, comme à celui du créateur de cette théorie ».

p. 0

RECHERCHES SUR LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE

INCOMPRESSIBLE ET PESANT, QUI S'ECOULE D'UN VASE, PAR UN ORIFICE HORISONTAL ;

Avec quelques observations sur la solution que D'ALEMBERT a donnée de ce problême, dans son traité des fluides.

Par R. PRONY,
Membre de l'Institut national des sciences et des arts, et
DIRECTEUR
DE L' ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

IMPRIMÉ
pour l'usage de l'école Polytechnique et de celle des Ponts et Chausées.

PARIS,
Vendémiaire an 10.

---

p. 1

SOLUTION DU PROBLÊME DE L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET PESANS,

PAR DES ORIFICES HORISONTAUX, DANS L'HYPOTHÈSE DU PARALLELISME DES TRANCHES

PAR R. PRONY

D'Alembert a donné, il y 30 ou 40 ans, dans son Traité des fluides (*art.* 100 & *suiv.*), une solution de ce problême, qui a paru depuis dans quelques ouvrages élémentaires ; la considération de la pression des tranches fluides y est entièrement omise, ce qui rend l'analyse incomplette, sans l'abréger. La solution suivante, que j'ai publiée, en 1790, dans la première partie de mon *Architecture hydraulique* (*art.* 703 & *suiv.*), n'exige pas plus de calcul que celle de d'Alembert, et s'étend indistinctement à la pression et à la vîtesse ; c'est même à la réunion de ces deux objets de recherche qu'elle doit sa clarté et sa rigueur. Après avoir exposé cette solution, je me permettrai quelques observations sur celle de d'Alembert, qui pourront faciliter aux élèves l'étude d'un des chapitres les plus difficiles du *Traité des fluides*, dont l'auteur est compté, à juste titre, parmi nos plus habiles mathématiciens et nos plus grands philosophes.

Imaginons un vase de forme invariable et de position fixe, ouvert à sa partie inférieure par un orifice dont le périmètre est une courbe située dans un plan horisontal ; on peut pratiquer à la partie supérieure une ouverture de forme quelconque, et il est convenable, 1°. que les centres de figure de toutes les sections horisontales du vase soient peu distans de la ligne verticale passant par le centre de figure de l'orifice inférieur, ligne que nous nommerons *axe du vase* ou *axe des* z ; 2°. que la paroi intérieure de ce vase soit une surface courbe *continue* et tangente, vers l'orifice inférieur, à la surface cylindrique qui auroit cet orifice pour base, et dont l'axe seroit le même que celui du vase ou des z. Ces conditions ont pour objet de diminuer, autant qu'il est possible, les erreurs dues à l'hypothèse du parallélisme des tranches.

Ce vase contient un fluide incompressible et pesant qui s'écoule par l'orifice inférieur, et l'hypothèse du *parallélisme des tranches* consiste à regarder toutes les molécules comprises dans une section horisontale quelconque, de la masse fluide, comme se mouvant dans des directions parallèles et avec une vîtesse commune.

On conclut d'abord de cette hypothèse, que tous les points d'une même section horisontale éprouvent la même pression, puisque cette pression n'est due qu'à la différence de vîtesse entre les deux tranches élémentaires qui sont respectivement au-dessus et au-dessous de cette section.

p. 2 Convenons maintenant de la notation suivante :

Aire de la surface supérieure du fluide . . . . Ω
Aire d'une section horisontale quelconque de la masse fluide . . . . k
Aire de l'orifice inférieur par où le fluide s'écoule . . . . ω
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire Ω . . . . Q
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire k . . . . p
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire ω . . . . P
Distance verticale entre les sections Ω et ω . . . . h
Distance verticale entre les sections Ω et k . . . . z

Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante à la section k v
Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante à la section ω .... u
Hauteur due à la vîtesse u du fluide à l'orifice .... ξ
Hauteur d'un prisme de fluide ayant l'orifice ω pour base, et un volume égal à celui du fluide écoulé par cet orifice, pendant le tems t .... ρ
$1 - \dfrac{\omega^2}{k^2}$ .... μ^2
$1 - \dfrac{\omega^2}{\Omega^2}$ .... m^2
Intégrale de $\dfrac{\delta z}{k}$ prise dans l'étendue de z .... n
Intégrale de $\dfrac{\delta z}{k}$ prise dans l'étendue de h .... N
Densité du fluide 1
Le tems écoulé depuis le commencement du mouvement .... t

Nota. La caractéristique δ indique les variations qui ne dépendent pas du tems, mais seulement de la distance de deux sections horisontales infiniment voisines ; la caractéristique d indique les variations qui dépendent du mouvement d'une tranche élémentaire ou de son déplacement pendant l'instant dt.

Cette notation posée, on voit d'abord que, vu l'incompressibilité du fluide, il doit en passer, pendant l'instant dt, la même quantité par chaque section horisontale, ce qui fournit les équations

(1) .... $\omega u dt = k dz.$

(2) .... $\omega u = kv.$

d'où (3) .... $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\omega(kdu - udk)}{k^2 dt}$

On a de plus

(4) .... $v = \dfrac{dz}{dt}$

(5) .... $wudt = wd\rho$, d'où $udt = d\rho$, $du = \dfrac{d^2\rho}{dt}$ et $u^2 = \dfrac{d\rho^2}{dt^2}$.

(6) .... $u^2 = 2g\xi$, d'où $udu = gd\xi$.

La différentielle de (6) divisée membre à membre par (5) donne

(7) .... $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{gd\xi}{d\rho}$

p. 3 Il reste à considérer le mouvement d'une tranche élémentaire dont la masse $= kdz$. Cette masse, à un instant donné, est sollicitée,
1°. Par la pesanteur qui tend à lui imprimer une force motrice $gkdz$;
2°. Par la pression du fluide sur la face supérieure dont la valeur absolue est pk ;
3°. Par la pression qui s'exerce sur la face inférieure, et qui a pour valeur $(p+\delta p)(k+\delta k)$;

J'observe que les pressions absolues pk et $p(k+\delta k)$ étant normales et proportionnelles aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent, doivent se détruire, d'après la propriété fondamentale des fluides, ainsi la force motrice totale de laquelle résulte le mouvement de la tranche kdz est $gkdz - k\delta p$, et en la considérant comme animée d'une pareille force, on peut poser l'équation de son mouvement de la même manière que si elle étoit libre ; on a donc d'après les formules générales très-familières aux élèves,

$$\frac{ddz}{dt^2}k\delta z = gk\delta z - k\delta p$$

ou........................ $$\frac{dv}{dt}k\delta z = gk\delta z - k\delta p$$

Cette équation est vraie, quelle que soit la valeur particulière, infiniment petite, de δz, elle aura donc lieu en supposant $\delta z = dz$, ce qui revient à dire que la différentielle $k\delta z$ est constante dans toute l'étendue de la masse fluide, ou qu'à une époque quelconque on considère toute cette masse fluide comme divisée en tranches élémentaires horisontales dont les volumes sont égaux entr'eux et au volume ωudt du fluide qui s'écoule par l'orifice pendant l'instant dt correspondant à cette époque.

D'après ces considérations l'équation précédente devient

$$\frac{dv.kdz}{dt} = gkdz - k\delta p$$

et dz exprime également l'épaisseur d'une tranche élémentaire et l'éspace qu'elle parcourt pendant l'instant dt. On tire de cette équation

(8)......................... $$\delta p = (g - \frac{dv}{dt})dz$$

mettant pour $\frac{dv}{dt}$ sa valeur tirée de l'équation (3), et observant que lorsque $\delta z = dz$ on doit avoir $\delta k = dk$, puisque dans cette hypothèse la différence entre deux sections horisontales distantes entr'elles de dz est identique avec la variation de l'aire k lorsque cette aire s'est abaissée, pendant l'instant dt, de la hauteur dz on a l'équation

$$\delta p = gdz + \frac{\omega dz(udk - kdu)}{k^2 dt}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\delta p = gdz - \frac{\omega du}{dt}.\frac{dz}{k} + \frac{\omega udk}{k^2}.\frac{dz}{dt}$$

ou parce que, équation (2) et (4), $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\omega u}{k}$.

(9) .... $\delta p = gdz - \dfrac{\omega du}{dt}.\dfrac{dz}{k} + \dfrac{\omega^2 u^2 dk}{k^3}$.

p. 4 Intégrant par rapport au signe δ et observant, 1°. que u et $\dfrac{du}{dt}$, qui ne se rapportent qu'à l'orifice, sont constans relativement à l'espèce de variation qu'indique ce signe ; que dz et dk représentent δz et δk, on a

(10) .... $p = gz - \dfrac{n\omega du}{dt} - \dfrac{\omega^2 u^2}{2k^2} + C$.

On peut déterminer la constante C en introduisant dans cette équation les valeurs simultanées qui ont lieu soit à la section Ω, soit à l'orifice ω, on a
à la section Ω .... $p = Q$; $z = 0$; $n = 0$; $k = \Omega$.
A la section ω .... $p = P$; $z = h$; $n = N$; $k = \omega$.

Ces deux manières de déterminer C donnent les valeurs suivantes de la pression p.

(11) .... $\left\{ \begin{array}{l} p = Q + gz - \frac{n\omega du}{dt} - \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)u^2 \\ p = P - g(h - z) + \frac{(N-n)\omega du}{dt} + \frac{1}{2}\mu^2 u^2 \end{array} \right.$

Eliminant $\dfrac{du}{dt}$ entre ces équations, et mettant pour u^2 sa valeur $2g\xi$, il vient

(12) .... $Np = g\{(Nz - nh) + \xi[N\mu^2 - (N - n)m^2]\} + nP + (N - n)Q$.

Equation finie qui donne pour un point déterminé de la masse fluide (l'un quelconque des points de l'aire k à l'extrémité inférieure de z) la relation entre la pression p et la vîtesse $\sqrt{2g\xi}$ qui a lieu à l'orifice en même tems que cette pression ; il faut observer que k doit être fonction de z.

La relation entre la pression et les variables t et ρ est facile à exprimer lorsqu'on a des équations entre deux quelconques des quantités u, t et ρ. Pour obtenir ces équations retranchez celles (11) l'une de l'autre et transposant P et Q il viendra

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; P - Q = gh - \frac{1}{2}m^2u^2 - \frac{N\omega du}{dt}\,;$$

c'est ce qu'on auroit eu en faisant dans l'équation (10)

$$p = P - Q\,;\; z = h\,;\; n = N\,;\; \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2\omega^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

conformément aux valeurs qui ont lieu aux limites supérieure et inférieure de la masse fluide; ainsi $P - Q$ et sa valeur $gh - \frac{1}{2}m^2u^2 - \frac{N\omega du}{dt}$ sont respectivement les intégrales de δp et de sa valeur $\left(g - \frac{dv}{dt}\right) ds$ prises dans toute l'étendue de la masse fluide.

Si l'on veut l'équation (13) sous d'autres formes, on pourra en éliminer $u^2 = 2g\xi$ et $du = \frac{gd\xi}{\sqrt{(2g\xi)}}$ ce qui la changera en

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; P - Q = g\left(h - m^2\xi - \frac{N\omega}{\sqrt{(2g\xi)}}.\frac{d\xi}{dt}\right).$$

p. 5

Eliminant encore, dans (13), u^2 et $\frac{du}{dt}$, au moyen de (6) et de (7) on la transformera en

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; P - Q = g\left(h - m^2\xi - \frac{N\omega d\xi}{d\rho}.\right)$$

Enfin la même équation (15) combinée avec (5) deviendra

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; P - Q = gh - \frac{1}{2}m^2\frac{d\xi^2}{dt^2} - \frac{N\omega d^2\rho}{dt^2}.$$

Ces équations sont très-commodes lorsqu'on suppose h invariable, ou le vase constamment plein; mais s'il se vide sans recevoir de nouveau fluide, il faut considérer h comme la coordonnée verticale variable de la section supérieure Ω (qui alors devient fonction de h); observant ensuite que h diminue de dh lorsque ρ augmente de $d\rho$ et que la diminution dh est à l'augmentation $d\rho$ comme $\omega : \Omega$, l'équation (15) devient en y mettant, d'après cette proportion $-\frac{\Omega}{\omega}dh$ au lieu de $d\rho$

$$(17)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P - Q = g\left(h - m^2\xi + \frac{N\rho^2 d\xi}{\Omega dh}\right).$$

La même valeur de $d\rho$ substituée dans (16) donneroit le rapport entre h et t.

Je ne m'arrêterai point à d'autres combinaisons qu'on pourroit faire pour faciliter les applications des équations (12) et (13) à la solution de divers problêmes ; ce ne sont pas ces problêmes que j'ai en vue dans cet écrit : mon objet principal étant d'y faire voir comment ces équations (12) et (13) se déduisent des principes de la dynamique, et sont liées l'une à l'autre ; on voit aisément qu'en les combinant avec (5) et (6) et faisant les intégrations convenables, on aura toujours les rapports entre deux quelconques des trois variables qui se rapportent à l'écoulement ; savoir le tems, la vîtesse à l'orifice et la quantité d'eau écoulée, et les rapports entre la pression et l'une quelconque de ces trois variables.

On déterminera aussi sans difficulté le maximum de vîtesse ; dans les circonstances les plus ordinaires, la vîtesse acquiert une valeur fort approchante de son maximum, au bout d'un tems très-court, et qui s'abrège d'autant plus que l'orifice est plus petit ; cette propriété résout la difficulté de la solution apparente de continuité dans la formation de la vîtesse qui semble exister lorsque ω est très-petit par rapport à une section quelconque k. Dans ce cas la vîtesse à l'orifice est donnée par la pression qu'éprouveroit un plan qui boucheroit cet orifice, ou par la seule hauteur h ; d'où on conclut que h restant la même, la vîtesse a une valeur constante, quelle que soit l'inclinaison de l'orifice, etc. etc.

OBSERVATIONS SUR LA SOLUTION DE D'ALEMBERT.

D'Alembert considérant que la vîtesse v d'une tranche, à un instant quelconque, au lieu de devenir $v + gdt$, dans l'instant suivant (comme cela arriveroit si elle étoit uniquement soumise à la pesanteur) devient $v + dv$, et supposant que la pesanteur est la seule puissance qui agisse sur cette tranche, décompose $v + gdt$ en $v + dv$ et $gdt - dv$, ce qui, d'après son hypothèse et le principe général du mouvement, lui fait conclure que le systême fluide res-

teroit en équilibre si chaque tranche étoit animée de la vîtesse élémentaire
p. 6 $gdt-dv$; il multiplie cette expression $gdt-dv$ par le facteur dz, et pose l'équation $\int dz(gdt - dv) = 0$, qui, après l'intégration faite dans toute l'étendue de la masse fluide, donne $0 = gh - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{Nudu}{dt}$, c'est-à-dire l'équation (13) dans l'hypothèse de $P - Q = 0$ qui peut résulter de $P = 0$ et $Q = 0$ ou de $P = Q$.

Le premier embarras que les commençans trouvent dans cette solution, vient de ce qu'elle semble établir l'équilibre entre de simples *vîtesses*, au lieu de l'établir entre des *quantités de mouvement*, les *masses* ne paroissant pas dans le calcul ; et la difficultée est plutôt augmentée que levée par l'introduction du facteur dz qui, dans ma solution, dérive du terme $\frac{\delta p}{dz}$ de l'équation $\frac{\delta p}{dz} = g - \frac{dv}{dt}$. Mais les élèves se trouvent dans un autre embarras plus grand encore lorsque, observant qu'il y a inégalité de vîtesse entre les tranches horisontales, et que par conséquent il doit y avoir, en général, pression des unes sur les autres, ils ne voient, nulle part, la plus légère mention faite d'une circonstance qui a une influence aussi évidente sur les phénomènes du mouvement. Cette omission jette même dans leur esprit des nuages sur la rigueur des résultats, sur-tout lorqu'ils entendent dire que les équations les plus générales de l'équilibre et du mouvement des fluides renferment les relations entre les puissances qui sollicitent les molécules et les pressions que ces molécules éprouvent.

On ne peut se dissimuler que la solution de d'Alembert est incomplette à cet égard ; on voit bien par l'analyse donnée précédemment, que lorsque les sections extrêmes du fluides n'éprouvent aucune pression ou éprouvent des pressions égales, le δp qui entre dans l'équation du mouvement particulier d'une tranche, peut être négligé (en laissant néanmoins le facteur dz qui résulte de l'introduction de δp) si on considère l'ensemble des tranches, c'est-à-dire si on intègre la valeur générale $dz\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ de δp dans toute l'étendue de la masse fluide. Mais comment veut-on qu'un commençant devine toutes ces choses dans une solution où on ne dit pas un seul mot de ce qui pourroit les lui faire soupçonner ? Il est incontestable que d'Alembert auroit dû, au lieu de la seule vîtesse élementaire gdt, employer celle $gdt - \frac{k\delta p}{kdz}dt$ ou $gdt - \frac{\delta p}{dz}dt$;

décomposant alors $v + gdt - \frac{\delta p}{dz}dt$ en $v + dv$ et $gdt - \frac{\delta p}{dz}dt - dv$, le principe général auroit donné, chaque tranche en particulier, $gdt - \frac{\delta p}{dz}dt - dv = 0$, c'est-à-dire l'équation (8).

Il est d'autant plus étonnant que ce grand géomètre, dans le cours d'environ 70 pages de son livre, consacrées aux questions relatives à l'écoulement, n'ait rien dit de l'influence de la pression sur le mouvement particulier de chaque tranche, qu'il trouve art. 146 et 147, la même valeur que j'ai donnée précédemment de la pression de la tranche placée à l'extrémité inférieure de z ; cette valeur de $\int \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dz$ en prenant l'intégrale depuis la surface supérieure du fluide jusqu'à la tranche dont il s'agit. Il résulte donc de cette valeur, trouvée par d'Alembert lui-même, l'équation $\delta p = \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dz$ qui,
p. 7 intégrée dans toute l'étendue de la masse fluide, donne l'équation (13).

$$P - Q = gh - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{N\omega du}{dt}$$

au lieu de l'équation incomplette

$$0 = gh - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{N\omega du}{dt}$$

à laquelle son raisonnement le conduit.

Mais l'étonnement augmente lorsqu'on lit, art. 148, les phrases suivantes que l'auteur donne comme corollaires des art. 146 et 147 précités. « On voit aisément que la pression est nulle aux endroits du vase qui répondent à la surface tant supérieure qu'inférieure du fluide ; car, 1°. à la surface supérieure on a, etc. 2°. à la surface inférieure on a *par les solutions des problêmes précédents* (les problêmes qui se rapportent à l'écoulement) $\int [dz \left(g - \frac{dv}{dt}\right)] = 0$. »

Il y a ici pétition de principe manifeste ; l'équation $\delta p = \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dz$ conduit à la suivante, qui est celle (10) ci-dessus ;

$$p = gz - \frac{n\omega du}{dt} - \frac{\omega^2 u^2}{2k^2} + constante.$$

Or dans la détermination de la constante arbitraire et dans l'évaluation définie de cette intégrale, il faut donner aux quantités qui se rapportent aux surfaces supérieure et inférieure du fluide, les valeurs les plus générales, ce qui introduit nécessairement $P - Q$ dans l'intégrale définie ; il est permis ensuite, dans les applications qu'on peut faire de cette intégrale définie, à des cas particuliers, de supposer $P = 0$ et $Q = 0$; mais ce n'est pas l'équation particulière et hypothétique $0 = gh - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{N\omega du}{dt}$ qui prouve que P et Q sont nuls, c'est au contraire la connoissance acquise à *priori* de la possibilité des valeurs $P = 0$ et $Q = 0$, qui fait voir que dans certains cas, la quantité $gh - \frac{1}{2}mu^2 - \frac{N\omega du}{dt}$ peut être nulle.

L'analyse que j'ai donnée précédemment met cette vérité dans tout son jour ; on a vu que la pression d'une tranche quelconque a pour valeur

$$\frac{g}{N}\{(Nz - nh) + \xi[N\mu^2 - (N-n)m^2]\} + \frac{1}{N}\{[N-n)Q + nP\}$$

Expression qui ne s'évanouit point aux surfaces supérieure et inférieure du fluide ; ainsi ce n'est point, comme d'Alembert semble l'insinuer, une propriété inhérente à l'intégrale $\int\left(g - \frac{dv}{dt}\right)dz$ d'être nulle vers ces surfaces, et cette propriété n'y existe qu'autant qu'on l'y introduit expressément, *à posteriori*, en attribuant certaines valeurs à quelques-unes des quantités qui se rapportent aux limites du système fluide. La cause de la méprise vient de ce qu'avant de parvenir au résultat qui fait voir que $\int\left(g - \frac{dv}{dt}\right)dz$ est une pression, il a déduit l'intégrale de $\left(g - \frac{dv}{dt}\right)dz$, prise dans toute l'étendue du système fluide, de considérations dans lesquelles la pression étoit entièrement omise ; or la valeur de cette pression, rapportée à l'extrémité inférieure de z, ne peut, d'après l'omission faite dans l'analyse de d'Alembert, renfermer que
p. 8 l'équivalent de la première partie

$$\frac{g}{N}\{Nz - nh + \xi[N\mu^2 - (N-n)m^2]\}$$

de l'expression ci-dessus, qui s'évanouit en effet aux deux limites du système, et on ne doit pas y trouver la seconde partie $\frac{1}{N}\{(N-n)Q + nP\}$ qui cependant y entre nécessairement lorsqu'on ne s'arrête à aucune hypothèse particulière.

La supression de cette seconde partie rend la valeur de la pression donnée par d'Alembert, articles 146 et 147, fautive, même dans un des cas où sa manière d'évaluer l'intégrale $\int \left(g - \frac{dv}{dt}\right) dz$, pour avoir la vîtesse à l'orifice, lui donne un résultat exact ; ce cas est celui de $P = Q$ qui fait bien disparoître P et Q dans la valeur de la vîtesse, mais non pas dans celle de la pression p d'une tranche quelconque.

J'ai donné quelqu'étendue à ces réflexions afin que les élèves puissent profiter de tout ce qu'il y a d'intéressant dans le *Traité des fluides*, sans être embarassés par les difficultés que les chapitres relatifs à l'écoulement doivent leur présenter. L'intérêt de l'instruction exigeoit d'ailleurs qu'on relevât des inexactitudes de théorie d'autant plus dangereuses qu'elles sont appuyées de l'autorité d'un mathématicien également célèbre et digne de sa célébrité.