

LE PARAMETRAGE DU MRP SOUS INCERTITUDES DE DELAIS D'APPROVISIONNEMENTS ET DEMANDE : LE CAS DE SYSTEME D'ASSEMBLAGE A UN NIVEAU

F. HNAIEN

LOSI / UTT

Troyes

12 rue Marie Curie, Troyes Cedex - France
Faicel.Hnaien@utt.fr

A. DOLGUI

G2I / ENSM-SE

Saint-Etienne

158 Cours Fauriel, 42023 Saint-Etienne - France
Dolgui@emse.fr

RESUME : *Nous considérons le problème de planification d'approvisionnement et gestion de stocks pour le cas d'assemblage d'un produit fini à partir de n composants. Les composants sont commandés chez des fournisseurs extérieurs afin de satisfaire la demande en produit finis. Les délais d'approvisionnements en composants sont aléatoires ainsi que la demande en produits finis. L'entreprise qui s'occupe de l'opération d'assemblage doit déterminer combien commander et à quelle date lancer les ordres d'approvisionnements chez les fournisseurs ? L'objectif est de minimiser le coût total composé du coût de stockage de composants, du coût de retard de livraison de produits finis, et des pertes liées à la quantité de produits finis soldés et du gain perdu. Nous offrons la modélisation analytique du problème. Plusieurs propriétés de la fonction objectif sont démontrées. Ces propriétés sont utilisées dans le développement d'une procédure par séparation et évaluation. Plusieurs tests sont effectués et différentes conclusions sont présentées. Cette étude peut être utilisée pour le paramétrage du MRP, plus précisément pour le calcul de délais de sécurité et de stocks de sécurité sous incertitudes des délais d'approvisionnements et de demande.*

MOTS-CLES : *délai d'approvisionnement aléatoire, demande aléatoire, système d'assemblage, planification d'approvisionnement, gestion de stocks.*

1 INTRODUCTION

La planification d'approvisionnements efficace est une fonction très importante pour la gestion des entreprises industrielles. En effet, une mauvaise politique de gestion des stocks conduit soit à des stocks inutiles soit à des ruptures. Les stocks coûtent de l'argent et immobilisent des fonds. Une rupture de stock conduit à une pénalité due aux commandes insatisfaites.

Les méthodes de planification de type MRP sont les méthodes les plus connues dans le contexte industriel (Axsäter, 2006). Les systèmes MRP sont acceptés facilement par les industriels, la majorité des décideurs industriels sont familiers avec eux à travers tous les systèmes existants de gestion informatique de la production. Les techniques MRP disposent d'un système d'information bien développé et ont fait leurs preuves au fil du temps.

Toutefois, MRP est basée sur l'hypothèse que la demande et les délais d'approvisionnement sont connus. Cependant, dans le monde industriel, on constate que les délais d'approvisionnement varient souvent d'une manière aléatoire. Les délais d'approvisionnements des composants finis sont rarement prévisibles d'une manière fiable. En effet, il y a certains facteurs aléatoires tels que les pannes de machines, le retard de transport, etc. Par conséquent, les hypothèses déterministes intégrées

dans les systèmes MRP concernant le temps d'approvisionnements sont souvent trop restrictives.

Comme a été indiqué dans plusieurs articles, différentes sources d'incertitudes peuvent exister le long de la chaîne logistique. Pour éviter les conséquences de ces incertitudes, les entreprises utilisent les stocks de sécurité ou les délais de sécurité, les deux provoquent des stocks complémentaires qui sont coûteux. Si ces stocks ou délais ne sont pas satisfaisants cela provoque des ruptures en produits finis et des coûts correspondants. Par conséquent, il est souhaitable de développer des méthodes de planification des approvisionnements minimisant tous ces coûts en tenant compte des propriétés stochastiques des délais d'approvisionnements et de la demande.

Dans l'approche MRP, une distinction importante est faite entre la demande pour le produit final, c'est-à-dire la demande indépendante, et la demande d'un de ses composants, c'est-à-dire la demande dépendante. La demande indépendante est connue ou prévue par les méthodes qui sont élaborées dans le cadre de "la prévision des ventes". Les demandes dépendantes peuvent être calculées à partir de la demande indépendante à l'aide de la nomenclature du produit finis correspondant et les délais d'approvisionnement planifiés.

Sous la logique MRP, le temps est découpé en intervalles discrets appelés « time buckets ». Le délai

d'approvisionnement est égal au nombre d'intervalles écoulés entre la date de lancement de l'ordre et sa date de livraison. La taille du lot est la quantité des articles commandés.

La méthode MRP est basée sur le calcul déterministe : toutes les commandes des composants sont lancées au plus tard, donc le coût total sera automatiquement le plus petit possible. Mais, s'il existe des facteurs aléatoires, le sens de l'expression «au plus tard» est incertain. Dans ce cas, pour chaque paramètre de la méthode MRP, nous pouvons avoir une probabilité de stockage des composants et une probabilité de rupture en produit finis. Par conséquent, il faut utiliser le paramétrage de la méthode MRP, c.-à-d. le choix des valeurs optimales des paramètres minimisant les coûts de stockages et/ou de ruptures. Ce problème est appelé le paramétrage des systèmes MRP sous incertitudes.

Deux sources d'incertitude touchent principalement la méthode MRP (Nahmias, 1997; Vollmann *et al.*, 1997) : la demande et les approvisionnements. On peut encore diviser ces incertitudes en deux catégories : quantité et temps. La première signifie que les quantités fournies sont différentes des quantités réelles demandées. La deuxième concerne les dates de demandes ou de réceptions qui ne sont pas respectées.

Enns (2002) a étudié l'effet de l'erreur de la prévision sur la performance de MRP et comment l'incertitude de la demande peut être mieux traitée. L'auteur s'est intéressé à l'impact de l'augmentation de stocks et de délais d'approvisionnements sur le niveau de service. A travers la simulation, il a montré que le niveau de service augmente lorsque le ratio (prévision/demande) augmente. Il a également montré qu'en augmentant les stocks de sécurité et les délais d'approvisionnement, le niveau de service augmente aussi.

Inderfurth (2007) a étudié la performance des systèmes MRP et ses paramètres sous les incertitudes de la demande et du rendement. La demande était supposée stationnaire, le délai d'approvisionnement égal à zéro et le rendement était proportionnel à la quantité commandée. L'auteur a présenté une expression analytique de stock de sécurité pour les lois connues uniforme et normale de la demande et du rendement quand la politique de lot pour lot est la politique de lot pour lot.

Nous nous intéressons donc au problème de paramétrage du MRP sous incertitudes de délais d'approvisionnement et de demande pour le cas de système d'assemblage à un niveau. Afin de se rapprocher de méthodes industrielles de planification du type MRP, nous nous plaçons dans un environnement temporel discret (le temps est calculé en jours par exemple). Ainsi, nous supposons que les délais d'approvisionnement en composants sont des variables aléatoires discrètes qui suivent une loi quelconque et connue. Nous supposons aussi que la demande est aléatoire et qu'elle suit une loi discrète quelconque.

Nous cherchons alors les valeurs optimales des dates de lancement des ordres aux fournisseurs et la quantité optimale à commander à chacun d'entre eux en minimisant le coût total moyen induit par ces incertitudes.

Notons que nous tenons compte dans notre modèle de l'interdépendance des stocks. Signalons que nous limitons notre étude à la planification à capacité infinie.

Pour étudier ce problème, nous nous sommes essentiellement basés sur les travaux de Ould Louly *et al.*, (2008 a et b), Ould Louly et Dolgui (2008) sur les systèmes d'assemblage à un seul niveau. Les auteurs ont étudié le problème de planification à un seul niveau dans le cas où les délais d'approvisionnement suivent une loi discrète et la demande est connue est constante. Leur objectif était de trouver les stocks initiaux en composants qui permettent de réduire le coût total moyen composé du coût de stockage des composants et du coût moyen de rupture en produit fini. Pour trouver la solution optimale, ils ont proposé une procédure de séparation et évaluation (PSE) basée sur des propriétés de dominance et sur un calcul de bornes inférieures et d'une borne supérieure de la fonction objectif.

2 DESCRIPTION DU PROBLEME

Nous étudions le cas de système d'assemblage à un niveau. Un produit fini est obtenu par l'assemblage de n types de composants différents (voir figure 1).

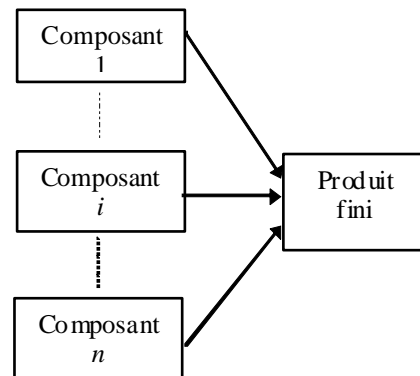


Figure 1 : Système d'assemblage à un niveau

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

D Demande en produits finis (variable aléatoire discrète),

n Nombre de types de composants nécessaires pour l'assemblage de produit fini,

d_i Quantité nécessaire de chaque type de composant i pour assembler une unité de produit fini,

r Prix de vente d'une unité de produit fini,

h_i Coût unitaire de stockage d'un composant i par période,

b Coût unitaire de retard de début d'assemblage d'un produit fini par période,

s Coût unitaire de vente de produit fini soldé par période,

c Coût unitaire de production de produit fini par période,

L_i Délai d'approvisionnement des composants i (variable aléatoire discrète),

u_i valeur maximale de délai d'approvisionnement L_i de composants i ($1 \leq L_i \leq u_i; i=1,2,\dots,n$); $u = \max_{i=1,\dots,n}(u_i)$,

D_{\min} valeur minimale de la demande D ,

D_{\max} valeur maximale de la demande D ($D_{\min} \leq D \leq D_{\max}$),

x_i Délai d'approvisionnement calculé pour les composants de type i ,

q La quantité commandée (planifiée) du produit fini,

q_i La taille de lot de composants i ($q_i = q \times d_i$),

X Vecteur de délais d'approvisionnement planifiés (x_1, \dots, x_n),

L Vecteur de délais d'approvisionnement réels (aléatoires) (x_1, \dots, x_n),

$E[.]$ Espérance mathématique,

$F[.]$ Fonction de répartition,

Z^+ Fonction égale au maximum de Z et 0 : $\max(Z, 0)$.

L'entreprise lance ses ordres aux fournisseurs. Chaque fournisseur livre les composants nécessaires avec un délai de livraison aléatoire. Les composants sont ensuite utilisés pour assembler le produit fini.

L'incertitude de délais d'approvisionnement engendre :

- Stockage des composants i ($i=1,\dots,n$) s'ils arrivent avant la date prévue d'assemblage (ou s'il y a un retard en livraison d'un type de composants). Cette date d'assemblage est supposée la même que la date d'achèvement exigée par le client (la durée d'assemblage

est supposée nulle). Le coût de stockage HC des composants est donc égal à :

$$HC = \sum_{i=1}^n \left(q_i \times h_i \times \left(\max_{i=1,\dots,n} (l_i - x_i)^+ - (l_i - x_i) \right) \right). \quad (1)$$

- Un retard en livraison de produits finis si les composants arrivent après la date prévue d'achèvement. Le retard est permis mais pénalisé (il y a un coût de retard). Le coût de retard en produit fini est le suivant :

$$TC = b \times D \times \max_{i=1,\dots,n} (l_i - x_i)^+. \quad (2)$$

A son tour, l'incertitude de la demande engendre :

- Un surplus en nombre de produits finis et donc une quantité de produits non vendus. Ce surplus est supposé vendu plus tard au prix soldé. Le prix de vente d'une unité soldée est inférieur au coût de production. Dans le cas contraire, il serait profitable de produire en surplus ($r > c > s$). La perte due à ce surplus est donc :

$$SC = (c - s) \times (q - D)^+. \quad (3)$$

- Un gain perdu (due à une sous estimation de la demande). Le coût de cette perte est :

$$LC = (r - c) \times (D - q)^+. \quad (4)$$

Le coût total est donc :

$$\begin{aligned} C(X, L, D, q) = & \sum_{i=1}^n (q_i \times h_i \times (x_i - l_i)) \\ & + \left((b \times D) + \left(q \times \sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \right) \times \max_{i=1,\dots,n} (l_i - x_i)^+ \\ & + (c - s) \times (q - D)^+ + (r - c) \times (D - q)^+ \end{aligned} \quad (5)$$

Les délais d'approvements l_i et la demande D sont des variables aléatoires. Le coût ci-dessus est donc une variable aléatoire. Notre objectif est de minimiser son espérance mathématique, c'est-à-dire le coût total moyen $C(X, q) = E[C(X, L, D, q)]$ qui s'exprime comme suit :

Proposition 1 :

$$\begin{aligned} C(X, q) = & q \times \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (x_i - E[l_i])) \\ & + \left((b \times E[D]) + \left(q \times \sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right) \\ & + (r - s) \times \sum_{k \geq 0} (1 - F_D[q + k]) + (c - s) \times (q - E(D)) \end{aligned} \quad (6)$$

Démonstration :

Pour la démonstration, il suffit de montrer que :

$$E \left[\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i)^+ \right] = \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right).$$

Etant donnée que :

$$\begin{aligned} E \left[\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i)^+ \right] &= \sum_{k \geq 0} \Pr \left(\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i) > k \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} 1 - \Pr \left(\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i) \leq k \right) \end{aligned}$$

et étant que les délais d'approvisionnements sont indépendants :

$$\Pr \left(\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i) \leq k \right) = \Pr(l_1 - x_1 \leq k, \dots, l_n - x_n \leq k)$$

donc :

$$E \left[\max_{i=1, \dots, n} (l_i - x_i)^+ \right] = \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right)$$

3 OPTIMISATION

Pour optimiser le critère (6), nous proposons une procédure par séparation et évaluation PSE.

Nous commençons par présenter des propriétés de dominance qui permettent de réduire l'espace de recherche de solution à chaque étape de la procédure. Ensuite, nous présentons des bornes inférieures de la fonction objectif qui seront utilisées dans notre PSE à chaque étape de calcul. Enfin, nous présentons une borne supérieure.

Afin de simplifier l'écriture des équations nous remplaçons q par x_{n+1} et le vecteur X représentera donc les $n+1$ variables de décision $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})$. Le coût $C(X, q)$ sera noté par $C(X)$.

Soit l'ensemble des solutions réalisables $[A, B]$, avec $A = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$, et $B = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$, avec a_i, b_i les valeurs minimales et maximales possibles de x_i . Nous proposons quelques techniques qui permettent de réduire ces intervalles : $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n+1$. Pour cela, nous introduisons les accroissements partiels à droite et à gauche de x_i comme cela a été fait dans les travaux Ould Louly et al., 2008a,b., par exemple:

$$G_i^+(X) = C(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_{n+1}) - C(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}), (7)$$

$$G_i^-(X) = C(x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_{n+1}) - C(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}). (8)$$

Proposition 2 :

Pour $i=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} G_i^+(X) &= x_{n+1} \times d_i \times h_i \\ &- \left((b \times E[D]) + \left(x_{n+1} \times \sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \right) \\ &\times \sum_{k \geq 0} \left(\Pr(l_i = x_i + k + 1) \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_j[x_j + k] \right) \end{aligned} (9)$$

Pour $i=n+1$:

$$\begin{aligned} G_{n+1}^+(X) &= \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (x_i - E[l_i])) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right) \\ &+ (r - s) \times (F_D[x_{n+1}] - 1) + (c - s) \end{aligned} (10)$$

Pour $i=1, \dots, n+1$:

$$G_i^-(X) = - G_i^+(x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_{n+1}) (11)$$

Proposition 3 :

Nous obtiendrons les propriétés suivantes :

1. Pour $i=1, \dots, n$:

- $G_i^+(X)$ est croissant par rapport à x_i et décroissant par rapport à x_j pour j différent de i .
- $G_i^-(X)$ est décroissant par rapport à x_i et croissant par rapport à x_j pour j différent de i .

2. Pour $i=n+1$:

- $G_{n+1}^+(X)$ est croissant par rapport à x_{n+1} .
- $G_{n+1}^-(X)$ est décroissant par rapport à x_{n+1} .

Ces propositions sont évidentes, nous ne faisons donc pas leur démonstration.

3.1 Propriétés de dominance

Nos développons une PSE pour trouver les valeurs optimaux des $x_i, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n+1$.

Il est connu que des propriétés de dominance peuvent améliorer la performance d'une PSE. Nous obtiendrons les propriétés de dominance suivantes :

Proposition 3 :

Si $G_i^+(A, b_{n+1}) < 0$ (pour $i=1, \dots, n$), alors la solution X de $[A, B]$ avec $x_i = a_i$ est dominée. (12)

Si $G_i^-(B, a_{n+1}) < 0$ (pour $i=1, \dots, n$), alors la solution X de $[A, B]$ avec $x_i = b_i$ est dominée. (13)

Démonstration :

En effet, si $\exists i$ tel que $G_i^+(A, b_{n+1}) < 0$, alors le vecteur (A, b_{n+1}) est dominé par le vecteur

$(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n, b_{n+1})$ car en utilisant la définition de la fonction $G_i^+(X)$ nous obtenons l'inégalité stricte : $C(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n, b_{n+1}) < C(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, b_{n+1})$. En plus, pour tout vecteur (X, b_{n+1}) de $[A, B]$ tel que $x_i = a_i$, nous aurons l'inégalité suivante :

$$G_i^+(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n, b_{n+1}) \leq G_i^+(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, b_{n+1}) < 0,$$

car la fonction $G_i^+(X)$ est décroissante par rapport à x_j pour j différent de i . Le vecteur (X, b_{n+1}) de $[A, B]$ tel que $x_i = a_i$ est donc, à son tour, dominé par le vecteur $(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n, b_{n+1})$.

La propriété (i) est donc vérifiée, la propriété (ii) se démontre de la même façon. C.Q.F.D

Ces propriétés de dominance peuvent être utilisées pour développer des coupes efficaces. En effet, dans notre PSE, après un branchement, deux nœuds (descendants) sont créés. Pour chacun de ces nœuds, plusieurs coupes peuvent être appliqués pour réduire l'espace de recherche correspondant (qui correspond au nœud en question) avant de passer au branchement suivant.

La valeur maximal de x_i qui satisfais la condition (13) donne une limite supérieure b_i , et la valeur minimale de x_i qui satisfais la condition (12) donne une limite inférieure de a_i pour chaque variable x_i . La valeur optimale de x_i doit respecter la condition : $a_i \leq x_i \leq b_i$.

3.2 Borne inférieures de la fonction objectif

Nous avons également besoin de bornes inférieures à chaque étape de la procédure. Dans cette section, nous développons ces bornes.

Proposition 4 : Nous avons les deux bornes inférieures suivantes de la fonction objectif sur l'espace $[A, B]$:

$$BI_1 = C(A) + \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \min(G_i^+(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_n), 0) + \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (a_i - E[l_i])) + \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[b_i + k] \right) + (r - s) \times (F_D[a_{n+1}] - 1) + (c - s) \quad (14)$$

$$BI_2 = C(B) + \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \min(G_i^-(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_n), 0) + \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (E[l_i] - b_i)) - \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[a_i + k] \right) + (r - s) \times (1 - F_D[b_{n+1} - 1]) - (c - s) \quad (15)$$

Démonstration :

$$C(X) - C(A) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{s=0}^{x_k - a_k - 1} (G_k^+(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k + s, \dots, a_{n+1})) \right) + \sum_{s=0}^{x_{n+1} - a_{n+1} - 1} (G_{n+1}^+(x_1, \dots, x_n, a_{n+1} + s))$$

En utilisant le fait que :

Pour $k=1, \dots, n$:

$$G_k^+(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k + s, \dots, a_{n+1}) \geq G_k^+(b_1, \dots, b_{k-1}, a_k, \dots, a_{n+1})$$

Et que :

$$G_{n+1}^+(x_1, \dots, x_n, a_{n+1} + s) \geq G_{n+1}^+(x_1, \dots, x_n, a_{n+1})$$

Et que $G_{n+1}^+(x_1, \dots, x_n, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (x_i - E[l_i]))$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right) + (r - s) \times (F_D[a_{n+1}] - 1) + (c - s) \geq \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (a_i - E[l_i])) + \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[b_i + k] \right) + (r - s) \times (F_D[a_{n+1}] - 1) + (c - s)$$

Donc nous obtenons :

$$C(X) - C(A) \geq \sum_{k=1}^n ((x_k - a_k) \times (G_k^+(b_1, \dots, b_{k-1}, a_k, \dots, a_{n+1}))) \geq \sum_{k=1}^n ((b_k - a_k) \times \min(G_k^+(b_1, \dots, b_{k-1}, a_k, \dots, a_{n+1}), 0))$$

La première borne inférieure est donc démontrée.

De la même manière, nous montrons la deuxième borne inférieure :

$$C(X) - C(B) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{s=0}^{b_k - x_k} (G_k^-(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + s, b_{k+1}, \dots, b_{n+1})) \right) + \sum_{s=0}^{b_{n+1} - x_{n+1}} (G_{n+1}^-(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + s))$$

En utilisant le fait que :

Pour $k=1, \dots, n$:

$$G_k^-(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + s, b_{k+1}, \dots, b_{n+1}) \geq$$

$$G_k^-(a_1, \dots, a_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \dots, b_{n+1})$$

Et

$$G_{n+1}^-(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + s) \geq G_{n+1}^-(x_1, \dots, x_n, b_{n+1})$$

$$\text{Et } G_{n+1}^-(x_1, \dots, x_n, b_{n+1}) = - \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (x_i - E[l_i]))$$

$$- \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[x_i + k] \right) + (r - s) \times (1 - F_D[b_{n+1} - 1]) - (c - s)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n (d_i \times h_i \times (E[l_i] - b_i))$$

$$- \left(\sum_{i=1}^n (h_i \times d_i) \right) \times \sum_{k \geq 0} \left(1 - \prod_{i=1}^n F_i[a_i + k] \right) + (r - s) \times (1 - F_D[b_{n+1} - 1]) - (c - s)$$

Donc nous obtenons la deuxième borne inférieure.
C.Q.F.D

Comme borne inférieure, nous utiliserons dans la PSE :

$$BI = \max(BI_1, BI_2) \quad (16)$$

3.3 Borne supérieure

Cette procédure commence par l'initialisation de l'espace de recherche :

$$A \leftarrow (1, \dots, 1, D_{\min}),$$

$$B \leftarrow (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n, D_{\max}).$$

Ensuite, la procédure suivante est appliquée :

$$BS \leftarrow \min(C(A), C(B))$$

- Réduire l'espace de recherche $[A, B]$ en utilisant les propriétés de dominance.

Tant que (le cardinal de $[A, B]$ est supérieur à 1) faire :

- Séparer $[A, B]$ en deux sous ensembles $[A, B^1]$ et $[A^1, B]$ (cette division du pavé $[A, B]$ en deux pavés $[A, B^1]$ et $[A^1, B]$ est faite en coupant le coté le plus long du pavé $[A, B]$).

- $BS \leftarrow$ la solution avec le coût le plus faible, choisie parmi les quatre possibilités : A, B^1, A^1 ou B .

- Si A ou B^1 alors

$$[A, B] \leftarrow [A, B^1]$$

sinon

$$[A, B] \leftarrow [A^1, B]$$

Fin Si

Fin Tant que

3.4 Algorithme PSE

L'algorithme PSE que nous proposons utilise pour branchement le schéma suivant. L'ensemble des solutions, représenté par le pavé $[A, B]$, dont le cardinal est le plus grand est divisé en deux sous-ensembles fils $[A, B^1]$ et $[A^1, B]$. Avant d'être intégré dans l'arbre, chaque sous-ensemble fils est réduit en utilisant les propriétés de dominances. L'idée de base est donc la recherche en largeur d'abord mais avec des modifications en tenant compte des résultats de la réduction.

Début

$$A \leftarrow (1, \dots, 1, D_{\min}),$$

$$B \leftarrow (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n, D_{\max}).$$

Utiliser les propriétés de dominance pour réduire l'ensemble $[A, B]$,

$BS \leftarrow$ la borne supérieure de $([A, B])$

$le_min_actuel \leftarrow BS$

$La_solution_actuelle \leftarrow$ celle donnée par BS

// Initialiser l'ensemble E des sous ensembles

$E \leftarrow \{ [A, B] \}$

Si $A \neq B$ alors

Tant que (E n'est pas vide) faire

$[A, B] \leftarrow$ l'élément de E de cardinal maximal

$E \leftarrow E - \{ [A, B] \}$

Diviser $[A, B]$ en deux sous-ensembles:

$[A, B^1]$ et $[A^1, B]$

Si (l'ensemble $[A, B^1]$ n'est pas dominé, $A \neq B^1$, et sa borne inférieure $BI < le_min_actuel$) alors

on l'ajoute à E : $E \leftarrow E \cup \{ [A, B^1] \}$

Fin Si

Si ($A^1 \neq B$ et sa borne inférieure $BI < le_min_actuel$) alors

on l'ajoute à E : $E \leftarrow E \cup \{ [A^1, B] \}$

Fin Si

Si ($C(A^1) < le_min_actuel$) alors

$le_min_actuel \leftarrow C(A^1)$

$La_solution_actuelle \leftarrow A^1$

Fin Si

Si ($C(B^1) < le_min_actuel$) alors

$le_min_actuel \leftarrow C(B^1)$

$La_solution_actuelle \leftarrow B^1$

Fin Si

Eliminer les éléments de E dont la borne inférieure (BI) est plus grande que le_min_actuel .

Fin Tant que

Fin Si

Fin

4. EXEMPLE NUMERIQUE

Considérons l'exemple suivant d'un système d'assemblage de 10 composants. La quantité d_i de composant i nécessaire pour assembler une unité de produit fini est égale à 1, $i=1, \dots, 10$. Le prix de vente r d'une unité de produit fini est égal à 10. Le coût de production c est égal à 5. Le coût unitaire de vente s de produit fini soldé est égal à 3. Le coût unitaire de retard b de produit fini est égal à 5. Les coûts de stockage unitaires au niveau 1 et au niveau 2 sont présentés dans le tableau 1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_i	1	2	0.5	0.3	1.5	1.4	0.8	0.7	1.2	1.8

Tableau 1 : Les coûts de stockages unitaires

Les valeurs maximales u de tous les délais d'approvisionnement sont égales à 5. Les lois de probabilités des délais d'approvisionnement sont reportées dans le tableau 2.

w	1	2	3	4	5
$\Pr(L_1=w)$	0.50	0.30	0.10	0.05	0.05
$\Pr(L_2=w)$	0.25	0.15	0.20	0.20	0.20
$\Pr(L_3=w)$	0.15	0.30	0.20	0.15	0.20
$\Pr(L_4=w)$	0.10	0.20	0.30	0.15	0.25
$\Pr(L_5=w)$	0.40	0.10	0.20	0.15	0.15
$\Pr(L_6=w)$	0.40	0.30	0.10	0.10	0.10
$\Pr(L_7=w)$	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
$\Pr(L_8=w)$	0.20	0.20	0.25	0.15	0.20
$\Pr(L_9=w)$	0.15	0.20	0.50	0.05	0.10
$\Pr(L_{10}=w)$	0.10	0.10	0.20	0.30	0.30

Tableau 2 : Loi de distribution des délais d'approvisionnement

La demande en produit fini prend également 5 valeurs possible $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ($D_{\min} = 1$ et $D_{\max} = 5$). La loi de probabilité de la demande est présentée dans le tableau 3.

w	1	2	3	4	5
$\Pr(L_1=w)$	0.10	0.20	0.40	0.20	0.10

Tableau 3 : Loi de distribution de la demande

Les limites inférieures et supérieures des variables de décision x_i ($i=1, \dots, 11$): $a_i = 1$ et $b_i = 5$.

4.1 Comportement de PSE

Le cardinal de l'espace de recherche initiale est donc égal à 5^{11} (u^{n+1}) solutions (48828125 solutions possibles).

Nous avons obtenu la valeur optimale de la fonction objectif qui est égal à 56,8252. Nous l'avons obtenue après 2 itérations. La borne inférieure à la première itération est 79.6823 et la borne supérieure est 56,8252 et à la

deuxième opération la borne inférieure est égale à la borne supérieure est égale à 56,8252.

4.2 Tests des performances de l'algorithme

Les tests consistaient à exécuter l'algorithme sur 100 instances générées d'une manière aléatoire. Pour ces instances, le nombre des composants était choisi parmi les valeurs suivantes [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]. Pour chaque nombre des composants, 10 instances différentes ont été générées. Les données de chaque instance sont : la fonction de distribution des délais d'approvisionnements des composants et celle de la demande (le nombre de réalisation maximale=5), les coûts unitaires de stockage des composants, le coût unitaire de retard en produit fini, le coût unitaire de revient (coup de production) et le coût unitaire d'un produit soldé.

En utilisant la PSE proposée, les instances de taille supérieure à 30 composants n'ont pas été résolues dans un temps d'une heure vu le cardinal très important de l'espace de recherche dans ce cas-là (voir le tableau 4).

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
PSE	$3,76 \cdot 10^{-5}$	1,23	11,26	Pas résolu						

Tableau 4 : Le temps moyen de calcul (en seconds)

Les résultats montrent l'efficacité des algorithmes proposés pour les problèmes de petite et moyenne taille. La résolution optimale du problème dépend donc fortement de la qualité des propriétés de dominance, des bornes inférieures et de la borne supérieure.

5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous nous sommes intéressés à la planification des réapprovisionnements des systèmes d'assemblage quand les délais d'approvisionnement des composants sont aléatoires et la demande en produits finis est également aléatoire. Cette démarche s'inscrit dans l'étude plus générale du paramétrage de la méthode MRP.

Nous proposons une nouvelle méthode d'optimisation pour les systèmes d'assemblage à un niveau. Le critère considéré est la somme du coût de stockage des composants, du coût de retard en produits, des pertes liés aux produits soldés et de gains perdus suite à une sous-estimation de la demande. Notre approche se base sur une technique d'optimisation avec des variables de décision entières, ce qui est plus adapté au contexte de MRP qu'une approche continue, plus souvent utilisée dans la littérature. Nous avons développé un algorithme d'optimisation basé sur la technique de séparation et évaluation (PSE).

Notre modèle est mono-période, c.-à-d. que l'optimisation est faite pour une seule période (pour une demande à une date précise). Son utilisation pour une

planification sur plusieurs périodes peut ne pas fournir des solutions optimales car, dans ce cas, notre modèle surévalue l'influence négative des délais aléatoires (il ne tient pas compte des compensations possibles entre les stocks de différentes périodes).

Dans notre future recherche, nous voulons étendre le modèle et les techniques proposés au contexte multi-période. Nous allons nous appuyer sur les travaux de Ould Louly et Dolgui (2002; 2004, 2008) qui portent sur des modèles de planification multi-périodes pour des systèmes d'assemblage à un seul niveau avec des délais d'approvisionnement aléatoires. Il serait alors possible de réduire davantage les stocks de composants. La difficulté n'est pas la moindre, car en plus de la dépendance des stocks des composants du même niveau (due à l'opération d'assemblage), dans les modèles multi-périodes, nous devons aussi considérer la dépendance entre les stocks des périodes consécutives et l'effet de « crossovers » possibles.

Une autre piste de recherche consisterait à étendre notre étude aux systèmes d'assemblage à plus d'un niveau et aussi aux systèmes à plus qu'un type de produits finis où les nomenclatures se croisent (les différents produits finis utilisent les mêmes types de composants).

REFERENCES

- Axsäter S., 2006. Inventory control, 2nd ed., Springer.
- Nahmias, S., 1997. Production and Operations Analysis. Irwin.
- Vollmann T.E., Berry W.L., Whybark D.C., 1997. Manufacturing Planning and Control Systems. Irwin/Mcgraw-Hill.
- Enns S.T., 2002. MRP performance effects due to forecast bias and demand uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 138(1), pp. 87-102.
- Inderfurth, K., 2007. How to protect against demand and yield risks in MRP systems. *International Journal of Production Economics*, doi :10.1016/j.ijpe.2007.02.05.
- Ould Louly M.-A., Dolgui A., 2002. Generalized newsboy model to compute the optimal planned lead times in assembly systems. *International Journal of Production Research*, 40 (17), pp. 4401-4414.
- Ould-Louly M.-A., Dolgui A., 2004. The MPS parameterization under lead time uncertainty". *International Journal of Production Economics*, 90(3), 18, pp. 369-376.
- Ould Louly M.-A., Dolgui A., Hnaien F., 2008a. Optimal Supply Planning in MRP Environments for Assembly Systems with Random Component Procurement Times. *International Journal of Production Research*, 46(19), pp. 5441-5467.
- Ould Louly M.-A., Dolgui A., Hnaien F., 2008b. Supply planning for single-level assembly system with stochastic component delivery times and service level constraint. *International Journal of Production Economics*. Available online 5 juillet 2008 (Science Direct).
- Ould Louly M.-A., Dolgui A., 2009. Calculating safety stocks for assembly systems with random component procurement lead times: A branch and bound algorithm. *European Journal of Operational Research*. 199(3), pp. 723-731.