La formule de Trotter-Kato : approximation des semi-groupes en normes d'opérateur et de trace

Vincent Cachia

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE - AIX-MARSEILLE II
CENTRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
Discipline : mathématiques,
présentée par

VINCENT CACHIA

LA FORMULE DE TROTTER-KATO : APPROXIMATION DES SEMI-GROUPES EN NORMES D'OPÉRATEUR ET DE TRACE

Soutenue publiquement le 20 avril 2001
devant le jury composé des professeurs :

W. Amrein	*rapporteur*
F. Bentosela	*président du jury*
B. Davies	
B. Helffer	*rapporteur*
T. Ichinose	
L. Pastur	
Ph. Tchamitchian	
V. Zagrebnov	*directeur de thèse*

à Hélyette,

à l'occasion du cinquième anniversaire de nos fiançailles.

Remerciements

Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance aux nombreuses personnes qui m'ont aidé, chacune à sa manière, dans l'achèvement de ce travail. Bien sûr, la première est mon directeur Valentin Zagrebnov qui d'abord m'en a proposé le sujet, aussi intéressant que fructueux. J'avais projeté de faire de la physique mathématique, mais il s'est trouvé que mon travail s'est orienté plutôt vers l'analyse fonctionnelle abstraite, ce que j'ai beaucoup apprécié aussi. J'ai eu grand plaisir à travailler avec Valentin pendant ces trois années de préparation de ma thèse et je veux le remercier particulièrement pour son attention constante, sa disponibilité, sa compréhension et son amitié. J'ai eu également grand plaisir à collaborer avec Hagen Neidhardt, qui, grâce à ses idées nouvelles, a permis d'obtenir rapidement de nombreux résultats (cf chapitre 4).

Je remercie vivement tous ceux et celles qui assurent concrètement la bonne marche du Centre de Physique Théorique : secrétariat, bibliothèque, informatique, reprographie, comptabilité, ... et qui m'ont aimablement rendu service.

Je suis très reconnaissant aux membres du jury pour leur lecture de ma thèse et leur participation à la soutenance, et particulièrement aux professeurs Amrein et Helffer qui ont bien voulu étudier attentivement mon projet et rédiger un rapport. Leurs remarques m'ont permis de corriger et d'améliorer mon texte. Je remercie le professeur Ichinose pour sa lecture attentive et ses remarques, et le professeur Davies qui a aussi étudié en détail mon travail et m'a fait part de commentaires très intéressants (notamment la remarque 3.12).

Table des matières

Introduction

La théorie des semi-groupes d'opérateurs est à la base de nombreux domaines de recherche en analyse, notamment tous ceux qui concernent les équations d'évolution. Elle est également très importante en physique mathématique, que ce soit pour l'étude de l'équation de Schrödinger, la théorie quantique des champs, la mécanique statistique quantique ...

En 1959, Trotter démontra pour les semi-groupes d'opérateurs une formule (dont l'origine remonte à Sophus Lie en 1875) permettant de calculer le semi-groupe engendré par une somme comme limite de produits des semi-groupes engendrés par chaque terme de la somme. C'est-à-dire formellement (on précisera plus loin le sens exact des notations)

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{-A/n}e^{-B/n}\right)^n = e^{-(A+B)}.$$

Cette formule dite de Lie-Trotter ou simplement Trotter eut un succès rapide notamment dans le domaine de la physique mathématique. Par exemple elle est liée à la formule de Feynman-Kac et aux autres techniques apparentées. Une des principales difficultés du problème vient du fait que la somme "$A + B$" n'est a priori pas bien définie pour deux générateurs de semi-groupes A et B quelconques. D'ailleurs un des développement les plus intéressants consiste à construire la somme $A" + "B$ justement par l'intermédiaire du nouveau semi-groupe, limite de la formule. Tous ces travaux jusqu'aux années 1990 concernaient uniquement la convergence forte des opérateurs, qui est la topologie la plus naturelle puisqu'il s'agit de semi-groupes fortement continus.

Cependant en 1988 (pour des semi-groupes de Schrödinger) puis en 1990 et 1993 (dans un cadre abstrait), de nouvelles perspectives inattendues furent découvertes [61, 42, 50] : en effet la convergence de la formule de Trotter fut établie dans des topologies plus fortes, en norme d'opérateur et en norme de trace, et dans des conditions relativement courantes pour les applications, en particulier il s'agit d'opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Ces résultats suscitèrent de nouveaux développements, aussi bien dans le cadre des opérateurs de Schrödinger que dans le cadre abstrait, mais toujours avec des opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert avec diverses conditions supplémentaires comme la petitesse relative de B par rapport à A ou la compacité d'une résolvante.

Cette thèse s'inscrit parmi ces développements dans le cadre abstrait, mais avec un aspect nouveau : l'un au moins des semi-groupes n'est pas auto-adjoint, ni normal, ou même l'espace est un espace de Banach plus général (chapitre 3). Cependant, la notion fondamentale qui sera utilisée dans tout ce travail est celle de semi-groupe holomorphe. Le cas des générateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert en est un cas particulier.

Dans le **premier chapitre**, je rappelle des définitions et des propriétés fondamentales de la théorie des semi-groupes sur un espace de Banach, ainsi que des propriétés propres aux opérateurs dans un espace de Hilbert. Le **deuxième chapitre** est consacré à un bilan des travaux antérieurs à cette thèse sur la formule de Trotter, depuis le théorème de Lie jusqu'aux articles récents.

Les résultats de mon travail de thèse sont exposés dans les autres chapitres, et classés en fonction des liens qu'ils ont entre eux. Un premier groupe concerne des estimations d'erreur en norme d'opérateur pour la formule de Trotter dans différents cas : je considère des perturbations accrétives dans un espace de Banach au **chapitre 3**, et dans un espace de Hilbert au **chapitre 4**. Dans ces deux cas le semi-groupe obtenu en limite est bien engendré par la somme algébrique $-(A+B)$.

Ensuite, viennent des extensions des résultats précédents ou de travaux antérieurs : au **chapitre 5**, il s'agit de conditions suffisantes de convergence en norme d'opérateur pour la formule de Trotter pour des générateurs m-sectoriels (ce chapitre est indépendant des deux précédents et la limite n'est pas nécessairement $e^{-(A+B)}$). Au **chapitre 6**, on établira des conditions suffisantes de convergence en norme de trace pour la formule de Trotter avec des semi-groupes de Gibbs et des générateurs m-sectoriels, en utilisant entre autres les résultats des chapitres 3, 4 et 5.

Enfin, le troisième groupe de résultats fait l'objet du **chapitre 7** (indépendant des précédents). On y montre comment construire des formules d'approximations plus générales que la formule de Trotter (selon la méthode de Chernoff), et convergeant en norme d'opérateur. En particulier, le lien entre l'approximation des semi-groupes holomorphes contractants en norme d'opérateur et la convergence généralisée des générateurs m-sectoriels (ou convergence uniforme des résolvantes) est mis en évidence. Les résultats principaux sont fondés sur la définition nouvelle des contractions quasi-sectorielles. Enfin, quelques exemples de formules d'approximation sont donnés.

Notations

$\mathcal{B}(\mathfrak{X})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$	algèbre des opérateurs linéaires continus (bornés) sur un espace de Banach (ou de Hilbert).
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes.
$\mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$	idéal (de Von Neumann-Schatten) de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ associé à $p \geq 1$ par la condition (6.8).
$\mathcal{C}_\infty(\mathfrak{H})$	idéal des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$.
$\mathcal{C}_0^\infty(\Lambda)$	algèbre des fonctions infiniment dérivables à support compact dans l'ensemble $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$.
$\mathrm{dist}(x, E)$	distance d'un point x du plan complexe à l'ensemble E, définie par $\mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.
$\mathrm{dom}(A)$	domaine de l'opérateur A, c'est-à-dire sous-espace vectoriel de l'espace considéré sur lequel A est défini.
$\mathfrak{H}$	espace de Hilbert, si nécessaire séparable.
$\mathrm{Im}\, z$	partie imaginaire du nombre complexe z.
$\ker(A)$	noyau de l'opérateur A, sous-espace vectoriel défini par $\ker(A) = \{x \in \mathrm{dom}(A) : Ax = 0\}$.
$L^p(\Lambda)$	espace de Banach des classes de fonctions f (définies à un ensemble de mesure nulle près), mesurables de $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\|f\|^p$ soit intégrable pour la mesure de Lebesgue, avec $1 \leq p \leq \infty$.
$\|z\|$	module du nombre complexe z.
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\\|x\\|$, $\\|A\\|$	norme d'un vecteur x dans un espace vectoriel normé, et norme d'opérateur pour un opérateur borné A, voir (1.1).

$\mathrm{Nr}(A)$	image numérique de l'opérateur A défini dans un espace de Hilbert, voir la définition (1.30), et la définition analogue pour les formes quadratiques (1.35).
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels.
$\langle x^*, x\rangle$	produit de dualité, ou image par la forme linéaire $x^* \in \mathfrak{X}^*$ du vecteur $x \in \mathfrak{X}$.
$(\cdot,\cdot)$	produit scalaire (hermitien) sur un espace de Hilbert.
$r(A)$	rayon spectral de l'opérateur A, $r(A) = \sup\{\lvert z\rvert, z \in \sigma(A)\}$.
$r_n(A)$	rayon numérique de l'opérateur A, $r_n(A) = \sup\{\lvert z\rvert, z \in \mathrm{Nr}(A)\}$.
$\mathrm{ran}(A)$	espace image de l'opérateur $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, sous-espace vectoriel de l'espace $\mathfrak{Y}$ défini par $\mathrm{ran}(A) = \{y \in \mathfrak{Y} : \exists x \in \mathfrak{X}, y = Ax\}$.
$\mathrm{Re}\, z$	partie réelle du nombre complexe z.
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A, c'est-à-dire ensemble des nombres complexes z tels que l'opérateur $(A - z)$ admette un inverse borné.
$\sigma(A)$	spectre de l'opérateur A, c'est-à-dire complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$.
type (θ, M)	classe d'opérateurs associée à un angle $\theta \in]0,\pi[$ et une constante $M > 0$, voir la définition 1.11.
$\mathrm{tr}\, A$	trace d'un opérateur A appartenant à l'idéal $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, voir (6.10).
$T(\tau)$	approximation de Trotter : $e^{-\tau A}e^{-\tau B}$.
$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$	espaces de Banach, on note $\mathfrak{X}^*$ le dual de $\mathfrak{X}$.
$W^{n,p}(\Lambda)$	espace de Sobolev des fonctions dont la dérivée n-ième au sens des distributions appartient à $L^p(\Lambda)$.

Chapitre 1

Semi-groupes d'opérateurs

1.1 Théorie générale dans un espace de Banach

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ de norme $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathfrak{X}$, et I l'identité sur $\mathfrak{X}$. Plusieurs topologies sont utilisées sur $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$: de la plus fine à la moins fine, la topologie de la norme d'opérateur, la topologie forte (des opérateurs), et la topologie faible (des opérateurs). On rappelle que la norme d'opérateur est définie par

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathfrak{X}, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés sur $\mathfrak{X}$ converge fortement si pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $A_n x$ converge dans la topologie de la norme de $\mathfrak{X}$. Une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement si pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout $y \in \mathfrak{X}^*$, $\langle y, A_n x\rangle$ converge dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre une famille $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur $\mathfrak{X}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $U(0) = I$,
(ii) $U(t)U(s) = U(t+s) \qquad \forall t \geq 0, s \geq 0$,
(iii) $\lim_{t\to 0} \|U(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X}$.

Remarque 1.2 *Cette définition est la plus utilisée (cf [51, Ch.13]), on en trouvera une discussion détaillée dans [25].*

Comme toute fonction complexe continue satisfaisant $f(t+s) = f(t)f(s)$ est déterminée par $a = f'(0)$ et représentée par e^{at}, on associe de manière analogue à tout semi-groupe un générateur $-A$ défini par :

$$-Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \tag{1.2}$$

pour tout x tel que la limite (1.2) existe dans la topologie de la norme de $\mathfrak{X}$, ce qui définit le sous-espace $\mathrm{dom}(A)$, domaine de l'opérateur A. Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante [51, théorème 13.35].

Proposition 1.3 *Soit $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs sur $\mathfrak{X}$, et $-A$ son générateur. Alors :*

(a) $t \mapsto U(t)$ est une fonction fortement continue de $[0,\infty[$ dans $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$

(b) Il existe des constantes $M_A \geq 1$ et $\gamma_A \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|U(t)\| \leq M_A e^{\gamma_A t} \tag{1.3}$$

(c) A est un opérateur fermé et son domaine $\mathrm{dom}(A)$ est dense dans $\mathfrak{X}$

(d) Pour tout $x \in \mathrm{dom}(A)$, $U(t)x$ est dérivable au sens de la norme de $\mathfrak{X}$ et

$$\frac{d}{dt}U(t)x = -AU(t)x = -U(t)Ax \tag{1.4}$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma_A$, alors $-\lambda$ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et la résolvante $R_A(z) = (A-z)^{-1}$ de A a l'expression suivante

$$R_A(-\lambda) = (\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)dt. \tag{1.5}$$

L'intégrale (1.5) est définie au sens fort sur tout intervalle borné $[0,T]$, et converge en norme d'opérateur lorsque $T \to \infty$. De plus par l'inégalité (1.3) on a

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq M_A/(\mathrm{Re}\,\lambda - \gamma_A). \tag{1.6}$$

En fonction des valeurs des constantes M_A et γ_A, on distingue plusieurs classes de semi-groupes :

- Si $\gamma_A \leq 0$, on dit que $U(t)$ est un semi-groupe borné (sinon, le semi-groupe est dit parfois quasi-borné). On peut toujours se ramener à un semi-groupe borné en ajoutant une constante au générateur, en effet le semi-groupe engendré par $-A-\gamma_A$ est borné par M_A.
- Si $\gamma_A \leq 0$ et $M_A = 1$, on dit que $U(t)$ est un semi-groupe contractant. En fait, d'après ce qu'on vient de voir, la condition essentielle est $M_A = 1$ (voir par exemple [58]).

Le point (d) de la proposition précédente montre le lien naturel qui existe entre la notion de semi-groupe d'opérateurs à un paramètre et celle d'équation différentielle linéaire dans un espace de Banach. En particulier, la notion de semi-groupe permet de traiter efficacement les équations aux dérivées partielles linéaires comme les équations de Schrödinger par exemple : le semi-groupe correspondant est l'opérateur qui associe à toute condition initiale la solution à l'instant t. Une question apparaît alors naturellement : dans quel sens peut-on écrire la représentation exponentielle

e^{-tA} pour le semi-groupe $U(t)$? Si A est un opérateur borné, la réponse est claire, puisque la série entière

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!} \tag{1.7}$$

converge en norme d'opérateur pour tout $t \in \mathbb{C}$. En fait, on a le résultat suivant [51, théorème 13.36] :

Proposition 1.4 *Si $U(t)$ est un semi-groupe fortement continu, alors chacune des conditions suivantes implique les deux autres :*

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathrm{dom}(A) = \mathfrak{X} \\ (b) & \lim_{\epsilon \to 0} \|U(\epsilon) - I\| = 0 \\ (c) & A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \text{ et } U(t) = e^{-tA} \end{array}$$

En général, le générateur d'un semi-groupe est un opérateur non borné, et l'application $t \mapsto U(t)$ est continue en $t = 0$ seulement pour la topologie forte des opérateurs. Cependant, on adoptera dans la suite la notation $U(t) = e^{-tA}$ comme une convention d'écriture, suivant le livre de Kato [32, Ch.IX]. Cette notation coïncide avec la définition habituelle de l'exponentielle seulement dans le cas particulier où A est borné, mais elle coïncide aussi avec d'autres définitions plus générales de l'exponentielle d'un opérateur : celle qui utilise la formule de Cauchy lorsque la résolvante de A vérifie certaines propriétés (voir plus loin les semi-groupes holomorphes), et celle que l'on peut déduire de la représentation spectrale pour un opérateur normal dans un espace de Hilbert.

1.1.2 Caractérisation des générateurs

Le résultat principal est le théorème de Hille-Yosida [12, 59, 32, 49, 20, 56].

Proposition 1.5 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si il existe des constantes M_A et γ_A telles que tout réel $\lambda > \gamma_A$ soit dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ et que*

$$\|(\lambda + A)^{-m}\| \leq \frac{M_A}{(\lambda - \gamma_A)^m} \tag{1.8}$$

pour tout $\lambda > \gamma_A$ et tout entier $m \geq 1$. On a alors l'estimation $\|e^{-tA}\| \leq M_A e^{\gamma_A t}$ et la formule d'approximation d'Euler (dans la topologie forte des opérateurs)

$$e^{-tA}x = \lim_{n \to \infty} (I + tA/n)^{-n} x, \;\; x \in \mathfrak{X}. \tag{1.9}$$

Corollaire 1.6 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est la générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si $]0, +\infty[\subseteq \rho(-A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité*

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{1.10}$$

On peut donner une autre caractérisation des générateurs grâce à la notion d'opérateur accrétif [12, 56].

Définition 1.7 *Soit A un opérateur dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Considérons*

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^* : x \in \mathrm{dom}(A), \|x\| = 1, \|y\| = 1, \text{ et } \langle y, x\rangle = 1\} \tag{1.11}$$

A est dit accrétif si pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$, on a $\mathrm{Re}\,\langle y, Ax\rangle \geq 0$.

Proposition 1.8 *Un opérateur $-A$ à domaine dense dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si A est accrétif et l'image $\mathrm{ran}(\lambda + A) = \mathfrak{X}$ pour tout $\lambda > 0$. Ou encore, de manière équivalente, A est fermé à domaine dense et A et A^* sont accrétifs.*

Démonstration [12, *théorème 2.24*]
Soit A un opérateur vérifiant les hypothèses ci-dessus, et $(x, y) \in \mathcal{E}$ alors

$$\|(\lambda + A)x\| \geq |\langle y, (\lambda + A)x\rangle| = |\lambda + \langle y, Ax\rangle| > \lambda = \lambda\|x\|. \tag{1.12}$$

D'où l'opérateur $(\lambda + A)$ est injectif, et comme son espace image est $\mathfrak{X}$, il est bijectif et

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}, \tag{1.13}$$

on peut donc appliquer le corollaire 1.6. Réciproquement, supposons que $-A$ est le générateur d'un semi-groupe contractant, alors tout réel $\lambda > 0$ est dans l'ensemble résolvant de $-A$ donc $\mathrm{ran}(\lambda + A) = \mathfrak{X}$. Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle y, Ax\rangle &= \mathrm{Re}\,\lim_{h\to 0} h^{-1}\langle y, x - e^{-hA}x\rangle \\
&= \mathrm{Re}\,\lim_{h\to 0} h^{-1}\left(1 - \langle y, e^{-h}x\rangle\right) \\
&\geq \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(1 - \|e^{-hA}\|\|x\|\|y\|\right) \geq 0
\end{aligned}$$

□

1.1.3 Semi-groupes holomorphes

Il s'agit d'une classe de semi-groupes très importante dans ce travail, et qui de plus est très fréquente dans les applications. Notons S_ω pour $\omega \in]0, \pi/2]$ le secteur angulaire de sommet 0 :

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |\arg z| < \omega\}$$

Définition 1.9 *Soit $\{U(z)\}_{z\in S_\omega}$ une famille d'opérateurs bornés dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$. On dit que $\{U(z)\}_{z\in S_\omega}$ est un semi-groupe holomorphe dans S_ω si :*

(i) $U(z_1)U(z_2) = U(z_1 + z_2)$ *pour tous* $z_1, z_2 \in S_\omega$
(ii) *pour tout* $\epsilon \in]0, \omega[$ *il existe* $M_\epsilon > 0$ *tel que* $\|U(z)\| \leq M_\epsilon$, $z \in S_{\omega-\epsilon}$.
(iii) $U(z)$ *est une fonction holomorphe dans* S_ω.
(iv) *pour tout* $x \in \mathfrak{X}$, $\lim_{z\to 0, z\in S_{\omega-\epsilon}} U(z)x = x$, $\epsilon \in]0, \omega[$.

En particulier, un semi-groupe holomorphe dans S_ω est une fonction continue pour la norme d'opérateur dans le secteur ouvert S_ω. Cependant, dans le cas général, un semi-groupe holomorphe $U(z)$ n'est pas continu pour la norme d'opérateur en $z = 0$ (cela entraînerait que le générateur soit borné, et l'analyticité dans tout le plan complexe, cf proposition 1.4). Par ailleurs, un semi-groupe holomorphe n'est pas nécessairement borné sur son secteur de définition, si les M_ϵ ne sont pas bornées.

Concernant les fonctions holomorphes à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$, on rappelle le résultat suivant [32, Ch.III, théorème 3.12] (voir aussi [51, théorème 3.31] pour un résultat plus général) :

Proposition 1.10 *Soit $z \mapsto T(z)$ une fonction définie sur un ouvert $D \in \mathbb{C}$ du plan complexe à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*
- *(a) pour tous $x \in \mathfrak{X}$ et $y \in \mathfrak{X}^*$, $z \mapsto \langle y, T(z)x\rangle \in \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe dans D.*
- *(b) pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $z \mapsto T(z)x \in \mathfrak{X}$ est une fonction holomorphe dans D, au sens de la norme de $\mathfrak{X}$.*
- *(c) $z \mapsto T(z)$ est une fonction holomorphe dans D, au sens de la norme d'opérateur sur $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.*

Afin de caractériser les générateurs de cette classe de semi-groupes, on introduit la définition suivante [56] :

Définition 1.11 *Soit A un opérateur fermé à domaine dense dans $\mathfrak{X}$, et soient $\theta \in]0, \pi[$, $M \geq 1$. L'opérateur A est dit de type (θ, M) si l'ensemble résolvant de A contient $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \theta\}$ et que l'on a les inégalités :*

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda}, \ \textit{pour } \lambda > 0, \tag{1.14}$$

et pour tout $\theta' \in]0, \pi - \theta[$, il existe $M_{\theta'} \geq 1$ tel que

$$\|(z + A)^{-1}\| \leq \frac{M_{\theta'}}{|z|}, \ \textit{pour } z \in S_{\theta'}. \tag{1.15}$$

Ainsi par exemple un opérateur A fermé à domaine dense dans $\mathfrak{X}$ est de type $(\pi/2, 1)$ si et seulement si A et A^* sont accrétifs. On peut alors caractériser les générateurs de semi-groupes holomorphes par le résultat suivant [12, 20, 56] :

Proposition 1.12 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans $\mathfrak{X}$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe borné de demi-angle $\omega \in]0, \pi/2]$ si et seulement si A est de type $(\theta_A = \pi/2 - \omega, M)$ pour un $M \geq 1$. De plus, on a la représentation intégrale suivante :*

$$U(t) = e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{t\zeta}}{\zeta + A} d\zeta \tag{1.16}$$

où Γ est une courbe dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ allant de $\infty e^{-i(\pi/2+\varepsilon)}$ à $\infty e^{i(\pi/2+\varepsilon)}$ pour un $\varepsilon \in]0, \omega[$ (voir Figure 1.1).

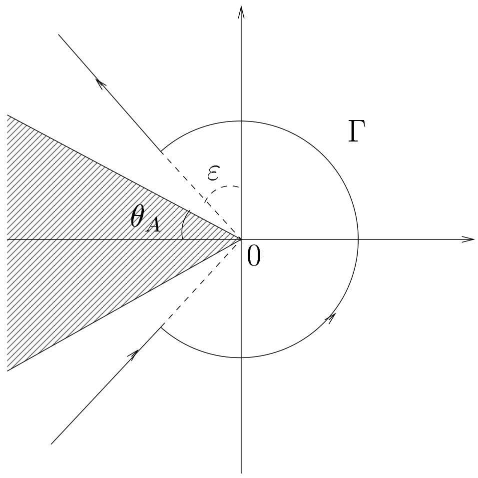

FIG. 1.1 – Exemple de chemin d'intégration Γ. Le domaine hachuré, c'est-à-dire $-S_{\theta_A}$ contient le spectre de l'opérateur $-A$, générateur du semi-groupe.

Les semi-groupes holomorphes sont encore caractérisés par la propriété suivante [12, théorème 2.39] :

Proposition 1.13 *Soit $U(z)$ un semi-groupe holomorphe dans S_ω, soit $-A$ son générateur. Alors pour tout $z \in S_\omega$, $\operatorname{ran}(U(z)) \subseteq \operatorname{dom}(A)$ et pour tout $\epsilon \in]0, \omega[$,*

$$\left\| \frac{d}{dz} U(z) \right\| = \|AU(z)\| \leq \frac{c_\epsilon}{|z|}, \ z \in S_{\omega-\epsilon}. \tag{1.17}$$

De plus, on en déduit :

$$\left\| \frac{d^n}{dt^n} U(z) \right\| = \|(AU(z/n))^n\| \leq \frac{n^n c_\epsilon^n}{|z|^n}, \ z \in S_{\omega-\epsilon}. \tag{1.18}$$

Réciproquement, si $U(t)$ est un semi-groupe de générateur $-A$ tel que $\operatorname{ran}(U(t)) \subseteq \operatorname{dom}(A)$ et que

$$\|U(t)\| \leq M, \ \|AU(t)\| \leq \frac{c}{t} \tag{1.19}$$

pour tout $t > 0$, alors il existe $\omega \geq \arcsin((ce)^{-1}) > 0$ tel que $U(t)$ soit prolongeable en un semi-groupe holomorphe dans le secteur S_ω.

De manière analogue, on définit les semi-groupes holomorphes contractants : un semi-groupe holomorphe $\{U(z)\}_{z \in S_\omega}$ est dit contractant si $\|U(z)\| \leq 1$ pour tout $z \in S_\omega$. Les générateurs de ces semi-groupes vérifient l'estimation (1.15) avec $M_{\theta'} = 1$ quel que soit $\theta' \in]0, \pi/2 + \omega[$ (d'après le corollaire 1.6). D'où la caractérisation suivante [20, théorème 5.9] :

Proposition 1.14 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans $\mathfrak{X}$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant si et seulement si A est "sectoriel"* *de demi-angle $\pi/2-\omega$, dans le sens suivant : pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$ (voir la définition 1.7), $\langle y, Ax\rangle \in \overline{S_{\pi/2-\omega}}$, l'adhérence du secteur $S_{\pi/2-\omega}$, et $-1 \in \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A.*

Enfin, si A est un opérateur de type $(\theta_A, 1)$, alors e^{-tA} est un semi-groupe holomorphe dans $S_{\pi/2-\theta_A}$, et $\|e^{-tA}\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Une autre propriété remarquable des semi-groupes holomorphes est relative aux espaces image et noyau de ces opérateurs (pour l'image, ce résultat se trouve dans [25, p.307], mais les propriétés des noyaux sont originales) :

Proposition 1.15 *Soit $(U(z))_{z\in S_\omega}$ un semi-groupe holomorphe sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Alors pour tout $z \in S_\omega$, $\operatorname{ran} U(z)$ est dense dans $\mathfrak{X}$. En fait, tout sous-espace de $\mathfrak{X}$ défini par $\mathfrak{X}_t(U) = \{y \in \mathfrak{X}, y = \int_0^\infty F(\tau)U(\tau)x d\tau$ avec $x \in \mathfrak{X}$ et $F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t,\infty[)\}$ est dense dans $\mathfrak{X}$. D'autre part $\ker U(z) = \{0\}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $x \in \ker d^nU(z)/dz^n$ si et seulement si $U(z)x = x$ pour tout $z \in S_\omega$. En particulier $U(z)$ est injectif.*

Démonstration

Remarquons que $\mathfrak{X}_t(U) \subseteq \operatorname{ran} U(t)$, car si $F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t,\infty[)$, alors $t_0 = \inf\{\tau > 0, F(\tau) \neq 0\} > t$ et donc $y = \int_0^\infty F(\tau)U(\tau)xd\tau = U(t)\int_t^\infty F(\tau)U(\tau-t)xd\tau \in \operatorname{ran} U(t)$.

Supposons qu'il existe une forme linéaire $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$ non nulle qui s'annule sur le sous-espace $\mathfrak{X}_t(U)$ entier : $x_0^* \in \mathfrak{X}_t(U)^\perp$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et pour tout $F \in \mathcal{C}_0^\infty(]t,\infty[)$, $\int_0^\infty F(\tau)\langle x_0^*, U(\tau)x\rangle d\tau = 0$. Cela entraîne que $\langle x_0^*, U(\tau)x\rangle = 0$ pour tout $\tau > t$ car l'application $\tau \mapsto \langle x_0^*, U(\tau)x\rangle$ est continue. De plus, comme $U(z)$ est un semi-groupe holomorphe, cette application se prolonge en une fonction holomorphe dans S_ω. Or par prolongement analytique, on obtient $\langle x_0^*, U(z)x\rangle = 0$ pour tout $z \in S_\omega$.

Par ailleurs, on doit avoir $\lim_{z\to 0}\langle x_0^*, U(z)x\rangle = \langle x_0^*, x\rangle$, donc $\langle x_0^*, x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, mais alors nécessairement $x_0^* = 0$ ce qui est contradictoire. Donc $\mathfrak{X}_t(U)^\perp = \{0\}$ et on en déduit que $\mathfrak{X}_t(U)$ est dense dans $\mathfrak{X}$, et a fortiori $\operatorname{ran} U(t)$ qui le contient.

Montrons que $\ker U(z_0) = \{0\}$. Soit $x \in \ker U(z_0)$. Comme $U(z_0)x = 0$, on a $U(\lambda + z_0)x = 0$ pour tout $\lambda \in S_\omega$. Or $z \mapsto U(z)x$ est une fonction holomorphe, donc par prolongement analytique $U(z)x = 0$ pour tout $z \in S_\omega$. Or $\lim_{z\to 0} U(z)x = x$ donc $x = 0$, ce qui montre que $\ker U(z) = \{0\}$.

Soit $x \in \ker d^nU(z_0)/dz^n$. Comme $d^nU(z_0)/dz^n = (-1)^nA^nU(z_0)$, en notant $-A$ le générateur du semi-groupe $U(z)$, on en déduit que $A^nU(z_0+\lambda)x = 0$ pour tout $\lambda \in S_\omega$, et par prolongement analytique $d^nU(z)/dz^nx = (-1)^nA^nU(z)x = 0$ pour tout $z \in S_\omega$. Ainsi pour tout $z \in S_\omega$ et tout $x^* \in \mathfrak{X}^*$, la fonction $s \mapsto \langle x^*, U(sz)x\rangle$ pour $s > 0$ est un polynôme de degré inférieur à n. Mais comme $sz \in S_{\omega-\epsilon}$ pour un certain $\epsilon > 0$ indépendant de $s > 0$, cette fonction est bornée par M_ϵ, ainsi ce doit être un polynôme constant. Enfin, on a $\lim_{s\to 0}\langle x^*, U(sz)x\rangle = \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x^* \in \mathfrak{X}^*$ d'où $U(z)x = x$ pour tout $z \in S_\omega$.

□

1.1.4 Puissances fractionnaires de générateurs

Soit A un opérateur fermé à domaine dense de type (θ_A, M_A), cf définition 1.11. On peut alors définir les puissances fractionnaires A^α pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Plusieurs méthodes existent [38, 56], selon la valeur de θ_A. Quel que soit $\theta_A \in]0, \pi[$, on peut définir :

$$A^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} x d\lambda, \ x \in \mathrm{dom}(A). \tag{1.20}$$

La puissance fractionnaire a la propriété suivante : si A est de type (θ_A, M_A) et $0 < \alpha < 1$, alors A^α est de type $(\alpha\theta_A, M_A)$ [56]. Ici A n'est pas nécessairement générateur d'un semi-groupe (en effet on peut avoir $\theta_A > \pi/2$), mais pour α assez petit, A^α devient générateur d'un semi-groupe holomorphe borné (lorsque $\alpha\theta_A < \pi/2$).

Si $\theta_A \in]0, \pi/2[$, $-A$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe borné et on peut aussi définir la puissance fractionnaire pour $0 < \alpha < 1$ de A par l'intégrale [38, proposition 11.4] :

$$A^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1} (e^{-\lambda A} - I) x d\lambda, \ x \in \mathrm{dom}(A). \tag{1.21}$$

On remarque que pour $x \in \mathrm{dom}(A)$, l'intégrale (1.21) est convergente, d'où $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$. On pose aussi $A^0 = I$ et pour tout $\alpha > 0$, si $[\alpha]$ désigne la partie entière de α, on pose $A^\alpha = A^{\alpha-[\alpha]} A^{[\alpha]}$.

Proposition 1.16 *Soit A un opérateur de type (θ_A, M_A). Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, il existe une constante C_α, dépendant seulement de M_A et α, telle que, pour tout $\mu > 0$,*

$$\left\| A^\alpha (A + \mu)^{-1} \right\| \leq \frac{C_\alpha}{\mu^{1-\alpha}}. \tag{1.22}$$

Démonstration

Pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, la proposition résulte de l'estimation de la résolvante. Soient $0 < \alpha < 1$ (remarquons que $\mathrm{ran}(A + \mu)^{-1} = \mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$), alors

$$A^\alpha (A + \mu)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} A(\lambda + A)^{-1} (A + \mu)^{-1} d\lambda \tag{1.23}$$

On écrit l'intégrale (1.23) en deux parties : $0 < \lambda \leq \mu$ et $\lambda > \mu$:

$$\begin{aligned} \|A^\alpha (A + \mu)^{-1}\| &\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left\{ \int_0^\mu \lambda^{\alpha-1} \|A(\lambda + A)^{-1}\| \|(A + \mu)^{-1}\| d\lambda + \right. \\ &\left. + \int_\mu^\infty \lambda^{\alpha-1} \|A(\lambda + A)^{-1}\| \|(A + \mu)^{-1}\| d\lambda \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite grâce à l'estimation de la résolvante $\|(A + \mu)^{-1}\| \leq M_A/\mu$, $\|A(A + \lambda)\| \leq 1 + M_A$, et pour tout $\mu > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|A^\alpha (A + \mu)^{-1}\| &\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} M_A (1 + M_A) \left\{ \mu^{-1} \int_0^\mu \lambda^{\alpha-1} d\lambda + \int_\mu^\infty \lambda^{\alpha-2} d\lambda \right\} \\ &\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} M_A (1 + M_A) \left(\frac{\mu^{\alpha-1}}{\alpha} - \frac{\mu^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

En posant $C_\alpha = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} \dfrac{M_A(1+M_A)}{\alpha(1-\alpha)}$ on trouve l'estimation (1.22). □

Proposition 1.17 (Lemme 2.3.5 de [56]) $\mathrm{dom}((A+\delta)^\alpha) = \mathrm{dom}(A^\alpha)$ *pour tout* $\delta > 0$ *et pour* $0 < \alpha < 1$.

Proposition 1.18 *Soit* A *un opérateur de type* (θ_A, M_A), $\theta_A < \pi/2$, *alors* $U(t) = e^{-tA}$ *est un semi-groupe holomorphe borné, et pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a*

$$\sup_{t>0} \left\| t^\alpha A^\alpha e^{-tA} \right\| = M_\alpha < \infty. \tag{1.24}$$

Démonstration

Soit $0 < \alpha < 1$: grâce à $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$ on a $\mathrm{dom}(A^\alpha U(t)) = \mathfrak{X}$. D'où par (1.21) on a

$$A^\alpha U(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha-1}(U(t+\lambda) - U(t))d\lambda. \tag{1.25}$$

On sépare l'intégrale (1.25) en deux parties : $0 < \lambda < t$ et $\lambda > t$, puis on utilise l'estimation de la dérivée du semi-groupe holomorphe (voir proposition 1.13) pour obtenir

$$\|U(t+\lambda) - U(t)\| \leq \lambda \sup_{t \leq \tau \leq t+\lambda} \|U'(\tau)\| \leq \lambda \frac{c_A}{t}. \tag{1.26}$$

Ce qui conduit à l'estimation

$$\begin{aligned} \|A^\alpha U(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\int_0^t \lambda^{-\alpha} \frac{c_A}{t} d\lambda + \int_t^\infty 2M_A \lambda^{-\alpha-1} d\lambda \right) \\ &\leq \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{c_A}{1-\alpha} + \frac{2M_A}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Finalement on trouve (1.24) pour $0 < \alpha < 1$ en posant $M_\alpha = \Gamma(-\alpha)^{-1}(c_A/(1-\alpha) + 2M_A/\alpha)$.

Pour les puissances α entières, (1.24) résulte directement de la proposition 1.13. D'après cette même proposition 1.13, $\mathrm{ran}(U(t)) \subseteq \mathrm{dom}(A^n)$ pour $t > 0$. D'où (1.24) découle, pour $\alpha > 1$ non entier, de $\mathrm{dom}(A^\alpha = A^{\alpha-[\alpha]}A^{[\alpha]}) \supseteq \mathrm{dom}(A^{[\alpha]+1})$, la représentation (1.25), et l'estimation (1.18) des dérivées d'ordre $[\alpha]+1$. □

Lemme 1.19 *Si* $-A$ *est le générateur d'un semi-groupe borné par* M_A, *alors pour tout* $\delta > 0$ *et pour tout* $\alpha \in]0,1[$ *:*

$$\|(\delta + A)^{-\alpha}(e^{-tA} - I)\| \leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{M_A(1+M_A)}{\alpha(1-\alpha)} t^\alpha \tag{1.27}$$

Démonstration

$\delta + A$ est encore de type (θ_A, M_A), donc

$$(\delta + A)^{-\alpha}(e^{-tA} - I) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(A + \delta + \lambda)^{-1} d\lambda \int_0^t Ae^{-sA} ds, \tag{1.28}$$

en divisant l'intégrale en deux parties, on trouve :

$$\begin{aligned}(\delta+A)^{-\alpha}(e^{-tA}-I) &= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{1/t}\lambda^{-\alpha}(I-(\delta+\lambda)(A+\delta+\lambda)^{-1})d\lambda\int_0^t e^{-sA}ds \\ &+ \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{1/t}^{\infty}\lambda^{-\alpha}(A+\delta+\lambda)^{-1}(e^{-tA}-I)d\lambda.\end{aligned}$$

Grâce aux estimations $\|e^{-tA}\| \leq M_A$ et $\|(A+\lambda)^{-1}\| \leq M_A/\lambda$ on obtient :

$$\|(e^{-tA}-I)(\delta+A)^{-\alpha}\| \leq \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}M_A(1+M_A)\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)t^{\alpha}. \tag{1.29}$$

□

1.2 Semi-groupes dans un espace de Hilbert

1.2.1 Opérateurs fermés dans un espace de Hilbert

Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On définit l'image numérique $\mathrm{Nr}(A) \subseteq \mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{Nr}(A) = \{(u, Au) : u \in \mathrm{dom}(A) \text{ et } \|u\| = 1\}. \tag{1.30}$$

Quel que soit A, $\mathrm{Nr}(A)$ est une partie convexe du plan complexe (théorème de Hausdorff). Il en résulte que le complémentaire de l'adhérence de l'image numérique $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{Nr}(A)}$ est connexe sauf dans le cas où $\mathrm{Nr}(A)$ est une bande limitée par deux droites parallèles, auquel cas le complémentaire a deux composantes connexes Ω_1, Ω_2. De plus, on a la proposition suivante [32, Ch.V, théorème 3.2] :

Proposition 1.20 *Soit A un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{Nr}(A)}$. Pour tout $z \in \Omega$, $(A - z)$ est injectif, son image* $\mathrm{ran}(A-z)$ *est fermée et de codimension constante dans $\mathfrak{H}$ (dans chaque composante connexe de Ω). Si* $\mathrm{ran}(A-z) = \mathfrak{H}$ *pour un $z \in \Omega$ (ou, respectivement $\Omega_{1,2}$), alors $\Omega \subseteq \rho(A)$ (respectivement, $\Omega_{1,2} \subseteq \rho(A)$) et la résolvante de A vérifie :*

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \mathrm{Nr}(A))} \tag{1.31}$$

On remarque que si A est un opérateur borné sur $\mathfrak{H}$, alors le spectre de A est inclus dans l'adhérence de l'image numérique. On a d'ailleurs les inégalités suivantes [22] entre le rayon spectral $r(A)$, le rayon numérique $r_n(A) = \sup_{z\in\mathrm{Nr}(A)}|z|$ et la norme $\|A\|$:

$$r(A) \leq r_n(A) \leq \|A\|, \text{ et } r_n(A) \geq \|A\|/2 \tag{1.32}$$

Dans un espace de Hilbert, les notions d'opérateur accrétif et sectoriel ont donc une formulation plus directe que dans le cas d'un espace de Banach, en utilisant l'image numérique :

Définition 1.21 *Un opérateur A dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est dit accrétif si son image numérique* $\mathrm{Nr}(A)$ *est incluse dans le demi-plan droit* $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$. *Si de plus* $\mathrm{ran}(A + \lambda) = \mathfrak{H}$ *pour un* $\lambda > 0$, *alors on dit que A est m-accrétif.*

Un opérateur m-accrétif A est nécessairement fermé à domaine dense dans $\mathfrak{H}$, et maximal au sens où il n'a pas d'extension accrétive [56, 32].

Définition 1.22 *Un opérateur A dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est dit sectoriel de demi-angle* $\theta_A \in]0, \pi/2[$ *si son image numérique* $\mathrm{Nr}(A)$ *est incluse dans le secteur fermé* $\overline{S_{\theta_A}}$. *Si de plus* $\mathrm{ran}(A + z) = \mathfrak{H}$ *pour un* $z \notin \overline{S_{\theta_A}}$, *$A$ est dit m-sectoriel.*

En particulier, un opérateur A m-sectoriel est m-accrétif, donc fermé à domaine dense dans $\mathfrak{H}$. La limite $\theta_A = 0$, c'est-à-dire si A est m-sectoriel de demi-angle θ pour tout $\theta > 0$ (donc $\mathrm{Nr}(A) \subseteq \mathbb{R}^+$) équivaut à : A est auto-adjoint positif. Ces notions sont liées à la définition 1.11 dans le sens suivant :

- A est m-accrétif si et seulement si A est de type $(\pi/2, 1)$.
- si A est m-accrétif, alors A^α est de type $(\alpha\pi/2, 1)$, de plus A^α est m-sectoriel de demi-angle $\alpha\pi/2$ pour tout $\alpha \in [0, 1[$ (voir [35])

En particulier, un opérateur $-A$ dans un espace de Hilbert est le générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant de demi-angle ω si et seulement si A est m-sectoriel de demi-angle $\pi/2 - \omega$. Les opérateurs auto-adjoints positifs engendrent les semi-groupes holomorphes et contractants dans le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

1.2.2 Formes quadratiques et représentations

Dans un espace de Hilbert de dimension finie, les notions d'opérateur linéaire et de forme quadratique sont équivalentes. C'est encore vrai en dimension infinie si on considère des opérateurs bornés et des formes bornées. Si on passe à des opérateurs ou des formes non bornées, il n'y a plus de relation immédiate, mais il existe une théorie de la représentation pour certaines classes de formes et d'opérateurs, notamment les opérateurs m-sectoriels.

Soit a une forme sesquilinéaire définie sur le domaine $\mathrm{dom}(a) \subseteq \mathfrak{H}$, on note $a[u] = a[u, u]$ lorsqu'on la considère comme une forme quadratique, et on définit les parties réelle et imaginaire comme les formes symétriques définies sur le même domaine :

$$\mathrm{Re}\, a = \frac{1}{2}(a + a^*) \text{ et } \mathrm{Im}\, a = \frac{1}{2i}(a - a^*) \tag{1.33}$$

avec $a^*[u, v] = \overline{a[v, u]}$, d'où on a aussi

$$(\mathrm{Re}\, a)[u] = \mathrm{Re}\,(a[u]) \text{ et } (\mathrm{Im}\, a)[u] = \mathrm{Im}\,(a[u]), \;\; u \in \mathrm{dom}(a), \tag{1.34}$$

de sorte que $a[u, v] = (\mathrm{Re}\, a)[u, v] + i(\mathrm{Im}\, a)[u, v]$ pour tous $u, v \in \mathrm{dom}(a)$ (mais $(\mathrm{Re}\, a)[u, v] \neq \mathrm{Re}\,(a[u, v])$!). Comme pour les opérateurs, l'image numérique est définie par

$$\mathrm{Nr}(a) = \{a[u], u \in \mathrm{dom}(a) \text{ et } \|u\| = 1\}. \tag{1.35}$$

On dit qu'une forme a est sectorielle de demi-angle $\theta \in]0, \pi/2[$ si $\mathrm{Nr}(a) \subseteq S_\theta$. On dit qu'une forme a est fermée si pour toute suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{dom}(a)$, telle que $a[u_n - u_m] \to 0$ quand $n, m \to 0$ et u_n converge vers u, on a $u \in \mathrm{dom}(a)$ et $\lim_{n\to\infty} a[u_n - u] = 0$. La proposition suivante est appelée le premier théorème de représentation [32, Ch.VI, théorème 2.1].

Proposition 1.23 *Soit a une forme sectorielle fermée à domaine dense dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Alors il existe un opérateur m-sectoriel A unique tel que* $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(a)$ *et* $a[u, v] = (u, Av)$ *pour tout* $u \in \mathrm{dom}(a)$ *et* $v \in \mathrm{dom}(A)$. *Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des formes sectorielles fermées à domaine dense et l'ensemble des opérateurs m-sectoriels. La forme a est bornée si et seulement si A est borné, a et A ont le même angle et a est symétrique si et seulement si A est auto-adjoint.*

Comme la somme de deux formes sectorielles fermées a et b est une forme sectorielle fermée de domaine $\mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b)$ [32, Ch.VI, théorème 1.31], le premier théorème de représentation permet de définir la somme des deux opérateurs m-sectoriels associés au sens des formes [32, Ch.VI.5]. On note $A\dot{+}B$ cette somme, c'est par définition l'opérateur m-sectoriel associé à la forme sectorielle fermée $a+b$, dans le sous-espace $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b)}$. Il s'agit d'une extension de la somme algébrique, elle peut être définie de manière non triviale même si $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B) = \{0\}$.

Le second théorème de représentation concerne les formes symétriques positives [32, Ch.VI, théorème 2.23] :

Proposition 1.24 *Soit a une forme symétrique, positive et fermée à domaine dense dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soit A l'opérateur auto-adjoint associé. Alors on a l'égalité* $\mathrm{dom}(A^{1/2}) = \mathrm{dom}(a)$, *et*

$$a[u, v] = (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \text{ pour tous } u, v \in \mathrm{dom}(a). \tag{1.36}$$

Si a est une forme sectorielle fermée, alors $\mathrm{Re}\, a$ est symétrique, positive et fermée (comme somme de formes sectorielles fermées). On peut donc définir l'opérateur auto-adjoint $\mathrm{Re}\, A$ comme l'opérateur associé à $\mathrm{Re}\, a$, ou encore $\mathrm{Re}\, A = (A\dot{+}A^*)/2$. A priori, le domaine $\mathrm{dom}(\mathrm{Re}\, A)$ est différent de $\mathrm{dom}(A)$, mais par le théorème 1.24, $\mathrm{dom}((\mathrm{Re}\, A)^{1/2}) = \mathrm{dom}(\mathrm{Re}\, a) = \mathrm{dom}(a)$. Ces formes et ces opérateurs sont liés par les inégalités suivantes [32, Ch. VI, (1.15)] (a est sectorielle de demi-angle θ) :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Re}\, a)[u, v] &\leq (\mathrm{Re}\, a)[u]^{1/2}(\mathrm{Re}\, a)[v]^{1/2} = \|(\mathrm{Re}\, A)^{1/2}u\| \|(\mathrm{Re}\, A)^{1/2}v\| && (1.37)\\
|(\mathrm{Im}\, a)[u, v]| &\leq \tan\theta (\mathrm{Re}\, a)[u]^{1/2}(\mathrm{Re}\, a)[v]^{1/2} && (1.38)\\
|a[u, v]| &\leq (1 + \tan\theta)(\mathrm{Re}\, a)[u]^{1/2}(\mathrm{Re}\, a)[v]^{1/2} && (1.39)
\end{aligned}$$

Suivant [32, Ch.VI, théorème 3.2], on peut donner une expression générale pour les opérateurs m-sectoriels : soit A un opérateur m-sectoriel dans $\mathfrak{H}$, alors il existe un opérateur auto-adjoint borné C tel que

$$A = (\mathrm{Re}\, A)^{1/2}(I + iC)(\mathrm{Re}\, A)^{1/2}, \tag{1.40}$$

et $\|C\| \leq \tan\theta_A$. On a enfin la propriété suivante [32, Ch.VI, théorème 3.3] :

Proposition 1.25 *Soit A un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. A a une résolvante compacte si et seulement si* $\operatorname{Re} A$ *a la même propriété.*

1.2.3 Puissances fractionnaires et inégalités de Heinz-Kato

Le problème de la comparaison des puissances fractionnaires et de la forme associée est très délicat. Pour un opérateur auto-adjoint, le second théorème de représentation donne une réponse complète : $\operatorname{dom}(A^{1/2}) = \operatorname{dom}(a)$. La question de la détermination du domaine de la racine carrée dans le cas général a été soulevée par Kato, et porte le nom de conjecture de Kato. Cependant l'égalité $\operatorname{dom}(A^{1/2}) = \operatorname{dom}(a)$ n'est pas vraie pour un opérateur m-sectoriel quelconque. Le cas des opérateurs elliptiques du second ordre, qui est essentiel pour les applications, a été finalement résolu dernièrement [2]. Pour un opérateur m-accrétif et des puissances strictement inférieures à 1/2, Kato a montré le résultat suivant [35] :

Proposition 1.26 *Soit A un opérateur m-accrétif dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Alors pour tout $\alpha \in [0, 1/2[$, on a :*

$$\operatorname{dom}(A^{\alpha}) = \operatorname{dom}(A^{*\alpha}) \tag{1.41}$$

Si A est m-sectoriel, alors $\operatorname{dom}(A^{\alpha}) = \operatorname{dom}(A^{*\alpha}) = \operatorname{dom}((\operatorname{Re} A)^{\alpha}) \subseteq \operatorname{dom}(a)$, *toujours pour $\alpha \in [0, 1/2[$.*

Pour des opérateurs auto-adjoints, on a l'inégalité de Heinz [56] :

Proposition 1.27 *Soient $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ deux espaces de Hilbert et soient A et B des opérateurs auto-adjoints positifs dans $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ respectivement. Soit T est un opérateur borné de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$ tel que $T(\operatorname{dom}(A)) \subseteq \operatorname{dom}(B)$. Supposons qu'il existe une constante M telle que pour tout $u \in \operatorname{dom}(A)$, $\|BTu\| \leq M\|Au\|$, alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $T(\operatorname{dom}(A^{\alpha})) \subseteq \operatorname{dom}(B^{\alpha})$ et pour tout $u \in \operatorname{dom}(A^{\alpha})$*

$$\|B^{\alpha}Tu\| \leq M^{\alpha}\|T\|^{1-\alpha}\|A^{\alpha}u\| \tag{1.42}$$

Ce résultat a été généralisé par Kato à deux opérateurs m-accrétifs [36, 37] :

Proposition 1.28 *Soient $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ deux espaces de Hilbert et soient A et B des opérateurs m-accrétifs dans $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ respectivement. Soit T est un opérateur borné de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}_2$ tel que $T(\operatorname{dom}(A)) \subseteq \operatorname{dom}(B)$. Supposons qu'il existe une constante M telle que pour tout $u \in \operatorname{dom}(A)$, $\|BTu\| \leq M\|Au\|$, alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $T(\operatorname{dom}(A^{\alpha})) \subseteq \operatorname{dom}(B^{\alpha})$ et pour tout $u \in \operatorname{dom}(A^{\alpha})$*

$$\|B^{\alpha}Tu\| \leq e^{\pi^2\alpha(1-\alpha)/2}M^{\alpha}\|T\|^{1-\alpha}\|A^{\alpha}u\| \tag{1.43}$$

Chapitre 2

La formule de Lie-Trotter-Kato

2.1 Un théorème de Sophus Lie

L'origine de cette formule est la proposition suivante due à Sophus Lie (1875), qui était énoncée en dimension finie (voir par exemple [48, Ch. VIII.8]).

Proposition 2.1 *Soient A et B des matrices carrées de dimension d, alors*

$$\left\| \left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n - e^{A+B} \right\| \leq O(1/n). \tag{2.1}$$

Démonstration

Soient $S_n = e^{(A+B)/n}$ et $T_n = e^{A/n}e^{B/n}$. Alors

$$S_n^n - T_n^n = \sum_{m=0}^{n-1} S_n^m (S_n - T_n) T_n^{n-1-m}, \tag{2.2}$$

d'où

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq n(\max\{\|S_n\|, \|T_n\|\})^{n-1} \|S_n - T_n\|. \tag{2.3}$$

Or $\|e^{S_n}\| \leq e^{\|A+B\|/n}$ et $\|T_n\| \leq e^{(\|A\|+\|B\|)/n}$. On en déduit que

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq n\, e^{\|A\|+\|B\|} \|S_n - T_n\|. \tag{2.4}$$

D'autre part, on peut écrire un développement limité de la différence $S_n - T_n$:

$$\begin{aligned} S_n - T_n &= I + \frac{A+B}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \\ &\quad \left(I + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(I + \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat annoncé (2.1). $\square$

On remarque que ce raisonnement reste entièrement valable si l'espace est de dimension infinie, avec deux opérateurs bornés A et B (cf (1.7)) et la topologie de la norme d'opérateur (en dimension finie il n'était pas nécessaire de préciser la norme choisie puisqu'elles sont équivalentes).

Connaissant la notion de semi-groupe d'opérateurs dans un espace de Banach, on peut alors poser la question : existe-t-il une formule d'approximation analogue à celle de Lie pour les semi-groupes ? En fait, cette question en contient plusieurs : dans quelle topologie la convergence a-t-elle lieu ? Comment la somme $A+B$ est-elle définie (puisque A et B ne sont plus bornés) ? Quelle est la vitesse de la convergence ?

2.2 Les résultats de Trotter

En 1959, Trotter [58] démontra une telle formule analogue pour des semi-groupes contractants, dans la topologie forte. Étant donné qu'il s'agit de semi-groupes fortement continus, il est naturel d'obtenir une convergence dans la même topologie forte, contrairement à la formule de Lie, où il s'agit de groupes continus en norme d'opérateur. Cependant, il faut aussi une condition qui garantisse que la somme des générateurs $A + B$ est bien définie et engendre un semi-groupe.

Proposition 2.2 *Soient $-A$ et $-B$, des générateurs de semi-groupes contractants sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Supposons que*

$$Cu = Au + Bu, \ u \in \mathcal{D} \tag{2.5}$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$ est un sous-espace dense tel que $-C$ (défini sur $\mathcal{D}$) admette une extension $-\tilde{C}$ qui soit le générateur d'un semi-groupe. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n u = e^{-t\tilde{C}}u \tag{2.6}$$

pour tout $u \in \mathfrak{X}$ et tout $t \geq 0$.

Une autre façon de présenter ce résultat est la suivante : $-\tilde{C}$ est un générateur de semi-groupe tel qu'il admet un domaine essentiel $\mathcal{D}$ avec $\tilde{C}u = Au + Bu$ pour $u \in \mathcal{D}$.

En fait, il n'est pas nécessaire que les semi-groupes soient contractants, mais seulement qu'ils satisfassent les conditions $M_A = M_B = 1$ [58]. Cette formule de Trotter permet donc d'approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires dans un espace de Banach, connaissant les solutions des deux équations correspondant aux deux parties A et B séparées. Par exemple, si $H = A + B$ est le hamiltonien d'un système quantique décrit dans un espace de Hilbert, de sorte que A et B soient auto-adjoints, alors les solutions de l'équation de Schrödinger $i\frac{d}{dt}\psi = H\psi$ peuvent être approchées par $(e^{itA/n}e^{itB/n})^n\psi(0)$ [48].

Ce résultat repose sur un autre théorème d'approximation très important dû à Trotter [57] et appelé parfois aussi théorème de Trotter-Neveu-Kato (voir par exemple [12, théorème 3.17], [20, Ch. 1.7])

Proposition 2.3 *Soit e^{-tA_h} une famille de semi-groupes dépendant d'un paramètre $h > 0$ sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$, telle que $\|e^{-tA_h}\| \leq Me^{\gamma t}$ indépendamment de h. Soit e^{-tA} un semi-groupe défini sur un sous-espace fermé $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$, avec $\|e^{-tA}\| \leq Me^{-\gamma t}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{X}_0$

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\leq t\leq t_0} \|e^{-tA_h}u - e^{-tA}u\| = 0. \tag{2.7}$$

(ii) la limite (2.7) est vérifiée pour tout $t_0 > 0$.

(iii) il existe $z > \gamma$ tel que pour tout $u \in \mathfrak{X}_0$

$$\lim_{h\to 0}(z + A_h)^{-1}u = (z + A)^{-1}u. \tag{2.8}$$

(iv) la limite (2.8) est vérifiée pour tout $z > \gamma$.

(v) pour tout $u \in \mathcal{D}$, un domaine essentiel de A, il existe des vecteurs $u_h \in \operatorname{dom}(A_h)$ tels que

$$\lim_{h\to 0} u_h = u, \ \lim_{h\to 0} A_h u_h = Au.$$

Ce résultat montre que la topologie de la convergence forte de la résolvante correspond bien, pour les générateurs de semi-groupes, à la topologie forte pour les semi-groupes. On construira une théorie analogue avec la topologie de la norme d'opérateur au chapitre 7.

2.3 Premières généralisations

2.3.1 Chernoff

Dans les années 1960, Chernoff démontra la formule de Trotter sous une forme plus générale, où le produit $\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n$ est remplacé par une fonction à valeurs dans les contractions sur l'espace de Banach $\mathfrak{X}$ [10].

Proposition 2.4 *Soit $F(t)$ une fonction fortement continue de $t \in [0, \infty[$ à valeurs dans les contractions sur $\mathfrak{X}$ avec $F(0) = I$. Supposons que la dérivée forte $F'(0)$ admette pour fermeture un opérateur $-C$ générateur d'un semi-groupe contractant. Alors $F(t/n)^n$ converge vers e^{-tC} dans la topologie forte.*

Dans le cas particulier $F(t) = e^{-tA}e^{-tB}$ on retrouve le résultat de Trotter. Comme autres exemples, on trouve souvent la moyenne arithmétique $(e^{-2tA} + e^{-2tB})/2$ ou les mêmes expressions avec des résolvantes au lieu des semi-groupes : $(I+tA)^{-1}(I+tB)^{-1}$, $((I+2tA)^{-1} + (I+2tB)^{-1})/2$ (voir par exemple [39]). Dans le chapitre 7, on présentera une extension de cette théorie de Chernoff pour la norme d'opérateur.

2.3.2 Kato

En 1978, Kato démontra [34] une formulation particulièrement achevée du résultat de Trotter, dans un espace de Hilbert. En effet, dans ce cas, il n'y a pas de condition supplémentaire sur les générateurs A et B. Pour définir la somme, on utilise la théorie des formes quadratiques (cf Ch.1.2.2). Par ailleurs, Kato a introduit deux fonctions qui ne sont pas nécessairement sous forme exponentielle, les opérateurs $f(tA)$ et $g(tB)$ sont alors définis grâce à la représentation spectrale des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 2.5 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit $C = A \dot{+} B$ la somme au sens des formes quadratiques définie sur le sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})}$. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $[0, \infty[$, mesurables, telles que*

$$0 \leq f(t) \leq 1, \; f(0) = 1, \; f'(+0) = -1, \tag{2.9}$$

et de même pour g. Alors

$$\lim_{n \to \infty} (f(tA/n) g(tB/n))^n u = e^{-tC} P_0 u \tag{2.10}$$

pour tout $u \in \mathfrak{H}$, où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$.

Cette convergence forte est encore vraie pour des générateurs m-sectoriels à condition de prendre pour f et g la fonction $t \mapsto e^{-t}$ [34, addendum].

Proposition 2.6 *Soient A et B deux opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit $C = A \dot{+} B$ la somme au sens des formes quadratiques définie sur le sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})}$. Alors on a la convergence forte*

$$s - \lim_{n \to \infty} \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n = e^{-tC} P_0, \tag{2.11}$$

où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$.

Pour un exposé clair et concis des différents résultats sur la convergence forte de la formule de Trotter, voir [12, Ch. 3.4 et Ch. 4.5].

2.4 Au-delà de la topologie forte

2.4.1 Convergence dans la topologie de la trace

Jusqu'en 1988, la convergence de la formule de Trotter (avec des générateurs non bornés) était connue seulement dans la topologie forte. À cette date, Zagrebnov établit la convergence pour la topologie de la trace de la formule de Trotter pour des opérateurs de Schrödinger [61]. En 1990, Neidhardt et Zagrebnov [42] ont étendu ce résultat au cas abstrait en montrant que la convergence a lieu pour la norme de la trace pour des semi-groupes auto-adjoints si e^{-tA} est un semi-groupe de Gibbs (c'est-à-dire admettant une trace) pour $t > 0$. Ce type de semi-groupe est continu pour la norme de la trace en tout $t > 0$, mais non en $t = 0$ où seule la continuité forte est vraie (voir chapitre 6). Si f est une fonction satisfaisant les conditions (2.9), on pose

$$0 \leq \varphi_0(t) = \inf_{0<s\leq t} s^{-1}\left(f(s)^{-1} - 1\right) \leq 1,$$

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ (1 + t\varphi_0(t))^{-1}, & t > 0. \end{cases}$$

Par exemple pour $f(s) = e^{-s}$, $\varphi_0(t) = 1$.

Proposition 2.7 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soient f et g deux fonctions mesurables satisfaisant les conditions (2.9). Si de plus $f_0(tA) \in \mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$, $t > 0$, $1 \leq p < \infty$, alors $e^{-t(A\dot{+}B)} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H}_0)$ où $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})}$, et on a*

$$\|\cdot\|_1 - \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq p}} (f(tA/n)g(tB/n))^n = e^{-t(A\dot{+}B)}P_0 \tag{2.12}$$

où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$.

2.4.2 Convergence en norme d'opérateur

En 1993, un nouveau résultat surprenant fut celui de Rogava [50], où pour la première fois la convergence en norme d'opérateur est énoncée pour des semi-groupes fortement continus.

Proposition 2.8 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Supposons que* $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$, *et que $A + B$ est auto-adjoint sur* $\mathrm{dom}(A)$. *Alors on a*

$$\left\|\left(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-t(A+B)}\right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.13}$$

$$\left\|\left(e^{-tB/n}e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)}\right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.14}$$

Depuis, de nombreux articles sont parus sur la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur, abordant le problème dans diverses directions : avec des opérateurs différentiels précis [23, 26, 14, 27] ou dans un cadre abstrait [28, 29, 43, 44, 45, 46]. Avant [4], tous concernaient des générateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert, et les méthodes reposaient de manière essentielle sur la représentation spectrale de ces opérateurs. Ainsi, les semi-groupes correspondants sont holomorphes dans le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Cette analyticité paraît essentielle pour avoir la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur. En effet il semble qu'il y ait un lien entre la topologie dans laquelle (au moins) un des semi-groupes intervenant dans la formule est continu pour $t > 0$ et la topologie dans laquelle la formule converge : si e^{-tA} est un semi-groupe de Gibbs (auto-adjoint), donc continu pour la topologie de la trace pour tout $t > 0$, alors la formule de Trotter converge dans la topologie de la trace ; si e^{-tA} est un semi-groupe holomorphe (auto-adjoint), donc continu en norme d'opérateur pour tout $t > 0$, alors la formule de Trotter converge en norme d'opérateur. On verra que cette thèse confirme ces idées même lorsque les semi-groupes considérés ne sont pas auto-adjoints.

2.5 Conditions suffisantes : cas auto-adjoint

Parmi tous les résultats parus, certains sont directement liés avec cette thèse : ils sont donc rappelés ici. Considérons deux fonctions f et g satisfaisant les conditions (2.9). On ajoute les conditions suivantes [43] :

$$\begin{aligned}
\sup_{x>0} \frac{1-f(x)}{x} &< +\infty && (2.15)\\
\sup_{x>0} \frac{1-g(x)}{x} &= S_1 < +\infty && (2.16)\\
\sup_{x>0} \left| \left(f(x) - \frac{1}{1+x} \right) \frac{1}{x^2} \right| &< +\infty && (2.17)\\
\sup_{x>0} \left| \left(g(x) - \frac{1}{1+x} \right) \frac{1}{x^2} \right| &< +\infty && (2.18)\\
\sup_{x>0} \frac{x f(x)^{1/2}}{1-f(x)} &= S_2 < +\infty && (2.19)
\end{aligned}$$

Proposition 2.9 (cf [43]) *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, avec $A \geq I$, $B \geq I$. Soient f et g deux fonctions satisfaisant (2.9) et les conditions ci-dessus. Supposons que $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ et $\|Bu\| \leq a\|Au\|$, pour tout $u \in \mathrm{dom}(A)$ avec $0 < aS_1S_2 < 1$. Alors on a les estimations de convergence suivantes en norme d'opérateur, uniformément pour $t \in [0, +\infty[$:*

$$\begin{aligned}
\left\| \left(f(tA/n)^{1/2} g(tB/n) f(tA/n)^{1/2} \right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| &\leq O\left(\frac{\ln n}{n} \right) && (2.20)\\
\left\| \left(f(tA/n) g(tB/n) \right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| &\leq O\left(\frac{\ln n}{n} \right) && (2.21)
\end{aligned}$$

Proposition 2.10 (cf [44]) *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, avec $A \geq I$, $B \geq 0$. Soient f et g deux fonctions satisfaisant (2.9) et les conditions ci-dessus. On note $H = A \dot{+} B$ la somme au* *sens des formes quadratiques et on suppose que* $\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})$ *est dense dans* $\mathfrak{H}$. *Supposons de plus que* $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B^\alpha)$ *et* $\|B^\alpha u\| \leq a\|A^\alpha u\|$, *pour un* $\alpha \in]1/2, 1[$ *et pour tout* $u \in \mathrm{dom}(A^\alpha)$ *avec* $0 < a^{1/\alpha} S_1 S_2 < 1$. *Alors on a les estimations de convergence suivantes en norme d'opérateur, uniformément pour* $t \in [t_0, +\infty[$ $(t_0 > 0)$ *:*

$$\left\| \left(f(tA/n)^{1/2} g(tB/n) f(tA/n)^{1/2}\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha-1}}\right) \tag{2.22}$$

$$\left\| \left(f(tA/n) g(tB/n)\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha-1}}\right). \tag{2.23}$$

Si de plus $\mathrm{dom}(H^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$, *alors on a les estimations de convergence* $O(n^{1-2\alpha})$, *uniformes en* t *sur* $[0, +\infty[$.

Ces résultats seront généralisés à des semi-groupes non auto-adjoints dans plusieurs cas. Dans le chapitre 4, on montrera une extension de la proposition 2.9 pour B m-accrétif avec la même vitesse de convergence ; au chapitre 5, on montrera une extension de la proposition 2.10 pour des générateurs m-sectoriels et sans estimation.

Par ailleurs, Neidhardt et Zagrebnov ont montré [45] que la compacité de la résolvante d'un des générateurs est suffisante pour avoir la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter, mais il n'y a pas d'estimation d'erreur dans ce cas. Ce résultat étend en particulier celui de la proposition 2.7 au cas $p = \infty$. Plus précisément, on a :

Proposition 2.11 *Soient* A *et* B *deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert* $\mathfrak{H}$. *Si* $(I + A)^{-1}(I + B)^{-1}$ *est compact, alors la formule de Trotter-Kato* $(f(tA/n)g(tB/n))^n$ *converge en norme d'opérateur vers* $e^{-tH} P_0$ *localement uniformément sur* $]0, +\infty[$. $H = A \dot{+} B$ *est la somme au sens des formes définie dans le sous-espace* $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})}$, P_0 *est le projecteur orthogonal sur* $\mathfrak{H}_0$ *et* $(I_0 + H)^{-1} P_0$ *est compact.*

On verra au chapitre 5 comment cette proposition peut être étendue au cas d'opérateurs m-sectoriels.

2.6 Condition nécessaire et suffisante : cas auto-adjoint

Dans le cas de semi-groupes auto-adjoints sur un espace de Hilbert, des conditions nécessaires et suffisantes ont été énoncées [45]. La proposition suivante généralise la proposition 2.4 de Chernoff puisque les limites sont prises dans la topologie de la norme d'opérateur.

Proposition 2.12 *Soit* $\{\Phi(s)\}_{s\geq 0}$ *une famille de contractions auto-adjointes positives sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *Soit* $X(s) = (I - \Phi(s))/s$ *pour* $s > 0$, *et soit*

X_0 un opérateur auto-adjoint défini dans un sous-espace fermé $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(a) \qquad \lim_{s\to+0} \left\| (\zeta + X(s))^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1} P_0 \right\| = 0, \ \textit{pour un } \zeta > 0;$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \Phi(t/n)^n - e^{-tX_0} P_0 \right\| = 0, \ \textit{pour } t > 0.$$

Proposition 2.13 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soient f et g deux fonctions satisfaisant (2.9). On note $H = A\dot{+}B$ défini sur le sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})}$ et P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \ \lim_{r\to+\infty} \sup_{t\in[a,b]} \| \left(f(tA/n)^{1/2} g(tB/n) f(tA/n)^{1/2}\right)^n - e^{-tH} P_0 \| = 0, \ [a,b] \subset]0,+\infty[$$

$$(ii) \quad \lim_{t\to0} \|(\lambda + R(t))^{-1} - (\lambda + H)^{-1} P_0\| = 0, \ \lambda > 0$$

$$(iii) \quad \lim_{r\to+\infty} \sup_{t\in[a,b]} \| \left(f(tA/n) g(tB/n)\right)^n - e^{-tH} P_0 \| = 0, \ [a,b] \subset]0,+\infty[$$

$$(iv) \quad \lim_{t\to0} \|(\lambda + X(t))^{-1} - (\lambda + H)^{-1} P_0\| = 0, \ \lambda > 0,$$

où $R(t) = t^{-1}(I - f(tA/n)^{1/2} g(tB/n) f(tA/n)^{1/2})$ et $X(t) = t^{-1}(I - f(tA/n) g(tB/n))$.

Ces résultats seront étendus au cas non auto-adjoint au chapitre 7.

2.7 Convergence dans les idéaux symétriquement normés

Plusieurs des résultats de convergence précédents (notamment les propositions 2.7, 2.9, 2.10) ont été généralisés à la convergence dans les idéaux symétriquement normés de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ [24, 46]. Soit ϕ une fonction normante symétrique, alors ϕ définit un idéal noté $\mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ constitué par les opérateurs compacts T sur $\mathfrak{H}$ tels que $\phi(\{s_k(T)\}_{k\in\mathbb{N}}) < \infty$ [46, §2]. On note $\{s_k(T)\}_{k\in\mathbb{N}}$ les valeurs singulières de l'opérateur compact T, c'est-à-dire les valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint compact $\sqrt{T^*T}$. Cet idéal $\mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ devient un espace de Banach muni de la norme $\|T\|_\phi = \phi(\{s_k(T)\}_{k\in\mathbb{N}})$. La proposition suivante reprend le théorème 3.5 de [46].

Proposition 2.14 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$. Soient f^D et g^D deux fonctions mesurables telles que $(g^D(t_0B)^{1/2} f^D(t_0A) g^D(t_0B)^{1/2})^p = F^D(t_0)^p \in \mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ pour un $t_0 > 0$ et un entier $p \geq 1$. Si les fonctions f et g vérifient les conditions (2.9) et sont dominées respectivement par f^D et g^D (c'est-à-dire $h(qx)^{1/q} \leq h^D(x)$, $0 < q \leq 1$ et $x \geq 0$), et que la formule de Trotter converge localement uniformément sur $]0,+\infty[$ pour la fonction $F(t) = g(tB)^{1/2} f(tA) g(tB)^{1/2}$ en norme d'opérateur, alors la formule de Trotter converge dans $\mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ localement uniformément sur $]pt_0,+\infty[$ pour les différentes fonction engendrées par f et g : $f(tA)g(tB)$, $g(tB)f(tA)$, $f(tA)^{1/2}g(tB)f(tA)^{1/2}$, $g(tB)^{1/2}f(tA)g(tB)^{1/2}$.*

On a aussi le résultat suivant (théorème 4.5 de [46]).

Proposition 2.15 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$. Soit f^D une fonction mesurable telle que $f^D(qx)^{1/q} \leq f^D(x)$, $x, q > 0$, et $f^D(t_0 A) \in \mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ pour un $t_0 > 0$. Si les fonctions f et g vérifient les conditions (2.9) et que $f(x) \leq f^D(x)$, alors la formule de Trotter converge dans $\mathcal{L}_\phi(\mathfrak{H})$ localement uniformément sur $]t_0, +\infty[$ pour les différentes fonctions engendrées par f et g, comme dans la proposition 2.14.*

Un intérêt majeur de connaître la convergence de la formule de Trotter dans ces idéaux est l'application à la mécanique statistique quantique. En effet en mécanique statistique quantique, la fonction fondamentale régissant le comportement d'un système est la fonction de partition $\operatorname{tr} e^{-\beta H}$ et les moyennes thermodynamiques sont obtenues par des traces de la matrice densité $\rho(\beta) = e^{-\beta H}/\operatorname{tr} e^{-\beta H}$, où H est la hamiltonien du système et β l'inverse de la température. Si la hamiltonien s'écrit $H = A + B$, alors on peut approcher la fonction de partition par la formule de Trotter, à condition que celle-ci converge dans la topologie où la trace est continue, c'est-à-dire la topologie de la norme de l'idéal associé à cette trace. On présentera au chapitre 6 des résultats de convergence en norme de trace pour des semi-groupes non auto-adjoints.

2.8 Exemples et contre-exemples

Comme tous ces résultats le montrent, la formule de Trotter converge sous des conditions assez larges sur les deux semi-groupes considérés. Cependant il est intéressant de savoir que des contre-exemples ont été trouvés. Le premier, dû à Trotter [58], montre l'importance de l'hypothèse que les semi-groupes soient contractants (ou du moins vérifient la condition $M = 1$, appelée par Trotter "the norm condition").

2.8.1 Semi-groupes non contractants

Soit $\mathfrak{X} = L^1(\mathbb{R})$, considérons les semi-groupes suivants [58] : T_t défini par $T_t f(x) = f(x+t)$ et U_t par $U_t f(x) = f(\psi(\psi^{-1}(x) - t))$, où $\psi(x) = x$ si $x \leq 0$ et $\psi(x) = 2x$ si $x > 0$. Alors le générateur de T_t est l'opérateur différentiel d/dx et celui de U_t est $\phi(x) d/dx$, où $\phi(x) = -1$ si $x \leq 0$ et $\phi(x) = -2$ si $x > 0$. Le domaine $\operatorname{dom}(d/dx)$ est l'ensemble des fonctions absolument continues de $L^1(\mathbb{R})$ dont la dérivée est encore dans $L^1(\mathbb{R})$. On a alors $\operatorname{dom}(d/dx) = \operatorname{dom}(\phi(x) d/dx)$. Considérons $f_h = \chi_{[-h,0]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-h, 0]$, alors on peut calculer $(T_h U_h)^n f_h = \chi_{[-h,nh]}$. D'où on en déduit que $\|(T_h U_h)^n\| \geq n+1$ quel que soit h, puisque $\|f_h\| = h$. Si la formule de Trotter $(T_{t/n} U_{t/n})^n$ convergeait fortement, alors par le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(T_{t/n} U_{t/n})^n$ serait équicontinue, donc bornée en norme d'opérateur. Comme ce n'est pas le cas, on en déduit que la formule de Trotter ne converge pas dans la topologie forte.

En fait, on peut montrer que la somme des générateurs n'a pas d'extension qui soit génératrice de semi-groupe. Soit $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\lambda x}$ si $x > 0$. Alors $f \in \mathrm{dom}(d/dx) = \mathrm{dom}(\phi(x)d/dx)$ et $(\lambda + d/dx + \phi(x)d/dx)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que la somme $d/dx + \phi(x)d/dx$ n'a pas d'extension telle que $(\lambda + d/dx + \phi(x)d/dx)$ soit inversible, condition nécessaire pour que cette extension soit génératrice d'un semi-groupe.

Chernoff a montré [11] que de tels exemples peuvent être construits aussi dans un espace de Hilbert.

2.8.2 Influence des domaines des générateurs

Une famille d'exemples très intéressants a été construite par Hiroshi Tamura [55]. Ces exemples ont principalement deux conséquences :
- on peut avoir la convergence forte de la formule de Trotter sans la convergence en norme d'opérateur ;
- l'estimation en $n^{1-2\alpha}$ donnée dans [44] est la meilleure possible compte tenu des conditions.

Proposition 2.16 (cf [55]) *Pour chaque $\alpha \in]0,1[$ il existe deux opérateurs (explicites) A et B auto-adjoints sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, tels que*

$$\begin{array}{ll} (i) & A \geq I,\ B \geq 0 \\ (ii) & \mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B^\alpha),\ \|B^\alpha u\| \leq a\|A^\alpha u\|, u \in \mathrm{dom}(A^\alpha)\ \textit{et}\ 0 < a < 1 \\ (iii) & \mathrm{dom}((A \dot{+} B)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha), \end{array}$$

et que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\| e^{-t(A \dot{+} B)} - \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n \right\| \geq \frac{C_t}{n^{2\alpha-1}} \quad \textit{pour } \alpha \in]1/2, 1[\tag{2.24}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| e^{-t(A \dot{+} B)} - \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n \right\| \geq D_t \quad \textit{pour } \alpha \in]0, 1/2[, \tag{2.25}$$

où C_t et D_t sont des fonctions positives et continues de $t > 0$.

Ainsi, il apparaît que les conditions dans lesquelles a lieu la convergence en norme d'opérateur sont liées à la "proximité" des domaines de A et de B de manière assez subtile. Pour l'instant, la limite exacte entre la convergence forte et la convergence en norme n'est pas claire. Cependant on verra que le fait que A et B soient auto-adjoint n'est pas essentiel dans ce problème. Si ce n'est pas le cas, il faut considérer également les domaines des opérateurs adjoints.

2.8.3 Solution du problème de Rogava

Dans les articles tout récents [30, 31], la solution complète du problème soulevé par Rogava en 1993 a été obtenue. Il s'agit du cas où A et B sont deux opérateurs auto-adjoints positifs tels que leur somme algébrique définie sur $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$

soit encore un opérateur auto-adjoint (cf proposition 2.8). Le résultat est alors analogue à celui de Lie pour la formule non symétrique (2.26).

Proposition 2.17 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, tels que leur somme algébrique $C = A + B$ soit un opérateur auto-adjoint sur* $\mathrm{dom}(C) = \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$. *Alors on a les convergences suivantes en norme d'opérateur :*

$$\left\| \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tC} \right\| \leq O(1/n) \tag{2.26}$$

$$\left\| \left(e^{-tA/2n} e^{-tB/n} e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-tC} \right\| \leq O(1/n) \tag{2.27}$$

uniformément pour t dans un intervalle compact de $[0, \infty[$, ou sur $[0, \infty[$ si C est strictement positif. De plus, ces vitesses de convergence sont optimales.

Un résultat analogue est formulé avec deux fonctions f et g vérifiant certaines propriétés, et il est remarquable que la formule symétrisée n'améliore pas la vitesse ici, contrairement au cas des générateurs bornés. Un exemple explicite est donné dans [31] où l'on a

$$\left\| e^{-t(A+B)} - \left(e^{-tA/2n} e^{-tB/n} e^{-tA/2n}\right)^n \right\| \geq L(t)/n \tag{2.28}$$

Chapitre 3

Convergence et estimations d'erreur dans un espace de Banach

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, tous les résultats sur la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur concernaient jusqu'à présent des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Ce chapitre propose donc, à notre connaissance, le premier résultat similaire dans un espace de Banach quelconque. Il est essentiellement extrait de l'article [4]. On considère un semi-groupe holomorphe de contractions e^{-tA}, et un opérateur de perturbation B, m-accrétif avec une condition de petitesse relative. Le semi-groupe obtenu en limite est engendré par la somme algébrique $A + B$. En fait, le point de départ pour obtenir une estimation d'erreur est le même que pour la formule de Lie (2.2). Ensuite, une série d'estimations intermédiaires est nécessaire. Certaines peuvent être formulées dans un cadre assez général, ce qui constitue la partie suivante. Puis on examinera la question des perturbations des semi-groupes holomorphes, et on présentera la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

3.1 Résultats préliminaires

3.1.1 Propriétés générales

Les quelques lemmes qui suivent sont présentés de façon à pouvoir être utilisés dans la suite. Les trois premiers lemmes expriment des propriétés générales des semi-groupes bornés sur un espace de Banach, ils montrent comment on peut obtenir des estimations analogues aux développements limités ordinaires, en norme d'opérateur, bien que les semi-groupes ne soient continus que dans la topologie forte. Pour cela, il suffit d'introduire des puissances négatives du générateur.

Lemme 3.1 *Soit $Q(t)$ un semi-groupe borné de générateur inversible $-A$ dans un* *espace de Banach $\mathfrak{X}$, alors pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left(Q(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tA)^k}{k!}\right) A^{-n-1} = -\int_0^t \left(Q(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\tau A)^k}{k!}\right) A^{-n} d\tau, \tag{3.1}$$

$$\left\| \left(Q(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tA)^k}{k!}\right) A^{-n-1} \right\| \leq M_A \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.2}$$

Démonstration

Procédons par récurrence. Montrons d'abord que (cf [51]) :

$$(Q(t) - I)x = -\int_0^t Q(\tau)Axd\tau, \ \forall x \in \mathrm{dom}(A). \tag{3.3}$$

Grâce à la définition du semi-groupe on a pour $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t Q(s)\frac{Q(\epsilon) - I}{\epsilon} ds &= \int_0^t \frac{Q(s+\epsilon) - Q(s)}{\epsilon} ds \\
&= \int_t^{t+\epsilon} \frac{Q(s)}{\epsilon} ds - \int_0^{\epsilon} \frac{Q(s)}{\epsilon} ds \\
&= (Q(t) - I)\frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon} Q(s)ds.
\end{aligned}$$

De plus :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} Q(s)xds = x, \ \forall x \in \mathfrak{X},$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{Q(\epsilon) - I}{\epsilon} x = -Ax, \ \forall x \in \mathrm{dom}(A).$$

Ce qui prouve (3.3), et comme A a un inverse borné, on obtient (3.1) pour $n = 0$. De plus, comme $Q(t)$ est borné par M_A, on obtient l'estimation (3.2) pour $n = 0$.

Supposons que (3.1) et (3.2) sont vraies pour un entier n, alors un calcul simple conduit à (3.1) pour $n+1$. D'où, en utilisant la représentation (3.1) et (3.2) pour n afin de majorer l'intégrand, on obtient (3.2) pour $n+1$. Ce qui termine le raisonnement par récurrence.

□

De la même manière, on peut obtenir une sorte de développement limité pour $(I + A)^{-1}$, à condition de "renormaliser" par des puissances de A^{-1}.

Lemme 3.2 *Soit A un opérateur comme dans le lemme 3.1. Alors pour tout $n \geq 0$:*

$$(I + A)^{-1}A^{-n-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-A)^k\right) A^{-n-1} + (-1)^{n+1}(I + A)^{-1}. \tag{3.4}$$

Démonstration

Pour $n = 0$, la représentation (3.4) provient de la formule de la résolvante :

$$(I + A)^{-1} - A^{-1} = -(I + A)^{-1}A^{-1}. \tag{3.5}$$

Supposons que (3.4) est vraie pour un entier n, alors :

$$(I + A)^{-1}A^{-n-2} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-A)^k\right) A^{-n-2} + (-1)^{n+1}(I + A)^{-1}A^{-1}. \tag{3.6}$$

En appliquant (3.5) au dernier terme de (3.6) on obtient la représentation (3.4) pour $n + 1$, et donc pour tout n par récurrence. □

Lemme 3.3 *Si $Q(t)$ est un semi-groupe borné de générateur inversible $-A$ alors :*

$$\left\| \frac{1}{t^2} \left((I + tA)^{-1} - Q(t)\right) A^{-2} \right\| \ \leq\ 3M_A/2, \quad \forall t > 0. \tag{3.7}$$

Démonstration

D'après le lemme 3.1 on obtient

$$\|(Q(t) - I + tA)\frac{1}{t^2}A^{-2}\| \ \leq\ \frac{M_A}{2}. \tag{3.8}$$

Par ailleurs le lemme 3.2, donne

$$\left\| \left((I + tA)^{-1} - I + tA\right) \frac{1}{t^2}A^{-2} \right\| \ =\ \|(I + tA)^{-1}\| \ \leq\ M_A. \tag{3.9}$$

La dernière majoration provient de $(I + tA)^{-1} = (1/t)R_A(-1/t)$ et $\|R_A(-\lambda)\| \leq M_A/(\lambda + \delta)$, $\delta \geq 0$, pour un semi-groupe borné de générateur inversible (cf proposition 1.3). D'où (3.7) découle de (3.8) et (3.9). □

3.1.2 Estimations du facteur central

Dans les deux lemmes suivants, on considère deux semi-groupes e^{-tA} et e^{-tB}, avec une condition de petitesse de B par rapport à A. On va établir des estimations qui permettront de modifier le raisonnement de Lie afin de traiter le cas de générateurs non bornés. Considérons le facteur central $S_n - T_n$ dans l'identité (2.2). Dans le cas présent, on n'a pas directement $\|(e^{-tB/n}e^{-tA/n}) - e^{-t(A+B)/n}\| \leq O(1/n^2)$ comme dans le cas de Lie, mais on va introduire des facteurs AA^{-1} dans l'identité de départ (2.2). On pose $F(\tau) = e^{-\tau B}e^{-\tau A}$ et $U(\tau) = e^{-\tau(A+B)}$, d'où

$$F(\tau)^n - U(\tau)^n = \sum_{m=0}^{n-1} F(\tau)^{n-m-1}AA^{-1}(T(\tau) - U(\tau))A^{-1}AU(\tau)^m, \tag{3.10}$$

de sorte qu'on pourra retrouver des estimations analogues grâce aux inverses de A. Le produit $F(\tau) = e^{-\tau B}e^{-\tau A}$ est analogue à opérateur de Kac ou de transfert [23], qui est associé à l'opérateur de Schrödinger : $e^{-\tau V/2}e^{\tau\Delta}e^{-\tau V/2}$, où V est un potentiel et Δ est le laplacien. Des résultats remarquables ont été obtenus pour ce type d'opérateurs [23, 14, 15, 16, 26, 27, 13]. En effet avec certaines conditions sur le potentiel V, on a les estimations suivantes en norme d'opérateur [14] :

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\tau V/2}e^{\tau\Delta}e^{-\tau V/2} - e^{-\tau(-\Delta+V)} \right\| &\leq O(\tau^2) & (3.11)\\ \left\| e^{-\tau V}e^{\tau\Delta} - e^{-\tau(-\Delta+V)} \right\| &\leq O(\tau), & (3.12) \end{aligned}$$

alors qu'en dimension finie, on a respectivement $O(\tau^3)$ et $O(\tau^2)$. Pour étudier la cas abstrait, on demande que $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ et $\mathrm{dom}(A^*) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$, ce qui implique par le théorème du graphe fermé (les opérateurs A et B sont fermés) qu'il existe des constantes positives a, a_* et b, b_* telles que :

$$\forall x \in \mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B),\ \|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \tag{3.13}$$
$$\forall \phi \in \mathrm{dom}(A^*) \subseteq \mathrm{dom}(B^*),\ \|B^*\phi\| \leq a_*\|A^*\phi\| + b_*\|\phi\|. \tag{3.14}$$

(voir par exemple [32, Ch. III.4]). Si A^{-1} est borné, alors on peut poser $b = 0$ quitte à remplacer a par $a + b\|A^{-1}\|$. Ces deux lemmes sont des généralisations à des semi-groupes quelconques des lemmes 2.5 et 2.6 de [43], qui concernent des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert et utilisent la représentation spectrale.

Lemme 3.4 *Soient $-A$, avec un inverse borné, et $-B$ des générateurs de semi-groupes bornés. Supposons que B vérifie les conditions (3.13), (3.14) et que l'opérateur $-H = -(A+B)$ avec $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$ est le générateur inversible d'un semi-groupe. Alors il existe une constante L_1 telle que pour tout $\tau \geq 0$:*

$$\begin{aligned} \left\| A^{-1}\left(F(\tau) - e^{-\tau(A+B)}\right) \right\| &\leq L_1\tau, & (3.15)\\ \left\| \left(F(\tau) - e^{-\tau(A+B)}\right)A^{-1} \right\| &\leq L_1\tau, & (3.16) \end{aligned}$$

où $F(\tau)$ peut être $e^{-\tau A}e^{-\tau B}$, ou $e^{-\tau B}e^{-\tau A}$, ou $e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2}$.

Démonstration

Grâce aux identités

$$\begin{aligned} A^{-1}\left(e^{-\tau A}e^{-\tau B} - e^{-\tau(A+B)}\right) &= A^{-1}e^{-\tau A}\left(e^{-\tau B} - I\right)\\ &\quad + A^{-1}\left(e^{-\tau A} - I\right) + A^{-1}HH^{-1}\left(I - e^{-\tau H}\right),\\ A^{-1}\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A} - e^{-\tau(A+B)}\right) &= A^{-1}\left(e^{-\tau B} - I\right)e^{-\tau A}\\ &\quad + A^{-1}\left(e^{-\tau A} - I\right) + A^{-1}HH^{-1}\left(I - e^{-\tau H}\right),\\ A^{-1}\left(e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2} - e^{-\tau(A+B)}\right) &= A^{-1}e^{-\tau A/2}\left(e^{-\tau B} - I\right)e^{-\tau A/2}\\ &\quad + A^{-1}\left(e^{-\tau A} - I\right) + A^{-1}HH^{-1}\left(I - e^{-\tau H}\right), \end{aligned}$$

et au lemme 3.1 on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}\left(F(\tau)-e^{-\tau H}\right)\right\| &\le \left\|\int_0^\tau ds A^{-1}Be^{-sB}\right\| \\ &\quad + \left\|A^{-1}\left(e^{-\tau A}-I\right)\right\| + \|A^{-1}H\| \left\|H^{-1}\left(I-e^{-\tau H}\right)\right\| \\ &\le \|A^{-1}B\|M_B\tau + M_A\tau + \|A^{-1}H\|M_H\tau.\end{aligned}$$

La condition (3.14) implique que $\|B^*A^{*-1}\| \le a_* + b_*\|A^{-1}\|$ et donc $\|(A^{-1}B)^*\| \le a_* + b_*\|A^{-1}\|$. On en déduit que l'opérateur $A^{-1}B$ est aussi borné par $a_* + b_*\|A^{-1}\|$. D'où on a encore $\|A^{-1}H\| \le \|I + A^{-1}B\| \le 1 + a_* + b_*\|A^{-1}\|$. Pour obtenir (3.16) on utilise (3.13), et de la même manière on trouve $\|BA^{-1}\| \le a + b\|A^{-1}\|$ et $\|HA^{-1}\| \le 1 + a + b\|A^{-1}\|$. On pose donc $L_1 = M_B a' + M_A + M_H(1 + a')$ où $a' = \max(a, a_*) + \max(b, b_*)\|A^{-1}\|$. □

Lemme 3.5 *Soient A, B et $H = A + B$ vérifiant les mêmes conditions que dans le lemme 3.4. Alors il existe une constante L_2 telle que pour tout $\tau \ge 0$:*

$$\left\|A^{-1}\left(F(\tau) - e^{-\tau(A+B)}\right)A^{-1}\right\| \le L_2\tau^2, \tag{3.17}$$

où $F(\tau)$ peut être $e^{-\tau A}e^{-\tau B}$, ou $e^{-\tau B}e^{-\tau A}$, ou $e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2}$.

Démonstration

D'après les identités

$$\begin{aligned} A^{-1}(e^{-\tau A}e^{-\tau B} - e^{-\tau H})A^{-1} &= A^{-1}(I - e^{-\tau A})(I - e^{-\tau B})A^{-1} + & (3.18)\\ &\quad A^{-1}(e^{-\tau A} + e^{-\tau B} - e^{-\tau H} - I)A^{-1}, & (3.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(e^{-\tau B}e^{-\tau A} - e^{-\tau H})A^{-1} &= A^{-1}(I - e^{-\tau B})(I - e^{-\tau A})A^{-1} + & (3.20)\\ &\quad A^{-1}(e^{-\tau A} + e^{-\tau B} - e^{-\tau H} - I)A^{-1}, & (3.21)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &A^{-1}(e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2} - e^{-\tau H})A^{-1} \\ &\quad = A^{-1/2}(I - e^{-\tau A/2})(I - e^{-\tau B})e^{-\tau A/2}H^{-1} + & (3.22)\\ &\quad\quad A^{-1}(I - e^{-\tau B})(I - e^{-\tau A/2})A^{-1} + & (3.23)\\ &\quad\quad A^{-1}(e^{-\tau A} + e^{-\tau B} - e^{-\tau H} - I)A^{-1}, & (3.24)\end{aligned}$$

on majore séparément chaque terme. D'après le lemme 3.1 on a

$$\begin{aligned}&\left\|A^{-1}(I - e^{-\tau A})(I - e^{-\tau B})A^{-1}\right\| \\ &\quad \le \left\|A^{-1}(I - e^{-\tau A})\right\| \left\|\int_0^\tau ds e^{-sB}\right\| \|BA^{-1}\| \\ &\quad \le M_A M_B(a + b\|A^{-1}\|)\tau^2\end{aligned}$$

et de même pour (3.20), (3.22) et (3.23). Pour les termes (3.19), (3.21) et (3.24), on a

$$\begin{aligned} & e^{-\tau B}+e^{-\tau A}-e^{-\tau H}-I= && (3.25)\\ & (e^{-\tau B}-I+\tau B)+(e^{-\tau A}-I+\tau A)-(e^{-\tau H}-I+\tau H), \\ \text{et}\quad & e^{-\tau C}-I+\tau C=\int_0^\tau ds(I-e^{-sC})C=\int_0^\tau ds\int_0^s d\sigma C e^{-\sigma C}C. && (3.26)\end{aligned}$$

D'où on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} & \left\|A^{-1}\left(e^{-\tau B}+e^{-\tau A}-e^{-\tau H}-I\right)A^{-1}\right\| \\ & \quad \leq \int_0^\tau ds\int_0^s d\sigma\left\|A^{-1}Be^{-\sigma B}BA^{-1}\right\| \\ & \qquad +\int_0^\tau ds\left\|A^{-1}(I-e^{-sA})\right\| \\ & \qquad +\int_0^\tau ds\left\|A^{-1}HH^{-1}(I-e^{-sH})HA^{-1}\right\| \\ & \quad \leq \|A^{-1}B\|\|BA^{-1}\|M_B\tau^2/2+M_A\tau^2/2+\|A^{-1}H\|\|HA^{-1}\|M_H\tau^2/2,\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.1. Finalement en utilisant les conditions (3.13) et (3.14) on trouve (3.17) avec $L_2=3a'M_AM_B/2+M_Ba'^2/2+M_A/2+M_H(1+a')^2/2$ avec $a'=\max(a,a_*)+\max(b,b_*)\|A^{-1}\|$.

□

3.2 Perturbation des semi-groupes holomorphes

Soit $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe holomorphe contractant sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$, on va montrer que pour une certaine classe de perturbations B, $-(A+B)$ est encore générateur d'un semi-groupe holomorphe. Ce point est nécessaire pour avoir une estimation du facteur $\|Ae^{-s(A+B)}\|$ dans l'identité (3.10), grâce à la proposition 1.13. Plus précisément, les perturbations à considérer doivent d'abord être des générateurs de semi-groupes contractant (condition pour la formule de Trotter), et ensuite être suffisamment petites par rapport à A :

(H1) $-B$ est le générateur d'un semi-groupe contractant,

(H2) il existe un réel $\alpha\in[0,1[$ tel que $\mathrm{dom}(A^\alpha)\subseteq\mathrm{dom}(B)$ et $\mathrm{dom}(A^*)\subseteq\mathrm{dom}(B^*)$.

Remarquons que l'on peut supposer que A a un inverse borné ; si ce n'est pas le cas, on considère $A+\eta$ pour un $\eta>0$, et on a $\mathrm{dom}((A+\eta)^\alpha)=\mathrm{dom}(A^\alpha)\subseteq\mathrm{dom}(B)$ par la proposition 1.17.

Remarque 3.6 *La condition* $\mathrm{dom}(A^\alpha)\subseteq\mathrm{dom}(B)$ *(introduite par Ichinose et Tamura [28]) implique que* B *est relativement borné par rapport à* A *avec une borne* *relative égale à zéro. En effet, pour* $\eta > 0$*, on a* $\operatorname{dom}(A+\eta) \subseteq \operatorname{dom}(A^\alpha) \subseteq \operatorname{dom}(B)$ *et par la proposition 1.16 on obtient (*A^{-1} *est supposé borné) :*

$$\|B(A+\eta)^{-1}\| \leq \|BA^{-\alpha}\|\|A^\alpha(A+\eta)^{-1}\| \leq \frac{C_\alpha}{\eta^{1-\alpha}}\|BA^{-\alpha}\|. \tag{3.27}$$

Comme les opérateurs A^α *et* B *sont fermés, les inclusions (H2) entraînent que* $\|BA^{-\alpha}\| \leq d < \infty$ *et* $\|B^*A^{*-1}\| \leq d' < \infty$*. D'où si* $x \in \operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B)$*, on a l'inégalité*

$$\|Bx\| \leq \frac{C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|}{\eta^{1-\alpha}}\|Ax\| + \eta^\alpha C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|\|x\| \tag{3.28}$$

et la borne relative dans (3.28) peut être choisie arbitrairement petite grâce au décalage $\eta > 0$*.*

Pour de telles perturbations on peut montrer le résultat suivant (cf [32, Ch. IX, corollaire 2.5]) :

Lemme 3.7 *Soit* e^{-tA} *un semi-groupe holomorphe contractant pour* $t \geq 0$*, de demi-angle* ω *sur un espace de Banach* $\mathfrak{X}$*, et soit* B *un opérateur accrétif satisfaisant la condition (H2). Alors la somme algébrique* $-(A+B)$ *avec* $\operatorname{dom}(A+B) = \operatorname{dom}(A)$ *est le générateur d'un semi-groupe holomorphe et contractant pour* $t \geq 0$*.*

Démonstration

On montre que $A+B$ est bien un opérateur de type (θ, M) pour un angle $\theta \in]0, \pi/2[$ (cf définition 1.11). Soit $\epsilon > 0$, d'après (3.28) on a pour $|\arg(z)| < \omega+\pi/2-\epsilon$ (ainsi $z \in \rho(-A)$, car A est de type $(\pi/2-\omega, M)$)

$$\|B(A+z)^{-1}\| \leq \frac{C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|}{\eta^{1-\alpha}}\|A(A+z)^{-1}\| + \eta^\alpha C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|\|(A+z)^{-1}\|, \tag{3.29}$$

ce qui conduit à

$$\|B(A+z)^{-1}\| \leq \frac{C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|}{\eta^{1-\alpha}}(1+N_\epsilon) + \eta^\alpha C_\alpha\|BA^{-\alpha}\|\frac{N_\epsilon}{|z|}, \tag{3.30}$$

où $N_\epsilon = M_{\omega+\pi/2-\epsilon}$, cf (1.15). Donc la série de Neumann pour $(A+B+z)^{-1}$ converge si le membre de droite de (3.30) est, en norme, inférieur à 1. D'où on peut choisir η tel que le premier terme dans l'inégalité (3.30) soit inférieur à 1, et le second terme peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant $|z| > \gamma$ assez grand. Alors on obtient :

$$\|(A+B+z)^{-1}\| \leq \frac{M}{|z-\gamma|} \tag{3.31}$$

pour $|\arg(z-\gamma)| < \omega + \pi/2 - \epsilon = \theta$, où M et γ sont des constantes positives. Par la proposition 1.12 on en conclut que $-(A+B)$ est générateur d'un semi-groupe holomorphe quasi-borné de demi-angle $\omega - \epsilon$.

D'autre part, A et B (par (H1)) sont accrétifs, d'où $A+B$ est accrétif. Or si $z \in]-\infty, 0[$ a un module suffisamment grand ($|z| > \gamma$), z est dans l'ensemble résolvant de $A+B$, d'où on conclut que $-(A+B)$ est générateur d'un semi-groupe contractant, par la proposition 1.8. Ceci montre donc que l'on peut prendre $M=1$ et $\gamma=0$ dans l'équation (3.31) lorsque $z>0$.

□

3.3 Estimations d'erreur

Avant d'établir le résultat principal de ce chapitre, il reste un facteur à estimer dans l'identité (3.10), c'est-à-dire $\|(e^{-tB/n}e^{-tA/n})^{n-m-1}A\|$. C'est le rôle du lemme suivant, où intervient la condition (H2) de Ichinose et Tamura [28], ainsi que l'hypothèse que les semi-groupes e^{-tA} et e^{-tB} sont contractants.

Lemme 3.8 *Soit $-A$ le générateur inversible d'un semi-groupe holomorphe de contractions. Si $-B$ est le générateur d'un semi-groupe contractant et qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1[$ tel que* $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$, *alors pour tous $k \geq 1$ et $\tau > 0$:*

$$\left\|\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^k A\right\| \leq \frac{L_3}{\tau^\alpha} + \frac{M_1(A)}{k\tau}\ ,\ \alpha > 0, \tag{3.32}$$

$$\left\|\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^k A\right\| \leq \tilde{L}_3(1+\ln k) + \frac{M_1(A)}{k\tau}\ ,\ \alpha = 0. \tag{3.33}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left\|\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^k A\right\| &\leq \left\|\left(\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^k - e^{-k\tau A}\right)A\right\| + \left\|e^{-k\tau A}A\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^{k-1-j}\left(e^{-\tau B}-I\right)e^{-\tau A}e^{-j\tau A}A\right\| + \left\|e^{-k\tau A}A\right\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1}\left\|\int_0^\tau ds e^{-sB}BA^{-\alpha}\right\|\left\|A^\alpha e^{-(j+1)\tau A}A\right\| + \left\|e^{-k\tau A}A\right\|.
\end{aligned}$$

La seconde inégalité est due au fait que $\|e^{-tA}\| \leq 1$ et $\|e^{-tB}\| \leq 1$, et à l'équation (3.3) du lemme 3.1. De l'hypothèse $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ on déduit que $\|BA^{-\alpha}\| \leq d$. En utilisant les propositions 1.13 et 1.18 pour le semi-groupe holomorphe e^{-tA}, on obtient :

$$\left\|e^{-k\tau A}A\right\| \leq \frac{M_1(A)}{k\tau} \text{ et } \left\|A^{1+\alpha}e^{-(j+1)\tau A}\right\| \leq \frac{M_{1+\alpha}(A)}{((j+1)\tau)^{1+\alpha}}.$$

D'où on conclut que :

$$\left\|\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A}\right)^k A\right\| \leq \frac{M_{1+\alpha}(A)d}{\tau^\alpha}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^{1+\alpha}} + \frac{M_1(A)}{k\tau}.$$

Puisque $\alpha > 0$, cela conduit au résultat annoncé (3.32) avec

$$L_3 = dM_{1+\alpha}(A) \sum_{j=1}^{\infty} (1/j)^{1+\alpha},$$

et (3.33) pour $\alpha = 0$ avec $\tilde{L}_3 = \|B\| M_1(A)$.

□

Comme $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ implique que $\mathrm{dom}(A^{\alpha'}) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ pour $\alpha' \geq \alpha$, l'estimation (3.32) est valide en fait pour tout $\alpha' \geq \alpha$.

Théorème 3.9 *Soit $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe holomorphe de contractions sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Si $-B$ est le générateur d'un semi-groupe contractant, et qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ et $\mathrm{dom}(A^*) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$, alors il existe des constantes $M_1, M_2, \tilde{M}_2, \eta > 0$, telles que pour tout $t \geq 0$ et tout $n > 2$:*

$$\left\| \left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_1 + M_2 t^{1-\alpha}) e^{\eta t} \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \tag{3.34}$$

$$\left\| \left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_1 + \tilde{M}_2 t) e^{\eta t} \frac{2(\ln n)^2}{n}, \quad \alpha = 0. \tag{3.35}$$

Démonstration

Comme B satisfait les conditions (H1) et (H2), d'après le lemme 3.7 l'opérateur $-H = -(A+B)$ est générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant. Si l'opérateur A n'est pas inversible, posons $\tilde{A} = A + \eta$ et $\tilde{H} = \tilde{A} + B$ pour un réel $\eta > 0$ arbitraire. Alors $\tilde{A}$ et $\tilde{H}$ ont des inverses bornés. Par ailleurs, ces décalages ne changent pas les inclusions entre les domaines d'après la proposition 1.17. Si on veut obtenir $\|B\tilde{A}^{-1}\| < 1$ alors suivant l'inégalité (3.27) il suffit de choisir un décalage η suffisamment grand. Ceci conduit à l'estimation $\|\tilde{A}\tilde{H}^{-1}\| = \|(I + B\tilde{A}^{-1})^{-1}\| \leq 1/(1-a)$ où on a posé $a = \|B\tilde{A}^{-1}\|$.

À présent notons $\tau = t/n$, $\tilde{U}(t) = e^{-t\tilde{H}}$, et $\tilde{F}(\tau) = e^{-\tau B} e^{-\tau \tilde{A}}$. Afin de majorer le membre de gauche de (3.34) on utilise

$$\left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} = (\tilde{F}^n(\tau) - \tilde{U}^n(\tau)) e^{t\eta}$$

et l'identité :

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tau)^n - \tilde{U}(\tau)^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{F}(\tau)^{n-m-1} (\tilde{F}(\tau) - \tilde{U}(\tau)) \tilde{U}(\tau)^m \\
&= \tilde{F}(\tau)^{n-1} \tilde{A}\tilde{A}^{-1} (\tilde{F}(\tau) - \tilde{U}(\tau)) \\
&\quad + (\tilde{F}(\tau) - \tilde{U}(\tau)) \tilde{A}^{-1} \tilde{A}\tilde{H}^{-1} \tilde{H}\tilde{U}(\tau)^{n-1} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n-2} \tilde{F}(\tau)^{n-m-1} \tilde{A}\tilde{A}^{-1} (\tilde{F}(\tau) - \tilde{U}(\tau)) \tilde{A}^{-1} \tilde{A}\tilde{H}^{-1} \tilde{H}\tilde{U}(\tau)^m,
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{F}(\tau)^n-\tilde{U}(\tau)^n\right\| &\leq \|\tilde{F}(\tau)^{n-1}\tilde{A}\|\|\tilde{A}^{-1}(\tilde{F}(\tau)-\tilde{U}(\tau))\| \\ &+\|(\tilde{F}(\tau)-\tilde{U}(\tau))\tilde{A}^{-1}\|\|\tilde{A}\tilde{H}^{-1}\|\|\tilde{H}\tilde{U}(\tau)^{n-1}\| \\ &+\sum_{m=1}^{n-2}\|\tilde{F}(\tau)^{n-m-1}\tilde{A}\|\|\tilde{A}^{-1}(\tilde{F}(\tau)-\tilde{U}(\tau))\tilde{A}^{-1}\|\|\tilde{A}\tilde{H}^{-1}\|\|\tilde{H}\tilde{U}(\tau)^m\|.\end{aligned}$$

Donc d'après les lemmes 3.4, 3.5 (où l'on utilise la deuxième partie de (H2)), et 3.8, et la proposition 1.13 on obtient les estimations :

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}(\tau)^n-\tilde{U}(\tau)^n\| &\leq \left(\frac{L_3}{\tau^\alpha}+\frac{M_1(A)}{(n-1)\tau}\right)L_1\tau+\frac{L_1}{1-a}\frac{M_1(H)}{n-1} \\ &\quad+\sum_{m=1}^{n-2}\left(L_3\tau^{1-\alpha}+\frac{M_1(A)}{n-m-1}\right)\frac{L_2}{1-a}\frac{M_1(H)}{m} \\ &\leq L_3L_1\frac{t^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}+\frac{L_1}{n-1}\left(M_1(A)+\frac{M_1(H)}{1-a}\right)+\frac{L_3L_2M_1(H)}{1-a}\frac{t^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m} \\ &\quad+\frac{L_2M_1(H)M_1(A)}{1-a}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{n-m-1}\cdot\frac{1}{m} \\ &\leq L_3L_1\frac{t^{1-\alpha}}{n^{1-\alpha}}+\frac{L_1}{n-1}\left(M_1(A)+\frac{M_1(H)}{1-a}\right) \\ &\quad+2\frac{L_3L_2M_1(H)}{1-a}t^{1-\alpha}\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}+4\frac{L_2M_1(H)M_1(A)}{1-a}\frac{\ln n}{n}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pour la dernière majoration on a utilisé :

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(n-m)m}=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}\leq\frac{2}{n}(1+\ln(n-1))\leq 4\frac{\ln n}{n}.$$

L'estimation (3.36) implique le résultat annoncé (3.34) pour $\alpha>0$, avec $M_1 = 4L_1\left(M_1(A)+\frac{M_1(H)}{1-a}\right)+4\frac{L_2M_1(H)M_1(A)}{1-a}$ et $M_2=2L_3L_1+2\frac{L_3L_2M_1(H)}{1-a}$. De la même manière pour $\alpha=0$ on trouve :

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}(\tau)^n-\tilde{U}(\tau)^n\| &\leq \tilde{L}_3(1+\ln(n-1))L_1\frac{t}{n}+\frac{L_1M_1(A)}{n-1}+\frac{L_1c_H}{1-a}\frac{1}{n-1} \\ &\quad+\sum_{m=1}^{n-2}\left(\tilde{L}_3\frac{t}{n}(1+\ln(n-m-1))+\frac{M_1(A)}{n-m-1}\right)\frac{L_2}{1-a}\frac{M_1(H)}{m}.\end{aligned}$$

Cette estimation donne (3.35) avec $\tilde{M}_2=2\tilde{L}_3L_1+2\frac{\tilde{L}_3L_2M_1(H)}{1-a}$.

□

Corollaire 3.10 *Soit e^{-tA} un semi-groupe holomorphe et contractant. Si $-B$ est le générateur semi-groupe contractant, et qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que $\mathrm{dom}((A^\alpha)^*) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$ et $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ (et $\mathrm{dom}(A^*) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$ dans le cas où $\mathfrak{X}$ n'est pas réflexif), alors il existe des constantes M_3, M_4, $\tilde{M}_4$, $\eta > 0$, telles que pour tous $t \geq 0$ et $n > 2$:*

$$\left\| \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_3 + M_4 t^{1-\alpha})e^{\eta t}\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\ ,\ \alpha > 0, \tag{3.37}$$

$$\left\| \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_3 + \tilde{M}_4 t)e^{\eta t}\frac{2(\ln n)^2}{n}\ ,\ \alpha = 0. \tag{3.38}$$

Démonstration

Soit $\tilde{T}(\tau) = e^{-\tau\tilde{A}}e^{-\tau B}$. Alors par les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 3.9, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(\tau)^n - \tilde{T}(\tau)^n &= \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{U}(\tau)^{n-m-1}(\tilde{U}(\tau) - \tilde{T}(\tau))\tilde{T}(\tau)^m \\
&= \tilde{U}(\tau)^{n-1}\tilde{H}\tilde{H}^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^{-1}(\tilde{U}(\tau) - \tilde{T}(\tau)) \\
&\quad +(\tilde{U}(\tau) - \tilde{T}(\tau))\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\tilde{T}(\tau)^{n-1} \\
&\quad +\sum_{m=1}^{n-2} \tilde{U}(\tau)^{n-m-1}\tilde{H}\tilde{H}^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^{-1}(\tilde{U}(\tau) - \tilde{T}(\tau))\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\tilde{T}(\tau)^m.
\end{aligned}$$

On rappelle que les lemmes 3.4 et 3.5 sont encore valables pour $\tilde{T}(\tau)$. Par un modification simple, le lemme 3.8 peut être adapté au cas de $\tilde{T}(\tau)$. On utilise le fait que $\|\tilde{A}^{-\alpha}B\| = \|B^*(\tilde{A}^{-\alpha})^*\| < \infty$ d'où :

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{A}\left(e^{-\tau\tilde{A}}e^{-\tau B}\right)^k \right\| &\leq \frac{L_4}{\tau^\alpha} + \frac{M_1(A)}{k\tau}\ ,\ \alpha > 0, \\
\left\| \tilde{A}\left(e^{-\tau\tilde{A}}e^{-\tau B}\right)^k \right\| &\leq \tilde{L}_4(1 + \ln k) + \frac{M_1(A)}{k\tau}\ ,\ \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Ces inégalités conduisent à (3.37) et (3.38). □

Corollaire 3.11 *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 3.9, on a la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter symétrisée, i.e. il existe M_5, M_6, $\tilde{M}_6$, $\eta > 0$, telles que pour tous $t \geq 0$ et $n > 2$:*

$$\left\| \left(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_5 + M_6 t^{1-\alpha})e^{\eta t}\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\ ,\ \alpha > 0 \tag{3.39}$$

$$\left\| \left(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq (M_5 + \tilde{M}_6 t)e^{\eta t}\frac{2(\ln n)^2}{n}\ ,\ \alpha = 0 \tag{3.40}$$

Démonstration

Les lemmes 3.4, 3.5, et 3.8 s'étendent facilement au cas de la formule symétrisée $e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2}$, d'où la démonstration est semblable à celle du théorème 3.9 et on obtient (3.39) et (3.40). □

3.4 Exemple : opérateur de Schrödinger

Il s'agit de montrer avec un exemple simple comment on peut vérifier la condition $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$, et qu'une telle condition n'est pas trop exigeante pour des applications aux opérateurs différentiels. Considérons $A = -\Delta$, le laplacien défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (l'exemple est aussi valable en dimension 1). On a l'inégalité suivante pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (voir par exemple [49, Ch. X.2])

$$\frac{1}{4}\left(f, \frac{1}{|x|^2}f\right) \leq (f, (-\Delta)f) \tag{3.41}$$

d'où on déduit la même inégalité pour toute fonction $f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ (en effet Δ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, sa fermeture Δ_F est le laplacien libre [49, théorème IX.27]). Comme $-\Delta_F$ est auto-adjoint positif, on sait définir les puissances fractionnaires $(-\Delta_F)^\alpha$, et on a d'après la proposition 1.24

$$\|\frac{1}{2|x|}f\| \leq \|(-\Delta_F)^{1/2}f\|. \tag{3.42}$$

Grâce à l'inégalité de Heinz-Kato (proposition 1.27), on trouve

$$\|\frac{1}{|x|^\alpha}f\| \leq 2^\alpha\|(-\Delta_F)^{\alpha/2}f\|. \tag{3.43}$$

pour tout $\alpha \in]0, 1]$. Ainsi en choisissant pour B le potentiel $V(x) = \lambda/|x|^\delta$, où $0 < \delta < 1$ et λ est une constante de couplage telle que $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, V est un opérateur accrétif. Si $\alpha > \delta/2$, alors $\mathrm{dom}((-\Delta_F)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}((-\Delta_F)^{\delta/2}) \subseteq \mathrm{dom}(V)$, donc le théorème 3.9 s'applique pour $-\Delta_F$ et V pour tout $\delta \in]0, 1[$ et quelle que soit la constante λ telle que $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$.

Remarque 3.12 *Si $A = -\Delta$ est le laplacien défini dans un espace de Hilbert $L^2(\Omega \subseteq \mathbb{R}^d)$, et que V est un potentiel accrétif relativement borné par rapport à $-\Delta$, alors $B = V^\beta$ avec $0 < \beta < 1$ vérifie les conditions (H1) et (H2) et le théorème 3.9 s'applique. En effet, il suffit d'utiliser l'inégalité de Heinz-Kato, proposition 1.28. Ainsi, en utilisant les résultats classiques (voir par exemple [49, Ch. X.2]), on peut prendre $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ou $V \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$.*

3.5 Conclusion

On a obtenu une condition suffisante pour la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter dans un espace de Banach quelconque. À notre connaissance, c'est le seul cas connu pour l'instant, bien que de nombreux travaux aient été faits dans les espaces de Hilbert. Si on compare ces différentes conditions, celle du théorème 3.9 est nettement plus exigeante que celles qui ont été trouvées dans un espace de Hilbert. Néanmoins les perturbations accrétives avec borne relative zéro sont déjà intéressantes pour les applications aux équations aux dérivées partielles (cf exemple de la section précédente).

On peut remarquer que les conditions suffisantes du théorème 3.9 et des corollaires 3.10 et 3.11 montrent le lien entre l'ordre choisi dans la formule de Trotter et les rôles respectifs de B et B^*. Cependant, même avec une formule symétrisée les conditions restent non symétriques entre B et B^*.

Chapitre 4

Estimations d'erreur dans un espace de Hilbert, cas non auto-adjoint

4.1 Perturbation accrétive

Si on se place dans un espace de Hilbert, on peut obtenir des résultats beaucoup plus fins sur la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur. On considère dans ce chapitre un opérateur auto-adjoint positif (strictement) A dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. En particulier e^{-tA} est un semi-groupe holomorphe dans le demi-plan ouvert défini par $\mathrm{Re}\, t > 0$. Sans perdre en généralité, on supposera que $A \geq I$. L'opérateur de perturbation B est supposé m-accrétif, c'est-à-dire que e^{-tB} est un semi-groupe contractant, et relativement borné par rapport à A : $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$, d'où il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\text{(C0)} \qquad \|Bu\| \leq a\|Au\| \text{ pour tout } u \in \mathrm{dom}(A) \tag{4.1.1}$$

(cf paragraphe 3.1.2). Ainsi l'opérateur $A+B$ est défini sur $\mathrm{dom}(A+B) = \mathrm{dom}(A)$. De plus, on a le résultat suivant [6] :

Théorème 4.1 *Soient deux opérateurs comme ci-dessus $A = A^* \geq I$ et B m-accrétif et supposons que la condition (4.1.1) soit vérifiée avec $a < 1$. Alors l'opérateur $-H = -(A+B)$ est le générateur (inversible) d'un semi-groupe holomorphe avec un demi-angle $\omega = \arccos a$, et contractant dans le sens que $\|e^{-tH}\| \leq 1$ pour $t \geq 0$.*

Démonstration

Comme B est accrétif et que A est auto-adjoint et positif, l'opérateur $H = A+B$ est accrétif. De plus H a un inverse borné car $H = (I + BA^{-1})A$ avec $\|BA^{-1}\| \leq a < 1$. Donc H est m-accrétif, i.e., $-H$ engendre un semi-groupe contractant, ou encore H est de type $(\pi/2, 1)$.

Il s'agit de montrer que $H = A + B$ est un opérateur de type $(\theta_H, M_H = 1)$, cf (1.11), où $\pi/2 - \theta_H = \omega = \arccos a > 0$. C'est-à-dire : quel que soit $\theta \in]0, \pi/2 + \omega[$, on a $\|(H + z)^{-1}\| \leq M_\theta/|z|$ pour $z \in S_\theta$. En fait $\theta \in [\pi/2, \pi/2 + \omega[$ suffit. Considérons donc $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ avec un ε arbitraire dans l'intervalle $]0, \omega[$. On utilise la représentation

$$(H + z)f = \{I + BA^{-1}A(A + z)^{-1}\}(A + z)f, \qquad f \in \mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A). \quad (4.1.2)$$

Comme

$$\|A(A + z)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda \geq 1} \left|\frac{\lambda}{\lambda + z}\right| \leq \sup_{\lambda \geq 0} \left|\frac{\lambda}{\lambda + z}\right| \quad (4.1.3)$$

un calcul direct montre que

$$\|A(A + z)^{-1}\| \leq \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{Re}\, z \geq 0 \\ |z|/|\mathrm{Im}\, z| \text{ si } \mathrm{Re}\, z < 0,\ \mathrm{Im}\, z \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Soit $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$ et $\mathrm{Re}\, z < 0$, alors

$$\frac{|z|}{|\mathrm{Im}\, z|} \leq \frac{1}{\cos \varepsilon}. \quad (4.1.5)$$

D'où (4.1.4) conduit à la majoration

$$\|A(A + z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\cos \varepsilon} \quad (4.1.6)$$

pour $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$ et $\mathrm{Re}\, z < 0$. Si $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, alors (4.1.4) donne l'estimation

$$\|A(A + z)^{-1}\| \leq 1 \leq \frac{1}{\cos \varepsilon}. \quad (4.1.7)$$

Donc (4.1.6) est vraie pour tout $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$.

En utilisant la condition (i) on trouve l'estimation

$$\|BA^{-1}A(A + z)^{-1}\| \leq \|BA^{-1}\|\|A(A + z)^{-1}\| \leq \frac{a}{\cos \varepsilon} < 1 \quad (4.1.8)$$

pour $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$ (en effet $0 < \varepsilon < \omega$ entraîne que $a < \cos \varepsilon$). Donc, l'opérateur $I + B(A + z)^{-1}$ est inversible pour tout $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$ et on a l'estimation

$$\|(I + B(A + z)^{-1})^{-1}\| \leq \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - a}. \quad (4.1.9)$$

D'après (4.1.2) et(4.1.9) on obtient que $z \in S_{\pi/2+\varepsilon} \subseteq \rho(-H)$ (l'ensemble résolvant de l'opérateur $-H$), et la représentation

$$(H + z)^{-1} = (A + z)^{-1}(I + B(A + z)^{-1})^{-1}, \quad (4.1.10)$$

d'où la majoration de la norme de la résolvante de H :

$$\|(H+z)^{-1}\| \leq \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - a}\|(A+z)^{-1}\|. \tag{4.1.11}$$

Puisque A est auto-adjoint, on a

$$\|(z+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\cos\varepsilon}\frac{1}{|z|} \tag{4.1.12}$$

pour tout $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$. Donc par (4.1.11), (4.1.12) on trouve

$$\|(H+z)^{-1}\| \leq \frac{M_\theta}{|z|} \tag{4.1.13}$$

pour tout $z \in S_{\pi/2+\varepsilon}$ avec

$$M_{\theta=\pi/2+\varepsilon} := \frac{1}{\cos\varepsilon - a}. \tag{4.1.14}$$

Ceci montre que H est un opérateur de type $(\theta_H = \arcsin a, M_H = 1)$, donc $-H$ est le générateur d'un semi-groupe holomorphe de demi-angle $\omega = \arccos a$.

$\square$

Remarque 4.2 *Comme H est un opérateur de type $(\theta_H, 1)$, $-H^*$ est aussi de type $(\theta_H, 1)$, donc générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant.*

Remarque 4.3 *Si A n'est pas auto-adjoint mais seulement générateur d'un semi-groupe holomorphe contractant, alors on peut montrer que $A+B$ engendre encore un semi-groupe holomorphe contractant, mais il faut que B vérifie la condition (4.1.1) avec $a < 1/(1+M_\theta^A)$ pour un $\theta \in [0, \pi - \theta_A[$. En effet, puisque A est de type $(\theta_A, 1)$, on a $\|A(A+z)^{-1}\| \leq 1 + M_\theta^A$ pour tout $z \in S_\theta$, $0 < \theta < \pi - \theta_A$.*

Dans les conditions énoncées au début de ce chapitre, c'est-à-dire où B est une perturbation m-accrétive d'un opérateur auto-adjoint positif A, relativement bornée par rapport à A, seule la convergence forte est établie pour la formule de Trotter [58], cf proposition 2.2. On montrera qu'avec ou sans différentes conditions supplémentaires on a la convergence en norme d'opérateur, et des vitesses de convergence dépendant de ces conditions. Les conditions proposées sont les suivantes [6, 9] :

(C1) $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$ et il existe $a_* \in]0,1[$ tel que $\|B^*u\| \leq a_*\|Au\|$ pour tout $u \in \mathrm{dom}(A)$.

(C2) il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que $\mathrm{dom}((H^*)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha) \cap \mathrm{dom}((B^*)^\alpha) \neq \{0\}$.

(C3) B est m-sectoriel et $\mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(b)$ où a et b sont les formes quadratiques associées aux opérateurs A et B.

4.2 Résultats préliminaires

On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ et $\mathrm{D}_{1/2} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| \leq 1/2\}$, deux disques dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

Lemme 4.4 *Soit $A = A^* \geq I$. Alors pour tout $\tau > 0$*

$$\|(I - e^{-\tau A})(z - e^{-\tau A})^{-1}\| \leq \begin{cases} |z|^{-1} & z \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{D}_{1/2} \\ |1 - z|/|\mathrm{Im}\, z| & z \in \mathrm{D}_{1/2} \setminus [0, 1] \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Démonstration

On utilise le calcul fonctionnel pour l'opérateur auto-adjoint A. D'où on obtient

$$\|(I - e^{-\tau A})(z - e^{-\tau A})^{-1}\| \leq \sup_{\lambda \geq 1} \left| \frac{1 - e^{-\tau\lambda}}{z - e^{-\tau\lambda}} \right| \leq \sup_{\lambda \geq 0} \left| \frac{1 - e^{-\lambda}}{z - e^{-\lambda}} \right|. \tag{4.2.2}$$

Soit $z = x + iy$ et

$$m(\lambda) := \frac{1 - e^{-\lambda}}{|z - e^{-\lambda}|} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\sqrt{(x - e^{-\lambda})^2 + y^2}}, \qquad \lambda \geq 0. \tag{4.2.3}$$

Si $z \in \mathbb{D} \setminus \mathrm{D}_{1/2}$, alors $m'(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \geq 0$. Donc $m(\lambda)$ est une fonction croissante telle que

$$\sup_{\lambda \geq 0} m(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} m(\lambda) = \frac{1}{|z|}, \tag{4.2.4}$$

ce qui prouve la première majoration (4.2.1). Si $z \in \mathrm{D}_{1/2} \setminus [0, 1]$, alors $m(\lambda)$ atteint son maximum en λ_0 tel que

$$e^{-\lambda_0} = \frac{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 - y^2}{1 - x}. \tag{4.2.5}$$

En utilisant (4.2.5) dans (4.2.3) on obtient

$$m(\lambda_0) = \frac{|1 - z|}{|\mathrm{Im}\, z|}, \tag{4.2.6}$$

ce qui donne

$$0 \leq m(\lambda) \leq \frac{|1 - z|}{|\mathrm{Im}\, z|}, \tag{4.2.7}$$

L'inégalité (4.2.7) conduit à la deuxième majoration dans (4.2.1). □

Puisque pour $A \geq I$ et un opérateur m-accrétif B l'opérateur

$$F(\tau) = e^{-\tau B} e^{-\tau A}, \qquad \tau > 0, \tag{4.2.8}$$

est une contraction, son spectre vérifie $\sigma(F(\tau)) \subseteq \mathbb{D}$, $\tau > 0$. Cependant, si B est relativement borné par rapport à A on peut en dire plus. Pour cela on introduit la famille de convexes fermés dans $\mathbb{C}$, définie pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$ par

$$D_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sin\theta\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1 - z)| \leq \theta \text{ et } |z - 1| \leq \cos\theta\}, \tag{4.2.9}$$

voir Figure 4.1. On remarque que la famille D_θ croît avec θ : si $\theta < \theta'$, alors $D_\theta \subset D_{\theta'}$. D'autre part, on note R_θ la famille décroissante des ensembles $\mathbb{D} \setminus D_\theta$. On vérifie que si $z \in D_\theta \cap \mathrm{D}_{1/2}$, alors $|\mathrm{Im}\, z| \leq \sin\theta |1-z|$. Enfin, pour $\theta = 0$ on trouve $D_0 = [0,1]$ et pour $\theta = \pi/2$, $D_{\pi/2} = \mathbb{D}$

Lemme 4.5 *Soit $A \geq I$ et soit B un opérateur m-accrétif satisfaisant la condition (C0) avec $a < 1$. Alors $\sigma(F(\tau)) \subseteq D_\theta$, où $\theta = \arcsin a$, pour tout $\tau > 0$. De plus, pour tout $\theta' \in]\theta, \pi/2[$, on a l'estimation*

$$\|(z - F(\tau))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - a/\sin\theta'} \|(z - e^{-\tau A})^{-1}\|, \; z \in R_{\theta'} = \mathbb{D} \setminus D_{\theta'}. \tag{4.2.10}$$

Démonstration

Soit $\theta = \arcsin a$. Il s'agit de montrer que tout point $z \in \mathbb{D} \setminus D_\theta = R_\theta$ appartient à l'ensemble résolvant $\rho(F(\tau))$ de $F(\tau)$ pour $\tau > 0$ quelconque. Pour cela on utilise la représentation

$$z - F(\tau) = z - e^{-\tau A} + (I - e^{-\tau B})e^{-\tau A}. \tag{4.2.11}$$

Si $\tau > 0$, alors l'opérateur $(I - e^{-\tau A})$ est inversible. Soient

$$X(\tau, z) := (I - e^{-\tau A})(z - e^{-\tau A})^{-1} \tag{4.2.12}$$

et

$$Y(\tau) := (I - e^{-\tau B})e^{-\tau A}(I - e^{-\tau A})^{-1}. \tag{4.2.13}$$

Alors d'après (4.2.11)-(4.2.13) on obtient la représentation

$$z - F(\tau) = \{I + Y(\tau, z)X(\tau)\}(z - e^{-\tau A}). \tag{4.2.14}$$

Afin de majorer (4.2.13) en norme, on écrit la représentation

$$Y(\tau) = (I - e^{-\tau B})A^{-1}e^{-\tau A}A(I - e^{-\tau A})^{-1}, \tag{4.2.15}$$

or d'après la condition (4.1.1) on a

$$\|(I - e^{-\tau B})A^{-1}\| \leq \int_0^\tau \|e^{-sB}BA^{-1}\| d\tau \leq \tau a. \tag{4.2.16}$$

Donc

$$\|Y(\tau)\| \leq \tau a \|Ae^{-\tau A}(I - e^{-\tau A})^{-1}\|. \tag{4.2.17}$$

Par le calcul fonctionnel pour l'opérateur auto-adjoint A on vérifie que

$$\tau \|(I - e^{-\tau A})^{-1}Ae^{-\tau A}\| \leq 1 \tag{4.2.18}$$

pour tout $\tau > 0$, et par conséquent les inégalités (4.2.17), (4.2.18) donnent

$$\|Y(\tau)\| \leq a \, . \tag{4.2.19}$$

Soit $\theta' > \theta$. Afin de majorer la norme de $X(\tau, z)$ (4.2.12) on considère les deux cas suivants :

(1) $z \in \mathrm{D}_{1/2} \cap R_{\theta'}$. Alors $|\mathrm{Im}\, z| > \sin\theta' |1 - z|$. Comme $z \in \mathrm{D}_{1/2}$, d'après le lemme 4.4 on trouve que

$$\|X(\tau, z)\| \leq \frac{|1 - z|}{|\mathrm{Im}\, z|}. \tag{4.2.20}$$

D'où on obtient

$$\|X(\tau, z)\| < \frac{1}{\sin\theta'} \tag{4.2.21}$$

pour $z \in R_{\theta'} \cap \mathrm{D}_{1/2}$ et $\tau > 0$.

(2) Soit $z \in R_{\theta'} \setminus \mathrm{D}_{1/2}$. Comme $|z| > \sin\theta'$, d'après le lemme 4.4 on trouve

$$\|X(\tau, z)\| \leq \frac{1}{|z|} < \frac{1}{\sin\theta'}. \tag{4.2.22}$$

Donc la majoration

$$\|X(\tau, z)\| < \frac{1}{\sin\theta'}, \tag{4.2.23}$$

est vraie pour tout $z \in R_{\theta'}$ et $\tau > 0$ cf (4.2.21), (4.2.22). De plus, par (4.2.19) et (4.2.23) on a

$$\|X(\tau, z)Y(\tau)\| \leq \|X(\tau, z)\| \|Y(\tau)\| < \frac{a}{\sin\theta'} \leq 1 \tag{4.2.24}$$

pour $z \in R_{\theta'}$, $\tau > 0$. Ceci montre que l'opérateur $\{I + Y(\tau)X(\tau, z)\}$ est inversible pour tout $z \in R_\theta = \bigcup_{\theta' > \theta} R_{\theta'}$ et $\tau > 0$, avec l'estimation suivante pour $z \in R_{\theta'}$, $\theta' > \theta$:

$$\|(I + X(\tau, z)Y(\tau, z))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - a/\sin\theta'}, \ \tau > 0. \tag{4.2.25}$$

Comme l'opérateur $(z - e^{-\tau A})$ est inversible pour $z \in R_\theta$ et $\tau > 0$, on obtient par la représentation (4.2.14) que l'opérateur $z - F(\tau)$ est inversible pour $z \in R_\theta$, $\tau > 0$, avec l'estimation annoncée (4.2.10) pour $z \in R_{\theta'}$, $\theta' \in]\theta, \pi/2[$. $\square$

Considérons le chemin fermé $\Gamma_\theta = \partial D_\theta$, c'est-à-dire la frontière de l'ensemble D_θ. En dehors du disque $\mathrm{D}_{1/2}$, il coïncide avec l'arc de cercle de rayon $a = \sin\theta$ et de centre 0, tandis qu'à l'intérieur de $\mathrm{D}_{1/2}$, ce chemin est constitué de deux segments de droite tangents à l'arc précédent et passant par le point 1 (voir Figure 4.1).

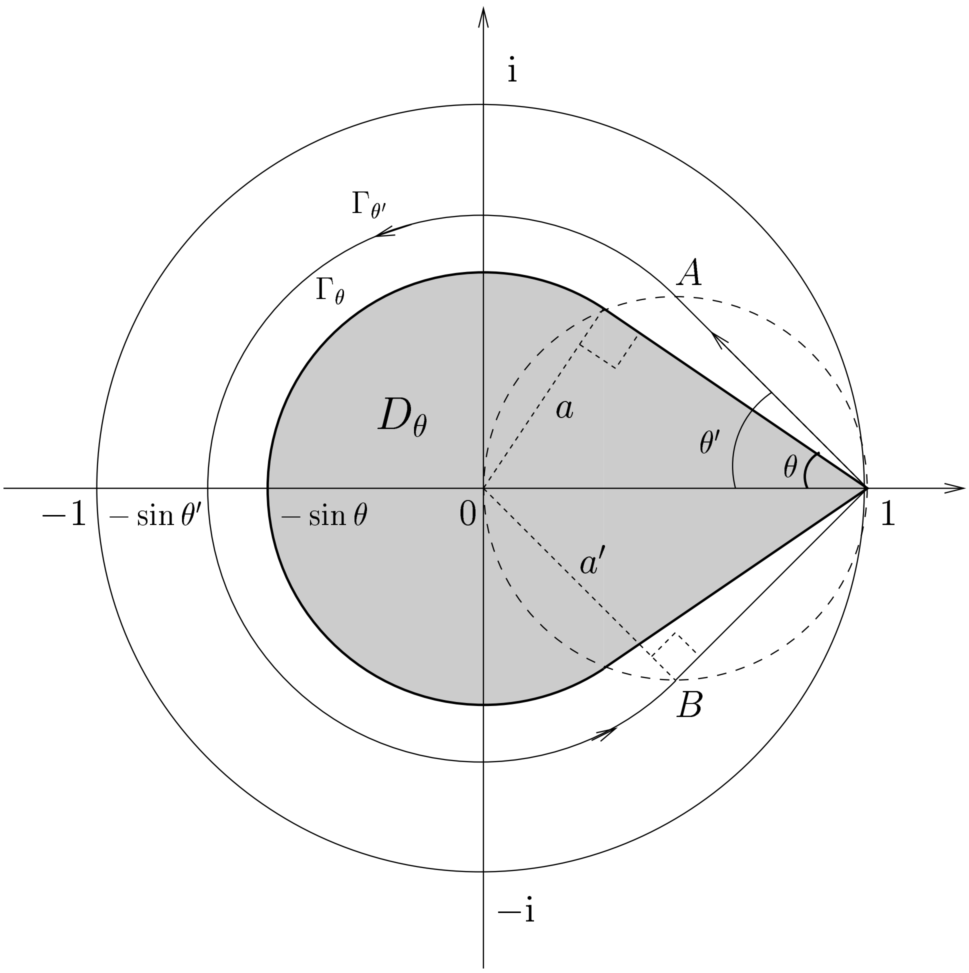

FIG. 4.1 – Représentation de l'ensemble D_θ (domaine grisé) avec sa frontière $\Gamma_\theta = \partial D_\theta$, où $\theta = \arcsin a$, ainsi qu'un choix de chemin $\Gamma_{\theta'}$ dans l'ensemble résolvant $\rho(F(\tau))$, avec $a' = \sin\theta' > a$. Le chemin $\Gamma_{\theta'}$ est constitué de deux segment $[1, A]$ et $[1, B]$ tangents à l'arc (A, B) de rayon a'. Le cercle en pointillé $\partial \mathrm{D}_{1/2}$ correspond à l'ensemble des points de tangence pour les différentes valeurs de $\theta \in [0, \pi/2]$.

Théorème 4.6 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, vérifiant la condition (C0) avec $a < 1$. Alors il existe une constante c telle que l'on ait*

$$\|F(\tau)^k(I - F(\tau))\| \leq \frac{c}{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.2.26}$$

pour tout $\tau > 0$. On rappelle que $F(\tau) = e^{-\tau B} e^{-\tau A}$.

Démonstration

D'après le lemme 4.5, on sait que pour tout $\theta' > \theta = \arcsin a$ et tout $\tau > 0$, le contour $\Gamma_{\theta'}$ est inclus dans $\rho(F(\tau))$, l'ensemble résolvant de $F(\tau)$. En utilisant la méthode de Dunford-Taylor on obtient la représentation intégrale suivante

$$F(\tau)^k(I-F(\tau)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta'}} z^k(1-z)(z-F(\tau))^{-1}dz. \tag{4.2.27}$$

On majore la norme de cette intégrale (4.2.27) à l'aide de l'inégalité (4.2.10) :

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta'}} z^k(1-z)(z-F(\tau))^{-1}dz\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{\theta'}} |z^k(1-z)|\frac{a'}{a'-a}\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\||dz|. \tag{4.2.28}$$

Comme l'intégrale du membre de droite de (4.2.28) est invariante pour la conjugaison $z \to \overline{z}$, il suffit de majorer l'intégrale le long de $\Gamma^+_{\theta'}$, la branche du chemin $\Gamma_{\theta'}$ de partie imaginaire positive. Cette branche est constituée du segment $[1, A]$ et de l'arc $(\pi/2-\theta', \pi)$ de rayon a', cf Figure 4.1.

Considérons la paramétrisation suivante : pour $[1, A]$

$$z = 1 - se^{-i\theta'},\ 0 \leq s \leq \cos\theta',\ \text{avec } a' = \sin\theta'. \tag{4.2.29}$$

Puisque $e^{-\tau A}$ est auto-adjoint, on a d'après (4.2.29) $\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\| \leq (\operatorname{Im} z)^{-1} \leq (s\sin\theta')^{-1}$, et on trouve

$$\int_{[1,A]} |z^k(1-z)|\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\||dz| \leq \int_0^{\cos\theta'} ds|1-se^{-i\theta'}|^k\frac{1}{\sin\theta'} \tag{4.2.30}$$

On remarque que pour $0 \leq s \leq \cos\theta'$, par convexité,

$$|1-se^{-i\theta'}| \leq 1 - s\frac{1-\sin\theta'}{\cos\theta'}. \tag{4.2.31}$$

D'où on obtient pour (4.2.30) la majoration

$$\int_{[1,A]} |z^k(1-z)|\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\||dz| \leq \frac{\cos\theta'}{\sin\theta'(1-\sin\theta')}\frac{1-(\sin\theta')^k}{k+1} \tag{4.2.32}$$

Pour les points z de l'arc $(\pi/2-\theta', \pi)$ de rayon a', en utilisant encore que $e^{-\tau A}$ est auto-adjoint, on a l'estimation $\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\| \leq (a'\cos\theta')^{-1}$. On trouve donc :

$$\int_{\Gamma^+_{\theta'}\setminus[1,A]} |z^k(1-z)|\|(z-e^{-\tau A})^{-1}\||dz| \leq (\pi/2+\theta')a'\frac{2a'^k}{a'\cos\theta'} \leq \frac{2\pi}{\cos\theta'}\frac{1/a'}{e\ln(1/a')}\frac{1}{k+1}. \tag{4.2.33}$$

Dans la dernière inégalité on utilise le fait que : $\sup_{k\geq 0}(k+1)e^{-k\ln x} \leq x/(e\ln x)$ pour tout $x > 1$.

Finalement, en rassemblant (4.2.28), (4.2.32) et (4.2.33) on obtient :

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta'}} z^k(1-z)(z-F(\tau))^{-1}dz\right\| \leq \tag{4.2.34}$$
$$2\left(\frac{\cos\theta'}{2\pi\sin\theta'(1-\sin\theta')} + \frac{1/a'}{e\cos\theta'\ln(1/a')}\right)\frac{1}{1-a/a'}\frac{1}{k+1}$$

ce qui donne l'estimation annoncée (4.2.26) avec

$$c = \left(\frac{a' \cos\theta'}{2\pi \sin\theta'(1-\sin\theta')} + \frac{1}{e\cos\theta' \ln(1/a')} \right) \frac{2}{a'-a}. \tag{4.2.35}$$

□

Remarque 4.7 *Si on remplace l'expression $F(\tau) = e^{-\tau B}e^{-\tau A}$ par $T(\tau) = e^{-\tau A}e^{-\tau B}$, alors les résultats (4.2.10) et (4.2.26) sont vrais à condition que B satisfasse, à la place de la condition (4.1.1), la condition (C1). Pour le raisonnement, il suffit de considérer la famille adjointe $T(\tau)^* = e^{-\tau B^*}e^{-\tau A}$, et de remplacer a par a_*.*

4.3 Condition (C1)

On va montrer dans cette partie que la condition (C1) : $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B^*)$ et

$$\text{(C1)} \qquad \|B^*u\| \leq a_*\|Au\|, \; u \in \mathrm{dom}(A) \text{ avec } a_* < 1, \tag{4.3.1}$$

assure la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur, dans le cas de deux opérateurs A et B comme annoncé au début de ce chapitre, avec une estimation en $O(\ln n/n)$ [6].

4.3.1 Exemple

Commençons par une observation qui permet de vérifier simplement la condition (C1). Évidemment si B est auto-adjoint, la condition (C1) s'identifie à (C0) avec $a < 1$, et on retrouve le cas traité dans [43]. Considérons donc $B \neq B^*$ et soit J une conjugaison sur l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire un opérateur antilinéaire tel que

$$(Jf, Jg) = (g, f), \quad f, g \in \mathfrak{H}. \tag{4.3.2}$$

Si de plus J est tel que

$$JAJ = A \text{ et } JBJ = B^*, \tag{4.3.3}$$

alors la condition (C0) implique (4.3.1) avec $a_* = a$. Donc la condition (C1) est vérifiée dans ce cas. Comme exemple considérons un opérateur de Schrödinger. Si A est l'opérateur de Laplace sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ et B est un opérateur de multiplication défini par un potentiel complexe $V(\cdot)$ tel que $\mathrm{Re}\, V \geq 0$ et que la condition (C0) soit satisfaite avec $a < 1$, alors en choisissant pour J la conjugaison complexe on vérifie simplement (4.3.2) et (4.3.3), d'où (C1) est aussi satisfaite.

4.3.2 Résultat principal avec (C1)

On considère à présent l'expression

$$T(\tau) = e^{-\tau A}e^{-\tau B} \tag{4.3.4}$$

Lemme 4.8 *Soit A un opérateur auto-adjoint positif, $A \geq I$, dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit B un opérateur m-accrétif, satisfaisant la condition (C1) avec $a_* < 1$. Alors l'opérateur $I - T(\tau)$ a un inverse borné quel que soit $\tau > 0$ et*

$$\left\|(I - T(\tau))^{-1}u\right\| \leq \frac{1}{1-a_*}\left(\|u\| + \frac{1}{\tau}\|A^{-1}u\|\right), \qquad u \in \mathfrak{H}, \tag{4.3.5}$$

Démonstration

Considérons la représentation

$$I - T(\tau) = I - e^{-\tau A} + e^{-\tau A}(I - e^{-\tau B}). \tag{4.3.6}$$

Comme $\|e^{-\tau A}\| \leq e^{-\tau} < 1$, l'opérateur $I - e^{-\tau A}$ est inversible pourvu que $\tau > 0$. D'où on obtient

$$I - T(\tau) = (I - e^{-\tau A})\left(I + \tilde{Y}(\tau)\right), \tag{4.3.7}$$

où $\tilde{Y}(\tau) = (I - e^{-\tau A})^{-1}e^{-\tau A}(I - e^{-\tau B})$. D'après (4.2.18) et $\|A^{-1}(I - e^{-\tau B})\| \leq \|A^{-1}\int_0^\tau Be^{-sB}d\tau\| \leq \|B^*A^{-1}\|\tau \leq a_*\tau$ avec $a_* < 1$ on obtient que $I - T(\tau)$ est aussi inversible. De plus, on a l'estimation :

$$\|(I - T(\tau))^{-1}u\| \leq \frac{1}{1-a_*}\left\|\left(I - e^{-\tau A}\right)^{-1}u\right\|, \quad u \in \mathfrak{H} \tag{4.3.8}$$

D'après le lemme 2.3 de [43], on a pour tout $u \in \mathfrak{H}$ et pour tout $\tau > 0$

$$\left\|\left(I - e^{-\tau A}\right)^{-1}u\right\| \leq \|u\| + \frac{1}{\tau}\|A^{-1}u\|. \tag{4.3.9}$$

Par (4.3.8) et (4.3.9) on arrive à l'estimation (4.3.5). □

Remarque 4.9 *Dans ce lemme, on peut remplacer $T(\tau)$ par $e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2}$. En effet, il suffit de considérer la représentation suivante à la place de (4.3.6)*

$$I - e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2} = I - e^{-\tau A} + e^{-\tau A/2}(I - e^{-\tau B})e^{-\tau A/2} \tag{4.3.10}$$

Théorème 4.10 *Soit A un opérateur auto-adjoint, $A \geq I$, dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit B un opérateur m-accrétif satisfaisant les conditions (C0) et (C1), avec $a, a_* < 1$. Alors il existe un constante $L > 0$ telle que l'on ait l'estimation*

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L\,\frac{\ln(n)}{n}, \qquad n = 3, 4, \ldots, \tag{4.3.11}$$

uniformément en $t \geq 0$, avec $H = A + B$ et $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$.

Démonstration

Soit $\tau = t/n$ et $U(\tau) = e^{-\tau H}$, qui est un semi-groupe holomorphe contractant d'après le théorème 4.1. Le point de départ est à nouveau la représentation

$$\begin{aligned} &T(\tau)^n - U(\tau)^n \\ &= T(\tau)^{n-1}(T(\tau) - U(\tau)) + \sum_{m=1}^{n-1} T(\tau)^{n-m-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Puisque d'après le lemme 4.8 l'opérateur $(I - T(\tau))^{-1}$ est borné pour tout $\tau > 0$, on trouve

$$T(\tau)^n - U(\tau)^n = T(\tau)^{n-1}(T(\tau) - U(\tau)) \tag{4.3.13}$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} T(\tau)^{n-m-1}(I - T(\tau))(I - T(\tau))^{-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m.$$

ce qui conduit à

$$\|T(\tau)^n - U(\tau)^n\| \leq \|T(\tau)^{n-1}(T(\tau) - U(\tau))\| \tag{4.3.14}$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \|T(\tau)^{n-m-1}(I - T(\tau))\| \|(I - T(\tau))^{-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\|.$$

Ensuite par (4.3.5) on obtient

$$\|(I - T(\tau))^{-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| \tag{4.3.15}$$
$$\leq \frac{1}{1 - a_*} \left\{ \|(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| + \frac{1}{\tau} \left\|A^{-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\right\| \right\}.$$

Or comme

$$(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m = (T(\tau) - U(\tau))A^{-1}AH^{-1}HU(\tau)^m, \tag{4.3.16}$$

on trouve

$$\|(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| \leq \left\|(T(\tau) - U(\tau))A^{-1}\right\| \|AH^{-1}\| \|HU(\tau)^m\|. \tag{4.3.17}$$

En appliquant la proposition 1.18 au dernier facteur de (4.3.17) on obtient

$$\|(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| \leq \left\|(T(\tau) - U(\tau))A^{-1}\right\| \|AH^{-1}\| \frac{M_1(H)}{\tau} \frac{1}{m}. \tag{4.3.18}$$

D'après $AH^{-1} = (I + BA^{-1})^{-1}$ et $\|BA^{-1}\| \leq a < 1$ on trouve

$$\|AH^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - a}. \tag{4.3.19}$$

Donc

$$\|(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| \leq \left\|(T(\tau) - U(\tau))A^{-1}\right\| \frac{M_1(H)}{(1 - a)\tau} \frac{1}{m}. \tag{4.3.20}$$

De la même manière, on obtient

$$\|A^{-1}(T(\tau) - U(\tau))U(\tau)^m\| \leq \left\|A^{-1}(T(\tau) - U(\tau))A^{-1}\right\| \frac{M_1(H)}{(1 - a)\tau} \frac{1}{m}. \tag{4.3.21}$$

En insérant (4.3.20) et (4.3.21) dans l'expression (4.3.15) on trouve

$$\begin{aligned}
&\|(I-T(\tau))^{-1}(T(\tau)-U(\tau))U(\tau)^m\| \qquad (4.3.22)\\
&\leq \left\{\frac{1}{\tau}\|(T(\tau)-U(\tau))A^{-1}\| + \frac{1}{\tau^2}\left\|A^{-1}(T(\tau)-U(\tau))A^{-1}\right\|\right\}\frac{M_1(H)}{(1-a_*)(1-a)}\frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (4.3.22), les lemmes 3.4 et 3.5 on obtient

$$\|(I-T(\tau))^{-1}(T(\tau)-U(\tau))U(\tau)^m\| \leq M_1(H)\frac{L_1+L_2}{(1-a_*)(1-a)}\frac{1}{m} = \frac{L_3}{m}, \quad (4.3.23)$$

où on pose $L_3 := M_1(H)(L_1+L_2)/(1-a_*)(1-a)$. De plus, par le théorème 4.6 on a

$$\|T(\tau)^{n-m-1}(I-T(\tau))\| \leq \frac{c}{n-m}, \qquad n=2,3,\ldots, \qquad m=0,1,2,\ldots,n-1. \quad (4.3.24)$$

En combinant (4.3.23) et (4.3.24) dans (4.3.14) on trouve

$$\|T(\tau)^n - U(\tau)^n\| \leq \|T(\tau)^{n-1}(T(\tau)-U(\tau))\| + cL_3\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(n-m)m}. \quad (4.3.25)$$

Or on vérifie que

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{(n-m)m} \qquad (4.3.26)\\
&= \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m} \leq \frac{2}{n}(1+\ln(n-1)) \leq 4\frac{\ln(n)}{n}, \qquad n=2,3,\ldots,
\end{aligned}$$

d'où on tire de (4.3.25) l'inégalité

$$\|T(\tau)^n - U(\tau)^n\| \leq \|T(\tau)^{n-1}(F(\tau)-U(\tau))\| + 4cL_3\frac{\ln(n)}{n}. \quad (4.3.27)$$

Il reste à majorer $\|T(\tau)^{n-1}(T(\tau)-U(\tau))\|$. À nouveau comme $I-T(\tau)$ a un inverse borné (lemme 4.8) on trouve

$$\|T(\tau)^{n-1}(T(\tau)-U(\tau))\| \leq \|T(\tau)^{n-1}(I-T(\tau))\|\|(I-T(\tau))^{-1}(T(\tau)-U(\tau))\|. \quad (4.3.28)$$

D'après (4.3.5) on obtient

$$\begin{aligned}
&\|(I-T(\tau))^{-1}(T(\tau)-U(\tau))\| \qquad (4.3.29)\\
&\leq \frac{1}{1-a_*}\left\{\|T(\tau)-U(\tau)\| + \frac{1}{\tau}\left\|A^{-1}(T(\tau)-U(\tau))\right\|\right\}\\
&\leq \frac{1}{1-a_*}\left\{2 + \frac{1}{\tau}\left\|A^{-1}(T(\tau)-U(\tau))\right\|\right\}.
\end{aligned}$$

En appliquant au membre de droite de (4.3.29) l'estimation du lemme 3.4 on trouve

$$\|(I - T(\tau))^{-1}(T(\tau) - U(\tau))\| \leq \frac{2 + L_1}{1 - a_*}. \tag{4.3.30}$$

En insérant (4.3.30) dans (4.3.28) on trouve

$$\|T(\tau)^{n-1}(T(\tau) - U(\tau))\| \leq \frac{2 + L_1}{1 - a_*}\|T(\tau)^{n-1}(I - F(\tau)\|. \tag{4.3.31}$$

Enfin grâce au théorème 4.6 on obtient

$$\|T(\tau)^{n-1}(T(\tau) - U(\tau))\| \leq \frac{2 + L_1}{1 - a_*}\frac{c}{n}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{4.3.32}$$

En insérant (4.3.32) dans (4.3.27) on trouve l'estimation (4.3.11) :

$$\|T(\tau)^n - U(\tau)^n\| \leq L\,\frac{\ln(n)}{n}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

On pose $L := c(2 + L_1)(1 - a_*)^{-1} + 4cL_3$, et on utilise le fait que $1/n < \ln(n)/n$ pour $n = 3, 4, \ldots$ □

4.3.3 Conséquences

Corollaire 4.11 *Si A et B deux opérateurs satisfaisant les conditions du Théorème 4.10. Alors il existe des constantes L', L'' telles que l'on ait les estimations*

$$\left\|\left(e^{-tB/n}e^{-tA/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L'\,\frac{\ln(n)}{n}, \qquad n = 3, 4, \ldots, \tag{4.3.34}$$

$$\left\|\left(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L''\,\frac{\ln(n)}{n}, \qquad n = 3, 4, \ldots \tag{4.3.35}$$

uniformément en $t \geq 0$.

Démonstration

Puisque B^* satisfait les conditions du théorème 4.10, on a

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB^*/n}\right)^n - e^{-tH^*}\right\| \leq L'\,\frac{\ln(n)}{n}. \tag{4.3.36}$$

Notons que $H^* = A + B^*$ est bien défini et m-accrétif avec $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$. En prenant la suite d'opérateurs adjointe, on trouve (4.3.34). Pour obtenir (4.3.35), il suffit de remarquer que la méthode de la preuve du théorème 4.10 peut être refaite essentiellement sans changement pour la formule symétrique. □

Les résultats de cette section généralisent ceux de l'article [43], puisque au lieu d'un opérateur de perturbation B auto-adjoint positif on peut avoir un opérateur m-accrétif. Les conditions de petitesse de B par rapport à A (4.1.1) et (C1) se réduisent à la première dans le cas où B est auto-adjoint c'est-à-dire à la condition de [43]. De plus l'estimation de la vitesse de convergence est du même ordre, soit $O(\ln n/n)$ pour les différentes formules de Trotter considérées avec la fonction exponentielle.

Comme exemple, considérons le cas particulier suivant : $B(z) = zV$, où V est un opérateur auto-adjoint positif relativement borné par rapport à $A \geq I$, soit $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(V)$ et

$$\|Vf\| \leq a\|Af\|, \quad f \in \mathrm{dom}(A), \text{ pour un } a \in]0,1[. \tag{4.3.37}$$

Alors les opérateurs $B(z) = zV$ et $B(z)^* = \overline{z}V$ sont clairement m-accrétifs, et satisfont les conditions (4.1.1) et (C1) pour $\mathrm{Re}\, z \geq 0$. Si, de plus, $|z| \leq 1$, alors les constantes a, a_* pour $B(z)$ restent inférieures à 1. En appliquant le théorème 4.10 on trouve que

$$\|(e^{-tA/n}e^{-tzV/n})^n - e^{-tH(z)}\| \leq L\frac{\ln(n)}{n}, \quad n = 2, 3 \ldots, \tag{4.3.38}$$

uniformément en $t \geq 0$ et en z tel que $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, $|z| \leq 1$, où l'opérateur $H(z) = A + zV$ est défini sur $\mathrm{dom}(H(z)) = \mathrm{dom}(A)$. Dans le cas particulier $z = i$, il s'agit de la perturbation d'un semi-groupe auto-adjoint par un groupe unitaire.

4.4 Contre-exemple

L'objet de cette section est de construire deux opérateurs A et B, tels que A soit auto-adjoint positif, $A \geq I$ et B m-accrétif, et que l'on ait la condition (4.1.1) mais en même temps $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B^*) = \{0\}$ [9].

Soit K un opérateur m-accrétif dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On pose

$$T := (I - K)(I + K)^{-1}. \tag{4.4.1}$$

Alors l'opérateur T est une contraction. En effet, comme K est m-accrétif, on trouve

$$\|(I - K)f\|^2 \leq \|(I + K)f\|^2, \quad f \in \mathrm{dom}(K), \tag{4.4.2}$$

ce qui donne

$$\|(I - K)(I + K)^{-1}g\| \leq \|g\|, \quad \text{avec} \quad g = (I + K)f. \tag{4.4.3}$$

Or $\mathrm{ran}(I + K) = \mathfrak{H}$, donc T est une contraction. Cet opérateur est appelée généralement la *transformation de Cayley* de l'opérateur m-accrétif K.

Lemme 4.12 *Une contraction T est la transformation de Cayley d'un opérateur m-accrétif K si et seulement si*

$$\ker(I + T) = \{0\}. \tag{4.4.4}$$

De plus, l'opérateur K est défini de manière unique par

$$\mathrm{dom}(K) = \mathrm{ran}(I+T) \tag{4.4.5}$$

et

$$Kf = (I-T)(I+T)^{-1}f, \quad f \in \mathrm{ran}(I+T). \tag{4.4.6}$$

Démonstration

Soit K un opérateur m-accrétif et soit T défini par (4.4.1). Pour montrer (4.4.4) considérons $f \in \mathfrak{H}$ tel que

$$(I+T)f = 0. \tag{4.4.7}$$

Comme

$$I + T = 2(I+K)^{-1} \tag{4.4.8}$$

on trouve

$$(I+K)^{-1}f = 0 \tag{4.4.9}$$

ce qui montre que $f = 0$. Donc $\ker(I+T) = \{0\}$.

Réciproquement, soit T une contraction qui vérifie (4.4.4). Alors $\ker(I+T^*) = \{0\}$. En effet, soit

$$(I+T^*)f = 0. \tag{4.4.10}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} 0 = \|(I+T^*)f\|^2 &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(T^*f, f) + \|T^*f\|^2 \\ &= 2\|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(Tf, f) \\ &= \|(I+T)f\|^2 + \|\sqrt{I - T^*T}f\|^2. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Puisque T est une contraction satisfaisant (4.4.4), le membre de droite de (4.4.11) montre que nécessairement $f = 0$, soit $\ker(I+T^*) = \{0\}$. D'après $\ker(T^*) = \mathrm{ran}(T)^\perp$ on en déduit ensuite que

$$\overline{\mathrm{ran}(I+T)} = \mathfrak{H}. \tag{4.4.12}$$

Par conséquent, l'opérateur $I+T$ est inversible. D'où on peut définir l'opérateur K par (4.4.5) et(4.4.6), ce qui implique que l'opérateur K est fermé à domaine dense $\mathrm{dom}(K) = \mathrm{ran}(I+T)$.

Montrons que K est accrétif. En posant $f = (I+T)g$ pour $g \in \mathfrak{H}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(Kf, f) &= \mathrm{Re}\,((I-T)g, (I+T)g) \\ &= \mathrm{Re}\,\left(\|g\|^2 - 2i\mathrm{Im}\,(Tf, f) - \|Tf\|^2\right) \\ &= \|\sqrt{I - T^*T}g\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Donc l'opérateur K est accrétif. Il reste à montrer que K est m-accrétif, c'est-à-dire à vérifier, par exemple, que $\mathrm{ran}(I+K) = \mathfrak{H}$, ou que $(I+K)$ est inversible. D'après (4.4.13) on a $\ker(I+K) = \{0\}$. Or par (4.4.6) on a

$$I + K = 2(I+T)^{-1}, \tag{4.4.14}$$

d'où $\mathrm{ran}(I+K) = \mathrm{dom}(I+T) = \mathfrak{H}$. De plus, on trouve $(I+K)^{-1} = \frac{1}{2}(I+T)$.

□

Soient R et S deux opérateurs auto-adjoints positifs tels que

$$\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S) = \{0\}. \tag{4.4.15}$$

On pose

$$T := (I+R)^{-1}(I+S)^{-1}. \tag{4.4.16}$$

L'opérateur T est clairement une contraction. Vérifions la condition (4.4.4). Si on pose $f = (I+S)g$, $g \in \mathrm{dom}(S)$, alors la condition (4.4.4) devient

$$(I+S)g + (I+R)^{-1}g = 0. \tag{4.4.17}$$

Comme $S \geq 0$ et $(I+R)^{-1} \geq 0$ on obtient $g = 0$ ce qui donne $f = 0$. Par conséquent, par le lemme 4.12 la contraction T définie par (4.4.16) est la *transformation de Cayley* d'un opérateur m-accrétif K qui est donné par (4.4.5) et (4.4.6). On a alors, cf (4.4.8),

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(K) = \mathrm{ran}(I+T) = \\ &\quad \mathrm{ran}((I+R)^{-1}(I+R+(I+S)^{-1})) = \mathrm{ran}((I+K)^{-1}) = \mathrm{dom}(R). \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

Le fait que R et S soient positifs garantit que $\mathrm{ran}(I+R+(I+S)^{-1}) = \mathfrak{H}$.

La *transformation de Cayley* de l'opérateur m-accrétif K^* est, bien sûr, T^*. En appliquant à nouveau le lemme 4.12 on trouve

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}(K^*) = \mathrm{ran}(I+T^*) = \\ &\quad \mathrm{ran}((I+S)^{-1}(I+S+(I+R)^{-1})) = \mathrm{ran}((I+S)^{-1}) = \mathrm{dom}(S). \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Ainsi on a construit un opérateur m-accrétif K tel que $\mathrm{dom}(K) = \mathrm{dom}(R)$ et $\mathrm{dom}(K^*) = \mathrm{dom}(S)$. D'après la condition (4.4.15) on trouve

$$\mathrm{dom}(K) \cap \mathrm{dom}(K^*) = \{0\}. \tag{4.4.20}$$

À présent nous allons construire A et B. On pose

$$B := aK, \quad \text{pour un} \quad a \in]0,1[, \tag{4.4.21}$$

et

$$A := \sqrt{I + K^*K}. \tag{4.4.22}$$

L'opérateur B est clairement m-accrétif avec

$$\mathrm{dom}(B) = \mathrm{dom}(K) \tag{4.4.23}$$

et A est un opérateur auto-adjoint satisfaisant $A \geq I$ et

$$\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(\sqrt{K^*K}) = \mathrm{dom}(|K|) = \mathrm{dom}(K). \tag{4.4.24}$$

D'où $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$. De plus on a

$$\|Bf\| = a\|Kf\| \leq a\|\sqrt{I + K^*K}f\| = a\|Af\|, \quad f \in \mathrm{dom}(A). \tag{4.4.25}$$

Comme $B^* = aK^*$ on obtient finalement

$$\mathrm{dom}(B^*) \cap \mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(K^*) \cap \mathrm{dom}(K) = \{0\}. \tag{4.4.26}$$

Afin de terminer la construction de l'exemple il reste à montrer comment on peut définir deux opérateurs auto-adjoints positifs R et S vérifiant la propriété (4.4.15). Soit $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$ et soit R le Laplacien uni-dimensionnel sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathrm{dom}(R) \quad := \quad \{f \in W^{2,2}([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}, \tag{4.4.27}$$
$$(Rf)(x) \quad := \quad -\frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad f \in \mathrm{dom}(R). \tag{4.4.28}$$

L'opérateur R ainsi défini est auto-adjoint et positif. Pour définir S considérons $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ une énumération des rationnels de $]0,1[$, et posons

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{|x - r_n|^{\alpha}}, \quad \alpha \in]1/2, 1[, \quad c_n > 0, \tag{4.4.29}$$

de telle sorte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty. \tag{4.4.30}$$

Alors $q \in L^1([0,1])$. En effet,

$$\int_0^1 q(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \frac{1}{|x - r_n|^{\alpha}}dx \leq \tag{4.4.31}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{-2}^{2} \frac{1}{|x|^{\alpha}}dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \int_0^2 \frac{1}{|x|^{\alpha}}dx = \frac{2^{2-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty.$$

On définit

$$\mathrm{dom}(S) := \quad \{f \in \quad L^2([0,1]) : q(x)f(x) \in L^2([0,1])\}, \tag{4.4.32}$$
$$(Sf)(x) := \qquad q(x)f(x), \quad f \in \mathrm{dom}(S). \tag{4.4.33}$$

L'opérateur S est auto-adjoint, positif et non borné.

Pour vérifier (4.4.15) supposons que

$$f \in \mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S) \subseteq W^{2,2}([0,1]) \cap \mathrm{dom}(S). \tag{4.4.34}$$

Comme $f \in W^{2,2}([0,1])$, la fonction $f(\cdot)$ est continue. D'autre part $f \in \mathrm{dom}(S)$ donc

$$q(x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{|x - r_n|^{\alpha}} f(x) \in L^2([0,1]). \tag{4.4.35}$$

On a

$$\int_0^1 |q(x)f(x)|^2 dx \geq c_n^2 \int_0^1 \frac{1}{|x-r_n|^{2\alpha}} |f(x)|^2 dx \tag{4.4.36}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ Si $f(\cdot)$ est continue alors $|f(\cdot)|$ est aussi continue. Supposons que $f(r_n) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $]r_n - \epsilon, r_n + \epsilon[\subset]0, 1[$, $\epsilon > 0$, de r_n et un $\delta > 0$ tels que $|f(x)| \geq \delta$ pour $x \in]r_n - \epsilon, r_n + \epsilon[$. D'où

$$\int_0^1 |q(x)f(x)|^2 dx \geq c_n^2 \delta^2 \int_{r_n-\epsilon}^{r_n+\epsilon} \frac{1}{|x-r_n|^{2\alpha}} dx = +\infty. \tag{4.4.37}$$

Mais cela est impossible d'après (4.4.35). On obtient donc $f(r_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Comme $f(\cdot)$ est continue cela conduit à $f \equiv 0$. Donc $\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{dom}(S) = \{0\}$.

Ainsi, on a construit dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$ un opérateur auto-adjoint A (cf (4.4.18), (4.4.25), (4.4.26)) et un opérateur m-accrétif B (cf (4.4.18), (4.4.21), (4.4.26)) tels que

$$\mathrm{dom}(A) \subseteq W^{2,2}([0,1]), \tag{4.4.38}$$

et

$$\mathrm{dom}(B^*) \cap W^{2,2}([0,1]) = \{0\}. \tag{4.4.39}$$

4.5 Condition intermédiaire (C2)

L'exemple de la section précédente montre que la condition (4.1.1) n'entraîne pas de relation analogue pour B^*, quelle que soit la constante a. Ainsi rien n'assure que le domaine de H^* coïncide avec l'intersection :

$$\mathrm{dom}(H^*) \subseteq \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B^*), \tag{4.5.1}$$

puisque celle-ci peut être réduite à $\{0\}$. On rappelle que H est toujours défini comme la somme algébrique :

$$Hf := Af + Bf, \quad f \in \mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A), \tag{4.5.2}$$

donc $H^* = (A+B)^*$. Si la condition (C1) est satisfaite, comme dans la section 4.3 et [6], alors

$$\mathrm{dom}(H^*) = \mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B^*) \neq \{0\}. \tag{4.5.3}$$

En fait, l'exemple de la section 4.4 montre que cette condition (C1) est probablement trop exigeante. Aussi on essaie ici de trouver une condition moins forte avec laquelle on puisse encore établir la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter [9]. Cette condition intermédiaire est la condition (C2), qui peut être vérifiée même dans des cas où $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B^*) = \{0\}$: il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que

$$\mathrm{dom}((H^*)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha) \cap \mathrm{dom}((B^*)^\alpha) \neq \{0\}.$$

Les opérateurs B, B^*, H, et H^* sont m-accrétifs, donc les puissances fractionnaires de ces opérateurs sont bien définies, et $(B^\alpha)^* = (B^*)^\alpha$, $(H^\alpha)^* = (H^*)^\alpha$ pour $\alpha \in]0,1]$. Il faut à présent généraliser les lemmes 3.4 et 3.5 pour des puissances fractionnaires.

Lemme 4.13 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif vérifiant les conditions (4.1.1) avec $a < 1$ et (C2) pour un $\alpha \in]0,1]$. Alors il existe $N_1(\alpha) > 0$ tel que*

$$\left\|H^{-\alpha}\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A} - e^{-\tau H}\right)\right\| \leq N_1(\alpha)\tau^\alpha \tag{4.5.4}$$

pour $\tau \geq 0$.

Démonstration

Comme $(H^{-\alpha})^* = (H^*)^{-\alpha}$, on peut considérer la norme de l'opérateur adjoint :

$$\left(H^{-\alpha}\left(e^{-\tau B}e^{-\tau A} - e^{-\tau H}\right)\right)^* = \left(e^{-\tau A}e^{-\tau B^*} - e^{-\tau H^*}\right)(H^*)^{-\alpha}.$$

En effet, c'est ainsi que l'on peut utiliser la condition (C2), qui entraîne que les opérateurs $A^\alpha(H^*)^{-\alpha}$ et $(\delta + B^*)^\alpha(H^*)^{-\alpha}$ sont bornés. On a donc

$$\begin{aligned}
&(e^{-\tau A}e^{-\tau B^*} - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha} \qquad (4.5.5)\\
&\quad = (e^{-\tau A} - I)(H^*)^{-\alpha} - e^{-\tau A}(I - e^{-\tau B^*})(H^*)^{-\alpha} + (I - e^{-\tau H})(H^*)^{-\alpha}\\
&\quad = (e^{-\tau A} - I)A^{-\alpha}A^\alpha(H^*)^{-\alpha} + e^{-\tau A}(e^{-\tau B^*} - I)(\delta + B^*)^{-\alpha}(\delta + B^*)^\alpha(H^*)^{-\alpha}\\
&\qquad -(e^{-\tau H^*} - I)(H^*)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.19, on trouve donc l'estimation

$$\begin{aligned}
&\left\|(e^{-\tau A}e^{-\tau B^*} - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha}\right\| \qquad (4.5.6)\\
&\leq \left\|(e^{-\tau A} - I)A^{-\alpha}\right\| \|A^\alpha(H^*)^{-\alpha}\| + \left\|(e^{-\tau B^*} - I)(\delta + B^*)^{-\alpha}\right\| \|(\delta + B^*)^\alpha(H^*)^{-\alpha}\|\\
&\qquad + \left\|(e^{-\tau H^*} - I)(H^*)^{-\alpha}\right\|\\
&\leq \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\alpha(1-\alpha)}2(\|A^\alpha(H^*)^{-\alpha}\| + \|(\delta + B^*)^\alpha(H^*)^{-\alpha}\| + 1).
\end{aligned}$$

pour tous $\delta > 0$ et $t \geq 0$. On peut donc choisir la constante :

$$N_1(\alpha) = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi\alpha(1-\alpha)}\left(\|A^\alpha(H^*)^{-\alpha}\| + \|(B^*)^\alpha(H^*)^{-\alpha}\| + 1\right), \quad \alpha \in]0,1[.$$

L'estimation (4.5.4) s'étend au cas $\alpha = 1$ par passage à la limite $N_1(\alpha = 1) := \lim_{\alpha\to 1} N_1(\alpha) = 2(\|A(H^*)^{-1}\| + \|B^*(H^*)^{-1}\| + 1)$.

□

Remarque 4.14 *La limite $N_1(1)$ ne correspond pas exactement à ce que donne le lemme 3.4, valable aussi lorsque $\alpha = 1$ (la constante est double). Cependant, en utilisant le fait que les générateurs sont accrétifs, on peut calculer une constante $\tilde{N}_1(\alpha)$ dont la limite en $\alpha = 1$ soit égale à celle du lemme 3.4 : $\tilde{N}_1(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\sin\alpha\pi}{\pi\alpha(1-\alpha)}$.*

Lemme 4.15 *Soient $A \geq I$ et B comme dans le lemme 4.13 pour un $\alpha \in]0,1]$. Alors il existe une constante $N_2(\alpha) > 0$ telle que*

$$\left\| H^{-\alpha} \left(e^{-\tau B} e^{-\tau A} - e^{-\tau H} \right) A^{-1} \right\| \leq N_2(\alpha) \tau^{1+\alpha} \tag{4.5.7}$$

pour tout $\tau \geq 0$.

Démonstration

Considérons la représentation suivante

$$\begin{aligned} & H^{-\alpha} \left(e^{-\tau B} e^{-\tau A} - e^{-\tau H} \right) A^{-1} = \\ & \quad H^{-\alpha}(I - e^{-\tau B})(I - e^{-\tau A}) A^{-1} + \qquad (4.5.8) \\ & \quad H^{-\alpha}(e^{-\tau B} + e^{-\tau A} - e^{-\tau H} - I) A^{-1}. \qquad (4.5.9) \end{aligned}$$

Grâce au lemme 1.19 on majore (4.5.8) (pour tout $\delta > 0$) par :

$$\begin{aligned} & \| H^{-\alpha}(I - e^{-\tau B})(I - e^{-\tau A}) A^{-1} \| \qquad (4.5.10) \\ \leq \; & \| (I - e^{-\tau B^*})(H^*)^{-\alpha} \| \| (I - e^{-\tau A}) A^{-1} \| \\ \leq \; & \| (I - e^{-\tau B^*})(\delta + B^*)^{-\alpha} \| \| (\delta + B^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| \tau \\ \leq \; & N_1(\alpha) \tau^{1+\alpha} \| (\delta + B^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \|. \end{aligned}$$

Pour majorer (4.5.9) on utilise la représentation

$$\begin{aligned} & e^{-\tau B} + e^{-\tau A} - e^{-\tau H} - I = \qquad (4.5.11) \\ & \quad (e^{-\tau B} - I + \tau B) + (e^{-\tau A} - I + \tau A) - (e^{-\tau H} - I + \tau H). \end{aligned}$$

Comme

$$e^{-\tau C} - I + \tau C = \int_0^\tau ds \, (I - e^{-sC}) C. \tag{4.5.12}$$

on obtient pour tout opérateur m-accrétif C (cf lemme 3.4)

$$\begin{aligned} \| H^{-\alpha}(e^{-\tau C} - I + \tau C) A^{-1} \| & \leq \left\| \int_0^\tau ds \, (I - e^{-sC^*})(H^*)^{-\alpha} \right\| \| C A^{-1} \| \\ \leq \; & \int_0^\tau ds \| (I - e^{-sC^*})(\delta + C^*)^{-\alpha} \| \, \| (\delta + C^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| \, \| C A^{-1} \|. \end{aligned}$$

D'après (1.27), (4.5.11), et (4.5.12) on trouve pour (4.5.9) l'estimation

$$\begin{aligned} & \| H^{-\alpha}(e^{-\tau B} + e^{-\tau A} - e^{-\tau H} - I) A^{-1} \| \leq \qquad (4.5.13) \\ & \quad N_1(\alpha) \left(\| (B^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| \| B A^{-1} \| + \| A^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| + \| H A^{-1} \| \right). \end{aligned}$$

D'où on trouve l'assertion (4.5.7) avec la constante

$$\begin{aligned} & N_2(\alpha) = \qquad (4.5.14) \\ & \quad N_1(\alpha) \left\{ \| (B^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| + \frac{1}{1+\alpha} \left(a \| (B^*)^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| + \| A^{\alpha} (H^*)^{-\alpha} \| + 1 + a \right) \right\}. \end{aligned}$$

On pose de plus $N_2(1) := \lim_{\alpha \to 1} N_2(\alpha)$ ce qui conduit au résultat annoncé (4.5.7) pour chaque $\alpha \in]0,1]$.

$\square$

Théorème 4.16 *Soient $A \geq I$ un opérateur auto-adjoint positif et B un opérateur m-accrétif, satisfaisant la condition (4.1.1) avec $a < 1$. Si l'opérateur H, somme algébrique $A + B$, satisfait la condition (C2) pour un $\alpha \in]0, 1]$, alors il existe une constante $L_\alpha > 0$ telle que l'on ait*

$$\left\| \left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq L_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.5.15}$$

$$\left\| \left(e^{-tA/n} e^{-tB^*/n}\right)^n - e^{-tH^*} \right\| \leq L_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.5.16}$$

pour $n = 3, 4, \ldots$ uniformément en $t \geq 0$.

Démonstration

Remarquons que les inégalités (4.5.15) et (4.5.16) sont équivalentes. Par conséquent, on montrera simplement (4.5.16). Soit $\tau = t/n$ et $F^*(\tau) = e^{-\tau A} e^{-\tau B^*}$. On utilise encore l'identité

$$F^*(\tau)^n - e^{-n\tau H^*} = \sum_{m=0}^{n-1} F^*(\tau)^{(n-m-1)} \left(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*}\right) e^{-m\tau H^*}. \tag{4.5.17}$$

D'après le lemme 4.8 appliqué à $F^*(\tau)$ avec B^* au lieu de B, on a (en effet B vérifie la condition (4.1.1) avec $a < 1$) :

$$\begin{aligned} &\|(I - F^*(\tau))^{-1} u\| \leq \\ &\quad \frac{1}{1-a} \|(I - e^{-\tau A})^{-1} u\| \leq \frac{1}{1-a} \left(\|u\| + \frac{1}{\tau} \left\|A^{-1} u\right\| \right). \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Comme $(H^*)^\alpha$ est inversible on ré-écrit (4.5.17) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|F^*(\tau)^n - e^{-n\tau H^*}\| \quad &\leq \|F^*(\tau)^{n-1}(I - F^*(\tau))\| \|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})\| + \\ \sum_{m=1}^{n-1} \|F^*(\tau)^{n-m-1}(I - F^*(\tau))\| & \\ &\|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha}\| \; \|(H^*)^\alpha e^{-m\tau H^*}\|. \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.6, on a (en prenant les adjoints)

$$\|F^*(\tau)^s (I - F^*(\tau))\| \leq \frac{c}{s+1}, \quad c > 0 \text{ et } s = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5.19}$$

Par (4.5.18) on obtient

$$\begin{aligned} &\|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})\| \\ &\leq \frac{1}{1-a} \left\{ \|F^*(\tau) - e^{-\tau H^*}\| + \frac{1}{\tau} \left\|A^{-1}\left(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*}\right)\right\| \right\} \end{aligned} \tag{4.5.20}$$

et

$$\begin{aligned} & \|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha}\| \\ \leq \; & \frac{1}{1-a}\left\{\|(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha}\| + \frac{1}{\tau}\|A^{-1}\left(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*}\right)(H^*)^{-\alpha}\|\right\}. \end{aligned} \tag{4.5.21}$$

D'où en utilisant les lemmes 3.4, 4.13 et 4.15 on trouve les estimations

$$\|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})\| \;\leq\; \frac{1}{1-a}(2 + 2(1+a)), \tag{4.5.22}$$

$$\|(I - F^*(\tau))^{-1}(F^*(\tau) - e^{-\tau H^*})(H^*)^{-\alpha}\| \;\leq\; \frac{\tau^\alpha}{1-a}(N_1(\alpha) + N_2(\alpha)) \tag{4.5.23}$$

pour $\tau > 0$. D'après la proposition 1.18 on a

$$\|(H^*)^\alpha e^{-m\tau H^*}\| \leq \frac{M_\alpha(H^*)}{(m\tau)^\alpha}. \tag{4.5.24}$$

Puis en utilisant (4.5.19) et les inégalités (4.5.19) - (4.5.24) on trouve

$$\begin{aligned} & \|F^*(\tau)^n - e^{-n\tau H^*}\| \\ \leq \; & \frac{c}{n(1-a)}(2 + 2(1+a)) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{c}{n-m}\frac{1}{1-a}(N_1(\alpha) + N_2(\alpha))\frac{M_\alpha(H^*)}{m^\alpha}, \end{aligned} \tag{4.5.25}$$

pour $n = 3, 4, \ldots$ Comme pour $0 < \alpha < 1$ et $n \geq 3$ on a

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{(n-m)m^\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1} m^{1-\alpha}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right) \leq \frac{2\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.5.26}$$

l'estimation (4.5.25) conduit à (4.5.16) avec

$$L_\alpha := \frac{2c}{1-a}\left\{(2+a) + (N_1(\alpha) + N_2(\alpha))M_\alpha(H^*)\right\}$$

pour le nombre $\alpha \in]0, 1]$ de la condition (C2) et $\tau \geq 0$.

□

Corollaire 4.17 *Soient $A = A^* \geq I$ et B un opérateur m-accrétif, satisfaisant la condition (4.1.1) avec $a < 1$. Si l'opérateur H, somme algébrique $A + B$, satisfait la condition intermédiaire (C2) pour un $\alpha \in]0, 1]$, alors on a les estimations suivantes*

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \;\leq\; L'_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.5.27}$$

$$\left\|\left(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \;\leq\; L''_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \tag{4.5.28}$$

pour $n \geq 3$ uniformément en $t \geq 0$.

Démonstration

Soit $T(\tau) = e^{-\tau A}e^{-\tau B}$ $(\tau = t/n)$. On utilise l'identité

$$T(\tau)^n - e^{-tH} = \\ e^{-\tau A}(F(\tau)^{n-1} - e^{-tH})e^{-\tau B} + (e^{-\tau A} - I)e^{-tH}e^{-\tau B} + (e^{-tH}H^{\alpha})(H^{-\alpha}(e^{-\tau B} - I)).$$

Comme $F(\tau)^{n-1} - e^{-tH} = F(\tau)^{n-1}(I - F(\tau)) + (F(\tau)^n - e^{-tH})$, d'après le théorème 4.6 et (4.5.15) on a l'estimation

$$\|e^{-\tau A}(F(\tau)^{n-1} - e^{-tH})e^{-\tau B}\| \leq \|F(\tau)^{n-1} - e^{-tH}\| \leq \frac{c}{n} + L_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}, \quad n \geq 3. \quad (4.5.29)$$

Pour les deux autres termes, on trouve avec les mêmes méthodes que pour les lemmes 4.13 et 4.15 :

$$\left\|(e^{-\tau A} - I)e^{-tH}e^{-\tau B}\right\| \leq \|(e^{-\tau A} - I)A^{-1}\|\|AH^{-1}\|\|He^{-tH}\| \leq \frac{1}{n}\frac{M_1(H)}{1-a}, \quad n \geq 1, \quad (4.5.30)$$

et pour un $\delta > 0$ quelconque,

$$\|H^\alpha e^{-tH}H^{-\alpha}(e^{-\tau B} - I)\| \leq \quad (4.5.31)$$
$$\|H^\alpha e^{-tH}\|\|(e^{-\tau B^*} - I)(\delta + B^*)^{-\alpha}\|\|(\delta + B^*)^\alpha (H^*)^{-\alpha}\|$$
$$\leq \frac{M_\alpha(H)}{n^\alpha} N_1(\alpha)\|(B^*)^\alpha (H^*)^{-\alpha}\|.$$

Donc, les estimations (4.5.29)-(4.5.31) donnent le premier résultat annoncé (4.5.27) avec

$$L'_\alpha = L_\alpha + c + \frac{M_1(H)}{1-a} + M_\alpha(H)N_1(\alpha)\|(B^*)^\alpha (H^*)^{-\alpha}\|$$

pour le nombre $\alpha \in]0,1]$ de la condition (C2) et $\tau \geq 0$. La preuve du second résultat est complètement analogue.

□

4.6 Condition suffisante pour (C2)

La condition (C2) n'est probablement pas toujours bien adaptée pour les applications, elle paraît difficile à vérifier sous sa forme d'inclusion de domaines de puissances fractionnaires. Cependant, on va montrer dans cette section que pour $\alpha \in]0, 1/2[$, (C2) n'ajoute rien aux conditions initiales énoncées au début de ce chapitre. Pour $\alpha = 1/2$, on donnera une condition suffisante pour que (C2) soit vérifiée, en utilisant la condition de Miyazaki.

4.6.1 Cas $0 < \alpha < 1/2$

On rappelle les hypothèses de départ de ce chapitre : A est un opérateur auto-adjoint positif dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ ($A \geq I$) et B est un opérateur m-accrétif. De plus, B est relativement borné par rapport à A : $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ et on a (4.1.1) avec $a < 1$. Ainsi la somme algébrique $H = A + B$ est bien définie sur $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$.

(i) D'après la proposition 1.28, $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ implique que $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B^\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0,1]$, en effet A et B sont m-accrétifs. Or H est aussi m-accrétif (cf théorème 4.1) et $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$, donc on en déduit que $\mathrm{dom}(H^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$ pour $\alpha \in]0,1]$.

(ii) D'autre part, d'après la proposition 1.26 pour les opérateurs m-accrétifs B et H, on a $\mathrm{dom}(B^\alpha) = \mathrm{dom}((B^*)^\alpha)$ et $\mathrm{dom}(H^\alpha) = \mathrm{dom}((H^*)^\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0,1/2[$.

(iii) En rassemblant les arguments (i) et (ii) on trouve : $\mathrm{dom}((H^*)^\alpha) = \mathrm{dom}(H^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha) \cap \mathrm{dom}(B^\alpha) = \mathrm{dom}(A^\alpha) \cap \mathrm{dom}((B^*)^\alpha)$ pour $0 \leq \alpha < 1/2$. Donc la condition intermédiaire (C2) est vérifiée dès que $0 \leq \alpha < 1/2$.

Finalement, d'après le théorème 4.16, on a montré le résultat suivant :

Théorème 4.18 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif. Si la condition (4.1.1) est satisfaite avec $a < 1$, alors il existe des constantes L_α , $L_\alpha{}'$ pour tout $\alpha \in]0,1/2[$ telles que*

$$\left\| \left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq L_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.6.1}$$

$$\left\| \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq L_\alpha^{'} \frac{\ln n}{n^\alpha}, \tag{4.6.2}$$

pour $n = 3, 4, \ldots$, uniformément en $t \geq 0$.

Donc la condition (4.1.1) avec $a < 1$ est suffisante pour avoir la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur, même s'il peut arriver que $\mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B^*) = \{0\}$.

4.6.2 Condition de Miyazaki

À présent on va donner une condition suffisante pour (C2) lorsque $\alpha = 1/2$. Pour cela, on utilise des résultats sur les domaines des racines carrées d'opérateurs m-sectoriels dus à Miyazaki [41]. En plus des hypothèses de départ de ce chapitre, on supposera que B est m-sectoriel de demi-angle $\theta_B \in]0, \pi/2[$, i.e. son image numérique est incluse dans le secteur $S_{\theta_B} = \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_B\}$. La forme quadratique fermée associée à B est notée b, et sa partie réelle b_R. Ainsi on a

$$\mathrm{dom}(B) \subseteq \mathrm{dom}(b) = \mathrm{dom}(b_R). \tag{4.6.3}$$

On suppose de plus que la forme symétrique fermée b_R est bornée inférieurement par 1. Par le théorème de représentation, il existe un opérateur auto-adjoint positif $B_R \geq I$, appelé partie réelle de B, tel que

$$b_R[f,g] = (B_R^{1/2}f, B_R^{1/2}g), \quad f,g \in \mathrm{dom}(B_R^{1/2}) = \mathrm{dom}(b_R). \tag{4.6.4}$$

De la même manière, on note la partie imaginaire b_I. Comme B est m-sectoriel, la forme associée b est aussi sectorielle. On a alors l'inégalité (1.38) avec $C = \tan\theta_B$:

$$|b_I[f,g]| \leq C b_R[f,f]^{1/2} b_R[g,g]^{1/2}, \quad f,g \in \mathrm{dom}(b) = \mathrm{dom}(b_R), \tag{4.6.5}$$

ou encore

$$|b_I[f,g]| \leq C\|B_R^{1/2}f\|\|B_R^{1/2}g\|, \quad f,g \in \mathrm{dom}(b_I) = \mathrm{dom}(b_R) = \mathrm{dom}(B_R^{1/2}). \tag{4.6.6}$$

Suivant Miyazaki [41], on suppose qu'il existe une constante M_β telle que l'on ait

$$|b_I[f,g]| \leq M_\beta\|B_R^{\beta/2}f\|\|B_R^{\beta/2}g\|, \quad f,g \in \mathrm{dom}(B_R^{1/2}). \tag{4.6.7}$$

pour un $\beta \in]0,1[$. Comme $B_R \geq I$, on a

$$\|B_R^{\beta/2}f\| \leq \|B_R^{1/2}f\|, \quad f \in \mathrm{dom}(B_R^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(B_R^{\beta/2}), \tag{4.6.8}$$

ce qui montre que la condition de Miyazaki (4.6.7) est plus forte que (4.6.6).

Soit a la forme quadratique associée à l'opérateur auto-adjoint positif A, qui est donc symétrique, positive et fermée :

$$a[f,g] = (A^{1/2}f, A^{1/2}g), \quad \mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(A^{1/2}). \tag{4.6.9}$$

D'après la condition (4.1.1) l'intersection

$$\mathcal{D} = \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b) \tag{4.6.10}$$

est dense dans $\mathfrak{H}$. Alors la somme des formes sectorielles fermées

$$h[f,g] = a[f,g] + b[f,g], \quad f,g \in \mathrm{dom}(h) = \mathcal{D} \tag{4.6.11}$$

est bien définie sur $\mathcal{D}$, et est encore sectorielle et fermée d'après [32, théorème VI-1.31]. D'où d'après le théorème de représentation, il existe un opérateur m-sectoriel $A \dot{+} B$ (la *somme au sens des formes* de A et B). D'après le théorème 4.1 cet opérateur coïncide avec H défini comme la *somme algébrique* $A + B$ sur $\mathrm{dom}(A)$.

Théorème 4.19 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-sectoriel (avec $\mathrm{Re}\, B \geq I$) satisfaisant la condition (4.1.1) avec $a < 1$. Si de plus l'opérateur B vérifie la condition de Miyazaki (4.6.7), alors il existe des constantes $L_{\alpha=1/2}$ et $L'_{\alpha=1/2}$ telles que*

$$\left\|\left(e^{-tB/n}e^{-tA/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L_{1/2}\frac{\ln n}{n^{1/2}}, \tag{4.6.12}$$

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L'_{1/2}\frac{\ln n}{n^{1/2}}, \tag{4.6.13}$$

pour $n = 3, 4, \ldots$, uniformément en $t \geq 0$.

Démonstration

Comme $\operatorname{Re} B \geq I$,

$$(\operatorname{Re} b)[f, f] = \|B_R^{1/2} f\|^2 \geq \|f\|^2 \quad f \in \operatorname{dom}(B_R^{1/2}), \tag{4.6.14}$$

la forme b *fortement coercive* au sens de [41]. D'où la condition (4.6.7) et le théorème 2 de [41] donnent :

$$\operatorname{dom}(B^{1/2}) = \operatorname{dom}((B^*)^{1/2}) = \operatorname{dom}(B_R^{1/2}) = \operatorname{dom}(b). \tag{4.6.15}$$

D'autre part, la partie réelle h_R de h (4.6.11) est donnée par

$$h_R[f, g] = a[f, g] + b_R[f, g], \quad f, g \in \operatorname{dom}(h_R) = \operatorname{dom}(h). \tag{4.6.16}$$

L'opérateur auto-adjoint correspondant est noté H_R. De la même manière que pour la forme b, la forme h est *fortement coercive*. De plus (4.6.16) on a $B_R \leq H_R$. D'où d'après l'inégalité de Heinz (proposition 1.27) on trouve

$$B_R^\beta \leq H_R^\beta, \quad \beta \in]0, 1[. \tag{4.6.17}$$

Grâce à (4.6.11), (4.6.7), et (4.6.17) on a pour la partie imaginaire de h la condition de Miyazaki :

$$|h_I[f, g]| \leq M_\beta \|H_R^{\beta/2} f\| \|H_R^{\beta/2} g\|, \quad f, g \in \operatorname{dom}(b_I), \quad \beta \in]0, 1[, \tag{4.6.18}$$

D'où à nouveau par le théorème 2 de [41] on obtient

$$\operatorname{dom}(H^{1/2}) = \operatorname{dom}((H^*)^{1/2}) = \operatorname{dom}(H_R^{1/2}) = \operatorname{dom}(h). \tag{4.6.19}$$

D'après (4.6.10), (4.6.11) et [32, théorème VI-1.31] on a

$$\operatorname{dom}(h) = \operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b), \tag{4.6.20}$$

ce qui conduit, avec (4.6.15), à

$$\operatorname{dom}((H^*)^{1/2}) = \operatorname{dom}(A^{1/2}) \cap \operatorname{dom}((B^*)^{1/2}). \tag{4.6.21}$$

Donc, la condition (C2) est satisfaite pour $\alpha = 1/2$. Grâce au théorème 4.16 et au Corollaire 4.17 on trouve les estimations annoncées avec $\alpha = 1/2$.

□

4.7 Cas $\alpha = 1/2$

Dans cette section, on va montrer comment obtenir la convergence en $O(\ln n/\sqrt{n})$ pour la formule de Trotter sans passer par la condition (C2), mais en ajoutant une autre condition (C3) aux hypothèses de départ. Il s'agit d'une autre méthode qui utilise notamment l'inégalité de Heinz-Kato [37], rappelée dans la proposition 1.28, et les propriétés des opérateurs m-sectoriels.

Plus précisément, on considère deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif, et on demande en plus que B soit sectoriel et que les formes sectorielles fermées associées soient telles que :

$$\text{(C3)} \qquad \mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(b). \tag{4.7.1}$$

Ainsi les conditions ne font plus appel à l'opérateur adjoint de B, mais seulement à sa forme quadratique associée.

On considère tout d'abord $\hat{F}(\tau) = e^{-\tau A/2} e^{-\tau B} e^{-\tau A/2}$ et $F(\tau) = e^{-\tau B} e^{-\tau A}$, pour $\tau \geq 0$. On a alors

$$\hat{F}(\tau)^n = e^{-\tau A/2} F(\tau)^{n-1} e^{-\tau B} e^{-\tau A/2}. \tag{4.7.2}$$

Plusieurs lemmes préliminaires sont nécessaires.

Lemme 4.20 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif. Si la condition (4.1.1) est satisfaite avec $a < 1$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour $n \geq 1$,*

$$\left\| \hat{F}(\tau)^n \left(I - \hat{F}(\tau) \right) \right\| \leq \frac{c}{n}, \quad \tau > 0. \tag{4.7.3}$$

Démonstration

Par la définition (4.7.2) on a

$$\begin{aligned} \hat{F}(\tau)^n \left(I - \hat{F}(\tau) \right) &= e^{-\tau A/2} F(\tau)^{n-1} e^{-\tau B} e^{-\tau A/2} \left(I - \hat{F}(\tau) \right) \\ &= e^{-\tau A/2} F(\tau)^{n-1} \left(I - F(\tau) \right) e^{-\tau B} e^{-\tau A/2}, \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

ce qui donne l'estimation

$$\left\| \hat{F}(\tau)^n \left(I - \hat{F}(\tau) \right) \right\| \leq \left\| F(\tau)^{n-1} \left(I - F(\tau) \right) \right\|. \tag{4.7.5}$$

donc par le théorème 4.6, on trouve (4.7.3). □

Lemme 4.21 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-accrétif. Si la condition (4.1.1) est satisfaite avec $a < 1$, alors $(I - \hat{F}(\tau))$ est inversible pour tout $\tau > 0$. De plus, il existe une constante $c_{1/2} > 0$ telle que pour tout $\tau > 0$ on ait*

$$\left\| (I - \hat{F}(\tau))^{-1/2} h \right\| \leq c_{1/2} \left\{ \|h\| + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|A^{-1/2} h\| \right\}, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4.7.6}$$

Démonstration

On utilise la représentation

$$I - \hat{F}(\tau) = I - e^{-\tau A} + e^{-\tau A/2} (I - e^{-\tau B}) e^{-\tau A/2}. \tag{4.7.7}$$

En posant

$$Y(\tau) = e^{-\tau A/2} (I - e^{-\tau B}) e^{-\tau A/2} (I - e^{-\tau A})^{-1}, \tag{4.7.8}$$

on obtient

$$I - \hat{F}(\tau) = (I + Y(\tau))(I - e^{-\tau A}). \tag{4.7.9}$$

Comme

$$\|\tau A e^{-\tau A/2}(I - e^{-\tau A})^{-1}\| \leq 1, \quad \tau \geq 0, \tag{4.7.10}$$

et

$$\|(I - e^{-\tau B})(\tau A)^{-1}\| \leq a \tag{4.7.11}$$

on a $\|Y(\tau)\| \leq a < 1$. Donc, l'opérateur $I + Y(\tau)$ est inversible. Or pour $\tau > 0$ l'opérateur $(I - e^{-\tau A})$ est aussi inversible, donc $(I - \hat{F}(\tau))$ l'est également, cf (4.7.9).

Par (4.7.9) on a la représentation

$$\left(I - \hat{F}(\tau)\right)^{-1}(I + Y(\tau)) = (I - e^{-\tau A})^{-1}. \tag{4.7.12}$$

Comme $\|\hat{F}(\tau)\| \leq 1$, les opérateurs bornés $I - \hat{F}(\tau)$ et $(I - \hat{F}(\tau))^{-1}$ sont accrétifs. On peut donc appliquer la proposition 1.28 à $\|(I - \hat{F}(\tau))^{1/2}(I - e^{-\tau A})^{-1/2}\|$ et $T = I$ pour obtenir l'estimation

$$\left\|(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2}(I + Y(\tau))f\right\| \leq e^{\pi^2/8}\|I + Y(\tau)\|^{1/2}\|(I - e^{-\tau A})^{-1/2}f\|, \quad f \in \mathfrak{H}. \tag{4.7.13}$$

Comme $\|Y(\tau)\| \leq a < 1$, on a

$$\left\|(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2}h\right\| \leq e^{\pi^2/8}\sqrt{1+a}\,\|(I - e^{-\tau A})^{-1/2}(I + Y(\tau))^{-1}h\|, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4.7.14}$$

De plus,

$$(I + Y(\tau))(I - e^{-\tau A})^{1/2} = (I - e^{-\tau A})^{1/2}(I + Z(\tau)), \tag{4.7.15}$$

où $Z(\tau)$ est l'opérateur borné

$$Z(\tau) = \frac{e^{-\tau A/2}}{(I - e^{-\tau A})^{1/2}}(I - e^{-\tau B})\frac{e^{-\tau A/2}}{(I - e^{-\tau A})^{1/2}}. \tag{4.7.16}$$

Les conditions sur B impliquent que l'opérateur $Z(\tau)$ est m-accrétif, d'où $\|(I + Z(\tau))^{-1}\| \leq 1$. Alors par (4.7.14), (4.7.15), et la représentation spectrale pour l'opérateur $(I - e^{-\tau A/2})^{-1/2}$ on trouve l'inégalité

$$\begin{aligned} \left\|(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2}h\right\| &\leq e^{\pi^2/8}\sqrt{1+a}\,\|(I - e^{-\tau A/2})^{-1/2}h\| \\ &\leq e^{\pi^2/8}\sqrt{1+a}\left(\|h\| + \sqrt{\frac{2}{\tau}}\|A^{-1/2}h\|\right). \end{aligned} \tag{4.7.17}$$

En posant $c_{1/2} = \sqrt{2}e^{\pi^2/8}\sqrt{1+a}$, on obtient l'estimation cherchée (4.7.6).

□

Lemme 4.22 *Pour tout opérateur m-sectoriel C dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de partie réelle C_R, on a l'estimation suivante :*

$$\left\| C_R^{1/2} e^{-tC} \right\| \leq \sqrt{\frac{M_1(C)}{t}}, \quad t > 0. \tag{4.7.18}$$

Démonstration

Remarquons d'abord que

$$\frac{d}{dt} \|e^{-tC}u\|^2 = -2\mathrm{Re}\,(e^{-tC}u, Ce^{-tC}u) = -2\|C_R^{1/2}e^{-tC}u\|^2 \leq 0, \quad h \in \mathfrak{H}. \tag{4.7.19}$$

Ensuite, comme $0 \leq \|e^{-tC}u\| - \|e^{-(t+h)C}u\| \leq \|e^{-tC}u - e^{-(t+h)C}u\|$ for $t, h > 0$, on obtient (cf.(1.24) :

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\|e^{-tC}u\| = \lim_{h \to 0} h^{-1}(\|e^{-tC}u\| - \|e^{-(t+h)C}u\|) \leq \\ \lim_{h \to 0} h^{-1}\|e^{-tC}u - e^{-(t+h)C}u\| \leq \left\| \frac{d}{dt} e^{-tC} u \right\| \leq \|Ce^{-tC}u\| \leq \frac{M_1(C)}{t}\|u\|. \end{aligned} \tag{4.7.20}$$

Par (4.7.19) et (4.7.20) on trouve

$$2\|C_R^{1/2}e^{-tC}u\|^2 = -2\|e^{-tC}u\| \frac{d}{dt}\|e^{-tC}u\| \leq 2\frac{M_1(C)}{t}\|u\|^2, \tag{4.7.21}$$

ce qui conduit à l'estimation (4.7.18). □

Lemme 4.23 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ auto-adjoint et B m-sectoriel de demi-angle $\theta_B \in [0, \pi/2[$. Si $\mathrm{dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(b)$, alors on a*

$$\left\| A^{-1/2}(I - e^{-\tau B}) \right\| \leq (1 + \tan\theta_B)\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\| 2\tau^{1/2} M_1(B)^{1/2}, \quad \tau \geq 0. \tag{4.7.22}$$

Démonstration

Pour tous $f, g \in \mathfrak{H}$ on a

$$\left(A^{-1/2}(I - e^{-\tau B})f, g\right) = \int_0^\tau ds \left(Be^{-sB}f, A^{-1/2}g\right).$$

D'où on trouve

$$\left(A^{-1/2}(I - e^{-\tau B})f, g\right) = \int_0^\tau ds\ b\left[e^{-sB}f, A^{-1/2}g\right], \tag{4.7.23}$$

où $b[\cdot, \cdot]$ est la forme sectorielle fermée correspondant à B. Par l'inégalité (1.38) on a :

$$|b[u, v]| \leq (1 + \tan\theta_B) b_R[u]^{1/2} b_R[v]^{1/2} = (1 + \tan\theta_B)\|B_R^{1/2}u\|\|B_R^{1/2}v\|. \tag{4.7.24}$$

Donc, pour l'intégrand dans (4.7.23) on obtient

$$|b[e^{-sB}f, A^{-1/2}g]| \leq (1+\tan\theta_B)\|B_R^{1/2}e^{-sB}f\|\|B_R^{1/2}A^{-1/2}g\|.$$

Ce qui, avec l'inégalité (4.7.18) donne :

$$\begin{aligned} |\left(A^{-1/2}(I-e^{-\tau B})f,g\right)| &\leq (1+\tan\theta_B)\|B_R^{1/2}A^{-1/2}g\|\int_0^\tau ds\sqrt{\frac{M_1(B)}{s}}\|f\| \\ &\leq (1+\tan\theta_B)\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|2M_1(B)^{1/2}\tau^{1/2}\|f\|\|g\|, \end{aligned}$$

on a donc l'estimation recherchée (4.7.22). On a utilisé le fait que $\mathrm{dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(b) = \mathrm{dom}(B_R^{1/2})$, cf.(4.7.1), et donc $\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\| < \infty$. $\square$

Lemme 4.24 *Soient deux opérateurs $A \geq I$ et B m-sectoriel satisfaisant la condition (4.1.1) avec $a < 1$. Si de plus on a $\mathrm{dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(b)$, alors il existe des constantes $M_{1/2}, M'_{1/2} > 0$ telles que*

$$\left\|A^{-1/2}\left(\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}\right)\right\| \leq M_{1/2}\tau^{1/2} \tag{4.7.25}$$

et

$$\left\|A^{-1/2}\left(\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}\right)H^{-1}\right\| \leq M'_{1/2}\tau^{3/2} \tag{4.7.26}$$

pour tout $\tau \geq 0$.

Démonstration

Pour montrer (4.7.25) on utilise la représentation

$$\begin{aligned} &A^{-1/2}(e^{-\tau A/2}e^{-\tau B}e^{-\tau A/2} - e^{-\tau H}) = \\ &\quad -e^{-\tau A/2}A^{-1/2}(I-e^{-\tau B})e^{-\tau A} - A^{-1/2}(I-e^{-\tau A}) + A^{-1/2}(I-e^{-\tau H}). \end{aligned}$$

Par la représentation spectrale on estime directement $\|A^{-1/2}(I-e^{-\tau A})\| \leq (2\tau/e)^{1/2}$. Grâce au lemme 4.23 pour $A^{-1/2}(I-e^{-\tau B})$ et $A^{-1/2}(I-e^{-\tau H})$, on obtient (4.7.25) avec

$$M_{1/2} = (2/e)^{1/2} + 2(1+\tan\theta_B)(\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|M_1(B)^{1/2} + \|H_R^{1/2}A^{-1/2}\|M_1(H)^{1/2}).$$

Pour montrer (4.7.26) on utilise la représentation

$$\begin{aligned} A^{-1/2}(\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H})H^{-1} &= A^{-1/2}(I-e^{-\tau A/2})(I-e^{-\tau B})e^{-\tau A/2}H^{-1} && (4.7.27)\\ &\quad + A^{-1/2}(I-e^{-\tau B})(I-e^{-\tau A/2})H^{-1} && (4.7.28)\\ &\quad + A^{-1/2}(e^{-\tau A} + e^{-\tau B} - e^{-\tau H} - I)H^{-1}. && (4.7.29) \end{aligned}$$

Puisque par la représentation spectrale : $\|A^{-1/2}(I-e^{-\tau A/2})\| \leq (\tau/e)^{1/2}$ et $\|(I - e^{-\tau B})A^{-1}\| \leq \tau\|BA^{-1}\|$, on trouve pour le terme (4.7.27) l'estimation :

$$\|A^{-1/2}(I-e^{-\tau A/2})(I-e^{-\tau B})e^{-\tau A/2}H^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\|BA^{-1}\|\|AH^{-1}\|\tau^{3/2}. \tag{4.7.30}$$

Pour le second terme (4.7.28) on a par le lemme 4.23

$$\begin{aligned}&\|A^{-1/2}(I-e^{-\tau B})(I-e^{-\tau A/2})A^{-1}AH^{-1}\| \leq \\ &\quad (1+\tan\theta_B)d_1(B)^{1/2}\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|\tau^{3/2}\|AH^{-1}\|. \end{aligned} \tag{4.7.31}$$

Grâce à (4.5.11) et (4.5.12), on obtient pour le troisième terme (4.7.29) la représentation :

$$\begin{aligned}&A^{-1/2}(e^{-\tau A}+e^{-\tau B}-e^{-\tau H}-I)H^{-1} = \\ &\quad \int_0^\tau A^{-1/2}(I-e^{-sA})AH^{-1}\,ds + \int_0^\tau A^{-1/2}(I-e^{-sB})BA^{-1}AH^{-1}\,ds + \\ &\quad \int_0^\tau A^{-1/2}(e^{-sH}-I)\,ds.\end{aligned}$$

Comme $\|A^{-1/2}(I-e^{-sA})\| \leq (2s/e)^{1/2}$, et en appliquant le lemme 4.23 à $A^{-1/2}(I-e^{-sB})$ et à $A^{-1/2}(e^{-sH}-I)$, on trouve pour le dernier terme (4.7.29) :

$$\begin{aligned}&\|A^{-1/2}(e^{-\tau A}+e^{-\tau B}-e^{-\tau H}-I)H^{-1}\| \\ &\leq \frac{2}{3}\tau^{3/2}\sqrt{\frac{2}{e}}\|AH^{-1}\| + 2(1+\tan\theta_B)\Big(M_1(B)^{1/2}\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|\|BA^{-1}\|\|AH^{-1}\| \\ &\quad +M_1(H)^{1/2}\|H_R^{1/2}A^{-1/2}\|\Big)\tau^{3/2}.\end{aligned} \tag{4.7.32}$$

Ce qui conduit avec (4.1.1) à l'estimation de (4.7.32) :

$$\begin{aligned}&\|A^{-1/2}(e^{-\tau A}+e^{-\tau B}-e^{-\tau H}-I)H^{-1}\| \leq \frac{2^{3/2}\tau^{3/2}}{3\sqrt{e}(1-a)} \\ &\quad +2(1+\tan\theta_B)\left(M_1(B)^{1/2}\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|\frac{a}{1-a} + M_1(H)^{1/2}\|H_R^{1/2}A^{-1/2}\|\right)\tau^{3/2}.\end{aligned} \tag{4.7.33}$$

En appliquant la condition (4.1.1) à (4.7.30), (4.7.31) on obtient des estimations semblables, qui, avec (4.7.33), terminent la preuve de (4.7.26), si on pose

$$\begin{aligned}M'_{1/2} &:= \frac{a}{\sqrt{e}(1-a)} + \frac{1+\tan\theta_B}{1-a}\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|M_1(B)^{1/2} + \frac{2^{3/2}}{3\sqrt{e}(1-a)} \\ &\quad +2(1+\tan\theta_B)\left(M_1(B)^{1/2}\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|\frac{a}{1-a} + M_1(H)^{1/2}\|H_R^{1/2}A^{-1/2}\|\right).\end{aligned} \tag{4.7.34}$$

□

Théorème 4.25 *Soit $A \geq I$ un opérateur auto-adjoint. Soient B un opérateur m-sectoriel satisfaisant la condition (4.1.1) avec $a < 1$, et b la forme sectorielle fermée associée. Si de plus on a*

$$\mathrm{dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(b), \tag{4.7.35}$$

alors il existe une constante $\hat{L} > 0$ *telle que*

$$\left\| \left(e^{-tA/2n} e^{-tB/n} e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-tH} \right\| \leq \hat{L} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \tag{4.7.36}$$

uniformément en $t \in [0, \infty[$.

Démonstration

On part toujours de l'identité

$$\hat{F}(\tau)^n - e^{-\tau n H} = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{F}(\tau)^{n-m-1} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}) e^{-m\tau H}. \tag{4.7.37}$$

Comme l'opérateur $(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2}$ est borné (lemme 4.21), on obtient :

$$\hat{F}(\tau)^n - e^{-\tau n H} = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{F}(\tau)^{n-m-1} (I - \hat{F}(\tau))^{1/2} (I - \hat{F}(\tau))^{-1/2} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}) e^{-m\tau H}, \tag{4.7.38}$$

ce qui conduit à l'estimation

$$\begin{aligned} &\|\hat{F}(\tau)^n - e^{-\tau n H}\| \leq \\ &\sum_{m=0}^{n-1} \|\hat{F}(\tau)^{n-m-1} (I - \hat{F}(\tau))^{1/2}\| \|(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}) e^{-m\tau H}\|. \end{aligned} \tag{4.7.39}$$

Comme $\|\hat{F}(\tau)\| \leq 1$, l'opérateur $I - \hat{F}(\tau)$ est m-accrétif, et donc on peut utiliser la proposition 1.28 pour $A = I$, $T = \hat{F}(\tau)^{n-m-1}$ et $B = (I - \hat{F}(\tau))$. Avec le lemme 4.20 on arrive à :

$$\begin{aligned} \|\hat{F}(\tau)^{n-m-1} (I - \hat{F}(\tau))^{1/2}\| &\leq e^{\pi^2/8} \|\hat{F}(\tau)^{n-m-1}\|^{1/2} \|\hat{F}(\tau)^{n-m-1} (I - \hat{F}(\tau))\|^{1/2} \\ &\leq e^{\pi^2/8} \|\hat{F}(\tau)^{n-m-1} (I - \hat{F}(\tau))\|^{1/2} \leq e^{\pi^2/8} \sqrt{\frac{c}{n-m-1}}. \end{aligned} \tag{4.7.40}$$

Afin d'estimer le terme correspondant à $m = 0$ dans (4.7.37) et (4.7.39), on utilise encore la proposition 1.28 ainsi que les lemmes 4.21 et 4.24. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\|\hat{F}(\tau)^{n-1} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H})\| \\ \leq\ &\|\hat{F}(\tau)^{n-1} (I - \hat{F}(\tau))^{1/2}\| \|(I - \hat{F}(\tau))^{-1/2} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H})\| \\ \leq\ &e^{\pi^2/8} \sqrt{\frac{c}{n-1}} c_{1/2} \left(\|\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H}\| + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|A^{-1/2} (\hat{F}(\tau) - e^{-\tau H})\| \right) \\ \leq\ &e^{\pi^2/8} \sqrt{\frac{c}{n-1}} c_{1/2} (2 + M_{1/2}). \end{aligned} \tag{4.7.41}$$

Pour les termes avec $m > 0$ on utilise les lemmes 4.21 et 4.24 et on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} &\|(I-\hat{F}(\tau))^{-1/2}(\hat{F}(\tau)-e^{-\tau H})H^{-1}\| && (4.7.42)\\ \leq\ & c_{1/2}\left(\|(\hat{F}(\tau)-e^{-\tau H})H^{-1}\| + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\|A^{-1/2}(\hat{F}(\tau)-e^{-\tau H})H^{-1}\|\right)\\ \leq\ & c_{1/2}(M'\tau + M'_{1/2}\tau). \end{aligned}$$

Or $\|He^{-m\tau H}\| \leq M_1(H)/m\tau$, d'où on trouve avec (4.7.42), l'estimation suivante :

$$\|(I-\hat{F}(\tau))^{-1/2}(\hat{F}(\tau)-e^{-\tau H})e^{-m\tau H}\| \leq c_{1/2}M_1(H)(M'+M'_{1/2})/m. \quad (4.7.43)$$

Par (4.7.39)-(4.7.43) on obtient

$$\begin{aligned} &\|\hat{F}(\tau)^n - e^{-\tau n H}\| \leq && (4.7.44)\\ &e^{\pi^2/8}\sqrt{\frac{c}{n-1}}c_{1/2}(2+M_{1/2}) + \sum_{m=1}^{n-1} e^{\pi^2/8}\sqrt{\frac{c}{n-m-1}}c_{1/2}M_1(H)(M'+M'_{1/2})\frac{1}{m}\\ \leq\ & e^{\pi^2/8}\sqrt{\frac{c}{n-1}}c_{1/2}(2+M_{1/2}) + e^{\pi^2/8}\sqrt{c}c_{1/2}M_1(H)(M'+M'_{1/2})\frac{2\ln n}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé (4.5.26). Finalement, en posant

$$\hat{L} := e^{\pi^2/8}\sqrt{c}c_{1/2}\{2(2+M_{1/2}) + 4M_1(H)(M'+M'_{1/2})\}$$

on obtient (4.7.36).

□

Corollaire 4.26 *Soient $A \geq I$ un opérateur auto-adjoint et B un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Si A et B vérifient les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.25, alors il existe $L > 0$ et $\hat{L}' > 0$ telles que*

$$\left\|\left(e^{-tB/n}e^{-tA/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L\frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad (4.7.45)$$

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L'\frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \quad (4.7.46)$$

uniformément en $t \in [0, \infty[$.

Démonstration

On utilise l'identité (cf.(4.7.2)) :

$$\begin{aligned} F(\tau)^n - e^{-tH} &= e^{-\tau B}e^{-\tau A/2}(\hat{F}(\tau)^{n-1} - e^{-tH})e^{-\tau A/2} + && (4.7.47)\\ &+(e^{-\tau B}-I)e^{-\tau A/2}e^{-tH}e^{-\tau A/2} + && (4.7.48)\\ &+(e^{-\tau A/2}-I)e^{-tH}e^{-\tau A/2} + && (4.7.49)\\ &+e^{-tH}(e^{-\tau A/2}-I). && (4.7.50) \end{aligned}$$

Comme $\hat{F}(\tau)^{n-1} - e^{-tH} = \hat{F}(\tau)^{n-1}(I - \hat{F}(\tau)) + (\hat{F}(\tau)^n - e^{-tH})$, d'après les estimations (4.7.3) et (4.7.36) on obtient un majorant du premier terme (4.7.47). Pour le second terme (4.7.48) on a

$$\begin{aligned}
&\|(e^{-\tau B} - I)e^{-\tau A/2}e^{-tH}e^{-\tau A/2}\| \leq \qquad (4.7.51)\\
&\quad \|(e^{-\tau B} - I)B^{-1}\|\|BA^{-1}\|\|e^{-\tau A/2}\|\|AH^{-1}\|\|He^{-tH}\| \leq \frac{\tau a}{1-a}\frac{M_1(H)}{t} \leq \frac{M_1(H)a}{n(1-a)}.
\end{aligned}$$

Pour le troisième terme (4.7.49) on trouve

$$\begin{aligned}
&\|(e^{-\tau A/2} - I)e^{-tH}e^{-\tau A/2}\| \leq \qquad (4.7.52)\\
&\quad \|(e^{-\tau A/2} - I)A^{-1}\|\|AH^{-1}\|\|He^{-tH}\| \leq \frac{\tau M_1(H)}{2(1-a)t} \leq \frac{M_1(H)}{2n(1-a)}.
\end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme (4.7.50) on insère $A^{1/2}A^{-1/2} = I$. Alors

$$\begin{aligned}
\|e^{-tH}A^{1/2}A^{-1/2}(e^{-\tau A/2} - I)\| &\leq \|e^{-tH}H_R^{1/2}\|\|H_R^{-1/2}A^{1/2}\|\|A^{-1/2}(e^{-\tau A/2} - I)\|\\
&\leq \|H_R e^{-tH^*}\|\|A^{1/2}H_R^{-1/2}\|\sqrt{\tau/e}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{e}}M_1(H^*)^{1/2}\|A^{1/2}H_R^{-1/2}\|n^{-1/2}, \qquad (4.7.53)
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation (4.7.18) et $\|A^{-1/2}(e^{-\tau A/2} - I)\| \leq (\tau/e)^{1/2}$ pour l'opérateur auto-adjoint $A \geq I$. Remarquons que $\|A^{1/2}H_R^{-1/2}\| < \infty$ car $\mathrm{dom}(A^{1/2}) = \mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(H_R^{1/2})$. En rassemblant les inégalités (4.7.47), (4.7.51), (4.7.52), et (4.7.53), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|F(\tau)^n - e^{-tH}\right\| \leq \qquad (4.7.54)\\
&\quad \frac{c}{n-1} + \hat{L}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{M_1(H)a}{n(1-a)} + \frac{M_1(H)}{2n(1-a)} + \frac{1}{\sqrt{e}}\|A^{1/2}H_R^{-1/2}\|\frac{M_1(H^*)^{1/2}}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

ce qui donne (4.7.45).

Afin d'obtenir (4.7.46) pour $T(\tau) = e^{-\tau A}e^{-\tau B}$, on utilise l'identité :

$$\begin{aligned}
T(\tau)^n - e^{-tH} &= e^{-\tau A/2}(\hat{F}(\tau)^{n-1} - e^{-tH})e^{-\tau A/2}e^{-\tau B} + \qquad (4.7.55)\\
&\quad + e^{-\tau A/2}e^{-tH}e^{-\tau A/2}(e^{-\tau B} - I) + \qquad (4.7.56)\\
&\quad + (e^{-\tau A/2} - I)e^{-tH}e^{-\tau A/2} + \qquad (4.7.57)\\
&\quad + e^{-tH}(e^{-\tau A/2} - I). \qquad (4.7.58)
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes (4.7.57), (4.7.58) sont identiques à (4.7.49), (4.7.50). Pour le premier terme on procède exactement comme pour (4.7.47). Pour le second terme

(4.7.56) on trouve l'estimation :

$$\begin{aligned}
\|e^{-\tau A/2}e^{-tH}e^{-\tau A/2}(e^{-\tau B}-I)\| &\leq \|e^{-tH}A^{1/2}\|\|A^{-1/2}(e^{-\tau B}-I)\| \\
&\leq \|A^{1/2}e^{-tH^*}\|\|A^{-1/2}(e^{-\tau B}-I)\| \\
&\leq \|A^{1/2}H_R^{-1/2}\|\frac{M_1(H^*)^{1/2}}{\sqrt{n}} \\
&\quad (1+\tan\theta_B)\|B_R^{1/2}A^{-1/2}\|2M_1(B)^{1/2},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 4.23, l'estimation de $\|e^{-tH}A^{1/2}\|$ comme en (4.7.53), et le fait que $\mathrm{dom}(A^{1/2}) = \mathrm{dom}(H_R^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(B_R^{1/2})$.

□

4.8 Conclusion

Les résultats de ce chapitre peuvent se résumer de la manière suivante : Soit $A = A^* \geq I$ un opérateur auto-adjoint positif dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit B un opérateur m-accrétif dans $\mathfrak{H}$. On suppose que $\mathrm{dom}(B) \supseteq \mathrm{dom}(A)$ et qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que

(C0) $$\|Bu\| \leq a\|Au\|, \; u \in \mathrm{dom}(A);$$

et on pose $H = A+B$ avec $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(A)$. Alors la formule de Trotter converge en norme d'opérateur (avec les différentes variantes), et on peut donner des estimations de la vitesse de convergence qui dépendent des relations entre les différents domaines. Les différents cas sont énumérés ci-dessous, avec des vitesses en $O(\ln n/n^\alpha)$, $\alpha \in]0,1]$.

1. Avec ces hypothèses, il existe des constantes L_α telles que

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L_\alpha\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right), \qquad n = 3,4,\ldots,$$

pour tout $\alpha \in]0,1/2[$.

2. Si B est m-sectoriel, de forme sectorielle fermée associée b vérifiant (C3) : $\mathrm{dom}(A^{1/2}) \subseteq \mathrm{dom}(b)$, alors

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq O\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right), \qquad n = 3,4,\ldots,$$

3. Si la condition (C2) est satisfaite : $\mathrm{dom}((H^*)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha) \cap \mathrm{dom}((B^*)^\alpha) \neq \{0\}$, pour un $\alpha \in [1/2,1]$, alors il existe une constante L_α telle que

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq L_\alpha\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right), \qquad n = 3,4,\ldots,$$

4. Si enfin on a la condition (C1) : $\mathrm{dom}(B^*) \supseteq \mathrm{dom}(A)$ et il existe $a_* \in]0,1[$ tel que
$$\|B^*u\| \leq a_*\|Au\|,\ u \in \mathrm{dom}(A);$$
alors
$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\| \leq O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right), \qquad n = 3, 4, \ldots,$$
ce cas est en fait déjà contenu dans le précédent.

Enfin, voici un problème qui pourrait donner une suite à ce chapitre. À partir de la proposition 2.10, du théorème 4.6 ainsi que des articles récents [30] et [31], on peut formuler la conjecture suivante : soit A un opérateur auto-adjoint tel que $A \geq I$, soit B un opérateur m-accrétif et soit $-H$ le générateur d'un semi-groupe holomorphe satisfaisant la condition
$$\mathrm{dom}(H^{\alpha'}) \subseteq \mathrm{dom}(A^{\alpha'}) \cap \mathrm{dom}(B^{\alpha'})$$
pour un $\alpha' \in]0,1]$ et la condition (C2) pour un $\alpha \in]0,1]$. Si on a $\alpha' + \alpha > 1$, alors l'estimation d'erreur en norme d'opérateur pour la formule de Trotter est en $O(1/n^{\alpha'+\alpha-1})$.

Remarquons que si B est auto-adjoint, alors on a $\alpha' = \alpha$. D'où $\alpha' + \alpha > 1$ devient $\alpha' = \alpha > 1/2$. Cette hypothèse apparaît dans [44]. Si $\alpha' = \alpha = 1$ et $B = B^*$, alors l'estimation d'erreur pour la formule de Trotter devrait être $O(1/n)$ au lieu de $O(\ln(n)/n)$ comme il est montré dans [43]. En effet, cette estimation optimale est annoncée dans [30] et [31]. Rappelons que dans [44] l'estimation optimale en $O(1/n^{2\alpha-1})$ est établie pour $\alpha' = \alpha \in]1/2, 1[$ et $B = B^*$.

Chapitre 5

Convergence sans estimation, cas non auto-adjoint

Dans les chapitres 3 et 4, on a présenté différents résultats sur la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter, qui ont en commun d'utiliser toujours la méthode de Lie au départ (2.2), et de donner des estimations d'erreur. D'autres méthodes ont aussi été développées, notamment dans [42, 45] pour des semi-groupes auto-adjoints. Dans le cas de [45] on n'obtient pas d'estimation d'erreur.

Dans ce chapitre, qui reprend les résultats de l'article [5], on montre comment passer de semi-groupes auto-adjoints à des semi-groupes holomorphes engendrés par des opérateurs sectoriels, et d'obtenir ainsi la convergence en norme d'opérateur dans des conditions plus générales, mais sans estimation d'erreur. Ici le semi-groupe obtenu en limite n'est pas nécessairement engendré par la somme algébrique des générateurs de départ, mais par la somme au sens des formes quadratiques. La méthode s'apparente à un prolongement analytique, aussi on commence par rappeler quelques résultats de la théorie des familles holomorphes d'opérateurs non bornés.

5.1 Familles holomorphes d'opérateurs fermés

Suivant [32, Ch. VII], on définit plusieurs types de familles holomorphes d'opérateurs fermés (non bornés). La difficulté vient du fait que l'ensemble des opérateurs fermés n'est pas un espace vectoriel. La définition la plus générale est la suivante (pour des opérateurs bornés, elle coïncide avec les énoncés de la proposition 1.10).

Définition 5.1 *Une famille d'opérateurs fermés $T(z)$ d'un espace de Banach $\mathfrak{X}$ vers un espace de Banach $\mathfrak{Y}$, définie au voisinage de $z = 0$ est dite holomorphe en $z = 0$ s'il existe un troisième espace de Banach $\mathfrak{Z}$ et deux familles d'opérateurs bornés $U(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X})$ et $V(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$, qui sont holomorphes en $z = 0$ (au sens de la proposition 1.10) et telles que $U(z)$ est une bijection de $\mathfrak{Z}$ sur* $\mathrm{dom}(T(z))$ *et*

$$T(z)U(z) = V(z)$$

Par ailleurs, on a la caractérisation suivante [32, Ch.VII, théorème 1.3]

Proposition 5.2 *Soit $T(z)$ une famille d'opérateurs fermés dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$, définie dans un voisinage de $z = 0$, et soit $\zeta \in \rho(T(0))$ un point de l'ensemble résolvant de $T(0)$. Alors $T(z)$ est holomorphe en $z = 0$ si et seulement si $\zeta \in \rho(T(z))$ et la résolvante $(T(z)-\zeta)^{-1}$ est une fonction holomorphe de z, pour $|z|$ assez petit. En fait la résolvante est une fonction holomorphe dans les deux variables sur l'ensemble des (ζ, z) tels que $\zeta \in \rho(T(0))$ et $|z|$ est assez petit (dépendant de ζ).*

Selon les cas, d'autres définitions sont plus utiles : citons d'abord les familles holomorphes de type (A) [32, Ch.VII.2], dont la définition est assez naturelle.

Définition 5.3 *Une famille d'opérateurs fermés $T(z)$ dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$, définie dans un ouvert $\Omega \in \mathbb{C}$ est dite holomorphe de type (A) si $\mathrm{dom}(T(z)) = \mathcal{D}$ ne dépend pas de z et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $T(z)x$ est une fonction holomorphe dans Ω (à valeurs dans $\mathfrak{X}$).*

On peut vérifier que tout famille holomorphe de type (A) est bien holomorphe au sens de la définition 5.1.

On utilisera dans ce chapitre une autre notion d'holomorphie dite de type (B) [32, Ch.VII.4]. Cette notion est liée aux formes sectorielles et à leur représentation en opérateurs dans un espace de Hilbert (cf proposition 1.23). On définit d'abord les familles de formes sesquilinéaires holomorphes de type (a), qui sont analogues aux familles d'opérateurs holomorphes de type (A).

Définition 5.4 *Une famille $t(z)$ de formes sesquilinéaires dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{C}$ est dite holomorphe de type (a) si : $t(z)$ est sectorielle fermée pour tout $z \in \Omega$, $\mathrm{dom}(t(z)) = \mathcal{D}$ est indépendant de z et pour tout $u \in \mathcal{D}$, $t(z)[u]$ est une fonction holomorphe de $z \in \Omega$.*

On a alors la propriété suivante [32, Ch.VII, théorème 4.2] :

Proposition 5.5 *Soit $t(z)$ une famille holomorphe de type (a). Pour tout $z \in \Omega$, notons $T(z)$ l'opérateur m-sectoriel associé à la forme $t(z)$. Alors $T(z)$ forme une famille holomorphe d'opérateurs fermés (au sens de la définition 5.1) et ces opérateurs sont localement uniformément sectoriels.*

Une famille d'opérateurs m-sectoriels $T(z)$ associés à une famille de formes $t(z)$ holomorphe de type (a) est appelée une famille holomorphe de type (B). On a encore la propriété suivante [32, Ch.VII, théorème 4.3] :

Proposition 5.6 *Soit $T(z)$ une famille holomorphe de type (B) pour $z \in \Omega$. Alors $T(z)$ a une résolvante compacte soit pour aucun $z \in \Omega$ soit pour tout $z \in \Omega$.*

5.2 Deux conditions suffisantes de convergence

Les deux théorèmes qui suivent généralisent les propositions 2.11 et 2.10 à deux opérateurs m-sectoriels A et B. Le premier utilise une hypothèse de compacité des résolvantes tandis que le second utilise une hypothèse de petitesse relative des puissances fractionnaires.

Étant donnés A et B deux opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on note a et b les formes sectorielles fermées associées, de demi-angles θ_A et θ_B.

Théorème 5.7 *Si A et B sont m-sectoriels et que $(I+A)^{-1}$ ou $(I+A)^{-1}(I+B)^{-1}$ est compact, alors la suite $\left\{\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ converge en norme d'opérateur vers $e^{-tH}P_0$ pour tout $t \in S_\theta$. L'opérateur $H = A\dot{+}B$ est la somme au sens des formes de A et B, P_0 est le projecteur orthogonal sur $\overline{\mathrm{dom}(a)\cap\mathrm{dom}(b)}$, et $\theta = \pi/2 - \max\{\theta_A, \theta_B\}$. La convergence est uniforme dans toute partie compacte du secteur ouvert S_θ.*

Pour généraliser la proposition 2.10 à des opérateurs m-sectoriels, la condition $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B^\alpha)$ doit être adaptée de manière assez particulière. Considérons la représentation $X = G(I+iC)G$ d'un opérateur m-sectoriel X, cf (1.40). De manière analogue à la partie réelle $\mathrm{Re}\,X = G^2$, on appelle partie imaginaire de X l'opérateur $\mathrm{Im}\,X = GCG$. Il n'est pas certain que $\mathrm{Im}\,X$ ait un domaine dense, mais si c'est le cas, $\mathrm{Im}\,X$ est symétrique. Ainsi on définit les conditions suivantes :

$$\begin{array}{rl}
(i) & \mathrm{Re}\,A, \mathrm{Re}\,B \geq \gamma > 0;\\
(ii) & \mathrm{dom}(\mathrm{Re}\,A) \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{Im}\,A);\\
(iii) & \mathrm{dom}(\mathrm{Re}\,B) \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{Im}\,B);\\
(iv) & \mathrm{dom}(\mathrm{Re}\,A)^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}((\mathrm{Re}\,B)^\alpha) \text{ pour un } \alpha \in]1/2, 1];\\
(v) & \|(\mathrm{Re}\,B)^\alpha u\| \leq c\|(\mathrm{Re}\,A)^\alpha u\|,\ u \in \mathrm{dom}((\mathrm{Re}\,A)^\alpha),\ 0 < c < 1,\\
 & \text{et pour les mêmes nombres } \alpha.
\end{array}$$

Théorème 5.8 *Soient A et B deux opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, satisfaisant les conditions (i)-(v). Alors pour tout complexe t dans le secteur ouvert S_θ, la suite $\left\{\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ converge en norme d'opérateur vers e^{-tH}, uniformément sur les parties compactes du secteur. L'opérateur $H = A\dot{+}B$ est la somme au sens des formes de A et B, et $\theta = \pi/2 - \max\{\theta_A, \theta_B\}$.*

Avant de présenter les démonstrations, voici quelques remarques sur les conditions (i)-(v). De la première (i) il découle que les opérateurs auto-adjoints $\mathrm{Re}\,A$ et $\mathrm{Re}\,B$ ont des inverses bornés. De la condition (iv) il découle que $\mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(b)$, d'où $\mathrm{dom}(a)\cap\mathrm{dom}(b)$ est dense dans $\mathfrak{H}$ et la somme au sens des formes $A\dot{+}B$ définie sur un domaine dense.

Afin de clarifier la condition (ii) voici une condition suffisante qui implique (ii). Considérons la représentation $A = G(I+iC)G$ de l'opérateur sectoriel A, cf (1.40), où $G = (\mathrm{Re}\,A)^{1/2}$ et C est un opérateur auto-adjoint de norme inférieure à $\tan\theta_A$ (voir [32, Ch.VI, théorème 3.2]). Si $C(\mathrm{dom}(G)\cap\mathrm{ran}(G)) \subseteq \mathrm{dom}(G)$, alors (ii) est vérifiée. Une condition analogue assure (iii).

5.3 Méthode de prolongement analytique

Considérons pour l'instant deux opérateurs m-sectoriels A et B quelconques dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soient a et b les formes sectorielles fermées associées. Suivant l'idée de Simon formulée dans l'addendum de [34], on définit deux familles de formes fermées :

$$\begin{aligned} a(z) &= \operatorname{Re} a + z \operatorname{Im} a, \ \operatorname{dom}(a(z)) = \operatorname{dom}(a); && (5.1) \\ b(z) &= \operatorname{Re} b + z \operatorname{Im} b, \ \operatorname{dom}(b(z)) = \operatorname{dom}(b); && (5.2) \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a alors le résultat suivant.

Lemme 5.9 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que les formes $a(z)$ et $b(z)$ soient sectorielles pour tout z dans la bande $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \epsilon\}$. Ces familles de formes sont de plus holomorphes de type (a) pour $z \in \mathbb{C}$.*

Démonstration

Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, et $u \in \operatorname{dom}(a)$. Comme a est sectorielle, on a :

$$|x \operatorname{Im} a[u]| \leq |x| \tan\theta_A \operatorname{Re} a[u]; \tag{5.3}$$

d'où la forme symétrique $\operatorname{Re} a(z) = \operatorname{Re} a + x \operatorname{Im} a$ est positive pour $|x| \tan\theta_A < 1$. De plus, pour de tels nombres x :

$$\operatorname{Re} a(z)[u] \geq \operatorname{Re} a[u] - |x \operatorname{Im} a[u]| \geq (1 - |x| \tan\theta_A) \operatorname{Re} a[u]. \tag{5.4}$$

D'après (5.3) et (5.4) on obtient :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} a(z)[u]| = |y \operatorname{Im} a[u]| &\leq |y| \tan\theta_A \operatorname{Re} a[u] \\ &\leq \frac{|y| \tan\theta_A}{1 - |x| \tan\theta_A} \operatorname{Re} a(z)[u], && (5.5) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $a(z)$ est sectorielle pour tout z dans la bande $|\operatorname{Re} z| < \cot\theta_A$. De la même manière, $b(z)$ est sectorielle pour $|\operatorname{Re} z| < \cot\theta_B$, et on peut poser $\epsilon = \min\{\cot\theta_A, \cot\theta_B\}$.

Par ailleurs, par (5.1) et (5.2) on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} a(z)[u] &= \operatorname{Im} a[u], \ u \in \operatorname{dom}(a), && (5.6) \\ \frac{d}{dz} b(z)[u] &= \operatorname{Im} b[u], \ u \in \operatorname{dom}(b), && (5.7) \end{aligned}$$

les formes $a(z)$, $b(z)$ sont donc des familles holomorphes de type (a) pour $z \in \mathbb{C}$. □

Corollaire 5.10 *Par le premier théorème de représentation 1.23, il existe des opérateurs m-sectoriels $A(z)$ et $B(z)$ associés aux formes sectorielles fermées $a(z)$ et $b(z)$ ($|\operatorname{Re} z| < \epsilon$), et ces opérateurs constituent des familles holomorphes de type (B). En particulier ils sont localement uniformément sectoriels (proposition 5.5).*

Or si A est un opérateur m-sectoriel de demi-angle θ_A, alors $-A$ engendre un semi-groupe holomorphe de contractions e^{-tA}, où t est un nombre complexe avec $|\arg t| < \pi/2 - \theta_A$, de plus on a le résultat suivant [32, Ch.IX, théorème 2.6 et la note] :

Proposition 5.11 *Soit $T(z)$ une famille holomorphe d'opérateurs fermés dans un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposons que pour chaque $z \in \Omega$ l'opérateur $-T(z)$ soit le générateur d'un semi-groupe holomorphe de demi-angle $\theta(z)$. Alors le semi-groupe $e^{-tT(z)}$ est un fonction holomorphe de $z \in \Omega$ pour t dans un secteur ouvert contenant $t > 0$.*

Démonstration

Le semi-groupe holomorphe $e^{-tT(z)}$ peut être défini par l'intégrale de Dunford-Taylor

$$e^{-tT(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t}(T(z) + \zeta)^{-1} d\zeta, \tag{5.8}$$

où Γ est un contour allant de $\infty e^{-i(\theta(z)+\pi/2-\delta)}$ vers $\infty e^{i(\theta(z)+\pi/2-\delta)}$ et entourant le spectre de $-T(z)$. Comme $T(z)$ est une famille holomorphe, $(T(z) + \zeta)^{-1}$ est holomorphe en z pour ζ dans l'ensemble résolvant de $-T(z)$. De plus, grâce à l'estimation de la dérivée :

$$\left\| \frac{d}{dz}(T(z) + \zeta)^{-1} \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_C (T(z') + \zeta)^{-1}(z' - z)^{-2} dz' \right\| \leq \frac{M_\delta}{|\zeta| r} \tag{5.9}$$

pour $|\arg \zeta| \leq \pi/2 + \theta(z) - \delta$, la représentation (5.8) peut être dérivée sous le signe d'intégration. Ici C est un petit cercle autour de z de rayon r, et

$$M_\delta = \sup_{\substack{|\arg \zeta| \leq \pi/2+\theta(z)-\delta \\ z' \in C}} \|\zeta(T(z') + \zeta)^{-1}\|.$$

Finalement, (5.8) et (5.9) impliquent le résultat cherché.

□

En appliquant ce résultat au cas présent, on trouve que les semi-groupes $e^{-tA(z)}$, $e^{-tB(z)}$ sont holomorphes en z pour $|\mathrm{Re}\, z| < \epsilon = \min\{\cot \theta_A, \cot \theta_B\}$, et pour z fixé, en t dans un secteur (dépendant de z) contenant $t > 0$. Pour $t \geq 0$, ces semi-groupes sont contractants.

Or pour les fonctions holomorphes à valeurs dans l'ensemble des opérateurs bornés il n'y a pas de différence entre l'analyticité dans la topologie faible, forte ou de la norme d'opérateur (voir proposition 1.10). Ainsi le théorème de Vitali [25, théorème 3.14.1] permettra de terminer la méthode d'extension proposée dans ce chapitre :

Proposition 5.12 *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Supposons que $\|f_n(z)\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \Omega$, et que la suite $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour z dans une* *partie de Ω ayant un point d'accumulation. Alors $f_n(z)$ converge pour tout $z \in \Omega$, uniformément sur les compacts de Ω, et la limite est une fonction holomorphe dans Ω.*

La méthode de généralisation des propositions 2.9, 2.10, et 2.11, consiste à appliquer la théorème de Vitali pour un $t > 0$ fixé à la famille de fonctions

$$f_n(z) = \left(e^{-tA(z)/n} e^{-tB(z)/n}\right)^n, \; n = 1, 2, \dots,$$

à valeurs dans l'espace de Banach des opérateurs bornés sur $\mathfrak{H}$. D'après de lemme 5.9, le corollaire 5.10, et la proposition 5.11, ces fonctions sont holomorphes dans $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \epsilon\}$, et $\|f_n(z)\| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. Il reste à montrer que, sous les conditions formulées dans le théorème 5.7 (ou respectivement 5.8), on peut appliquer la proposition 2.11 (ou respectivement 2.10) pour les opérateurs auto-adjoints $A(x)$ et $B(x)$ avec x réel assez petit en valeur absolue. D'où la convergence en norme d'opérateur pourra être étendue à Ω. En particulier, pour $z = i \in \Omega$ on trouve la formule de Trotter pour les opérateurs initiaux $A \equiv A(z = i)$ et $B \equiv B(z = i)$.

5.4 Application de la méthode

Pour démontrer le théorème 5.7, on commence par établir le lemme suivant.

Lemme 5.13 *Les trois énoncés suivants sont équivalents pour deux opérateurs m-sectoriels A et B.*

a) $(I + A)^{-1}(I + B)^{-1}$ *est compact ;*

b) $(I + A)^{-\alpha}(I + B)^{-\alpha}$ *est compact pour tout* $\alpha \in]0, 1[$ *;*

c) $(I + \mathrm{Re}\, A)^{-1}(I + \mathrm{Re}\, B)^{-1}$ *est compact.*

Démonstration

On va montrer les trois étapes suivantes : a) $\Rightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ c), et c) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b)

D'après a), $(I + A + \lambda)^{-1}(I + B + \mu)^{-1}$ est encore compact pour tout $\lambda, \mu \geq 0$ par la représentation

$$\begin{aligned}(I + A + \lambda)^{-1}(I + B + \mu)^{-1} = {} & (I + A + \lambda)^{-1}(I + A) \\ & (I + A)^{-1}(I + B)^{-1}(I + B)(I + B + \mu)^{-1}\end{aligned}$$

et l'observation que les opérateurs $(I + A + \lambda)^{-1}(I + A)$ et $(I + B)(I + B + \mu)^{-1}$ sont bornés par 2 pour $\lambda, \mu \geq 0$. Grâce à la représentation :

$$(I + A)^{-\alpha}(I + B)^{-\alpha} = \left(\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} \mu^{-\alpha} (I + A + \lambda)^{-1}(I + B + \mu)^{-1} d\lambda d\mu,$$

où l'intégrale du membre de droite converge en norme d'opérateur, le produit $(I + A)^{-\alpha}(I+B)^{-\alpha}$ est donc compact pour tout $\alpha \in]0,1[$.

b) $\Rightarrow$ c)
Grâce à la représentation (1.40), [32, Ch.VI théorème 3.2] des opérateurs m-sectoriels on obtient :

$$\begin{aligned} I+A &= (I+\operatorname{Re} A)^{1/2}(I+i\tilde{C}_A)(I+\operatorname{Re} A)^{1/2}, & (5.11)\\ I+B &= (I+\operatorname{Re} B)^{1/2}(I+i\tilde{C}_B)(I+\operatorname{Re} B)^{1/2}, & (5.12)\end{aligned}$$

où $\tilde{C}_A$ et $\tilde{C}_B$ sont des opérateurs auto-adjoints bornés respectivement par $\tan\theta_A$ et $\tan\theta_B$. D'où on a

$$\begin{aligned} (I+A)^{-1}(I+B)^{-1} = (I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+i\tilde{C}_A)^{-1} \qquad (5.13)\\ (I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}(I+i\tilde{C}_B)^{-1}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &(I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}\\ &\quad = (I+i\tilde{C}_A)(I+\operatorname{Re} A)^{1/2}(I+A)^{-1}(I+B)^{-1}(I+\operatorname{Re} B)^{1/2}(I+i\tilde{C}_B)\\ &\quad = (I+i\tilde{C}_A)(I+\operatorname{Re} A)^{1/2}(I+A)^{-(1-\alpha)}\\ &\qquad\quad (I+A)^{-\alpha}(I+B)^{-\alpha}(I+B)^{-(1-\alpha)}(I+\operatorname{Re} B)^{1/2}(I+i\tilde{C}_B).\end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha < 1/2$, $(I+\operatorname{Re} A)^{1/2}(I+A)^{-(1-\alpha)}$ est un opérateur borné (voir la preuve de [32, Ch. VI, théorème 3.3]), et de la même manière $(I+B)^{-(1-\alpha)}(I+\operatorname{Re} B)^{1/2}$. D'après b) $(I+A)^{-\alpha}(I+B)^{-\alpha}$ est compact, donc $(I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}$ est compact, d'où on obtient c) puisque

$$\begin{aligned} (I+\operatorname{Re} A)^{-1}(I+\operatorname{Re} B)^{-1} &= (I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}\\ &\quad \left((I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}\right)(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}. \qquad (5.14)\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a)
En appliquant a) $\Rightarrow$ b) aux opérateurs $\operatorname{Re} A$ et $\operatorname{Re} B$, c) implique que $(I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}$ $(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}$ est compact. D'où par la représentation (5.13), c) entraîne a). $\square$

Remarque 5.14 *Dans b), on peut remplacer de manière équivalente : pour tout* $\alpha \in]0,1[$ *par : pour un* $\alpha \in]0,1[$.

Preuve du théorème 5.7

Supposons que $(I+A)^{-1}$ est compact. Comme par le lemme 5.9 et le corollaire 5.10, $I+A(z)$ est une famille holomorphe de type (B) pour $z \in D$, les opérateurs bornés $(I+A(z))^{-1}$ sont aussi compacts pour tout $z \in D$ par la proposition 5.6 [32, Ch.VII, théorème 4.3]. En particulier pour $z = x$ sur l'intervalle $]-\epsilon,\epsilon[$. Alors en utilisant la proposition 2.11 pour les familles auto-adjointes $A(x)$ et $B(x)$, $x \in]-\epsilon,\epsilon[$ et la proposition 5.12, on obtient la première partie du théorème 5.7.

Maintenant supposons que le produit $(I + A)^{-1}(I + B)^{-1}$ est compact. Alors d'après le lemme 5.13, le produit $(I+\operatorname{Re} A)^{-1/2}(I+\operatorname{Re} B)^{-1/2}$ est compact. Considérons les familles holomorphes d'opérateurs m-sectoriels inversibles $I + A(z)$ et $I + B(z)$, où $z \in D$, cf corollaire 5.10. Par les représentations (5.11) et (5.12) on obtient pour tout réel $x \in D$:

$$\begin{aligned}(I + A(x))^{-1}(I + B(x))^{-1} = (I + \operatorname{Re} A)^{-1/2}(I + x\tilde{C}_A)^{-1}\\ (I + \operatorname{Re} A)^{-1/2}(I + \operatorname{Re} B)^{-1/2}(I + x\tilde{C}_B)^{-1}(I + \operatorname{Re} B)^{-1/2},\end{aligned}$$

donc la famille $(I+A(x))^{-1}(I+B(x))^{-1}$ est compacte. En utilisant comme précédemment la proposition 2.11 pour $A(x)$ et $B(x)$, $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ et la proposition 5.12, on termine la démonstration du théorème 5.7.

□

Afin de démontrer le théorème 5.8, on a besoin du lemme suivant fondé sur l'inégalité de Heinz, rappelée dans la proposition 1.27. Comme $\operatorname{Re} A$ et $\operatorname{Re} B$ ont des inverses bornés (hypothèse (i)), (ii) et (iii) impliquent par le théorème du graphe fermé qu'il existe des constantes positives λ, μ telles que :

$$\|\operatorname{Im} Au\| \leq \lambda\|\operatorname{Re} Au\|,\ u \in \operatorname{dom}(\operatorname{Re} A); \tag{5.15}$$

$$\|\operatorname{Im} Bu\| \leq \mu\|\operatorname{Re} Bu\|,\ u \in \operatorname{dom}(\operatorname{Re} B). \tag{5.16}$$

Ainsi la condition (ii) (respectivement (iii)) assure que $A(z) = (\operatorname{Re} A)^{1/2}(I + zC_A)(\operatorname{Re} B)^{1/2} = \operatorname{Re} A + z\operatorname{Im} A$ (respectivement $B(z)$) est une fonction holomorphe de type (A) au voisinage de $z = 0$. Ce fait est aussi indispensable dans le lemme suivant.

Lemme 5.15 *Si A et B satisfont les conditions (i)-(v), alors pour tout réel x tel que $|x| < \min\{\epsilon, 1/\lambda\}$ on a :*

$$\|B(x)^\alpha u\| \leq \left(\frac{1+\mu|x|}{1-\lambda|x|}\right)^\alpha c\|A(x)^\alpha u\|,\ u \in \operatorname{dom}(A(x)^\alpha). \tag{5.17}$$

Ici ϵ est le même que dans le lemme 5.9, λ et μ sont définis par (5.15) et (5.16). Les constantes c et $1/2 < \alpha \leq 1$ sont les mêmes que dans la condition (v).

Démonstration

D'après (5.16), qui découle de (iii), on a

$$\|B(x)u\| \leq \|\operatorname{Re} Bu\| + |x|\|\operatorname{Im} Bu\| \leq (1 + \mu|x|)\|\operatorname{Re} Bu\|, \tag{5.18}$$

pour tout $u \in \operatorname{dom}(\operatorname{Re} B) \subseteq \operatorname{dom}(B(x))$. Comme $B(x)$ est auto-adjoint, cette inégalité implique par l'inégalité de Heinz :

$$\|B(x)^\alpha u\| \leq (1 + \mu|x|)^\alpha\|(\operatorname{Re} B)^\alpha u\|,\ u \in \operatorname{dom}((\operatorname{Re} B)^\alpha). \tag{5.19}$$

Grâce à (5.15) et la théorie des perturbations des opérateurs auto-adjoints, la somme $\operatorname{Re} A + x\operatorname{Im} A$ est auto-adjointe sur le domaine $\operatorname{dom}(\operatorname{Re} A)$ pour $|x| < 1/\lambda$.

Comme par construction (corollaire 5.10) l'opérateur $A(x)$ est une extension auto-adjointe de cette somme, on doit avoir $\mathrm{dom}(A(x)) = \mathrm{dom}(\mathrm{Re}\, A)$. Par (5.15) pour tout u dans ce domaine on obtient :

$$\|\mathrm{Re}\, Au\| \leq \|A(x)u\| + |x|\|\mathrm{Im}\, Au\| \leq \|A(x)u\| + \lambda|x|\|\mathrm{Re}\, Au\|. \tag{5.20}$$

Comme $|x| < 1/\lambda$, on trouve :

$$\|\mathrm{Re}\, Au\| \leq \frac{1}{1-\lambda|x|}\|A(x)u\|, \tag{5.21}$$

et :

$$\|(\mathrm{Re}\, A)^\alpha u\| \leq \frac{1}{(1-\lambda|x|)^\alpha}\|A(x)^\alpha u\|, \ u \in \mathrm{dom}(A(x)^\alpha) \tag{5.22}$$

par l'inégalité de Heinz.

Finalement les inégalités (5.19), (5.22), ainsi que la condition (v) donnent l'estimation annoncée (5.17). □

Preuve du théorème 5.8

Comme $c < 1$, il existe η, $0 < \eta < \min\{\epsilon, 1/\lambda\}$, tel que pour $|x| < \eta$,

$$\left(\frac{1+\mu|x|}{1-\lambda|x|}\right)^\alpha c < 1. \tag{5.23}$$

D'où les conditions de la proposition 2.10 sont satisfaites, avec les fonctions $f(x) = g(x) = e^{-x}$ et pour les familles d'opérateurs auto-adjoints $A(x)$ et $B(x)$ pour tout $x \in]-\eta, \eta[$. Comme l'intervalle $]-\eta, \eta[$ a au moins un point d'accumulation dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \epsilon\}$, le théorème de Vitali permet de terminer la preuve du théorème 5.8 pour tout réel $t > 0$ et en considérant $z = i$.

Afin d'étendre le résultat à tout $t \in S_\theta$ on utilise encore le théorème de Vitali. Comme $A = A(z = i)$ et $B = B(z = i)$ sont m-sectoriels de demi-angles θ_A, θ_B, on pose $\theta = \pi/2 - \max\{\theta_A, \theta_B\}$. Alors les semi-groupes e^{-tA} et e^{-tB} sont holomorphes et bornés par 1 dans le secteur ouvert $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0, |\arg z| < \theta\}$. D'où par le théorème de Vitali la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter pour $t > 0$ implique la convergence dans la même topologie pour tout $z \in S_\theta$, uniformément sur tout compact. Comme la fonction limite est holomorphe, c'est le prolongement holomorphe du semi-groupe e^{-tH} de la demi-droite réelle au secteur S_θ.

□

Chapitre 6

Semi-groupes de Gibbs non auto-adjoints et convergence en trace

L'une des premières motivations pour établir la convergence de la formule de Trotter dans une topologie plus fine que la topologie forte des opérateurs était la méthode dite d'estimation infrarouge en mécanique statistique quantique. En effet Dyson, Lieb et Simon [17] ont inventé une méthode fondée sur la formule de Lie-Trotter pour montrer l'existence d'une transition de phase dans le modèle de Heisenberg quantique anisotrope. Or dans ce modèle, le hamiltonien associé à un système fini H_Λ agit dans un espace de Hilbert de dimension finie. Donc on peut utiliser le théorème de Lie, ainsi que la continuité de la trace pour inverser trace et limite cf (6.43). Par la suite, d'autres auteurs ont voulu appliquer la même méthode à des modèles différents, en particulier pour les cristaux anharmoniques. Cependant le hamiltoniens de tels systèmes est un opérateur non borné dans un espace de Hilbert de dimension infinie. D'où le problème, formulé d'abord par Minlos, de savoir si la formule de Trotter converge dans la topologie de la trace dans ce cas là. Ce problème a été résolu pour des semi-groupes de Schrödinger dans [61], et pour des semi-groupes de Gibbs auto-adjoints abstraits dans [42]. On étudie dans ce chapitre les semi-groupes de Gibbs non auto-adjoints, c'est-à-dire appartenant à la classe de la trace, qui fait partie des idéaux de von Neumann-Schatten. On va montrer que plusieurs résultats des chapitres précédents peuvent être adaptés pour obtenir la convergence de la formule de Trotter dans la topologie de la trace, en supposant que l'un au moins des semi-groupes admet une trace (ce chapitre s'appuie sur l'article [8]).

6.1 Opérateurs compacts et semi-groupes de Gibbs

6.1.1 Opérateurs compacts

Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés dans $\mathfrak{H}$. On note $\mathcal{C}_\infty(\mathfrak{H})$ l'idéal des opérateurs compacts dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, qui est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Rappelons les propriétés spectrales des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable (voir par exemple [19] pour toutes ces propriétés générales).

Proposition 6.1 *Soit $C \in \mathcal{C}_\infty(\mathfrak{H})$. Alors le spectre de C est dénombrable, et chaque point non nul du spectre est une valeur propre de multiplicité finie et isolée. On les notera $\lambda_k(C)$, $k = 1, 2, \ldots$ ordonnées suivant les modules décroissants. $0 \in \sigma(C)$ est le seul point d'accumulation du spectre (on suppose que $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie). Ainsi il existe une base orthonormée de $\mathfrak{H}$ telle que la matrice de C soit triangulaire dans cette base. Si de plus C est normal, alors C est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Pour étudier plus en détail les opérateurs compacts non normaux, on définit l'opérateur module : $|C| = \sqrt{C^*C}$ (puisque C^*C est un opérateur auto-adjoint positif, sa racine carrée est bien définie). $|C|$ est donc un opérateur compact auto-adjoint positif, donc en notant $\{s_k(C)\}_{k\geq 1}$ ses valeurs propres en ordre décroissant, on a la représentation $|C| = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(C) P_k$, où les P_k sont des projecteurs deux à deux orthogonaux.

Les nombres positifs $\{s_k(C)\}_{k=1}^{\infty}$ sont appelés les valeurs singulières de l'opérateur C. Si C est normal, alors on a $|\lambda_k(C)| = s_k(C)$. Pour tout opérateur compact C, les valeurs singulières vérifient les propriétés suivantes :

$$s_k(C) \leq s_1(C) = \|C\| \tag{6.1}$$

$$s_k(C) = s_k(C^*) \tag{6.2}$$

$$s_k(TC) \leq \|T\| s_k(C) \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) \tag{6.3}$$

$$|s_k(C) - s_k(D)| \leq \|C - D\| \text{ pour tout } D \in \mathcal{C}_\infty(\mathfrak{H}) \tag{6.4}$$

On a enfin le développement de Schmidt de tout opérateur compact C :

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(C)(\cdot, \phi_k)\psi_k \tag{6.5}$$

où $\{\phi_k\}$ et $\{\psi_k\}$ sont des bases orthonormées de vecteurs propres de C^*C et CC^* respectivement. On aura besoin plus loin des propriétés suivantes [19, Ch. II, corollaires 4.1 et 4.2] :

Proposition 6.2 *Si C est un opérateur compact sur $\mathfrak{H}$, alors pour tout $p > 0$ et quels que soient les entiers k et n :*

$$\sum_{j=1}^{k} (s_j(C^n))^{p/n} \leq \sum_{j=1}^{k} (s_j(C))^p. \tag{6.6}$$

De même si $C_1, \dots, C_m$ sont des opérateurs compacts sur $\mathfrak{H}$, alors pour tout entier k :

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(C_1 \dots C_m) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(C_1) \dots s_j(C_m) \tag{6.7}$$

6.1.2 Idéaux de von Neumann-Schatten

On note $\mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ $(1 \leq p < \infty)$ les idéaux dans $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ constitués par les opérateurs compacts C tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(C)^p < \infty. \tag{6.8}$$

Ces idéaux sont appelés les idéaux de von Neumann-Schatten (cf [19, 54]). $\mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|C\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k(C)^p \right)^{1/p}.$$

En particulier $\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ est l'ensemble des opérateurs à trace et $\|C\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(C)$ $= \operatorname{tr}|C|$ est la norme de la trace. On définit pour tout $C \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ la trace matricielle par la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_k, C v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(C)(\psi_k, \phi_k), \tag{6.9}$$

où $\{v_k\}_{k \geq 1}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{H}$ quelconque, et l'égalité montre que cette somme ne dépend pas de la base choisie (on utilise la représentation de Schmidt (6.5)). Alors le théorème de Lidskii [19, Ch.3, théorème 8.4] établit que la trace matricielle ainsi définie coïncide avec la trace spectrale, que l'on notera désormais $\operatorname{tr} C$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_k, C v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(C) = \operatorname{tr} C \tag{6.10}$$

Définition 6.3 *On appelle semi-groupe de Gibbs un semi-groupe $\{U_t\}_{t \geq 0}$ tel que $U_t \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $t > 0$ (cf [1, 60, 62]).*

Cette classe de semi-groupes apparaît naturellement en mécanique statistique quantique, où les moyennes thermodynamiques sont définies par la trace de la matrice densité $\rho_\beta = e^{-\beta H} / \operatorname{tr} e^{-\beta H}$ pour un système fini de hamiltonien H et de température β^{-1}.

6.2 Résultats de convergence

Plusieurs articles ont déjà été publiés sur la convergence en trace de la formule de Trotter pour des semi-groupes auto-adjoints : [61, 42, 24, 27, 46]. Nous considérons ici le cas non auto-adjoint [8]. Le premier résultat concerne deux générateurs m-sectoriels A et B et ne contient pas d'estimation d'erreur. On rappelle (proposition 1.14)que les opérateurs m-sectoriels de demi-angle $\theta \in]0, \pi/2[$ correspondent aux générateurs des semi-groupes holomorphes dans le secteur $S_{\pi/2-\theta}$ satisfaisant $\|e^{-zA}\| \leq 1$ pour tout $z \in S_{\pi/2-\theta}$.

Théorème 6.4 *Soient A, B deux opérateurs m-sectoriels tels que $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $t > 0$. Alors la formule de Trotter converge en norme $\|\cdot\|_1$ vers $e^{-t(A\dot{+}B)}P_0$ où P_0 est le projecteur orthogonal sur l'adhérence de l'intersection des domaines des formes quadratiques associées $\overline{\operatorname{dom}(a) \cap \operatorname{dom}(b)}$, et $A\dot{+}B$ est la somme au sens des formes quadratiques.*

Si on ajoute une condition de petitesse relative entre A et B, on obtient des estimations d'erreur en norme de trace.

Théorème 6.5 *Soit A un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ tel que $\operatorname{Re} A > 0$ et $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $t > 0$. Si B est un opérateur m-accrétif dans $\mathfrak{H}$ tel que $\operatorname{dom}(A^\alpha) \subseteq \operatorname{dom}(B)$ pour un réel $\alpha \in [0, 1[$ et que $\operatorname{dom}(A^*) \subseteq \operatorname{dom}(B^*)$, alors la formule de Trotter converge en norme $\|\cdot\|_1$, uniformément pour $t \geq t_0 > 0$ avec l'estimation :*

$$\left\| \left(e^{-tB/n}e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\|_1 \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\right), \text{ ou } O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) \text{ si } \alpha = 0. \tag{6.11}$$

Théorème 6.6 *Soit A un opérateur auto-adjoint positif dans $\mathfrak{H}$, tel que $(\lambda + A)^{-1} \in \mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ et un entier $p \geq 1$ fini. Soit B un opérateur m-accrétif tel que $\operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B)$ et $\operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B^*)$ avec :*

$$\|Bu\| \leq a\|Au\|, \; u \in \operatorname{dom}(A), \; 0 < a < 1 \tag{6.12}$$

$$\|B^*u\| \leq a_*\|Au\|, \; u \in \operatorname{dom}(A), \; 0 < a_* < 1. \tag{6.13}$$

Alors la formule de Trotter converge en norme $\|\cdot\|_1$ uniformément pour $t \geq t_0 > 0$ avec :

$$\left\| \left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\|_1 \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{6.14}$$

La partie suivante contient quelques préliminaires indispensables. La preuve du théorème 6.4 est donnée dans la section 6.4, tandis que les deux autres résultats sont démontrés dans la partie 6.5.

6.3 Généralisation d'inégalités au cas m-sectoriel

Proposition 6.7 (Grümm [21]) *L'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue de $\mathcal{B} \times \mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ vers $\mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$, $\mathcal{B}$ étant une partie bornée de $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ munie de la topologie forte et $\mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ muni de la topologie de la norme $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.*

On remarque comme conséquence que les semi-groupes de Gibbs sont continus en norme $\|\cdot\|_1$ pour $t > 0$.

Corollaire 6.8 *Si $z \mapsto A(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ est une fonction holomorphe pour $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, et $z \mapsto B(z) \in \mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ est $\|\cdot\|_p$-holomorphe dans D, alors $A(z)B(z)$ est $\|\cdot\|_p$-holomorphe dans D. En particulier, si U_z est un semi-groupe holomorphe dans un secteur ouvert $S_\omega = \{z \in \mathbb{C} : \ z \neq 0, \ |\arg z| < \omega\}$, tel que $U_{z_0} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, $z_0 \in S_\omega$, alors U_z est $\|\cdot\|_1$-holomorphe pour $z - z_0 \in S_\omega$.*

Le lemme suivant est une extension de [3, théorème 2] à un générateur m-sectoriel quelconque.

Lemme 6.9 *Soit A un opérateur m-sectoriel, $\operatorname{Re} A$ sa partie réelle, qui est un opérateur auto-adjoint positif. Si $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, alors $e^{-tA} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ et*

$$\|e^{-tA}\|_1 \leq \cdots \leq \|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \leq \|e^{-tA/2^{p+1}}\|_{2^{p+1}}^{2^{p+1}} \leq \cdots \leq \lim_{p\to\infty} \|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} = \|e^{-t\operatorname{Re} A}\|_1. \tag{6.15}$$

Si de plus le générateur A est normal, alors toutes ces inégalités deviennent des égalités.

Démonstration

Comme $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, $\operatorname{Re} A$ et donc A ont une résolvante compacte d'après $(I + \operatorname{Re} A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(I+\operatorname{Re} A)}dt$ et la proposition 1.25. D'où grâce au théorème 5.7, la formule de Trotter

$$\left\| \left(e^{-tA^*/2n} e^{-tA/2n}\right)^n - e^{-t\operatorname{Re} A} \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6.16}$$

converge en norme d'opérateur, où la somme $(A \dot{+} A^*)/2$, au sens des formes quadratiques, est par définition la partie réelle $\operatorname{Re} A$. D'après (6.4), cette convergence entraîne la convergence de chaque valeur singulière des opérateurs compacts concernés, soit : pour tout $k \geq 1$

$$s_k\left(\left(e^{-tA^*/2n} e^{-tA/2n}\right)^n\right) = s_k\left(\left|e^{-tA/2n}\right|^{2n}\right) = s_k(e^{-tA/2n})^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s_k(e^{-t\operatorname{Re} A}). \tag{6.17}$$

Par ailleurs, d'après (6.6), on a pour tous entiers $k \neq 0$ et p :

$$\sum_{j=1}^k s_j(e^{-tA/2^p})^{2^p} \leq \sum_{j=1}^k s_j(e^{-tA/2^{p+1}})^{2^{p+1}}, \tag{6.18}$$

ce que nous notons $S_k(p) \leq S_k(p+1)$. D'après (6.17), la somme finie $S_k(p)$ a pour limite

$$S_k = \sum_{j=1}^k s_k(e^{-t\operatorname{Re} A}) \tag{6.19}$$

quand p tend vers l'infini. On a donc $S_k(p) \leq S_k(p+1) \leq \cdots \leq S_k$ pour tout entier k. Comme $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, on en conclut que $S_k(p)$ est majorée par $\sup_k S_k =$

$\|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$ quels que soient k et p. En particulier si $p=0$, on obtient $\lim_{k\to\infty} S_k(0) = \|e^{-tA}\|_1 \leq \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$. Comme par définition $\lim_{k\to\infty} S_k(p) = \|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p}$, on obtient les inégalités (6.15) en prenant la limite $k\to\infty$ des inégalités $S_k(0)\leq\cdots\leq S_k(p)\leq\cdots\leq\|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$.

De plus, on a $\lim_{p\to\infty}\|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \leq \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$. Mais on a aussi $\|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \geq S_k(p)$ et donc $\lim_{p\to\infty}\|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \geq \lim_{p\to\infty} S_k(p) = S_k$ pour tout $k\geq 1$. D'où $\lim_{p\to\infty}\|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \geq \sup_{k\geq 1} S_k = \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$, ce qui conduit à $\lim_{p\to\infty}\|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} = \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$.

Si A est normal, alors e^{-tA} est aussi normal. On a donc $s_k(e^{-tA}) = |\lambda_k(e^{-tA})|$ et les représentations spectrales

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(A)P_k,\quad e^{-tA}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-t\lambda_k(A)}P_k,\quad \operatorname{Re}A=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\lambda_k(A)P_k, \tag{6.20}$$

où P_k est le projecteur spectral (orthogonal) associé à la valeur propre $\lambda_k(A)$. D'où

$$s_k(e^{-tA}) = |\lambda_k(e^{-tA})| = |e^{-t\lambda_k(A)}| = e^{-t\operatorname{Re}\lambda_k(A)} = e^{-t\lambda_k(\operatorname{Re}A)} = s_k(e^{-t\operatorname{Re}A}), \tag{6.21}$$

et on obtient $\|e^{-tA}\|_1 = \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1$. □

Remarque 6.10 *Rappelons que si $K_n \xrightarrow{s} K$ et $K_n^* \xrightarrow{s} K^*$ dans la topologie forte des opérateurs, quand $n\to\infty$ et $\|K_n\|_p \to \|K\|_p$ pour un $p\in[1,\infty[$, alors $\|K_n-K\|_p\to 0$ (théorème de Grümm [21]). Grâce à (6.15)*

$$\left\|\left(e^{-tA^*/2^p}e^{-tA/2^p}\right)^{2^{p-1}}\right\|_1 = \|e^{-tA/2^p}\|_{2^p}^{2^p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|e^{-t\operatorname{Re}A}\|_1 \tag{6.22}$$

la convergence (6.16) entraîne la convergence en norme $\|\cdot\|_1$ de la formule de Trotter pour $(A\dot{+}A^*)/2$:

$$\left\|\left(e^{-tA^*/2^p}e^{-tA/2^p}\right)^{2^{p-1}} - e^{-t\operatorname{Re}A}\right\|_1 \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.23}$$

Le théorème ci-dessous est une généralisation de l'inégalité de Ginibre-Gruber [18].

Théorème 6.11 *Soit A un opérateur m-sectoriel tel que $e^{-t\operatorname{Re}A}\in\mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $t>0$. Soient $V_1,\ldots,V_n$ des opérateurs bornés sur $\mathfrak{H}$. Alors pour tous $t_1,\ldots,t_n\geq 0$ on a :*

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} e^{-t_iA}V_i\right\|_1 \leq \operatorname{tr} e^{-(t_1+\cdots+t_n)\operatorname{Re}A/4}\prod_{i=1}^{n}\|V_i\|. \tag{6.24}$$

Démonstration

Supposons d'abord que les opérateurs $V_1,\ldots,V_n$ sont compacts. Posons $t_m = \min\{t_1,\ldots,t_n\}$ et $T=t_1+\cdots+t_n$. Pour $i=1,\ldots,n$ on définit $\ell_i\in\mathbb{N}$ par $2^{\ell_i}t_m\leq t_i<2^{\ell_i+1}t_m$. D'où on a $\sum_{i=1}^n 2^{\ell_i}t_m > T/2$ et

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-t_iA}V_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-(t_i-2^{\ell_i}t_m)A}(e^{-t_mA})^{2^{\ell_i}}V_i. \tag{6.25}$$

Alors, d'après (6.7) on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{n} e^{-t_i A} V_i\right\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-(t_i-2^{\ell_i}t_m)A}(e^{-t_m A})^{2^{\ell_i}} V_i\right)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} s_k(e^{-(t_i-2^{\ell_i}t_m)A}) s_k(e^{-t_m A})^{2^{\ell_i}} s_k(V_i)\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(e^{-t_m A})^{2^{\ell_1}+\cdots+2^{\ell_n}} \prod_{i=1}^{n}\|V_i\|,\end{aligned}$$

où on utilise le fait que pour tout $k \geq 1$, $s_k(e^{-(t_i-2^{\ell_i}t_m)A}) \leq \|e^{-(t_i-2^{\ell_i}t_m)A}\| \leq 1$ et $s_k(V_i) \leq \|V_i\|$. En posant $N = 2^{\ell_1} + \cdots + 2^{\ell_n}$ et $T_m = Nt_m > T/2$, on obtient

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} e^{-t_i A} V_i\right\|_1 \leq \|e^{-T_m A/N}\|_N^N \prod_{i=1}^{n}\|V_i\|. \tag{6.26}$$

Afin d'appliquer le Lemme 6.9, considérons $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \leq N < 2^{p+1}$. Alors on a $2^p T_m/N > T_m/2 > T/4$. D'où

$$\|e^{-T_m A/N}\|_N^N = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(e^{-T_m A/N})^N \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(e^{-2^p T_m A/2^p N})^{2^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(e^{-TA/2^{p+2}})^{2^p}, \tag{6.27}$$

en remarquant que : $T_m/N = 2^p T_m/2^p N \geq T/2^{p+2}$, $s_k(e^{-T_m A/N})^N \leq s_k(e^{-T_m A/N})^{2^p}$ et $s_k(e^{-(t+\tau)A}) \leq \|e^{-tA}\| s_k(e^{-\tau A}) \leq s_k(e^{-\tau A})$ pour tout $t, \tau > 0$. Finalement grâce à (6.26), (6.27) et au lemme 6.9 on obtient l'estimation (6.24).

Cas général : Soit $0 < \epsilon < t_m$, posons $\tilde{V_i} = e^{-\epsilon A} V_i$. Alors $\tilde{V_i} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ et $s_k(\tilde{V_i}) \leq \|\tilde{V_i}\| \leq \|V_i\|$. Soit encore $\tilde{t_i} = t_i - \epsilon$, on obtient alors

$$\left\|\prod_{i=1}^{n} e^{-t_i A} V_i\right\|_1 \leq \operatorname{tr} e^{-(\tilde{t}_1+\cdots+\tilde{t}_n)\operatorname{Re} A/4} \prod_{i=1}^{n}\|V_i\|. \tag{6.28}$$

Grâce à la continuité en norme $\|\cdot\|_1$ du semi-groupe $e^{-t\operatorname{Re} A}$, on peut à présent prendre la limite $\epsilon \to 0$, ce qui donne l'inégalité désirée (6.24) dans le cas général.
□

6.4 Convergence en norme de trace

L'idée de la démonstration du théorème 6.4 est de reprendre la méthode du chapitre 5.3 dans la topologie de la norme $\|\cdot\|_1$. Soient A, B des opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de demi-angles θ_A, θ_B. On note a et b les formes quadratiques associées. On considère (cf chapitre 5.3) les formes $a(z) = \operatorname{Re} a + z\operatorname{Im} a$, $b(z) = \operatorname{Re} b + z\operatorname{Im} b$, et les opérateurs m-sectoriels correspondants $A(z)$,

$B(z)$. D'après le corollaire 5.10, ces opérateurs forment des familles holomorphes de type (B) (cf chapitre 5.1 et [32, Ch. VII §4]) dans les domaines respectifs $D_A = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \cot\theta_A\}$ et $D_B = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \cot\theta_B\}$.

Lemme 6.12 *Si A est un opérateur m-sectoriel tel que $e^{-t\mathrm{Re}\, A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $t > 0$, alors $e^{-tA(z)} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour $z \in D_A$. De plus $e^{-tA(z)}$ est une fonction $\|\cdot\|_1$-holomorphe de $z \in D_A$ (et aussi de t dans un certain secteur dépendant de z).*

Démonstration

D'après le lemme 6.9, e^{-tA} est compact, par conséquent l'opérateur A est à résolvante compacte, et $\mathrm{Re}\, A$ aussi (par $(I+A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(I+A)}dt$ et la proposition 1.25). De plus, comme $A(z)$ est une famille holomorphe de type (B), $A(z)$ est à résolvante compacte pour tout $z \in D_A$ ou aucun (cf proposition 5.6 ou [32, Ch. VII, théorème 4.3]). D'où la même propriété est vraie pour $\mathrm{Re}\, A(z)$.

Puisque d'après (5.4)

$$\mathrm{Re}\, a(z)[u] \geq (1 - |\mathrm{Re}\, z| \tan\theta_A)\mathrm{Re}\, a[u], \ u \in \mathrm{dom}(a), \tag{6.29}$$

par le principe de mini-max pour l'opérateur auto-adjoint $\mathrm{Re}\, A(z)$ on obtient que $e^{-t\mathrm{Re}\, A(z)} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ pour tout $z \in D$. Finalement, d'après le lemme 6.9 on a : $\|e^{-tA(z)}\|_1 \leq \|e^{-t\mathrm{Re}\, A(z)}\|_1 < \infty$.

Par ailleurs, pour la famille holomorphe $e^{-tA(z)}$ (cf proposition 5.11) on peut écrire l'intégrale de Cauchy, qui converge en norme d'opérateur, pour la famille holomorphe $e^{-tA(z)}$:

$$e^{-tA(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{-tA(w)}}{z-w}dw \tag{6.30}$$

où γ est un petit cercle de centre z et de rayon r à l'intérieur de D_A. De plus, on a un majorant de la dérivée en norme $\|\cdot\|_1$ pour $w \in \gamma$:

$$\left\|\frac{d}{dz}\frac{e^{-tA(w)}}{z-w}\right\|_1 \leq \frac{\|e^{-t\mathrm{Re}\, A(w)}\|_1}{r^2} \leq \|e^{-ct\mathrm{Re}\, A}\|_1 \frac{1}{r^2} \tag{6.31}$$

où $c = \inf_{w\in\gamma}(1 - |\mathrm{Re}\, w| \tan\theta_A)$. D'où l'intégrale de Cauchy (6.30) est dérivable pour la norme $\|\cdot\|_1$, et $e^{-tA(z)}$ est holomorphe en norme $\|\cdot\|_1$ pour $z \in D_A$. D'autre part, $e^{-tA(z)}$ est une fonction holomorphe de t en $\|\cdot\|_1$ du fait que $A(z)$ est m-sectoriel donc générateur de semi-groupe holomorphe, et que $e^{-tA(z)} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ (cf corollaire 6.8). □

Démonstration du Théorème 6.4

Considérons pour $z \in D = D_A \cap D_B$ la suite de fonctions

$$f_n(z) = \left(e^{-tA(z)/n}e^{-tB(z)/n}\right)^n, \ n \geq 1.$$

D'après le lemme 6.12 $e^{-tA(z)/n} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, donc $f_n(z) \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$. De plus, $f_n(z)$ est holomorphe en norme $\|\cdot\|_1$ car : $e^{-tA(z)/n}$ est holomorphe en norme $\|\cdot\|_1$ et $e^{-tB(z)/n}$ est holomorphe en norme d'opérateur (en effet $B(z)$ est une famille holomorphe de type (B)). Par ailleurs, les opérateurs $f_n(z)$ sont uniformément bornés par rapport à n en norme $\|\cdot\|_1$ d'après le théorème 6.11 :

$$\|f_n(z)\|_1 \leq \|e^{-tB(z)/n}\|^n \ \mathrm{tr}\, e^{-t\mathrm{Re}\, A(z)/4} \leq \|e^{-tA(z)/4}\|_1 \tag{6.32}$$

Pour z réel, d'après la proposition 2.15, $f_n(z)$ converge en norme $\|\cdot\|_1$, vers $e^{-tC}P_0$ où $C = A(z)\dot{+}B(z)$ est la somme au sens des formes quadratiques. Donc le théorème de Vitali assure que la convergence a lieu pour tout $z \in D$. Pour $z = i$ on obtient le résultat annoncé.

□

6.5 Convergence en norme de trace avec estimation

Dans cette partie on montre comment les estimations d'erreur en norme d'opérateur pour la formule de Trotter peuvent être généralisées à la topologie de la norme $\|\cdot\|_1$, dans des conditions où on peut utiliser les résultats de [62] sur les perturbations des semi-groupes de Gibbs. Deux classes de perturbations ont été étudiées dans cet article, $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Définition 6.13 *Un opérateur fermé B est dit de classe $\mathcal{P}_0(A)$ de perturbations pour le générateur A d'un semi-groupe U_t si le domaine* $\mathrm{dom}(B) \supseteq \bigcup_{t>0} U_t\mathfrak{H}$ *et*

$$\int_0^1 dt\|BU_t\| < \infty. \tag{6.33}$$

Ces perturbations $B \in \mathcal{P}_0$ sont aussi appelées "perturbations de classe $\mathcal{P}$" dans [12].

Définition 6.14 *Un opérateur fermé B est dit de classe $\mathcal{P}_1(A)$ de perturbations pour le générateur A d'un semi-groupe s'il existe $0 < b < 1$ et $a > 0$ tels que :*

$$\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B) \ \textit{et} \ \|Bu\| \leq a\|u\| + b\|Au\|, \ u \in \mathrm{dom}A. \tag{6.34}$$

On remarquera que $\mathcal{P}_0(A) \subseteq \mathcal{P}_1(A)$, voir par exemple [12, lemme 3.4]. Suivant [62, corollaire 2.1], on a pour les perturbations $\mathcal{P}_0$:

Proposition 6.15 *Soit A un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ tel que $e^{-t\mathrm{Re}\,A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$. Si $B \in \mathcal{P}_0(A)$, alors $A + \lambda B$ est le générateur d'un semi-groupe de Gibbs qui est une fonction $\|\cdot\|_1$-holomorphe de $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Pour les perturbations $\mathcal{P}_1$, on a [40, 62] :

Proposition 6.16 *Soit A un opérateur auto-adjoint positif tel que $(\zeta + A)^{-1} \in \mathcal{C}_p(\mathfrak{H})$ pour un $\zeta \in \mathbb{C}$ et un entier $p \geq 1$ fini. Si $B \in \mathcal{P}_1(A)$, alors pour $\lambda \in C_b = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < b^{-1}\}$, $A + \lambda B$ est le générateur d'un semi-groupe de Gibbs,*

$G_\lambda(t) = e^{-t(A+\lambda B)}$, *qui est une fonction holomorphe en* $\|\cdot\|_1$, $G_\lambda(t) : S_{\lambda,b} \to \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, *où* $S_{\lambda,b}$ *est le secteur*

$$S_{\lambda,b} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right| < \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2 b^2}}{|\lambda| b} \right\},$$

Par ailleurs, on connaît des estimations de la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur. La proposition suivante est une adaptation du théorème 3.9 (en supposant que A^{-1} est borné, on peut avoir $\eta = 0$).

Proposition 6.17 *Soit* e^{-tA} *un semi-groupe holomorphe sur un espace de Hilbert* $\mathfrak{H}$ *tel que* $\|e^{-tA}\| \leq 1$ *pour tout* $t > 0$ *et que* A^{-1} *soit borné. Si* B *est un opérateur m-accrétif dans* $\mathfrak{H}$ *tel que* $\operatorname{dom}(A^\alpha) \subseteq \operatorname{dom}(B)$ *pour un réel* $\alpha \in [0, 1[$ *et que* $\operatorname{dom}(A^*) \subseteq \operatorname{dom}(B^*)$, *alors la formule de Trotter converge en norme d'opérateur uniformément pour* $t \geq 0$ *avec l'estimation :*

$$\left\| \left(e^{-tB/n} e^{-tA/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\right), \text{ ou } O\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) \text{ si } \alpha = 0. \quad (6.35)$$

On a également le résultat suivant (théorème 4.10) :

Proposition 6.18 *Soit* A *un opérateur auto-adjoint positif dans* $\mathfrak{H}$. *Soit* B *un opérateur m-accrétif tel que* $\operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B)$ *et* $\operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B^*)$ *avec :*

$$\|Bu\| \leq a\|Au\|, \; u \in \operatorname{dom}(A), \; 0 < a < 1 \quad (6.36)$$

$$\|B^*u\| \leq a_*\|Au\|, \; u \in \operatorname{dom}(A), \; 0 < a_* < 1. \quad (6.37)$$

Alors la formule de Trotter converge en norme d'opérateur uniformément pour $t \geq 0$ *:*

$$\left\| \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n - e^{-t(A+B)} \right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (6.38)$$

Lemme 6.19 *Soit* A *un opérateur m-sectoriel tel que* $e^{-t\operatorname{Re} A} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, $t > 0$. *On suppose que* B *est générateur d'un semi-groupe de contractions, et que* $e^{-tH} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$ *est un semi-groupe de Gibbs. Soit* $\epsilon(n,t) > 0$ *défini pour tout* $t > 0$ *et tout* $n > 1$ *par*

$$\epsilon(n,t) = \sup_{\frac{2n}{2n+1}t \leq s \leq \frac{2n}{2n-1}t} \left\| \left(e^{-sA/n} e^{-sB/n}\right)^n - e^{-sH} \right\|. \quad (6.39)$$

Alors pour tout $t_0 > 0$ *il existe des constantes* $L(t_0)$ *et* $L'(t_0)$ *telles que*

$$\left\| \left(e^{-tA/n} e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH} \right\|_1 \leq L(t_0)\epsilon([n/2], t/2) + L'(t_0)\epsilon([(n+1)/2], t/2). \quad (6.40)$$

pour $t \geq t_0$, *et* $n > 1$.

Démonstration

L'argument est semblable à [46, théorème 5.1]. Pour tout entier $n > 1$, on pose $k_n = [n/2]$ et $m_n = [(n+1)/2]$, de telle sorte que $n = k_n + m_n$ (on note $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$). D'où on obtient :

$$\begin{aligned}\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH} &= \left(\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{k_n} - e^{-k_n tH/n}\right)\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{m_n} \\ &\quad + e^{-k_n tH/n}\left(\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{m_n} - e^{-m_n tH/n}\right).\end{aligned}$$

Or grâce au théorème 6.11 et à $m_n \geq n/2$:

$$\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{m_n}\right\|_1 \leq \left\|e^{-tB/n}\right\|^{m_n} \ \mathrm{tr}\, e^{-m_n t \mathrm{Re}\, A/4n} \leq \|e^{-t\mathrm{Re}\, A/8}\|_1, \tag{6.41}$$

ce qui montre que ce terme est uniformément borné en norme $\|\cdot\|_1$. D'autre part, puisque $e^{-tH} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, nous avons $\|e^{-k_n tH/n}\|_1 \leq \|e^{-tH/3}\|_1$ pour tout $n > 1$ (en effet pour $n > 1$, $k_n/n \geq 1/3$). D'où :

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\|_1 &\leq \left\|\left(\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{k_n} - e^{-k_n tH/n}\right)\right\| \|e^{-t\mathrm{Re}\, A/8}\|_1 \\ &+ \|e^{-tH/3}\|_1 \left\|\left(\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^{m_n} - e^{-m_n tH/n}\right)\right\|\end{aligned}$$

Soient $t_n = tk_n/n$ et $s_n = tm_n/n$ de sorte que $t_n, s_n \to t/2$ quand $n \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}\left\|\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n - e^{-tH}\right\|_1 &\leq \left\|\left(\left(e^{-t_n A/k_n}e^{-t_n B/k_n}\right)^{k_n} - e^{-t_n H}\right)\right\| \|e^{-t\mathrm{Re}\, A/8}\|_1 \\ &+ \|e^{-t_n H}\|_1 \left\|\left(\left(e^{-s_n A/m_n}e^{-s_n B/m_n}\right)^{m_n} - e^{-s_n H}\right)\right\| \\ &\leq \epsilon(k_n, t/2)\left\|e^{-t_0 \mathrm{Re}\, A/8}\right\|_1 + \|e^{-t_0 H/3}\|_1 \epsilon(m_n, t/2)\end{aligned}$$

d'après la définition de $\epsilon(n,t)$, (6.39). Ainsi on trouve l'inégalité annoncée avec $L(t_0) = \left\|e^{-t_0\mathrm{Re}\, A/8}\right\|_1$ et $L'(t_0) = \|e^{-t_0 H/3}\|_1$.

□

Démonstration du théorème 6.5

La condition $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ implique que $B \in \mathcal{P}_0(A)$ car (cf proposition 1.18) :

$$\int_0^1 dt\|Be^{-tA}\| \leq \int_0^1 dt\|BA^{-\alpha}\|\|A^\alpha e^{-tA}\| \leq \|BA^{-\alpha}\| \int_0^1 dt \frac{M_\alpha}{t^\alpha} < \infty. \tag{6.42}$$

D'après la proposition 6.15, on en déduit que $A + B$ est générateur de semi-groupe de Gibbs. On peut donc appliquer le lemme 6.19 (encore valable avec la formule $e^{-tB/n}e^{-tA/n}$) avec l'estimation de la proposition 6.17, ce qui conduit au résultat. □

Démonstration du théorème 6.6

D'après les hypothèses du théorème, $B \in \mathcal{P}_1(A)$. On peut donc appliquer la proposition 6.16 qui montre que $A + B$ est alors le générateur d'un semi-groupe de Gibbs. D'où on peut appliquer le lemme 6.19 avec l'estimation donnée dans la proposition 6.18. □

6.6 Exemple : formule de Feynman-Kac

Pour terminer ce chapitre, je propose un exemple possible d'application, qui sera seulement esquissé et ne prétend pas résoudre de problème précis. Considérons un système quantique de Hamiltonien $H_\Lambda = -\Delta_\Lambda + V_\Lambda$, où $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et les opérateurs Δ_Λ et V_Λ sont respectivement le laplacien (avec une condition aux limites et un domaine tel que ce soit un opérateur auto-adjoint positif) et un potentiel (opérateur de multiplication par une fonction $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$) dans l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda)$. Il s'agit de calculer la fonction de partition $Z_\Lambda(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta H_\Lambda}$ pour $\beta > 0$. Si la formule de Trotter pour les semi-groupes $e^{t\Delta_\Lambda}$ et e^{-tV_Λ} converge en norme de trace, alors on peut calculer la fonction de partition par la limite :

$$Z_\Lambda(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta H_\Lambda} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tr} (e^{\beta\Delta_\Lambda/n} e^{-\beta V_\Lambda/n})^n \tag{6.43}$$

Or les théorèmes 6.4, 6.5 et 6.6 donnent des conditions suffisantes pour cela : par exemple puisque $e^{\beta\Delta_\Lambda} \in \mathcal{C}_1(\mathfrak{H})$, il suffit que V_Λ soit un opérateur m-sectoriel (en utilisant le théorème 6.4). D'autre part, il existe une méthode bien connue pour calculer $\operatorname{tr} (e^{t\Delta_\Lambda/n} e^{-tV_\Lambda/n})^n$, à l'aide de la mesure de Wiener [49, Ch. X.11]. Si on note $p_t(x,y)$ le noyau de l'opérateur $e^{t\Delta_\Lambda}$, on a alors :

$$\left(e^{t\Delta_\Lambda/n} e^{-tV_\Lambda/n}\right)^n f = \int_{\Lambda^n} p_{t/n}(x,x_1) e^{-tV_\Lambda(x_1)/n} \dots p_{t/n}(x_{n-1},y) e^{-tV_\Lambda(y)} f(y) dx_1 \dots dy \tag{6.44}$$

À partir de cette expression, on peut définir une mesure $\mu^t_{x,y}$, appelée mesure de Wiener, sur l'ensemble $\Omega^t_{x,y}$ des chemins continus $\omega : [0,t] \to \Lambda$ avec $\omega(0) = x$ et $\omega(t) = y$. Alors le noyau de $e^{t\Delta_\Lambda}$ est $p_t(x,y) = \int_{\Omega^t_{x,y}} d\mu^t_{x,y}$. On trouve alors pour la trace :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \left(e^{\tau\Delta_\Lambda} e^{-\tau V_\Lambda}\right)^n &= \int_{\Lambda^n} \prod_{j=0}^{n-1} dx_j \int_{\Omega^\tau_{x,x_1}} d\mu_{x,x_1}(\omega) e^{-\tau V(x_1)} \int_{\Omega^\tau_{x_1,x_2}} d\mu_{x_1,x_2}(\omega) e^{-\tau V(x_2)} \\
&\quad \dots \int_{\Omega^\tau_{x_{n-1},x}} d\mu_{x_{n-1},x}(\omega) e^{-\tau V(x)} \\
&= \int_{\Lambda^n} \prod_{j=0}^{n-1} dx_j \; p_\tau(x,x_1) p_\tau(x_1,x_2) \dots p_\tau(x_{n-1},x) e^{-\tau \sum_{i=1}^n V(x_i)} \\
&= \int_\Lambda dx \int_{\Omega^t_{x,x}} d\mu^t_{x,x}(\omega) e^{-\frac{t}{n} \sum_{\ell=1}^n V(\omega(t\ell/n))}
\end{aligned}$$

On a noté $p_\tau(x_i,x_j) = \int_{\Omega^\tau_{x_i,x_j}} d\mu_{x_i,x_j}(\omega)$, $x_0 = x$ et $\omega(0) = \omega(t) = x$.

D'après le théorème 6.4, pour tout potentiel m-sectoriel V_Λ, c'est-à-dire pour toute fonction V à valeurs dans un secteur S_θ $(0 < \theta < \pi/2)$, on a la convergence :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Lambda} dx \int_{\Omega^{\beta}_{x,x}} d\mu^{\beta}_{x,x}(\omega) e^{-\frac{\beta}{n}\sum_{\ell=1}^{n} V(\omega(\beta\ell/n))} = Z_{\Lambda}(\beta) \tag{6.45}$$

D'après le théorème 6.6, si V_Λ est un potentiel à partie réelle positive (m-accrétif) tel que $\mathrm{dom}(\Delta_\Lambda) \subseteq \mathrm{dom}(V_\Lambda)$ et $\|Vu\| \leq a\|\Delta_\Lambda u\|$ avec $a < 1$ et pour tout $u \in \mathrm{dom}(\Delta_\Lambda)$, on a encore

$$\left| \int_{\Lambda} dx \int_{\Omega^{\beta}_{x,x}} d\mu^{\beta}_{x,x}(\omega) e^{-\frac{\beta}{n}\sum_{\ell=1}^{n} V(\omega(\beta\ell/n))} - Z_{\Lambda}(\beta) \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \tag{6.46}$$

uniformément pour $\beta \geq \beta_0 > 0$. Ainsi, même si on ne peut pas établir l'expression du noyau de e^{-tH_Λ} par la formule classique de Feynman-Kac (par exemple si le potentiel V n'est pas régulier), on a une approximation (voire même une estimation d'erreur) de la fonction de partition.

Remarque : Le problème de la formule de Feynman-Kac lorsque le potentiel n'est pas régulier a déjà été étudié notamment par Davies (remarque lors de la soutenance).

Chapitre 7

Approximation des semi-groupes holomorphes en norme d'opérateur

On a déjà mentionné au chapitre 2.2 le rôle de la convergence forte des résolvantes dans la théorie des semi-groupes : la convergence forte d'une suite de semi-groupes est équivalente à la convergence forte des résolvantes des générateurs de ces semi-groupes, résultat connu sous le nom de théorème de Trotter-Neveu-Kato (voir la proposition 2.3). Dans ce chapitre, on va développer une théorie analogue pour la convergence en norme d'opérateurs d'une suite de semi-groupes et la convergence en norme d'opérateur des résolvantes. Plus généralement, et selon l'idée de Chernoff (voir proposition 2.4), on va montrer comment construire des approximations de la forme $F(t/n)^n$, en norme d'opérateur pour les semi-groupes holomorphes contractants sur un espace de Hilbert. La plupart des résultats de ce chapitre figurent dans l'article [7]. Pour commencer, rappelons quelques résultats sur la topologie de la convergence en norme des résolvantes dans l'ensemble des opérateurs fermés.

7.1 Convergence dans l'ensemble des opérateurs fermés

Bien que l'ensemble des opérateurs fermés dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ ne soit pas un espace vectoriel, et donc ne soit pas facile à traiter en tant que tel, il est possible d'y définir des topologies assez intéressantes. Notamment les topologies de la convergence faible, forte et en norme d'opérateur des résolvantes [48]. Ces notions de convergences sont d'autant plus intéressantes que l'on sait que la convergence des résolvantes $(z - A_n)^{-1}$ en un point commun z à tous les ensembles résolvants $\rho(A_n)$ entraîne la même convergence en tout autre point commun à ces ensembles résolvants : la proposition 2.3 en fournit l'exemple pour la convergence forte. La topologie de la convergence en norme des résolvantes est aussi appelée topologie de la convergence généralisée pour les opérateurs fermés [32, Ch.IV.2], et on notera $T_n \xrightarrow{g} T$. En effet cette topologie généralise la topologie de la norme d'opérateur sur l'ensemble des opérateurs bornés. Par ailleurs, elle peut être définie par une distance, celle entre les graphes des opérateurs [32, Ch.IV.2].

Définition 7.1 *Soient deux sous-espaces fermés M et N dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$, et S_M, S_N leurs sphères unité respectives. On définit la distance $d(M,N)$ (ou distance de Hausdorff entre les sphères S_M et S_N) pour $M, N \neq 0$ par*

$$d(M,N) = \max\left(\sup_{x \in S_M} \operatorname{dist}(x, S_N), \sup_{x \in S_N} \operatorname{dist}(x, S_M) \right). \tag{7.1}$$

Si $M = 0$, alors on pose $d(M,N) = 2$ pour tout $N \neq 0$.

On vérifie que $0 \leq d(M,N) \leq 2$ pour tous M et N, et ainsi on peut montrer que l'ensemble des sous-espaces fermés dans l'espace de Banach $\mathfrak{X}$ est un espace métrique complet. Cet espace est constitué de la réunion de parties ouvertes disjointes, chacune étant l'ensemble des sous-espaces d'une dimension donnée. Par définition le graphe d'un opérateur fermé de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$ est un sous-espace fermé du produit $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, qui est encore un espace de Banach. On définit donc la distance entre deux opérateurs fermés comme la distance de leurs graphes au sens de la définition 7.1 ci-dessus, on la notera encore d [32, Ch.IV.2.3] (cette distance est liée à la notion de "gap"). Cette distance ne rend pas complet l'ensemble des opérateurs fermés, car tout sous-espace fermé de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ n'est pas le graphe d'un opérateur fermé. On peut montrer que l'ensemble des opérateurs bornés $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est une partie ouverte de l'ensemble des opérateurs fermés avec cette topologie, et que la topologie induite sur $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est celle de la norme d'opérateur. On a donc $T_n \xrightarrow{g} T$ si et seulement si $d(T_n, T) \to 0$. Voici quelques propriétés essentielles de cette notion de convergence [32, Ch. IV, théorèmes 2.23 et 2.25] :

Proposition 7.2 *Soient T, T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ des opérateurs fermés de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$.*

a) Supposons que $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, alors T_n converge vers T au sens généralisé si et seulement si $T_n \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ à partir d'un certain rang et $\|T_n - T\| \to 0$.

b) Supposons que $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$, alors $T_n \xrightarrow{g} T$ si et seulement si $T_n^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ à partir d'un certain rang et $\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \to 0$.

c) Si $T_n \xrightarrow{g} T$ et si $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, alors $T_n + A \xrightarrow{g} T + A$ au sens généralisé.

d) Si T_n et T ont un domaine dense, alors $T_n \xrightarrow{g} T$ si et seulement si $T_n^* \xrightarrow{g} T^*$.

e) Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, supposons que $\rho(T) \neq \emptyset$. Pour que $T_n \xrightarrow{g} T$, il est nécessaire que pour tout $z \in \rho(T)$, $z \in \rho(T_n)$ à partir d'un certain rang et

$$\|(T_n - z)^{-1} - (T - z)^{-1}\| \to 0$$

et il est suffisant que cette convergence ait lieu pour un $z \in \rho(T)$.

7.2 Théorie de Chernoff et généralisations

Dans l'article [10], Chernoff montra une généralisation du théorème de Trotter, c'est-à-dire avec la possibilité de remplacer la formule $e^{-tA}e^{-tB}$ par d'autres expressions, cf proposition 2.4. De plus, cette méthode fournit une démonstration plus simple du résultat de Trotter [12, §3.4]. La méthode de Chernoff consiste en deux étapes : afin de montrer la convergence $F(t/n)^n - e^{-tH} \xrightarrow{s} 0$, il s'agit de montrer d'abord que $F(t/n)^n - e^{-n(F(t/n)-I)} \xrightarrow{s} 0$ puis que $e^{-n(F(t/n)-I)} - e^{-tH} \xrightarrow{s} 0$. La première étape est connue sous le nom de lemme de Chernoff, et la seconde utilise le théorème de convergence de Trotter-Neveu-Kato (proposition 2.3).

Lemme 7.3 (de Chernoff) *Soit C une contraction linéaire sur un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Alors $t \mapsto e^{t(C-I)}$ est un semi-groupe de contractions et on a*

$$\|(e^{n(C-I)} - C^n)u\| \leq n^{1/2}\|(C-I)u\| \tag{7.2}$$

pour tout $u \in \mathfrak{X}$.

Cette majoration (7.2) est surprenante au premier abord, puisque, écrit ainsi, le membre de droite ne tend pas vers 0. Cependant dans la suite Chernoff choisit $C = F(t/n)$ de sorte qu'il arrive à compenser le facteur $n^{1/2}$ et à trouver un majorant qui tend fortement vers 0. Par ailleurs, si C est un opérateur auto-adjoint positif de norme inférieure à 1, soit $0 \leq C \leq I$ alors on a $\|e^{n(C-I)} - C^n\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\left(e^{n(t-1)} - t^n\right) \leq 1/n$ pour tout $n \geq 1$ [45]. Cette observation suggère de chercher une condition sur C, plus faible que $0 \leq C = C^* \leq 1$, qui entraînerait encore $\|e^{n(C-I)} - C^n\| \to 0$.

En effet on cherche un résultat analogue à la proposition 2.4 de Chernoff dans la topologie de la norme d'opérateur et dans un espace de Hilbert. En fait, un premier résultat dans cette direction a été obtenu pour des opérateurs auto-adjoints [45], voir les propositions 2.12 et 2.13.

On va montrer comment remplacer l'hypothèse que les opérateurs sont auto-adjoints par une condition beaucoup plus faible sur l'image numérique. Notamment il faudra se passer de l'hypothèse de normalité, qui joue un rôle essentiel dans les arguments de l'article [45] en fournissant la représentation spectrale. L'idée est plutôt de revenir à la méthode de Chernoff, et d'en reprendre les étapes essentielles en ajoutant une hypothèse nouvelle, fondée sur la notion de *contraction quasi-sectorielle* construite exprès dans ce but.

Si $0 < \theta \leq \pi$, on note S_θ le secteur ouvert

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta\}.$$

Si $0 \leq \theta \leq \pi/2$ on définit comme en (4.2.9) l'ensemble convexe fermé D_θ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ (voir Figure 7.1) par

$$D_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sin\theta\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1-z)| \leq \theta \text{ et } |z-1| \leq \cos\theta\}. \tag{7.3}$$

Pour chaque $\theta \in [0, \pi/2]$, on définit une classe d'opérateurs contractants appelés quasi-sectoriels de demi-angle θ.

Définition 7.4 *Soit C un opérateur contractant sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On dit que C est quasi-sectoriel de demi-angle $\theta \in [0, \pi/2]$ si son image numérique* $\mathrm{Nr}(C)$ *est inclus dans l'ensemble D_θ.*

On vérifie aisément par (7.3) que $I-C$ est un opérateur m-sectoriel de demi-angle θ, d'où l'appellation de contraction quasi-sectorielle. La classe $\theta = 0$ (la plus petite) correspond aux opérateurs auto-adjoints positifs de norme inférieure à 1, tandis que pour $\theta = \pi/2$ (la plus grande) la classe contient tous les opérateurs contractants sur $\mathfrak{H}$. Les autres classes sont comprises entre ces deux extrêmes (en effet, la famille D_θ est croissante). La pertinence de cette définition 7.4 sera justifiée par des exemples dans la partie 7.3.

On montrera dans la partie 7.4 que si C est une contraction quasi-sectorielle, alors $\|e^{n(C-I)} - C^n\| \leq O(1/n^{1/3})$, ce qui remplacera le lemme de Chernoff, avec cette fois un majorant en norme d'opérateur qui tend vers 0 (théorème 7.10). Pour la deuxième étape, on établira un théorème analogue à la proposition 2.3 pour la convergence en norme d'opérateur (théorème 7.13). Pour cela, il faut considérer une suite d'opérateurs uniformément m-sectoriels, auxquels correspondent donc des semi-groupes holomorphes uniformément bornés. Pour cette classe d'opérateurs, on montre que $A_n \xrightarrow{g} A$ si et seulement si $\|e^{-tA_n} - e^{-tA}\| \to 0$. Ainsi la convergence généralisée des générateurs correspond à la convergence en norme d'opérateur pour les semi-groupes. Par ailleurs, cette topologie est bien la topologie naturelle des semi-groupes holomorphes, qui sont des fonctions holomorphes en norme d'opérateur dans un certain secteur S_ω , $\omega < \pi/2$, et les générateurs de ces semi-groupes sont exactement les opérateurs m-sectoriels de demi-angle $\theta = \pi/2 - \omega$.

Soit $\{\Phi(s)\}_{s\geq 0}$ une famille de contractions quasi-sectorielles sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, telles que $\mathrm{Nr}(\Phi(s)) \subseteq D_\theta$ avec $0 \leq \theta < \pi/2$ indépendant de $s \geq 0$. Soit $X_s = (I - \Phi(s))/s$ ($s > 0$), et soit X_0 un opérateur fermé dans un sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$ à ensemble résolvant non vide. Alors le résultat principal de ce chapitre s'exprime comme l'équivalence entre les deux convergences suivantes :

$$\begin{aligned} \|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1} P_0\| &\longrightarrow 0 \text{ quand } s \to +0, & (7.4) \\ \|\Phi(t/n)^n - e^{-tX_0} P_0\| &\longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty,\ t > 0, & (7.5) \end{aligned}$$

pour un (ou de manière équivalente pour tout) $\zeta \in S_{\pi-\theta}$.

Comme première conséquence du théorème 7.18 on trouve que la formule d'approximation d'Euler pour la fonction exponentielle (voir (1.9)) converge en norme d'opérateur pour tout opérateur m-sectoriel (théorème 7.19). D'autres conséquences sont présentées dans la partie 7.6 : conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de formule analogues à la formule de Trotter. Par exemple pour la moyenne arithmétique de résolvantes ou de semi-groupes (voir théorème 7.20) et pour la formule produit symétrisée $f(tA)^{1/2} g(tB) f(tA)^{1/2}$ où $f(t), g(t) = (1+t)^{-1}$ or e^{-t}, voir théorème 7.21.

7.3 Contractions quasi-sectorielles

La notion de contraction quasi-sectorielle a un lien particulièrement étroit avec celle d'opérateur m-sectoriel. Les deux exemples présentés ci-dessous justifient bien, me semble-t-il, cette nouvelle définition. Soit A un opérateur m-sectoriel de demi-angle θ dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Alors A fournit naturellement deux familles de contractions quasi-sectorielles : par sa résolvante, et par le semi-groupe engendré par $-A$.

7.3.1 Résolvante d'un opérateur sectoriel

La famille des résolvantes $F(t) = (I + tA)^{-1}$, $t \geq 0$, a les propriétés suivantes

(i) Comme $F(t = 0) = I$ et que pour $t > 0$

$$\|F(t)\| \leq \frac{1}{t\,\mathrm{dist}(1/t, -S_\theta)} = 1, \tag{7.6}$$

$F(t)$ est une famille de contractions ;

(ii) $\mathrm{Nr}(F(t)) \subseteq S_\theta$, car pour tout $u \in \mathfrak{H}$:

$$(u, F(t)u) = (v, v) + t(Av, v) \in S_\theta, \tag{7.7}$$

où $v = (I + tA)^{-1}u$.

(iii) $\mathrm{Nr}(I - F(t)) \subseteq S_\theta$, puisque pour tout $u \in \mathfrak{H}$

$$(u, (I - F(t))u) = ((I + tA)v, tAv) = t(v, Av) + t^2(Av, Av) \in S_\theta, \tag{7.8}$$

où $v = (I + tA)^{-1}u$.

Donc, on a $\mathrm{Nr}(F(t)) \subseteq S_\theta \cap (1 - S_\theta) \subseteq D_\theta$, c'est-à-dire $F(t)$ est un contraction quasi-sectorielle pour tout $t \geq 0$.

7.3.2 Semi-groupe associé à un opérateur sectoriel

Le semi-groupe e^{-tA} associé à l'opérateur m-sectoriel A est holomorphe et contractant dans le secteur $S_{\pi/2-\theta}$ (cf proposition 1.14). En fait, ce semi-groupe hérite des propriétés de A dans le sens suivant : $\mathrm{Nr}(e^{-tA}) \subseteq D_\theta$ pour tout $t \geq 0$. Ce n'est pas aussi simple que pour la résolvante. L'argument principal consiste à utiliser le théorème suivant sur l'image numérique dû à Kato [33] :

Proposition 7.5 *Soit $f(z)$ une fraction rationnelle telle que $f(\infty) = \infty$. Soit E' un compact convexe dans le plan complexe, et soient $E = f^{-1}(E')$ et K le noyau convexe de E. Si A est un opérateur dans un espace de Hilbert tel que $\mathrm{Nr}(A) \subseteq K$, alors $\mathrm{Nr}(f(A)) \subseteq E'$. En particulier si D est un compact convexe de $\mathbb{C}$ avec $f(D) \subseteq D$ et $\mathrm{Nr}(A) \subseteq D$, alors $\mathrm{Nr}(f(A)) \subseteq D$.*

Lemme 7.6 *Soit $f(z) = z^n$ où $n \in \mathbb{N}$, alors $f(D_\theta) \subseteq D_\theta$.*

Démonstration

Si $|z| \leq \sin\theta$, alors $|z^n| \leq \sin\theta$ et $z^n \in D_\theta$. D'où il reste à examiner $z \in D_\theta$, $|z| > \sin\theta$. Considérons la famille de segments de droite $z(t) = 1 - te^{i\beta}$ dans D_θ, paramétrée par $0 \leq t \leq \cos\theta$ et $-\theta \leq \beta \leq \theta$. Montrons que les images de ces segments par l'application f, c'est-à-dire les points $\zeta(t) = z(t)^n$, sont encore dans D_θ. $\{\zeta(t), 0 \leq t \leq \cos\theta\}$ forme une courbe plane régulière, i.e. $\zeta'(t) = -ne^{i\beta}(1 - te^{i\beta})^{n-1} \neq 0$. Donc pour chaque courbe $\zeta(t)$ on peut définir un vecteur unitaire tangent $T(t)$:

$$T(t) = \frac{\zeta'(t)}{|\zeta'(t)|} = -e^{i\beta}\left(\frac{1 - te^{i\beta}}{|1 - te^{i\beta}|}\right)^{n-1}. \tag{7.9}$$

La courbure $c(t)$ d'une courbe plane régulière est définie par $T'(t) = ic(t)T(t)$, on trouve donc d'après (7.9) :

$$T'(t) = -e^{i\beta}(n-1)\left(\frac{z}{|z|}\right)^{n-2}\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{|z|}\right) = i(n-1)\frac{\sin\beta}{|z|^2}e^{i\beta}\left(\frac{z}{|z|}\right)^{n-1}, \tag{7.10}$$

où $z = z(t) = 1 - te^{i\beta}$. D'où l'expression de la courbure est $c(t) = -(n-1)\sin\beta/|z(t)|^2$. Elle ne s'annule pas sur l'intervalle $0 \leq t \leq \cos\theta$ et elle a le signe opposé de β. Donc, la courbe $\zeta(t)$ est incluse dans tout demi-plan défini par une tangente et contenant le centre de courbure correspondant. Soit $t = 0$, alors la tangente $z(t)$, et le centre de courbure est le point $1 + ie^{i\beta}(n-1)\sin\beta$. Ainsi toutes les images $\zeta(t) = z(t)^n$, pour $0 \leq t \leq \cos\theta$ et $-\theta \leq \beta \leq \theta$, sont comprises entre les deux tangentes extrêmes correspondant à $\beta = \pm\theta$. Ce qui termine la démonstration.

□

Théorème 7.7 *Si A est un opérateur m-sectoriel de demi-angle θ, alors l'image numérique* $\mathrm{Nr}(e^{-tA})$ *est incluse dans D_θ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration

D'après l'exemple de la partie 7.3.1 on a l'inclusion $\mathrm{Nr}((I + tA/n)^{-1}) \subseteq D_\theta$ pour tout réel positif t tout entier non nul n. Donc, en appliquant la proposition 7.5 et le lemme 7.6 à la fraction rationnelle $f(z) = z^n$ ($f(\infty) = \infty$), à l'opérateur $(I + tA/n)^{-1}$, et à l'ensemble compact convexe D_θ, on obtient l'inclusion $\mathrm{Nr}((I + tA/n)^{-n}) \subseteq D_\theta$ pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

D'autre part, on sait (voir proposition 1.5 ou [32, Ch.IX]) que la suite $(I + tA/n)^{-n}$ converge fortement vers le semi-groupe e^{-tA} quand $n \to \infty$. On en déduit : $\lim_{n\to\infty}((I + tA/n)^{-n}u, u) = (e^{-tA}u, u) \in D_\theta$ pour tout vecteur unitaire $u \in \mathfrak{H}$, ce qui prouve le résultat.

□

7.4 Généralisation du lemme de Chernoff

En supposant que la contraction C du lemme de Chernoff 7.3 est quasi-sectorielle, on va montrer que l'estimation (7.2) en $n^{1/2}$ peut être remplacée par une estimation en norme d'opérateur convergeant vers 0.

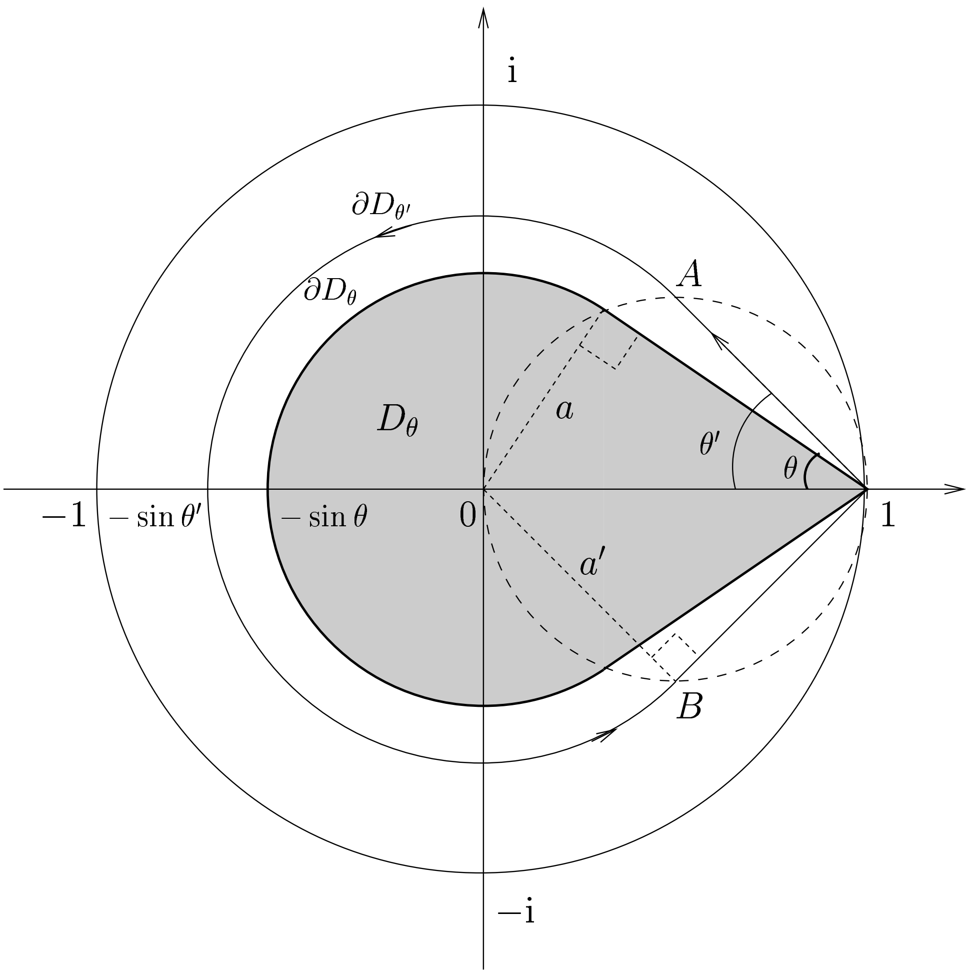

FIG. 7.1 – L'ensemble D_θ (en grisé) de frontière ∂D_θ, $a = \sin\theta$, ainsi qu'un choix de chemin d'intégration $\partial D_{\theta'}$ dans l'ensemble résolvant $\rho(C)$, avec $a' = \sin\theta' > a$. Ce chemin consiste en un arc AB de rayon a' et deux segments $[1, A]$ et $[1, B]$ tangents. Le cercle en pointillé correspond à l'ensemble des points de tangence pour les différentes valeurs de $\theta \in [0, \pi/2]$.

Lemme 7.8 *Si C est une contraction quasi-sectorielle sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire il existe $0 \leq \theta < \pi/2$ tel que l'image numérique $\mathrm{Nr}(C) \subseteq D_\theta$, alors il existe une constante $K > 0$ (dépendant seulement de θ) telle que*

$$\|C^n(I - C)\| \leq \frac{K}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Démonstration

Puisque l'opérateur C est borné, son spectre est inclus dans l'adhérence de l'image numérique $\overline{\mathrm{Nr}(C)}$. Alors en choisissant $\theta < \theta' < \pi/2$ on obtient un chemin $\partial D_{\theta'}$ en dehors de D_θ, mais à l'intérieur du cercle unité (voir Figure 7.1). Ainsi par la formule de Dunford-Taylor on a :

$$C^n(I-C) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\theta'}} \frac{z^n(1-z)}{z-C}dz. \tag{7.12}$$

D'après l'inégalité (1.31) de la proposition 1.20 on obtient : $\|(z-C)^{-1}\| \leq \mathrm{dist}(z, D_\theta)^{-1}$. D'où $\|(z-C)^{-1}\| \leq (\cos\theta' \sin(\theta'-\theta))^{-1}$ pour $|\arg z| \geq \pi/2-\theta'$, et $\|(z-C)^{-1}\| \leq (|1-z|\sin(\theta'-\theta))^{-1}$ pour $|\arg z| \leq \pi/2-\theta'$. Considérons le paramétrage suivant de $\partial D_{\theta'}$: pour l'arc AB, on prend $z(t) = e^{it}\sin\theta'$ avec $\pi/2 - \theta' \leq t \leq 3\pi/2+\theta'$, et pour les segments $[1, A]$, $[1, B]$, on pose respectivement $z_\mp(s) = 1 - se^{\mp i\theta'}$ avec $0 \leq s \leq \cos\theta'$. Alors

$$\begin{aligned}
\|C^n(I-C)\| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta'}^{\frac{3\pi}{2}+\theta'} \frac{|\sin\theta'|^{n+1}|1-e^{it}\sin\theta'|}{\cos\theta'\sin(\theta'-\theta)}dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\cos\theta'} \frac{|(1-e^{i\theta'}s)^n e^{i\theta'}s|}{s(\sin(\theta'-\theta))}ds \\
&\leq \frac{2(\sin\theta')^{n+1}}{\cos\theta'\sin(\theta'-\theta)} + \int_0^{\cos\theta'} \frac{\left((1-s\cos\theta')^2+s^2(\sin\theta')^2\right)^{n/2}}{\pi\sin(\theta'-\theta)}ds.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Par convexité (pour $0 \leq s \leq \cos\theta'$) on obtient que

$$(1-s\cos\theta')^2 + s^2(\sin\theta')^2 \leq 1 - s\cos\theta',$$

ce qui conduit à l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\cos\theta'} \left((1-s\cos\theta')^2+s^2(\sin\theta')^2\right)^{n/2} ds &\leq \int_0^{\cos\theta'} (1-s\cos\theta')^{n/2}ds \\
\int_{(\sin\theta')^2}^1 u^{n/2}\frac{du}{\cos\theta'} &\leq \frac{1-(\sin\theta')^{n+2}}{(n/2+1)\cos\theta'}.
\end{aligned}$$

Donc, par (7.13) on trouve l'estimation (7.11)

$$\|C^n(I-C)\| \leq \frac{2(\sin\theta')^{n+1}}{\cos\theta'\sin(\theta'-\theta)} + 2\frac{1-(\sin\theta')^{n+2}}{\pi(n+2)\cos\theta'\sin(\theta'-\theta)} \leq \frac{K}{n+1}, \tag{7.14}$$

où

$$K = \frac{2}{\cos\theta'\sin(\theta'-\theta)}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{e\ln(\sin\theta')}\right). \tag{7.15}$$

□

Lemme 7.9 *Si C est une contraction sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ telle que l'inégalité (7.11) soit vérifiée pour un certain $K > 0$, alors :*

$$\|C^n - e^{n(C-I)}\| \leq \frac{2K+2}{n^{1/3}},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{7.16}$$

Démonstration

Comme l'opérateur C est borné, on a la représentation :

$$C^n - e^{n(C-I)} = e^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!}(C^n - C^m). \tag{7.17}$$

Soit $\epsilon_n = n^{2/3}$, $n \geq 1$. Divisons cette somme (7.17) en deux parties : la partie centrale, pour $|m-n| \leq \epsilon_n$ et les parties latérales $|m-n| > \epsilon_n$. On majore les parties latérales grâce à l'inégalité de Tchebychev (voir par exemple [53]). Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre n, soit $\mathrm{P}(X = m) = n^m e^{-n}/m!$. Alors la moyenne est $\mathrm{E}(X) = n$ et la variance $\mathrm{Var}(X) = n$. Donc, par l'inégalité de Tchebychev :

$$\forall \epsilon > 0,\ \mathrm{P}(|X-n| > \epsilon) \leq \frac{n}{\epsilon^2}, \tag{7.18}$$

et ainsi

$$e^{-n} \sum_{|m-n|>\epsilon_n} \frac{n^m}{m!} \|C^n - C^m\| \leq \frac{2n}{\epsilon_n^2} = \frac{2}{n^{1/3}}. \tag{7.19}$$

Pour majorer la partie centrale de la somme (7.17), où $|m-n| \leq \epsilon_n$, on utilise le lemme 7.8 :

$$\begin{aligned} \|C^n - C^m\| &= \left\| C^{n-[\epsilon_n]} \left(C^{[\epsilon_n]} - C^{m-n+[\epsilon_n]} \right) \right\| \\ &\leq |m-n| \|C^{n-[\epsilon_n]}(I-C)\| \\ &\leq \epsilon_n \, \frac{K}{n-[\epsilon_n]+1} \leq \frac{2K}{n^{1/3}}, \end{aligned}$$

($[\cdot]$ représente la partie entière). On obtient donc :

$$e^{-n} \sum_{|m-n|\leq\epsilon_n} \frac{n^m}{m!} \|C^n - C^m\| \leq \frac{2K}{n^{1/3}} \tag{7.20}$$

pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette majoration avec (7.19) donne (7.16).

□

Les lemmes 7.8 et 7.9 entraînent immédiatement la généralisation du lemme de Chernoff 7.3.

Théorème 7.10 *Soit C une contraction quasi-sectorielle sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, soit $\mathrm{Nr}(C) \subseteq D_\theta$ avec $0 \leq \theta < \pi/2$. Alors*

$$\left\| C^n - e^{n(C-I)} \right\| \leq \frac{M}{n^{1/3}},\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.21}$$

où $M = 2K + 2$ et K est défini par (7.15).

Remarque 7.11 *Si on ne cherche pas d'estimation de la vitesse de convergence, alors la seule convergence en norme d'opérateur de (7.21) peut être établie par le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à l'intégrale de Dunford-Taylor pour* $C^n - e^{n(C-I)}$ *le long du chemin* $\partial D_{\theta'}$*, cf (7.12).*

Remarque 7.12 *Si* C *est auto-adjoint et positif (i.e.* $\theta = 0$*), alors directement par le théorème spectral on obtient (cf [43],[45]) :*

$$\|C^n(I-C)\| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } \|C^n - e^{n(C-I)}\| \leq \frac{1}{n}. \tag{7.22}$$

7.5 Théorèmes d'approximation

La deuxième étape de la preuve du théorème de Chernoff utilise le théorème de convergence de Trotter-Neveu-Kato [12, Ch. 3.3], [20, Ch. 1.7]. Il faut donc à présent montrer un résultat analogue pour la convergence en norme d'opérateur. Pour cela, on va exploiter le fait que les opérateurs dont il s'agit sont m-sectoriels et les semi-groupes associés sont holomorphes. Dans le cas d'opérateurs auto-adjoints positifs, cette généralisation a été faite dans [45, lemme 2.1].

Lemme 7.13 *Soit* $\{X_s\}_{s>0}$ *une famille d'opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert* $\mathfrak{H}$ *avec* $\mathrm{Nr}(X_s) \subseteq S_\theta$ *pour un* $0 < \theta < \pi/2$ *et pour tout* $s > 0$*. Soit* X_0 *un opérateur m-sectoriel défini dans un sous-espace fermé* $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$*, avec* $\mathrm{Nr}(X_0) \subseteq S_\theta$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \qquad \lim_{s\to+0} \left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0\right\| = 0, \text{ pour tout } \zeta \in S_{\pi-\theta}; \tag{7.23}$$

$$(b) \qquad \lim_{s\to+0} \left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}P_0\right\| = 0, \text{ pour tout } t > 0. \tag{7.24}$$

P_0 *est le projecteur orthogonal de* $\mathfrak{H}$ *sur* $\mathfrak{H}_0$*.*

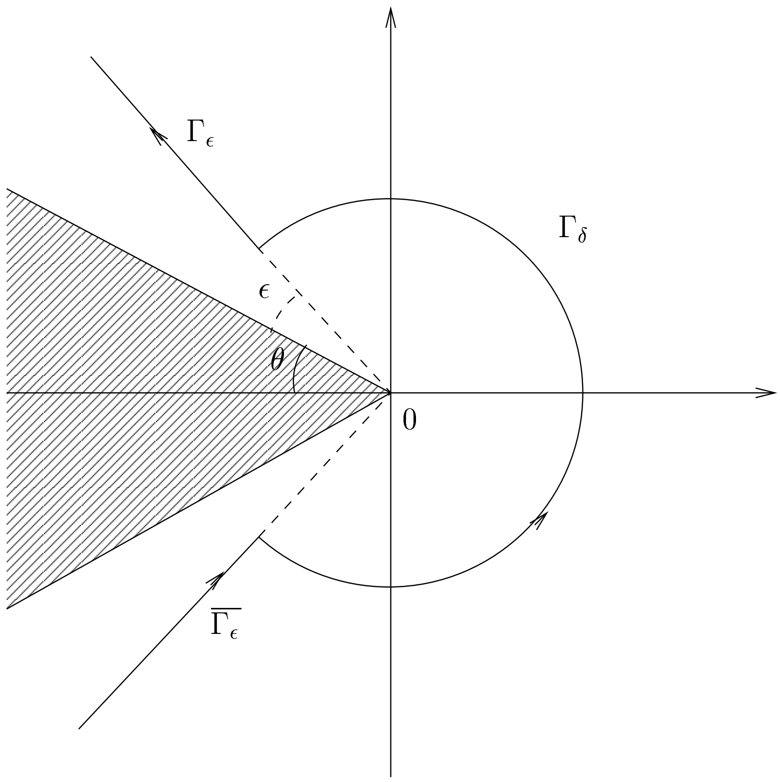

FIG. 7.2 – Le chemin d'intégration Γ.

Démonstration

$(a) \Rightarrow (b)$

Comme les opérateurs $\{X_s\}_{s>0}$ sont m-sectoriels avec $\mathrm{Nr}(X_s) \subseteq S_\theta$, la formule de Dunford-Taylor

$$e^{-tX_s} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\zeta \frac{e^{t\zeta}}{\zeta + X_s} \tag{7.25}$$

définit une famille de semi-groupes holomorphes $\{e^{-tX_s}\}_{s>0}$ avec $t \in S_{\pi/2-\theta}$. Le chemin $\Gamma \subset S_{\pi-\theta}$ entourant le secteur $-S_\theta$ est orienté positivement et fermé à l'infini, donc entoure le spectre $\sigma(-X_s) \subseteq \overline{\mathrm{Nr}(-X_s)}$ (voir Figure 7.2). Les mêmes observations valent pour l'opérateur X_0 :

$$e^{-tX_0}P_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\zeta \frac{e^{t\zeta}}{\zeta + X_0}P_0. \tag{7.26}$$

On choisit $\Gamma = \Gamma_\epsilon \cup \Gamma_\delta \cup \overline{\Gamma_\epsilon}$, où l'arc $\Gamma_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta > 0, |\arg z| \leq \pi - \theta - \epsilon\}$ (avec $0 < \epsilon < \pi/2 - \theta$) et $\Gamma_\epsilon, \overline{\Gamma_\epsilon}$ sont deux demi-droites conjuguées, $\Gamma_\epsilon = \{z \in \mathbb{C},\ \arg z = \pi - \theta - \epsilon,\ |z| \geq \delta\}$. Alors pour $t > 0$ on obtient

$$\left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}P_0\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |d\zeta||e^{t\zeta}| \left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0\right\|. \tag{7.27}$$

Comme les opérateurs X_s et X_0 sont m-sectoriels, d'après la proposition 1.20 on a l'estimation suivante pour les résolvantes

$$\left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0\right\| \leq \frac{2}{\operatorname{dist}(\zeta, -S_\theta)}, \tag{7.28}$$

ce qui implique

$$\sup_{\zeta\in\Gamma} \left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0\right\| \leq \frac{2}{\delta \sin\epsilon}. \tag{7.29}$$

Comme l'intégrale $I_t = \int_\Gamma |d\zeta||e^{t\zeta}|$, sur le chemin $\Gamma = \Gamma_\epsilon \cup \Gamma_\delta \cup \overline{\Gamma_\epsilon}$, converge pour tout $t > 0$, la condition (a), les inégalités (7.27), (7.29) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue conduisent à la convergence (b).

$(b) \Rightarrow (a)$

D'après la transformation de Laplace pour les semi-groupes e^{-tX_s} et e^{-tX_0}, on trouve pour $\operatorname{Re}\zeta > 0$:

$$(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0 = \int_0^\infty dt e^{-t\zeta}\left(e^{-tX_s} - e^{-tX_0}P_0\right). \tag{7.30}$$

Puisque les opérateurs X_s sont m-sectoriels, les semi-groupes correspondant sont contractants : $\|e^{-tX_s}\| \leq 1$, $\|e^{-tX_0}P_0\| \leq 1$ pour $t \in S_{\pi/2-\theta}$, $s > 0$. Alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique (a) pour $\operatorname{Re}\zeta > 0$, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}P_0\right\| &\leq \\ \int_0^\infty dt e^{-t\operatorname{Re}\zeta}&\left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}P_0\right\|\end{aligned} \tag{7.31}$$

et la convergence ponctuelle (b). L'extension à tout le secteur $S_{\pi-\theta}$ est due à la proposition 7.2 [32, Ch.IV, théorème 2.25]. □

Par une autre méthode, on peut donner une majoration directe de la différence entre les semi-groupes. Le lemme suivant est inspiré du lemme 2.1 de [30].

Lemme 7.14 *Si $\{X_s\}_{s\geq 0}$ sont des opérateurs uniformément m-sectoriels, alors il existe une constante M telle que pour tous $s, t > 0$*

$$\left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}\right\| \leq \frac{Me^t}{t}\left\|(I + X_s)^{-1} - (I + X_0)^{-1}\right\| \tag{7.32}$$

Démonstration

On utilise la formule suivante, tirée de [32, Ch.IX, (2.27)],

$$\begin{aligned}&(I + X_s)^{-1}\left(e^{-t(I+X_s)} - e^{-t(I+X_0)}\right)(I + X_0)^{-1} \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)(I+X_s)}\left((I + X_s)^{-1} - (I + X_0)^{-1}\right)e^{-\tau(1+X_0)}d\tau \\ &= \int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t = I_1 + I_2\end{aligned} \tag{7.33}$$

Posons $D_s = (I+X_s)^{-1} - (I+X_0)^{-1}$. Alors par intégration par parties on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-e^{-(t-\tau)(I+X_s)}D_s e^{-\tau(I+X_0)}(I+X_0)^{-1}\right]_0^{t/2} \\ &\quad + \int_0^{t/2}(I+X_s)e^{-(t-\tau)(I+X_s)}D_s e^{-\tau(I+X_0)}(I+X_0)^{-1}d\tau \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (I+X_s)I_1(I+X_0) &= -(I+X_s)e^{-\frac{t}{2}(I+X_s)}D_s e^{-\frac{t}{2}(I+X_0)} + (I+X_s)e^{-t(I+X_s)}D_s \\ &\quad + \int_0^{t/2}(I+X_s)^2 e^{-(t-\tau)(I+X_s)}D_s e^{-\tau(I+X_0)}d\tau, \end{aligned}$$

et on trouve l'estimation

$$\begin{aligned} \|(I+X_s)I_1(I+X_0)\| &\leq \frac{2M'}{t}\|D_s\| + \frac{M'}{t}\|D_s\| + \int_0^{t/2}\frac{M''}{(t-\tau)^2}\|D_s\|ds \\ &\leq (3M'+M'')\frac{\|D_s\|}{t} \end{aligned}$$

où M' et M'' proviennent de majorations d'intégrales analogues à (7.25) :

$$M' = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\zeta e^{t\zeta}|}{\delta \sin\epsilon}|d\zeta| \text{ et } M'' = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\zeta^2 e^{t\zeta}|}{\delta\sin\epsilon}|d\zeta|, \tag{7.34}$$

en utilisant que la famille $\{X_s\}_{s\geq 0}$ est uniformément sectorielle. De la même manière, on a

$$\|(I+X_s)I_2(I+X_0)\| \leq (3M'+M'')\frac{\|D_s\|}{t}. \tag{7.35}$$

D'où on obtient (7.32) avec $M = 6M' + 2M''$. □

Remarque 7.15 *Le théorème de Vitali 5.12 sur la convergence des fonctions holomorphes permet d'étendre les convergences* (a) *et* (b) *car les fonctions considérées sont holomorphes et uniformément bornées. En particulier, on peut remplacer de manière équivalente les conditions* (a) *et* (b) *respectivement par*

$(\tilde{a})$ $\quad \lim_{s\to+0}\left\|(\zeta+X_s)^{-1} - (\zeta+X_0)^{-1}P_0\right\| = 0,$
uniformément sur les compacts de $S_{\pi-\theta}$;

$(\tilde{b})$ $\quad \lim_{s\to+0}\left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}P_0\right\| = 0,$
uniformément sur les compacts de $S_{\pi/2-\theta}$.

En fait, on peut montrer l'équivalence dans le lemme 7.13 avec des conditions plus faibles :

Corollaire 7.16 *Soit $\{X_s\}_{s>0}$ une famille d'opérateurs uniformément m-sectoriels, c'est-à-dire $\mathrm{Nr}(X_s) \subseteq S_\theta$ pour un $0 < \theta < \pi/2$ et pour tout $s > 0$. Soit X_0 un opérateur fermé dans $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$ à ensemble résolvant non vide. Alors les conditions suivantes sont équivalentes à (a) et (b) :*

$$(a') \qquad \lim_{s\to+0} \left\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}\right\| = 0, \ \textit{pour un } \zeta \in S_{\pi-\theta};$$

$$(b') \qquad \lim_{s\to+0} \left\|e^{-tX_s} - e^{-tX_0}\right\| = 0,$$

$$\textit{pour } t \textit{ dans une partie de }]0,+\infty[\textit{ ayant un point d'accumulation,}$$

si $-X_0$ est générateur d'un semi-groupe, soit : e^{-tX_0} est bien défini au moins pour $t \geq 0$.

Démonstration

Il suffit de vérifier que la condition (a') implique que (a) est vraie et que l'opérateur X_0 est m-sectoriel de demi-angle θ ; et d'autre part que la condition (b') implique (b) pour le même opérateur X_0.

D'après la proposition 7.2 [32, Ch.IV, théorème 2.25], la condition (a') implique $X_s \xrightarrow{g} X_0$. De plus, ceci entraîne que la convergence (a') a lieu pour tout ζ dans l'ensemble résolvant de X_0. Puisque cet ensemble est ouvert et non vide, il a au moins un point d'accumulation. Alors, comme les normes $\|(\zeta + X_s)^{-1}\|$ sont uniformément bornées en s pour $\zeta - \epsilon \in S_{\pi-\theta}$ (pour un $\epsilon > 0$ fixé), on peut appliquer le théorème de Vitali à la limite (a'). D'où on obtient la convergence pour tout $\zeta \in S_{\pi-\theta}$, et en particulier, (a) est vérifiée.

Pour montrer que X_0 est m-sectoriel de demi-angle θ, on observe que la convergence (7.23) implique :

$$\|(\zeta + X_0)^{-1}\| = \lim_{s\to 0} \|(\zeta + X_s)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(\zeta, -S_\theta)}. \tag{7.36}$$

Lorsque $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, on obtient $\|(\zeta + X_0)^{-1}\| \leq 1/\mathrm{Re}\,\zeta$. Cette majoration de la résolvante implique que X_0 est de type $(\pi/2, 1)$ donc m-accrétif. De la même manière on vérifie que $e^{i\varphi}X_0$ est m-accrétif pour tout $\theta - \pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 - \theta$, ce qui montre que X_0 est m-sectoriel de demi-angle θ.

L'implication $(b') \Rightarrow (b)$ est une conséquence directe du théorème de Vitali . Comme $\|e^{-tX_s}\| \leq 1$ pour tout $t \in S_{\pi/2-\theta}$ et $s > 0$, et avec (b') on trouve que les fonctions $\{e^{-tX_s}\}_{s>0}$ convergent en norme d'opérateur lorsque $s \to +0$, pour tout $t \in S_{\pi/2-\theta}$. Donc, on en déduit que la limite e^{-tX_0} est un semi-groupe holomorphe et que $\|e^{-tX_0}\| \leq 1$ pour $t \in S_{\pi/2-\theta}$, ainsi l'opérateur X_0 est m-sectoriel de demi-angle θ dans $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$. □

De la même manière que la convergence forte des résolvantes de générateurs de semi-groupes correspond à la convergence forte des semi-groupes associés (voir [12, Ch. 3.3] ou [20, Ch. 1.7]), on a montré que la convergence généralisée d'une suite d'opérateurs m-sectoriels de demi-angle θ équivaut à la convergence en norme d'opérateur des semi-groupes holomorphes associés sur tout leur domaine d'analyticité. De plus l'ensemble des opérateurs m-sectoriels de demi-angle θ est fermé dans l'ensemble des opérateurs fermés pour la topologie de la convergence généralisée.

Ce résultat est assez naturel puisque les semi-groupes e^{-tX} correspondant aux opérateurs m-sectoriels X de demi-angle θ sont les semi-groupes holomorphes dans le secteur S_θ et tels que $\|e^{-tX}\| \leq 1$ pour tout $t \in S_\theta$. On a identifié les topologies correspondantes pour ces deux ensembles d'opérateurs, et qui rendent ces ensembles fermés. La topologie de la convergence en norme d'opérateur uniformément sur les compacts du secteur d'analyticité est bien adaptée à ces semi-groupes puisque ce sont des fonctions holomorphes au sens de la norme d'opérateur dans le secteur ouvert S_θ.

Une autre manière de présenter ce résultat est la suivante :

Corollaire 7.17 *L'application $X \mapsto (e^{-tX})_{t\in S_\theta}$ est une bijection bicontinue de l'ensemble des opérateurs m-sectoriels de demi-angle θ muni de la topologie de la convergence généralisée sur l'ensemble des semi-groupes holomorphes et contractants dans le secteur S_θ muni de la topologie de la convergence en norme d'opérateur uniforme sur les compacts de S_θ.*

À présent la généralisation du théorème de Chernoff est presque achevée. On aboutit au résultat suivant :

Théorème 7.18 *Soit $\{\Phi(s)\}_{s\geq 0}$ une famille de contractions quasi-sectorielles sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Supposons qu'il existe $\theta \in]0, \pi/2[$ tel que $\mathrm{Nr}(\Phi(s)) \subseteq D_\theta$, pour tout $s \geq 0$. Soit $X_s = (I - \Phi(s))/s$, et soit X_0 un opérateur fermé à ensemble résolvant non vide, défini dans un sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}$. Alors la famille $\{X_s\}_{s>0}$ converge vers X_0 au sens généralisé quand $s \to +0$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\Phi(t/n)^n - e^{-tX_0}P_0\right\| = 0,\ t > 0. \tag{7.37}$$

P_0 représente le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$.

Démonstration

La condition est nécessaire : observons que $\mathrm{Nr}(\Phi(s)) \subseteq D_\theta$ entraîne $\mathrm{Nr}(X_s) \subseteq S_\theta$ pour tout $s > 0$. D'où, la convergence de X_s au sens généralisé correspond à la condition (a) du lemme 7.13. Comme

$$\begin{aligned} \|\Phi(t/n)^n - e^{-tX_0}P_0\| \ \leq & \\ & \|\Phi(t/n)^n - e^{-n(I-\Phi(t/n))}\| + \|e^{-n(I-\Phi(t/n))} - e^{-tX_0}P_0\|, \end{aligned} \tag{7.38}$$

la conclusion découle du théorème 7.10 avec $C = \Phi(t/n)$ et l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ du lemme 7.13.

La condition est suffisante : il faut étudier la différence

$$\begin{aligned} \|e^{-tX(t/n)} - e^{-tX_0}P_0\| \ \leq & \\ & \|e^{-tX(t/n)} - \Phi(t/n)^n\| + \|\Phi(t/n)^n - e^{-tX_0}P_0\|,\ t > 0. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Le premier terme du membre de droite de (7.39) est majoré par le théorème 7.10 pour $C = \Phi(t/n)$. Le second terme est supposé tendre vers zéro par (7.37). Donc la convergence généralisée découle de l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ du lemme 7.13.

□

7.6 Applications

7.6.1 Formule d'Euler pour les semi-groupes

Soit A un opérateur m-sectoriel de demi-angle $0 < \theta < \pi/2$. Alors les opérateurs $F(t) = (I + tA)^{-1}$, $t \geq 0$ sont des contractions quasi-sectorielles de demi-angle θ, c'est-à-dire $\mathrm{Nr}(F(t)) \subseteq D_\theta$ (cf Section 7.3.1). Soit $X_s = (I - F(s))/s$, $s > 0$, et $X_0 = A$. Alors X_s converge vers X_0 au sens généralisé quand $s \to +0$, d'après :

$$\|(\zeta + X_s)^{-1} - (\zeta + X_0)^{-1}\| = s \left\| \frac{A}{\zeta + A + \zeta s A} \cdot \frac{A}{\zeta + A} \right\| = O(s), \tag{7.40}$$

pour tout $\zeta \in S_{\pi-\theta}$, car on a aussi

$$\left\| \frac{A}{\zeta + A + \zeta s A} \cdot \frac{A}{\zeta + A} \right\| \leq \left(1 + \frac{|\zeta|}{\mathrm{dist}\left(\zeta(1 + s\zeta)^{-1}, -S_\theta\right)}\right) \left(1 + \frac{|\zeta|}{\mathrm{dist}(\zeta, -S_\theta)}\right).$$

Donc la famille $\{F(t)\}_{t \geq 0}$ satisfait les conditions du théorème 7.18. On retrouve alors l'approximation de la fonction exponentielle en norme d'opérateur, en fait des semi-groupes engendrés par des opérateurs m-sectoriels (formule d'Euler).

Théorème 7.19 *Si A est un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de demi-angle $\theta \in (0, \pi/2)$, alors*

$$\lim_{n \to \infty} \left\|(I + tA/n)^{-n} - e^{-tA}\right\| = 0, \;\; t \in S_{\pi/2-\theta}. \tag{7.41}$$

De plus, si 0 est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, alors on a l'estimation uniforme en $t \geq 0$:

$$\left\|(I + tA/n)^{-n} - e^{-tA}\right\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{7.42}$$

Démonstration

La convergence (7.41) découle directement du théorème 7.18. Pour trouver (7.42), on utilise la représentation :

$$\begin{aligned}&(I + tA/n)^{-n} - e^{-tA} = \\ &\sum_{m=0}^{n-1} (I + tA/n)^{-(n-m-1)} \left((I + tA/n)^{-1} - e^{-tA/n}\right) e^{-mtA/n}.\end{aligned} \tag{7.43}$$

D'après les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3, on a les estimations

$$\|A^{-1}\left((I + tA/n)^{-1} - e^{-tA/n}\right)\| \leq 2t/n,$$

$$\|A^{-1}\left((I+tA/n)^{-1}-e^{-tA/n}\right)A^{-1}\| \leq 3/2(t/n)^2.$$

Comme e^{-tA} est un semi-groupe holomorphe, on a par la proposition 1.18 : $\|Ae^{-\tau A}\| \leq M_1/\tau$ pour tout $\tau > 0$. D'autre part, pour tout entier $k \geq 1$ on a l'identité :

$$(I+tA/n)^{-k}A = \frac{n}{t}\left(I-(I+tA/n)^{-1}\right)(I+tA/n)^{-k+1}, \tag{7.44}$$

ce qui conduit à la majoration $\|(I+tA/n)^{-k}A\| \leq nK/kt$ par le lemme 7.8 pour la contraction quasi-sectorielle $C = (I+tA/n)^{-1}$.

Avec ces estimations et (7.43) on obtient pour $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} \|(I+tA/n)^{-n}-e^{-tA}\| \quad &\leq \quad \frac{nK}{(n-1)t}(2t/n) + (2t/n)\frac{M_1 n}{(n-1)t} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-2}\frac{nK}{(n-m-1)t}\frac{3t^2}{2n^2}\frac{M_1 n}{mt}. \end{aligned} \tag{7.45}$$

On arrive donc à l'estimation uniforme en $t \geq 0$:

$$\|(I+tA/n)^{-n}-e^{-tA}\| \leq \frac{4(K+M_1)}{n} + 6KM_1\frac{\ln n}{n}, \tag{7.46}$$

ce qui prouve (7.42).

□

7.6.2 Moyennes arithmétiques

Soient $A_1, \ldots, A_k$ des opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de demi-angle θ : $\mathrm{Nr}(A_j) \subseteq S_\theta$ pour un $\theta \in (0, \pi/2)$ pour $1 \leq j \leq k$. On note $a_1, \ldots, a_k$ les formes sectorielles fermées correspondantes. De manière analogue à la formule de Trotter, d'autres expressions de la forme $F_k(t/n)^n$ permettent d'approcher le semi-groupe engendré par la somme au sens des formes $-(A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_k)$. $F_k(t)$ peut être un produit $f_1(tA_1)\ldots f_k(tA_k)$ ou une moyenne arithmétique $k^{-1}(f_1(ktA_1) + \cdots + f_k(ktA_k))$, où $\{f_l\}_{1\leq l\leq k}$ sont appelées fonctions de Kato (voir (2.9) et [34, 43]). Les résultats de la partie 7.3 montrent que l'on peut facilement vérifier la condition de contraction quasi-sectorielle (cf définition 7.4) si $F_k(t)$ est la moyenne arithmétique des résolvantes ou des semi-groupes engendrés par les $\{A_j\}_{1\leq j\leq k}$. Considérons les familles de contractions suivantes [39] :

$$F_k^{res}(t) \quad = \quad \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(I+ktA_l)^{-1}, t \geq 0, \tag{7.47}$$

$$F_k^{sem}(t) \quad = \quad \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}e^{-ktA_l}, t \geq 0. \tag{7.48}$$

Remarquons que $f(x) = (1+x)^{-1}$ et $f(x) = e^{-x}$ vérifient les conditions de Kato. Comme les opérateurs $\{A_j\}_{1\leq j\leq k}$ sont m-sectoriels de demi-angle θ, les résolvantes

$\{(I + ktA_l)^{-1}\}_{1\leq j\leq k}$ et les semi-groupes $\{e^{-ktA_l}\}_{1\leq j\leq k}$ sont des contractions quasi-sectorielles de demi-angle θ (voir partie 7.3), et comme D_θ est convexe, $F_k^{res,sem}(t)$ sont familles de contractions quasi-sectorielles de demi-angle θ. De plus, il est montré dans [39] que les familles $F_k^{res,sem}(t/n)^n$ convergent fortement vers $e^{-tX_0}P_0$ pour tous $t \geq 0$ et $k \geq 1$, quand $n \to \infty$, où X_0 est la somme au sens des formes $A_1\dot{+}\ldots\dot{+}A_k$ et P_0 est le projecteur orthogonal sur l'adhérence de $\bigcap_{l=1}^k \mathcal{D}(a_l)$. Donc, par le théorème 7.18 on obtient une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en norme d'opérateur de formules de type Trotter avec des moyennes arithmétiques de résolvantes (7.47) ou de semi-groupes (7.48) :

Théorème 7.20 *Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des opérateurs m-sectoriels dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de demi-angle θ ($1 \leq j \leq k$, $\mathrm{Nr}(A_j) \subseteq S_\theta$ pour un $\theta \in (0, \pi/2)$), alors $X_k(t) = (I - F_k^{res,sem}(t))/t$ converge au sens de la norme de la résolvante quand $t \to +0$ vers $X_0 = A_1\dot{+}\ldots\dot{+}A_k$ défini dans le sous-espace fermé $\mathfrak{H}_0 = \overline{\bigcap_{l=1}^k \mathcal{D}(a_l)}$, si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| F_k^{res,sem}(t/n)^n - e^{-tX_0}P_0 \right\| = 0. \tag{7.49}$$

P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$.

Si $k = 1$, le théorème 7.20 se réduit au théorème 7.19, auquel cas la condition de convergence généralisée est assurée par (7.40).

7.6.3 Formule de Trotter-Kato avec produit

Soit A un opérateur auto-adjoint positif et soit B un opérateur m-sectoriel de demi-angle $\theta < \pi/2$. Alors le théorème 7.18 permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en norme d'opérateur de la formule de Trotter-Kato généralisée.

Considérons la famille d'opérateurs

$$\Phi(s) = f(sA)^{1/2} g(sB) f(sA)^{1/2}, s \geq 0, \tag{7.50}$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont les fonctions de Kato $(1 + t)^{-1}$ ou e^{-t}. Comme $f(sA)^{1/2}$ est auto-adjoint et que $\|f(sA)^{1/2}\| \leq 1$, d'après la partie 7.3 on a :

$$(u, \Phi(s)u) = (f(sA)^{1/2}u, g(sB)f(sA)^{1/2}u) \in D_\theta, \tag{7.51}$$

pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\|u\| = 1$, ce qui prouve $\mathrm{Nr}(\Phi(s)) \subseteq D_\theta$. Donc par le théorème 7.18 on a une condition nécessaire et suffisante de convergence en norme d'opérateur de $\Phi(t/n)^n$ lorsque $n \to \infty$. Pour l'instant on n'a pas encore identifié la limite X_0 par rapport aux opérateurs A et B.

La situation similaire à celle de [34, Addendum]. Dans l'article [34], Kato a montré que quand $n \to \infty$ la formule de Trotter généralisée $(f(tA/n)g(tB/n))^n$ converge fortement vers $e^{-tC}P_0$, où $C = A\dot{+}B$ est la somme au sens des formes définie dans l'adhérence $\mathfrak{H}_0$ du sous-espace $\mathcal{D} = \mathrm{dom}(A^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(B^{1/2})$ et P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$, pour deux opérateurs auto-adjoints A et B quelconques (cf proposition 2.5). On peut vérifier facilement que ce résultat est encore valable dans le cas de la formule symétrisée $f(tA)^{1/2}g(tB)f(tA)^{1/2}$. De plus dans l'addendum de l'article [34], il est mentionné que pour la fonction exponentielle $f(t) = g(t) = e^{-t}$ la convergence forte est vraie pour deux opérateurs m-sectoriels A et B (cf proposition 2.6). Soient a et b les formes associées. Alors $A\dot{+}B$ est défini dans l'adhérence $\mathfrak{H}_0$ de $\mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b)$. Par les mêmes arguments on vérifie que le résultat est vrai pour $f(tA)^{1/2}g(tB)f(tA)^{1/2}$, avec pour $f(t)$ et $g(t)$ les fonctions $(1+t)^{-1}$ ou e^{-t}. Donc $\Phi(t/n)^n$ (7.50) converge fortement vers $e^{-t(A\dot{+}B)}P_0$, où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$ quand $n \to \infty$. Grâce à ces observations et au théorème 7.18, on obtient :

Théorème 7.21 *Soit A un opérateur auto-adjoint positif, et soit B un opérateur m-sectoriel dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On considère deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, chacune pouvant être $(1+t)^{-1}$ ou e^{-t}. Pour tout $s > 0$ on pose $X_s = s^{-1}(I - f(sA)^{1/2}g(sB)f(sA)^{1/2})$. Soit $C = A\dot{+}B$ la somme au sens des formes de A et B définie dans $\mathfrak{H}_0$, l'adhérence du sous-espace $\mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b)$, et soit P_0 le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{H}_0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X_s *converge au sens de la norme de la résolvante vers* C *quand* $s \to +0$,

$$(ii)\quad \lim_{n\to\infty} \left\| \left(f(tA/n)^{1/2} g(tB/n) f(tA/n)^{1/2}\right)^n - e^{-tC}P_0 \right\| = 0.$$

Conclusion

Les opérateurs auto-adjoints (et plus généralement normaux) sont relativement plus faciles à étudier que les autres, du fait de la représentation spectrale. C'est sans doute pourquoi les premiers résultats de convergence de la formule de Trotter ont été obtenus pour ces opérateurs. Pourtant, cette thèse illustre bien que des résultats analogues sont vrais pour des opérateurs non auto-adjoint, et même dans un espace de Banach sans produit hermitien. La propriété essentielle à retenir, en plus du fait que les semi-groupes doivent être contractants, est que l'un au moins des semi-groupes intervenant dans la formule soit un semi-groupe holomorphe.

Pour cela, il a fallu développer de nouvelles méthodes. Il est apparu nécessaire de faire intervenir les adjoints des opérateurs considérés ou bien les formes quadratiques associées (notamment au chapitre 4). Souvent il faut exploiter les propriétés des opérateurs m-sectoriels : cette classe d'opérateurs correspond aux générateurs des semi-groupes holomorphes contractants, et on a montré que l'application $X \mapsto e^{-tX}$ réalise une bijection bicontinue entre ces deux ensembles d'opérateurs (voir corollaire 7.17). Enfin pour la généralisation de la théorie de Chernoff, une nouvelle définition est à la base des résultats du chapitre 7 : celle de contraction quasi-sectorielle.

Finalement, l'ensemble des résultats confirme l'idée qu'il existe un lien entre la topologie de continuité des semi-groupes et topologie de convergence de la formule de Trotter. Pour obtenir la convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur, il faut considérer des semi-groupes holomorphes, donc continus en norme d'opérateur sauf en $t = 0$. De même pour obtenir la convergence de la formule de Trotter en norme de trace, il faut considérer des semi-groupes de Gibbs, c'est-à-dire continus dans la topologie de la trace.

Parmi les recherches en perspective dans le domaine de la formule de Trotter, il y a les améliorations des conditions sur les domaines et de la vitesse de convergence, comme je l'ai mentionné à la fin du chapitre 4. Cette idée est motivée par les nouveaux résultats pour le cas auto-adjoint [30, 31]. Par ailleurs, il serait particulièrement intéressant d'étudier la convergence de la formule de Trotter dans les espaces $L^p(\mu)$ pour les différentes valeurs de $p > 0$, et peut-être par là relier le cas de l'espace de Hilbert $p = 2$ au cas des espaces de Banach. D'autre part, cela pourrait conduire à des applications pour les semi-groupes de Markov.

Bibliographie

[1] Angelescu N., Nenciu G., Bundaru M. : On the perturbation of Gibbs semigroups, *Commun. Math. Phys.* **76** (1975), 29-30.

[2] Auscher P., Hofmann S., Lacey M., McIntosh A., Tchamitchian Ph. : The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, prétirage janvier 2001.

[3] Breitenecker M., Grümm H.-R. : Note on trace inequalities, *Commun. Math. Phys.* **26** (1972), 276-279.

[4] Cachia V., Zagrebnov V.A. : Operator-norm convergence of the Trotter product formula for holomorphic semigroups, prétirage CPT 3752 à paraître dans *J. Operator Theory* **46** no. 2 (2001).

[5] Cachia V., Zagrebnov V.A. : Operator-norm convergence of the Trotter product formula for sectorial generators, *Lett. Math. Phys.* **50** (1999), 203-211.

[6] Cachia V., Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : Accretive perturbations and error estimates for the Trotter product formula, *Integr. Equ. Oper. Theory* **39** no. 4 (2001) 396-412.

[7] Cachia V., Zagrebnov V.A. : Operator-norm approximation of semigroups by quasi-sectorial contractions, *J. Funct. Anal.* **180** (2001), 176-194.

[8] Cachia V. ; Zagrebnov V.A. : La formule de Trotter pour des semi-groupes de Gibbs non auto-adjoints. Prétirage CPT 4085, 11/2000, à paraître dans *J. London Math. Soc.* (2001).

[9] Cachia V., Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : Comments on the Trotter product formula error bound estimates for nonself-adjoint semigroups. Prétirage CPT 4096, 12/2000, à paraître dans *Integr. Equ. Oper. Theory.*

[10] Chernoff P.R. : Note on Product Formulas for Operator Semigroups, *J. Functional Analysis* **2** (1968), 238-242.

[11] Chernoff P.R. : Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators. *Mem. Am. Math. Soc.* **140** (1974), 1-121.

[12] Davies E.B. : *One parameter semigroups*, Academic Press, London 1980.

[13] Descombes S., Dia B.O. : An operator-theoretic proof of an estimate of the transfer operator, *J. Funct. Anal.* **165** (1999), 240-257.

[14] Dia B.O., Schatzman M. : Commutateurs de certains semi-groupes holomorphes et applications aux directions alternées, *Modél. Math. Anal. Num. RAIRO*, **30** (1996), 343-383.

[15] Dia B.O., Schatzman M. : An estimate of the Kac transfer operator, *J. Funct. Anal.* **145** (1997), 108-135.

[16] Doumeki A., Ichinose T., Tamura Hideo :Error bounds on exponential product formulas for Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan* **50**, 359-377 (1998).

[17] Dyson F.J., Lieb E., Simon B. : Phase transitions in quantum spin systems with isotropic and nonisotropic interactions, *J. Stat. Phys.* **18**, 335-383.

[18] Ginibre J., Gruber C. : Green functions of the anisotropic Heisenberg model, *Commun. Math. Phys.* **11** (1969), 198-213.

[19] Gohberg I.C., Krein M.G. : *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators* AMS 1969.

[20] Goldstein J.A. : *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, Oxford 1985.

[21] Grümm H.-R. : Two theorems about $\mathcal{C}_p$, *Reports Math. Phys.* **4** (1973) 211-215.

[22] Halmos P.R. : *A Hilbert space problem book* D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1963.

[23] Helffer B. : Around the transfer operator and the Trotter-Kato formula. In *Operator Theory : Advances and Appl.* **78** (1995), 161-175.

[24] Hiai F. : Trace norm convergence of exponential product formula *Lett. Math. Phys.* **33** (1995), 147-158.

[25] Hille E., Phillips R.S. : Functional Analysis and Semigroups, *Amer. Math. Soc. colloquium publications,* vol. **31** (1957).

[26] Ichinose T., Takanobu S. : Estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup. *Comm. Math. Phys.* **27** (1997), 167-197.

[27] Ichinose T., Takanobu S. : The norm estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup : a unified approch to the nonrelativistic and relativistic cases. *Nagoya Math. J.* **149** (1998), 53-81.

[28] Ichinose T., Tamura Hideo : Error estimate in operator norm for Trotter-Kato product formula. *Integr. Equ. Oper. Theory* **27** (1997), 195-207.

[29] Ichinose T., Tamura Hideo : Error estimates in operator norm of exponential product formulas for propagators of parabolic evolution equations, *Osaka J. Math.* **35** (1998), 751-770.

[30] Ichinose T., Tamura Hideo : The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, *Commun. Math. Phys.* **217** (2001), 489-502.

[31] Ichinose T., Tamura Hideo, Tamura Hiroshi, Zagrebnov V.A. Note on the paper "The norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound" by Ichinose and Tamura, à paraître dans *Commun. Math. Phys.* (2001).

[32] Kato T. : *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin 1966.

[33] Kato T. : "Some mapping theorems for the numerical range", *Proc. Japan Acad.* **41** (1966), 652-655.

[34] Kato T. : Trotter's Product Formula for Arbitrary Pair of Self-Adjoint Contraction Semigroups. *Topics in functional analysis Advances in mathematics supplementary studies,* vol. **3** (1978), 185-195.

[35] Kato T. : Fractional powers of dissipative operators. *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961), 246-274.

[36] Kato T. : Fractional powers of dissipative operators. *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 242-248.

[37] Kato T. : A Generalization of the Heinz Inequality. *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 305-308.

[38] Komatsu H. : Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.* **19** (1966), 285-346.

[39] Lapidus M. : Généralisation de la formule de Trotter-Lie. *C. R. Acad. Sc. Paris* **291** A (1980), 497-500.

[40] Maison H.D. : Analyticity of the partition function for finite quantum systems. *Commun. Math. Phys.* **22** (1971), 166-172.

[41] Miyazaki Y. : Domains of square routs of regularly accretive operators. *Proc. Japan. Acad.* **67(A)** (1991), 38-42.

[42] Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : The Trotter product formula for Gibbs semigroups. *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), 333-346.

[43] Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : On error estimates for the Trotter-Kato product formula. *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 169-186.

[44] Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : Fractional powers of self-adjoint operators and Trotter-Kato product formula. *Integr. Equ. Oper. Theory,* **35** (1999), 209-231.

[45] Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : Trotter-Kato product formula and operator-norm convergence. *Comm. Math. Phys.*, **205** (1999), 129-159.

[46] Neidhardt H., Zagrebnov V.A. : Trotter-Kato product formula and symmetrically normed ideals. *J. Funct. Anal.* **167** (1999), 113-167.

[47] Pazy A. : Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag 1983.

[48] Reed M., Simon B. : *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.I : Functional Analysis, Acad. Press, New York 1972.

[49] Reed M., Simon B. : *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.II : Fourier analysis, self-adjointness, Acad. Press, New York 1975.

[50] Rogava Dzh.L. : Error bounds fo Trotter-type formulas for self-adjoint operators. *Funct. Anal. Application* **27**, No.3 (1993), 217-219.

[51] Rudin W. : Functional Analysis, McGraw-hill Inc., New-York, 1991.

[52] Shimakura N. : Sur les domaines des puissances fractionnaires d'operateurs. *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 265-288.

[53] Shiryaev A.N. : *Probability*, Springer Verlag, Berlin 1984.

[54] Simon B. : *Trace ideals and their applications* London Mathematical Society Lecture note series No 35, Cambridge University Press 1979.

[55] Tamura Hiroshi : A remark on operator-norm convergence of Trotter-Kato product formula, *Integr. Equ. Oper. Theory* **37** (2000), 350-356.

[56] Tanabe H. : Equations of evolution, Pitman Press, London, 1979.

[57] Trotter H.F. : Approximation of semigroups of operators, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 545-551.

[58] Trotter H.F. : On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 545-551.

[59] Yosida K. : Functional analysis, Springer Verlag, Berlin, 1968.

[60] Zagrebnov V.A. : On the families of Gibbs semigroups. *Commun. Math. Phys.* **76** (1980) 269-276.

[61] Zagrebnov V.A. : The Trotter-Lie product formula for Gibbs semigroups. *J. Math. Phys.* **29** (1988) 888-891.

[62] Zagrebnov V.A. : Perturbations of Gibbs semigroups. *Commun. Math. Phys.* **120**, (1989), 653-664.

Résumé :

La convergence de la formule de Trotter en norme d'opérateur a été établie depuis 1990 avec différentes conditions pour des générateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Cette thèse étudie au contraire des semi-groupes holomorphes dont les générateurs ne sont pas auto-adjoints. Dans le premier ensemble de résultats, il s'agit d'estimations d'erreur en norme d'opérateur pour la formule de Trotter : je considère des perturbations accrétives dans un espace de Banach général, puis dans un espace de Hilbert. Dans la deuxième partie, j'étends certains résultats de convergence de la formule de Trotter au cas de générateurs m-sectoriels et pour la norme d'opérateur ou la norme de la trace. Enfin la dernière partie consiste en une généralisation de la théorie de Chernoff au cas de l'approximation des semi-groupes holomorphes en norme d'opérateur. Cette partie est fondée en particulier sur la notion nouvelle de contraction quasi-sectorielle, le résultat principal montre le lien entre la convergence généralisée (ou convergence au sens de la norme de la résolvante) des générateurs m-sectoriels et l'approximation en norme d'opérateur des semi-groupes holomorphes contractants par des puissances de contractions quasi-sectorielles.

Abstract :

The operator-norm convergence of the Trotter product formula has been proved since 1990 with different conditions for self-adjoint generators in a Hilbert space. This thesis however concerns holomorphic semigroups whose generators are not self-adjoint. In the first part, error estimates in operator-norm for the Trotter product formula are stated : I consider accretive perturbations of generators in a general Banach space, then in a Hilbert space. In the second part, I extend some preceding or earlier results of convergence of the Trotter product formula to the case of m-sectorial generators and for the operator- or trace-norm. Finally the third part consists in a generalization of the Chernoff theory to the operator-norm approximation of holomorphic semigroups. This part is based on the new notion of quasi-sectorial contraction, and the main result is the theorem relating the approximation of m-sectorial generators (in the uniform resolvent sense) with the operator-norm approximation of holomorphic semigroups by powers of quasi-sectorial contractions.

Discipline : mathématiques.

Mots-clés : théorie des opérateurs, semi-groupes holomorphes, opérateurs sectoriels, formule de Trotter, convergence en norme d'opérateur, convergence en norme de trace.

Centre de Physique Théorique,
CNRS Luminy case 907,
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9