



## L'instabilité elliptique en géophysique

Patrice Le Gal, Laurent Lacaze, Stéphane Le Dizès

► **To cite this version:**

Patrice Le Gal, Laurent Lacaze, Stéphane Le Dizès. L'instabilité elliptique en géophysique. 5ème Colloque "Chaos Temporel et Chaos Spatio-Temporel", 2005, Le Havre, France. 2005. <hal-00014517>

**HAL Id: hal-00014517**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00014517>**

Submitted on 25 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# L'instabilité elliptique en géophysique

P. Le Gal, L. Lacaze & S. Le Dizès

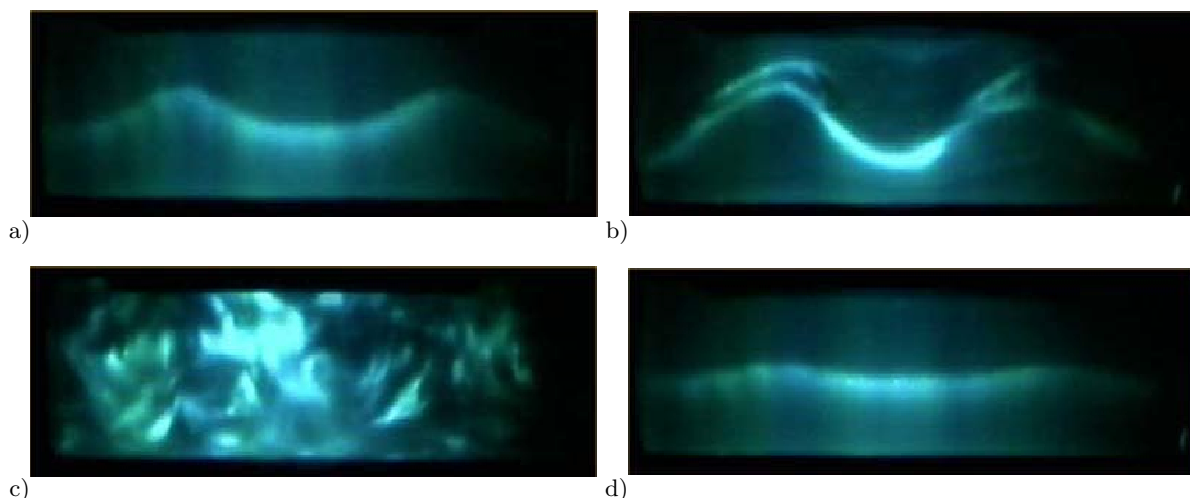
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre 49 rue F. Joliot-curie, 13384 Marseille  
legal@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé** Il est généralement admis que la géo-dynamo de la Terre et plus généralement des autres planètes possédant un champ magnétique, est créée par les mouvements convectifs des métaux liquides de leurs noyaux. Une alternative à cette convection thermo-solutale existe cependant au travers d'un mécanisme de résonance d'ondes inertielles produites par la précession de certaines de ces planètes ou par les possibles déformations de leurs noyaux liquides par des effets de marée. Nous passons en revue dans cet article certains de nos travaux expérimentaux consacrés à l'instabilité elliptique et présentons quelques nouveaux résultats quand le fluide utilisé est un métal liquide. Nous montrons en particulier qu'un champ magnétique imposé est déformé par la présence du mode de spinover produit par l'instabilité elliptique. Dans notre expérience, le champ est faible (20 Gauss) et la force de Lorenz est négligeable devant les forces d'inertie. Le champ magnétique ne modifie donc pas les écoulements du fluide et les taux de croissance hydrodynamique de l'instabilité sont retrouvés par des mesures du champ magnétique. Le métal liquide en mouvement agit donc comme une véritable antenne ce qui permet de déceler certaines des propriétés de l'hydrodynamique sous-jacente.

## 1 Introduction.

Motivés par les analyses des instabilités elliptiques des écoulements de cisaillement ou des vortex [1], nous avons réalisé des études théoriques et expérimentales approfondies des modes instables d'un cylindre liquide de rayon  $r$ , de section droite déformée en ellipse d'excentricité  $\epsilon$  et mis en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Ces modes dont l'existence est liée aux résonances des ondes inertielles du cylindre ont été caractérisés par une analyse linéaire de l'instabilité pour de faible excentricité. Leurs caractéristiques (fréquences, nombres d'ondes et formes) ont été comparées aux résultats expérimentaux et un bon accord a été obtenu [2]. De plus, nous avons mis en évidence des cycles intermittents à bas nombre d'Ekman ( $E = \nu/\Omega r^2$ ). Se succèdent alors de longues périodes de croissance de l'instabilité, des explosions brusques vers des écoulements turbulents puis des fenêtres de relaminarisation où cette turbulence s'amortit pour laisser place à nouveau à une rotation quasi-solide. Notons que Malkus avait déjà observé ces cycles intermittents [3] et les avait alors comparés "aux effondrements résonants" (resonant collapses) dont peuvent être victimes les ondes inertielles [4]. La figure 1 montre une visualisation de cette intermittence obtenue par la méthode classique du plan laser, le fluide ayant étéensemencé par des particules de Kalliroscope. Sur la figure, l'axe de rotation du cylindre souple de section rendue elliptique par la compression de deux rouleaux, est horizontal. Le plan Laser coupe ce cylindre selon une direction faisant un angle de  $45^\circ$  avec les axes principaux de l'ellipse. Sur les figures a), b) et d) les particules de Kalliroscope marquent approximativement l'axe de rotation du fluide qui est déformé sinusoidalement par l'instabilité elliptique.

Des mesures par anémométrie Laser Doppler de la vitesse axiale dans un tel cylindre confirme ces cycles intermittents et la figure 2 en donne une illustration où on peut



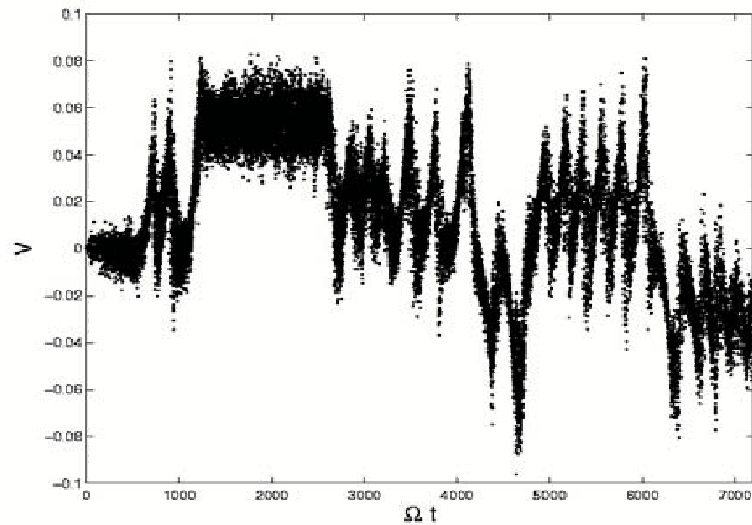
**Fig.1.** Quatre clichés successifs des cycles intermittents de l’instabilité elliptique dans un cylindre : a) apparition de l’instabilité elliptique, b) état fortement non linéaire, c) écoulement turbulent, d) relaminarisation.

observer que la phase du mode instable peut même s’inverser entre deux cycles. Un autre point remarquable de cette série temporelle réside dans les durées extrêmement longues de ces cycles qui peuvent atteindre plusieurs centaines ou milliers de fois la période de rotation du cylindre. Notons de plus que nous n’avons pas encore pu déterminer le scénario précis de la transition vers le chaos et la turbulence de cet écoulement tels que observé en figure d). Une des difficultés majeures provient en fait de la faible résolution de nos mesures due principalement à la mauvaise transparence de la paroi mobile et souple du cylindre tournant. Nous verrons plus tard qu’il est en fait envisageable de sonder le champ de vitesse en mesurant les déformations d’un champ magnétique extérieur imposé et de contourner ainsi les difficultés inhérentes à l’expérience elle même.

## 2 L’instabilité elliptique dans une sphère.

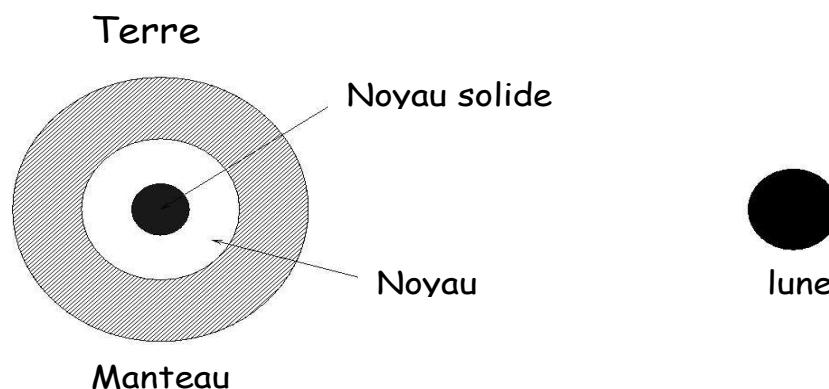
### 2.1 Les effets de marée dans les noyaux planétaires.

Un autre intérêt suscité par cette instabilité elliptique relève de la géophysique. En effet lorsqu’une planète tourne autour d’un soleil, et (ou) qu’une lune tourne autour de la planète, le noyau liquide de celle-ci subit une déformation elliptique (une marée) causée par le champ de gravitation (voir figure 3). La rotation de la planète sur son axe pourrait alors faire résonner des ondes inertielles dans son noyau liquide. A la vue des résultats obtenus en géométrie cylindrique, et bien que la convection thermo-solutale soit le mécanisme encore préféré pour interpréter les géodynamos (en tout cas pour la dynamo terrestre), il est envisageable que la dynamique des noyaux liquides planétaires soit également sensible aux résonances des ondes inertielles. Ces ondes pourraient alors la dynamique voire la production des champs magnétiques des planètes. Notons que si l’effet de marée n’est que de quelques dizaines de centimètres pour le noyau liquide terrestre qui reste au voisinage



**Fig.2.** Série chronologique de la vitesse axiale (m/s) à l'intérieur du cylindre qui montrent le comportement intermittent; quelques "inversions" de la phase du mode instable (vitesses négatives) sont évidentes.

du seuil de l'instabilité, il est bien plus important (plusieurs centaines de mètres) sur Io, le premier satellite de Jupiter. Il est en effet connu que le manteau de Io est constamment déformé par des marées provenant des effets gravitationnels conjugués de Jupiter et de Ganymède. Kerswell et Malkus [5] ont alors montré en 1998 que si ces déformations affectaient également son noyau (dont la composition reste cependant assez méconnue) une interprétation possible du champ magnétique de Io, mesuré par la sonde Galiléo [6], pourrait reposer sur une induction magnétique à partir du champ de Jupiter et provoquée par une variante de l'instabilité elliptique. Une véritable dynamo auto-entretenu ne serait en fait pas nécessaire pour comprendre le magnétisme de Io.

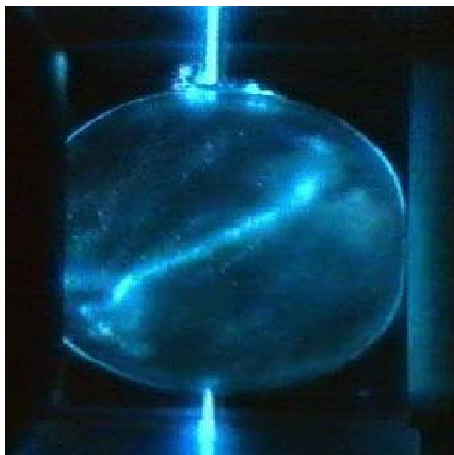


**Fig.3.** Les effets gravitationnels de la lune (les marées) pourraient faire résonner des ondes inertielles du noyau liquide de la Terre. Si ce mécanisme reste marginal sur Terre, il pourrait être primordial pour Io, satellite de Jupiter.

## 2.2 Expériences dans des sphères déformées en rotation et analogie avec la toupie solide elliptique.

Dans une deuxième série d'expériences, une sphère légèrement déformée est mise en rotation. Le dispositif expérimental a déjà été décrit par Lacaze *et al.* [7]. Une balle de ping-pong est insérée dans un cylindre de silicone liquide qui est alors polymérisé à une température de 50° Celsius avec la balle de ping-pong à l'intérieur. La balle est ensuite dissoute par de l'acétate d'éthyle et une sphère creuse moulée dans un cylindre de gel de silicone transparent et déformable est obtenue. Le rayon de la sphère est de 21.75mm. Le cylindre de silicone est alors monté sur l'axe vertical du dispositif déjà utilisé dans le cas cylindrique et est comprimé par deux rouleaux verticaux. Notons que ces rouleaux restent toujours en place; le dispositif n'offre pas la possibilité de les insérer ou de les enlever lorsque la rotation a débuté. La distance séparant ces rouleaux donne directement la déformation elliptique  $\epsilon$  de la sphère déformable. Une variante de notre expérience avec un noyau solide à l'intérieur de la sphère a aussi été réalisée [8]. Elle confirme la présence de l'instabilité elliptique dans la coquille [9].

Comme observé sur la figure 4, un mode instable appelé mode de retournement (spinover), fait tourner le fluide autour d'un axe perpendiculaire à l'axe d'entraînement du fluide (ici vertical). L'effet conjoint des deux rotations et de l'adhérence au paroi, donne alors la forme en "S" à l'axe de rotation du liquide qui est parfaitement visualisé par les particules de Kalliroscope.



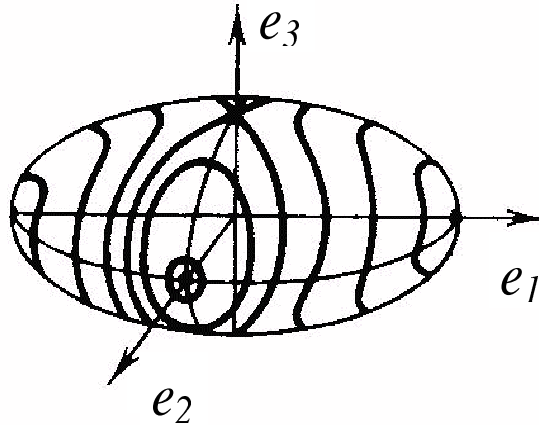
**Fig.4.** Mode de retournement produit par l'instabilité elliptique dans une sphère tournante et légèrement déformée par deux rouleaux visibles de chaque côté de la figure.

En fait, le mécanisme d'apparition de cette rotation au coeur de la sphère fluide, n'est rien d'autre que l'instabilité de la rotation d'un solide autour de son axe médian d'inertie. Ce phénomène est souvent illustré en cours de physique par le lancer d'une boîte

d'allumettes qui tournoie en s'écartant de la rotation initialement imposée autour de son axe médian d'inertie. D'une manière plus quantitative, on peut montrer que le problème non visqueux et non linéaire de la rotation solide du fluide dans le repère tournant est totalement équivalent au problème de la stabilité de la rotation d'un ellipsoïde solide dans le repère fixe. Les équations du mouvement sont les équations d'Euler de la rotation sans frottement et s'écrivent :

$$\begin{aligned}(2 - \epsilon)\dot{\Omega}_1 &= -\epsilon(1 + \Omega_3)\Omega_2, \\ (2 + \epsilon)\dot{\Omega}_2 &= -\epsilon(1 + \Omega_3)\Omega_1, \\ \dot{\Omega}_3 &= \epsilon\Omega_1\Omega_2\end{aligned}\tag{1}$$

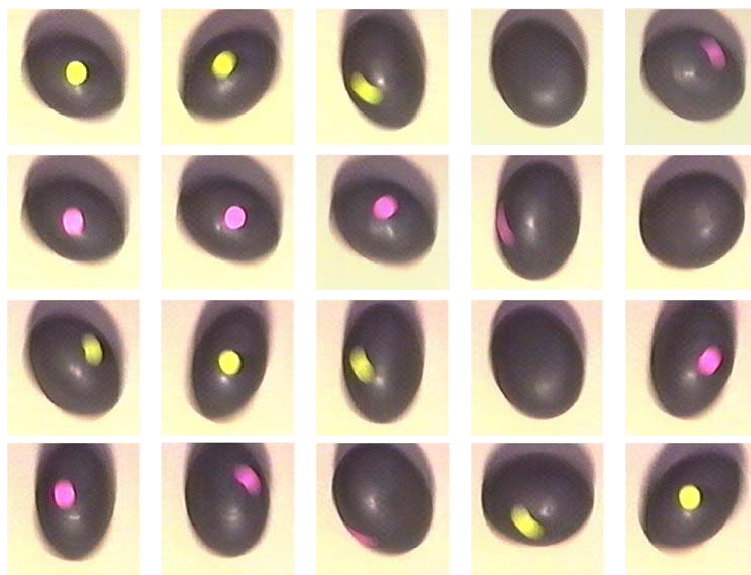
où les  $\Omega_i$  sont les projections sur les trois axes de la perturbation du vecteur instantané de rotation et où  $\Omega$  a été normalisé à l'unité. L'axe médian d'inertie est l'axe  $e_3$  qui est l'axe de rotation instable. La dilatation et la compression de l'ellipsoïde ont été réalisées selon le premier et le deuxième axe avec une amplitude  $\epsilon$ . Les solutions de ce système d'équations sont des trajectoires hétéroclines qui passent à proximité des points fixes instables aux pôles. Ces trajectoires sont illustrées en figure 5.



**Fig.5.** Les trajectoires hétéroclines qui passent par les pôles de l'ellipsoïde illustrent l'instabilité de la rotation d'un solide par rapport à son axe médian d'inertie.

Nous nous sommes alors proposés de visualiser la dynamique d'un tel ellipsoïde solide afin d'imiter ce que serait le mouvement d'un fluide non visqueux dans une sphère en rotation subissant des effets de marée (pourquoi pas une étoile double à neutrons?). Une toupie possédant donc trois moments d'inertie différents a été réalisée. Les deux pôles de l'axe médian sont marqués par deux pastilles de couleur et c'est par rapport à cet axe que la toupie est mise en rotation. La figure 6 montre le début de la dynamique hétérocline

telle que décrite précédemment : on observe une alternance des deux pôles marqués par les pastilles de couleur. Bien entendu, même si les frottements dans ce cas de dynamique solide sont bien moindres que dans le cas du fluide (un seul point de contact avec la table), la toupie finit par s'écarter de sa trajectoire hétérocline et est attirée par la rotation autour d'un des axes de plus grand ou plus petit moment d'inertie : les centres de la figure 5 sont en fait transformés en foyers stables à cause des effets visqueux.

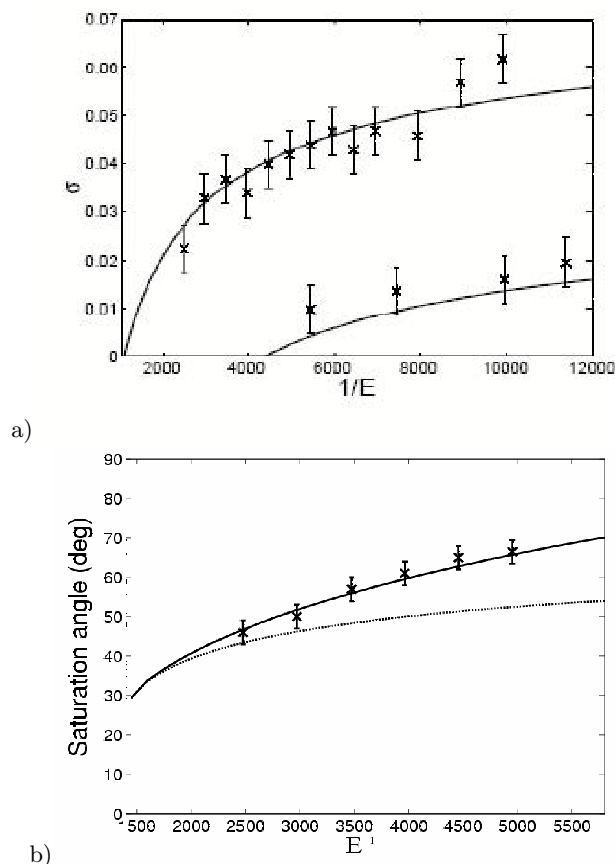


**Fig.6.** Série d'images chronologiques montrant deux cycles hétéroclines du mouvement de l'axe de rotation de la toupie elliptique.

D'une manière similaire, l'instabilité elliptique dans l'ellipsoïde fluide ne décrit pas de cycles hétéroclines (du moins aux nombres d'Elman explorés) mais voit l'amplitude de l'inclinaison de l'axe de rotation saturer après un léger "overshoot". Par contre, il est relativement aisé de suivre l'angle de cette inclinaison au cours du temps et d'en déduire les taux de croissance de l'instabilité pour différents nombres d'Ekman. Une analyse théorique qui tient compte des effets non linéaires et visqueux a également été effectuée. Les diverses résonances des ondes inertielles ayant été retrouvées, ces analyses confirment la sélection du mode de retournement dont le taux de croissance  $\sigma$  (voir la figure 7 a)) et l'amplitude (7 b)) peuvent être avantageusement comparés aux mesures.

### 2.3 L'instabilité elliptique sous champ magnétique.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, plusieurs motivations nous poussent à étudier les instabilités résonantes des ondes inertielles. L'intérêt géophysique réside dans la

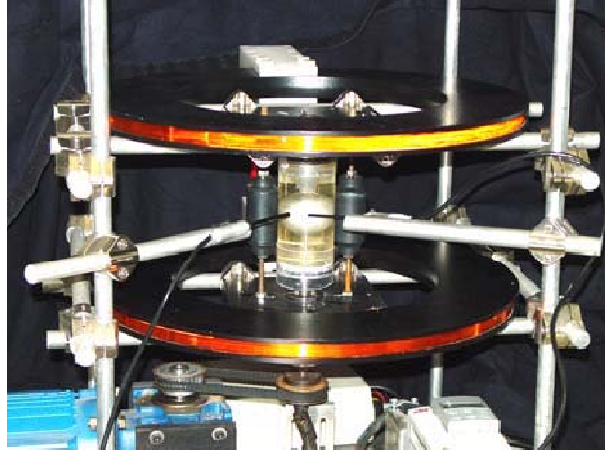


**Fig.7.** a) Comparaison entre l'analyse linéaire de l'instabilité elliptique dans la sphère et la mesure expérimentale des taux de croissance  $\sigma$  du spinover pour deux cas d'ellipticité ( $\epsilon = 0.08$  et  $0.16$ ). b) Comparaison entre les angles de saturation mesurés dans l'expérience et les prédictions de l'analyse non linéaire. L'overshoot n'est jamais aussi important dans l'expérience que dans la théorie (donné par les deux courbes)

compréhension de l'interaction entre champ magnétique et dynamique interne des noyaux planétaires. Comme nous l'avons déjà remarqué, cette voie semble très prometteuse en particulier pour interpréter le champ magnétique de Io (ou Ganymède), satellites de Jupiter. Notre deuxième motivation provient du désir d'analyser expérimentalement un écoulement par des moyens non intrusifs. Or comme nous l'avons déjà signalé, les parois souples et mobiles des containers que nous utilisons ne favorisent pas la mesure par anémométrie Laser ou ultrasonore. Nous allons voir dans cette section, que si le champ magnétique imposé reste faible, il est possible d'analyser la dynamique de l'écoulement non modifié par les forces de Lorenz, grâce à la mesure des champs magnétiques émis lors des mouvements du fluide conducteur.

Dans le cas de l'instabilité elliptique, nous avons étudié la réponse du mode de retournement à un champ magnétique imposé. Un champ  $B_o$  de 20 Gauss (parallèle à l'axe de rotation de la sphère) a été créé par deux bobines de Helmholtz (voir la photogra-

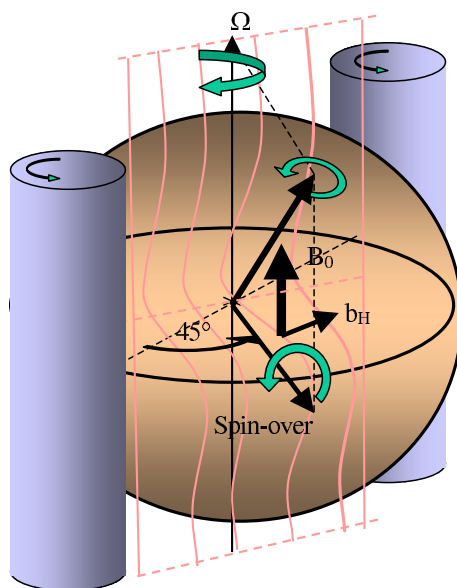




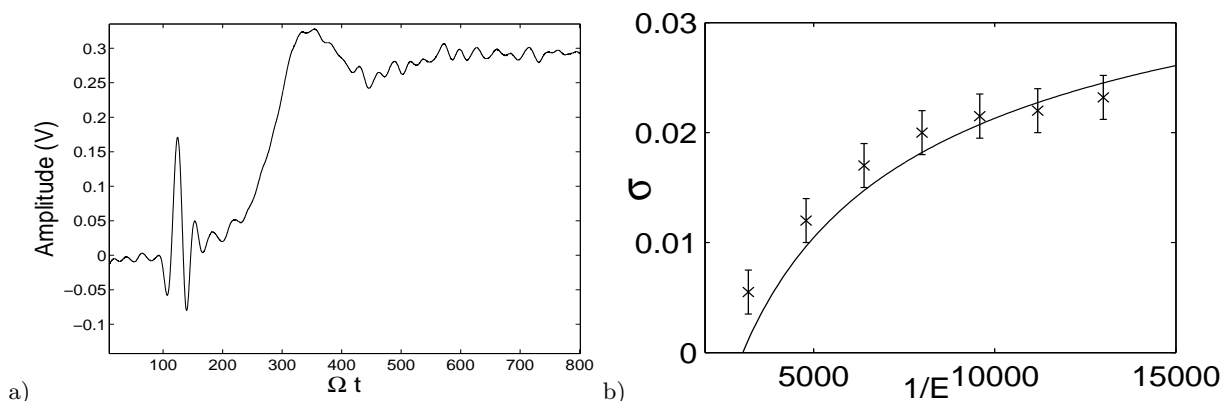
**Fig.8.** Photographie du montage expérimental avec les deux bobines de Helmholtz, les sondes à effet Hall et la sphère de Gallinstan.

phie du montage en figure 8). La sphère est remplie d'un eutectique de Gallium, d'Indium et d'Étain (Gallinstan). Ce mélange est un métal liquide à température ambiante contrairement au Gallium pur. La compression de la sphère par les rouleaux donne une excentricité de  $\epsilon = 0,092$ . Le champ  $B_o$  étant parallèle à l'axe d'entraînement de la sphère, celui-ci n'est pas déformé par cette rotation solide. Mais comme l'axe de rotation du mode de retournement est perpendiculaire à  $B_o$ , une déformation des lignes de champ magnétique par l'instabilité elliptique est créée et un champ magnétique est induit dans le plan horizontal. La figure 9 illustre cet effet qui est appelé classiquement "effet  $\omega$ " dans la littérature magnétohydrodynamique. Notons que le nombre de Reynolds magnétique de notre écoulement est de l'ordre de  $10^{-2}$  et que le paramètre d'interaction qui mesure le rapport entre force de Lorenz et effets inertiels est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Nous sommes donc bien dans l'hypothèse d'une hydrodynamique non perturbée par le champ magnétique.

A l'aide d'un Gaussmeter à sondes à effet Hall, nous avons alors mesuré dans le plan équatorial, 5 millimètres à l'extérieur de la sphère, la croissance d'un champ  $b_h$  induit perpendiculairement au champ imposé. Comme le montre la figure 10-a), après quelques oscillations provenant des perturbations du champ magnétique au démarrage de la rotation, une croissance exponentielle est mesurée comme attendue. Puis, après un léger "overshoot", une saturation non linéaire du champ est visible. Pour l'instant aucune dynamique plus complexe n'a pu être enregistrée dans cette configuration et les mesures ont été répétées pour différents nombres d'Ekman. Les tracés semilogarithmiques de la croissance des champs induits permettent alors la détermination de leurs taux de croissance. La comparaison de ces mesures avec leur prévision théorique qui ne prend en compte que les effets hydrodynamiques est excellente comme on peut l'observer sur la figure 10-b).



**Fig.9.** L'effet  $\omega$  généré par le mode de retournement (spinover) de l'instabilité elliptique



**Fig.10.** a) Croissance exponentielle du champ magnétique induit par le mode de retournement. b) Comparaison des mesures des taux de croissance du champ magnétique induit et de l'analyse linéaire de l'instabilité hydrodynamique pour  $\epsilon = 0.092$ .

### 3 Conclusion.

Après avoir introduit les mécanismes de l'instabilité elliptique des fluides tournants, nous avons montré son lien avec l'instabilité du moment inertiel intermédiaire en mécanique des solides. Nous avons ensuite démontré que l'instabilité elliptique ou de marée, induit la croissance d'un mode de retournement (spinover) en géométrie sphérique. Nous avons de plus montré que ce mode peut induire un champ magnétique quand le fluide utilisé est un métal liquide et quand un champ magnétique externe est imposé. Comme montré dans [5] cette situation est réminiscente de Io dont l'origine du champ magnétique reste aujourd'hui inconnue. En effet, les gigantesques marées créées par la proximité de la planète géante pourraient exciter une résonance semblable à celle que nous avons

obtenue expérimentalement. Comme calculé par Kerswell et Malkus [5], une dynamo intrinsèque ne serait en fait pas nécessaire pour interpréter l'anomalie magnétique mesurée par Galileo [6]. Néanmoins, comme montré par Tilgner [10] dans l'étude numérique d'un écoulement dans une sphère en précession, une interaction résonante entre les ondes inertielles, comme celle que nous avons explorée ici, est également capable de produire des mécanismes alternatifs à la convection afin de générer des géo-dynamos.

## Références

1. KERSWELL R.R., Elliptical instability , *Annual Review of Fluid Mechanics*, **34**, 83-113 (2002).
2. ELOY C., LE GAL P. AND LE DIZÈS S., Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, **476**, 357-388 (2003).
3. MALKUS W.V.R., An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder, *Geophys Astrophys Fluid Dynamics*, **48**, 123-134 (1989).
4. MCEWAN A. D., Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder , *J. Fluid Mech.*, **40**, 603-640 (1970).
5. KERSWELL R.R. AND MALKUS W.V.R., Tidal instability as the source for Io's magnetic signature, *Geophys Res Lett*, **25**, 603-6606 (1998).
6. KIVELSON M. G., KHURANA K. K. , WALKER R. J. , RUSSEL C. T., LINKER J. A., SOUTHWOOD D. I. AND POLANSKEY C., A magnetic Signature at Io : Initial Report from the Galileo Magnetometer , *Science*, **273**, 337-340 (1996).
7. LACAZE L., LE GAL P. AND LE DIZÈS S., Elliptical instability in a rotating spheroid, *J. Fluid Mech.*, **505**, 1-22 (2004).
8. LACAZE L., LE GAL P. AND LE DIZÈS S., Elliptical instability of a flow in a rotating shell, *Phys. Earth Planet. Int.* , **151**, 194-205 (2005).
9. ALDRIDGE K. D., SEYED-MAHMOUD B., HENDERSON G. AND VAN WIJNGAARDEN W., Elliptical instability of the earth's fluid core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **103**, 365-374 (1997).
10. TILGNER A., Precession driven dynamos , *Phys. Fluids*, **17**, 034104 (2005).