Etude à l'aide de la notion de " site mathématique local d'une question " des effets possibles d'une innovation : les restitutions organisées de connaissances dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S

Christian Silvy

UNIVERSITE DE PROVENCE - AIX MARSEILLE I

Ecole doctorale Cognition, Langage, Education

Unité Mixte de Recherche-Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation

THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Docteur de l'UNIVERSITE DE PROVENCE

Spécialité : SCIENCES DE L'EDUCATION

Présentée et soutenue publiquement le 4 mars 2010 par

Christian SILVY

Etude à l'aide de la notion de « *site mathématique local d'une question* » des effets possibles d'une innovation : les restitutions organisées de connaissances dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S

Directeurs de thèse : M. Antoine DELCROIX et M. Alain MERCIER

Membres du jury

M. Yves CHEVALLARD, Professeur, Université de Provence	Examinateur
M. Max DORVILLE, Directeur, Maître de conférences, IUFM de Guadeloupe	Examinateur
M. Antoine DELCROIX, Professeur, IUFM de Guadeloupe	Directeur de thèse
Mme Sylvette MAURY, Professeur Université de Paris VI	Rapporteur
Mme Maggy SCHNEIDER, Professeur Université de Liège	Rapporteur
M. Alain MERCIER, Professeur INRP	Directeur de thèse
M. Alex MERIL, Professeur Université des Antilles Guyane	Examinateur

Résumé

L'introduction des restitutions organisées de connaissances (ROC) dans les épreuves du baccalauréat, à partir de 2005, est une réponse de l'institution à la volonté de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal, en réintroduisant, par cette innovation, la démonstration dans les pratiques. Dans une approche anthropologique, complétée d'une enquête écologique et de l'analyse d'entretiens avec des enseignants de terminale, nous cherchons à en mesurer les effets au travers des composantes de son environnement, de sa genèse, de son caractère innovant pour interroger sa viabilité et montrons, en particulier, que rendre effectif l'enseignement de la démonstration au moyen des ROC nécessite un questionnement didactique, un « déploiement de l'épaisseur du texte ». Nous l'opérons par la construction de leur *site mathématique local*. Cette construction se nourrit d'apports épistémologiques, historiques, didactiques pour décrire l'organisation locale de l'écosystème de la ROC concernée, en mettant en relief les interrelations, entre les composantes classiques de la praxéologie (objets, techniques, technologies,…) et le *substrat*. Ce dernier s'appuie sur les coutumes mathématiques et les préconstruits (protomathématiques et paramathématiques). Cet ensemble de *choses* nécessaires à l'heuristique intègre l'entité de l'élève, le contexte de la classe dans la situation d'enseignement.

Plus largement au travers de différents exemples – balayant l'enseignement primaire, secondaire et supérieur – nous montrons la robustesse de l'outil *site mathématique local* pour analyser sur les plans didactiques, épistémologiques, mathématiques et historiques les diverses questions mathématiques ou de leurs transpositions. Cet outil peut ainsi servir de révélateur (à des obstacles épistémologiques ou didactiques) dans une activité de classe, être à la base d'activités de formation initiale ou continue d'enseignants, permettre de réaliser des analyses de cohérence des progressions curriculaires. Nous pensons qu'il peut ainsi figurer dans le bagage de tout enseignant de mathématiques.

Mots clés

Site mathématique local, restitution, habiletés, connaissances, pré-requis, évaluation, substrat.

Abstract

In 2005 the French ministry of education introduced the « organized returning of knowledge » (ROC) in the French "baccalauréat" as a tool to make the mathematical education at the end of secondary school more efficient by reintroducing the proof in practices. In an anthropological approach, supplemented by an ecological survey and an analysis of interviews with high school teachers we seek, in order to question its viability, to measure its effects through the components of its environment, its genesis, its innovative nature. Our aim is to show that if we want to make effective the teaching of the proof with the ROC, a didactic questioning is necessary, as a way to unfold the content of the text. We proceed through the construction of the local mathematical site. This construction lives on contributions from different epistemological, historical, didactical perspectives in order to describe the local organization of the ROC ecosystem concerned, highlighting the interrelationships between the components of the classical "praxeology" (objects, techniques, technologies…) and the substrate. The latter is based in math custom and prebuilt (protomathematics and paramathematics). All these elements essential for the heuristic takes the entity of the student and the classroom context into account in the teaching situation.

More generally, through various examples - from primary to university - we show the strength of the mathematical local site tool, able to analyze on the epistemological, mathematical and historical levels the diverse mathematical questions or their transpositions.

This tool can therefore serve as a revelation (in epistemological or didactic obstacles) in a class activity, be a basis for initial or continuing teachers training, help achieve consistency analysis in curricular progressions. We think it may well be listed in the background of any teacher of mathematics.

Prélude

« Après l'intuition de quelques propositions simples, quand nous en tirons une autre conclusion, il est utile de parcourir les mêmes propositions dans un mouvement continu et nulle part interrompu de la pensée, de réfléchir à leurs rapports mutuels, et d'en concevoir distinctement plusieurs à la fois, autant qu'on peut ; c'est ainsi, en effet, que notre connaissance devient plus certaine et que s'augmente surtout l'étendue de notre esprit. » [René Descartes traduit par J. Sirven]

Je peux bien l'avouer à cette heure où le texte est en passe d'être achevé, ma difficulté première à mettre en mots mes idées, au fil du temps s'atténue, grâce à la formation dispensée par mon directeur de thèse Antoine Delcroix. Je n'y serais jamais arrivé sans ses nombreuses relectures, son aide à matérialiser l'idée dans des petites phrases, ses apports en mathématiques, sa disponibilité. Je tiens particulièrement à te remercier, Antoine.

Je peux aussi avouer mes anciennes prises de positions : ex professeur de lycée, je ne pouvais résister aux questionnements de la didactique amenés par mon directeur de thèse Alain Mercier. Ses conseils à mettre en œuvre, ses ouvrages à étudier, ses thèses pour s'instruire, ses vieux manuels de professeur à consulter , ses nombreux articles pour s'initier, ses questions à renseigner m'ont permis de modifier ma posture. Merci encore, Alain, pour les moments d'amitié partagés à bord d'un voilier ou autour d'une bonne table à échanger notre passion de "voileux-matheux".

Max Dorville, Directeur de l'IUFM de Guadeloupe, m'a accordé soutien et facilités. Il a accepté de plus d'être membre du jury. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Mme Sylvette MAURY et Mme Maggy SCHNEIDER d'avoir consacré du temps à la lecture de mon travail et d'avoir produit un rapport constructif. J'en suis très honoré.

Merci à M. Alex MERIL d'avoir porté son regard de mathématicien en qualité de Président du jury.

Je remercie également M. Yves CHEVALLARD pour son rapport apportant un autre regard sur mon travail.
Et puis je remercie tous mes collègues de Guadeloupe, amis, en particulier Michel et Yves, et tous les membres du CREEF, Thomas, Frédéric, Béatrice… qui m'ont aidé et soutenu dans ce travail.

Pour finir, merci Marie-Eve, ma femme, et merci à Axel, Benoit et tout particulièrement à Loïs, d'avoir supporté une présence pas toujours réelle de ma part, absorbée par ce travail.

Merci enfin à ceux qui voudront utiliser ce travail pour le faire fructifier.

Table des matières

Introduction

Tout acte d'enseignement présuppose une évaluation. En France, l'éducation nationale marque le curriculum pré-universitaire de deux balises constituées d'évaluations certificatives. Sans conteste, le baccalauréat est aujourd'hui le principal phare, nœud important du curriculum. Les premières traces du baccalauréat, originalité du système éducatif français, remontent au Moyen Age, mais c'est le décret « *organique* » de 1808 qui transforme cet examen en institution. L'importance de cette institution n'a cessé de croître, tant au niveau quantitatif (de 1% d'une classe d'âge en 1808 à 63,5% en 2006) qu'au niveau structurel (matières, options, filières). Cette institution marque la frontière entre deux systèmes, l'éducation secondaire et l'enseignement supérieur. Etant un examen national, le baccalauréat reste indépendant de l'enseignement effectué dans les classes mais des liens existent avec l'implémentation des programmes et la correction des copies. En effet d'une part, les réformes modifient le corpus évalué et l'instabilité du cursus s'oppose à une certaine stabilité de la forme de l'évaluation du baccalauréat (type et nombre d'exercices posés), d'autre part, les correcteurs appartiennent pour la plupart au corps enseignant de terminale tandis que le président du jury est un universitaire. Ces liens produisent des effets, toute modification du monument institutionnel est ressentie dans les deux systèmes. Par exemple, pour le supérieur en 1994 la modification de sections des filières du baccalauréat a perturbé les effectifs des premiers cycles universitaires, par le biais des choix d'orientation des élèves en seconde [Duverney, 2002].

Nous nous intéressons à une autre modification du baccalauréat scientifique, portée par le paradigme exposé dans l'affirmation selon laquelle *« le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal »* [B. David, 2000] ou bien celle qui stipule que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005). M. Verret (1978) en a fait une théorie : c'est le fait de « l'école bureaucratique » qui produit aussi la transposition didactique. Ainsi, dans une refonte limitée de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S, l'introduction d'exercices novateurs, dont un pilier est la restitution organisée de connaissances (ROC), est une réponse proposée par l'institution à la nécessité de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal en introduisant une pratique universitaire : (re)démontrer un théorème, pour comprendre son insertion dans un texte étudié. L'idée est que l'on peut contribuer à atteindre cet objectif en agissant en amont, par le moyen de l'évaluation certificative. L'objectif visé répond à la quasi-disparition de la démonstration dans les pratiques enseignantes, causée selon l'idée précitée par le fait qu'en retour, la démonstration n'est pas évaluée au baccalauréat. En effet sous la pression sociale (80% d'une classe d'âge niveau baccalauréat) l'enseignement en terminale S se réduit à un bachotage (procrastination) efficace privilégiant l' « application de recettes » comme disent professeurs et élèves, pour des « exercices à tiroirs » guidés.

Notre travail sur les ROC se développe dans le cadre de la théorie de la transposition didactique, élargi à la théorie anthropologique du didactique dans une approche écologique. Le travail présenté ici se décompose en quatre parties. Autour de la transposition didactique nous répertorions dans la première partie les principaux outils nécessaires à l'éclairage de notre concept. La partie 2, centrée sur les ROC dans un point de vue écologique, traite de toutes les composantes de son environnement, de sa genèse à partir de la question de cours, de son caractère innovant pour en interroger sa viabilité. Nous répertorions dans une typologie différents types de ROC. Nous analysons les différents programmes et l'évaluation du baccalauréat S pour appréhender la volonté de l'institution et montrer la tension entre des programmes instables et un cadre relativement figé de l'évaluation. Cette analyse permettra de décrire certains effets sur les pratiques des professeurs et des élèves mais montrera les limites dans l'enseignement de la démonstration. Ces limites sont relatives à la nature et à la place de l'objet démonstration, son statut mathématique et didactique. Cette notion paramathématique n'était pas évaluée depuis les années 1960; depuis la fin des années 1990 la démonstration systématique faite par le professeur au tableau (au sens de travail de rédaction de la démonstration des « théorèmes de cours ») disparaît. Le questionnement apporté par la nature de l'objet démonstration qui n'est pas mathématique et ne peut être produit en tant que tel, nous a poussés à chercher pour l'aide à l'étude dans la didactique des mathématiques un outil approprié à l'enseignement de la démonstration. La notion de site mathématique construite par P. Duchet & A. Erdogan (2005) nous a semblé être l'outil actuel le mieux adapté à notre questionnement, même s'il nous a semblé nécessaire de modifier la structure du site pour l'adapter à notre objet en y ajoutant une strate : le substrat. Nous postulons que le site mathématique local d'une ROC replace la démonstration visée par la ROC dans son écosystème, souvent à la frontière entre le cycle terminal et le cycle de l'enseignement supérieur, et en permet la compréhension.

Dans la partie 3, pour tester notre hypothèse nous prenons le choix de porter l'analyse avec l'outil *site mathématique local* sur des exemples significatifs de ROC posées au baccalauréat.

Le choix effectué, dans les nœuds du programme d'analyse, de géométrie et d'arithmétique, permet de mettre en valeur différents usages du site.

Ainsi nous montrons que le site mathématique local est un outil efficace pour générer, à partir d'exemples, des classes de démonstration, pour extraire certains des implicites présents dans toute activité mathématique, préparer un cours et pour analyser un manuel. Cependant, cette étude permet aussi de montrer que la construction du site permet de s'interroger sur la notion évaluée et ainsi, de remonter le parcours transpositif afin de retrouver un peu de légitimité des objets d'enseignement.

Dans la dernière partie, nous avons mis à l'épreuve notre concept de site mathématique local dans des analyses d'exercices d'horizons divers pour tester la capacité du site et de sa construction à nous interroger et éprouver son apport possible à la formation des professeurs. Ainsi, nous montrons la robustesse de cette caractéristique du site dans diverses applications

Chapitre

1

Cadre théorique et questions premières

L'évaluation est omniprésente dans toutes les activités d'enseignement ; pourtant ses effets ne sont pas toujours « transparents ». Notre attention se porte sur un exercice novateur de l'évaluation certificative par excellence, le baccalauréat : « la Restitution Organisée de Connaissances ». La ROC se définit de façon duale comme un exercice sur l'élaboration d'une démonstration et comme une évaluation organisée de la mémoire restituée de connaissances acquises. Cette dualité caractérise ce nouveau « concept », carrefour entre la démonstration, pierre angulaire non ostensive des savoirs mathématiques, et l'évaluation organisée des connaissances, but idéal de toute évaluation d'enseignement pour l'institution.
En effet la démonstration est une notion spécifique du travail mathématique, et toute évaluation a pour but de restituer des connaissances acquises.
Cette dualité entraîne certaines interrogations :

(1) Première question : « le professeur de terminale scientifique peut-il enseigner les mathématiques sans exposer le concept de démonstration dans une institution scolaire donnée ? »
(2) Deuxième question : « Comment enseigner l'organisation des connaissances aux élèves ? Est-ce possible, utile ? »

La ROC est constituée d'un texte, mais « comment étudier ce texte ? Comment l'analyser ? »
Nous cadrerons, en didactique, la notion d'épaisseur du texte, en utilisant la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), formulée par Y. Chevallard en 1992[1] complétée par l'étude écologique.

---

[1] Et 1999

1.1 TAD théorie de la transposition

Y. Chevallard (1985) pose les bases de la théorie de la transposition didactique d'un savoir savant à un savoir à enseigner et d'un savoir à enseigner à un savoir enseigné. Ainsi, cette théorie distingue deux mouvements dont sont issus deux moteurs transversaux importants pour notre concept ROC : les « objets de savoir », sur quoi porte la transposition, et les effets du temps dans cette transposition. Mais M. Verret (1978) avait montré comment l'évaluation (publicité des savoirs et programmabilité) était la clé de l'ensemble de ces phénomènes.

L'analyse du régime didactique du savoir au travers des objets de savoir fait apparaître une distinction de nature antinomique : caché / transparent, implicite / explicite, créant ainsi une dialectique. Cette distinction permet de partager le paysage mathématique du savoir étudié en deux camps aux contours variables, assujettis à cette dialectique. Ces deux camps sont meublés par des objets préconstruits, et des objets construits. Les objets de savoir construits sont les notions mathématiques. Les antonymes des notions mathématiques au sens enseignés / non enseignés sont répartis en deux types : protomathématiques et paramathématiques.
Par exemple l'objet « tableau de variation » est un objet qui ne se situe pas dans le même cadre que l'objet « fonction » *objet de savoir* [A. Mercier 2002], pouvant être mis à l'étude. Le tableau de variation est une *notion-outil*, qui sert à l'étude d'un objet mathématique, par exemple une fonction. Alors qu'il n'existe pas de « théorie des tableaux de variation », il existe une théorie des fonctions.
La démonstration est aussi au lycée une notion-outil donc un objet paramathématique [Y. Chevallard, 1985 ; A. Mercier, 2002]. Une autre caractéristique importante pour notre objet est énoncée par Y. Chevallard (1985) :

> *« Les notions paramathématiques sont normativement considérées comme exclues de l'évaluation directe*[2] »

[2] « *A côté des « notions mathématiques » désignées ci dessus se rangent des notions qu'on peut dire « paramathématiques » par exemple, la notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration.* **»** [p49] **.** Les notions paramathématiques ne sont pas enseignées comme des savoirs dans l'histoire de l'enseignement comme l'indique Y. Chevallard : « L*es notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématiques ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'étude par le mathématicien. Les notions mathéma-*

ainsi les notions paramathématiques ne sont ni étudiées, ni objet d'une évaluation directe ; cependant elles doivent être connues pour permettre l'enseignement des notions mathématiques.

Les notions protomathématiques, quant à elles, sont situées dans une strate plus profonde, elles se construisent en acte, ce sont des « *compétences ou capacités* » [A. Mercier 2002] qui ne vivent que dans la pratique. Elles sont attendues et mobilisées implicitement par le contrat didactique, ainsi elles vont de soi et appartiennent au milieu des actions des élèves [G. Brousseau 1999] :

> *« Tout se passe comme s'il n'y avait là rien à savoir (et rien à enseigner sinon à apprendre) mais seulement à faire ce qu'il faut » (d'après P. Delbos & G. Jorion 1984).*

Pour P. Perrenoud (1986), elles sont à la base de compétences et sont définies par « *tout ce qui* " *va sans dire* " ». Cette notion de compétence issue de notions protomathématiques est reprise par F. Caron et S. de Cotret (2007) pour élargir le type d'utilisation du savoir notamment dans l'évaluation :

> *« Par exemple, à modéliser, formuler des conjectures, prouver, qui font partie de l'activité mathématique sans être spécifiques à un savoir donné ».*

Nous remarquons enfin qu'elles sont premières et ainsi « *fondent l'existence même de la discipline - ce que Develay appelle la " matrice disciplinaire "*» [P. Perrenoud, 2001].

La mise en relation d'Y. Chevallard, A. Mercier (1987) et d'A. Mercier, M. L. Schubauer-Leoni, E. Donck & R. Amigues (2005) montre clairement que le temps, composante principale d'organisation de l'enseignement, est le résultat de l'organisation des objets de savoir en un texte ordonné en chapitres. Le temps force ainsi le professeur à s'intéresser dans son enseignement à la surface des choses et l'élève doit comprendre par contrat didactique le reste implicite de l'enseignement : organisation et notions paramathématiques, protomathématiques et mathématiques. Mais pour que les élèves apprennent, il est nécessaire que le professeur « indique la direction » de ces implicites [A. Erdogan, 2006].

---

tiques sont, elles, des objets d'étude (on étudie la notion de nombre, la notion de groupe, etc.) et des outils d'étude (en principe !) ». [p50]

Ces phénomènes sont décrits par Y. Chevallard (1985, 1991) comme la « mise en texte du savoir », qui structure en donnant les conditions d'existence d'un enseignement officiel, et résume une grande partie des effets du « processus de transposition didactique ».

Dans la pratique le texte du savoir possède une certaine « épaisseur », tout est présent et rien n'est mineur, l'organisation et l'existence des différentes notions, mathématiques, paramathématiques, protomathématiques est assurée par la mise en jeu du texte, dans l'enseignement. Cette « épaisseur » du texte peut être rapprochée de celle du plan d'un architecte dont l'interprétation dépend du métier du professionnel. Par exemple le plombier aura sa propre lecture, différente de celle du maçon. Ainsi dans le cas du texte du savoir, la lecture propre à chaque catégorie d'acteurs : élèves, étudiants, professeurs, génère des constructions différentes.

La « mise en texte du savoir » relève de contraintes diverses [M. Verret, 1978]. La désyncrétisation reste essentielle dans notre étude. Le syncrétisme du savoir « *perception globale et confuse, dont les éléments homogènes ne sont pas distingués en tant que tels* »[3] doit être évacué par l'« *apprêt didactique* » en morceaux « virtuellement » autonomes constituant les parties du texte. Ainsi la désyncrétisation du savoir produit la possibilité d'un découpage en morceaux autonomes, qui pourront permettre aux enseignants de construire le savoir, pièce après pièce. La désyncrétisation du savoir est donc subordonnée à l'institution didactique fondatrice de cet acte. Par sa maîtrise du texte, le professeur doit permettre aux élèves de retrouver les éléments dans « l'épaisseur du texte ». Nous relions cette maîtrise de l'épaisseur du texte à la thèse de L. S. Schulman (1986) (traduction G. Sensyvy et C. Amade-Escot, 2007) *« ceux qui comprennent, enseignent »* pour affirmer qu'un professeur ne peut enseigner sans déplier l'épaisseur du texte, pour les élèves et avec eux : faute de quoi, il les laissera seuls devant cette nécessité.

Cependant la

> *« conscience de la désyncrétisation n'apparaît pratiquement jamais. C'est ainsi que les « prérequis » sont formulés en termes d'éléments de connaissances situés par l'auteur comme antérieurs aux notions présentées » [Y. Chevallard, 1992].*

[3] Dictionnaire encyclopédique, Hachette, 1998

Ce fait sera repris dans l'analyse de ce que les auteurs de ROC nomment « ses prérequis ». La dialectique nécessaire désyncrétisation / syncrétisation du savoir dans les mouvements de transposition se poursuit jusque dans l'apprentissage et l'analyse montre la diversité des objets présents dans l'épaisseur d'un texte mathématique. Cela pose la question de la structure du savoir obtenue par sa mise en texte à usage d'enseignement : peut-on la reconstituer « *a priori* », sachant qu'elle n'est pas identique à la structure « savante », supposée théorique et complète, et qu'elle peut différer d'un lieu à l'autre, d'un auteur à l'autre, d'un interprète à l'autre ? Pour une telle reconstruction nous enquêtons sur l'organisation du discours, mis en relation avec l'organisation mathématique du paysage mathématique du savoir générateur :

> *«Un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de pré-construit » [Y. Chevallard, 1985],*

par laquelle est indiqué un type d'objets participant à l'épaisseur du texte, qu'Y. Chevallard (85) classe en deux grandes classes : paramathématiques et protomathématiques.

Ainsi la ROC, plus que toute autre question scolaire, est un objet qui s'appuie sur un ensemble de notions paramathématiques et a besoin de connaissances protomathématiques pour vivre. Afin de mieux comprendre comment ces deux notions sont articulées, nous aurons besoin d'éléments théoriques supplémentaires.

1.2 TAD Métaphore et Écologie didactique.

Dans sa thèse, L. Rajoson (1988) évoque, pour étudier la didactique, " *le paradigme écologique*" d'ordre "*métaphorique*". Cette métaphore lui permet d'interroger l'étude de phénomènes de transposition avec diverses notions d'écologie. Le régime sémantique est donc cognitif [N. Charbonnel, 1991] pour devenir praxéologique en se transformant en méthode d'analyse.

Les raisons évoquées par L. Rajoson pour ce changement sont d'ordre théorique. La première raison rappelle que ce "*modèle*" fonctionne déjà dans le milieu artistique : écologie de l'art. La deuxième raison évoque une condition nécessaire d'application : « *la complexité du système étudié* »; or la complexité implique un « *déterminisme ouvert* » car non binaire où le certain et l'impossible ne sont plus que les deux extrêmes d'un continuum de potentialités. Cette complexité rend les méthodes traditionnelles obsolètes. La dernière raison est la capacité à interroger l’évidence au sens de « "*pourquoiisme*" *enfantin (pourquoi au bord de la mer il y a-t-il des gros rochers et des petits cailloux ?)* ».

Dans cette veine écologique, énumérons les concepts premiers, piliers de notre étude :

- L’habitat (ou les habitats), c’est en quelque sorte *l’adresse*, les différents lieux de résidence de l’être mathématique. C’est donc sa place dans l’association mathématique. Il répond à la question : « où se situe l’être mathématique dans une institution donnée? »
- La niche est la place fonctionnelle qu’occupe, dans un habitat donné, l’être mathématique étudié. C’est en quelque façon la *profession* qu’il y exerce. Elle répond à la question : « à quoi sert l’être mathématique étudié ? »
- Le principe d’analyse écologique : Si un être mathématique occupe plusieurs niches, on convient de distinguer autant d’êtres mathématiques écologiquement différents qu’il y a de niches différentes.
- L’écotope le « lieu » (topos) écologiquement défini au sein d’une formation donnée.
- Le principe d’exclusion : à chacun sa niche. D’une part, si deux êtres mathématiques ont la même niche dans une institution donnée, un seul prédomine et l’autre disparaît. D’autre part, s’il n’existe pas de niche pour un être mathématique dans une institution alors cet être mathématique ne peut vivre dans cette institution.
- L’écotone est la zone frontière entre plusieurs écotopes : espace de liberté écologique où les contraintes peuvent s’amenuiser et ainsi des entités peuvent vivre aux frontières de ce système sans pour cela avoir les conditions de vie à l’extérieur.
- Ecosystème : système d’êtres et de relations.
- Niveau trophique et chaîne trophique ou réseaux trophiques [Y. Chevallard, 2007]. L’étymologie du mot « trophique »[4] rappelle que les niveaux trophiques sont classés à partir d’une caractérisation qui prend sa racine dans la nourriture : « qui se nourrit de qui ? » Ainsi, en analogie avec la chaîne alimentaire, les différents niveaux caractérisent la position au sein de l’écosystème : l’être de niveau n est un outil pour l’être de niveau supérieur n+1. Les chaînes trophiques sont donc les « *chaînes*

[4] grec trophê « nourriture »

d'outils, s'impliquant mutuellement » [L. Rajoson, 1988]. L'approche de L. Rajoson enrichit la théorie anthropologique du didactique d'une approche écologique.

- La double contrainte trophique.

  Pour vivre il faut avoir sa place dans la chaîne alimentaire qui explique les deux contraintes :

  - première contrainte trophique, contrainte d'utilité. Pour être assuré de persister il faut être assuré d'être mangé, d'être comestible. Pour vivre un être mathématique doit servir d'outil pour un autre.
  - deuxième contrainte trophique, contrainte didactique et épistémologique. Pour vivre, une espèce doit trouver sa nourriture. Pour vivre longtemps l'être mathématique doit être outillé adéquatement. La complexité de cet outillage a déjà été évoquée avec les notions paramathématiques et protomathématiques et l'usage de la désyncrétisation.

La métaphore est un outil puissant d'analyse. Elle permet de comprendre le syncrétisme, élément essentiel dans l'écologie du savoir. Les morceaux de savoir sont assez gros, liés entre eux et forment « le tout structuré ». Certains objets peuvent rentrer et y vivre, d'autres non. En effet, dans cette optique le premier mouvement de la transposition didactique permet de composer une théorie construite, organisée, en un paysage du savoir structuré. Le deuxième mouvement est la description du paysage selon la vision obtenue à partir d'un chemin personnel du professeur. Le troisième mouvement est la vision des élèves du paysage obtenu à partir du chemin personnel du professeur.

1.3 Systématisation, formalisme et rigueur.

La systématisation dans l'enseignement est la recherche d'un tout structuré localement indépendant du reste des mathématiques, dans une acceptation au niveau global :

> *« L'organisation de résultats variés en un système déductifs d'axiomes, de concepts majeurs et de théorèmes » [De Villiers, 1990, p.18 ; trad. R. Cabassut, 2005[5]]*

et à

> *« un niveau local, où on admet (par justification visuelle) un nombre limité de résultats et définitions à partir desquels on peut effectuer une organisation locale » [R. Cabassut, 2005].*

Dans son travail de thèse effectué sur le formalisme et la rigueur, E. Rouy (2007) reprend la méthode axée sur le formalisme, décrit par N. Rouche (1995) : la « *méthode consiste à "larguer les fonds" pour ne conserver que la pure forme* » [N. Rouche, 1995].

Elle permet d'appréhender *« la vérification que chaque démonstration est indépendante des images qu'on lui associe »*. Le formalisme est donc *« une méthode pour se prémunir contre tout recours à l'intuition dans les preuves ».*

Le formalisme vise, parfois, à la construction d'un système formel bâti sur des axiomes à l'aide de règles d'inférence et des règles d'écriture des formules en vue d'une théorie.

Dans le point de vue de B. Beauzamy (2001) :

> *« Le formalisme consiste à développer pour une théorie, donc pour un outil, un cadre le plus conceptuel, le plus dépouillé possible ».*

Précisons le concept en prenant la référence de la réforme des mathématiques modernes. Le formalisme a consisté « à bâtir, à partir des structures les plus pauvres, les plus générales, les éléments les plus riches avec le souci d'utiliser au mieux la richesse des isomorphismes entre les structures ». Ainsi pour nous le formalisme est une systématisation de la construction de l'édifice mathématique avec la recherche d'une cohérence globale afin d'obtenir, une

> *« économie de pensée qui consistera à ne démontrer qu'une fois dans un cadre abstrait un lot de propriétés que l'on pourra ensuite appliquer telles quelles dans chaque théorie » [E. Rouy 2007].*

[5] « the organization of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems »

On peut lire ici le motif du mouvement de réforme des années 1970. En mettant l'accent sur les structures, se dégage une nouvelle fonction du formalisme, qui permet *« les transferts d'intuition » [N.Rouche, 95]*. Enfin le formalisme permet d'ordonner la matière mathématique dans sa globalité :

> *« Par reconnaissance de structures communes à des domaines parfois éloignés se tissent des liens entre les théories du types « liens de parenté de filiation » contribuant à en faire voir l'architecture d'ensemble » [E. Rouy, 2007].*

La rigueur d'un discours mathématique peut se mesurer à l'aide deux critères. Le premier critère est une certaine « simplicité ». Le discours n'a pas de phrases en trop, « *pas de complication inutile* » [L. Schwartz, 1986], que l'on peut enlever : toutes les phrases sont nécessaires au discours. Le discours n'a pas besoin d'être complété. Il est suffisant. La vérification des hypothèses des techniques utilisées doit être mentionnée :

> *« La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise…» [B. Beauzamy, 2001]*

Tous les pas du raisonnement déductif sont présents et justifiés, mais dans le cadre du deuxième critère. Le deuxième critère est le respect des normes et des usages. Le langage formel utilisé et les raisonnements associés doivent « *se conformer à un rituel en usage* » [R. Noirfalise et al, 1996] en effectuant :

> *« L'usage policé des signes désignant les objets mathématiques et les raisonnements qu'on peut faire sur ceux-ci » [R. Noirfalise et al, 1996].*

Ce souci d' « *adéquation entre le signifié et le signifiant* » [E. Rouy, 2007] permet une gestion fine de l'exactitude entre la technique et le discours associé.

Ainsi dans ce travail, la systématisation est la volonté de tendre vers un tout cohérent, à partir d'« axiomes admis ». La formalisation est la recherche d'une systématisation globalement cohérente. La rigueur est la rédaction précise dans les usages et le contrôle de la cohérence du discours, pris au sens de Descartes, au niveau de l'institution visée, mais la rigueur reste la règle du jeu consistant en une tentative d'obtenir des textes d'un savoir fermé, rigoureux malgré l'impossibilité de fermer le texte comme le montre F. Gonseth (1926) en citant la numérotation des axiomes de **N** par Péano.

1.4 Conclusion

Dans la première partie du chapitre nous avons enquêté sur la notion d'épaisseur d'un texte dans le cadre de la TAD. Nous avons ainsi mis en évidence que l'épaisseur du texte est constituée par les concepts présents ou appelés par le texte, la part de « déjà là » avec les notions préconstruites : protomathématiques et paramathématiques ; mais cette épaisseur rend compte parallèlement de l'organisation de ces diverses notions. Par ailleurs, l'entendement de cette épaisseur du texte se nourrit de la dialectique : globale (syncrétisation) / chronologique (désyncrétisation).

Dans la deuxième partie du chapitre, nous avons montré que la TAD étendue avec l'Ecologie didactique permet de rendre compte de la complexité du système étudié et d'interroger l'évidence.

Dans la dernière partie, nous avons clôturé notre première enquête théorique sur l'épaisseur du texte en nous questionnant sur sa référence à un tout cohérent : systématisation, sur la cohérence de ce tout : formalisme, enfin sur la règle du jeu justifiant les liens logiques du texte : rigueur.

Dans la prochaine partie nous utilisons cet éclairage pour étudier l'écologie de la ROC.

Chapitre

2

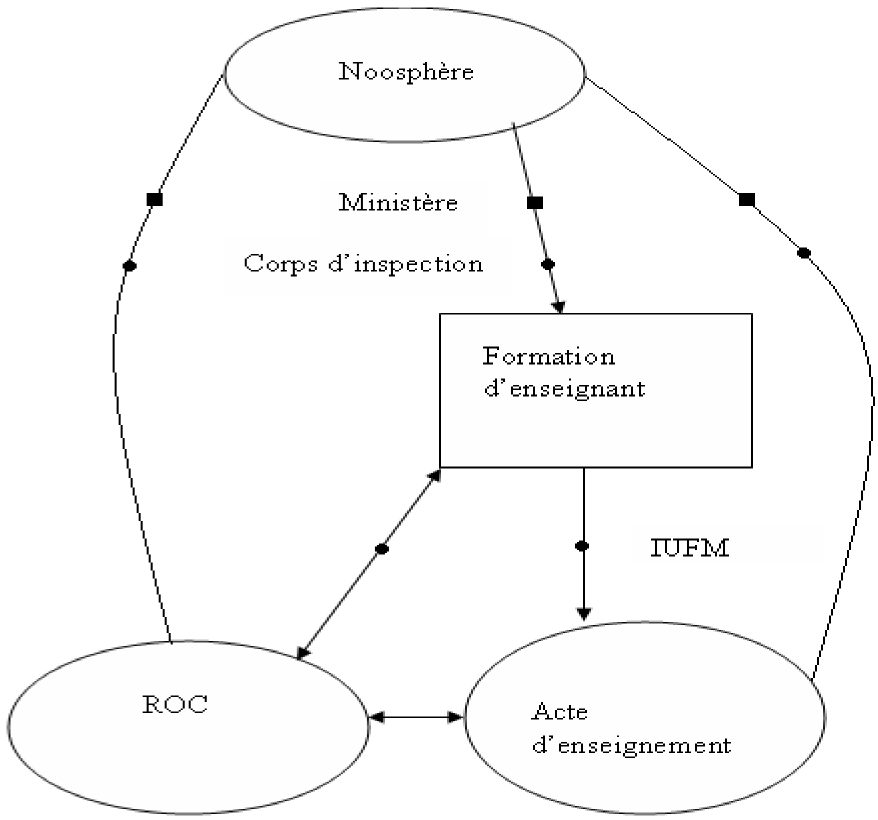
Ecologie : de la noosphère aux pratiques de terrain

Avant de vivre dans le cadre scolaire, la ROC a été conçue dans ce qu'Y. Chevallard nomme « la noosphère », en particulier le corps d'inspection. Ce corps d'inspection fabrique un objet ROC qui engage certaines compétences : la capacité de mobiliser des connaissances de façon à les organiser pour faire vivre une démonstration.

Les conditions de naissance dans cette sphère ainsi que sa transposition dans l'écotone baccalauréat entre les deux écosystèmes du lycée et du premier cycle universitaire seront étudiées. L'analyse portera sur les conditions de vie dans cet écotone, dépendant des doubles contraintes trophiques, ainsi que sur sa personnalité naissante. La contrainte inférieure se ramifie en quatre branches principales, la démonstration, le cours du professeur, l'organisation des connaissances et le baccalauréat, tandis que la contrainte supérieure se décline suivant plusieurs axes (voir document 1). Le premier axe est celui de l'enseignement. Les ROC doivent, pour exister, tisser des liens avec les objets de l'enseignement. Se pose alors la question suivante qui sera débattue: « les ROC ont-elles des effets sur la manière d'enseigner ? » Le premier cycle universitaire constitue le deuxième axe. Cet axe se focalise dans ce chapitre dans les concours post-baccalauréat. L'analyse expose alors la nature de cet axe. Les concours de professeurs de mathématique et la formation d'enseignant forment le troisième axe. Un entretien avec un formateur préparant au concours du CAPES (Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré) permet de mettre à jour la nature de cet axe. Ainsi cet exemple montrera que les formateurs intègrent ce concept ROC dans leurs objets d'enseignement.

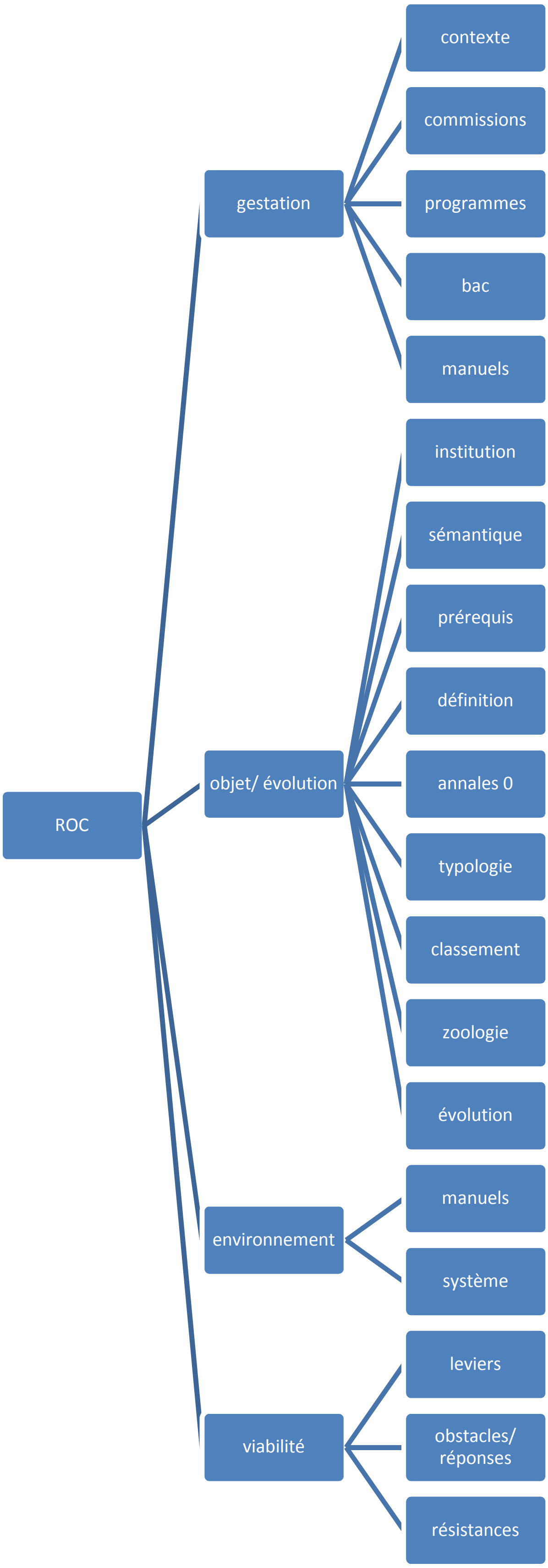
Le ministère et les corps d'inspection, quatrième axe, est appréhendé par le biais des rapports de l'inspection générale. L'étude de la genèse d'une ROC dans les commissions de réflexions sur l'enseignement des mathématiques complète l'apport de cette partie de la noosphère. L'investigation menée par ce biais montre l'utilité visée dans l'introduction par l'institution.

L'enquête localise la niche et détermine la distance entre la niche réelle et la niche institutionnelle visée et ainsi répond à la question suivante : la ROC sert-elle à ce qui la motive ?
Enfin la question fondamentale de la viabilité de l'innovation ROC est l'objet du dernier paragraphe. Cette question posée de la viabilité essentielle pour la survie de la ROC au sein du baccalauréat reprend l'organisation de T. Assude (2004) en tenant compte des contraintes institutionnelles M. Artigue (2008). Une enquête effectuée auprès des professeurs de terminale S conforte expérimentalement l'analyse réalisée sur la question.



Document 1. « Prédateurs » de la ROC

Nous décrivons ce chapitre dans le document 2.



Document 2. Plan du chapitre

2.1 La gestation de la ROC : conditions de naissance[6]

2.1.1 Le contexte démographique et structurel

Le changement de programme de 2002 marque une volonté de réintroduire la démonstration dans l'enseignement. Ainsi « pourquoi changer ? » est la question qui interroge le contexte démographique et structurel des années ante 2002.

L'étude des modifications structurelles en cycle terminale pointera les changements affectés au volume horaire. Ce changement du volume horaire aura pour conséquence une désaffection des élèves de seconde pour la filière S. Enfin, les études démographiques réalisées sur les élèves de terminales S porteront d'une part sur l'évolution du nombre de bacheliers et d'autre part sur leur accès aux études scientifiques.

La volonté institutionnelle de rééquilibrer les disciplines au sein de l'enseignement dispensé en terminale S afin de réduire « l'hégémonie » des mathématiques a conduit à une diminution du volume horaire de mathématiques comme le montre le tableau suivant (document 3)

	Mathématiques	**Physique-chimie**	*SVT*
Première S (1982-1993)	6 heures	5 heures	2,5 heures
Première S (1993-2001)	6 heures	4 heures	3 heures
Première S (depuis 2002)	5 heures	4,5 heures	4 heures
Terminale C (1983-1994)	9 heures	5 heures	2 heures
Terminale D (1983-1994)	6 heures	4,5 heures	5 heures
Terminale S (1994-2002)	6 heures	5 heures	3 heures
Terminale S (depuis 2003)	5,5 heures	5 heures	3,5 heures

Document 3. Évolution des horaires en mathématiques, physique-chimie et SVT depuis 1982 [7]

[6] Une partie de ce paragraphe a fait l'objet d'un poster présenté à l'Ecole d'Eté de Didactiques de 2005.

Ces horaires n'incluent pas les enseignements de spécialité pour lesquels il faut ajouter 2 heures pour la matière choisie. Ainsi les deux tableaux suivants (document 4 et document 5) indiquent l'évolution du nombre d'heures maximal et l'évolution du nombre d'heures minimal.

	82 83	93 94	2001 2002
1°	6	6	4+1
T°	9	8	7,5

Document 4. Evolution du nombre maximal d'heures hebdomadaires de mathématiques en filière S

	82 83	93 94	2001 2002
1°	6	6	4+1
T°	6	6	5,5

Document 5. Evolution du nombre minimal (en heures) d'heures hebdomadaires de mathématiques en filière S

Mais ces tableaux cachent l'évolution réelle de la formation mathématique de l'ensemble des élèves scientifiques. En effet

> *« on constate, en effet, depuis la fusion des séries, une baisse importante et continue du choix de la spécialité "mathématiques", chez les garçons comme chez les filles (de l'ordre de 30 %), une augmentation presque parallèle du choix de la spécialité physique-chimie, essentiellement due aux filles et une quasi-stabilité du choix de la spécialité SVT. »*[8]

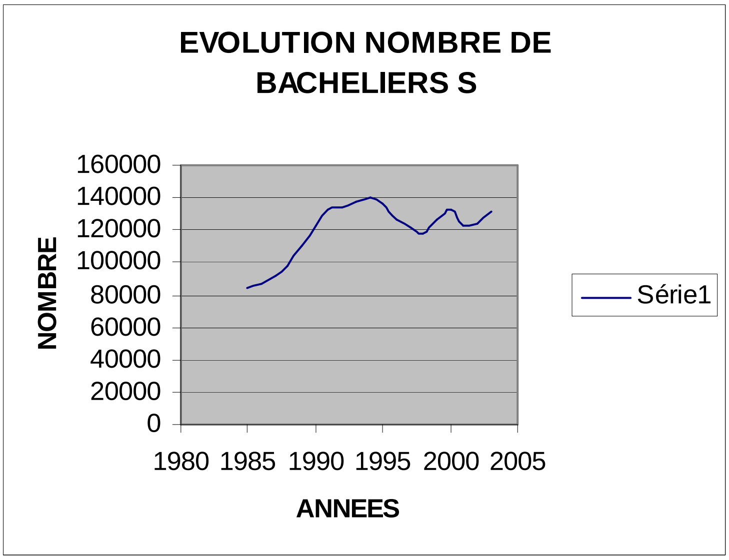
[7] Rapport d'information, 2 mai 2006, N°3061, assemblée nationale.

8 Rapport d'information, 2 mai 2006, N°3061, assemblée nationale.

Ainsi le nombre moyen d'heures de formation en mathématique des élèves scientifiques a fortement baissé depuis 2002. D'autre part, dans une perspective plus globale de l'ensemble du cycle secondaire :

> *« C'est ainsi, par exemple, que la réduction progressive des horaires d'enseignement de mathématiques (depuis vingt ans) équivaut à la suppression d'une année d'enseignement sur l'ensemble du cycle secondaire. »*[9]

Le diagramme suivant (document 6) montre qu'un simple effet démographique sur la filière scientifique S ne permet pas d'expliquer la baisse des effectifs dans les filières d'enseignement supérieur scientifique.



Document 6. Evolution du nombre de Bachelier

Comme le souligne Jacques Moisan (Doyen de l'Inspection Générale) le 29 janvier 2005 :

> *« Nous remarquons deux choses : une forte baisse après la modification 1994 des séries C et D en S*[10] *et une relative stagnation des bacs S autour de 33% par rapport au bac technologique ou général et 16% en pourcentage d'une classe*

[9] Communiqué de Presse, octobre 2002, bulletin de l'union des physiciens.

[10] 80,2% taux de réussite et 19% d'une classe d'âge en1994. Source voir note 10.

> *d'âge en 2004.*[11] *La dispersion se situe plutôt après la filière S, qui reste une voie d'excellence »*[12].

Cependant la perte des effectifs des terminales S est légèrement plus importante que celle du nombre de lauréats, en raison de l'augmentation du taux de réussite (+2% entre 1999 et 2001). Plusieurs rapports contemporains de la réforme de 2002 évoquent cette désaffection. Par exemple, le rapport de Jean Louis Piednoir (2001) note que :

> *« La baisse des orientations vers des études scientifiques ou industrielles est actuellement une cause d'inquiétude ».*

Le rapport de Guy Ourisson, Président de l'Académie des Sciences, « *Désaffection des étudiants pour les études scientifiques* », (mars 2002) et le rapport d'avril 2002 de Maurice Porchet, Professeur à l'université de Lille 1, « *Les jeunes et les études scientifiques* » [vu in D. Duverney, 2002], reprennent et analysent la baisse des vocations scientifiques. Cette baisse n'est pas la conséquence de l'évolution de la démographie [D. Duverney 2002] mais les raisons de la désaffection relative des jeunes bacheliers pour la poursuite des études scientifiques sont à chercher plutôt du côté de l'orientation [J.L. Piednoir, 2001, vu in D. Duverney, 2002]. Le tableau ci-dessous (document 7) donne la ventilation en pourcentage des inscrits en sciences sur le nombre d'étudiants en première année d'enseignement supérieur pour trois années de référence :

	1990	**1995**	**2001**
Sciences	13,6	13,5	10,5

Document 7. Pourcentage du nombre d'inscrits en première année universitaire de sciences

Il montre ainsi la baisse notable entre 1995 et 2001. La baisse notable des étudiants d'université doit être reliée à la baisse importante des postes mis au concours de recrutement des professeurs du second degré, d'après l'étude de P. Arnoux (2009)[13]. La désaffection pour

[11] taux de réussite 83,2% en 2004. Source voir note 10.
[12] www.sfc.fr/SocietesSavantes/4%20-%20Bac%20scientifique.PDF

[13] http ://www.apmep.asso.fr/spip.php ?article2481

les études scientifiques a pour conséquence une baisse de niveau dans les concours de recrutement de professeur, par exemple en 2005[14], mais aussi d'une raréfaction des candidats au concours Capes :

> *On constate en effet qu'en cinq ans le nombre de candidats au CAPES est tombé de 9 à 3,5 pour un poste en physique-chimie et 7 à 4,5 en mathématiques*[15].

Les baisses successives des effectifs dans les études scientifiques de l'université, dues pour une partie à la diminution du nombre d'heures allouées aux mathématiques, ne peuvent expliquer à elles seules la volonté de l'inspection d'introduire la ROC aux baccalauréats. Cependant

> *« on peut parler d'une baisse considérable du niveau mathématique des bacheliers scientifique, depuis la " rénovation pédagogique" »*[16].

La ROC étant une évaluation d'une démonstration, partie « dure » de l'enseignement des mathématiques, peut être une réponse à cet état de fait.
Notre recherche s'oriente dans un autre champ : les travaux issus (en particulier l'apport des commissions de réflexion) de la noosphère à propos de la discipline mathématique.

2.1.2 Apports des commissions de réflexion sur l'enseignement des mathématiques

Diverses commissions se penchent sur la discipline mathématique au cours des quarante dernières années. Nous recherchons des éléments de notre ROC, notamment l'outillage du concept ROC :

- l'organisation avec la Commission Lichnerowicz,
- le baccalauréat avec la commission présidée par D. Dacunha-Castelle,

[14] La barre d'admissibilité aux deux épreuves de mathématiques a été fixée par le jury à 6,2/20

[15] Rapport d'information, 2 mai 2006, N°3061, assemblée nationale, http://www.assemblee-nationale.fr/12/pdf/rap-info/i3061.pdf

[16] Les dossiers insertion, Education et société les filières et l'emploi, C. Béduwé et al , ministère de l'éducation et de la recherche, sept 2006,
http:/media.education.gouv.fr/file/84/8/2848.pdf /www.apmep.asso.fr/spip.php ?article2481

- la gestion de la rigueur dans la démonstration avec le groupe de réflexion en 1997,
- la contextualisation des connaissances avec l'étude du conseil scientifique de 1998.

La Commission Lichnerowicz (1966-1973)

La commission, constituée sur appel de C. Fouchet, ministre en l'année 1966, est présidée par A. Lichnerowicz. Ce dernier demande, à partir d'un changement de paradigme dans l'organisation des mathématiques savantes une réforme de l'enseignement. Son discours s'appuie sur l'histoire des mathématiques, pour montrer que les mathématiques des cent dernières années ont unifié le paysage mathématique. Les blocs de rationalités constituées par différentes branches des mathématiques se sont reliés entre eux, au travers des isomorphismes. Ce changement de paradigme (formalisme) au niveau des mathématiques savantes diffuse dans le système éducatif par les trois vecteurs suivants :

- l'omniprésence des mathématiques,
- l'enseignement doit s'ajuster aux mathématiques actuelles,
- moderniser les méthodes pédagogiques (Piaget).

Le langage des structures devient par nécessité le langage dominant des mathématiques. Cette conception unique des mathématiques s'oppose à la conception d'ilôts d'un système local :

> *« il ne peut y avoir une conception confortable et définitive des mathématiques dites élémentaires, fin en soi, perfection fermée sur elles-mêmes, une conception qu'il suffirait d'affiner uniquement à la lumière d'expériences pédagogiques » [A. Lichnerowicz, 1970].*

Ainsi « A bas Euclide » reste le jalon de cette réforme, mais ce jalon masque la dure réalité du changement effectué d'un enseignement en strates : couches sédimentées au fil de l'histoire des différentes parties des mathématiques, à un enseignement unifié par une conception perçue par certains, souveraine et définitive. Pour les concepteurs de la réforme, ce changement doit permettre à l'élève de n'avoir pas, à plusieurs reprises, à repenser l'ensemble de ce qu'il a acquis, par un changement radical de point de vue amené par une nouvelle connaissance :

> *« A l'échelon du second degré, presque partout dans le monde, l'enseignement a gardé un style trop historique : chaque partie des mathématiques est exposée en*

> *évoquant la conception qui fut contemporaine de sa naissance, ici renouvelée des grecs, là bénéficiaire de l'état d'esprit des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles » [A. Lichnerowicz, 1970].*

Ainsi, ce formalisme du tout unifié montre les limites de la notion de

> *« naturel ou de concept clair et distinct ». « Il y a un " naturel " du professeur qui ne coïncide, ni avec une évidence propre aux mathématiques, ni avec l'évidence de l'élève. Le simple, le clair ou le concret n'est trop souvent que le familier » [A. Lichnerowicz, 1970].*

La rigueur, au sens des justifications des articulations du discours mathématiques, prend « naturellement » sa place dans la réforme.
Or, la conception du tout unifié doit être transposée pour être enseignée. Cette transposition didactique s'est effectuée par l'option suivante :

> *« Les mathématiques se sont étudiées elles-mêmes et constituées en une sorte de meccano dont les pièces sont ce que nous nommons les structures élémentaires, c'est-à-dire celles où le nombre des axiomes est faible. Au lieu de commencer l'étude mathématique, selon l'histoire, par des structures riches comme celle de la géométrie euclidienne, avec sa multiplicité d'axiomes, on devra commencer, selon le bon ordre des mathématiques, par des pièces élémentaires, les structures pauvres qui doivent s'emboîter les unes avec les autres pour bâtir ces machineries complexes que sont les grandes théories » [A. Lichnerowicz, 1970].*

Ainsi les élèves découvriront dans le sens contraire de celui historique, les ensembles, pour finir au lycée par l'espace euclidien et les complexes (corps, espace vectoriel…) :

> *" Ce projet veut mettre en évidence dès le niveau élémentaire le rôle prioritaire d'une formation mathématique liée au développement des structures mentales, par rapport à une acquisition des connaissances qui ne serait pas le fruit d'une construction progressive de ces connaissances ".*[17]

Pour résumer nous reprenons le raccourci de J. Kuntzmann (1973) :

[17] Commission Recherche et Réforme de l'A.P.M.E.P.., 1er degré, 15-12-1968

> *« La mathématique moderne apparaît ainsi comme fille de Bourbaki et de Piaget. De Bourbaki, elle hérite son formalisme. De Piaget, les réformateurs, explicitement ou de façon plus diffuse, retiennent deux idées : celle de structure et celle de pédagogie active ».*[18]

Cette réforme va disparaître pour diverses raisons mais elle reste une « *réforme inaccomplie* » [Y. Chevallard, 1992]. En effet la réforme en France est arrivée trop tard, le saut va être trop grand tant pour les acteurs mal formés aux mathématiques modernes :

> *« la Réforme se développe dans un climat d'intimidation intellectuelle qui occulte ses enjeux véritables » [Y. Chevallard, 1992],*

que par les outils pédagogiques ou didactiques absents car à construire. La construction de certains de ces outils va parfois être inappropriée : « *on appelle droite un ensemble D d'éléments dits points muni d'une bijection g de D dans R et de toutes celles qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a soit $f(M) = g(M) + a$ ou $f(M) = -g(M) + a$* »[19] .

Le principal changement, dû à la réforme, reste l'oubli de la pratique professionnelle des anciens professeurs, tant au niveau historique, que didactique et pédagogique sur l'ancien programme, conséquence d'une longue construction ou d'un certain immobilisme, bâti sur plusieurs siècles. Ainsi « *Le curriculum antérieur à la Réforme était d'une grande stabilité ; la Réforme ouvre une ère d'instabilité qui n'a pas encore pris fin* » [Y. Chevallard, 1992]. Cette instabilité ne permet pas une lecture aisée de l'ensemble du curriculum. Le professeur reste alors un spécialiste d'un cycle, ne pouvant connaître l'organisation globale des connaissances construites par le curriculum. Dans les pays qui n'ont pas vécu ce bouleversement, notamment en Chine, cette lecture globale de l'ensemble du curriculum permet par exemple une meilleure gestion des erreurs des élèves.[20]

---

[18] http://www.r-lecole.freesurf.fr/collok/charlot84.html#troisc

[19] Pour une étude sur l'évolution des différentes définitions le lecteur peut se référer à E. Barbazo (2009). *Un nouvel outil pédagogique : l'axiomatique*, APMEP, http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article3190

[20] Voir Mathematics Teacher Education, volume 7, No.2, 2004, editor : Barbara Jaworski.

Rapport de la mission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques 1989

En juin 1989 le rapport de la mission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques présidée par D. Dacunha Castelle propose :

> *« Un Baccalauréat avec deux types d'épreuves en ce qui concerne les sections scientifiques », plus précisément :*
> *« Une épreuve nationale, de type classique (les mathématiques s'y prêtent bien) mais qui pourrait comporter trois types d'exercice : le premier de type Q.C.M., le second nécessitent une petite modélisation et enfin un problème demandant une démonstration.*
> *Une épreuve locale devrait sanctionner le travail fait en modules optionnels. Imagination, rigueur, connaissance et surtout méthodologie seraient alors notées. »*

Remarquons que ce rapport pose les bases du changement de 2002. En effet il introduit à la fois le Q.C.M. et l'évaluation d'une démonstration. Cependant le baccalauréat est un vieux monument bien ancré, D. Dacunha Castelle précise : *« Une très large littérature existe sur les manières d'alléger cette machinerie très lourde et coûteuse tout en conservant un examen trop traditionnel pour être modifié brutalement »*. Ainsi dès 1989 l'institution baccalauréat est l'objet d'intention de modifications profondes.

Groupe de Réflexion Inter-Associations en Mathématiques 1997

Le 16 décembre 1997, le Groupe de Réflexion Inter-Associations en Mathématiques (GRIAM), écrit dans le document de travail « Lycée, quels programmes pour quels objectifs ?» :

> *« Vouloir des mathématiques plus formatrices, ce n'est pas vouloir des mathématiques très abstraites et très techniques mais c'est accorder de l'importance à la clarté des concepts, fournie par un vocabulaire précis, donner des contre-exemples et pas seulement des exemples.*

> *Les mathématiques ont ceci de précieux qu'elles sont à la fois une école de la rigueur et de créativité »*[21].

Ainsi les mathématiques doivent être enseignées de manière rigoureuse, en laissant une large place à l'initiative de l'élève. La rigueur est l'antonyme de flou[22]. La rigueur en mathématiques s'appuie sur les définitions/propriétés et sur la démonstration. Ainsi la rigueur et la ROC partagent une large partie de leur outillage. En France, la démonstration reste un lieu privilégié d'exercice de la rigueur, mais nous montrerons que les excès dus à la réforme des mathématiques modernes entraînent, par réaction, un amoindrissement du souci de rigueur par une confusion entre rigueur et formalisme mathématique.

Le contre-exemple devient un élément central du dispositif d'enseignement. Il sera la base des justifications des QCM.

Conseil scientifique du Ministère de l'Education nationale 1998

En 1998 Edgar Morin, président du Conseil scientifique du Ministère de l'Education nationale, de la recherche et de la technologie, précise le but de l'enseignement des savoirs dans les lycées :

> *« Dès lors, le développement de l'aptitude à contextualiser et globaliser son savoir devient un impératif d'éducation ».*

La démonstration est le terrain privilégié de la « logique implacable » des mathématiques :

> *« En deçà et au-delà du calcul, il s'agit de montrer "la prudence consommée et la logique implacable du raisonnement mathématique", le dialogue de la pensée mathématique avec le développement des connaissances scientifiques, et éventuellement les limites de la formalisation et de la quantification ».*

Il faut donc apprendre à utiliser son savoir dans un contexte, ainsi va renaître le concept d'exercices ou de problèmes de démonstration contextualisée.

---

[21] Localement cité petit x, N50 : Conditions et contraintes de l'existence des mathématiques dans l'enseignement général. M. Artaud

[22] « La pensée, on l'oublie trop souvent, est un art, c'est-à-dire un jeu de précision, de flou et de rigueur ». [E. Morin 1973]

Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques 1999-2002

En décembre 2002, le rapport au ministre de l'éducation nationale : « l'enseignement des sciences mathématiques » produit par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, sous la direction de Jean Pierre Kahane (2002) montre la valeur permanente d'un enseignement de la rigueur et de l'imagination. De plus :

> *« La vertu des problèmes, des exemples, des contre-exemples, des démonstrations, de la recherche et de la mise en forme, se retrouve à propos de tous les thèmes ».*

L'enseignement des mathématiques doit être modifié en introduisant des exercices/problèmes de démonstration contextualisée et des Q.C.M., vecteurs de contre-exemple. Nous allons nous pencher sur les évolutions des programmes en regardant les principaux « aliments » de notre concept que sont le raisonnement, la démonstration et le cours du professeur.

2.1.3 Au travers des programmes

Cette étude est basée sur l'analyse des documents officiels. Nous allons étudier les programmes des classes de seconde, premières scientifiques et terminales scientifiques. Nous recherchons l'outillage de la ROC présent dans ces programmes. Le travail porte sur les composantes de la notion paramathématique de démonstration; en conséquence, pour se centrer sur la démonstration, nous découpons la période en quatre parties : avant 1960, 1970-1977, 1978-1991, 1992-2002. En effet, les quatre périodes marquent des orientations différentes. (La première année de chaque période a pour référence, soit une modification de programme, soit un changement d'organisation au niveau de la classe de terminale.) La période avant 1960 est une période relativement stable où l'ancêtre de la ROC, la question de cours possède une place dans le baccalauréat. Dans la période 1970-1977, l'enseignement de la démonstration est placé sous le paradigme de la réforme des mathématiques modernes. En 1981 la création de la seconde indifférenciée restructure le cycle du lycée : de trois ans, le cycle terminal passe à deux ans.

La « contre réforme » de 1978 à 1991 fait disparaître progressivement l'algèbre linéaire et les structures (disparition complète à la modification du programme de 1986) et réorganise la topogenèse en recentrant le travail de l'élève sur l'activité de résolution de problème, au détriment du cours magistral. Enfin, dans les années 1992-2002, sont introduits progressivement les concepts de sciences mathématiques et du raisonnement scientifique. En particulier, en 1994, une réforme structurelle créait l'unique section scientifique au lieu des séries C et D. Trois spécialités remplacent les orientations de deux séries précédentes. Cette réforme propose à l'élève d'effectuer un choix plus précoce entre une légère spécialisation physique ou mathématique. De plus, elle réalise une égalité de traitement des trois matières dites scientifiques.

Ce travail nous permettra d'étudier la forme du cours du professeur et sa liberté pédagogique par rapport à l'enseignement de la démonstration.

2.1.3.1 Période avant 1960 : étude des instructions de 1946

Les instructions du 1er octobre 1946 marquent profondément et durablement l'enseignement des mathématiques. En effet, elles sont rappelées en préliminaire des programmes des premier et second cycles de 1971. Elles énoncent dans le paragraphe sur l'esprit de l'enseignement du second degré :

> *« pas de méthode d'autorité ; esprit libéral. L'idée que la « méthode d'autorité est absolument étrangère à l'esprit de l'enseignement du second degré », que cet enseignement « ne peut qu'être foncièrement libéral », trouve une interprétation évidente dans le domaine des mathématiques. Car – une fois admis les axiomes, les postulats et les définitions, qui sont, du reste, acceptées facilement, au moins pour les éléments, parce qu'ils tirent leur origine de l'expérience concrète –, les faits n'y sont pas imposés, mais se démontrent par un enchaînement logique auquel l'esprit donne son adhésion»*[23]

La méthode d'enseignement des mathématiques des instructions de 1946 n'est pas une méthode d'autorité, elle se veut naturelle, basée sur la logique déductive du cours de mathématiques. L'élève est censé accepter les axiomes et les postulats, fruits d'une expérience concrète. La légitimité du cours de mathématiques vient donc de son enchaînement logique, ancré dans le concret :

> *« En attendant les deux fonctions valorisées dans ce préambule sont celle de vérification de la nécessité et celle de systématisation ». [R. Cabassut, 2005]*

[23] Mathématiques, classes du second cycle horaires, programmes, instruction, INRDP, 1971[p58]

Plus loin sont donnés quelques conseils sur les démonstrations :

> *« Proscrire toutes démonstrations d'un caractère artificiel ou trop particulier, même si elles ont la réputation d'être « de belles démonstrations » ; l'élégance dans la présentation d'un raisonnement doit toujours être recherchée, mais ne doit jamais l'être au détriment de la clarté et du naturel.*
>
> *Insister sur l'importance des définitions, et lutter contre le vague et l'imprécision dans l'énoncé des règles ou des théorèmes ; que le professeur prenne soin de donner l'exemple, même au prix d'une apparente perte de temps ; les énoncés fâcheusement écourtés, les définitions approximativement données doivent être immédiatement rétablis dans leur forme correcte et complète. »*

Il est rappelé que pour l'enseignant, les trois principaux critères de choix à l'exposition d'une démonstration mathématique sont dans cet ordre : la clarté, le naturel et la rigueur. Cette précision est importante pour le choix de tout sujet comportant une question de cours. Le cours reste le vecteur majeur de communication du savoir du professeur : c'est, pour employer un terme traditionnel, « le cours » ou la « leçon du maître » qui apporte et communique aux élèves les notions nouvelles qu'ils doivent acquérir.
Les instructions de 1946 introduisent durablement la notion de système naturel. Ce système autonome, basé sur la logique déductive, est le cœur des mathématiques enseignées. L'élève s'approprie, naturellement, les rouages du système que constituent les théorèmes et propositions ainsi que leur démonstration. Il préfigure le formalisme introduit par les valeurs de la réforme des mathématiques modernes.

Au baccalauréat la question de cours reste présente jusqu'en 1960, cependant son maintien est souvent remis en question au sein des associations comme le montre l'étude d'E. Barbazo (2008), qui démontre clairement que l'association APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques l'Enseignement Public) ne militait pas pour la disparition de la question de cours. Les avis des membres sont partagés et les débats sur le thème de la question de cours sont passionnés, mais à chaque bilan final, la suppression de la question de cours n'obtient pas l'adhésion du vote de l'assemblée. Par exemple en 1912 la déclaration de M. Huart résume l'opinion de ceux qui sont favorables à la « *suppression de la question de cours et de son remplacement par des problèmes très faciles qui seraient des applications directes du* *cours »*[24]. Nous remarquons que les questions de cours dans les années 1960 sont associées, pour la plupart, à une application. En sens inverse, l'opinion des professeurs favorables au maintien de la question de cours s'appuie sur le fait « *que sans question de cours, la majorité des élèves se borne à emmagasiner des formules et des résultats sans étudier le fond même des cours* »[25].

La circulaire du 5 janvier 1961 précise :

> *La suppression de la question de cours de mathématiques, dans toutes les séries, constitue une innovation importante. Sans doute la « question de cours », lorsque le sujet en était bien choisi, pouvait apporter à l'examinateur un élément de jugement non négligeable, mais la déformation inévitable, l'usure qu'elle avait subie à la longue, rendait souhaitable sa disparition*[26].

et propose une nouvelle évaluation qui permette aux candidats

> *« d'appliquer correctement les diverses notions acquises et de les mettre en œuvre pour en démontrer ou en découvrir quelques conséquences simples ».*

[24] In Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques l'enseignement secondaire public, no 5, janvier 1912.

[25] Rapport de M. Dumarqué présenté à l'assemblée générale de 1927 in Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques l'enseignement secondaire public, no 50, avril 1927.

[26] In Bulletin de l'APMEP, no 214, janvier 1961.

2.1.3.2 Période 1973-1978

Programme[27]

La structure du second cycle est différente de celle actuelle. En seconde, il existe deux séries, une série « littéraire » (seconde A) et une série « scientifique » (seconde C). Chaque série a un horaire et un programme particuliers en mathématiques. Nous étudierons le programme de seconde C. Dans le cycle terminal de l'enseignement général, il existe deux séries scientifiques. Dans la série D, les trois matières scientifiques ont pratiquement le même horaire et le même coefficient au baccalauréat. Par contre, dans la section C, les mathématiques sont dominantes, en horaire et en coefficient au baccalauréat, par rapport aux sciences physiques. Pour cette série, les sciences de la vie et de la terre ne sont pas à l'écrit du baccalauréat.

Le programme de seconde comporte des définitions, des structures, des différentes relations, des applications (bijective, réciproque, graphe...), des « inventaires » (sans démonstration) des propriétés des nombres réels et celles des espaces affines [p19 à 22].

Pour l'élève, l'effort de mémorisation reste important pour retenir cet inventaire : il remplace l'effort de mémorisation, conséquence de l'usage de la question de cours. La topogenèse reste identique à la période précédente : le cours du professeur est au centre du travail de l'élève. Au XIX[e] siècle ou au début du XX[e], le cours est typographié en écriture manuelle, composé d'une suite de théorèmes et comporte de nombreux commentaires : c'est un discours. La mutation profonde d'une organisation globale, en l'occurrence le livre du savoir, écrit par le professeur du début du XX[e] siècle, à une organisation locale effectuée à partir de divers manuels en fin de XX[e] siècle, créait un certain jeu formel.

Dans le langage des ensembles, le programme de seconde préconise un « lien » entre les ensembles et la logique. La logique et les symboles quantificateurs sont introduits dès la seconde. Les instructions du 6 février 1970, commentant les programmes de seconde, énumèrent de manière assez exhaustive les éléments de logique nécessaires aux démonstrations :

«Le raisonnement mathématique donne le plus souvent de l'implication les deux usages suivants :

(a) si $A\Rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, alors B est vrai ;

(b) si $A\Rightarrow B$ est vrai et si B est faux, alors A est faux.

[27] Mathématiques, Classes du second cycle horaires, programmes, instruction, INRDP, 1971.

(a) est parfois nommé inférence, (b) est lié au raisonnement par l'absurde […] »

Les instructions concluent en justifiant l'emploi d'une technologie relevant de la « logique formalisée » par sa capacité (supposée) à permettre à l'élève de construire un discours mathématique rigoureux : *« De cette longue étude on retiendra que l'essentiel est de donner aux élèves un moyen de reconnaître la légitimité de certaines déductions et d'en dresser l'organigramme : à cet effet, les mots de théorème et de démonstration, d'hypothèse et de conclusion, de réciproque, de condition nécessaire ou suffisante, d'analyse et de synthèse, gardent leur sens et leur emploi.»*

Les commentaires de classe de première rappellent l'ambition d'une construction axiomatique de la géométrie : *« La géométrie […] désigne dorénavant une construction mathématique logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiome où interviennent en premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes) et topologiques (R, R^n…).»*

L'aspect formalisme est ici développé dans le cadre de la géométrie. Ce formalisme se fait au détriment des figures et d'un plan d'enseignement abouti par une longue construction (largement figée par rapport aux mathématiques savantes) depuis les Grecs, qui cacherait « *le manque profond de rigueur sous doses d'évidence* » [Lichnerowicz 1970].

Un autre exemple est fourni par le principe de récurrence introduit en terminale C à partir d'une axiomatique de **N.**

Dans les parties calcul différentiel ou intégral, de nombreuses propriétés ou théorèmes sont admis sans démonstration. Seuls deux programmes de série scientifique mentionnent des éléments de la démonstration. De plus l'introduction du programme de seconde C précise que le choix de la justification d'un résultat de cours ne vient pas du programme mais reste un choix du professeur : *« les professeurs sauront ce qu'il est en général opportun de rappeler, d'admettre, de démontrer ou de taire ».*

Ces instructions donnent le vocabulaire et des méthodes caractéristiques de démonstration. Ils précisent des bases de logique.

Conclusion partielle

En résumé, pendant cette période, l'institution prône un niveau de rigueur académique pour la démonstration, proche de la théorie de la logique mathématique. Par exemple on utilise le tableau de vérité en seconde. La démonstration reste l'apanage du professeur, mais les programmes n'indiquent aucune manière d'enseigner la démonstration. Ainsi la démonstration reste une composante du substrat. Des théorèmes admis (jouant le rôle d'axiome) permettent au professeur d'enchaîner un discours cohérent : l'organisation « à tiroir » des techniques nécessaires à un théorème du cours permet de choisir les concepts admis, laissés à l'expertise de l'enseignant.[28]

Dans le domaine de l'apprentissage, grâce à son caractère systémique, le cours du professeur était au centre du travail de l'élève. Le corpus mathématique est très avancé, il nécessite une mémorisation des nombreuses définitions et théorèmes pour suivre l'avancée du corpus. Pour l'élève, ce temps « d'apprentissage du cours » remplace le temps généré par la préparation de l'évaluation « question de cours » de la période précédente.

Mais le paradigme de la réforme des mathématiques modernes : « les structures, langue universelle » organise l'enseignement des mathématiques. Les démonstrations restent au service de ce paradigme. Le professeur a pris en charge la rigueur : le cours magistral reste le modèle unique, on a restreint l'usage des problèmes et on a perdu les questions de cours dans les évaluations.

2.1.3.3 Période 1978-1990

La réforme des mathématiques modernes suscite de nombreuses critiques. Par exemple :

> *« Dans les années 1980 la totalité de la réforme fut abandonnée, contestée même par ses partisans, qui pensaient qu'elle ne correspondait pas vraiment à leur recommandations premières » [H. Gispert, 2007]*

Ses effets sont bien résumés par Y. Chevallard (1992) :

> *« la Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en déréglant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution lente et complexe. »*

Pour la classe de seconde, les objectifs sont modifiés : l'algèbre linéaire disparaît en partie. Dans la continuité, un second programme voit le jour en 1986 mais avec des allégements, et pour certains chapitres un éclairage nouveau.

Dès 1981, pour la classe de seconde, l'objectif officiel est d'éviter une orientation trop précoce des élèves. Ainsi la classe de seconde devient indifférenciée. Les séries scientifiques du

[28] Dans le corps professoral il n'y a qu'une faible part d'enseignants formés aux mathématiques modernes.

cycle terminal sont au nombre de deux en première (S et E) et de trois en terminale (C, D et E). La répartition des heures d'enseignement et les coefficients des matières scientifiques sont presque identiques en D. La série C reste la seule série où les mathématiques occupent une place prépondérante

Nous étudions les programmes de seconde indifférenciée, première S et terminale C. En seconde, les lignes directrices précisent : *«Il convient de souligner les formes diverses de raisonnement mathématique mises en jeu dans les situations étudiées ; mais on évitera tout exposé de logique mathématique. De même, c'est à travers les activités qu'on mettra en lumière les différentes phases de la démarche mathématique : conjectures, mise en œuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration et rédaction de la démonstration »*.

L'explicitation de la structure du raisonnement mathématique ne s'appuie plus sur la théorie logique, mais s'élabore au sein d'activités, à partir d'une démarche mathématique. L' « atmosphère » du cours de mathématiques se « confine » alors aux deux premières strates : le bloc pratico-technique ou savoir-faire. La démonstration, placée dans les deux dernières étapes de cette démarche, doit être enseignée dans son aspect heuristique et rédactionnel. A propos de la géométrie dans l'espace, on note que : *«Toute étude axiomatique est exclue ; on admettra les propriétés nécessaires à la conduite des activités (propriétés d'incidence, orthogonalité d'une droite et d'un plan, propriété de Thalès, validité des théorèmes de géométrie plane dans les plans de l'espace). L'objectif essentiel est que les élèves connaissent des situations de base, sachent les utiliser pour raisonner et calculer et acquièrent une meilleure maîtrise des solides usuels»*.

La théorie axiomatique est remplacée par une connaissance et une utilisation de situations de base et des solides usuels. Les propriétés nécessaires sont admises. Dans les activités, l'utilisation du cours permet d'obtenir par le calcul et le raisonnement, d'autres résultats. Le programme de la première S précise : *« La mention « admis » signifie que la démonstration est hors programme. Pour les démonstrations indiquées comme « non exigibles », le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités»*.

A propos des dérivées d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient : *« Les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit à ces résultats : on néglige en cours de calculs les termes d'ordre supérieur à 1»*.

En terminale, on précise les moments de l'activité mathématique. Ces différentes phases ne mobilisent pas les mêmes capacités. Ces capacités doivent être développées dans le but de produire des raisonnements clairs et précis et une communication de qualité : *« Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, évaluer la pertinence des résultats obtenus en fonction du problème posé, ne sont que des moments d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs majeurs ».*

Ainsi, l'institution se montre consciente du risque mentionné plus haut, que l'abandon du formalisme ne génère un abandon de l'enseignement des mathématiques comme « école de rigueur ».

Le raisonnement par récurrence est introduit par des exemples « *significatifs* » et les raisonnements du type passage de n à n+1 et 1,2..., n à n+1, ainsi que la rédaction, doivent être maîtrisés par les élèves. Aucune base théorique du principe de récurrence ne sera appréhendée.[29]

Conclusion partielle

En résumé, la formalisation n'est plus le moteur de l'organisation des savoirs. Ainsi la démarche mathématique remplace la démarche naturelle et la démonstration est située en bout de chaîne, issue de l'expérience, mise en place sous forme d'activités construites. La rigueur et le raisonnement déductif doivent être enseignés au sein de ces activités. En conséquence la logique formelle disparaît. La manière d'enseigner la démonstration n'est toujours pas explicitée. Des éléments précis apparaissent pour la résolution d'un problème ou pour le cours : *« formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, évaluer la pertinence des résultats ».*

L'abandon des principes de la réforme des mathématiques modernes modifie la topogenèse en plaçant au centre du cours la résolution de problème à la place du cours magistral :

[29] La récurrence était en 1984 enseignée au niveau terminal G2 de l'enseignement technique. Dans cette série les bases numériques sont enseignées.

> *« Il est utile de préciser d'emblée que sa pensée sera déformée progressivement dans la pratique des années 80-90 par la mise en place d'un certain "activisme" dont l'élève est le sujet, notamment avec le triptyque : activités préparatoires, énoncés des définitions et propriétés de plus en plus souvent admises sans démonstration et enfin les travaux pratiques où l'élève applique ces propriétés » [J.P. Daubelcour, 1999].*

Les contre-réformes aux mathématiques modernes ont détruit le système d'exposé des structures et les types d'exercices correspondant. Les démonstrations fondées sur les structures exposées par le professeur dans son cours magistral disparaissent au profit d'une « déviance quasi générale » de l'enseignement des mathématiques : un « activisme ». Cet activisme justifié par « l'élève au centre du système » met l'élève en face d'activités d'introduction des notions abordées.

2.1.3.4 Période 1991-2000

2.1.3.4.1 *Programme*

La référence pour ce paragraphe est le programme des classes de seconde, première et terminale.[30] En terminale S une importante modification de structure permet une spécialisation dans une des trois matières scientifiques. La série C (spécialité mathématiques et physiques) est remplacée par une spécialité mathématiques et une physique. Tous les élèves reçoivent un enseignement obligatoire de mathématiques. Ceux qui choisissent une spécialité mathématique ont un enseignement supplémentaire de mathématiques de 2 heures. Alors que les terminales C et terminales D étaient des classes distinctes (horaire, programme), les élèves de terminale S ont tous le même programme obligatoire avec le même horaire (6 heures). (L'horaire hebdomadaire est de 6 heures (dont 1 heure de module) en 1°S.) Il y a ainsi une réduction d'une heure en terminale S spécialité par rapport à la terminale C et de 3 heures pour ceux de l'option physique. Les élèves de deux spécialités différentes peuvent être dans une même classe. Cependant, à l'origine, les établissements reproduisent le mode de fonctionnement en séparant les spécialités dans des classes distinctes. Ce mode d'organisation perdure encore aujourd'hui dans les grands lycées (en particulier en Guadeloupe et Marti-

[30] Arrêtés des 25 avril 1990, 27 mars 1991, 10 juillet 1992 in Mathématiques classes de seconde, première et terminale, Ministère de l'Education, édition CNDP, réédition 1997.

nique). Il possède l'avantage de donner plus de souplesse au professeur dans l'organisation du temps pédagogique entre enseignement obligatoire et de spécialité. La baisse des effectifs de la spécialité des mathématiques rend sa maîtrise impossible dans les structures de moindre taille.

En seconde, les intentions majeures rappellent qu'*« on a voulu entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique »* [p.13]

et les objectifs veulent *«développer les capacités de communication : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement) »* [p.15].

Dans la présentation du texte du programme, on reprend les indications du précédent programme : *« pour les démonstrations, le professeur est laissé seul juge de l'opportunité » de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités. La mention « admis » signifie que la démonstration est hors programme»* [p.136].

Ainsi dans ce cadre, la liberté pédagogique du professeur reste dans l'esprit des programmes.

A propos du vocabulaire et des notations, on précise : *« Certaines questions (traitement des équations, emploi des propriétés caractéristiques en géométrie...) amènent à utiliser des équivalences logiques ; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme. L'emploi de symboles n'est pas un objectif du programme. Tout exposé de logique mathématique est exclu » [p.18]*.

Il n'est plus fait référence à la démonstration ou au raisonnement dans la suite du programme.

Dans le cycle terminal des séries scientifiques, l'exposé des motifs reprend les termes du programme de seconde sur les intentions majeures. Le programme est découpé en chapitres. Le *« rôle formateur des activités de résolution de problèmes»* nécessite d'adjoindre des travaux pratiques à chaque chapitre. La progression doit permettre la maturation des concepts : *« en particulier, il convient d'aborder assez tôt les points essentiels du programme, afin de fonctionner de façon efficace et de les approfondir de façon progressive, et de ne pas bloquer en* *fin d'année des sujets nécessitant une démarche spécifique (par exemple, la géométrie dans l'espace ou le calcul des probabilités) »*[31]

Nous remarquons que le professeur est fortement conseillé sur l'ordre des chapitres. En tout état de cause la révision en début d'année des connaissances des classes antérieures est proscrite.

Un paragraphe sur « *raisonnement, vocabulaire et notations* » précise : *« On entraînera les élèves à la pratique des modes usuels de raisonnement ; équivalence logique, implication, contraposition [...] Les élèves doivent connaître et peuvent utiliser les symboles* $\Rightarrow$ *et* $\Leftarrow$, *mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles. Tout exposé de logique mathématique est exclu ».*

En première S, dans certaines situations, le raisonnement par récurrence peut être utilisé sur des exemples très simples mais aucune évaluation ne peut en comporter. En particulier, le raisonnement par récurrence peut être utilisé pour établir une croissance ou obtenir une majoration. En algèbre et probabilités, *« il convient d'exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques, ainsi que l'étude de variations de fonctions : les activités doivent combiner les expérimentations (graphiques et numériques) et les justifications adéquates».*

On voit ici une référence appuyée au registre graphique et aux changements de registres. La notion de démonstration n'est pas mentionnée, sauf pour préciser ce qui n'est pas à démontrer (énoncés usuels sur les limites, règles de dérivation, comportement local et global des fonctions,...).

En terminale S, on prescrit dans certains cas de ne pas faire la démonstration (énoncés usuels sur les limites, dérivation d'une fonction composée,...). Le raisonnement par récurrence doit être maîtrisé dans des cas significatifs, mais on s'abstiendra de toute considération théorique. Dans le paragraphe de la formation scientifique, on précise les moments de l'activité mathématique. Ces différentes phases ne mobilisent pas les mêmes capacités. Ces capacités doivent être développées dans le but de produire des raisonnements clairs et précis au moyen d'une communication de qualité. Remarquons le passage d'*objectifs majeurs* dans le précèdent pro-

---

[31] Bulletin officiel, N4, 12 juin 1997[p13]

gramme à *objectifs importants : « les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, évaluer la pertinence des résultats obtenus en fonction du problème posé, ne sont que des moments d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants ».*[32]

Le formalisme excessif est dénoncé aussi bien dans les énoncés que dans les démonstrations. Les savoir-faire des travaux pratiques sont souvent limités à des exemples simples. Dans les cas du calcul intégral toute utilisation d'intégration par parties doit être déclenchée par une indication.[33]

Dans le chapitre des probabilités, les obstacles au dénombrement sont levés. En effet les confusions entre chaque modèle théorique et sa formule mathématique $A_n^p, C_n^p, n!$ sont supprimées. L'élève n'apprend plus que le modèle des combinaisons, les deux autres sont enseignés, sans modèle associé, avec l'utilisation de registres (arbre, tableau).

2.1.3.4.2 *Conclusion partielle*

En résumé, le programme se situe dans la veine du précédent, passant d'une démarche mathématique à une démarche scientifique. Les mathématiques ont disparu comme discipline autonome. Chaque concept scientifique est approché directement avec la spécificité de la science associée. Ainsi les programmes introduisent le caractère expérimental, tout formalisme excessif est proscrit. Si la démonstration reste une activité du professeur dans le déroulement de son cours, elle devient l'œuvre de l'élève : *« bâtir une démonstration »* dans les *« travaux »* au sujet des problèmes. Aucune indication de la manière de l'enseigner n'est donnée.

Il est à noter que « *Le professeur garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement* » mais que le programme cite avec précision les démonstrations à faire, non exigibles ou admises. Cependant dans la réalité de la classe :

[32] Bulletin officiel, N°4 du 12 juin 1997 [p14].

[33] Bulletin officiel, N°4 du 12 juin 1997 [p20].

> *« L'élève passe directement d'une étape initiale expérimentale, appelée "activité préparatoire", à l'application des théorèmes admis dans le contexte des "travaux pratiques". L'habitude étant prise, il finit par ne plus comprendre la nécessité d'une démonstration, c'est ce que nous disent la plupart des enseignants en post-bac » [J.P. Daubelcour, 2006].*

La réduction en 2000 du volume horaire accordé aux mathématiques entraine une nouvelle coupe sombre de certaines parties du programme. En accord avec J.P. Daubelcour (2006), nous affirmons que le programme n'a plus d'organisation :

> *« Ainsi de replâtrage en replâtrage, les enseignants ont l'impression, c'est un euphémisme, que ce travail de modification des programmes se fait sans ligne directrice. Il semble que l'unique préoccupation soit l'aspect quantitatif de la restructuration des Lycées ».*

Cet état perdure jusqu'à l'arrivée des programmes de 2002, date à laquelle la plupart des professeurs ont perdu jusqu'au souvenir de l'apport de la réforme des mathématiques modernes : la refondation et la reconstruction du curriculum à partir d'une axiomatique basée sur le formalisme. Ces professeurs vont pouvoir reconstruire de petits morceaux de rationalité locale qui vont permettre l'introduction des ROC. L'enjeu n'est plus de « tuer » les mathématiques modernes mais de (re)trouver un nouveau type de reconstruction rationnelle qui permet de redécouvrir les anciens problèmes des questions de cours où l'élève montre qu'il peut produire un discours mathématique personnel autour d'une démonstration.

2.1.4 Par les sujets du baccalauréat avant 2004

2.1.4.1 Introduction : exercice/problème à tiroirs

Le baccalauréat antérieur à 2004 est composé de deux exercices et d'un problème. Nous constatons cette même structure depuis les années soixante, soixante-dix. Cette organisation n'évolue donc pas malgré les changements de programme. La plupart des enseignants conserve comme modèle de l'évaluation terminale celle qu'ils avaient connue comme élève. L'évaluation se caractérise par un panel d'exercices d'un type précis : nous le caractérisons par une logique déductive de conception, par un guidage plus ou moins important suivant la difficulté de l'exercice et par une importance notable de la rédaction. Chaque question posée

doit permettre de répondre à une ou plusieurs questions suivantes. C'est en général la question finale qui pose le véritable problème mathématique. Les réponses aux questions doivent être rédigées dans une langue conventionnelle. Cette convention est établie sur des critères sur lesquels existe un certain consensus : correction de la langue, enchaînement des idées, utilisation des symboles mathématiques. Il n'existe pas pour l'élève de travail d'organisation de la recherche du problème final. Nous le dénommons « exercice ou problème à tiroirs ». Il nous semble important de remarquer que les différents exercices sont choisis et élaborés dans le souci de permettre à une majorité d'élèves de pouvoir faire l'ensemble du devoir.
Après avoir donné la structure globale de l'évaluation, penchons-nous plus précisément sur l'année 1995, année de la mise en place en terminale de la rénovation pédagogique des lycées.

2.1.4.2 Année 1995, rénovation pédagogique des lycées

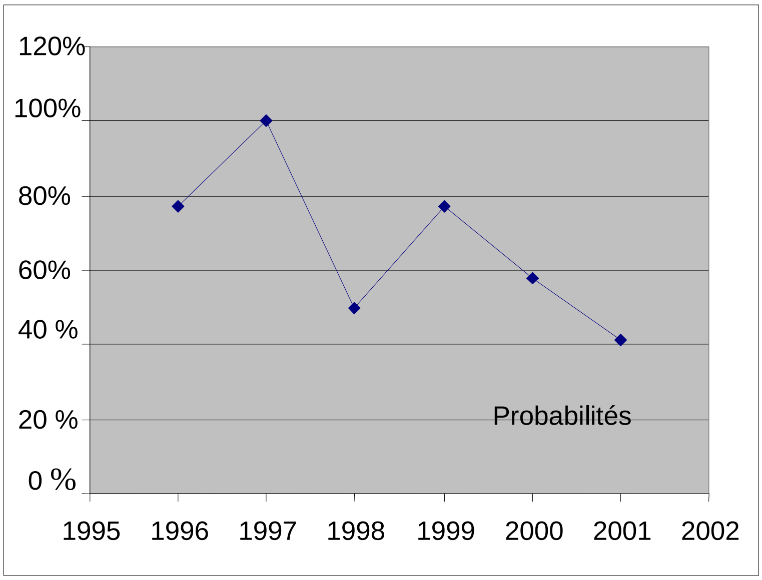
Dans un souci d'explication F. Bayrou, ministre de l'Education Nationale, s'adresse aux élèves et souhaite qu'ils aient « *entre leurs mains des exemples concrets de sujets, tels qu'ils vous seront proposés le jour de l'examen* ». Pour cela le ministère élabore et diffuse, auprès des professeurs, une brochure[34] avec un sujet pour toutes les nouvelles épreuves.
Le sujet de mathématique de la série S proposé dans la brochure respecte l'organisation en usage dans le choix des exercices et du problème d'analyse. Mais l'aspect graphique est plus privilégié qu'auparavant. Cependant cette volonté n'est pas confirmée par la lecture des sujets du baccalauréat 95. En conséquence, la seule innovation réside dans le passage de deux sujets complètement différents pour les séries C et D à deux sujets pour la série S ne différant que par un exercice en fonction des spécialités. Respectant le modèle archétypique (deux exercices, un problème), le sujet propose en effet un exercice (l'exercice 1) et un problème, communs à l'ensemble des spécialités, tandis que le deuxième exercice est différent selon qu'on soit en spécialité mathématique ou non.

[34] Le bac 1995, Les nouvelles épreuves (Le nouveau contrat pour l'école), Ministère de l'éducation nationale Maury, Novembre 1995.

2.1.4.3 Etude globale du sujet de baccalauréat

Premier exercice

Ce premier exercice évalue une partie importante du programme. Le plus souvent les probabilités discrètes : 63% des sujets, en moyenne de 1995, année d'introduction de la terminale S, à 2001 (2002, année d'introduction de l'exercice novateur QCM dans les sujets) (document 8).



Document 8. Pourcentage de sujets comportant un exercice concernant les probabilités.

Ces exercices ne demandent pas de routine particulière. La calculatrice, n'apportant pas d'aide à l'élaboration d'une solution, permet de calculer, voire de mémoriser des formules dans une base de données.

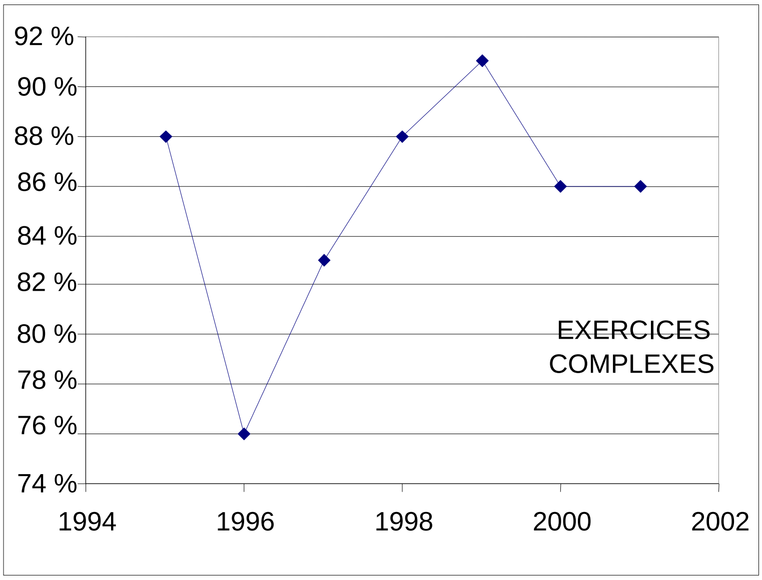
Par ailleurs, les exercices sont posés dans des contextes variés du champ conceptuel. Une des premières difficultés à surmonter est la compréhension du texte de l'exercice, ou plutôt des usages en vigueur dans ce champ conceptuel. L'exercice de probabilité du baccalauréat 2009 des Antilles-Guyane en est un exemple. En effet, à la lecture de l'énoncé (« on lance deux dés simultanément ») de nombreux élèves ont voulu utiliser les « p parmi n ». Le réflexe déclenché par l'usage du mot simultanément a transformé un exercice facile en un exercice peu réussi. De plus, le passage d'une expérience décrite en langue naturelle (souvent issue de la vie courante) au modèle mathématique nécessite des changements de registre :

> *« Les énoncés de problèmes sont le plus souvent (tout au moins au niveau lycée) formulés dans le registre de la langue naturelle, mais la résolution peut faire intervenir, outre ce même registre, le registre symbolique (les formules) ainsi que le registre des tableaux et des arbres » [B. Parzysz, (2003].*

Enfin dans le cursus, le chapitre concernant ces exercices est indépendant des autres. Il constitue un îlot autonome de rationalité. Son enseignement s'effectue dans le cycle terminal. Les connaissances sont donc nouvelles, les changements de registres qu'il nécessite sont peu familiers des élèves. Cette richesse concourt à rendre incontournable ce chapitre pour la formation des élèves. En effet le changement de registre est une manière de résoudre un problème, il fait partie des méthodes de « problem solving » i .e. d'heuristique.

Deuxième exercice

Cet exercice porte souvent dans le chapitre des complexes (85% des sujets en moyenne, de 1995, année d'introduction de la terminale S, à 2001 (2002, année d'introduction de l'exercice novateur QCM dans les sujets du baccalauréat)) (document 9).

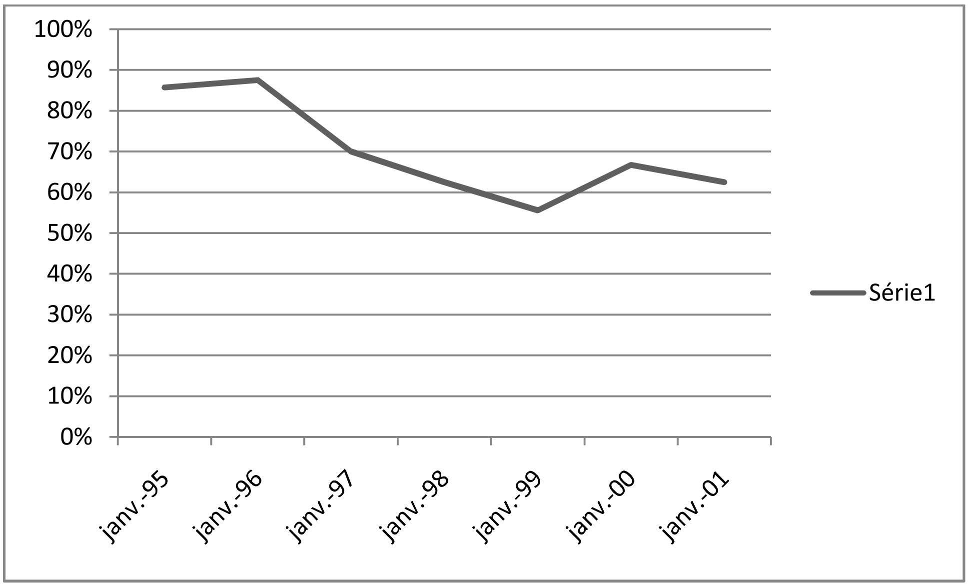


Document 9. Pourcentage de sujets comportant un exercice concernant les complexes.

Il nécessite une bonne connaissance de la géométrie du collège. Il fait appel à des changements de registre. Cependant, sa forme d'« exercice à tiroirs » limite cette difficulté afin de rendre l'évaluation accessible dans le temps imparti. Le cadre n'est pas toujours indiqué (algébrique, numérique, géométrique).

Le problème

Le problème est composé de deux à trois parties. La première partie ou la deuxième partie est une étude de fonction. Le document 10 rend compte de l'évolution du pourcentage de première partie comportant une étude de fonction.



Document 10. Pourcentage de première partie comportant une étude de fonction.

Cette partie est l'exemple même d'« exercice à tiroirs ». Les principales caractéristiques sont l'uniformité langagière et la répétition du même plan.

La calculatrice avec calcul formel est un outil efficace pour répondre aux questions. Dans les classes, les élèves recopient sur leur calculatrice les cours des professeurs. Certains élèves travaillent beaucoup sur l'élaboration de programmes complémentaires pour utiliser les données recopiées. Ceux-ci sont généralement motivés pour continuer des études en informatique. Des échanges existent entre élèves au sujet des programmes de la calculatrice et les cours des divers professeurs d'un établissement. Cependant l'égalité entre élèves n'est pas respectée car ils n'ont pas tous un outil performant. La calculatrice devient alors un objet convoité. (Il n'est pas rare de voir des vols de calculatrice.) Dans les dernières années de la période étudiée, il devient aisé de télécharger au préalable sur Internet des programmes qui permettent de répondre directement aux questions sans effectuer de travail de frappe. L'élève n'a plus qu'à transférer. Dans les conditions actuelles (calculatrice autorisée mais pas fournie), nous comprenons l'abandon de ce type d'exercices.

Les parties deux et trois du problème portent souvent sur les suites ou les intégrales. Statistiquement, nous constatons que les élèves n'abordent ces questions que s'ils ont traité la première partie. La calculatrice est un outil efficace de contrôle. Mais elle peut être un outil pour appréhender la solution. Cette partie est aussi un bon exemple d'«exercice à tiroirs ». La recherche de la réponse est guidée, l'énoncé donne souvent la méthode. Par exemple « Démontrer en utilisant une intégration par partie… ».

2.1.4.4 Le Formulaire

Dans les périodes précédentes, les parts de la démonstration et du cours dans l'examen étaient de plus en plus réduites. (Notamment au nom du principe qui veut que la restitution « par cœur » ne soit pas un outil de sélection.) Nous remarquerons dans le paragraphe 2.1.5.3 la volonté d'une partie de la noosphère, par les auteurs de manuel, de pousser à la seule mémorisation du squelette du cours. Ainsi pour achever ce tournant, l'institution annexe au sujet de baccalauréat de 1993 le « formulaire ». L'élève aura pour répondre aux questions des exercices, une base de données : le formulaire. Ce nouvel instrument est introduit par l'institution au nom de l'égalité des chances. Il vient gommer les différences entre ceux qui peuvent entrer des formules dans leur calculatrice et ceux qui ne possèdent pas de calculatrice performante. Cependant par son aspect récapitulatif des savoirs enseignés et par son utilisation prépondérante dans la recherche de solution des problèmes posés, il minimise l'importance de la démonstration dans le cours du professeur de mathématiques au profit des formules, des définitions et des théorèmes qu'il explicite.
En conséquence, au fil des années le cours du professeur comporte de moins en moins de démonstrations. Le professeur se centre sur la répétition d'exercices ou de problème du baccalauréat.

2.1.4.5 Conclusion partielle

Pour résumer cette étude, nous constatons que l' « exercice à tiroirs » semble être le principal type d'exercice de l'évaluation du baccalauréat. Ces exercices sont assez semblables par leur structure et par les parties évaluées. Ils modèlent l'apprentissage des élèves en leur offrant un cadre connu et donc rassurant. Cette similitude rend le bachotage pertinent. Cette particularité implique nécessairement un effet sur les pratiques des professeurs. En particulier les sujets de baccalauréat deviennent le modèle des évaluations et donc le but de l'apprentissage. De plus le guidage dans les exercices permet à une majorité d'élèves d'obtenir une note moyenne. Ce type d'exercices très fermé n'évalue pas les capacités de l'élève à élaborer une démonstration et son apprentissage ne nécessite pas une connaissance approfondie du cours du professeur (structures, liens …).

Durant la dernière décennie, nous constatons qu'aucune évaluation posée au baccalauréat ne comporte une démonstration de cours. Cet état de fait implique l'*« absence de modèles de construction d'une démonstration* » comme le souligne le rapport de l'inspection générale (2002). La démonstration est un objet encore non enseigné (nous retrouvons ici l'essence, sa nature paramathématique).Les lacunes des élèves à l'entrée à l'université deviennent problématiques :

> *« Les gens l'ignorent, mais on assiste à un naufrage ! On imagine encore que les petits Français sont bons en maths. Mais ils sont désormais mauvais, et cela pose un problème aux universités et aux écoles supérieures, qui ont déjà commencé à baisser le niveau de leurs programmes… » [L. Lafforgue 2004]*[35].

2.1.5 Par les manuels, évolutions du métadiscours

2.1.5.1 Introduction

Nous allons étudier les préfaces des manuels de terminales scientifiques correspondant à chaque programme et les annales du baccalauréat de 70 à nos jours. Notre travail est centré sur le métadiscours des auteurs de manuel à propos des organisations, du raisonnement et de la démonstration. Nous découpons la période en quatre parties : avant 1960, 1970-1980, 1980-1990, 1990-2000. Nous avons voulu commencer cet historique par une étude portant sur la période précédant 1960 (par l'étude d'un ouvrage typique), période caractérisée par la présence de la question de cours au baccalauréat, dans une perspective comparative avec la ROC. Pour les trois périodes suivantes, notre analyse se fera à partir de l'analyse de préfaces de manuels et d'ouvrages parascolaires (souvent distribués gratuitement aux professeurs par les éditeurs).

[35] Figaro 4 décembre 2004 vu in la gazette SMF L'étude PISA pour les mathématiques. Résultats français et réactions A. Bodin, p66.

2.1.5.2 Période avant 1960 : étude d'un livre portant sur la question de cours

Nous basons notre étude sur l'analyse d'un ouvrage du parascolaire sur les questions de cours d'A. Monjallon (1959)[36]. Le livre est constitué de cinq chapitres : la question de cours, la question de cours d'Algèbre, la question de cours de Trigonométrie, la question de cours de Géométrie, le problème, les mathématiques à l'oral. La majeure partie du livre est consacrée à la question de cours (134 pages sur 192 pages). L'oral n'est développé que sur une page. L'analyse est absente du découpage du livre bien que présente dans les exercices, en particulier la dérivation permet de calculer la vitesse. Cependant pour étudier une fonction, la notion de dérivation est proscrite par l'énoncé. Certains exercices utilisent le concept de prérequis. Presque toutes les questions de cours sont suivies d'une application.

Afin de mieux appréhender les types d'exercices nous avons construit une typologie des exercices. Elle permettra de mieux cerner l'objet « question de cours ». Nous avons classé les exercices dans quatre types :

- question de cours contextualisée,
- question de cours avec application,
- exercice d'application d'un résultat de cours,
- exercice systémique d'élaboration d'un cours sur une notion. Ce type d'exercice se situe en géométrie.

Pour illustrer chaque type nous donnons un ou plusieurs exemples.

Type 1: question de cours contextualisée (document 11)

L'élève doit reprendre une démonstration de cours pour l'adapter à un contexte particulier.

Résolution des équations $4x^2-8x+1=0$, $2x^2+x+1=0$ vérification (sans se servir de l'étude de l'équation du second degré dans le cas général) (Paris B)

Document 11. Question de cours, Paris B

L'auteur note :

[36] Monjallon A. (1959) « L'épreuve de mathématiques au baccalauréat première partie ». Vuibert, 1 trimestre 1959.

> *« Il s'agit d'une étude directe d'équation du second degré ; donc on ne supposera pas acquis les résultats obtenus dans le cours… » [p12].*

L'auteur indique dans ces généralités que ce type d'exercice est le plus « *délicat* » [p11]. Il est nécessaire de montrer directement comment résoudre ces deux équations sans utiliser la résolution générale élaborée dans le cours :

> *« Si une telle question ne nécessite pas, de la part du candidat, un travail d'invention, elle exige cependant de lui un certain effort de composition pour adapter ses connaissances à l'exemple numérique donné».*

Restituer l'étude en entier dans le cas général avec toutes les démonstrations et l'appliquer à ce cas particulier est ainsi proscrit par l'énoncé : le candidat doit adapter la démonstration générale au cas particulier, il doit contextualiser la démonstration située dans un cadre algébrique.

Type 2 : question de cours avec application

Somme et produit des racines de l'équation du second degré. Vérifier les résultats obtenus sur l'exemple $x^2+2x+1=0$ (Grenoble A et B)

Document 12. Question de cours, Grenoble A et B

Pour la question de cours du document 12, l'auteur note que :

> *« Voilà une question qui doit commencer par un préambule rappelant les résultats obtenus dans la résolution de l'équation générale du second degré. » [p19]*

Signe du trinôme du second degré. Application : Résoudre l'inégalité $4+3x-x^2>0$

Document 13. Question de cours, Bordeaux A

Pour la question de cours du document 13, l'auteur note que :

> *«Voilà une question de pure théorie, suivie d'une application numérique. Cette dernière exigera que soit faite la liaison entre les résultats obtenus et leur application numérique » [p23].*

L'application est très importante dans l'esprit de l'auteur. En effet, elle permet au correcteur de juger si l'élève a compris le cours. L'obstacle « par cœur » est déjà présent, le psittacisme est un obstacle important comme le montre le long développement de l'auteur :

> *« Ils (les candidats Ndr) pensent qu'ils suffit de savoir parfaitement, c'est-à-dire, en général, par cœur quelques tranches de leur manuel pour parer à cette partie d'examen…Remarquons tout d'abord qu'apprendre par cœur n'est d'aucune utilité en mathématiques : la composition en cette matière n'est pas faite pour juger de la mémoire du futur bachelier ».*

L'auteur compare sans le dire explicitement les mathématiques au latin. Sa conception de la question de cours ne ressemble pas à une restitution de déclinaison, elle suit une autre vocation celle des mathématiques. Il poursuit :

> *« La mémoire la plus fidèle est d'ailleurs capable de trahison. Que fera le candidat ayant ainsi préparé l'épreuve, s'il oublie un simple passage d'une démonstration ? N'ayant pas compris les raisons logiques de celle-ci et l'enchaînement des idées qu'elle contient, il sera incapable de la retrouver : ou bien son exposé restera incomplet, ou bien il inventera quelque justification plus ou moins absurde. Même s'il a répété presque mot à mot son manuel, le correcteur perspicace devinera à quelque légère imperfection que tout cela n'a pas été assimilé… » [p7-8]*

Les arguments employés ne sont pas d'ordre scientifique. L'auteur décrit sa conception de la mémoire et sa supposée faiblesse. Il lui semble impossible d'apprendre sans comprendre, il n'appréhende pas les habiletés d'un élève à ordonner la restitution sur d'autre plan que celui donné par l'ordre logico-déductif. Pour finir de persuader que le psittacisme ne peut être utilisé, il donne des vertus au correcteur: une « perspicacité » qui permet de voir derrière les lignes jusque dans la tête de l'élève.

Pour conclure, l'auteur dévoile par sa longue justification, que le problème du psittacisme reste la plus importante résistance à percevoir la question de cours comme une évaluation sur la restitution de connaissances. Avec soin ses arguments sont étayés pour montrer l'impossibilité de tout réciter sans comprendre.

Type 3 : exercice d'application d'un résultat de cours)

Trouver les arcs compris entre 0 et 2π radians qui sont solutions de l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(Paris)*

Document 14. Question de cours, Paris mod.

L'auteur note que pour cette question (document 14)

> *« ce sujet se présente comme une pure application numérique du cours. Il faut d'abord rappeler le principe de la recherche des arcs ayant même sinus qu'un arc donné. La réponse en découle aussitôt. »*

Cet exercice classique d'application se situe aujourd'hui dans la classe de première S, la trigonométrie perdant sa place en terminale au profit d'autres parties des mathématiques (probabilités continues, TICE, méthode d'Euler,…). Par ailleurs l'organisation de la réponse est à la charge du résolveur. Les cadres associés sont algébrique et géométrique. A la conclusion de la question l'illustration des solutions peut être menée avec les instruments géométriques, règles et compas. Ces instruments sont utiles pour construire la figure associée, composée du cercle trigonométrique et des points représentatifs des quatre solutions.

Type 4 : exercice systémique d'élaboration d'un cours sur une notion

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite et un plan soient parallèles (Caen A et B)

Document 15. Question de cours, Caen A et B

L'auteur note pour cette question (document 15) qu' :

> *«avant d'entamer la relation de cette question, il est utile de rappeler ce qu'on entend par une droite parallèle à un plan, car c'est précisément de cette définition que résulte la condition cherchée. » [p86]*

Cette question demande de la part du candidat un bon recul sur l'équivalence pour ne pas oublier la réciproque dans sa rédaction. Le cadre est géométrique. Une des composantes du substrat, la logique, est sous jacente. Au niveau du temps, l'organisation de la solution est un obstacle à une évaluation courte.

Conclusion partielle

La question de cours préfigure nettement la ROC. En effet, les différentes composantes d'une ROC tels que prérequis, démonstration, organisation, cours, types d'exercices sont déjà présentes de façon plus ou moins explicite dans le concept de question de cours.

Cependant, d'une part, le concept innovant de la ROC prend en charge le paradigme : « élève au centre du système » avec le terme restitution de connaissances. D'autre part une certaine topogenèse est modifiée. Dans la question de cours, l'organisation du travail est à la charge de l'élève, phase importante de la rédaction. L'auteur du manuel étudié prescrit cette charge. Par exemple, il mentionne qu'il faut rappeler les définitions utiles pour introduire la question. Ainsi, l'élève doit partir de l'organisation du cours du professeur et planifier le déroulement des connaissances nécessaires. Dans le cas de la ROC, l'organisation n'est plus à la charge de l'élève : elle est construite par le concepteur du sujet[37]. Cette transmission d'organisation permet au résolveur de mettre moins de temps pour répondre à une ROC qu'à une ancienne question de cours non organisée. De plus, le niveau de la rédaction de la question de cours est académique, illustrée en géométrie par le registre figural.

2.1.5.3 Période 1970-1980

Les différents manuels étudiés dans cette rubrique permettent de mettre en valeur des principes qui gouvernent la réforme des mathématiques modernes, la formalisation (au sens de respect de l'architecture globale par l'entrée des structures) et le caractère crucial du raisonnement. Ainsi pour l'enseignant il vaut mieux enseigner un raisonnement qu'une technique sophistiquée :

> *« Même pour les élèves de Première qui ne continueront pas leurs études, il est plus important d'avoir appris à raisonner que d'avoir plus ou moins bien assimilé une technique de calcul sophistiquée. »*[38].

Dans le même ordre d'idées, les mathématiques sont un terrain de développement de la pensée, leur rôle structurant permet de motiver l'élève à l'étude. Pour faire des mathématiques à ce niveau d'étude, il est nécessaire de maîtriser un langage : la langue mathématique. D'ailleurs, la moitié du texte du livre « Aleph 1 analyse » est consacrée à cet objet. Celui-ci nécessite *« une certaine rupture avec le mode de pensée intuitif ».* Le formalisme ordonne la programmation de l'année même si, ne réfutant pas le « sacro saint » principe de responsabilité du professeur, la programmation doit suivre l'ordre des chapitres pour respecter la cohérence du formalisme :

> *« Respectueux du principe selon lequel chaque collègue est libre d'organiser son cours selon ses goûts et le niveau de la classe, nous n'avancerons rien relatif à l'utilisation de cet ouvrage. Disons simplement que nous avons particulièrement*

[37] Voir prérequis

[38] G. Gautier, G.Girard, D.Gerll, G.Thiercé, A. Warusfel, 1976, *Analyse /Probabilités géométrie*, 1 CDE, Aleph 1, Classique Hachette.

> *veillé à ce que l'enchaînement des chapitres évite tout « retour en arrière »ou «appel à des résultats qui seront démontrés ultérieurement » »*[39]

La démonstration en cours de mathématiques est pratiquée par le professeur et reste ainsi une activité facultative hors évaluation scolaire. Ce que souligne : « *Toutefois on peut ne pas assimiler les démonstrations* »[40].

Seul le principe de démonstration par récurrence doit être su, mais il reste peu utilisé dans les sujets du baccalauréat. La seule trace du cours qui doit être apprise et connue est constituée du squelette du cours, que constituent les théorèmes et propriétés [P. Vissio, 1971]. Ainsi nous notons que le squelette du cours préfigure le futur formulaire des années 93. En effet le squelette du cours possède les principales caractéristiques du formulaire mais son organisation peut être particulière à chaque professeur. Lors de notre investigation par entretien (paragraphe 2.4.9), le professeur de métropole (annexe 2.6) qui a réussi son baccalauréat en 1975, résume en tant qu'élève son vécu de la démonstration en ces termes (42) :

42. « Moi je me souviens quand j'étais élève, les démonstrations je les notais jamais sur mon cours. Je ne prenais que les théorèmes. Parce qu'on n'avait qu'à faire les exercices, les démonstrations je savais que cela ne servait à rien je ne les notais pas. Je voulais savoir pourquoi c'était vrai. Comme cela ne servait pas, je ne la notais pas ».

La résolution d'exercices et la connaissance du squelette du cours constitué de mathématiques poussées constituent l'objectif de l'enseignement perçu par le professeur de cette époque. Notre étude montre que cette vision de la fonction de la démonstration (motivée pour servir au cours) est partagée par les auteurs de manuel. Cependant, les exercices posés sont eux aussi de haut niveau comme le montre la transcription par certains ouvrages (Aleph) d'extraits de sujet de CAPES.

Dans le dernier ouvrage de la décennie, les exercices de baccalauréat enrichissent le livre. Ainsi la place du baccalauréat devient plus prégnante, notamment comme enjeu social (nous l'analyserons dans le paragraphe 2.4. de ce chapitre). Cette évolution se manifeste aussi len-

[39] M. Condamine M. & P. Vissio (1970), *Algébre et analyse,* première A-B-C-D-E, Delagrave.

[40] M. Condamine M. & P. Vissio (1970), *Algébre et analyse,* première A-B-C-D-E, Delagrave.

tement dans l'édition parascolaire. Par exemple, les annales non corrigées, simples recueils de sujets, s'enrichissent d'un index thématique en fin de période[41].

Le cours de mathématique, tel qu'il est présenté dans les manuels, s'inscrit dans le cadre voulu par la réforme, celui des mathématiques modernes, privilégiant le respect d'une « architecture globale » avec enchaînements logico-déductif : les théorèmes se démontrent à partir de théorèmes admis ou d'une axiomatique imposée, qui norme les pratiques enseignantes. Dans la classe, la pratique qui en découle se caractérise par une bipolarité entre cours théorique et exercices. La démonstration de théorèmes du cours reste presque toujours du domaine réservé au professeur.

2.1.5.4 Période 1981-1990

Nous basons cette brève analyse sur le manuel de la collection Istra[42], produit par l'IREM de Strasbourg, dont l'étude nous semble pertinente pour décrire deux courants traversant la noosphère. Le préambule rappelle qu'

> *« une évidence s'est imposée à nous : un manuel n'est ni la reproduction d'un enseignement oral, ni un enseignement oral prémâché. Alors que le manuel présente, par la force des choses, un déroulement linéaire, une classe n'est pas astreinte à un tel déroulement. C'est même tout l'art, le charme et l'intérêt de l'enseignement oral que de pouvoir mener de front des questions parallèles ou convergentes qui s'éclairent l'une l'autre et introduire certaines notions au fur et à mesure des besoins. »*

Cette phrase permet d'apprécier la diversité des cours de mathématiques prônée par la recherche sur l'enseignement des mathématiques et l'accent mis sur la notion de liberté pédagogique : la programmation doit être construite par le professeur en fonction des besoins de sa classe. La progression n'est donc pas linéaire mais sa description évoque le concept de progression spiralée.

Dans cette période, le travail de recherche sur l'enseignement a donc produit des effets dans les ouvrages scolaires. Mais dans les ouvrages parascolaires, l'évolution reste plus limitée. A

---

[41] Le nombre de pages évolue peu pendant cette période : 188 pages en 1971 (annales Vuibert 1972), 194 pages en 1978 (annales Vuibert de 1979), séries C, E.

[42] *Analyse et Statistiques*, terminales C et E, IREM de Strasbourg, Istra (1983).

partir de 1989, un éditeur ajoute une introduction de deux pages, qui donnent les grandes lignes des attendus de « *l'épreuve de mathématiques* » (par exemple une réponse doit être justifiée) et des indications « *pour construire un devoir de mathématiques* ». On précise que :

> *« les dessins des exercices de géométrie comportent tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations. »*[43].

Ainsi, l'aide au lecteur reste minime. Cependant des index par thème ou thématique apparaissent.

2.1.5.5 Période 1991-2000

Les chapitres des ouvrages sont construits en deux entités distinctes : l'apprentissage de la notion et les exercices. Des chroniques ou ouvertures sur d'autres champs apparaissent. L'apprentissage d'une notion s'articule en trois parties :

- l'introduction avec les activités préparatoires,
- le cours,
- les travaux pratiques.

Une des collections phare pour le professeur est la « collection Terracher[44] ». Elle met en œuvre certains acquis de la didactique en s'appuyant sur une structure mathématique solide et des types d'exercices variés et approfondis : application directe du cours, travaux pratiques, activités préparatoires, problèmes, exercices résolus, etc. Cette collection prend une position dominante :

> *« Un manuel choisi dans la "collection Terracher" qui est devenue, au fil des ans " l'ouvrage de référence" en terminale qui respecte la lettre des programmes en essayant, sur un certain nombre de points, de donner une certaine épaisseur sémantique aux concepts développés en T.S » [J.P. Daubelcour 2006].*

En 1998, la nouvelle « collection Terracher »[45] reste dans l'esprit des précédentes. La rubrique à bac se modifie avec l'introduction de sujets du baccalauréat. Les démonstrations sont

---

[43] Sujet 89 non corrigés terminale A/B/D/D' Nathan Bac 90.

[44] Exemple de manuel : Terminale C / E analyse et probabilités Hachette lycées Collection Terracher 1992 C.Artigues-Y.Bellecave-J.M. Bellemin –R. Ferachoglou-P.H. Terracher

[45] Férachoglou R. & Terracher P.H. (1998), *Analyse et probabilités*, Hachette lycées, Jean Lamour, Maxéville.

claires mais ne sont pas les fondations de l'ouvrage. Le manuel oriente le travail de l'élève vers les activités.

Les ouvrages du parascolaire évoluent plus vite. Entre 1988 et 1992, Nathan, en collaboration avec l'A.P.M.E.P., édite les sujets du bac suivis d'exercices classés par thème. Deux index (un par académie, l'autre thématique) sont suivis par une rubrique *pour construire un devoir de mathématiques*. Cette rubrique mentionne que :

> *« les dessins des exercices de géométrie doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations ».*

Le registre figural est nécessairement lié à la démonstration. Les années suivantes ne comportent pas de modifications en profondeur, seulement des changements de vocabulaire. En particulier, les index deviennent des tableaux thématiques, ou des thèmes. La rubrique *pour construire un devoir de mathématiques* devient *conseils pratiques*.

En 1992 (bac 93) les formulaires sont introduits dans les annales. En 1994 (bac 95) les annales comportent une rubrique « concours général » comportant le sujet et le corrigé. En 1995 (bac 96) les annales s'épaississent avec l'introduction des concours des écoles d'ingénieurs comportant des Q.C.M. En 1997, une édition spéciale avec dossier du professeur paraît mais l'expérience n'est pas renouvelée. L'introduction du barème des exercices apparaît pour la première fois. Les annales Vuibert en 1998 (annales 99)[46] donnent les « savoir-faire » en S « *que doit posséder un candidat au baccalauréat en fin d'année scolaire* » mais procèdent au remplacement de la banque d'exercices classés par thème par des sujets des sessions précédentes. Certaines annales corrigées rappellent la partie du programme qui mentionne que les démonstrations ne sont pas exigibles[47] (Par exemple : [p7] Vuibert, annales 99, édition 1998). Remarquons que dans ce livre à la page 224, une rubrique *Maths à la muette* est formée de « Proofs without words » :« *Il s'agit de démontrer des résultats simplement en regardant un dessin !* » Ainsi la démonstration peut devenir plus ludique donc moins formelle. Ce pas de côté reste sans suite.

Au final, les annales du baccalauréat évoluent avec un léger retard par rapport aux manuels, mais s'engouffrent sur le marché suscité par l'objectif des 80% d'une classe d'âge au bacca-

[46] Bac 99 n°25(98), Maths Série S, corrigés, Vuibert, Paris.

[47] Bulletin officiel n°10 du 28/7/94

lauréat. Plutôt tournées vers les professeurs en début de période, elles donnent des éléments complémentaires méthodologiques pour les élèves en fin de période. Cet aspect s'inscrit dans le mouvement qui fait du baccalauréat le but des élèves, des parents d'élèves et de l'enseignement du cycle terminal, bref de la société scolaire. Ainsi l'évaluation finale paraît être le but de l'enseignement du cycle terminal, en accord avec le paradigme déjà cité.

Les manuels, centrés en début de période sur le formalisme et l'apprentissage du raisonnement mathématiques, prennent progressivement en compte la place de l'élève dans son apprentissage. Cette profonde modification est la conséquence du travail des IREM et du paradigme dominant « les élèves au centre du système scolaire » issu de la loi Jospin d'orientation sur l'éducation de 1989.

Enfin, la mise en place d'un formulaire produit une certaine déviance : parti d'un souci d'équité, le formulaire provoque une nouvelle pratique de résolution de problèmes, centrée sur la simple recherche de la bonne formule à appliquer. Cette pratique, combinée avec la volonté institutionnelle de mettre hors jeu le cours magistral et par voie de conséquence la démonstration effectuée par le professeur, n'apporte pas les effets escomptés.

2.2 L'objet ROC et son évolution.

2.2.1 Mise en place du concept par l'institution

L'introduction des ROC en 2005 marque la volonté institutionnelle du retour de la démonstration dans l'évaluation, dans l'espoir d'une évolution des pratiques enseignantes. Cette intention non déclarée directement, peut être appréhendée par analyse du rapport de l'inspection générale de 2002[48]. En effet le rapport de l'inspection générale (rapport d'étape 2005) rappelle les objectifs institutionnels de l'introduction des ROC :

> *« Les ROC sont une forme de retour de l'ancienne « question de cours », le but étant notamment des réinstaller* ***dans*** *les* ***classes***[49] *l'habitude de faire restituer par les élèves des démonstrations clairement structurées, habitude qui avait largement régressé, voire disparu »*

[48] effectuée au paragraphe 2.3.2 « le statut de la démonstration pour le professeur ».

[49] En italique dans le texte

Les professeurs devront viser l'acquisition de ce concept pendant le cycle terminal. L'institution communique sur le concept de ROC en donnant le panel possible de questions de cours, mais en précisant que cette question de cours sera, de plus, **contextualisée** :

> *« En épluchant le programme de TS, nous avons identifié une dizaine de questions de cours répondant à cette qualification. Pour éviter un bachotage stérile ou l'utilisation d'une banque de données sur calculatrice, nous avons décidé : que chaque démonstration de cours demandée sera contextualisée, que chaque démonstration de cours sera labellisée ''démonstration de cours '' »*
> *J. MOISAN (Pau, octobre 2003).*[50]

Cette contextualisation (dont nous montrerons les limites dans le cadre actuel) représente une certaine nouveauté par rapport aux quarante dernières années, bien que certaines questions de cours de 1960 possédaient déjà cette caractéristique[51]. Pour l'épreuve écrite du baccalauréat série S de la session 2005, l'introduction des ROC est effective et son concept est précisé :
« La restitution organisée de connaissances (comme par exemple la rédaction d'une démonstration figurant au programme), l'application directe de résultats ou de méthodes, l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, la formulation d'un raisonnement sont des trames possibles».[52]

2.2.2 Analyse sémantique du concept

2.2.2.1 Restitution

Partons de quelques définitions du mot restitution.
Restituer :

> *« Milieu du XIII° siècle du latin restituere » [Larousse dictionnaire étymologique 1964], « vieux : rétablir, remettre en vigueur « Maintenant, toutes disciplines sont restituées » [Rabelais]. Remettre en son état premier. Restituer un texte ancien » [Dictionnaire de la langue française Bordas 1994].*

[50] (D*oyen de l'IGEN de Mathématiques*) cité dans A. Bertrane, M. Ernoult et C. Talamoni (2005), *Contribution à une réflexion sur la démonstration.*
http://www.ac-creteil.fr/maths/SOURCES/fichiers_pdf/ReflexionSurLaDemonstration-19-07-05.pdf
[51] Voir l'étude d'un livre portant sur la question de cours (paragraphe 2.1.5.2).
[52] Note de service N 2003-070 du 29-4-2003

Restitution

> *« n. f. Restitution 1281 Ch. de TROYES, du latin restitutio » [Larousse dictionnaire étymologique 1964].*
>
> *« Action de restituer de remettre en son état primitif ; résultat de cette action. Restitution d'un texte » [Dictionnaire de la langue française Bordas 1994].*

Restituer c'est aussi rendre, faire état de trace, de la mémoire que l'on a d'une chose. En archéologie :

> *« restitution n'est pas synonyme de reconstruction ou de reconstitution. Reconstruire signifie « construire à nouveau », « replacer » des éléments qui se sont déplacés, qui ne sont plus sur place » [Dominique Seridji et alii, 2008].*

La restitution de connaissances serait donc l'acte de *remettre en leur état premier* les connaissances, à partir des traces du savoir issues de l'enseignement du professeur. Cette remise en état se fait sous la forme d'un écrit, ce qui relie cette évaluation aux textes dont dispose l'élève : cours du professeur, manuel,… Ce texte existe partiellement dans le cahier ou le livre de l'élève. Ainsi, en général, l'acte de « remettre en son état premier » est fictif dans une application stricte du concept.
Mais les connaissances ne se réduisent (heureusement) pas à un texte, restituer doit plutôt être pris dans le sens *faire état de traces*. Nous étudierons l'organisation des connaissances nécessaires à la construction de ces traces dans le paragraphe 2.3.2.3.

2.2.2.2 Organisée

Organiser, suivant le Robert (2003) XIV^{e} siècle, c'est " *rendre apte à la vie*". Dans notre cas, organiser c'est donner une structure pour que la ROC fonctionne. Ce sens vient de "organe": *organum* (latin) instrument, machine, et *organon* (grec) : instrument de musique d'abord puis de machine et enfin de corps mais aussi l'ensemble des ouvrages qu'Aristote consacre à la logique. Les origines de ce mot lui donnent droit à une succession d'utilisations. Avec organiser, on arrange, on prépare, on accommode, on compose, on combine, on met en place, on met en ordre, on constitue, on agence méthodiquement, on hiérarchise, on planifie, on orchestre (une restitution), on coordonne, on ordonne, on structure, on conçoit de façon systématique (Dans la langue anglaise, *interlock*, *mesh*).

2.2.2.3 Connaissances

La TAD [Y. Chevallard, 2002] décrite dans le chapitre 1 définit un *savoir-faire*, par un bloc [T/τ], etun

> *« savoir, en un sens restreint, un bloc [θ/Θ] – ou même, mais en un sens large cette fois, une praxéologie [$T/\tau/\theta/\Theta$] tout entière ».*

Le savoir est, dans ce sens, inaccessible à un élève dans sa globalité : la théorie reste en dehors des connaissances d'un élève de lycée. Dans la théorie des situations, G. Brousseau & J. Centeno (1991) définissent ainsi le couple savoir / connaissances :

> *« Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs.*
> *Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale ».*

Dans cette définition de connaissances, l'évaluation ROC porte à la fois sur les savoirs, les savoir-faire, des notions mathématiques, que sur le contrôle des notions-outils désignées par paramathématiques ou des notions protomathématiques. Dans ce sens, l'organisation des connaissances est un élément du savoir. F. Conne (1992), dans une perspective anthropologique, reprend le couple savoir/connaissance et le précise par « connaissance utile » / « connaissance en situation ». Ainsi, comme le reformule A. Mercier (2002) :

> *« Conne propose une distinction entre connaître, qui nomme le rapport du sujet à la situation avec laquelle il interagit, et savoir, qui nomme les moyens que possède un sujet pour intervenir sur une situation ».*

Dans la perspective d'Y. Chevallard la reconnaissance d'un savoir tient à une reconnaissance culturelle ou institutionnelle : c'est public et donc évaluable, évalué. L'élève doit organiser ses connaissances privées pour les rendre publiques : il construit un savoir de « son cru ». Pour pouvoir répondre à une ROC, il faut organiser ses connaissances privées pour les rendre publiques dans un texte.

2.2.3 Concept de pré-requis ou prérequis

Le prérequis établit un contrat d'évaluation. Mais de quel contrat s'agit-il ? Est-il déjà utilisé dans d'autre(s) pratique(s) ? Pour la plupart des professeurs de terminale S, le résolveur a l'obligation de l'utiliser dans sa démonstration. Le prérequis est ainsi un appui obligé et commande la structure. Lors d'un séminaire sur les ROC dans le cadre du CRREF (Centre de Ressource et de Recherche en Education Formation, IUFM Guadeloupe), la totalité des professeurs présents, plus de 50% des enseignants de terminale de Guadeloupe, était de cet avis. Pour eux, le prérequis ne se réduit pas à une hypothèse (surabondante ou pas), ni à une définition ou propriété qu'on admet. Il est plus proche du contrat implicite classique présent dans un enchaînement de questions dont la dernière question débute par « en déduire » : le contrat de la ROC pourrait paraître, de ce point de vue, quasiment identique à celui proposé à l'élève qui aborderait cette dernière question en admettant les résultats précédents. Un autre exemple : dans l'étude d'un problème, certains élèves, ne disposant pas de théorème adapté à leur démarche, produisent un nouveau théorème considéré par eux comme un prérequis pour leur travail, sans en connaître les conditions d'usage (les limites de validité).

La notion de prérequis peut se relier à la notion d'indication. La notion d'indication est très utilisée en anglais avec le « hint » qui donne une suggestion de réponse tandis que « prerequisite» dans l'enseignement supérieur réfère au présupposé, qui n'est pas préalablement revu dans le début de l'enseignement, mais dont on s'en sert pour produire la suite du texte. Le prérequis efface le temps didactique et le contrat correspondant : ce qui est requis mais pas enseigné *hic et nunc* est nécessairement prérequis. Dans le paragraphe 2.2.7.1.1 intitulé « avant 1968 sujets du bac », le sujet du Liban donne à la fois une indication « partir de la définition de la dérivée » et un prérequis avec « on suppose connu que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x, exprimé en radians, tend vers 0 ».

Cette caractéristique révèle cependant plus qu'une modification mais une rupture de contrat didactique. En effet, dans le secondaire, les élèves ont l'habitude de pouvoir utiliser tous les résultats de cours pour répondre à un exercice : le « réservoir » de leurs connaissances constitue leur corpus personnel de prérequis. Le résolveur doit être conscient d'une nouvelle règle, d'un jeu un peu formel, qui modifie le contrat d'évaluation. La ROC, donnée à la session 2006 du baccalauréat Série S Antilles Guyane, consacrée à la relation fonctionnelle du logarithme (voir le document 16 et le paragraphe 3.2.1. pour une étude exhaustive), en est une bonne illustration.

Restitution organisée de connaissances

Prérequis :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0;+∞[et sa fonction dérivée est la fonction inverse $(x \mapsto 1/x)$.

- ln(1)=0.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, ln(a x) = ln(a) + ln(x).

Document 16: ROC du baccalauréat de la session 2006, Série S, Antilles Guyane

Le prérequis mentionne la dérivée du logarithme. Ce faisant, le prérequis exclut l'usage d'une méthode faisant appel à la fonction exponentielle, inverse de la fonction logarithme. L'obligation d'utiliser les prérequis condamne le résolveur à laisser de côté cet usage et tend à refermer la ROC. Cette rupture nécessite une modification des « réflexes » acquis lors de l'apprentissage, pour mettre en œuvre le nouveau contrat didactique : « tout prérequis doit être utilisé pour répondre à l'exercice ». Ce nouveau contrat est maintenant clairement perçu des candidats au baccalauréat en Guadeloupe (nous le montrerons dans le paragraphe 2.5 intitulé « viabilité de l'innovation ROC »).

Dans le cas de l'exemple proposé ici, le candidat se trouve au final devant une seule méthode de résolution (assortie de variantes) consistant en l'étude d'une fonction. Face à cette ROC, en fonction des choix didactiques de son enseignant de terminale[53], l'élève se trouve soit devant une démonstration déjà vue si son enseignant a démontré la relation fonctionnelle à l'aide de l'étude d'une fonction, soit devant un exercice inédit si son enseignant a utilisé l'exponentielle. Dans le premier cas, il doit reconstruire la démonstration. Cela devrait impliquer de nier la connaissance acquise pour pouvoir se mettre dans la condition de la restitution au sens étymologique du terme précisé plus haut, c'est-à-dire « remettre en son état premier le texte du savoir ». Dans une ROC, le prérequis a cette vocation, nier l'appropriation du savoir par l'élève et remettre en œuvre la dialectique « outil/objet » [R. Douady, 1986] à son origine. En effet l'outil théorème ou propriété redevient l'objet d'étude au travers d'une démonstration. Mais le prérequis fonctionne plutôt comme un palliatif à l'altération ou à l'oubli des souvenirs :

[53] Comme le montre l'analyse des programmes présentée au chapitre 3.

> *« La raison de **l'oubli des souvenirs** tient dans le fait qu'ils ne peuvent être restitués à l'identique, comme s'ils étaient stockés sans altération dans « un entrepôt du cerveau », mais qu'ils doivent être reproduits. Or, **reproduire n'est pas retrouver**, mais **reconstruire**. Mais l'univers cognitif des élèves a changé ; la venue de nouveaux ostensifs et non ostensifs a modifié l'univers de l'élève » [Y. Matheron, 2000].*

Dans le second cas, l'élève doit partir du prérequis pour construire sa démonstration, c'est une des caractéristiques de la Méthode de Descartes comme le montre A. Mercier[54]. Cette caractéristique répond au *principe de Papert* énoncé par M. Minsky :

> *« certaines étapes les plus cruciales du développement mental sont fondées non pas seulement sur l'acquisition de nouvelles compétences mais sur de nouveaux processus administratifs de ce que nous connaissons déjà » [M. Minsky, 1988].*

Cependant, dans ces deux cas, le prérequis permet au résolveur d'être dans les conditions d'une *pratique cartésienne* avec un minimum de pas de raisonnement à effectuer. Cette organisation rend (en principe) la ROC « comestible », en termes de temps et de difficulté, pour un élève candidat au baccalauréat comme nous le montrerons dans le paragraphe 2.4.

Remarques

(1) Par ailleurs, sans vouloir être exhaustif, les prérequis sont utilisés dans les pratiques d'évaluation en sciences. Pour se limiter aux mathématiques, cette notion de prérequis est actuellement utilisée dans un des écrits des concours CAPES. Le seul exemple pour le CAPES externe reste la première partie de la première épreuve de 2007. Le préambule de la première partie comporte cette mention

> *« Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S. »*

A l'évidence, ce cadrage s'impose au candidat. A l'inverse, au premier oral du CAPES externe ou du CAPLP mathématiques-sciences physiques, le candidat est amené à faire un choix de prérequis, qui le place alors dans un contrat analogue à celui de la ROC.

[54] Dans A. Mercier (2001), Descartes : le temps de la construction du savoir, *L'Ouvert* 103, 14-24.

(2) Les termes de concepts associés aux ROC sont des connaissances culturelles dont l'orthographe n'est pas toujours stabilisée. Toute ROC débute par un prérequis, élément moteur d'organisation de la restitution. Doit-on écrire "pré-requis" ou "prérequis" ? L'usage prérequis semble être préférable[55].

2.2.4 ROC, évaluation des savoirs

La ROC se situe dans l'écotone du baccalauréat, à la frontière entre le secondaire et le supérieur. L'apprentissage du savoir en lycée est ponctué par de nombreux retours en arrière. Par exemple en première, le professeur peut faire deviner la notion de continuité sans l'aborder explicitement. En seconde dans l'enseignement sur le graphique de fonctions, la notion de surjection peut être suggérée avec la détermination de l'ensemble image de la fonction. Mais très souvent, les démonstrations ne sont pas faites dans le cours, donnant aux théorèmes un statut proche du prérequis pour le traitement de problèmes et non le caractère d'un élément « quasi organique » du discours mathématique. Dans le premier cycle universitaire, si la structure du cours magistral se rapproche d'un discours organisé selon les « canons du formalisme », la démonstration des théorèmes est encore souvent omise, ou rejetée en travaux dirigés, ce qui modifie peu son statut pour l'étudiant. L'organisation modulaire de l'enseignement renforce l'éclatement du texte du savoir[56].

La restitution organisée de connaissances est l'action et la production qui permet de reconstituer, de construire, en un état « primitif » (un peu hypothétique du savoir), en l'occurrence une démonstration dans un contexte qui peut être produite à partir de l'organisation en prérequis/questions et mobilise « des traces de connaissances », issues d'enseignements parcellaires, éclatés, reconstituant un nouveau « texte du savoir ».

Le nombre de matières évaluées au baccalauréat S est important, ce qui réduit la part du travail en mathématique d'un élève de terminale. Le programme de 2002 maintient la richesse et la quantité de nouveaux concepts introduits en terminale S. Ainsi, dans le contexte de l'enseignement actuel, un élève ne peut consacrer assez de temps à apprendre par cœur la to-

---

[55] Mialaret, 1998.

[56] Ce qui pose la question du statut de la démonstration chez l'actuel professeur débutant qui, après une licence de mathématiques, se lance dans une préparation au concours, exercice relevant plus du bachotage que de la reconstruction de connaissances apprises.

talité du cours de mathématiques en regard de l'abondance du texte du savoir. La production demandée mobilise en conséquence d'autres qualités que celle nécessaire à la récitation d'un texte appris : elle évalue donc des connaissances en situation qui permettent d'agir sur la situation. En ce sens elle évalue un savoir au sens de Conne (1992).

2.2.5 Place et rôle des « annales zéro »

L'introduction des ROC dans l'évaluation certificative du baccalauréat se devait d'être réalisée sans heurt et sans engendrer de débat médiatique polémique. Pour atteindre cet objectif, il a semblé nécessaire à l'institution d'élaborer des annales zéro. Les annales zéro comportent deux « banques d'exercices », une éditée en 2003, l'autre en 2004.
A la demande du ministre de l'éducation nationale, relayée par l'inspection générale, des professeurs élaborent, en lien avec les IPR, une « banque » d'exercices en 2003 lesquels exercices doivent servir d'exemples pour illustrer les différents types d'exercices novateurs. En effet, à part une définition de la nouvelle maquette du baccalauréat[57] où il est précisé qu'une ROC *« peut être un exercice comportant la rédaction d'une démonstration qui entre dans le programme »*, les professeurs n'ont pas d'exemple de ROC à leur disposition. Ainsi les annales zéro 2003-2004 offrent les seules informations disponibles aux professeurs pour préparer les élèves aux ROC. Petit à petit des professeurs s'approprient ces annales et cherchent les solutions. La première « banque d'exercices » donne lieu à une anecdote significative.

Une anecdote significative

Sur un site déjà très visité, le professeur de terminale met en ligne la correction des annales. Il est alors invité par l'inspection régionale à les retirer. Par réaction d'internautes, en particulier d'enseignants du supérieur, le professeur laisse les corrections en ligne.

Dans l'avertissement de la brochure de la « banque d'exercices 2003 », il est précisé

> *« comme on pourra le constater, certains des exercices présentés ici dans la série S comportent la rédaction d'une démonstration figurant au programme (identifiée comme « démonstration de cours »), entrant dans le cadre de la « restitution*

[57] BO n 19 du 8 mai 2003, http://www.education.gouv.fr/bo/2003/19/default.htm

> *organisée de connaissances », conformément à la nouvelle maquette. Un examen attentif du programme montre un nombre limité de démonstrations figurant explicitement au programme - les seules dont la rédaction puisse être demandée. Aussi, pour éviter un bachotage stérile sur ces questions, voire l'utilisation d'une banque de données sur calculatrice, nous souhaitons que ces questions soient contextualisées, comme c'est le cas dans les exemples de cette liste »*[58]

Le mythe : « les ROC portent exclusivement sur les démonstrations au programme » se crée à partir de la lecture de cet avertissement qui provient du Bulletin officiel n°19 de Mai 2003.
Cette banque d'exercices est complétée, dans l'année suivante, par une nouvelle liste « d'exercices comportant des ROC ».

L'IREM de Strasbourg étudie « les difficultés de la restitution organisée de connaissances en particulier dans le domaine des suites » à partir des exercices de ces annales zéro. L'IREM énumère dix sept exercices de la liste qui comportent une question portant sur la restitution de cours. Les 10 démonstrations au programme pour les ROC peuvent ainsi être découvertes dans les sujets de l'inspection générale de 2004 (voir document 17) ce qui alimente le mythe d'un « réservoir de 10 démonstrations possibles ».

[58] Accompagnement des programmes (2003), Mathématiques baccalauréat série S et ES, exemples d'exercice pour des sujets Mathématiques, CNDP, Malesherbes

Définition d'une suite majorée (ou non), croissante ou décroissante	Exercice 6
Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$	Exercice 31
Définition de la limite en $+\infty$ et théorème des gendarmes	Exercice 32
Résolution de l'équation différentielle $z' = az$	Exercice 21
Unicité de la solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$	Exercice 23
Définition de "f est dérivable en a"	Exercice 5
Formule de $\arg(z/z_0)$	Exercice 7
Formule de Pascal	Exercice 1
Existence d'une similitude directe transformant (A,B) en (C,D)	Exercice 5
Existence d'une infinité de nombres premiers	Exercice 16

Document 17. Les dix démonstrations du programme ciblées par les annales zéro

Notons que le mythe des 10 démonstrations au programme reste encore vivace en 2007 comme le montrera l'opinion d'un des professeurs interviewés.[59] Les exercices incluant une R.O.C sont

> *« "pour la plupart une question de cours et des applications directes"* [60]*, ou "dans certains cas il s'agit de paraphraser une démonstration du cours sur un exemple" , la démonstration est ainsi contextualisée (exercice 15). Mais d'autres types d'exercices apparaissent, en particulier ceux qui sont organisés pour obtenir une démonstration de cours, organisation qui "referme" la démonstration*[61]*. L'IREM de Strasbourg donne deux exemples : relation fonctionnelle de l'exponentielle en deux questions (Exercice 11), étude d'une suite croissante non majorée en deux questions et conclusion (Exercice 13) ».*

[59] Pour plus d'informations voir paragraphe 2.3 et 2.4.

[60] Dossier R.O.C. de l'IREM de Lorraine, mai 2005

[61] Ce que nous avons déjà noté dans l'analyse du concept de prérequis.

Les commentaires de l'IREM sont axés :

- sur la pauvreté de la « *variabilité de l'offre* » : trois exercices tournent autour de la fonction exponentielle définie comme la solution d'une équation différentielle ; plusieurs autres autour des suites croissantes non majorées ;
- sur la « *minceur du contenu démonstratif* » et sur la brièveté de la réponse.
  En effet des exercices demandent de réciter une définition : deux lignes du cours, d'autres mettent en œuvre une propriété à démontrer qui se traite sur deux lignes au maximum. Cette *minceur* du contenu démonstratif est à rechercher du côté des programmes.
- sur l'ambiguïté de certaines questions : certaines questions sont ambiguës, voire mal posées et difficilement évaluables. Par exemple :

> *« Quel sens y-a-t-il à demander la « traduction mathématiques » d'une phrase telle que "la suite (u_n) est majorée" ? Comment noter l'élève qui dira que c'est une phrase mathématique correcte » ?*

Le commentaire reprend ainsi les objections didactiques élaborées dans les exercices dis de recherche dont la question peut être résumée en ces termes « Que constatez-vous ? » L'IREM clôt l'étude sur une conséquence de l'organisation de la restitution des démonstrations au niveau de l'enseignement : les points du programme « avec un petit contenu démonstratif » seront traités par les enseignants sous l'exacte forme qui pourra être demandée, laquelle se trouve en général dans des documents d'accompagnement :

> *« Or ces derniers revendiquent leur caractère facultatif. On va ainsi beaucoup plus loin qu'on n'est jamais allé dans le verrouillage de l'enseignement »*

L'IREM de Lorraine en mai 2005 complète l'étude de celle de Strasbourg, en faisant un tour d'horizon des diverses opinions à propos des ROC, et soulève deux questions réelles concernant l'introduction des ROC :

> *« En proposant sa R.O.C. l'Inspection générale a fait monter les exigences. Mettons de côté le vrai scandale qu'il y a à proposer des questions de cours sans interdire les calculatrices. Est-il si anormal d'exiger que les élèves mémorisent certaines connaissances ? C'est un "exercice dévalorisé" certes, mais le condamner a priori serait quand même absurde. En revanche c'est un exercice impossible parce que le programme ne le permet pas»*

Nous traiterons de l'obstacle d'équité lié aux calculatrices (déjà brièvement évoqué) dans la partie obstacles et réponses.

2.2.6 Une typologie des ROC, QCM et questions de cours

Pour compléter notre travail, il nous est apparu nécessaire de tenter une classification des exercices comportant des QCM, des ROC et questions de cours et assimilées. Nous avons répertorié neuf types que nous analysons ci-dessous :

1. QCM sans justification,
2. QCM avec justification,
3. ROC type démonstration fermée de cours par le prérequis,
4. Démonstration ouverte de cours,
5. Question de cours (et/ou) QCM vrai faux avec justification,
6. Récitation de cours et QCM vrai faux sans justification,
7. Question de cours,
8. Question de cours contextualisée,
9. Question de cours de la forme d'un exercice à tiroirs.

2.2.6.1 Analyse des différents types

QCM sans justification

Ce type d'exercice est utilisé pour évaluer une large partie du programme. Dans la plupart des cas, il est composé de questions différentes comportant quatre affirmations dont une seule est vraie. Il nécessite donc de mettre en œuvre une stratégie différente d'un exercice classique. En effet on peut, pour chaque question, procéder par disjonction des cas : chercher l'affirmation vraie, ou les trois affirmations fausses. Sachant que le barème privilégie en général la réponse sur la non-réponse, il tend à modifier le comportement de l'élève en l'obligeant à choisir une réponse, même au hasard. Cette « obligation » de réponse est une modification de contrat d'évaluation. L'introduction des QCM sans justification peut modifier l'attitude caractéristique[62] de non-implication des élèves français dans certaines questions non maîtrisées par leurs connaissances. Cependant elle permet d'augmenter, si le barème privilégie la réponse de l'élève, subrepticement, les notes de mathématiques.

[62] Comme le montre l'analyse de l'évaluation Pisa

Mais cet exercice peut se réduire à une simple lecture d'un calcul fait à la calculatrice comme le montre le sujet du baccalauréat 2004 des Antilles et de la Guyane où la calculatrice était autorisée (document 18).

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte
1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ C : $2+\sqrt{2}+i\,(2-\sqrt{2})$ D : $2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A: $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ B: $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ C: $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ D: $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

A: $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ B: $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ C: $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ D: $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\frac{7\pi}{8}$ B : $\frac{5\pi}{8}$ C : $\frac{3\pi}{8}$ D : $\frac{\pi}{8}$

Document 18. Exercice 3 du baccalauréat 2004 des Antilles et de la Guyane

La calculatrice permet de répondre à la question 1 en rentrant z et en faisant calculer alors z² sous forme algébrique. Comme une seule réponse est exacte, la lecture directe donne le résultat. La deuxième question et la troisième question sont du même ordre : en appelant la forme trigonométrique, la calculatrice donne le résultat. La dernière question peut se faire en cherchant par la calculatrice la valeur exacte du sinus et du cosinus de chaque « angle » donné et en déterminant la seule valeur des quatre donnant à la fois le sinus et le cosinus demandés.

Lors de l'harmonisation du baccalauréat de cette épreuve en 2004, des professeurs se sont indignés que ce genre d'exercice pénalisait les élèves ne possédant pas une calculatrice avec calcul formel. D'autres ont remarqué qu'un calcul approché à l'aide d'une calculatrice scientifique permet également de conclure. Mais les manipulations sur la calculatrice nécessitent davantage de temps.

Un autre exemple est fourni par le concours FESIC (Fédération d'Ecoles d'Ingénieurs et de Cadres). Le passage des épreuves écrites du concours s'effectue en mai. La réussite à ce concours permet l'intégration dans une des vingt écoles d'ingénieurs du réseau sous la condition suivante : obtenir le baccalauréat. Les sujets comportent ce type d'exercices avec une consigne qui ne privilégie pas la bonne réponse, de plus la calculatrice n'est pas autorisée. Par exemple la consigne du concours de 2008 est la suivante : (document 19)

Concours FESIC mai 2008

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Document 19. Concours FESIC Mai 2008

Nous notons l'intérêt économique pour l'institution de cet exercice, dont la correction manuelle est facile (quoique fastidieuse) mais surtout automatisable. Si l'évaluation est posée sans calculatrice ou avec la même calculatrice pour tous les candidats, ce genre d'exercice permet une correction équitable de tous les candidats.

QCM avec justification

Cet exercice, d'un type parfois assimilé à une ROC, nécessite un certain recul par rapport aux connaissances enseignées. La stratégie dans ce cas est celle utilisée dans les exercices classiques. Ce QCM permet de plus de mettre en œuvre les contre-exemples, particulièrement pour questionner la nécessité des hypothèses d'un théorème. Les concours de PLP mathématiques/ sciences commencent depuis la session 2005 par ce genre de QCM. (Voir document 20, session 2005, et document 21, session 2006.)

Exercice 1

1. Pour chacune des trois implications suivantes :
Préciser d'abord si elle est vraie ou fausse, et ensuite :
   - si elle est vraie, la démontrer ;
   - si elle est fausse, donner un contre exemple.

   a) Soient x et y des nombres réels donnés :
      - $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

   b) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de l'ensemble des nombres réels :
      - si f est continue sur I, alors f est dérivable sur I.

   c) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels :
      - si la fonction f est paire alors la fonction dérivée f' est impaire.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
si n^2 est un nombre pair, alors n est pair.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
$1+3+5+....+(2n-1)=n^2$.

Document 20. Sujet du concours PLP de la session 2005

Session 2006 : Exercice 1

On note R l'ensemble des nombres réels et C l'ensemble des nombres complexes.

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou est fausse, et justifier la réponse.

1. Soient *f* une fonction définie sur un intervalle I ⊆ R, et *g* une fonction définie sur *f* (I). Les fonctions *f* et *g* ne sont pas nécessairement dérivables. Si *f* est décroissante sur I et si *g* est décroissante sur *f* (I), alors *go f* est croissante sur I.

2. Si x est un nombre réel irrationnel, alors pour tout nombre entier naturel non nul n le réel x^n est irrationnel.

3. Soit (E) l'équation différentielle : $y''+9y=0$. La seule solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0)=0$ est la fonction nulle.

4. Pour tout nombre entier naturel n on a l'égalité :$\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$

5. Soit *f* une fonction définie sur R à valeurs dans R. Si *f* est périodique et monotone sur R, alors *f* est constante.

6. Toute suite réelle strictement croissante tend vers ∞.

7. Soient E un R espace vectoriel, et (u_1, u_2,…, u_n) une base de E. Pour tout vecteur non nul v de E, la famille (u_1, u_2,…, u_n, v) est encore une base de E.

8. Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormal, deux droites non parallèles aux axes du repère sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à (–1).

Document 21. Exercice 1 du sujet du concours PLP de la session 2006

D'une part, les questions abordées sont issues de différentes parties de l'analyse, de l'algèbre/géométrie affine ou vectorielle, de l'arithmétique; ainsi ce type d'exercice permet par balayage d'évaluer les connaissances dans une large partie du programme. D'autre part, ce type d'exercices évalue la nécessaire mobilisation des connaissances du candidat sur des questions diverses. Enfin, l'exercice évalue par le biais d'une réponse justifiée, la rigueur du candidat.

Démonstration fermée de cours par le prérequis

Nous ferons une analyse plus détaillée de ce type de ROC, dans la mesure où il fut très présent dès les annales zéro. Nous croiserons différents point de vue.

- D'un point de vue de la discipline, ce genre d'exercices ne se situe pas habituellement dans la problématique du chercheur de mathématiques ni dans celle de la matière.
- D'un point de vue didactique, l'élève se trouve devant la situation déjà décrite lors de l'analyse du concept de prérequis au 2.2.3 avec une réorganisation des connaissances (déjà mentionné au 2.2.2.3).
- D'un point de vue didactique écologique, cet exercice modifie la niche de la démonstration faite en cours. En effet la démonstration est une activité propre aux mathématiques. L'élève la « subit » pendant le cours, souvent comme quelque chose d'un peu ésotérique, qui fait « plaisir au professeur ». Mais le plus important est **le théorème,** puisque le contrat classique en vigueur veut que les exercices en soient des applications, des « utilisations » directes, plus rarement des utilisations de sa démonstration. La nouveauté introduite par la ROC (même fermée) est que la démonstration devient sujet d'évaluation, ce qui modifie sensiblement sa niche : la démonstration – que celle de la ROC soit la même qu'en cours ou non – change effectivement de fonction. Ce passage est très proche de la volonté de l'institution : changer le statut de la démonstration chez les acteurs du système (élèves, professeurs,…)
- D'un point de vue pédagogique, si les démonstrations de ce type ne se renouvellent pas, cet exercice peut induire un comportement de type « bachotage » de la part du professeur et ainsi dicter le choix de la démonstration à faire en cours. Cette particularité restreint ainsi la liberté pédagogique du professeur.
- Du point de vue de l'apprentissage, le prérequis dicte la démonstration à faire, l'élève doit avoir un certain recul pour éviter de prendre un chemin différent. Un apprentis-

sage est alors nécessaire sans quoi l'élève est surpris de ne pouvoir appliquer directement certaines de ses connaissances.

- Du point de vue de l'équité, l'analyse du concept de prérequis a montré que la résolution de ce type de ROC conduisait à deux actes cognitifs très différents dont le seul point commun est de s'appuyer sur le prérequis : soit le résolveur reconstruit la démonstration demandée à partir des traces de pratique de cet exercice ; soit le résolveur construit, contre la mémoire qu'il a d'une probable démonstration différente du même résultat, celle demandée. Si le « texte du savoir » n'est pas prescrit, la question de l'équité de cette évaluation est posée[63]. Alors, faudrait-il penser des ROC « organisées » autour de théorèmes à démontrer ne figurant pas dans le cours ?

Démonstration ouverte de cours[64]

Devant ce type d'exercice, l'élève possède la possibilité de reconstruire soit une démonstration déjà vue (ou pratiquée) s'il en possède une trace, soit de construire une nouvelle démonstration. Cette liberté de choix peut lui poser un problème de « réminiscence » ; en effet soit l'amorce de réponse est déclenchée par la lecture du texte du prérequis alors ce prérequis agit sur ces connaissances comme « l'os de Cuvier »[65] qui permet à l'élève d'organiser ses connaissances pour « voir » la solution, soit l'amorce de réponse ne peut pas venir du quis[66] ; dans ce cas, l'élève doit réactiver ses connaissances sans l'aide du texte, au risque de laisser sa feuille vierge. Quoi qu'il en soit, il doit organiser ses connaissances, méta-connaissance qui demande un entraînement important comme le montre l'étude du livre sur les questions de cours des années soixante. Mais pour ce genre de question, la calculatrice comme banque de données reste un obstacle d'équité et de sens majeur.

Un exemple « le plan médiateur du sujet Antilles Guyane 2005 » de ce type d'exercice est étudié au paragraphe 2.2.7.1.2.

---

[63] Mais de fait, cette analyse n'est-elle pas applicable à toute évaluation ? Combien d'enseignants, lauréats d'un concours comme le CAPES ou l'agrégation n'avouent-ils pas « avoir eu de la chance d'être tombé sur un sujet récemment révisé » ? Ils se sont retrouvés dans la situation peut-être plus favorable pour le bachoteur « de la reconstruction du texte du savoir ».

[64] Pour lire un exemple, nous renvoyons au paragraphe 2.2.7.1.2

[65] qui aurait permis au célèbre paléontologue la reconstruction d'un mastodonte à partir d'un de ses os [G. Magen, 2006].

[66] Absence de prérequis par exemple

Question de cours et/ou QCM vrai faux avec justification

Ce type d'exercice est dans la problématique d'une évaluation de compétences. Il nécessite à la fois de connaître son cours et de l'interroger dans les questions posées. La question de cours nécessite une réorganisation des connaissances privées pour reconstruire (voir paragraphes 2.2.2.et 2.2.3) un savoir public. Le QCM balaye une plus vaste partie du programme mais de façon parfois plus superficielle. En effet, le prérequis permet s'il existe de servir, d'amorce de la solution. Cette possibilité permet de poser des questions plus difficiles.

Récitation de cours et QCM vrai faux sans justification

Ce type d'exercice reste superficiel au niveau de l'évaluation. Sa seule qualité est qu'il permet un balayage rapide du programme. Cet exercice, pouvant se faire dans un temps court, permet au concepteur de sujet de poser des questions dans des parties du programme pas toujours évaluées. Il permet de recentrer le travail d'élève sur l'apprentissage du cours, par la partie récitation.

Question de cours contextualisée

Il demande de la réflexion de la part du résolveur par rapport à ses connaissances, sinon le « bon élève » risque de plaquer la démonstration générale sur le cas contextualisé.

Ce type d'exercice était déjà posé avant 1960 dans le contexte de l'algèbre comme le montre notre étude et notre classification (dans ce cas type 1) à partir d'un manuel portant sur la question de cours au paragraphe 2.1.5.2. Aujourd'hui le contexte est en général l'analyse. Nous donnons un exemple tiré des annales zéro de la banque d'exercices 2005 (document 22).

Exercice n°29 (spécialité)

Définition de la congruence modulo 11 : On rappelle que si a et b désignent deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo 11, et on écrit $a \equiv b$ [11], si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 11k$.

1. (a) **Démonstration de cours.**

Prérequis : Définition de la congruence modulo 11.

Démontrer que si $a \equiv b[11]$ et $c \equiv d[11]$ alors $a + c \equiv b + d[11]$ et $ac \equiv bd[11]$.

(b) En déduire que si $a \equiv b[11]$, alors pour tout n entier naturel on a :
$a^n \equiv b^n$ [11].

Document 22. Exercice n°29 de la banque d'exercices 2005

Cet exercice posé pour la congruence modulo 11, restriction de la démonstration générale pour un entier n non nul, est bien une démonstration contextualisée. Nous ferons l'étude d'une ROC au paragraphe 3.2.5, comportant un sujet similaire mais contextualisée par modulo 7.

Question de cours de la forme d'un exercice à tiroirs

Ce type d'exercice se situe dans le contexte du cours mais sa forme est identique aux exercices d'évaluation du programme précédent. Les questions sont enchaînées, la dernière étant le but de l'exercice. Pour élaborer sa solution, le résolveur doit organiser ses connaissances à partir de la question posée mais la trace du savoir doit être réactivée par un élément moteur. La nature de l'exercice (type tiroir) rend obsolète la prescription d'un cours référent.

Pour conclure, la variété des types d'exercices est une richesse qui mobilise un temps important d'apprentissage. Ainsi l'entraînement dévolu aux ROC doit être conséquent pour être efficient. Mais nous avons vu certaines limites de cette richesse dans le paragraphe 2.2.5 sur le rôle et la place des « annales zéro ». La première est issue d'une analyse de l'IREM de Strasbourg qui montre que certains exercices manquent d'intérêt car « *dans certains cas il s'agit de paraphraser une démonstration du cours sur un exemple* ». La deuxième, d'après l'IREM de Lorraine, provient de la *minceur* du contenu démonstratif des programmes qui induit une réponse obligatoirement courte.

2.2.6.2 Classement des ROC posées jusqu'à 2007

Les ROC se déclinent suivant trois des types étudiés plus haut.

- *Des démonstrations de cours fermées par le prérequis*

Ce type d'exercice n'était pas dans les habitudes avant 2005. On peut le considérer comme le plus innovant. Il est le plus fréquent : plus d'une ROC sur deux en relève.

- *Des questions de cours et QCM vrai faux avec justification (et avec prérequis)*

La réponse fausse demande une justification par un contre-exemple. Ce concept est important pour le professeur dans la correction des réponses erronées. Mais le contre-exemple était peu utilisé dans les corrections de copies comme le montre l'enquête réalisée dans l'atelier ROC et QCM du colloque IREM Antilles Guyane de 2005 (26 professeurs présents). La première partie de l'atelier a consisté à remplir un QCM vrai/faux où une des questions posées était : *« Un contre-exemple n'est pas utile dans la correction de copies d'élèves. »*
Quatre-vingt pour cent des présents n'ont pas répondu à cette question. Pourtant le contre-exemple reste souvent la seule réponse à un « théorème élève » ou théorème en acte utilisé de façon erronée. Dans la seconde partie de l'atelier les participants devaient corriger des erreurs des élèves. Par exemple ils devaient commenter la production d'élève figurant dans le document 23.

La fonction f étant toujours positive sur I (intervalle ouvert), dérivable en x_0 de I et admettant un minimum en x_0, on en déduit que pour x assez proche de x_0 (dans I) f' est négative puis positive.

Document 23. Exercice de l'atelier ROC et QCM du colloque de L'IREM Antilles Guyane 2005

A cette question, sur les 17 commentaires recueillis, aucun n'envisage de contre-exemple.
Il était cependant possible de proposer la fonction f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Elle est dérivable partout, admet un minimum et sa dérivée change constamment de signe quand on se rapproche de 0, ce qui contredit la production de l'élève.

Cependant la difficulté à déterminer un contre exemple peut permettre d'expliquer ce fait. En effet à l'erreur figurant dans le document 24, tous les professeurs utilisent le contre exemple.

« Un nombre pair et un nombre impair étant premiers entre eux…… »

Document 24. Exercice de l'atelier ROC et QCM du colloque de L'IREM Antilles Guyane 2005

C'est le premier type d'évaluation qui évalue la construction d'un contre exemple.

- *Question de cours de la forme d'un exercice à tiroirs*

L'analyse de ce type a été réalisée dans le paragraphe précédent.

Nous remarquons que la géométrie et l'arithmétique restent un contexte exceptionnel, la plupart des ROC se situant en analyse réelle ou dans les complexes (voir document 25).

	2005	2006	2007
Démons-tration de cours fer-mée par le prérequis		*Antilles Guyane (juin)* Propriété fondamentale du logarithme *Madagascar (juin)* Argument d'un produit *Amérique du Sud (no-vembre)* Congruence d'un produit *Asie (juin)* argument d'un quotient	*Amérique du Nord (mai)* Limite lorsque x tend vers plus l'infini de $e^x/_x$ *France (juin)* Intégration par parties *Centre étrangers (juin)* Affixe du centre d'une simili-tude *La Réunion (juin)* Logarithme d'une racine
Question de cours et/ou QCM vrai faux avec justi-fication	*France métropo-litaine (juin)* Suites adja-centes question cours et QCM		*Réunion et France métropoli-taine (septembre)* Dérivée d'un produit QCM
Question de cours de la forme d'un exercice à tiroirs	*Inde Pondichéry (avril)* Aire et primitive	*Inde Pondichéry* Distance d'un point à un plan	*Centre étrangers (juin)* Module et nombre complexe conjugué

Document 25. Tableau répertoriant les diverses ROC entre 2005 et 2007

2.2.7 Petite zoologie de la ROC

Nous nous proposons ici d'étudier, un peu plus en détails, plusieurs habitats dans lesquels des objets voisins de la ROC ont pu exister ou existent encore : au niveau du baccalauréat avant 1968, avant 2005, dans des concours de niveau terminale.

2.2.7.1 Au niveau du Baccalauréat

2.2.7.1.1 *Avant 1968, sujets du bac*

Nous nous penchons sur quelques questions de cours de sujets du baccalauréat avant 1968. L'annexe 1 comporte les différentes questions de cours étudiées : certains exercices comportent trois questions de cours Q1, Q2 et Q3 d'autres sont réduits à une question de cours. Le tableau ci-dessous (document 26) synthétise l'analyse de ces questions de cours (exercices ou question particulière) par rapport à la typologie précédente.

Typologie	*Numéro de l'exercice ou question particulière.*
Démonstration de cours fermée, par le pré requis.	3 ; 4 ; 6 Q2
Question de cours.	1 ; 2 ; 5 ; 6 Q1, Q3 ; 7 Q1, Q2
Question de cours contextualisée	6 Q2 ; 7Q3

Document 26. Classements avec la typologie précédente.

Pour montrer que certains sujets sont des « pré-ROC » nous allons étudier une question de deux sujets parmi la liste des sujets située dans l'annexe.

Question de cours du baccalauréat (session de février 1960 – sections A', C, M et M') Le candidat doit traiter l'une des trois questions suivantes, au choix : Question 2 Etudier le signe du trinôme $-5x^2 + 4x + 33$.

Document 27. Question de cours du baccalauréat de 1960 (A', C, M et M').

L'exercice demandé (document 27) se situe en algèbre dans les équations du second degré. Il demande de contextualiser une démonstration de cours dans un exemple comportant une petite difficulté technique : le coefficient négatif devant le terme x^2. Il préfigure l'idée donnée dans les annales zéros de démonstration demandée dans un contexte particulier.

Le sujet de 1966 du Liban (document 28) comporte à la fois un prérequis bien structuré, quoique non mis en évidence par la typographie du sujet « on suppose connu... » et une indication : « à partir de la définition de la dérivée ».

Liban – Série mathématiques – 1966

Exercice 3

Trouver, à partir de la définition de la dérivée, la dérivée de y = sin x. On suppose connu que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x, exprimé en radians, tend vers 0.

Document 28. Question de cours du baccalauréat, Liban 1966

Deux variantes de calcul sont possibles suivant la forme de définition du nombre dérivé. Elles utilisent les mêmes théorèmes d'analyse, cependant les formules de trigonométrique requises ne sont pas de même ordre : transformation d'une somme (de fonctions trigonométriques) en produit (ou « factorisation ») d'un côté, transformation d'une somme d'arcs de l'autre. (Voir document 29.)

Première solution : transformation d'une somme de fonctions trigonométriques en produit

Soit T la fonction de la variable réelle définie par $T(x) = \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$. On a

$$T(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

La fonction $x \to \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$ est la composée des fonctions $x \to \frac{x-a}{2}$ et $u \to \frac{\sin u}{u}$. Le théorème des limites des fonctions composées donne : $\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$.

D'autre part la fonction $x \to \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$ est continue comme composée de deux fonctions continues ; il en résulte que $\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a$. Enfin les propriétés des limites donnent l'existence de la limite T en a et sa valeur :

$$\lim_{x\to a} T(x) = \lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a.$$

Deuxième solution : transformation d'une somme d'arcs.

Soit T la fonction de la variable réelle h définie par $T(h) = \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$. On a

$$T(h) = \frac{\sin a\cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \frac{\sin a(\cos h - 1)}{h} + \cos a\frac{\sin h}{h}$$

Or

$$\frac{\sin a(\cos h - 1)}{h} = -2\sin a \frac{sin^2(h/2)}{h} = \sin a \sin h \frac{\sin(h/2)}{h/2}$$

D'où $T(h) = \sin a \sin h \frac{\sin(h/2)}{h/2} + \cos a \frac{\sin h}{h}$.

En sachant que $\lim_{h\to a} sinh = 0$ et en appliquant comme dans la première solution, le théorème des limites des fonctions composées et le prérequis, on obtient le résultat.

Document 29. Une solution de la question de cours de la session du Liban de 1966

Remarque

La deuxième solution utilise une habileté, la méthode des différences qui est une transformation d'écriture par ajout/retrait : $T(x) = \frac{\sin(x-a+a)-\sin a}{x-a}$. Cette habileté est le passage classique entre la première forme de la définition de la dérivée (utilisée dans la première solution) et la seconde forme, celle de la deuxième solution. (Mais également la forme la plus naturelle pour introduire les développements limités d'ordre 1.)

Ce sujet mentionne la propriété première utile dans cette question de cours sans l'énoncer explicitement. Ainsi le traitement de la question est bien balisé et la technique, limites de fonctions composées, est convoquée. Mais ce sujet demande de la rigueur et fait appel à une formule de trigonométrie ainsi qu'à la notion de continuité. L'exercice du baccalauréat de l'année suivante (session 1967) dans cette même académie, porte sur la même partie du programme mais l'exercice se complexifie (voir document 30).

Exercice 4 **(Liban – Série mathématiques – 1967)**

Trouver, à partir de la définition de la dérivée, la dérivée de la fonction y = cos(ax + b), où x est la variable indépendante et a et b des constantes. On supposera que la limite de $\frac{\sin x}{x}$, lorsque x, exprimée en radians, tend vers 0, est connue.

Document 30. Question de cours de la session du Liban de 1967

2.2.7.1.2 *En 2005 : le bac Antilles Guyane*

L'énoncé ci-dessous (document 31) est un exemple fondateur d'un exercice de type : « démonstration ouverte de cours ». L'étude de ce choix novateur montre la variété des démonstrations possibles.

Baccalauréat série S, Antilles Guyane, session 2005 :

Exercice 4 :

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

Document 31. Question de démonstration de cours du sujet Antilles Guyane 2005

Ni le programme de 2002 de la terminale S, ni même celui de la première S, ne mentionnent le plan médiateur. Le document d'accompagnement des programmes[67] ne comporte qu'une seule ligne : « *Ensemble de points équidistants de deux points (plan médiateur)* »

Nous remarquons que le concepteur du sujet aurait pu choisir une autre définition qui aurait organisé d'une autre manière le sujet : le plan médiateur du segment [KL] est le plan passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{KL}$.

Les différentes réponses mettent en œuvre des organisations différentes du savoir en géométrie, comme l'analyse ci-dessous le montrera. Rappelons que le niveau de rédaction attendu par l'Institution est « académique ». Le texte d'accompagnement des programmes précise :

> *« Le monde mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calculs, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations. Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe: ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique […]» [p168]*[68]

[67] Classe de terminale S et ES accompagnement des programmes, CD ROM, Mathématiques, CNDP 2002, p51.

[68] Le programme, références : CD ROM, Mathématiques, accompagnement des programmes, CNDP 2002.

Nous citerons sans prétendre à l'exhaustivité quelques réponses possibles (analyse a priori : Antilles Guyane 2005). Mais remarquons que cette question évalue aussi les connaissances de logique du candidat sur l'équivalence.

Réponse 1

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit M un point du plan médiateur ($M \neq I$). Le point I est un point de ce plan. Ainsi la droite (IM) est une droite du plan médiateur. Le sujet définit le plan médiateur de [KL] comme le plan perpendiculaire en I à la droite (KL). D'après le théorème qui énonce que toute droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite du plan, la droite (IM) est ainsi perpendiculaire à la droite (KL). Considérons le plan KLM. Comme I est un point du segment [KL], les droites (KL) et (IM) sont contenues dans ce plan. D'où, dans le plan KLM, la droite (IM) est une droite perpendiculaire au segment [LK] et passant par I. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, elle est donc la médiatrice de [LK] : dans ce cas ML=MK.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit M un point équidistant de K et de L ($M \neq I$). Dans le plan MKL la droite (MI) est la médiatrice de [KL]. D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, elle est ainsi perpendiculaire à (KL) passant par I. En appliquant la définition du plan médiateur donné dans l'énoncé, elle est donc incluse dans le plan médiateur$^{(*)}$. Donc M est un point du plan médiateur.

Commentaire

Les savoirs utilisés dans cette réponse sont ceux de la classe de seconde (orthogonalité d'une droite et d'un plan) et ceux de collège. L'élève doit mobiliser ses connaissances sur la médiatrice et organiser sa réponse en utilisant des propriétés de la géométrie dans l'espace. Analysons alors la réciproque, en particulier le moment signalé par $^{(*)}$: on suppose que par un point donné, le plan perpendiculaire à une droite en ce point contient toute droite perpendiculaire à cette droite en ce point. Cet implicite est évoqué dans le texte du sujet par l'article **le** de la définition suivante: *On appelle plan médiateur de [KL]* ***le*** *plan perpendiculaire en I à la droite (KL).*

Réponse 2

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit M un point du plan médiateur ($M \neq I$). Considérons le triangle MKL. La droite (MI) est la médiane issue de I. Or (MI) est orthogonale à (KL) par définition du plan médiateur ; ainsi la médiane est médiatrice. Le triangle est donc isocèle donc M est équidistant de K et de L.

$\boxed{\Leftarrow}$ Le point M est équidistant de L et de K ainsi le triangle MLK est isocèle en M. Dans le triangle MKL la médiane (MI) est médiatrice, d'après une propriété des triangles isocèles. Donc M est un point du plan médiateur.

Commentaire

Les savoirs utilisés dans cette réponse sont ceux de la classe de seconde et ceux de collège**.** L'élève doit mobiliser ses connaissances sur le triangle isocèle et organiser sa réponse en utilisant des propriétés de la géométrie dans l'espace.

Réponse 3

En utilisant le produit scalaire, on a $\overrightarrow{MK}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IK}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}$.

De même $\overrightarrow{ML}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IL}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IL}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IL}$.

Donc $MK^2 - ML^2 = \overrightarrow{IK}^2 - \overrightarrow{IL}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IL})$.

Or I est milieu de [LK] ainsi LI=IK d'où $MK^2 - ML^2 = 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{LK}$

Donc : $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow ML = MK$

On a donc M point du plan médiateur si et seulement si M est équidistant de K et de L.

Commentaire

Les savoirs utilisés dans cette réponse sont ceux de première et terminale S (extension à l'espace du produit scalaire et de ses propriétés). Cette méthode redémontre sans mettre en évidence le théorème de la médiane, connaissance de première non rappelée systématiquement en terminale.

Réponse 4

Soit M un point du plan. D'une part, on applique le théorème de la médiane au triangle MLK avec I milieu de [LK]. Ainsi : $ML^2-MK^2=2\,\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{LK}$.

D'autre part $ML^2-MK^2=0 \Leftrightarrow MK=ML$. Enfin : $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{LK} = 0$.

On en déduit l'équivalence : $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow ML = MK$.

Or un plan P orthogonal à la droite LK et passant par I est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{LK} = 0.$$

Ainsi, M est un point du plan médiateur si, et seulement si, M est équidistant de L et de K.

Commentaire

Les savoirs utilisés dans cette réponse sont ceux de première S et terminale S (extension à l'espace du produit scalaire et de ses propriétés). A la charge de l'élève de comprendre que la démonstration réalisée en première dans le cadre de la géométrie plane reste vraie dans celui de l'espace !

Réponse 5

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit M un point du plan médiateur ($M \neq I$). Le point I est un point de ce plan. Ainsi la droite (IM) est une droite du plan médiateur. D'après l'énoncé, le plan médiateur de [KL] est le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).D'après le cours on sait que toute droite contenue dans un plan orthogonal à une droite est orthogonale à cette droite. La droite (IM) est ainsi orthogonale à la droite (KL). Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle MIK rectangle en I on obtient : $MK^2=MI^2+IK^2$.

De même, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle MIL rectangle en I on a : $ML^2=MI^2+IL^2$. Or I est le milieu du segment [KL] d'où $IK^2=IL^2$. Donc : $MK^2= ML^2$. Le point M est donc équidistant de K et de L.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit M un point équidistant de K et de L ($M \neq I$). Dans le plan MKL, la droite (MI) est la médiatrice du segment [KL]. Elle est ainsi perpendiculaire à (KL) passant par I. Elle est donc incluse dans le plan médiateur. Donc M est un point du plan médiateur.

Commentaire

Les savoirs utilisés dans cette réponse sont ceux de seconde et ceux de collège. L'élève doit mobiliser ses connaissances sur le théorème de Pythagore et organiser sa réponse en utilisant des propriétés de la géométrie dans l'espace.

Nous pouvons classer ces différentes réponses dans deux types de géométrie : la géométrie synthétique et la géométrie vectorielle euclidienne. Le choix de la définition donnée dans le prérequis affecte l'organisation des connaissances induite. La correction de cet exercice peut montrer l'importante variabilité de démonstrations, elle représente un moment privilégié qui pourrait mener à choisir de poser cet exercice dans le cadre d'une évaluation formative.

Nous avons procédé à 8 entretiens de professeurs de terminale S (enquête développée dans le chapitre 3). Un professeur (professeur 5) évoque cet exercice :

51. C. « Le plan médiateur, l'as-tu donné directement à la maison ?
52. *P. Je l'ai donné à la maison directement. Par contre c'est devenu un théorème qu'ils ont retenu ensuite.*
53. *C.* Combien d'élèves ont trouvé ? 80% ?
54. *P. 80% qui ont cherché, pas qui ont trouvé. Je suis passée dans les rangs, ils avaient beaucoup utilisé les propriétés, ils avaient simplement fait une extension du plan à l'espace. Ils ont eu du mal par rapport à ça.*
55. *C.* Sont-ils partis de la médiatrice ?
56. *P. C'est ça, ils sont partis de la médiatrice, mais une fois que j'ai fait le dessin au tableau. Car en fait, c'était ça la difficulté pour eux, la représentation. Une fois que j'ai fait le dessin au tableau, la situation a été débloquée. Sur le nombre d'élèves je ne peux pas te dire. »*

Ainsi, en 2007, l'exercice reste difficile pour des élèves de terminale S. Cependant, cette difficulté peut être levée par le tracé du dessin représentant la situation. Dans ce cas, le dessin agit comme « l'*os de Cuvier* » sur les connaissances des élèves. Par cette action les connaissances permettent aux élèves de résoudre la question.

2.2.7.2 Concours de niveau fin de terminale

Les questions des sujets étudiées dans ce paragraphe sont issues des concours d'ingénieurs de niveau baccalauréat. La place du concept ROC y reste marginale, cependant certaines composantes de la ROC y sont présentes. En particulier, les sujets des concours ESIEE[69] de 2002 à 2005, comportent des exercices portant sur la logique, outillage de la ROC. En effet la démonstration est un exercice où la logique déductive joue le rôle de gardien de la rigueur, rigueur affectée à la justification des liens entre les pas de la démonstration.

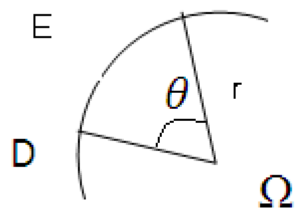
Dans le concours GEIPI[70] 2005 (document 32) apparaît pour la première fois un exercice dont la rédaction est voisine de celle d'une ROC. L'exercice 4 comporte un prérequis composé de deux rappels et des questions utilisant le prérequis comme technique-convoquée. La différence essentielle avec une ROC réside dans le fait que les démonstrations « *ne sont pas demandées* ». Ainsi aucune question ne mentionne qu'il faut démontrer, préférant plutôt les termes : justifier, montrer, déterminer ou exprimer. On peut penser que les auteurs de ces textes sont des enseignants post Bac (des universitaires qui vont moins distinguer entre montrer et démontrer).

Exercice 4 concours GEIPI

Premier rappel

On considère un disque de centre Ω et de rayon r.

L'aire du secteur circulaire $\widehat{D\Omega E}$ tel que l'angle $\widehat{D\Omega E}$ mesure θ radians est égale $\frac{\theta}{2} \times r^2$.



Deuxième rappel

Pour tous les réels *a* et *b*, on a :

cos (a+b) = cos a cosb – sina sinb

sin (a+b) = sina cosb + sinb cosa

[69] Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electronique et Electrotechnique.

[70] Groupement d'Ecoles d'Ingénieurs Publiques à Préparation Intégrée

Partie A

Soit α un réel.

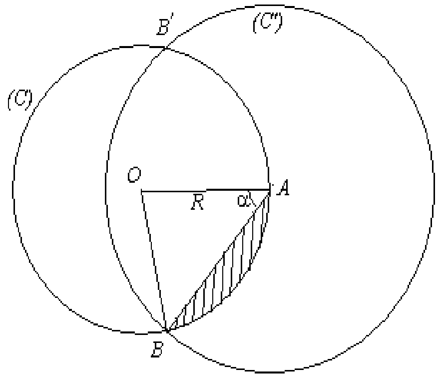
A.1. Exprimer $cos(2\alpha)$ et $sin(2\alpha)$ en fonction de $cos\,\alpha$ et $sin\,\alpha$.

A.2. Justifier que $cos(2\alpha)=2cos^2(\alpha)-1$.

Partie B

On considère un disque $\mathscr{D}$ de centre *O* et de rayon *R* délimité par le cercle (*C*). Soit *A* un point de $\mathscr{C}$.

Le but de l'exercice est de tracer un cercle (*C'*) de centre A qui partage le disque $\mathscr{D}$ en deux parties de même aire.



On désigne par *B* et *B'* les points d'intersection des cercles (*C*) et (*C'*) et on désigne par α la mesure en radian, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle $\widehat{OAB}$.

B.1. Montrer que le rayon *AB* du cercle (*C'*) vérifie $AB = 2Rcos\alpha$

B.2.a. Déterminer une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$, en fonction de α.

B.2.b En déduire l'aire, en unités d'aires, du secteur circulaire $\widehat{AOB}$ du disque $\mathscr{D}$ en fonction de α et de R.

Document 32. Extrait de l'exercice 4 du concours GEIPI de 2005

Remarques

La première question de la partie A revient à démontrer une formule du cours en appliquant le premier rappel. La deuxième question est aussi une application de la première question qui se traite en appliquant la formule $cos^2a + sin^2a = 1$ (au programme de seconde).

La première question ainsi que la question 2a utilisent des connaissances plus anciennes, issues du collège, tandis que la question 2b est une application directe du premier rappel.

Les concours ESIEE de 2002 à 2006 sont composés de plusieurs exercices portant sur la logique, sur la reconnaissance d'affirmations proches de théorème de cours ou sur les conséquences d'une affirmation donnée. L'exercice 1 du concours ESIEE de mai 2005 (document

33) est une évaluation qui utilise les différentes notions de logique déductive présentes dans l'enseignement mais pas toujours explicitées (contraposée…). La logique déductive reste un élément commun de l'outillage de la ROC et de cet exercice.

Exercice 1

On considère un ensemble de 100 dalles qui sont carrées, hexagonales ou octogonales et qui sont de couleur bleue, verte ou blanche.

Sachant que toutes les dalles blanches sont carrées, on peut déduire.

1. Aucune dalle hexagonale n'est blanche.
2. Aucune dalle blanche n'est hexagonale.
3. Si une dalle est carrée alors elle est blanche.
4. Si une dalle est blanche alors elle est carrée.
5. Pour qu'une dalle soit blanche, il suffit qu'elle soit carrée.

Document 33. Exercice 1 du concours ESIEE de 2005

Dans le concours FESIC de 2003 et 2004, aucun exercice ne présente un raisonnement explicite à étudier. Le concours FESIC 2005 demande de valider ou d'invalider des raisonnements explicites. Plus précisément, le candidat dispose d'une feuille pré remplie avec un tableau à compléter. Sur cette feuille, il doit choisir 12 exercices sur les 16 posés. Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Le candidat doit indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F). Ainsi, l'exercice 6 est une suite de questions où est explicité un raisonnement, en particulier les questions a et b suivantes. (Document 34.)

a. On considère le raisonnement suivant :

« Pour tout x$\in \boldsymbol{R}^+$ et tout n$\in \boldsymbol{N}^+$, $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \geq 1+nx$**.** En particulier pour n$\in \boldsymbol{N}^+$ et x=$\frac{1}{\sqrt{n}}$ on obtient $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n}\right) = +\infty$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty$.

Ce raisonnement est exact.

b. On considère la fonction f définie sur R^+ par: f (x) = x.ln x si x > 0 et f (0) = 0 et on considère le raisonnement suivant : «f est continue sur R^{+*} comme produit de fonctions continues sur R+*. De plus, comme $\lim_{x\to+\infty} x\ln x = 0 = f(0)$, c'est que f est continue en 0. Il s'ensuit que f est continue sur R+ et donc est dérivable sur R+.»

Ce raisonnement est exact.

Document 34. Extrait de l'exercice 6 du concours FESIC de 2005

L'élève-étudiant dans ce cas doit cocher pour **a.** la lettre V puisque la première inégalité est une inégalité classique (inégalité de Bernoulli) et pour **b.** la lettre F car une fonction continue n'est pas toujours dérivable. Remarquons que la fonction f n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{x} = -\infty$. La compétence développée ici est « analyser un raisonnement ». C'est une compétence connexe à la compétence « savoir-faire une démonstration ».

Ainsi, les concours de niveau baccalauréat utilisent certains ingrédients nécessaires à la confection d'une ROC sans utiliser le terme démonstration. Cependant les concours sont élaborés pour produire un classement basé sur une correction automatique, rapide, rentable, et supposée équitable. Ainsi, ils privilégient plutôt le Q.C.M., sauf le concours GEIPI qui préfère la justification rapide du calcul ou du résultat. Nous pouvons donc affirmer que l'outillage de notre concept, dans les conditions économiques ou politiques du moment, est présent dans les concours de fin de terminale. Ainsi dans l'écotone secondaire-universitaire les conditions de vie du concept ROC sont en partie réalisées, mais restent fragiles face aux contraintes économiques.

2.2.8 Remarques sur la place du ROC dans les sujets de BAC en 2009

Le mot cours était absent du vocabulaire des sujets d'évaluation en mathématique depuis une trentaine d'années. Son retour marque déjà un changement. Les ROC sont encore très présentes en 2009 comme le montre l'annonce du mensuel Web du café pédagogique[71] (document 35).

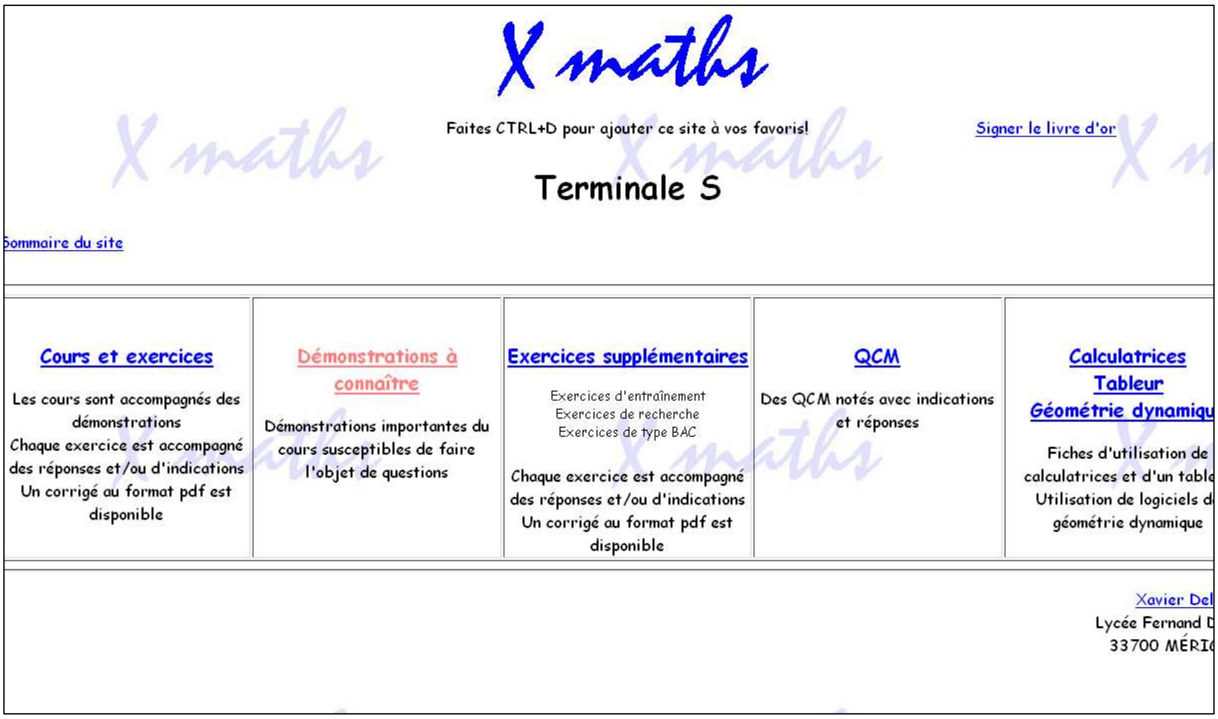
Nous allons effectuer cette analyse au travers du site Internet mentionné et d'un site auquel le premier renvoie.

---

[71]http://www.cafepedagogique.net/lemensuel/lenseignant/sciences/maths/Pages/2005/63_ToujourslesROC.aspx (consulté septembre 2009)

Document 35. Extrait de la page du site café pédagogique consulté 11 septembre 2009

Le site auquel le café pédagogique fait référence possède une page dédiée à la terminale S (document 36). Elle comporte cinq rubriques. Les démonstrations à connaître sont labellisées « démonstrations susceptibles de faire l'objet de questions ». Malgré ce label, la présentation (documents 38) de neuf démonstrations à connaître dans le programme obligatoire entretient le mythe des dix démonstrations. Chaque démonstration s'obtient par un simple clic. Cependant si le lecteur prend le temps de lire l'introduction placée au-dessus (document 37) il est informé qu'il peut avoir d'autres démonstrations susceptibles de faire l'objet de questions. Cependant, celles encadrées sont caractérisées par l'auteur par : « Les démonstrations de cours données ci-dessous ont été choisies parmi les plus importantes ».



X maths

Faites CTRL+D pour ajouter ce site à vos favoris!

Signer le livre d'or

Terminale S

Sommaire du site

Cours et exercices	Démonstrations à connaître	Exercices supplémentaires	QCM	Calculatrices Tableur Géométrie dynamiqu
Les cours sont accompagnés des démonstrations Chaque exercice est accompagné des réponses et/ou d'indications Un corrigé au format pdf est disponible	Démonstrations importantes du cours susceptibles de faire l'objet de questions	Exercices d'entraînement Exercices de recherche Exercices de type BAC Chaque exercice est accompagné des réponses et/ou d'indications Un corrigé au format pdf est disponible	Des QCM notés avec indications et réponses	Fiches d'utilisation de calculatrices et d'un table Utilisation de logiciels d géométrie dynamique

Xavier Del
Lycée Fernand D
33700 MÉRI

Document 36. Sommaire de la page de Terminale S du site X maths, consulté le 6 décembre 2009

X maths

Mettre Xmaths dans vos favoris

Signer le livre d'or

Terminale S
Démonstrations de cours

Sommaire

Un exercice de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat peut porter (en totalité ou en partie) sur la restitution d'une démonstration de résultats du cours.
Cette restitution peut être guidée ou non.
Les démonstrations de cours données ci-dessous ont été choisies parmi les plus importantes.
Néanmoins la liste n'est pas exhaustive, les démonstrations données ne constituent que des exemples et ne préjugent en rien de ce qui peut être demandé à l'épreuv baccalauréat.
Les démonstrations de cours sont conformes au programme pour l'année scolaire 2006-2007 (programme de septembre 2002).

Programme obligatoire Programme de spécialité

Programme obligatoire

Propriété	Chapitre
Théorème des gendarmes pour la limite d'une fonction en l'infini	Limites
Toute suite croissante non majorée tend vers l'infini	Limites
Formule d'intégration par parties	Intégrales
$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$	Dénombrement

Document 37. Extrait de la page consacrée aux démonstrations « à connaître » du site X maths

Programme obligatoire

Propriété	Chapitre
Théorème des gendarmes pour la limite d'une fonction en l'infini	Limites
Toute suite croissante non majorée tend vers l'infini	Limites
Formule d'intégration par parties	Intégrales
$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$	Dénombrement
Il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que f'=f et f(0)=1	Fonction exponentielle
Si f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I, alors $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. Démonstration dans le cas d'une fonction croissante et positive	Intégrales
x_0 et y_0 étant deux réels donnés, il existe une unique solution de l'équation différentielle y'=ay+b vérifiant $f(x_0)=y_0$.	Équations différentielles
$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$	Fonction logarithme népérien
$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0}$	Fonction exponentielle

Document 38. Démonstrations de terminale S « à connaître » du site X maths

La ROC de l'exercice trois du sujet du baccalauréat de métropole de juin 2009 nécessite la démonstration de la formule de Pascal. Dans le document précédent, au chapitre dénombrement, deux démonstrations sont proposées par simple clic (document 39).

Démonstration

1ère méthode

Considérons un ensemble E ayant n éléments, et choisissons un élément particulier a.

$\binom{n}{k}$ correspond au nombre de parties de E ayant k éléments.

Soit F l'ensemble E auquel on retire l'élément a. F est alors un ensemble possédant $n-1$ éléments.

Parmi les parties de E ayant k éléments, on peut considérer les parties qui contiennent l'élément particulier a et les parties qui ne contiennent pas a.

Les parties de E ayant k éléments et qui contiennent l'élément a, contiennent aussi $(k-1)$ éléments différents de a, c'est-à-dire $(k-1)$ éléments de l'ensemble F.
On a donc autant de parties de E ayant k éléments et qui contiennent l'élément a, que de parties de F ayant $(k-1)$ éléments, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k-1}$.

Les parties de E ayant k éléments et qui ne contiennent pas l'élément a, sont des parties à k éléments de l'ensemble F.
On a donc autant de parties de E ayant k éléments et qui ne contiennent pas l'élément a, que de parties de F ayant k éléments, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k}$.

Il y a donc dans E, $\binom{n-1}{k-1}$ parties à k éléments contenant a et $\binom{n-1}{k}$ parties à k éléments ne contenant pas a.

Il y a donc en tout $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ parties de E à k éléments.

Donc $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

2ème méthode

On sait que pour tous les entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ on a $\binom{n}{k}=\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-1-(k-1))\,!}+\frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!}\\
&= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!}+\frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!}\\
&= \frac{k\times(n-1)\,!}{k\times(k-1)\,!\,(n-k)\,!}+\frac{(n-1)\,!\times(n-k)}{k\,!\,(n-1-k)\,!\times(n-k)}\\
&= \frac{k\times(n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}+\frac{(n-1)\,!\times(n-k)}{k\,!\,(n-k)\,!}\\
&= \frac{k\times(n-1)\,!+(n-1)\,!\times(n-k)}{\ldots}
\end{aligned}$$

Document 39. Démonstrations de la formule de Pascal X maths

Nous donnons dans le document 40 la Roc du sujet de mathématiques de métropole 2009.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Document 40. ROC du sujet du baccalauréat de métropole de 2009

Cette ROC possède un prérequis qui referme la ROC. En effet, sur le site étudié, le document précédent propose comme nous l'avons déjà mentionné deux démonstrations de cette formule, la deuxième est celle demandée. Dans les annales zéro dans la banque 2004 la première question du premier exercice posé est identique aux deux dernières lignes du document 39. Ainsi cette démonstration présente dans l'origine du mythe : des dix démonstrations au programme de terminale S, alimente encore en 2009 ce mythe. Cet exercice était un classique du cours des années 1990-2001.

Dans le site Internet étudié, la rubrique QCM propose de nombreux exercices variés regroupés par thème selon l'organisation du programme. La partie cours comporte les démonstrations et la partie du module « révision » du cours est constituée de fiches de cours.

Ainsi ce site Internet se situe dans la mouvance de l'institution, proposant de nombreux éléments d'aide à l'étude.

En conclusion de cette étude, nous remarquons que le concept de ROC évolue. En 2005, la ROC était **un des exercices** du baccalauréat, composé d'une question de cours avec prérequis suivie d'un QCM dont la réponse doit être justifiée. Compte tenu du nombre de points attribués à cet exercice, l'élève reste obligé de le traiter. Ce qui rend par conséquent la préparation par l'enseignant incontournable. Cette induction semble voulue par l'institution car l'inspection reste maîtresse dans le choix des sujets. En 2006 et 2007 le changement est notable : la ROC devient la plupart du temps **une question** d'un exercice complet (notée généralement sur un ou deux points) même s'il existe encore des ROC comportant plusieurs questions. Cette modification peut être une réponse à la lettre de l'APMEP à J. Moisan (2005), Doyen de l'inspection générale :

> *« Les « ROC » proposées n'ont pas toujours ciblé des démonstrations incontournables du programme, qui est d'ailleurs peu directif sur les méthodes d'exposition du cours et permet toutes les variantes : certains élèves avaient vu en cours les démonstrations demandées, d'autres pas. Vous avez vous-mêmes conclu qu'il est impossible de faire une liste de « démonstrations de cours » et les notes données à l'exercice 1 en France métropolitaine ont été très faibles et ont contribué à créer des écarts très préoccupants avec les notes des épreuves de physique et de SVT ».*

Cependant la volonté de l'inspection reste constante (introduire une nouvelle évaluation pour modifier les pratiques) comme le montre l'évolution à la hausse du nombre de ROC jusqu'en 2007.

2.3 La Roc dans l'environnement du professeur

2.3.1 Evolution des manuels

Les manuels de cette dernière période (post 2002) gardent les caractéristiques de la période précédente (1991-2001) en particulier celle d'être centrés sur les élèves. Cependant la modification apportée par l'introduction précoce de la fonction exponentielle modifie profondément l'ordre des chapitres. La conséquence induite par cette introduction précoce (pour notre objet d'étude) est l'apparition de ROC sur la fonction exponentielle sans utilisation de la fonction logarithme. Dans chaque chapitre, toutes les démonstrations sont traitées.

Certains enseignants reproduisent cette organisation, par exemple un des professeurs de l'enquête (développée dans le paragraphe 2.4.2 (professeur 1, annexe 2)) déclare :

44. *P. Donc le cours en lui-même, comme c'est photocopié (les définitions et les propriétés), on ne démontre que les points qui nécessitent une démonstration, ou que j'ai envie de démontrer.*

(...)

48. P. *Disons, à droite ils mettent le cours et à gauche ils mettent les démonstrations.*

49. C. Ont-ils un classeur ?

50. P. *Non, en fait ils collent une partie dans le cahier, sur la page d'à côté ils font la démonstration. Des fois quand je ne fais pas de démonstration ça peut-être un exercice d'application qu'ils font à côté, (10 min 30) ou un mini problème que je peux insérer… voilà*
51. C. Et donc ?
52. P. *Le cours ne se limite pas à deux feuilles qu'ils reçoivent et après ils ne font rien. Ils ont toujours quelque chose à faire. Par exemple le dernier cours, c'était la semaine dernière, c'était les statistiques. Le cours, il n'y a quasiment rien à faire, c'est des applications directes. Donc là, comme applications, ils ont eu les deux, trois exercices des derniers sujets du bac.*

Cette reproduction montre que le professeur est sensibilisé à la place que doit occuper la démonstration dans son cours. L'organisation pratique mise en place permet au professeur de développer une gestion nouvelle de son temps d'enseignement.

Dans les manuels, les ROC sont souvent mentionnées au niveau des démonstrations, des exercices et des blocs méthodologiques[72]. Les apports de la didactique et de la recherche sur l'enseignement sont conservés, les équipes d'auteurs sont souvent nombreuses. L'effort sur la mise en page et l'illustration caractérisent les livres actuels.

2.3.2 Le statut de la démonstration pour le professeur :

Pour compléter l'étude, il convient de nous pencher sur le constat de l'inspection générale sur la place de la démonstration dans l'enseignement des Mathématiques (2002) :

> *« En raison de l'évolution de la lecture des programmes et grâce au travail sur le terrain des corps d'inspection pédagogique, nous assistons à un retour de la démonstration dans les cours de mathématiques ».* [73]

Ce rapport confirme le constat de la disparition de la démonstration dans les pratiques enseignantes (dans les années 1995-2001) : conclusion du travail écologique effectué plus haut au

[72] Transmath edition 2006 Raymond Barra Jean Morin André Antibi par Raymond Barra Jean Michel Barros, Patrick Bénizeau, Jacques Burgaud, Jean Morin, David Nivaud Nathan

[73] Rapport n° 2002-017, l'état de la discipline, Inspection générale, mars 2002.

travers des programmes et des sujets du baccalauréat. Le changement dans les pratiques des professeurs, marqué par un retour de la démonstration, est porté au seul crédit de l'implication du corps d'inspection. Des éléments importants sur le cours du professeur sont rappelés par l'inspection :

> *« Il est regrettable que ces démonstrations, en général proposées dans des activités, ne fassent pas plus souvent l'objet d'une institutionnalisation dans le cahier de cours (à la suite de l'énoncé des propriétés) : ainsi le « cahier de cours » est presque toujours un simple aide-mémoire contenant l'énoncé des définitions et des propriétés et l'élève, quand il apprend son cours, se contente de mémoriser un catalogue d'énoncés. »*[74] .

Ces éléments montrent que l'inspection générale veut que le cahier de cours ne se réduise pas à un formulaire, c'est-à dire à un recueil synthétique de définitions, formules et théorèmes, mais qu'il comporte au contraire une organisation propre avec des démonstrations, des exemples générateurs, des contre exemples.

Or, dans les ouvrages parascolaire, les parties « formulaires » se développent. Par exemple, pour le bac 2003, dans chaque chapitre d'un ouvrage[75], la rubrique : « *tout maîtriser et réussir l'épreuve du bac* » contient des rappels de cours intitulés « *l'essentiel* » qui restent un formulaire. Dans un livre[76] consacré au contrôle continu, chaque chapitre comprend un résumé de cours et des exercices et contrôles corrigés. Le résumé de cours est proche d'un formulaire. L'essentiel du cours peut se définir par « *toutes les parties qui composent cet essentiel sont très utiles dans les exercices* ». Une certaine confusion peut se faire jour entre formulaire et cours.

Du coup, la réapparition de la démonstration dans les pratiques reste encore fragile. Si dans le cahier de cours, référence pour le professeur et pour le travail de l'élève, la démonstration n'a que peu de place, elle ne peut être que secondaire dans l'activité de classe. Ainsi, la démonstration n'a pas encore réussi à être un objet d'enseignement, elle reste tout au plus un outil pour répondre aux questions ou pour justifier si nécessaire les théorèmes. Mais cela témoigne-

[74] Rapport n° 2002-017, l'état de la discipline, Inspection générale, mars 2002.

[75] Angot P. & Dubois F. (2002), *Faire le point* ,Term S, Maths, Hachette Education, Paris.

[76] Chartrain E. (2003), Maths, Terminale S, collection contrôle continu, ellipses, Paris.

rait-il d'un malaise plus profond ? A en croire un constat de l'inspection, réalisé pendant l'épreuve orale sur dossier du CAPES interne :

> *« Certains enseignants ignorent eux-mêmes les démonstrations des propriétés qu'ils doivent enseigner* [69]*».*

Ce constat polémique doit être analysé : montre-t-il la difficulté à mémoriser une démonstration ? Ou montre-t-il le peu de place réservée à ce concept dans l'enseignement vécu par le professeur (ou l'enseignement dispensé par le professeur) ?
Dans le rapport du jury de 2003, concernant un raisonnement par récurrence, le jury mentionne que :

> *« Les raisonnements par récurrence sont fréquemment absents ; rappelons que l'utilisation de points de suspension ne peut en aucun cas suppléer à une démonstration. D'autre part, dans les raisonnements par récurrence qui sont rédigés, l'initialisation élément pourtant essentiel du raisonnement n'est pas toujours traitée avec le soin nécessaire.*
>
> *D'autre part le jury rappelle que les démonstrations doivent être bien structurées et bien rédigées ».*

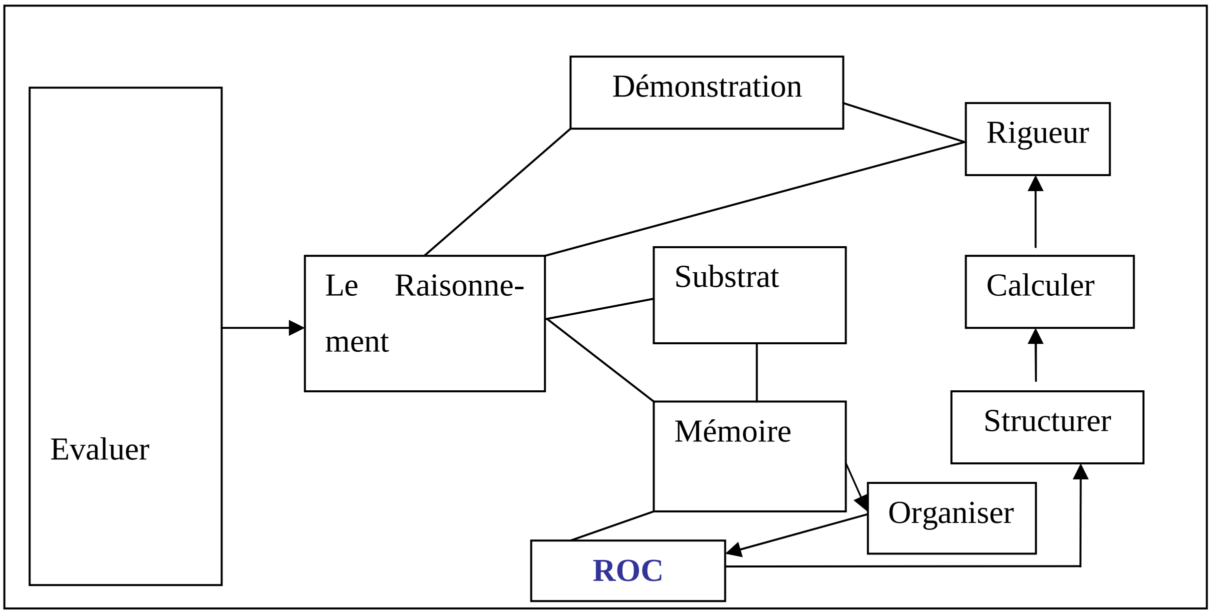
Ce constat justifie de regarder de plus près le statut de la démonstration pour le professeur. En premier lieu,

> *« Ce qui distingue les mathématiques des sciences expérimentales ou des sciences d'observation est la démonstration » [Martin Andler, 2004].*

Ainsi, la pratique de la démonstration peut être vue comme une composante commune de l'identité professionnelle de l'enseignant et du chercheur en mathématiques. Par ailleurs,

> *« Faire un problème de mathématiques, au lycée, tel que les enseignants le perçoivent du point de vue de l'Institution, c'est essentiellement produire une démonstration » [M. Bailleul, 1995].*

De plus, le programme 2002 le confirme en rappelant que la démonstration est "constitutive" de l'enseignement des mathématiques en France. Ainsi pour les professeurs, l'introduction des ROC, caractérisées par l'évaluation d'une démonstration, est dans la logique institutionnelle. Pour compléter le statut de la démonstration, remarquons qu'elle peut parfois être porteuse de sens (par exemple en géométrie. C'est également le cas lorsqu'on peut donner plusieurs démonstrations du même théorème.) Cette caractéristique peut donner du sens à la ROC. L'organigramme ci-dessous (document 41) permet de situer et résumer la ROC dans la pratique d'évaluation d'une question du professeur.



Document 41. Evaluation d'un raisonnement à partir d'un rapport ROC-Démonstration

L'évaluation d'une question de ROC comporte trois parties de natures distinctes. Une visible : la réponse produite par l'élève, l'autre invisible qui reste du domaine privé de l'élève, enfin une cachée avec le substrat. A partir de la réponse donnée, le professeur évalue le raisonnement, la structure du texte et les calculs effectués. La rigueur reste un des critères de l'évaluation du raisonnement.

La partie invisible est liée à l'organisation des connaissances privées de l'élève, déclenchée par le prérequis. Les traces de mémoire en vue de la résolution de la question ne peuvent être atteintes directement dans le texte de la réponse; ainsi cette composante de l'heuristique reste invisible.

Le substrat, partie cachée, nécessaire à la construction de la solution peut être appréhendée par le professeur, par analyse. Nous le développerons au chapitre 3.

2.3.3 L'évolution des pratiques

2.3.3.1 Avant 2004 : le cours linéaire

La réussite de l'activité est assujettie à la nature de l'activité. Le support principal de l'enseignant, avant la prépondérance d'Internet dans l'usage enseignant, est le manuel scolaire. Le rapport de l'inspection générale de mars 2002 mentionne que certains peuvent servir d'exemple, ceux des équipes des IREM ainsi que ceux coordonnés par les inspecteurs IA-IPR. Ces équipes se sont investies dans la réalisation de nouveaux manuels intégrant à la fois l'usage de TICE, de la démonstration et donnant des ouvertures sur les applications et les autres disciplines. Nous déterminerons les caractéristiques des pratiques enseignantes (attendues et « réelles ») avant 2004 et celles attendues après 2004 dans le cycle terminal. Notre étude s'appuiera sur l'analyse des documents produits par l'Institution et nous étudierons pour ces deux périodes : la préparation d'un cours par un professeur, le cours et ses caractéristiques, les sujets de baccalauréat, la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques. Nous commençons par caractériser la préparation a priori du cours par un enseignant anté-2004.

La construction du cours

Le choix du thème du cours d'une séance donnée est dicté par sa progression (dans le temps). L'importance de la progression dans l'analyse des effets des pratiques est évoquée par A. Mercier (2002)[77] :

> *« Cela suppose d'abord de comprendre les lois de l'organisation de toute matière d'enseignement en progressions, puisque ce type d'organisation caractérise les systèmes d'enseignement modernes : c'est l'objet de la théorie de la Transposition Didactique (Chevallard, 1980, 1985, 1991 ; Mercier, 2002) ».*

Avant la mise en place de la R.O.C., la progression est presque linéaire, articulée en chapitres. Le professeur s'inspire du découpage du livre pour construire sa progression. La progression est confondue avec la programmation. Par exemple, dans un lycée de la Guadeloupe de 1800 élèves, la progression est planifiée par l'équipe de professeurs. Une progression pour chaque

[77] Conférence : «Evaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques **» (**Une conférence au PIREF) http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/Piref_Mercier.pdf

niveau est arrêtée et transmise au chef d'établissement. Dans ce lycée, il ressort que les tendances les plus influentes sur les choix effectués dans la construction de la progression se répartissent en quatre groupes :

- La première tendance se caractérise par l'innovation. Dans le domaine technique avec les TICE ou dans le domaine de recherche avec l'IREM ou l'APMEP. Le professeur possédant cette tendance privilégie les parties du programme plus aptes à recevoir de l'innovation.
- La deuxième tendance reste scolaire. Le professeur directif et normatif s'appuie sur l'établissement, les parents, l'inspection. Cette tendance privilégie par exemple les parties mises en exergue par l'inspection.
- La troisième tendance est centrée sur la relation professeur-élève. Le professeur manageur se focalise sur la gestion du groupe classe. Le professeur peut, si cette tendance est prépondérante, programmer des heures supplémentaires pour terminer le programme.
- La dernière tendance est associée à la planification et à l'organisation. Elle privilégie l'étude du programme, des annales, et des manuels phares.

Mais ces tendances ne sont pas indépendantes : elles s'associent par couple pour caractériser le profil pédagogique de chaque professeur. Dans le lycée concerné, trois profils en ressortent : le manageur/planificateur, le scolaire/planificateur et l'innovateur/manageur. Ces profils pédagogiques relativisent les effets de la progression commune effectuée par les équipes disciplinaires en conseil d'enseignement. Cette planification commune peut être un moteur de changement ou au contraire un risque de perte de sens produit par des choix moyens effectués à partir de positions antagonistes.

Sous le paradigme de « *l'élève au centre du système* » (loi d'Orientation 1989), la progression devrait s'adapter au rythme des élèves, privilégiant sa réussite : « Mieux vaut en faire moins mais bien ». (Progression presque « au jour le jour ».) Cependant, la réussite au baccalauréat est assujettie à la connaissance de l'ensemble du programme : une progression centrée sur le traitement de l'ensemble du programme implique un certain rythme de progression qui est vite un frein à toutes activités nécessitant du temps. La « balance » entre ces deux orientations antagonistes vient alors du degré d'expertise de l'enseignant.

Les caractéristiques du cours

Le cours d'un professeur peut être caractérisé par trois temps didactiques :

- Le premier temps est une activité de recherche prise (ou modifiée) sur le livre ou en fin de période sur Internet. Les élèves sont mis en recherche. L'enseignant est là pour guider cette recherche .Il aide les élèves.
- Dans un deuxième temps, après avoir corrigé cette activité par lui même ou par un élève, la rédaction du cours du chapitre est écrite au tableau. Pour conserver l'élève en « activité », l'enseignant doit passer de moins en moins de temps au tableau. En revanche, pour gagner du temps le théorème est admis sans démonstration.
- Enfin viennent les applications.

Pour compléter le cours, des exercices sont donnés à faire à la maison. Ils sont corrigés au début du cours suivant. Cette approche s'inspire de la théorie des situations [G. Brousseau, 1986, C. Margolinas, 1993] Mais comme le souligne l'inspection générale, la gestion du temps d'enseignement (une heure de cours) reste problématique. La métaphore dans le rapport de l'inspection générale de mars 2002 illustre un changement de posture : l'enseignant devient un acteur jouant une scène devant ses élèves : « *Une activité doit être bien adaptée à l'apprentissage visé, bien scénarisée et bien jouée* ».

Le choix des activités est motivé par leur appui sur une mobilisation de connaissances antérieures et par la possibilité qu'elles offrent de mettre en place et de structurer les nouvelles connaissances. Mais le professeur doit aussi être un animateur : « *elle*[78] *devrait alterner les périodes de recherche et d'initiative individuelles et les mises en commun, préludes à l'institutionnalisation finale* ».

[78] (l'activité)

Les évaluations

Dans ce paragraphe nous nous appuyons sur les évaluations et de leurs mises en œuvre pour un lycée de Guadeloupe pendant cette période. Ce lycée a une population de 1850 élèves dont une grande partie réside loin du lycée. La construction de lycées supplémentaires en Guadeloupe a permis de désengorger ce lycée. Le nombre de professeurs de mathématiques s'élève à 17 professeurs en 1996 dont une professeure-stagiaire contre 12 professeurs en 2000. Le nombre de terminales S est passé de cinq à trois pendant cette période.

Après chaque chapitre, le professeur pose généralement une évaluation, ce qui conduit à un nombre important d'évaluations posées en classe. Ce choix limite le nombre de devoirs maison. Dans le cadre du cycle terminal, les évaluations sont souvent reprises d'une année sur l'autre en y adjoignant des exercices nouveaux sortis aux baccalauréats avec de légères modifications et en évacuant des exercices trop anciens. L'année de terminale les évaluations sont construites dans le but de préparer au baccalauréat. Ceci implique une révision systématique des chapitres déjà traités. Certains devoirs maison peuvent ajouter des compléments. La plupart du temps, les évaluations sont tirées des divers manuels et des sujets du baccalauréat. Les démonstrations ne sont pas sujet d'évaluation. Le formulaire s'impose peu à peu dans les évaluations de terminale. Dans les sujets communs aux différentes terminales du lycée, le formulaire est distribué à chaque fois pendant sa courte durée de vie.

Ainsi dans la première période (avant 2004) nous mentionnons que le formulaire en tant qu'objet pragmatique peut être un frein à l'apprentissage de la démonstration. Nous avons vu comment l'enseignant prépare son cours à partir de la demande de l'Institution « mettre l'élève en activité » en s'appuyant sur les TICE et en valorisant les problèmes et exercices à tiroirs. Les pratiques d'évaluation confirment les propos de B. David (2000) déjà cités dans l'introduction sur le pilotage par le baccalauréat du cycle terminal.

2.3.3.2 Après 2004 : la progression spiralaire, le cours spiralé

Nous allons successivement étudier les pratiques attendues puis les conséquences sur l'organisation du cours.

Les pratiques attendues

L'introduction de la R.O.C. dans l'épreuve du baccalauréat coïncide avec la mise en place de la progression « spiralaire ». Cette façon de procéder demande une adaptation importante au professeur. Le concept est né à partir du concept de « programme en spirale » de J. Bruner (1960). Le principe est d'approcher un concept en y revenant plusieurs fois dans une complexité croissante. La progression spiralaire modifie l'ancienne articulation de l'année en chapitres qui devient obsolète. Chaque cours qui comporte une institutionnalisation est un nouveau « chapitre ». Le nouveau concept n'est pas étudié dans toute sa globalité. Il est étudié par petits morceaux. Dans le secondaire français (à l'inverse des pratiques de certains pays d'Europe du nord) l'élève change, en général, chaque année de professeur de mathématique. Le professeur ne peut organiser les connaissances des élèves que sur le temps où il contrôle l'acquisition des connaissances, c'est-à-dire sur une année scolaire. Ce morcèlement des apprentissages par année scolaire s'oppose à l'idée d'une organisation des connaissances par une spirale qui peut être pluriannuelle. L'élève doit apprendre à organiser des connaissances éclatées et à trouver des liens entre elles. Cependant, une pratique plus collective des enseignants pourrait permettre de réduire le travail de l'élève.

L'Institution attend des professeurs qu'ils conçoivent eux-même leur progression spiralée. Les enseignants les plus motivés essayent de construire des exemples de progression spiralée pour s'approprier ce nouveau modèle. C'est seulement très progressivement que les enseignants communiquent des progressions en spirale. Ainsi, la recherche d'exemples de progression spiralée sur Internet en 2003 ne donne qu'un résultat qui, de plus, ne se révèle pas pertinent : il ne donne, en réalité, qu'un nouveau découpage par chapitre déguisé en progression spiralée. Aujourd'hui, plusieurs articles[79] définissent cette progression spiralée.

Cette idée a été reprise par l'inspection, sans doute pour contrôler le professeur. En effet, l'inspection normalise cette pratique en l'exigeant dans les documents à remettre lors d'une

[79] http://www.ac-orleans-tours.fr/maths/spip.php?article262, consulté le 6 décembre 2009.
http://www.reunion.iufm.fr/Recherche/IREM/IMG/article_PDF/article_a100.pdf , consulté le 6 décembre 2009.

inspection individuelle[80] . Ainsi le professeur doit être capable de donner la programmation de tous les savoirs même en début d'année.

En outre, il ne faut pas oublier que parallèlement à ces modifications, l'Institution diminue le nombre d'heures de cours des classes du cycle terminal sans allégement des programmes. Se pose alors la question : Comment faire mieux avec moins de temps didactique. La progression spiralée est-elle une réponse de l'Inspection ?

> *« Principe 5 : Si on peut diminuer le coût de la connaissance (il se décompose en coût à l'apprentissage et coût d'usage) et le minimiser, on améliore l'efficacité de l'enseignement » [A. Mercier 2003].*

Ce principe est mis en œuvre dans une progression spiralée. En effet cette progression permet d'être moins attentif au temps pour terminer le programme. Toutes les nouveautés du programme doivent être abordées au cours du premier trimestre. Puis on les reprend sous un autre point de vue. Superficiellement, après le balayage du premier trimestre, il semble alors possible de considérer avoir fini le programme. Les classes les plus rapides verront un concept plusieurs fois, les plus lentes au moins deux fois. Cette manière de faire accentue les différences entre les classes. Mais aussi, en rendant l'organisation en chapitres obsolète, elle peut faire perdre au manuel son rôle d'aide pour l'élève hors temps scolaire.

Cette innovation rencontre, par ailleurs, un obstacle important : l'écriture du texte du savoir. La progression en chapitres permettait une écriture linéaire tandis la progression spiralaire demande un temps et un travail pour réordonner le texte. Le nouveau paradigme : « les problèmes caractérisent l'activité mathématique » ne permet pas d'avoir un texte écrit linéaire du savoir, organisé par le savoir. Cette modification d'élaboration du texte du savoir constitue un obstacle important. Aux Antilles et en Guyane, la réponse de l'institution n'est venue que tardivement, lors du colloque de l'IREM de décembre 2008 par une préconisation de révisions en fin d'année. Mais cette révision ne permet pas la réécriture du texte total du savoir, seulement le squelette de son organisation.

---

http://www3.ac-nancy-metz.fr/mathematiques/phpBB2/viewtopic.php?t=52, consulté le 6 décembre 2009.

[80] Académie de Créteil (2006), inspection individuelle de mathématiques, http://maths.ac-creteil.fr/sources/ipr/inspection_indiv_MAT.pdf, consulté le 6 décembre 2009.

Le cours

Le cours doit introduire chaque nouveau concept dans une « situation problème ». Le concept doit être assimilé rapidement dans des exercices d'application. Puis le concept devient un outil pour résoudre de nouveaux problèmes. La prescription des trois moments de toutes activités mathématiques est donnée par l'Inspection Générale :

«– *recherche individuelle et mise en commun (c'est l'activité préparatoire) ;*

– institutionnalisation dans le cahier de cours ;

– réinvestissement immédiat sous forme d'exercices d'application. »

Cette prescription ne tient pas compte d'une part du temps classe (cinquante minutes) et d'autre part l'hétérogénéité des classes. Celle-ci peut rendre la situation critique. Par exemple : des élèves ont fini et d'autres sont au début (mauvaise gestion de l'hétérogénéité), ou la sonnerie retentit au temps 1, car la mise en commun a été longue par manque d'accord entre élèves (mauvaise gestion du temps).

La gestion de la progression spiralée dans le cours reste encore largement à construire face à l'obstacle du texte du savoir et du temps annuel.

2.3.3.3 Les TICE

Dans le cadre de l'étude ultérieure des obstacles liés à l'introduction des ROC, nous rechercherons les analogies avec ceux liés à l'introduction d'une autre innovation, celle des TICE, que nous analysons maintenant. Nous nous limiterons à l'introduction de l'outil calculatrice dans les cours de mathématiques.

Les nouveaux programmes de collège et de lycée insistent sur la nécessité de l'utilisation des calculatrices et des logiciels en mathématiques. Par ailleurs, la note de cadrage sur l'utilisation des TICE en mathématiques, élaborée par le groupe des mathématiques de l'inspection générale, est largement diffusée et figure, en particulier, sur le site Eduscol. Cette note détaille les objectifs de l'utilisation et en donne une typologie. Elle sert de texte de référence pour les animations pédagogiques assurées par l'inspection dans le cadre de l'accompagnement des nouveaux programmes.

L'utilisation des calculatrices, prescrite par l'institution modifie les pratiques au lycée. L'élève est formé à l'utilisation de la calculatrice comme outil d'investigation dans la recherche des problèmes. Elle permet à l'élève de valider une solution sans le regard du professeur. Par exemple un calcul de dérivée peut être obtenu directement par la calculatrice avec langage formel. L'élève peut calculer la dérivée avec les formules classiques et ensuite vérifier. Mais s'il est malin, au sens de posséder la métis [M. Détienne & J.P. Vernant, 1974], il le fait d'abord avec la calculatrice et s'arrange ensuite pour que le calcul tombe juste. Le professeur pouvait tenir compte de la calculatrice pour construire son évaluation. L'université n'a pas toujours suivi cette voie. La calculatrice y est souvent interdite aux examens[81]. Les classes préparatoires, après un temps d'autorisation, ont aussi interdit les calculatrices à leurs évaluations ainsi qu'aux concours. Devant cet état de fait, certains professeurs de lycée retournent à leurs anciennes pratiques. Toutes les calculatrices avec langage formel sont interdites à leurs évaluations. Nous abondons alors dans le sens d'A. Mercier (2003) :

> *« Les remarques que je viens de faire limitent sérieusement la pertinence des demandes faites aux professeurs, lorsqu'elles visent à faire évoluer les pratiques pédagogiques sans que les rapports sociaux aux savoirs et à leur étude n'évoluent eux-mêmes c'est-à-dire en particulier, sans que l'enseignement universitaire des savoirs à enseigner ne change profondément, comme ce fut le cas à l'origine de la mise en place des systèmes d'enseignement modernes. ».*

Ces résistances des enseignants peuvent avoir des conséquences sociales et même juridiques. Par exemple, dans le cadre du baccalauréat L, le rapport de l'inspection générale (2002) souligne la négligence de certains professeurs qui n'ont pas tenu compte de l'introduction d'une épreuve de première L (épreuve anticipée de baccalauréat) évaluant l'utilisation d'un tableau grapheur. Cette négligence a mené à une plainte devant le tribunal administratif.

Ainsi, nous constatons que les résistances des enseignants à l'introduction de l'innovation sont combattues par l'inspection au moyen d'un levier basé sur les attentes sociales (ici, celle des parents d'élèves vis-à-vis du baccalauréat). Par ailleurs, les divers obstacles rencontrés à l'introduction des TICE semblent être l'« expérience d'enseignement visé » (obstacle lié à la formation), l'absence fréquente d'utilisation de la calculatrice dans les enseignements classiques des premiers cycles universitaires et dans leur évaluation ainsi que dans les évaluations de mathématiques des classes préparatoires.

[81] C'est très majoritairement le cas à l'université des Antilles et de la Guyane, tant en licence qu'en master.

Nous allons maintenant étudier si les observations faites pour deux innovations majeures (la progression spiralée, l'introduction des TICE) se retrouvent pour les ROC. Plus précisément, nous allons développer le questionnement sur les différents leviers, résistances et obstacles rencontrés par l'innovation ROC.

2.4 Viabilité de l'innovation ROC

2.4.1 Introduction

L'introduction de l'innovation ROC est fondée sur la tension ancien/nouveau. Cette dialectique met en place « *une recherche de "juste distance" entre la tradition et l'innovation* » [T. Assude, 2003]. Mais ce changement prend appui sur des leviers pour construire son action, pour contrer les résistances au changement et contourner les obstacles. Ainsi l'équilibre entre ces trois composantes définit la viabilité de l'innovation ROC. Notre travail se portera sur l'analyse de chacune de ces composantes et de leurs caractéristiques. Les leviers sont essentiellement d'ordre social, issus du domaine des représentations des acteurs de l'institution lycée ainsi que du domaine du métier notamment de son organisation hiérarchique. Les obstacles internes à l'institution lycée, au cœur de la classe, sont d'ordre pédagogique et les résistances viennent des représentations des intervenants dans l'acte didactique, et de l'outillage du concept de ROC. Une enquête, effectuée auprès de professeurs de terminale, permettra de cerner les réponses aux obstacles.

2.4.2 L'enquête

Durant le deuxième trimestre de l'année 2007 une enquête a été effectuée.

Méthodologie

En 2007, nous émettons une première hypothèse selon laquelle les professeurs de lycée avaient modifié leur pratique de la démonstration, pour répondre à l'introduction des ROC au baccalauréat. Nous dégageons une deuxième hypothèse sur les modifications de pratiques : les professeurs formulent un discours technologique sur leur pratique et enseignent la démonstration au travers des ROC par une certaine organisation des connaissances. Cette organisation des connaissances sera un des objets du chapitre trois.

Les postulats

Nous avons postulé que : « *Personne ne connaît mieux le travail que celui qui l'exécute* » et « *Un professionnel a en propre son processus de travail* »*D'après J. Donnay (Belgique).*

Les choix de l'échantillon

Nous nous sommes orientés vers des entretiens avec un échantillon représentatif des professeurs de Guadeloupe, enseignant en terminale S. L'enquête a été menée au cours du deuxième trimestre 2007 sur l'ensemble des professeurs de terminale de quatre lycées situés dans des zones géographiques différentes. Deux professeurs n'ont pu être interviewés pour des raisons personnelles. La Guadeloupe possède 16 lycées comportant des classes de terminales S. Les lycées choisis possèdent des populations d'horizon divers reflétant la variété de la population. Au niveau des résultats au baccalauréat, sur la référence de l'année 2009 dans le palmarès Figaro, un des lycées est placé dans le premier quart, un dans le second, etc. Ces structures sont par ailleurs représentatives de la variété des établissements de Guadeloupe (taille, origine socio culturelle de la population). Sur les huit professeurs interviewés, quatre sont agrégés et les quatre autres sont certifiés. Tous les professeurs ont plus de dix ans d'expérience.

Pour débuter notre enquête nous avons effectué un entretien avec un professeur de terminale S d'une province métropolitaine. Pour compléter notre enquête nous avons réalisé un entretien avec un formateur IUFM responsable de la formation des étudiants préparant le certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire (CAPES) de mathématiques.

Le choix de la technique d'entretien

L'analyse des obstacles à ces entretiens a permis de pointer les principaux : l'expertise des enseignants interrogés, notre expertise personnelle de l'enseignement (plus de quinze ans d'expérience en terminale S) et notre position professionnelle (formateur IUFM) qui pourrait induire une conception des professeurs sur la nature de l'entretien : l'entretien serait alors perçu comme une évaluation ou comme un regard de l'institution. La formule de l'*entretien d'explicitation* [P. Vermersch, 1994] nous a semblé permettre de lever les obstacles mentionnés ci-dessus. En permettant le changement de posture de l'intervieweur par un appel à des situations concrètes de l'expérience professionnelle, cette technique permet de donner :

> *« Les clés d'un des problèmes les plus épineux du questionnement : comment aller vers la précision sans pour autant induire ». [P. Vermersch, 1994]*

Cette technique consiste à évoquer une situation particulière de l'expérience professionnelle de l'interviewé. En évoquant, en faisant appel à la mémoire concrète, cette technique permet d'avoir une description du vécu. Les questions posées ne doivent pas induire de réponses, ainsi l'intervieweur doit s'empêcher d'expliquer afin de comprendre. Il faut ainsi éviter les « pourquoi » et employer les « comment ».

Questionnaire de l'entretien

Le questionnaire de l'entretien était basé sur les douze questions suivantes :

1. Qu'évoque pour vous le mot restitution organisée de connaissances ?
2. Pouvez-vous me donner une démonstration que vous faites dans vos classes ?
3. Comment procédez-vous ?
4. Qu'attendez-vous des élèves après avoir fait votre démonstration ?
5. Évaluez-vous cette partie de votre enseignement ?
6. Dans quelle partie du programme se situent les démonstrations que vous faites dans vos classes ?
7. Comment favorisez-vous le travail de l'élève à la maison sur cette démonstration ?
8. Comment favorisez-vous la mémorisation d'une démonstration ?
9. L'apprentissage par cœur d'une démonstration vous semble-t-il nécessaire ?
10. L'algèbre est-elle pour vous un cadre où vous faites des démonstrations ? Comment ?
11. Comment la restitution de connaissances a modifié vos pratiques ?
12. Quelles aides donnez-vous à vos élèves pour favoriser l'apprentissage de votre démonstration ?

Les résultats

Nous avons choisi d'inclure les résultats d'enquête au fur et à mesure du développement des paragraphes du chapitre 2 et du chapitre 3. L'annexe 2 contient la retranscription des entretiens.

2.4.3 Les leviers

Les leviers permettent d'agir sur la situation et de trouver des équilibres fonctionnels ou structurels. Nous en avons dénombrés six.

(i) *La modification de l'image sociale du fonctionnaire*

Le fonctionnaire possède la sécurité de l'emploi. Ce statut, dans le contexte économique, est privilégié par rapport à celui du privé[82]. En contre-partie de cette sécurité de l'emploi, la « pression sociale » demande à l'enseignant de l'efficacité. L'introduction des ROC au point de vue social peut donc être réalisée à moyens constants.

(ii) *L'action de l'inspection*

L'inspection générale change de paradigme. D'un paradigme de communication interne très hiérarchisée (du haut vers le bas), elle choisit une communication plus ouverte, directement vers les professeurs. Le doyen de l'inspection est le porte-parole de ce levier. Il est au centre des échanges et se déplace en France pour harmoniser, dynamiser et manager les différentes équipes – de l'inspecteur pédagogique régional avec son équipe de professeurs référents aux équipes de professeurs du lycée – en animant des réunions d'information et de doléance. L'utilisation d'Internet comme moyen de communication, par la publicité de son site personnel lors de ces réunions, permet de diffuser son travail. Mais il communique aussi dans les colloques (par exemple allocution de J. Moisan, Doyen de l'inspection générale au colloque de l'APMEP (26 Octobre 2004))[83]. La gestion des nombreuses polémiques suscitées par l'introduction des annales zéro (rencontre APMEP du 20 Mai 2005) sont l'occasion d'argumenter en faveur de l'introduction de l'innovation ROC. Ainsi cette introduction permet de « *donner de la consistance à l'enseignement des maths* »[84]. Les inspecteurs généraux, en tant que présidents des commissions des choix des sujets, prescrivent auprès des concepteurs et contrôlent la mise en œuvre de l'introduction des ROC dans les sujets posés aux baccalauréats. De plus, les actions d'inspection, de conseils et d'animation d'ateliers de travail peuvent permettre de favoriser sa mise en place dans les pratiques des professeurs :

> *« Environ sept cents professeurs de mathématiques qui enseignent dans les lycées publics et privés de l'académie ont participé à ces vingt-quatre réunions conduites par les I.P.R. de l'académie. »*[85]

---

[82] Cette situation est d'autant plus sensible en Guadeloupe qu'un chômage endémique y sévit et que les majorations de traitement dont bénéficient les fonctionnaires les placent (en apparence) dans une situation privilégiée.

[83] http://back.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/gfrlytext.htm

[84] http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article296

[85] Académie de Nantes, février 2004, http://www.apmep-aix-mrs.org/pedagogie/load/doc13-265-Nante.pdf

(iii) ***Le rôle grandissant des parents d'élèves***

L'élévation du niveau général de formation ne place plus le professeur en haut de la pyramide des savoirs. Cette nouvelle distribution des compétences peut permettre aux parents de devenir un élément de contrôle et de motivation du corps enseignant.

(iv) ***Le mythe du baccalauréat***

Le baccalauréat marque la fin d'étude secondaire. Il est la clef pour le supérieur et reste un monument dans la France d'aujourd'hui. Pour l'élève de terminale S, le bac est comme le permis de conduire, un passage socialement obligé : l'élève doit conduire sa vie tant sur le plan politique, social (majeur par la loi) que sur le plan des études (changement de statut élève/étudiant). Ainsi l'élève, soumis à la pression sociale et familiale, est motivé pour obtenir son bac. Obtenir des bonnes notes reste un des objectifs majeurs du travail de tout élève et de tout professeur de terminale S.

(v) ***Le statut de la démonstration au niveau du professeur*** (voir 2.3.2)

Nous avons montré que l'introduction d'un exercice sur l'élaboration d'une démonstration met en avant une des composantes de l'identité professionnelle du professeur de mathématiques.

(vi) ***L'importance accordée dans les autres disciplines à l'argumentation scientifique***

L'introduction des ROC permet un retour de la démonstration. L'enseignement de celle-ci, dans le contexte actuel, se construit à partir du concept de « débat scientifique ». Cette forme adaptée de débat légitime l'introduction de l'argumentation dans les pratiques. Ainsi, les questions apportées au cours de la recherche en classe tant du professeur (principalement comme le montrent les entretiens paragraphe suivant) que des élèves interrogent la classe sur la notion abordée et nourrissent un « moment d'argumentation ».

2.4.4 Obstacles et réponses

En nous basant sur l'enquête effectuée en 2007 et sur l'analyse de sites Internet, nous allons décrire à la fois ces obstacles et les interactions qu'ils provoquent.

(i) ***Le niveau de la classe***

Si la classe n'a pas les moyens de trouver l'amorce d'une démonstration, la « *tentation du recopiage culturel* » devient la seule alternative [Y. Chevallard, 2001].

Les démonstrations seront alors enseignées pour répondre aux injonctions du programme et de l'institution (levier (ii)) ainsi qu'aux nécessités de l'évaluation comme des monuments à visiter et à connaître. Elles perdent alors leur identité, fruit du questionnement qui les engendre. Lors d'un entretien, un professeur (professeur 6) évoque cet obstacle :
« Mais le jour de contrôle en fait, en particulier au premier trimestre je donne comme énoncé exactement le même énoncé de la restitution organisée de connaissances que nous avons vu en cours sur laquelle nous avons passé le plus de temps. Je ne donne pas une restitution organisée de connaissances mais je demande une démonstration de cours. C'est le vide, là j'exagère : il y a 4 réponses correctes pour 29 élèves.
J'y passe énormément de temps et j'ai l'impression que cela augmente mon échec ».
Ce professeur avait décidé de consacrer énormément de temps à l'apprentissage de la démonstration au cours du premier trimestre. Au vue des résultats obtenus, il ne traitera au deuxième trimestre que les démonstrations vraiment nécessaires (levier (iv)).

(ii) ***La gestion du temps***

La question du temps d'enseignement reste fondamentale comme nous l'avons notée au paragraphe 2.3.3 (L'évolution des pratiques). Cette nécessité risque de nouveau de dénaturer l'apprentissage de la démonstration en un « *recopiage culturel* » comme pour l'obstacle précédent. En effet le temps didactique tel qu'introduit par Y. Chevallard (1985) et A. Mercier (1987) est confondu dans notre étude avec le temps d'apprentissage (En effet, nous supposons que les professeurs des classes de terminales S sont des professeurs expérimentés) :

> *« ce qui le caractérise comme professeur expérimenté, c'est sa capacité à articuler le temps d'apprentissage au temps didactique : il passe du temps d'horloge sur les objets de savoir (nouveaux) qui font avancer le temps didactique, tandis qu'il passe vite sur les objets (obsolètes, supposés connus) qui arrêtent le temps et il se limite au rappel des gestes utiles à la tâche qu'il donne » [A. Mercier, 1999].*

La ROC nécessite un apprentissage de la démonstration sur les concepts étudiés en terminale. Mais la distance nécessaire pour réinvestir, en reniant sa mémoire didactique – en suivant A. Mercier (2002) – et son savoir assimilé mais non autonome, *i.e.* ses connaissances, demande une séparation temporelle d'avec le temps d'apprentissage de la démonstration. Le temps didactique d'une ROC dont les concepts sont introduits en terminale semble être plus long que celui de l'apprentissage de la démonstration.

L’institution, par le concept de progression spiralée, donne une première réponse. Dans la classe, les différents professeurs interrogés gèrent ce fait de diverses manières. L’aide apportée aux élèves est variée, tant dans le choix des habiletés nécessaires pour comprendre la démonstration que dans l’assistance fournie aux élèves pour conserver la ou les traces génératives de la démonstration. Par exemple pour une gestion efficace du temps, un professeur, par l’usage raisonné de polycopié du formulaire du cours, place la démonstration au centre de sa pratique (déjà mentionnée précédemment). Certains utilisent le travail hors temps scolaire pour préparer les séances de démonstration. D’autres réaménagent certaines démonstrations en une ROC. Enfin, un dernier amène dans le cadre du cours un outil didactique, l’organigramme. Mais tous évoquent le poids du temps dans leur choix d’enseignement.

(iii) ***L’outillage : la démonstration***

La démonstration est avec ses trois principales caractéristiques un obstacle majeur. La première caractéristique est sa nature paramathématique, la deuxième est issue de la topogenèse, la dernière est sa place dans l’enseignement secondaire.

Le concept de démonstration n’est pas, au niveau d’étude étudié, un être mathématique. Elle se situe dans la paramathématique, notion outil de l’activité mathématique, non enseignée comme un savoir. Sa transformation en un « objet » d’enseignement (proche d’une notion mathématique) demande des actions de recherche et de diffusion. L’institution, pour répondre à cet obstacle, monte des stages de formation continue sur la démonstration et sur les ROC. Certains ouvrages sur la démonstration comme « Démonstration écrire des mathématiques au collège et au lycée 1998 Hachette Education» sont utilisés tant en formation initiale que par les enseignants sur le terrain. Le travail de M. Legrand (2006), sur le débat scientifique, est adapté en un débat mathématique sur une démonstration dans certaines classes. L’argumentation est ainsi une activité première qui précède la rédaction de la démonstration.
L’introduction des ROC doit modifier profondément le cours de mathématique. Ce cours était axé avant 2002 sur les activités et sur les applications de cours (voir paragraphe 2.1.5.5). L’objet mathématique démonstration était montré quelquefois par le professeur mais non commenté, l’introduction des ROC le rend plus proche des caractéristiques d’un objet mathématique. La démonstration doit être enseignée et elle est l’objet d’une évaluation directe.
La deuxième caractéristique : la topogenèse (au sens de G. Brousseau : l'organisation des connaissances obtenue à la fin d'un processus d’apprentissage) issue des ROC, centrées sur la démonstration, est principalement déductive. Or

> *« La démonstration n'est pas un bon modèle pour décrire le cheminement de la pensée du créateur du théorème. Elle peut en décrire la conclusion, la partie finale et jouer un rôle dans l'étayage de sa conviction, mais les instruments de la pensée naturelle sont beaucoup plus riches, beaucoup plus puissants et rapides, plus rhétoriques, que la réduction au modus ponens ne le laisserait croire». [G. Brousseau, 2000].*

Cette particularité s'oppose aux manières de chercher une solution à un problème c'est-à-dire à l'heuristique. Cet obstacle est de taille car l'institution définit l'activité mathématique comme la résolution de problème. Dans le même ordre d'idées, la démonstration n'est pas l'activité première dans le futur travail professionnel de l'élève comme le rappelle M. Andler (2004) :

> *« la démonstration joue un rôle second par rapport à ce qu'on pourrait appeler "monstration", qui est un discours ou un texte dont le statut est intermédiaire entre argument heuristique et démonstration en forme.. ».*

L'activité d'un professeur ne peut se réduire à enseigner toutes les démonstrations complètes des résultats du programme. Ce travail nécessite un temps important qui est à prendre aux dépens d'autres tâches comme l'approfondissement ou la possibilité de parler de mathématiques contemporaines ou d'appliquer les concepts. Certains de ces arguments sont déjà donnés par M. J. Perrin (in Blanchard Laville et alii, (1989)) :

> *« Entre la restitution par cœur d'un texte et la maîtrise d'un outil ou d'une connaissance qu'on est capable d'adapter, il y a peut-être aussi l'utilisation de cet outil dans des contextes précis et maîtrisés par l'utilisateur. Est-il nécessaire de comprendre et de maîtriser totalement un outil pour l'utiliser, même bien ? Certes, il faut avoir des moyens de contrôle, mais le contrôle ne peut-il pas venir par des voies externes ? Je pense en particulier à l'utilisation des mathématiques par des non mathématiciens, dans leur discipline. Le problème est alors de savoir quel degré minimum de l'outil est nécessaire pour son utilisation sans trop de risque ».*

Dans le même ordre d'idée, Gilbert Arsac (1996) marque la distinction entre une démonstration « rigoureuse » et une explication. La démonstration s'éloigne du sens du théorème tandis qu'une explication donne les raisons du résultat en construction. La question fondamentale se pose : « Quelles sont les manières d'assimiler un concept en vue de son utilisation ? ».

La troisième caractéristique de la démonstration est sa place dans l'enseignement (déjà évoquée au paragraphe 2.3.2.2). L'évolution des années entre 2000 et 2002 remet la démonstration dans le cours du professeur mais elle reste encore une activité annexe qui n'a toujours que peu sa place dans le cahier de cours d'un élève de collège. L'introduction de la ROC provoque un retour de la démonstration dans la pratique du professeur. Par exemple, selon l'enquête effectuée en 2007, dans une situation où un doute existe sur l'utilité d'une démonstration pour la suite, les professeurs de terminale S (sauf un) préfèrent la faire. Avant l'introduction des ROC, la démonstration étant une pratique annexe, ils se seraient abstenus.

Cependant, cet accent mis sur la démonstration apporte-t-il du sens pour l'élève ? Dans l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires, le dessin explique au sens d'Arsac tandis que la démonstration insère le théorème des valeurs intermédiaires dans l'architecture mathématique. De manière plus fouillée, le dessin montre la validité de la définition des fonctions continues dans le sens commun attendu : le graphe des fonctions vérifie la continuité du tracé. Cependant, mathématiquement, les fonctions continues ne sont pas les seules à posséder la propriété des valeurs intermédiaires : toute dérivée d'une fonction jouit de cette propriété, et le dessin est de moindre aide dans ce second cas[86]. En fait, la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires plonge ses racines dans les propriétés des nombres réels (voir chapitre 4, paragraphe 5).

Ainsi la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires porte un sens mais réduit, l'horizon de sa justification profonde n'est pas accessible. En terminale, la démonstration (surtout en analyse) ne porte pas forcément sur le sens du théorème. Dans le même ordre d'idée, la démonstration du théorème des accroissements finis obtenu comme corollaire du théorème de Rolle par un calcul effectif ne permet pas d'atteindre le sens. Le dessin quant à lui, en agissant comme *l'os de Cuvier*, explicite la transformation géométrique qui relie les deux résultats. En revanche, certaines démonstrations apportent ce sens, par exemple en géométrie. C'est le cas de la question de géométrie développée au paragraphe 2.2.8.1.2 où chaque méthode apporte un élément sur le plan médiateur. On en dessine un paysage, plus ou moins exhaustif, au travers des différentes approches[87].

[86] Nous renvoyons le lecteur au paragraphe 4.6.5.2 pour davantage de détails.

[87] La section III complétera cette réflexion.

(iv) *Coût cognitif*

Le coût cognitif d'une ROC de type démonstration contextualisée est important car il nécessite une réexposition du savoir visé dans un nouveau contexte, ce que souligne Alain Mercier (2003) :

> *« Remarquons à ce propos que le coût énorme d'une reconstruction menée avec la rigueur cartésienne impose que son auteur se fasse l'idée que, au moins, le travail entrepris sera définitif. »*

Cet obstacle sur le coût de ce nouvel enseignement trouve une réponse en 2008-2009 chez trois des enseignants interrogées. Ils abandonnent totalement l'enseignement de la démonstration en les remplaçant systématiquement par une ROC. Ce faisant, ils pratiquent un détournement classique, qui consiste à faire piloter son enseignement par la forme que prend l'évaluation certificative plutôt que par l'objectif assigné par l'institution à cette forme d'évaluation.

(v) *Nature écologique : quelle est la place de la ROC dans le supérieur ?*

L'étude réalisée sur l'introduction de la calculatrice a montré que l'introduction des TICE s'est heurtée à son absence fréquente dans les évaluations universitaires ou des classes préparatoires. Cette faible place dans le supérieur lui confère une apparente fragilité. En ce qui concerne notre objet, cet obstacle *a priori* semble être de même nature. Dans le cursus mathématique la place privilégiée de la démonstration dans le cycle supérieur à partir du L3 lui procure une certaine force. Dans les autres cursus scientifique, la place de la démonstration reste à l'état de trace, remplacée par le raisonnement scientifique. Ainsi la ROC, évaluation d'une démonstration, n'occupe pas une place suffisante dans le supérieur pour lui conférer une certaine stabilité. Cependant, dans les concours de recrutement de professeurs, la démonstration reste incontournable tant à l'écrit qu'à l'oral.

(vi) *Cohérence des programmes*

Nous interrogeons la cohérence des programmes de manière plus approfondie dans le chapitre 3 de ce travail avec un outil didactique : le site mathématique. Cependant, nous pouvons déjà remarquer des « lacunes » de rationalité dans les programmes ou (autre manière de le dire) qu'ils sont formés d'ilôts de rationalité. Pour l'institution enseignante ces « trous de rationalité » sont à enseigner comme des concepts « transparents » ou, au mieux, à justifier heuristiquement. Dans les programmes actuels, le théorème de caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée en est un exemple, parce que les techniques utilisées pour ses démonstrations se trouvent dans les frontières mouvantes entre l'écosystème du cycle terminal et de celui du post bac scientifique. (Nous l'explicitons au paragraphe 4 .5.) Pour l'élève, ces trous ne sont souvent guère perceptibles, ou bien font partie du jeu un peu formel qu'est pour lui l'activité mathématiques. On pourrait dire que ces trous constituent, pour lui, des boîtes noires à utiliser sans ouvrir le couvercle ! Une conséquence de cette situation est que chaque ROC ne peut que se situer qu'à l'intérieur de ces ilôts de rationalité, ce qui referme le champ d'existence du concept ROC.

D'un autre côté, la rédaction des programmes oscille entre deux tendances : un programme long mais clair pour des spécialistes ou un programme court écrit pour être compréhensible des citoyens. Cette dernière tendance ouvre le champ de la liberté pédagogique de l'enseignant mais peut comporter des ambiguïtés et donner lieu à plusieurs interprétations. Les ROC dépendant de ces interprétations risquent d'être non équitables. (Voir, par exemple, l'analyse typologique des ROC au paragraphe 2.2.6.) Cela dit, le danger reste limité. En effet, si au primaire l'oscillation est forte entre ces deux tendances, au secondaire elle reste contrebalancée par l'action de l'inspection générale.

Enfin, les programmes ne possèdent pas l'outillage suffisant au concept ROC :

- La minceur du contenu démonstratif déjà évoquée dans un paragraphe précédent : place et rôle des « annales zéro »,
- les difficultés pédagogiques liées à la nouvelle organisation des savoirs dans les programmes amenant un coût temporel qui diminue en conséquence le temps accordé par le professeur à l'enseignement des ROC. Nous avons déjà mentionné que tous les professeurs interrogés sont préoccupés par la gestion du temps. B. André (2005) énonce les causes de ces difficultés pédagogiques :

> *« L'exemple emblématique en est la fameuse introduction de la fonction exponentielle comme solution d'une équation différentielle,intrication déraisonnable de deux notions difficiles et complètement nouvelles, aggravée par l'exemple malchanceux de la radioactivité, aggravée encore par la méthode d'Euler en guise de preuve, aggravée encore plus par les invraisemblables démonstrations de l'unicité, sur-aggravée par l'examen des propriétés équivalentes qui entretiennent une affreuse confusion au niveau des constantes, etc. Or ce fiasco pédagogique est constamment vanté par des personnalités influentes mais déconnec-*

> *tées de la réalité des classes, comme une collaboration exemplaire des deux G.E.P.S. (groupe d'experts pour les programmes) de mathématiques et de physique » B. André (2005)*[88].

Cette difficulté est réelle en 2007 pour certaines classes comme le montre l'entretien cité précédemment au paragraphe : Le niveau de la classe**.**

(vii) *La calculatrice*

Les calculatrices haut de gamme, outil scientifique performant disposant d'un noyau de calcul formel, possèdent de plus une mémoire importante qui peut être utilisée comme base de données. L'option Internet permet également de télécharger des fichiers. Des sites proposent des modules en ce sens : en particulier un site propose à la vente un module complet de toutes les ROC au programme ainsi qu'un cours complet. La mercatique de ce produit est bien construite, ce site, consacré à la ROC, est opérationnel depuis plus de trois ans[89]. Par ailleurs, des sites personnels de professeurs comportent les ROC posées et corrigées. Ainsi une simple manipulation permet un transfert des données du site à la calculatrice. Dans les forums les différents échanges montrent une prise de position contre cet état de fait. Par exemple un internaute (enseignant) s'insurge à propos de la ROC posée au baccalauréat pour sa fille :

> *« Quant à la ROC ("Restitution Organisée de Connaissances cachées dans la calculette"), c'est tout sauf une évaluation. C'est surtout actuellement un apprentissage de la tricherie »*[90].

D'autres forums précisent que les professeurs participent à l'effort d'utilisation abusive de la calculatrice en révélant que l'utilisation de la mémoire de la calculatrice pour stoker des données est tolérée au baccalauréat. La ROC perd dans ce cas son caractère formateur et son caractère d'évaluation équitable. Cet obstacle important ne peut être totalement levé que si la calculatrice est interdite au baccalauréat, en accord avec le dossier ROC de l'IREM de Lorraine (2005) :

---

[88] Lettre ouverte à l'inspection générale de mathématiques 16 janvier 2005.

[89] www.rocmaths.com, consulté le 22/04/09.

[90] Les Mathématiques .Net : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?18,477992, consulté le 22/04/09.

> *« En tout cas, si l'Inspection voulait vraiment introduire la R.O.C., on ne comprend pas qu'elle n'ait pas annoncé l'interdiction des calculatrices ».*

La polémique au sujet de la calculatrice n'est pas encore à son terme avec les possibilités Bluetooth malgré l'interdiction d'utiliser des calculatrices communicantes. Dans le colloque de l'IREM de Guadeloupe de 2005, pendant un atelier portant sur les ROC et les contre-exemples, les professeurs présents ont affirmé leur avis quasi unanime dans un questionnaire que « *la ROC n'interdit pas l'usage de la calculatrice* ».

(viii) ***Les préoccupations d'ordre social***

L'introduction d'une ROC ne doit pas trop influer sur la note de l'épreuve. Celle-ci est un passeport pour le supérieur, elle ne peut être changée brutalement comme en témoigne le tapage médiatique sur l'épreuve de mathématiques du bac 2003 avec la géométrie dite « spatiale » : *« article du Monde de samedi 22 juin*

Un barème spécial va être appliqué. Les candidats au bac S - et leurs parents - vont peut-être retrouver le sommeil. Après plusieurs jours de polémique sur la difficulté excessive du sujet de mathématiques de la série S, le ministère de l'éducation nationale a reconnu vendredi 20 juin que la "présentation" des exercices avait pu "perturber" les candidats. Refusant d'annuler l'épreuve - comme le demandaient des associations de professeurs et de parents -, le ministère a demandé aux jurys de tenir compte des "difficultés" du sujet dans leur notation.»[91]. Le barème du baccalauréat a été modifié au-delà des 20 points réglementaires jusqu'à 28,5 selon APMEP[86].

Cela ne permet pas de donner des exercices trop éloignés des habitudes ou des instructions données. Nous constatons que la notation de la question ROC varie entre un point et trois points de sorte que la note ROC a un effet limité sur la note globale d'un élève.

(ix) ***Le contrat didactique***

Le contrat usuel est basé sur la possibilité d'utiliser tous résultats de cours pour répondre à un exercice. Dans le cas de la ROC, comme nous l'avons montré au paragraphe 2.2.3., le prérequis organise la restitution en donnant une base solide. Mais, ce faisant, le prérequis modifie

[91] Source 20/06/2003, http://lamaisondesenseignants.com/index.php?action=afficher&rub=5&id=402 consulté le 7 décembre 2009

le contrat d'évaluation en restreignant le champ de la solution par l'obligation de l'utiliser dans la réponse à la question. Cette particularité change les règles du jeu et s'oppose aux pratiques mathématiques des élèves. Cette rupture nécessite un enseignement. Un des professeurs interrogés affirme qu'après un travail sur le prérequis d'une ROC, l'ensemble des élèves avaient compris le concept.

2.4.5 Les résistances

Pour répondre à cette question nous sommes guidés par le texte de Huberman consacré aux facteurs des innovations pédagogiques, qui a montré que :

> *« le facteur principal est apparemment l'importance relative attachée aux avantages et aux menaces que les personnes intéressées espèrent ou redoutent du changement. »*[92]

(i) ***Les représentations des professeurs sur l'enseignement de la démonstration***

Les professeurs, mis en demeure d'enseigner la démonstration par l'introduction des ROC, n'ont souvent pour exemple que celui de leur formation universitaire. Ils n'ont vécu en général en tant qu'élèves que des exemples de démonstration effectuée par le professeur. Ainsi la représentation induite de l'enseignement de la démonstration reste celle d'une transmission. Aucun élément institutionnel n'apporte des éléments à la manière d'enseigner la démonstration comme l'a mentionné notre étude des programmes et des divers rapports d'inspection.

En particulier dans le paragraphe 2.3.2, il est mentionné dans le rapport de l'inspection que les professeurs doivent connaître toutes les démonstrations au programme (en occultant la manière d'enseigner la démonstration).

Cependant, certains ouvrages des classes de première de 2005 proposent des exercices sur une démonstration d'un théorème du cours de mathématiques et des travaux des IREM proposent des nouveaux outils pour ce concept. La section Martinique de l'IREM de Antilles Guyane travaille depuis de nombreuses années sur le logiciel Raymond LABAT[93]. Ce logiciel, issu du logiciel Géolab, offre à l'élève un apprentissage de la démonstration organisée par une « boîte à outils » (définitions, propriétés…). Il permet d'apprendre à lire les énoncés, à détecter les

[92] Vu in Assude T, 2003, p.81

[93] du nom d'un jeune et brillant ingénieur martiniquais décédé accidentellement il y a quelques années en Martinique. http ://structuresac-martinique.fr/kabrit/geolab.htm, consulté le 7 décembre 2008

mots clés et à appliquer un théorème. Tout cela pourrait permettre une modification de ces représentations mais le manque d'outils praxéologiques ou didactiques reste un frein important. En effet, la conception du logiciel LABAT est le fruit d'une autre représentation courante, bien résumée par l'article de G. Brousseau (1983). La conception mathématique de la résolution d'un problème dans l'enseignement secondaire consiste à chercher un chemin partant des hypothèses connues, ne dit-on pas données au collège, vers les conclusions cherchées (ou l'inverse):

> *« il s'agit alors d'un algorithme, automate producteur de la démonstration particulière cherchée. […] » [G.Brousseau, 1983]*

Cette conception ne prend pas en compte la composante heuristique de certaines démonstrations. Dans ce cas, pour ne pas rejeter le modèle précédent, on imagine que des intuitions jouent le rôle des algorithmes. Cependant :

> *« La validité d'une telle décomposition est contestable [...] Le sujet –l'élève– est absent de cette conception […] ».*

En outre, par voie de conséquence, la signification mathématique disparaît :

> *« ce qui fait, non pas seulement la vérité, mais l'intérêt d'un théorème (ce que F. Gonseth (1946) appelait le caractère idoine d'une connaissance mathématique) ».*

En tout état de cause, le logiciel Raymond LABAT permet de s'entraîner sur certaines démonstrations avec un souci de rigueur dans les limites de sa conception.

Nous ne pouvons que relier cette résistance à notre troisième obstacle. L'organisation de formations continues sur les thèmes de ROC ou de démonstrations, pilotées par l'inspection, est une réponse adaptée à cette résistance. Mais dans le contexte actuel d'une baisse des moyens, le nombre de formations risque d'être insuffisant comme le montre l'exemple de la Guadeloupe avec une seule formation organisée sur ces thèmes.

(ii) L'acronyme ROC dans le cadre métaphorique

Il s'agit de la métaphore associée à l'homophonie de l'acronyme de restitution organisée de connaissances avec le mot « roc ». D'une part, la métaphore reste vivante à ce niveau scolaire avec une utilisation courante, par exemple, dans le cours de français. D'autre part, l'introduction du mot ROC du genre féminin se heurte à l'utilisation courante de celui de roc du genre masculin. Cette différence de genre induit la métaphore par une nécessaire attention à ne pas confondre les genres dans le discours d'une ROC et d'un roc. De plus elle est peut être reliée à celle ci « Tu es Pierre, et sur cette pierre je bâtirai mon église » ou à celle du mythe grec de la naissance des hommes qui assimile par homophonie les hommes (laooi) à des pierres (laas)[94], ainsi :

> *« le mécanisme métaphorique est universel »*[95].

ROC au sens de rochers : « les restitutions organisées de connaissances sont des rocs. » c'est une hypotypose :

> *« puisque l'hypotypose ne fait que ''mettre sous les yeux'' alors que la similitudo, même si elle utilise l'hypotypose, a au préalable déplacé ce dont elle parle, et décrit ''visuellement'' non pas le sujet à traiter, mais son comparant. » [N.Charbonnel 1991]*

En accord avec F.Tochon (1992) :

> *« Les travaux menés en psychologie cognitive suggèrent que tant qu'un cadre conceptuel reste implicite, il modèle l'interprétation des situations sans qu'on s'en aperçoive, sans qu'on puisse vraiment expliquer en quoi l'interprétation de la situation est particularisée par cette manière de penser, »*

nous percevons l'influence de la métaphore sans pouvoir expliciter des indicateurs précis.
Cette métaphore dans le domaine de l'éducation induit la question suivante de son registre sémantique.
Cette figure de style appartient clairement au régime sémantique expressif plutôt qu'à celui praxéologique. En effet, à notre connaissance, aucune production – institutionnelle ou autre –

---

[94] Cassirer E.(1929) Philosophie des formes symbolique. La phénoménologie de la connaissance, Paris,Minuit. cité par J. Lasségue : La génèse des concepts mathématiques entre cognition et sciences de la culture revue de synthèse 5 série 2003 p223-236 http://www.lassegue.net/ (consulté le 22/04/09).

[95] Lakoff G.,Numez R. (2000) Where mathematic comes from. How the embodied mind brings mathematic into being New York , NY, Basic Book cité par J. Lasségue : La génèse des concepts mathématiques entre cognition et sciences de la culture revue de synthèse 5 série 2003 p223-236 http://www.lassegue.net/ (consulté le 22/04/09).

ne l'a explicitée. Ainsi, comme le souligne N. Charbonnel (1991) la métaphore va : « *toucher l'affectivité du lecteur* ». D'une part nous pouvons percevoir un roc par le toucher. Le roc nous donnera alors une sensation de dureté. Il nous faut rapprocher cette métaphore des productions des professeurs sur Internet évoquant un rejet des ROC du à une « équation impossible » entre difficulté et temps scolaire ou aux avis (quasi unanimes) des professeurs en 2005 exprimés lors du colloque IREM Antilles-Guyane à trouver l'exercice d'une ROC difficile. Cette représentation reste stable jusqu'en 2007 d'après notre enquête. D'autre part, nous pouvons caractériser un roc par la vue. Dans ce cas un roc est un solide, masse immuable. Cette propriété nous évoque « le tout ». Difficile d'attaquer une partie de ce rocher. L'élève aura le sentiment d'être face à un bloc de question. Enfin nous pouvons voir la ROC comme une fondation de la maison-connaissance. En effet la démonstration mathématique, spécificité de cette science, est la base de la connaissance mathématique. Nous verrons dans la partie trois une autre possibilité de métaphore avec « le texte du savoir ».

Pour conclure regardons l'hypotypose ROC avec les différentes interactions en jeu dans une relation didactique. Le professeur regardera l'alpiniste élève gravir avec peine le ROC, base solide de la connaissance. L'élève, quand à lui, aura à s'appuyer sur la fondation démonstration pour surmonter un exercice dans sa globalité. En outre nous pouvons nous interroger sur la non explicitation de cette hypotypose par l'Institution, qui à nos yeux véhicule une image négative. En effet ce développement permettrait de se déplacer vers le régime praxéologique. Celui-ci enjoint « *une action effective des personnes concernées* » [N.Charbonnel, 1991], domaine plus pertinent dans l'Education.

(iii) ***La représentation du rapport : « notation de l'exercice ROC sur celui de l'épreuve »***

L'élève travaillera à la préparation d'une ROC en fonction du gain espéré mais aussi de la capacité qu'il croit avoir pour résoudre l'exercice. Dans les faits, le concept ROC n'étant pas stabilisé, la ROC est restreinte à une question, mais elle peut être un exercice : ainsi le gain espéré varie. Or l'atteinte du niveau de rigueur en mathématiques semble être difficile pour l'élève, même si, dans les documents d'accompagnement, le niveau de rigueur exigé varie en fonction du contexte au stade de l'expert en géométrie et de l'apprenti en analyse. Ces effets sont renforcés par la représentation qu'ont les professeurs de la difficulté de l'exercice ROC : Les entretiens montrent qu'ils l'estiment difficile, ce que l'un résume ainsi : *« poser une ROC en spécialité mathématique ? Oui, mais pas en TS. »*

Ainsi les représentations des élèves, renforcées par celles des professeurs, découragent tout effort en faveur de ROC. Alors que dans les faits les consignes données aux correcteurs sont clairement en dessous des exigences comme l'indique APMEP à propos d'une ROC sur l'intégration par parties :

> *« L'exercice était fort simple, dont la mesure où les subtilités sur les conditions de continuité ou les incorrections sur les notations n'étaient guère sanctionnées dans la notation*[96] *»*

(iv) *Le mythe du réservoir contenant l'ensemble des ROC possibles*

Ce mythe provient d'une déclaration de l'inspecteur général J. Moisan à propos du nombre de démonstrations au programme. Le mythe d'une liste, comportant toutes les démonstrations constituant la base des ROC, était ainsi créé. Deux des professeurs interrogés l'évoquent. Pour celui de métropole, c'est une pratique des professeurs spécialisés dans les cours particuliers :

33. *« Il y a une prof je lui envoie plein d'élèves, elle les prend en cours particulier, elle est à la retraite et elle leur a donné je ne sais pas combien de démonstrations de cours et même c'est elle qui les tape et puis après elle leur met sur leur calculatrice ».*

> *Pour l'autre (professeur 3) la liste n'est plus à l'ordre du jour :*
> *« les premières années je les ai sensibilisés de façon forte sur la liste. Moi je leur dis que toutes les démonstrations en principe ils devraient pouvoir les restituer.*
> *Je ne sais même plus si cette liste existe toujours. On en a beaucoup parlé au début et aujourd'hui beaucoup moins ».*

Cependant il collectionne toutes les ROC déjà posées. Cette croyance résiste, malgré les différentes épreuves de 2005 ou 2006 qui prouvent le contraire (cf. paragraphe 2.2.6. typologie des ROC).

(v) *Une conception de l'apprentissage : « faire des mathématiques, c'est appliquer une formule »*

C'est la conception de l'apprentissage des mathématiques, réduit à l'application de formules qui est ici interrogée. Cette conception peut venir de l'introduction d'un formulaire dans les années 1993-2001. Comme nous l'avons déjà noté, un des motifs évoqués lors de cette introduction était d'ordre éthique, le formulaire devant venir contrebalancer les calculatrices per-

[96] bulletin vert, APMEP N°473 , 2007, p802.

formantes. Mais cet argument ne prend pas en compte le fait qu'un formulaire construit n'a pas la même trace mnésique qu'un formulaire donné sans apprentissage. De plus, avant 2001 l'accès à Internet n'était pas encore largement répandu. L'utilisateur de la calculatrice devait beaucoup plus réfléchir à la manière de l'utiliser[97]. Cet effort pouvait permettre de laisser une trace du texte dans la mémoire de l'élève. Cette conception s'oppose à l'entrée d'un exercice dont la vocation n'est pas l'application de formule.

(vi) ***Les représentations floues de forme voisines d'évaluations*** (ROC/ question de cours, ROC/ démonstration).

Dans la nouvelle mouture du baccalauréat, la variété des types d'exercices proposés est en augmentation, mais certains de ceux-ci ont des formes voisines : question de cours, ROC, démonstration de cours. De plus les concepts sont mal stabilisés, comme le montrera notre étude des sujets en usage. Nous remarquons qu'en 2007 une nouvelle appellation apparaît : « exercice d'exposition des connaissances » et en 2008 : « exercice établissant des résultats de cours ». De cette imprécision naît une incertitude pour les professeurs de terminale S sur l'enseignement de la démonstration[98].

(vii) ***La représentation des enseignants à l'égard de la réforme***

Malgré les efforts de l'inspection générale pour inaugurer une nouvelle forme de communication (voir levier (ii)), l'introduction de la ROC se heurte à la méfiance syndicale et professorale. En effet, en cherchant à comprendre la réforme (souvent dans le sens : en cherchant à décrypter le piège qu'elle est supposée renfermer), les corps sociaux français tournent le dos à un certain pragmatisme, ainsi énoncé pour les Etats-Unis :

> *« Les Américains cherchent d'abord à conduire une réforme et c'est à cet effet qu'ils cherchent à évaluer les effets de leurs décisions. » [A. Mercier, 2003]*

---

[97] La croyance d'un usage complexe de la calculatrice est d'ailleurs encore répandue chez les étudiants de l'université des Antilles et de la Guyane. Le fait qu'elle soit interdite lors des évaluations n'encourage guère une évolution sur ce point.

[98] Ce qui s'exprime, par exemple, comme nous l'indiquions plus haut, par le fait que certains remplacent systématiquement l'enseignement de la démonstration par une ROC.

2.5 Conclusion

La ROC est fille d'une genèse longue et riche qui « met en scène » les grands points de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en France dans les soixante dernières années. Comme fille de cette genèse, elle possède un outillage viable (ses éléments constitutifs) quasi tous présents dans l'Ecole avant son dégagement par l'institution. Son introduction dans l'écotone du baccalauréat a sûrement modifié des équilibres, mais sans entraîner de dérèglements trop irréversibles qui la condamneraient à coup sûr. Ainsi, malgré résistances et obstacles, la ROC a su trouver ses conditions de viabilité dans ce système. Son caractère encore instable, sa variabilité, sont sûrement des éléments favorisant sa capacité à s'adapter, à muter.

L'entretien avec le responsable de la formation des PLC1 de mathématiques à l'IUFM de Guadeloupe a permis de vérifier que l'évaluation baccalauréat (charnière secondaire-université) possède des liens étroits avec l'enseignement dispensé dans la charnière symétrique université-secondaire pour la préparation CAPES : le formateur intègre dans ses pratiques l'usage des ROC. Cet entretien redémontre ainsi le « *pilotage* » du baccalauréat sur l'enseignement secondaire.

Cependant deux obstacles demeurent :

- comment faire jouer réellement son rôle à la ROC, celui de vecteur de l'apprentissage de la démonstration ?

  Cette question rappelle la niche de la ROC visée par l'institution: « faire revivre la démonstration ». La ROC a fait entrer la démonstration dans les pratiques mais la question de l'apprentissage de la démonstration n'a pas encore de réponse totalement satisfaisante même si la ROC a déjà permis de donner « un temps » pour l'apprentissage de l'argumentation.

- comment gérer les nouvelles technologies pour que l'évaluation terminale soit perçue par le corps social comme équitable ?

Dans la partie suivante, l'étude des aspects didactiques, épistémologiques, et mathématiques de la ROC, grâce à la notion de site mathématiques d'une notion enseignée [P.Duchet & A. Erdogan, 2005], permettra de répondre partiellement à la première question. De plus, la cohérence (notamment mathématique) du concept – vecteur principal de compréhension des élèves – sera également testée.

Chapitre

3

Ecologie du système didactique

Dans le précédent chapitre, nous avons porté la critique sur la question de cohérence du concept ROC par rapport à l'objectif que l'institution lui a assigné : la question de l'apprentissage de la démonstration. Cette question lancinante dans l'enseignement des mathématiques n'a pas trouvé de réponse totalement adaptée. Cette activité (la démonstration), reconnue comme élément clef de l'identité professionnelle du mathématicien, demeure largement un « non objet d'enseignement ». L'enquête montre que certains professeurs effectuent une organisation de la démonstration qui peut s'apparenter à un pré-site, mais le concept reste flou. D'autres, ne disposant pas de modélisation, indiquent des objets ou concepts du site. Nous allons « démontrer » dans ce chapitre 3, en nous appuyant sur des ROC « archétypes », que la construction et l'analyse de leur site mathématique local permet de dépasser l'obstacle. Le site montre, par exemple, les techniques / concepts que telle démonstration active. Se faisant, il permet à l'enseignant de recréer ou de percevoir des cohérences dans son activité classe, d'étudier des articulations ou des interrelations entre plusieurs approches de la même ROC, au-delà des limitations imposées par les programmes. Le site est un outil adapté au travail constituant :

> *« À reprendre, officiellement, au niveau scolaire n+p, les savoirs étudiés au niveau n, pour tenter d'apprendre encore quelque chose de nouveau en utilisant les outils mathématiques formés entre temps »*

comme le souligne A. Mercier (2001).

3.1 Problématique et cadre général du site

3.1.1 L'hypothèse de recherche

Nous formulons donc l'hypothèse que la construction du site mathématique local d'une ROC permet de lever une des limites de l'introduction de cette activité, concernant l'enseignement de la démonstration.

Pour justifier cette hypothèse, nous notons que l'enseignement de la démonstration a été jusqu'à présent essentiellement fait par ostension. Cette manière d'enseigner demande à l'élève de la patience et de la mètis, un long apprentissage, peu compatibles avec la pression sociale évoquée lors de l'analyse des obstacles et des résistances à cette innovation. Dans le même temps, nous relevions un manque d'outils praxéologiques ou didactiques pouvant agir sur les représentations de la démonstration. Ainsi, des techniques nouvelles d'enseignement sont aujourd'hui cruciales pour donner à la ROC en particulier, et à l'enseignement de la démonstration en général, un environnement adapté.

Nous postulons que le site mathématique local de la ROC peut constituer un tel outil, en replaçant cette activité dans son écosystème, souvent à la frontière entre le cycle terminal et le cycle de l'enseignement supérieur. En permettant de comprendre les enjeux didactiques et mathématiques de la question mathématique posée par la ROC, nous pensons que cette analyse constitue un levier pour agir sur :

- certaines résistances, par exemple : la représentation des professeurs sur la démonstration, le mythe du réservoir contenant l'ensemble des ROC possibles, certaines conceptions de l'apprentissage (« faire des mathématiques, c'est appliquer des formules ») ;
- certains obstacles, dont ceux relatifs à la gestion du temps, à l'outillage démonstration, à l'analyse de la cohérence de programmes.

3.1.2 Méthodologie et/ou outil d'étude : site mathématique local

Pour couvrir assez complètement la variété des ROC posées jusqu'à présent au baccalauréat, nous étudierons des énoncés relevant à la fois des trois types de ROC selon la typologie de la partie 2 (voir le paragraphe 2.2.6.2.) et couvrant les aspects « les plus fondamentaux et les plus porteurs » dans l'idée d'une transition du cycle terminal avec le premier cycle universitaire.

Présentation d'une partie de la TAD : organisation mathématique

La TAD s'appuie sur la notion de *praxéologie.* Cette notion part du principe que toute activité humaine peut se structurer, se décrire, se modéliser en 4 strates autonomes et appréhendables. Chaque strate de niveau supérieur décrit, justifie, la strate précédente. On peut tenter de modéliser cette praxéologie par l'atmosphère terrestre. Les différentes strates emboîtées par le sens constituent l'atmosphère de l'activité humaine qui est donc organisée en couches superposées.

La première strate est constituée des notions solidaires de tâche t et de son type de tâche T. Dans les classes, les tâches sont par exemple des problèmes, des *« œuvres »*.

La deuxième strate est la manière de faire, l'outil au sens de savoir-faire, la procédure mis à sa disposition pour réaliser T ou t. Y. Chevallard (1985) la nomme technique, τ (du grec tekhnê, savoir-faire).

La troisième strate est la technologie, notée θ, le logos (discours rationnel) sur la technique-la *tekhnê.* Ce discours justifie la technique en tant qu'outil adaptée à la tâche t ou à T. Mais, aussi elle a pour vocation d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique et elle permet la production de techniques. La dernière strate, la plus haute est la théorie, discours rationnel justifiant la technologie.[99]

Ainsi une praxéologie est composée du bloc pratico-technique $\Pi = [T/\tau]$, formé d'un type de tâches T et d'une technique τ pour accomplir les tâches du type T, et du bloc technologico-théorique $\Lambda = [\theta/\Theta]$, constitué d'une technologie θ justifiant la technique τ et d'une théorie Θ justifiant la technologie θ. Une praxéologie ponctuelle (formée autour de ce « point » qu'est un type de tâches T) est ainsi une organisation anthropique qu'on peut noter $O = [\Pi/\Lambda] = [T/\tau/\theta/\Theta]$.

Pour notre étude, la notion d'organisation mathématique ponctuelle $[T, \tau, \theta, \Theta]$- [Y. Chevallard, 1997] pourrait permettre de mieux rendre compte du caractère local d'une ROC.

L'organisation mathématique d'une ROC peut être composée de plusieurs organisations praxéologiques ponctuelles. On obtient l'organisation mathématique (OM) $\sum_{i,j,k,l}[\mathrm{T}_\mathrm{i}, \tau_j, \theta_k, \Theta_l]$ de la ROC.

Une particularité du savoir savant pour être viable un élément de savoir donné doit pouvoir apparaître comme partie d'un tout structuré:

---

[99] Cette modélisation prend sens dans une vision symbolique de l'expression populaire « être dans les hautes sphères ». Cette vision est issue du symbolisme chrétien.

> « L'activité mathématique tend à organiser ses outils, et bientôt les problèmes qu'ils permettront d'attaquer, en des ensembles structurés, qui sont les théories » [L. Rajoson, 1988].

Le prochain paragraphe est une autre manière de modéliser la praxéologie et l'organisation mathématique par le site mathématique local.

Présentation du site

La notion de site mathématique a été proposée par P. Duchet et A. Erdogan (2005, 2006). Nous le concevrons ainsi dans la suite (document 42) :

« *le champ d'analyse des différents éléments estimés pertinents pour l'étude d'une question scientifique peut être modélisé comme un écosystème organisé d'êtres (objets, concepts et choses) et de relations nourri par son substrat, partie souvent invisible à première lecture appelé site mathématique local. Le site mathématique local est suffisamment ancré chez le résolveur pour lui permettre les investigations nécessaires à l'étude de la question* ».

Document 42. Une définition du site mathématique local

Cette définition contient deux points essentiels : le site est un écosystème, cet écosystème est nourri par son substrat souvent invisible. Pour développer et détailler cette affirmation, entrons plus avant dans la description d'un site mathématique (tel que nous le concevons). Ce concept s'organise pour nous autour de plusieurs champs d'analyse :

- Les uns constituent le substrat, le terreau, prennent le nom de « choses ». Nous fouillons ce substrat dans le prochain paragraphe.
- Les autres sont donnés par une lecture experte du sujet. Ce sont des objets mathématiques centraux de la question mathématique étudiée, des ostensifs :

> *« Nous avons utilisé le mot « objet » surtout pour désigner les concepts mathématiques qui font l'objet d'étude, (…) De cette manière nous pouvons penser qu'un site mathématique est constitué d'abord des objets principaux dont l'étude fait appel à une multitude de concepts. » [A. Erdogan, 2006].*

- Les techniques, *concepts 1*, viennent ensuite. Elles sont *les manières* de faire permettant d'utiliser les objets comme des outils. Elles sont entendues ici au sens de propriété mathématique, théorème en général, figurant éventuellement dans les prérequis, justifiant une étape de la démonstration demandée dans la ROC étudiée et peuvent varier dans les différentes approches de la question mathématique posée par la ROC. Ces techniques ont pu figurer à un moment ou à un autre au programme des classes du secondaire.

Nous distinguerons enfin, dans une ROC, plusieurs niveaux d'analyse conceptuelle :

- les *concepts 2* permettent de justifier les techniques. C'est la technologie au sens d'Y. Chevallard (1992, 1). Elles constituent le premier niveau de théorèmes justifiant les techniques.
- les *concepts 3* constituent le deuxième niveau de notions ou de théorèmes justifiant les concepts 2. Nous notons que ces concepts sont largement implicites dans le déroulement d'un cours de mathématiques de fin d'études secondaires, et qu'elles le restent également souvent en début d'études supérieures.

Les concepts 3 et 4 sont ceux de plus haut niveau. Nous les développons au chapitre 4.

La notion de substrat

Depuis la crise des fondements et l'ère Bourbaki, il est vain de croire que toute production mathématique n'a pas de présupposition[100]. F. Gonseth (1926) rappelait déjà:

> *« Dans toute construction abstraite, il y a résidu intuitif qu'il est impossible d'éliminer ».*

La ROC, production scolaire mathématique, n'y échappe pas. Ces implicites peuvent être d'ordre mathématique ou bien paramathématiques et protomathématiques[101]. Pour caractériser le paysage de notre ROC, nous avons choisi d'ajouter aux différentes composantes du site mathématique [P. Duchet, A. Erdogan, 2005], une strate plus profonde le substrat constitué de ces présuppositions. Il est constitué de choses singulières, des implicites, naturalisés, préconstruits, pour le niveau étudié ; ils peuvent relever du vocabulaire de la logique (non forcément explicité au niveau étudié), de la théorie des ensembles ou bien des codages usuels en mathématiques ; ils peuvent également relever de méthodes (au sens usuel) de démonstration ou de recherche, de stratégies. Ainsi les choses n'appellent pas de mathématisation pensable dans l'institution concernée.

---

[100] « La présupposition comme en linguistique comme l'ensemble des informations implicites d'un énoncé, qui peuvent s'en déduire mais n'y sont pas formellement exposées http://wikipedia.org/wik/Présupposition consulté 26/10/09.

[101]Ces notions ont fait l'objet du paragraphe 1.1 intitulé : TAD théorie de la transposition.

La connaissance d'une notion évolue avec le niveau d'étude étudié. Ainsi une notion mathématique non définie mathématiquement au niveau étudié est placée dans le substrat comme notion paramathématique, outil d'étude de la question. L'établissement de la preuve ou de la solution suppose l'existence première d'un ensemble de termes. Ces termes premiers sont donc "toujours-déjà-là", certains sont nommés à ce niveau d'autres sont absents du vocabulaire.

Le terme « chose singulière » est définie par : « ce que l'on ne définie pas précisément, mais qui possède une distinction qui fait remarquer » mais aussi pour son opposition et sa nuance avec objet particulier. Nous les classons en fonction de leur provenance en deux parties distinctes :

- celles issues du cotexte (contexte du texte) étudiée par la rhétorique ;
- les autres sont issues du contexte : notions primitives, méthodes, « process ».

3.2 Sites mathématiques locaux de questions ROC

3.2.1 En analyse réelle : autour du couple exponentiel/logarithme.

3.2.1.1 Sujet 2006 : première lecture

Voici le sujet tel qu'il fut proposé aux candidats, à la session 2006 du Baccalauréat série S Antilles Guyane :

Restitution organisée de connaissances

Prérequis :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0;+∞[et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$*.*

- ln(1)=0.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, ln(a x) = ln(a) + ln(x).

Document 16. ROC du sujet de baccalauréat de la session 2006 aux Antilles Guyane

Un élève résolveur [C. Castela, 2008] qui lit pour la première fois le sujet remarque deux codages de natures différentes qu'on peut considérer comme relevant du champ protomathématique[102]. Le premier codage consiste à noter $ln(x)$ à la place du plus habituel $ln\,x$. Ce code fait référence à la valeur de la fonction *ln* prise au point *x*, comme il réfèrerait à une fonction *f* non précisée prise au point *x*. La modification de la forme du signifiant doit permettre aux résolveurs d'évoquer la fonction *ln*. Ce polymorphisme de la langue symbolique [A. Cauty, 1984] permet l'évocation par figure rhétorique[103], qui est donc ici une indication pour l'élève. L'ostensif (x) est d'un usage commun. Il s'emploie dans la classe à partir de la seconde. Ainsi, après trois occurrences du mot « fonction » dans les prérequis, ce codage situe bien la ROC dans le champ des « fonctions ». Cette répétition dans la langue naturelle et dans la langue symbolique, au sens d'A. Cauty, doit évoquer chez l'élève résolveur la variation. Le deuxième code est le choix des lettres *a* et *x*. Traditionnellement, les lettres *a, b, c* désignent dans un contexte mathématique des constantes non déterminées tandis que *x, y* et *t* sont des variables. L'auteur suggère au résolveur que *x* sera traité comme une variable et *a* comme une constante. Le choix des lettres est soumis aux contraintes paradigmatiques usuelles des symboles de constante ou de variable.

Par ailleurs, le concepteur a choisi de donner comme prérequis une propriété de la fonction ln et non une définition possible de la fonction *ln* : *La fonction logarithme népérien est la primitive définie sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction inverse* ($x \mapsto 1/x$) *qui s'annule en 1.* Cette figure rhétorique indique, par son caractère inhabituel, un objet précis, la dérivation. Dans le même ordre d'idées, le concepteur n'introduit pas l'objet du problème en le citant comme étant une propriété ni une relation fonctionnelle mais simplement une démonstration.

Ainsi dans l'énoncé de cette ROC, l'implicite occupe une place première. Pour reconnaître les indices qui lui sont déjà données, l'élève résolveur doit montrer une « habileté de lecture mathématique », habileté au sens du mot latin « habilis » :

> *« qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C'est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d'esprit et habitude), c'est l'habileté*

[102] Nous invitons le lecteur désirant plus d'information, à se reporter à la partie 1.1.

[103] « Je dirai qu'il y a une figure rhétorique en un lieu d'un discours si **ce qui s'y trouve n'est pas ce qui est attendu** [A. Magen, 2001]. (C'est Alain Magen qui souligne.)

à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique » [M. Mauss, 1950].

En conséquence une lecture attentive du sujet permet à l'élève habile de décoder et donc de choisir les techniques [Y. Chevallard, 1985], la variable et la stratégie attendues, fautes desquelles il pourrait bien se trouver démuni.

3.2.1.2 Panorama général

Point de vue historique

Sans entrer dans un long développement[104], mentionnons qu'après la découverte des logarithmes par une approche cinématique, leur reconnaissance mathématique découle du fait qu'ils sont une réponse aux calculs longs et difficiles en astronomie. Les calculs de multiplication ou de division sont remplacés par deux correspondances dans une table et une addition. C'est au début du XVII° siècle que John Napier publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, où il donne des tables de correspondances. Nous pouvons donc dire que la propriété énoncée dans la ROC est à la base du concept de logarithme. Cette naissance, si elle ne dépend pas des exponentielles, est cependant liée à la suite des puissances d'un nombre et à celle de ses exposants. En effet la suite q, q^2,…, q^n peut être mise en relation avec 1, 2,…, n. Nous retrouvons alors la propriété qui fonde notre exercice : un produit $q^p q^r$ est en relation avec $p+r$ grâce à la propriété des puissances.

Point de vue institutionnel (évolution des programmes)

Dans les programmes antérieurs à 2002 les logarithmes introduisent les nouvelles fonctions de terminale. Elles sont donc vues comme fondement de la fonction exponentielle. Dans le programme de 1971, par exemple :

« La fonction logarithme népérien est définie sur IR^{*+} par $\mathrm{Log}\, x = \int_1^x \frac{dt}{t}$; la fonction exponentielle sera obtenue comme réciproque de la fonction logarithme népérien. On justifiera les règles de calcul et l'isomorphisme ainsi établi entre le groupe additif (IR^{*+},+) et le groupe multiplicatif (IR^{*+},×) »[105].

[104] Nous invitons le lecteur à se reporter à E. Barbin & alii (2006), *Histoires de logarithmes*, Ellipses, Paris.

[105] Mathématiques, classes de second cycle, Ministère de l'Education Nationale, Horaires, Programmes, Instructions, INRDP, Fabrègue, 4è trimestre 1971.

Cette introduction est conservée dans les années 1980.

Le programme des années 1990 n'impose plus le mode d'introduction des fonctions *ln* et *exp* : *« L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. En revanche, les propriétés des fonctions ln et exp feront l'objet de démonstrations*[106] *».*

Le programme de 2002 marque une rupture avec les précédents pour l'introduction de la fonction *ln*. La fonction *exp* est introduite le plus tôt possible avant celle de logarithme. Elle doit occuper une place centrale. La fonction logarithme népérien n'est plus la première fonction « transcendante » étudiée en classe de terminale. Elle perd ainsi sa place dans la progression au profit de la fonction exponentielle.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien ; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.	On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$.	Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire : – soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; – soit poser le problème des fonctions dérivables sur IR+* telles que $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence de primitives pour la fonction : $x \mapsto 1/x$; – soit traiter le logarithme après l'intégration.

Document 43 [107] **: Étude des fonctions logarithmes et exponentielles**

Ce programme (voir document 43) propose trois introductions au logarithme. Le professeur, habitué aux programmes antérieurs à 2002 aura tendance, par habitude, à privilégier la troi-

[106] BO du 13 juin 1997, p18

[107] Extrait du Cédérom mathématiques 2002, accompagnement des programmes, Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, Ministère jeunesse éducation recherche, imprimerie nationale, juillet 2002.

sième approche. En revanche, pour l'élève dont l'enseignant aura choisi une des deux premières approches, cette ROC peut constituer une démonstration nouvelle. (Un entretien avec un des professeurs interrogés corrobore cette possibilité.)

Point de vue des pratiques de l'oral du baccalauréat

Dans les années 1980, les professeurs utilisaient les contenus mathématiques de cette ROC dans l'oral du baccalauréat, pour sélectionner les candidats. Ce sujet était alors, dans la pratique, reconnu comme étant difficile. Dans la décennie 90, le professeur choisit souvent le mode de fonctionnement induit par cette ROC pour introduire la fonction *ln*. Il procède en définissant *ln* par la primitive définie sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Après une étude succincte de la fonction *ln*, il est amené à en déduire la propriété « fondamentale » :

- soit par une question : « Soit a un réel strictement positif et soit la fonction g définie par $g(x) = ln(ax)$ pour $x > 0$; montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$. En déduire que $ln(ax) = ln(x)+ln(a)$ pour tout $x > 0$ » ;
- soit en la démontrant directement dans son cours.

Point de vue mathématique

Les relations fonctionnelles restent un sujet délicat en mathématiques. Cependant, classiquement, celles présentes dans le curriculum du professeur (certifié, agrégé) de lycée sont au nombre de quatre, avec des hypothèses de régularité sur la fonction inconnue adaptées au niveau de formation :

– équation fonctionnelle des fonctions linéaires de la variable réelle : $f(x+y) = f(x)+f(y)$,
– équation fonctionnelle des fonctions logarithmes : $f(x\,y) = f(x)+f(y)$,
– équation fonctionnelle des fonctions exponentielles : $f(x+y) = f(x)f(y)$,
– équation fonctionnelle des fonctions puissances : $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$.

La résolution des trois dernières peut, par exemple, s'obtenir à partir de la résolution de la première, la plus élémentaire. Dans l'expérience des formateurs de l'IUFM de Guadeloupe, cela reste un sujet d'oral 1 assez difficile pour les étudiants préparant le CAPES. Au niveau des programmes du secondaire, l'élève apprend (ou démontre partiellement) que les fonctions précitées vérifient l'équation fonctionnelle correspondante. C'est ce qui est demandé dans la ROC étudiée. Dans son cursus, il peut cependant être amené à résoudre ces équations fonctionnelles avec des hypothèses de régularité fortes.

3.2.1.3 Méthodes de résolution

Nous allons rédiger quelques réponses possibles à cette ROC en les appelant méthode dans le sens ordinaire de ce mot. Nous ne choisissons pas la rédaction la plus économique possible pour expliciter quelques éléments protomathématiques ou paramathématiques et par voie de conséquence, pouvoir construire effectivement le site mathématique.

Première méthode

Les prérequis peuvent faire penser à la définition de ln à partir de l'intégrale :

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

Nous avons donc à démontrer que, pour tous réels strictement positifs *a* et *x*,

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^{a} \frac{1}{t} dt + \int_1^{x} \frac{1}{t} dt .$$

En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons :

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^{a} \frac{1}{t} dt + \int_a^{ax} \frac{1}{t} dt .$$

Ainsi, nous devons montrer que $\int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt$. Pour démontrer cette égalité, il faut effectuer un changement de variable affine $u = at$. Rappelons le théorème : « Soit une fonction *f* continue sur un intervalle *I* contenant $ma+p$ et $mb+p$ (m, p, a, b réels, $m \neq 0$) alors $\int_a^b f(mt+p)dt = \frac{1}{m}\int_{ma+p}^{mb+p} f(u)du$ »[108]. Or

$$\int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{a}\int_a^{ax} \frac{1}{\frac{1}{a}t} dt .$$

Soit alors f : $]0 ;+\infty[\rightarrow$ IR définie par $f(t)=\frac{1}{at}$. La fonction *f* est continue sur $]0,+\infty[$**,** ainsi nous pouvons appliquer le théorème rappelé ci-dessus. Donc

$$a\int_a^{ax} f(\frac{1}{a}t))dt = a \times \frac{1}{a}\int_1^{x} \frac{1}{u} du = \int_1^{x} \frac{1}{u} du.$$

108 L'importance de ce résultat est souvent soulignée. Bien que hors programme, ce résultat est présent dans certains ouvrages destinés aux terminales scientifiques : « *Nous aimerions que ce cours puisse rester l'ouvrage de référence du bachelier scientifique* » [Warusfel et alii, 2002].

Deuxième méthode

Nous utilisons la fonction exponentielle, fonction qui dans la programmation usuelle de la classe se situe avant la fonction *ln*. Nous remarquons qu'un professeur peut avoir choisi d'utiliser cette méthode en cours pour démontrer cette propriété du logarithme en suivant les directives prescrites par l'institution nous avons alors une « question de cours ». En utilisant la propriété « $\forall x \in \mathrm{IR}^{*+}$, $exp(ln(x)) = x$ » nous obtenons $exp(ln(ax)) = ax$. D'autre part, nous avons $exp(ln(a)+ln(x)) = exp(ln(a))\times exp(ln(x)) = ax$. Ainsi $exp(ln(ax)) = exp(ln(a)+ln(x))$. Or la fonction *exp* est une bijection de IR dans $]0;+\infty[$ donc $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$.

Troisième méthode

Nous utilisons l'indication de l'auteur, qui a mis intentionnellement les parenthèses dans le sujet $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$. Cette méthode a pour base l'équivalence entre la relation fonctionnelle et la constance (ou la nullité) d'une certaine fonction. Elle repose ainsi sur le choix d'une fonction constante à partir de la relation fonctionnelle. Pour déterminer la fonction nous procédons par équivalence à partir de la relation fonctionnelle. Un premier choix consiste à écrire que, pour tous réels strictement positifs a et x, la proposition $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ est équivalente $ln(ax)-ln(a)-ln(x) = 0$. Nous obtenons ainsi une première fonction $f(x) = ln(ax)-ln(a)-ln(x)$ dont on doit montrer qu'elle est identiquement nulle. On peut procéder en trois étapes :

- f est la somme de fonctions dérivables (d'après le prérequis). Elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 0$, d'après la propriété de dérivation d'une fonction composée ; ainsi f est une fonction constante i.e. il existe un nombre réel c tel que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x) = c$;
- on a $f(1) = 0$ (prérequis) ;
- donc la constante c est nulle et f est nulle.

On peut aussi remplacer l'égalité $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ par $ln(ax)-ln(x) = ln(a)$ et cela nous indique une deuxième fonction possible : soit g la fonction définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = ln(ax)-ln(x)$. On a $g'(x) = 0$, comme pour f ci-dessus. Ainsi, g est constante sur $]0;+\infty[$, égale à c. Puis $g(1) = ln(a)+ln(1)$. Comme, d'après le prérequis $ln(1) = 0$, on a

$g(1) = ln(a)$. Donc la constante c vaut $ln(a)$. D'où, pour tous x et a réels strictement positifs, $ln(ax)-ln(x) = g(x) = ln(a)$. C'est à dire $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ [109].

3.2.1.4 Ecologie didactique : construction du site mathématique de la ROC

Nous rejetons la première méthode de résolution par manque de connaissances de la part des élèves au niveau d'étude considéré[110] et la deuxième pour rupture de contrat d'évaluation du concept ROC. En conséquence, nous limiterons notre analyse à la dernière méthode et à sa variante.

Le substrat de cette ROC, déjà présenté pour l'essentiel à partir de la première lecture du sujet, relève du champ de la logique (égalité, équivalence, quantificateurs), des codages usuels mentionnés (notation d'une fonction et usage de l'alphabet en mathématiques), qui suggèrent une stratégie de démonstration. L'égalité « pour tous réels strictement positifs a et x, $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ » fait intervenir deux objets différents. L'un étant une propriété de la fonction ln, objet spécifique, l'autre celui des relations fonctionnelles, objet plus général, champ d'investigation en mathématiques. Nous remarquons que la relation « pour tous réels strictement positifs x et y, $ln(xy) = ln(x)+ln(y)$ » a été remplacée par celle rappelée ci-dessus. Comme nous l'avons déjà écrit plus haut, cette figure rhétorique est un indice pour le résolveur. Cette modification de l'énoncé de la propriété de la fonction ln ou de la relation fonctionnelle permet de passer de deux variables à une variable et une constante. Elle indique que la clef du problème réside dans l'étude d'une fonction. Cela met en évidence de nouveaux objets, la somme et la composée de fonctions. En rappelant que la fonction ln est dérivable, le prérequis indique un autre objet, la dérivation, outil central de l'analyse fonctionnelle. Enfin la notion d'intervalle et les nombres réels sont les derniers objets. Ils sont plus difficiles à voir car ils ne sont pas très présents dans le sujet (une seule fois chacun). Pourtant ces objets sont

---

[109] Une variante de cette troisième méthode, consiste à utiliser explicitement le concept de primitive. On définit la fonctions h par $h(x) = ln(ax)$. La fonction h est composée de fonctions dérivables (prérequis) est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $h'(x) = a/(ax) = 1/x$. La fonction h est donc une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto 1/x$, comme la fonction ln (prérequis). Ces deux fonctions diffèrent d'une constante. Or, pour $x = 1$, on a $h(1) = ln(a)$ donc $h(x) = ln(x)+ln(a)$.

[110] L'intégration par changement de variable reste hors programme de terminale scientifique.

fondamentaux dans la justification de la technique. Les nombres présents dans cette ROC sont soit des constantes spécifiées (1 par exemple), soit des constantes quelconques positives (a par exemple), soit des variables (x par exemple). Nous notons que certains de ces objets sont issus du cycle terminal, donc des objets récents pour le résolveur [C. Castela, 2008].

La dernière méthode fait appel à la même technique principale, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée (caractérisation FCD). Nous pouvons l'énoncer ainsi : « soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. La fonction f est constante sur I si, et seulement si, f est dérivable et f' est la fonction nulle sur I ». Pour atteindre cette technique, cette méthode passe par la mise en relation de plusieurs des objets : dérivabilité, dérivation de somme et de composée de fonctions. Les propriétés algébriques des fonctions dérivables (dérivabilité de la somme de fonctions dérivables, d'une fonction composée et calcul de ses dérivées) sont ainsi les principales justifications des hypothèses de la technique principal. Remarquons que la justification principale de cette technique est un théorème admis. En effet, le fait que « toute fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle non réduit à un point est constante », n'est pas justifiable en 1$^{\text{ère}}$ S depuis le changement de programme 2002. En terminale elle n'est pas, à notre connaissance, enseignée depuis la disparition du théorème des accroissements finis (programme 1991).

Dans le but de rendre le site plus exhaustif, la recherche d'une démonstration possible en terminale S, qui contournerait les propriétés d'accroissements finis [A. Delcroix & C. Silvy, 2009], nous a conduits à un exercice illustrant le cours de première année d'un professeur de classe préparatoire (développé au chapitre 4). Cette démonstration utilise un principe de dichotomie, équivalent à la propriété des segments emboîtés (axiome de Cantor).

D'autres démonstrations de la caractérisation FCD utilisent le principe de Lagrange (liant le sens de variation au signe de la dérivée) ou diverses variantes de l'inégalité des accroissements finis dont les démonstrations reposent notamment sur l'axiome de la borne supérieure ou sur la propriété de Bolzano-Weierstrass. Enfin, dans la programmation actuelle des programmes du supérieur, la caractérisation FCD se situe après les fonctions continues, au moment de l'étude des fonctions dérivables, comme corollaire de l'égalité des accroissements finis. Ce théorème est équivalent au théorème de Rolle dont la démonstration repose sur les propriétés des images compactes de segment par des fonctions continues, *in fine* conséquence des propriétés du corps des réels. Ainsi, toutes les démonstrations de la caractérisation FCD ont pour concept associé une des propriétés du corps des réels relevées ci-dessus, qui forment ainsi des *concepts 3* de la technique principale de cette ROC[111].

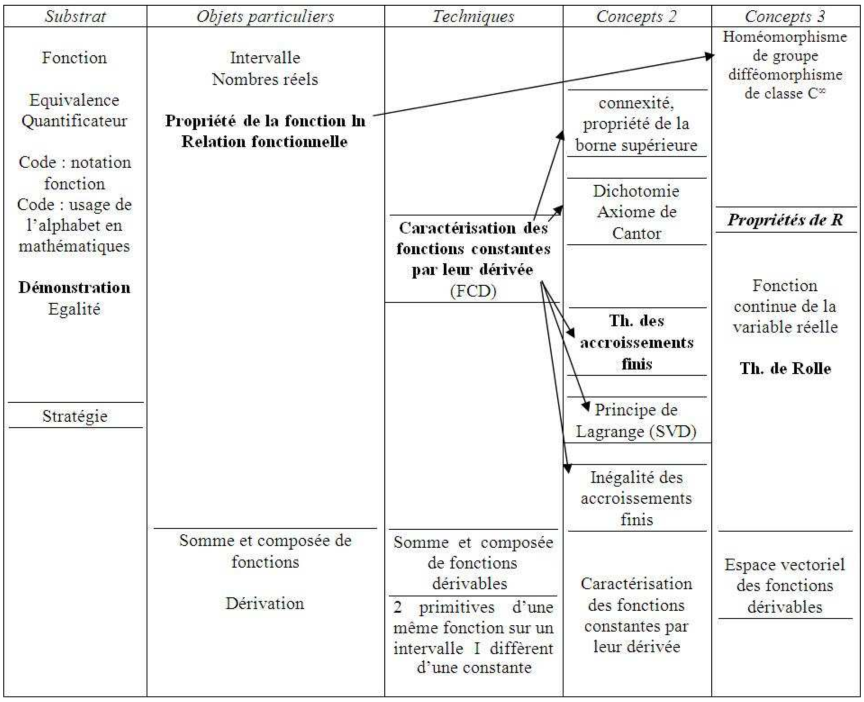
Remarque

Dans les programmes du secondaire précédant les années 1960, l'habitat de la notion de dérivée n'était pas le même : il était placé entre l'étude des variations des fonctions dites aujourd'hui de référence (monôme de degré au plus trois, fonction racine et homographique) et la notion de mouvement. En effet, la justification des variations des fonctions de référence ne nécessite pas l'utilisation du concept de dérivée.

Site mathématique local de la ROC

Nous présentons le tableau de synthèse du site mathématique de cette ROC(document 44). Seuls les éléments principaux ont été représentés dans un souci de clarté. Les flèches indiquent les liens d'« inclusion » dans la justification, « *à interpréter à peu près comme " pertinent pour"* » [P. Duchet & A. Erdogan, 2006]. Les éventuelles flèches joignant des concepts d'une même colonne n'ont pas été marquées. Les mots en gras sont les éléments du substrat, des objets, technique, concepts attendus par l'institution.

[111] La méthode proposée dans la note précédente est une variante de la troisième méthode basée sur la notion de primitive. La technique principale est remplacée par l'assertion suivante : « deux primitives d'une même fonction sur un intervalle *I* diffèrent d'une constante ». En effet, par définition, deux primitives *F* et *G* ont même dérivée. La fonction *F-G* a alors pour dérivée la fonction nulle. En appliquant la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée, on obtient le résultat voulu. Dans cette méthode, la technique principale s'appuie donc sur la caractérisation FCD, qui en devient la technologie.



Document 44. Le site mathématique local de la ROC

Nous invitons le lecteur, qui désire « fouiller » davantage le site, à se reporter à C. Silvy & A. Delcroix, (2009) ainsi qu'A. Delcroix & C. Silvy, (2009) et au chapitre 4.

Remarque

Au niveau d'analyse considéré, nous avons choisi de ne pas reprendre dans les concepts une part du substrat, par souci de lisibilité. Mais nous restons conscients que, par exemple, le vocabulaire de la logique présenté ici comme « substrat » pourrait devenir concept dans une analyse plus fine qui viserait les méthodes de démonstration en la situant dans la théorie formelle des propositions.

3.2.1.5 Discussion : la ROC et les pratiques

La construction du site mathématique d'un exercice induit un questionnement sur son écosystème mathématique, didactique et pédagogique. C'est essentiellement sur ces deux derniers aspects que porte notre discussion.

La ROC et l'enseignement des habiletés

Nous avons montré plus haut que le terme « organisée » de cette restitution possède deux niveaux, l'un mathématique, l'autre constituant « une mise en scène » du texte de l'énoncé. Le premier niveau montre l'importance de cette ROC au niveau mathématique, au centre des propriétés des fonctions de la variable réelle, dont elle exige une bonne maîtrise. Le deuxième niveau est destiné à aider les élèves : il évoque des habiletés mathématiques pour reconnaître l'usage du *a* et du *x*, de la notation *ln*(*x*) ainsi que des autres notions protomathématiques et paramathématiques de l'énoncé. L'évaluation porte donc à la fois sur « la solidité des savoirs » :

> *« Une partie de restitution organisée des connaissances qui permet d'évaluer la solidité des savoirs scientifique »*[112]

et sur les habiletés mathématiques du candidat. Nous nous questionnons sur l'enseignement de ces habiletés. Se fait-il par l'exemple, par ostension ? Ou bien, ces habiletés sont-elles non enseignées ? Sans être en mesure d'apporter une réponse exhaustive en l'état actuel de nos travaux, nous pouvons apporter les éléments suivants à partir de l'enquête effectuée en 2007[113]. Les habiletés relevant du substrat paramathématique du site ne font pas toutes l'objet d'une prise en charge particulière dans le panel d'enseignants interrogés : si la prise en compte de recommandations institutionnelles est effectuée (par exemple celles concernant les notations fonctionnelles), la ROC n'introduit pas en elle-même de rupture à ce niveau. En revanche, les stratégies sont mises en valeur. Plutôt qu'enseigner la démonstration en elle-même, 30% des enseignants insistent sur l'enseignement des « astuces », des ruses. Ils font référence explicitement dans la ROC étudiée au fait qu'il faut se ramener à l'étude d'une fonction, qui est le point de départ de la troisième méthode, celle attendue. D'après notre étude, cet objet était très présent dans la partie : « problème », des sujets de baccalauréat d'avant 2002. Dans cette partie « problème », la place des mathématiques était réduite, le travail se réduisant à un ensemble de tâches automatisées : des routines. Aujourd'hui les professeurs désignent l'astuce en pensant rendre routinier la résolution de cette ROC. Ainsi enseigner l'habileté, prise ici dans le sens de *mètis*, la ruse de l'intelligence [M. Détienne & J.P. Vernant, 1974], semble faire partie, pour les enseignants interrogés, du contrat imposé par la ROC. Du point de vue des élèves, un enseignement qui lève les implicites de certaines habile-

---

[112] Rapport-n°2007-090 Novembre 2007, inspection générale de l'administration, l'éducation nationale et de la recherche : La série scientifique au cycle terminal du lycée : articulation avec le cycle de détermination et orientation vers les études supérieures.

[113] Pour davantage d'informations nous invitons le lecteur à lire le paragraphe 2.4.3 : l'enquête.

tés permet de ne plus penser l'acronyme ROC au sens de « dur comme du rocher » mais au sens de « ROC, cœur du raisonnement ».

Les autres caractéristiques de cette ROC : les pratiques élèves

Le nouveau contrat d'évaluation engendré par le prérequis est une des caractéristiques de cette ROC. Ce prérequis permet au résolveur d'être dans les conditions d'une certaine pratique cartésienne. Les enseignants le prennent en compte sinon dans la résolution de ROC du moins dans les activités liées aux démonstrations : soit au début de la construction d'une démonstration (professeur 6):

31. « *J'ai annoncé le plan de la démonstration, les étapes parce que ce qui est important c'est de structurer la démonstration, qu'elle prenne du sens aux yeux des élèves* »,

soit à la fin (professeur 2):

40. « *Quand on a fait la démonstration, on cherche les points clefs ; on revoit le cheminement* ».

Dans les ROC, cette pratique cartésienne est obtenue par reconstruction, soit par *oubli des souvenirs*, soit par réorganisation *des savoirs connus de l'élève autour de ce problème*. C'est bien une méthode qu'on peut rapprocher de celle de Descartes :

> *« Le rapprochement entre les deux textes de Descartes montre que la réorganisation des connaissances qu'il mène selon la méthode, lui permet de produire des réponses - inconnues jusqu'alors - aux problèmes mathématiques qu'il se pose : la méthode cartésienne décrit <u>la manière de s'enseigner soi-même</u> ce que l'on ignore, <u>dès lors que l'on peut comprendre son ignorance dans le cadre de pensée des savoirs existants, réorganisé à cet effet</u>. » [A. Mercier, 2001].*

En outre, dernière caractéristique, la ROC peut permettre un certain dépaysement du programme par une autre entrée, comme en témoigne une enseignante (professeur 5) :

48. « *C'est vrai que j'ai traité les plus difficiles à mon sens au début. Celles qui tournaient autour du logarithme où, <u>finalement, il y a une multitude de points d'entrée</u>[114]. »*

L'enseignante interrogée ne dégage pas encore explicitement le site mathématique de la ROC étudiée : Mais de manière implicite, elle est amenée à en utiliser les éléments. Ceci motive,

48. [114] *C'est nous qui soulignons*

pour nous, une autre phase de ce travail, dans laquelle la construction du site mathématique serait au cœur de l'activité[115].

Les ROC et l'évolution des pratiques enseignantes: l'enseignement de la démonstration

La ROC induit une modification des pratiques en introduisant obligatoirement davantage de démonstrations dans le cours du professeur. C'est le cas pour l'ensemble des enseignants interrogés ayant en charge une classe de terminale. Ils se positionnent tous dans un rôle bipolaire de « manageur » et d'organisateur. Le professeur/manageur pose des questions incisives à la classe pour guider, éclairer ou réfuter les pistes possibles de démonstration. Le professeur/organisateur planifie le schéma de la démonstration et structure la rigueur du discours mathématiques. Cette volonté commune cache cependant des pratiques hétérogènes dans la gestion du temps concernant l'activité démonstration, dans le choix des habiletés nécessaires pour comprendre la démonstration et dans l'aide fournie aux élèves pour conserver la ou les traces génératives de la démonstration comme nous l'avons déjà mentionné dans l'analyse du paragraphe 2.4.4 (obstacles et réponses) et 2.4.5 (les résistances).

3.2.2 En analyse : autour du calcul intégral, une 2e ROC

Nous avons choisi d'étudier une ROC faisant intervenir l'intégration par parties, qui est le prototype de notion mathématique vivant dans le cycle terminal et dans le premier cycle du supérieur (document 45). Dans ces deux cycles d'enseignement, son habitat se situe dans l'analyse réelle dans la partie calcul intégral. Dans le supérieur, sa niche est occupée par la formule de Taylor avec reste intégral et par le calcul d'intégrale. Mais ultérieurement, l'intégration par parties peut être généralisée sur des espaces de Banach E, F et G au cas d'applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G, en particulier aux fonctions de la variable complexe. Elle se généralise à des espaces plus pauvres : les distributions. Sa niche dans l'écosystème du secondaire reste le calcul d'intégrale, pour laquelle elle reste incontournable.

---

[115] Ce travail sera notamment mené avec les étudiants et stagiaires (ou les futurs étudiants de master) de l'IUFM de Guadeloupe. Pour les étudiants préparant les concours (ou pour les futurs étudiants de première année de master), il s'agira d'étudier si la construction du site local d'une notion leur permet de mieux appréhender sa place dans le curriculum et dans l'univers mathématique, pour construire leur argumentation pour les épreuves orales et se placer en situation d'enseignant. Pour les stagiaires (ou bien les futurs étudiants de seconde année de master), l'accent sera mis sur l'intervention du site pour la construction de séquences en classe.

Au-delà d'une présentation du site de cette ROC et d'une discussion sur les techniques révélées par ce site, notre analyse sera centrée sur l'analyse du cours concernant cette ROC dans différents manuels, notamment pour vérifier que la rigueur (au sens présenté dans la première partie) dans leur approche de l'objet intégration par parties correspondrait à celle pouvant être attendue par l'institution dans la résolution d'une ROC sur ce sujet. (Bien que l'institution elle-même soit prudente, comme nous l'avons vu sur le niveau exigible en analyse.)

EXERCICE N2 (3 points)

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle *[a ; b]*.

Document 45. Enoncé de la ROC, baccalauréat série S, 2007, France métropolitaine

3.2.2.1 Remarques introductives

Dans les précédents programmes (1994 &1997) l'utilisation de l'intégration par parties doit être convoquée par une indication ainsi :

> *« Dans les cas du calcul intégral toute intégration par parties doit faire l'objet d'une indication »*[116].

Ainsi sa place fonctionnelle était une application directe. Dans le programme de 2002, la présence d'une indication concernant l'usage de l'intégration par parties comme technique de résolution n'est pas imposée. Le résolveur doit comprendre, par l'analyse de la situation, que cette technique est utile pour établir la solution. Notons que, dans le programme, le terme « formule » n'est pas employée bien que le concept « formule mathématique » soit réentré dans le langage courant avec l'usage de logiciels de type tableur ou traitement de texte.

Dans les journées inter académiques à Créteil en décembre 2003, dont le thème était la préparation de l'introduction des nouveaux types d'exercices au baccalauréat S, une question de cours axée sur le même sujet avait été proposée avec la même appellation de « formule » (Document 46).

[116] Bulletin officiel n°4, 12 juin 1997, p44.

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et telles que leur dérivées soient continues sur I. On considère deux réels α et β de I. Démontrer la formule d'intégration par parties vue en cours, qui permet de calculer $\int_{\alpha}^{\beta} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Document 46. Énoncé proposé aux les journées inter académiques à Créteil

Cet exercice rappelle explicitement un des membres de la formule, le résolveur dispose ainsi d'un « os de Cuvier » qui lui permet facilement de reconstituer la formule. Mais elle comporte aussi un très gros défaut : confondre le but, le calcul effectif d'intégrale sous différentes formes. En effet l'intégration par parties ne permet pas de calculer $\int_{\alpha}^{\beta} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ mais seulement d'exprimer sous une autre forme où elle sera plus facile à calculer.

L'analyse réalisée par C. Combelles (2007)[117] sur l'exercice 2 du sujet de bac S contenant la ROC étudiée, pointe l'unique finesse présente dans cette restitution. Cette finesse convoque des habiletés mathématiques. Mais ces habiletés sont peu valorisées dans la notation. De plus l'abus de notation n'est pas sanctionné ainsi, l'auteur juge l'exercice fort simple :

> *« L'exercice était fort simple, dont la mesure où les subtilités sur les conditions de continuité ou les incorrections sur les notations n'étaient guère sanctionnées dans la notation. Il suffisait d'écrire la formule de dérivation du produit, d'intégrer les deux membres entre a et b, et, après avoir utilisé la linéarité de l'intégrale, de retrouver par soustraction la formule d'intégration par parties. <u>Cette question de cours était très abordable et a été mieux réussie que lors des épreuves des années précédentes</u>* [118]».

Remarque

Le texte ne stipule pas que a est un nombre inférieur à b. La formule reste vraie si $a > b$.

[117] Une analyse du sujet de bac S France-2007. Parlons « compétence », bulletin vert, N°473, novembre-décembre, APMEP, p802

[118] En italique dans le texte c'est nous qui soulignons.

3.2.2.2 Solution de la ROC

Posons $I = [a\ ;\ b]$. Rappelons que *f* dérivable (respectivement continue) sur *I* si *f* est dérivable (respectivement continue) sur $]a\ ;\ b[$, *f* est dérivable (respectivement continue) à droite en a et à gauche en b. Par ailleurs, si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* alors uv est dérivable sur *I* et $(uv)' = u'v + uv'$ *i.e.* pour tout *x* de *I*, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Par transposition on obtient $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$. De plus, si u et v sont dérivables sur *I*, elles sont donc continues sur *I*, ainsi u, v, u' et v' sont continues sur *I* donc $u'v, uv'$ et par conséquent $(uv)'$ sont continues sur *I*. Ces trois fonctions possèdent donc des primitives sur *I*. On peut donc intégrer l'égalité suivante vraie pour tout *x* de *I* entre a et b :

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x).$$

On a alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b ((uv)'(x) - u(x)v'(x))\, dx.$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Or une primitive de $(uv)'$est uv. Donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Remarque

La transposition peut aussi se faire après avoir intégré entre a et b l'égalité $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Cette manière de faire semble plus tournée vers l'utilisation première du pré requis.

3.2.2.3 Le site commenté de la ROC

La stratégie de réponse pour cette ROC est l'utilisation d'une transposition sur une égalité fonctionnelle. Le terme transposition est un terme d'algèbre : opération qu'on fait en transposant, dans une équation, un terme d'un membre dans un autre[119]. Ce terme est la construction d'un terme manquant, d'une « fracture », sens contraire de l'opération d'al-jabr d'Al-Khwarizmi[120] :

> *« L'opération al-jabr (qui veut dire complément ou remplissage), et qui consiste à se débarrasser des termes à soustraire, dans un membre, par addition de deux termes égaux » [A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer 1986]*

Au sens commun « c'est faire passer un terme précédé d'un signe – dans l'autre membre pour qu'il ne résulte que des termes précédés d'un signe + » Exemple : $x^2 = 40x - 3x^2$ est transformé, par al-jabr, en $x^2 + 4x^2 = 40x$, puis $5x^2 = 40x$. L'équivalence des égalités ainsi obtenues est du domaine des choses, car cette opération ne reçoit jamais son nom; dans l'institution conventionnellement « on change de membre » ce qui est un « simple faire », pas une technique. Cette transposition se place dans le substrat (document 47)

Une des techniques principales convoquée par cette ROC vient du théorème : « toute fonction continue sur un segment admet une primitive », qui n'est pas disponible. Son préalable, l'intégrabilité des fonctions continues, est rejeté dans l'écosystème de l'enseignement supérieur. Pour ce dernier résultat, une des méthodes possibles est d'utiliser le théorème de Heine qui stipule que f est uniformément continue sur I, puisque I est compact. Ce qui permet, par exemple, de démontrer que les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues sur I. D'après une définition possible de l'intégrale, $\int_a^b f(t)dt$ existe alors. Avec le théorème des valeurs intermédiaires on démontre à partir des inégalités de la moyenne, le théorème suivant : si f est continue sur I, il existe un c de I tel que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\, f(c)$. Cette formule permet de démontrer que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur I est de classe C^1 et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

---

[119] Dictionnaire en ligne XMLittré transpoosition v1.3, http://francois.gannaz.free.fr/Littre/xmlittre.php?requete=t2678

[120] : Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture ». [Vu in http://fr.wikipedia.org/wiki/Abr%C3%A9g%C3%A9_du_calcul_par_la_restauration_et_la_comparaison Robert de Chester (1997): Algèbre d'Al-Khwarismi. Traductions et commentaires (depuis le latin) de Jean-Pierre Levet. 4 fascicules. Cahiers d'histoire des mathématiques et d'épistémologie, IREM de Poitiers], sa transcription en latin a donné algebra puis algèbre.

Substrat : choses	Objets	Techniques	Concepts (2)	Concepts (3)
Equivalence Quantificateur Formules Dérivée/continuité à droite et à gauche Démonstration Stratégie Egalité Transposition d'une égalité fonctionnelle Ou transposition d'une égalité	Intervalle Produit de fonctions Dérivation Fonction dérivable Formule de dérivée d'un produit Dérivée continue Continue Intégrale	opérations sur les fonctions continues Toute fonction continue admet une primitive Intégration d'une égalité Linéarité de l'intégrale	Algèbre des fonctions de continues et de classe C^1 Espace vectoriel des fonctions intégrables f continue sur I, F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur I pour tout x de I et alors F'(x)=f(x). Forme linéaire : $C(I) \to IR$ $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$	R Analyse réelle Intégrale de Riemann Classes de fonctions intégrables

Document 47. Site de la ROC, baccalauréat, série S, 2007

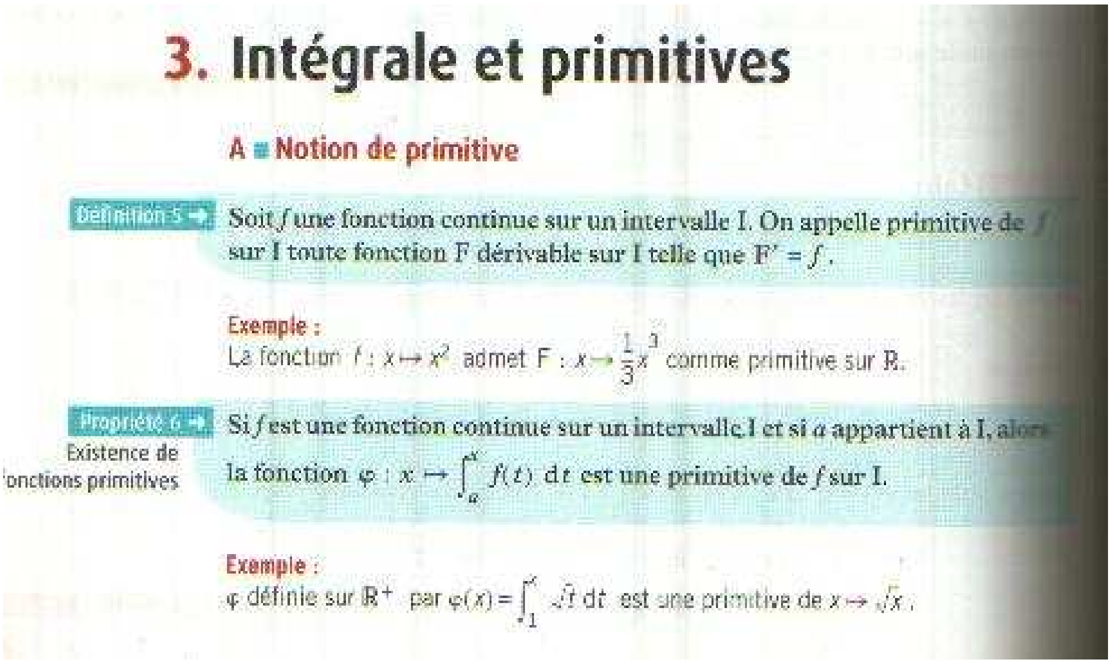
Ainsi, nous avons évoqué une des techniques possibles pour démontrer l'existence de primitives de fonctions continues en approchant ces fonctions par des fonctions en escalier.
Mais on conviendra avec C. Combelles (2007) que la solution proposée reste hors d'atteinte de beaucoup d'élèves de Terminale S. Il nous faut donc chercher d'autres solutions, le site montrant que la première qui nous vient, s'appuyant sur des techniques hors de l'horizon des élèves, n'est pas viable.

3.2.2.4 Discussion : analyse de manuels

Un des intérêts du site est de vérifier les cohérences d'un discours en particulier ici, l'organisation et la rigueur d'une démonstration. En effet, les différentes composantes du site indiqués en gras doivent être utilisées, seul l'ordre peut pour partie être changé. Nous allons analyser dans quelques manuels comment sont introduits les éléments (objets, techniques, concepts) activés par la démonstration de la formule d'intégration par parties

3.2.2.4.1 *Manuel Collection Math'x (2006) Terminale S obligatoire*[121]

La notion d'intégrale est définie pour les fonctions continues sur un intervalle dans le respect du programme avant la mise au point du document d'application de décembre 2005.
Dans le programme de terminale S, au chapitre intégration, il existe un décalage entre les paragraphes de deux colonnes adjacentes qui peut permettre une lecture où les primitives ne sont définies que pour des fonctions continues[122].


3. Intégrale et primitives

A ■ Notion de primitive

Définition 5 → Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple :
La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ comme primitive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 6 → Existence de fonctions primitives
Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a appartient à I, alors la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est une primitive de f sur I.

Exemple :
φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt{t}\, dt$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Document 48. Manuel Collection Math'x, Terminale S obligatoire, 2006, notion de primitives, p.192

La définition donnée de primitive (document 48) n'est pas dans les usages de la profession. En effet par respect du formalisme, la définition d'un concept est souvent choisie la plus proche possible de celle donnée dans les mathématiques savantes :

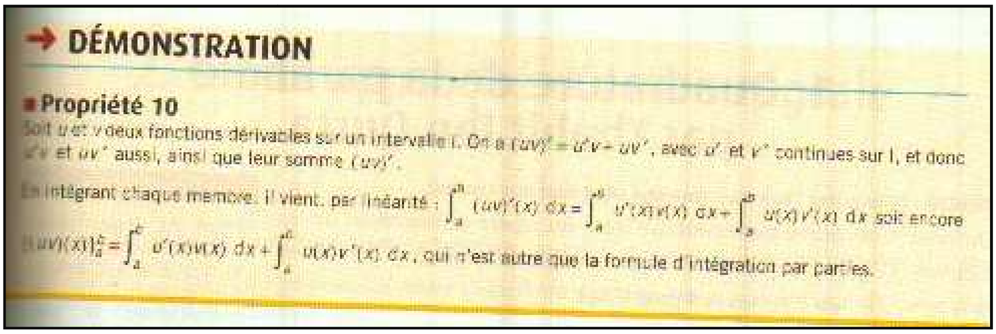
---

[121] Programme A. Carême, B. Chareyre, N.Cleirec, H Gastin, D. Guillemet, M.H. Le Yaouanq, C. Perfetta, Didier, Italie.

[122] Décalage entre les lignes au bas de la page 67.

> *« le formalisme consiste à développer pour une théorie, donc pour un outil, un cadre le plus conceptuel, le plus dépouillé possible » [B. Beauzamy, 2001].*

Mais dans le contexte choisi par les auteurs, les domaines de validité des primitives et des intégrales sont identiques. Cette définition n’est elle pas le fruit d’une volonté de recherche d’analogie entre le système savant et ce bloc de rationalité? Les auteurs n’ont-ils pas remplacé intégrable par continue ? Cette transposition nous parait probable. En fait le « cadre de référence » pour la définition de l’intégrale et des primitives est identique. Ainsi l’élève est dans la même position que l’étudiant qui doit vérifier l’intégrabilité d’une fonction ou l’existence d’une primitive. La confusion entre les deux domaines, d’intégrabilité et d’existence de primitive peut entraîner des difficultés didactiques au moment du passage (souvent maintenant à l’horizon du master) à l’intégrale de Lebesgue.



DÉMONSTRATION

Propriété 10

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a $(uv)' = u'v + uv'$, avec u' et v' continues sur I, et donc $u'v$ et uv' aussi, ainsi que leur somme $(uv)'$.

En intégrant chaque membre, il vient, par linéarité : $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$ soit encore $[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$, qui n’est autre que la formule d’intégration par parties.

Document 49. Manuel Collection Math’x, Terminale S obligatoire, 2006, démonstration de la propriété, p.197

Dans le paragraphe suivant du manuel : *aide au calcul intégral, une méthode d’intégration par parties* énonce la propriété visée par la ROC étudiée. Cette dénomination inhabituelle veut attirer l’attention du lecteur sur l’utilisation de l’intégration par parties : « *avant d’utiliser cette formule il convient de se demander si la substitution de uv’ par u’v dans l’intégrale facilite la recherche de primitives* ». Dans les remarques introductives nous avons déjà mentionné l’objectif d’une intégration par parties ainsi que le fait que depuis le nouveau programme l’intégration par parties n’est plus convoquée par la question. Les auteurs, conscients de cette nouvelle donne, mettent en avant pour les élèves le « déclencheur » de l’utilisation de l’intégration par parties. La démonstration figurant dans le document 49 respecte la structure formelle attendue mais pas totalement la rigueur « académique » : la continuité de *u* et de *v* n’est pas justifiée. On peut penser que les auteurs omettent cette vérification, considérée comme implicitée par l’hypothèse de dérivabilité. Cependant l’omission du contrôle de l'hypothèse dans la propriété génératrice d'une classe d'exercices pose un problème de gestion ultérieur de la rigueur.

3.2.2.4.2 *Déclic TS (2006)*[123]

La deuxième façon d'introduire les primitives est de les définir dans le contexte le plus général, ce que fait le livre « Déclic ». (Document 50)

2 Primitives

2.1. Primitive de f sur un intervalle I

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur I, si la fonction F est dérivable sur I et a pour dérivée la fonction f.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de } I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + 5x$ est une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$ car, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Document 50. Manuel Déclic Terminale S, p76

La démonstration de la propriété d'intégration par parties satisfait aux canons de la rigueur. L'argument de continuité manquant dans l'exemple précédent de manuel est ici explicité (document 51).

4 Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions **dérivables** sur un intervalle I, telles que u' et v' sont **continues** sur I. Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration

u et v étant deux fonctions dérivables sur I, le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
u et v étant dérivables sur I, elles sont continues sur I. D'autre part, u' et v' sont continues sur I par hypothèse.
Par suite, les produits $u'v$ et uv' et leur somme $(uv)'$ sont aussi continues sur I.

En calculant l'intégrale de a à b, on obtient alors $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx.$

Puis, par linéarité, $\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$

Et comme uv est une primitive de $(uv)'$ sur I, on obtient :

$$[u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

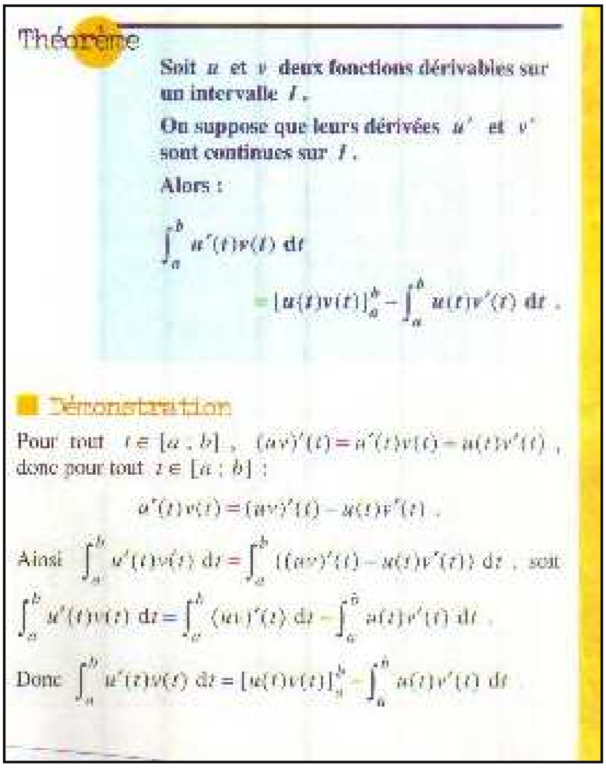
Document 51. Manuel Déclic Terminale S, p.198

[123] J.P. Beltramone, V. Brun, C Felloneau, L. Misset, C. Talamoni, Hachette Education, Italie.

3.2.2.4.3 *Maths repères 2006*[124]

Dans la partie « les questions de cours », la démonstration proposée ne respecte pas un haut niveau de rigueur : de fait, cet ouvrage ne propose qu'un calcul, on ne dit rien sur les hypothèses de sa validité. Mais dans le cas où elle serait produite par un élève dans une évaluation formative, on peut considérer qu'elle reste conforme aux attentes de l'institution[125]. La notion d'intégrabilité d'une fonction est occultée, toute fonction du programme est intégrable.

Dans le « discours démonstratif » certains auteurs ne mentionnent plus les hypothèses permettant la validation des « pas de démonstration » ou de calcul. Ils risquent ainsi de rendre difficile la « capture » par l'élève du sens du rôle de l'hypothèse dans un texte de mathématique. Si un professeur reprend l'énoncé et la démonstration de cet ouvrage, on ne peut guère espérer de l'élève une restitution avec chaque « pas de raisonnements cartésiens ».



Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

On suppose que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I.

Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt .$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$, donc pour tout $t \in [a\,;\,b]$:

$$u'(t)v(t) = (uv)'(t) - u(t)v'(t) .$$

Ainsi $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \int_a^b ((uv)'(t) - u(t)v'(t))\,dt$, soit

$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.

Donc $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.

Document 52. Manuel Maths repères, Terminale S, p.221

[124] B.Hanouch, A. Choquet-Raoult, M. Cocault, Hachette education, Italie.

[125] Nous avons indiqué dans le deuxième chapitre au paragraphe 2.2.7.1.2: « en 2005 le bac Antilles Guyane » que d'après les accompagnements des programmes « *Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schéma (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire)*»

3.2.2.4.4 *Conclusion*

La construction du site mathématique local de la ROC concernée oblige à se réinterroger sur les articulations mathématiques de son objet, l'intégration par parties. En effet cette réinterrogation des articulations nécessite une analyse fine : la connaissance précise de chaque nouvelle assertion notamment sa justification. Par ailleurs, l'outil site permet au professeur dans son travail de préparation de resituer la propriété dans son écosystème. Dans ce cas particulier, il peut permettre de s'interroger et de reconstituer les chaînons manquants de l'« ouvrage de référence » et de préparer ou de susciter les questionnements des élèves. En conséquence cette analyse montre que la rédaction de la démonstration d'une formule classique cache souvent des subtilités que la construction du site permet de lever. Le professeur, connaissant le site, pourra choisir la démonstration la plus adaptée à sa classe et à son manuel mais il n'oubliera pas la subtilité qui donne sens à l'hypothèse.

3.2.3 ROC en géométrie

Cet énoncé se classe dans les ROC de type : question de cours, possédant la forme d'un « exercice à tiroirs ». Il a une place importante dans l'évaluation classique et reste dans les habitudes des styles d'exercices posés aux baccalauréats (*cf.* 2.1.4 par les sujets du baccalauréat avant 2004). Cet exercice se résout à la manière d'un exercice d'application du cours, possédant des questions étroitement liées. (Chaque question est une application directe du cours et des questions précédentes). Cette ROC ne possède pas de prérequis : en conséquence l'élève ne possède pas cet indice pour amorcer sa solution. Cependant le concepteur du sujet choisit de mettre le vecteur $\vec{n}$ comme panneau indicateur du chemin vers la solution. Ce vecteur est *l'os de Cuvier* qui permet au résolveur de retrouver des traces pour commencer à répondre.

L'enquête effectuée en 2007[126] en Guadeloupe auprès de professeurs de terminale montre que les professeurs interrogés reconnaissent qu'ils utilisent cet exercice pour préparer le cours. Par exemple, un professeur remet aux élèves le sujet de cette ROC comme exercice à préparer à la maison pour son prochain cours (professeur 3). Selon lui, la construction de l'exercice permet à une majorité d'élèves de sa classe de répondre aux questions posées :

[126] Voir la partie 2.4.3.

13. « C. Comment as-tu fait ?
14. *P. Cette démonstration là. C'est très simple, il y a deux ans ou l'année dernière, il y a un sujet du bac qui proposait cette démonstration sous forme d'exercice. Moi j'ai repris carrément ce texte et je l'ai proposé aux élèves en exercice. (6 min)*
15. *C.* Cet exercice de l'année dernière ?
16. *P. Ce ROC était tombé en Inde l'année dernière.*
17. *C* Tu as repris la ROC et tu l'as écrite au tableau ?
18. *P. Pour cette démonstration je l'ai faite polycopier et je l'ai donnée à préparer aux élèves à la maison. Je suis revenu deux jours après et donc on a fait la correction.*
En fait c'était tellement guidé que c'était pratiquement un exercice, ils n'avaient pas vraiment besoin de l'aide du professeur pour construire la démonstration. J'ai trouvé que c'était bien et d'ailleurs à chaque fois que je peux faire comme ça, je fais comme ça. Cela fait déjà un certain nombre d'années que les ROC sont présentes dans les sujets de bac et donc je commence à constituer une banque de sujets qui proposent des ROC. Ceux qui sont vraiment accessibles aux élèves, pour qu'ils puissent le faire de façon autonome. Souvent dans ma progression, au moment où je vais avoir besoin de cette démonstration je leur propose en exercice. Et après on corrige.
19. C. Est-ce toi qui corrige au tableau ?
20. *P. Non. Quand c'est un exercice qu'ils ont eu à préparer, c'est un élève qui corrige pas forcé-ment au tableau. Des fois je fais passer un élève au tableau ou des fois je leur demande de faire des propositions de leur place…*
21. *C.* Comment cela s'est passé pour cet exercice là *?*
22. *P. Pour cette démonstration là, pour cet exercice là, on a corrigé heu avec leur proposition, de leur place. Et sur certaines questions, un élève passait au tableau.*
23. *C.* C'est toi qui écrivais ?
24. *P. J'écrivais. j'écrivais.*
25. *C.* Combien d'élèves avaient trouvé ?
26. *P. C'est difficile à évaluer dans la mesure où je n'ai pas contrôlé tous les cahiers. (9min 30) Mais en fait comme j'ai interrogé pas mal d'élèves, j'ai fait tourner la parole et j'ai eu l'impression que c'est une démonstration qui ne leur avait pas posé trop de problème, sauf pour une question : « exprimer k en fonction d'autres paramètres » où il a fallu un petit peu les aider. »*

Nous cherchons à savoir si les professeurs pouvaient préparer les élèves à l'organisation de cette ROC via le système d'équations paramétriques. Pour cela, après avoir présenté la ROC, nous étudierons au travers des manuels d'édition début 2006 les différentes organisations présentes.

3.2.3.1 Sujet (document 53)

L'espace est muni d'un repère orthonormal. $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Partie A

(Cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit *a*, *b*, *c* et *d* des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Soit *P* le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

On considère le point *I* de coordonnées (x_I, y_I, z_I) et le vecteur de coordonnées $\vec{n}$ (a, b, c).

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de *I* au plan *P* est égale à : $\frac{|ax_I+by_J+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

1 Soit Δ la droite passant par *I* et orthogonale au plan *P*.

Déterminer, en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I, un système d'équations paramétriques de la droite Δ

2 On note *H* le point d'intersection de la droite Δ et du plan *P*.

a. Justifier l'existence d'un réel *k* tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$

b. Déterminer l'expression de *k* en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I

c. En déduire que : IH = $\frac{|ax_I+by_J+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Document 53 : énoncé de la ROC, extrait du baccalauréat série S, Pondichéry & Inde, avril 2006

3.2.3.2 Remarques introductives

Dans l'usage, le « système d'équations paramétriques d'une droite » se nomme « équation paramétrique d'une droite » mais ces deux appellations demeurent. Deux démonstrations de ce résultat existent en terminale S, l'une s'appuyant sur le produit scalaire, l'autre sur les équations paramétriques.

Un résolveur habile dispose de plusieurs indices (définition du point H, dernière question) pour reconnaître que le point *H* est le projeté orthogonal de *I* sur le plan P. Cette induction implicite provient de la place réservée à la projection orthogonale dans les programmes. Dans le secondaire, la projection est une application dont les propriétés sont admises. Ainsi, par exemple, si on choisit de définir la distance de *I* au plan P comme étant *IH*, on sait que c'est la plus petite distance de I au plan P. Jusqu'en 2000, le produit vectoriel donnait une autre forme de calcul de la distance d'un point *I* à un plan P, et bien que la notion de projection ne soit plus objet d'étude depuis 1994, elle reste prégnante dans les programmes comme va le montrer le paragraphe suivant.

3.2.3.3 Analyse des programmes

Dans les programmes de terminale S (2002), l'organisation de la géométrie dans l'espace se décompose en deux volets : produit scalaire dans l'espace, droites et plans dans l'espace.
Le premier volet est consacré au produit scalaire et ses propriétés. Dans ce volet, on introduit la projection orthogonale dans l'espace et la distance d'un point à un plan. La représentation paramétrique d'une droite se trouve quant à elle dans le second volet. Il en découle que le professeur analysant le programme de terminale scientifique choisit une démonstration de la distance d'un point à un plan qui n'utilise pas le concept de représentation paramétrique d'une droite.
Les accompagnements du programme de première S (2002) mentionnent que la notion de projection orthogonale est déjà utilisée dans différentes parties sans définition préalable :
« Comme cela a pu être fait lors de la mise en place du repérage d'un point dans le plan ou dans l'espace, ou bien à propos de perspective cavalière ». En première S, on utilise le mot sans faire de développement théorique sur l'application projection. Le document d'application des série S et ES, paru en 2005, précise que la définition de la projection orthogonale dans le plan doit être introduite en première par le biais de la notion essentielle de projeté orthogonal et que « l'étude de cette application n'est ni au programme de première, ni à celui de terminale »

3.2.3.4 Cours des différents manuels

Donnons alors les deux démonstrations, telles qu'elles figurent dans certains manuels.

Première démonstration

Basée sur deux calculs d'un produit scalaire de deux vecteurs, la première démonstration utilise trois propriétés du produit scalaire. La première propriété utilisée donne l'expression du produit scalaire avec les normes quand les deux vecteurs sont liés, la deuxième est la bilinéarité du produit scalaire et la dernière donne l'expression du produit scalaire utilisant les coordonnées dans un repère orthonormal. L'organisation du manuel Indice (2002)[127], reprise en 2006[128], met d'abord l'accent sur la démonstration de la distance d'un point à une droite (document 54) dans le plan puis « étend » à l'espace en énonçant la propriété de la distance d'un point à un plan. Il ne reproduit pas la démonstration préférant rappeler dans un bandeau nommé : *technique,* que « *la démonstration est analogue à celle faite pour déterminer la distance d'un point à une droite dans un plan, en utilisant* $\vec{n}$ *tel que* $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ». Cette démonstration donne des éléments pour répondre à la question 2.

Dans l'enquête (paragraphe 2.4.2), de nombreux professeurs évoquent cette démonstration. Le professeur 6 choisit d'organiser son cours de la même façon que dans le manuel Indice, reproduisant même l'évocation de la démonstration de la distance d'un point à un plan dans l'espace sans la reproduire. Il la demande en exercice à faire pour la prochaine fois mais ne dit pas s'il compte la corriger. La correction de la démonstration semble improbable dans son contexte de classe : période de révisions. Cependant, n'ayant pas terminé le programme, le professeur enseigne des notions nouvelles à partir d'exercices de baccalauréat. Rappelons que le professeur 6 confond dans son entretien démonstration et ROC :

10. « J'ai donné la ROC de première S qu'on peut traduire en terminale S, mais je ne l'ai pas faites en terminale S, je n'aurai pas le temps par contre, je leur ai demandé d'essayer de la reproduire pour demain. »

[127] G. Mison, R. L. Gauthier, Y Guichard, G Heng, B. Lefrancois, M. Poncy, MC Ruthier, Bordas.

[128] Mêmes auteurs…

DÉMONSTRATION

Soit A un point de la droite d, et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite d.
Puisqu'une équation de d est $ax + by + c = 0$, alors un vecteur normal de d est $\vec{n}(a\,;b)$. On peut calculer $\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0}$ de deux façons différentes.

• D'une part, $\vec{n}$ étant un vecteur normal de d, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{H_0M_0}$ sont deux vecteurs colinéaires et donc :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0} = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{H_0M_0}\| \text{ ou } \vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0} = -\|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{H_0M_0}\|,$$

d'où : $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0}| = \|\vec{n}\| \times H_0M_0$ (1).

• D'autre part, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0} = \vec{n}\cdot(\overrightarrow{H_0A} + \overrightarrow{AM_0}) = \vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0A} + \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM_0} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM_0}$,
car les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{H_0A}$ sont orthogonaux.
Donc, en utilisant l'expression analytique du produit scalaire, on obtient :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM_0} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 + c,$$

car, A appartenant à d, $-ax_A - by_A = c$.
Donc $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{H_0M_0}| = |ax_0 + by_0 + c|$ (2).
D'après (1) et (2) et puisque $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$: $H_0M_0 = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple : Soit la droite d dont une équation est $4x - 3y + 3 = 0$ et $M_0(-1\,;2)$.
La distance de M_0 à d est $\dfrac{|-4-3\times 2+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{7}{5}$.

Document 54. Manuel Indice 2002, Terminale S, démonstration d'une propriété donnant la distance d'un point à un plan p.316

Deuxième démonstration de Transmath (2006)[129] et ROC associée, p326

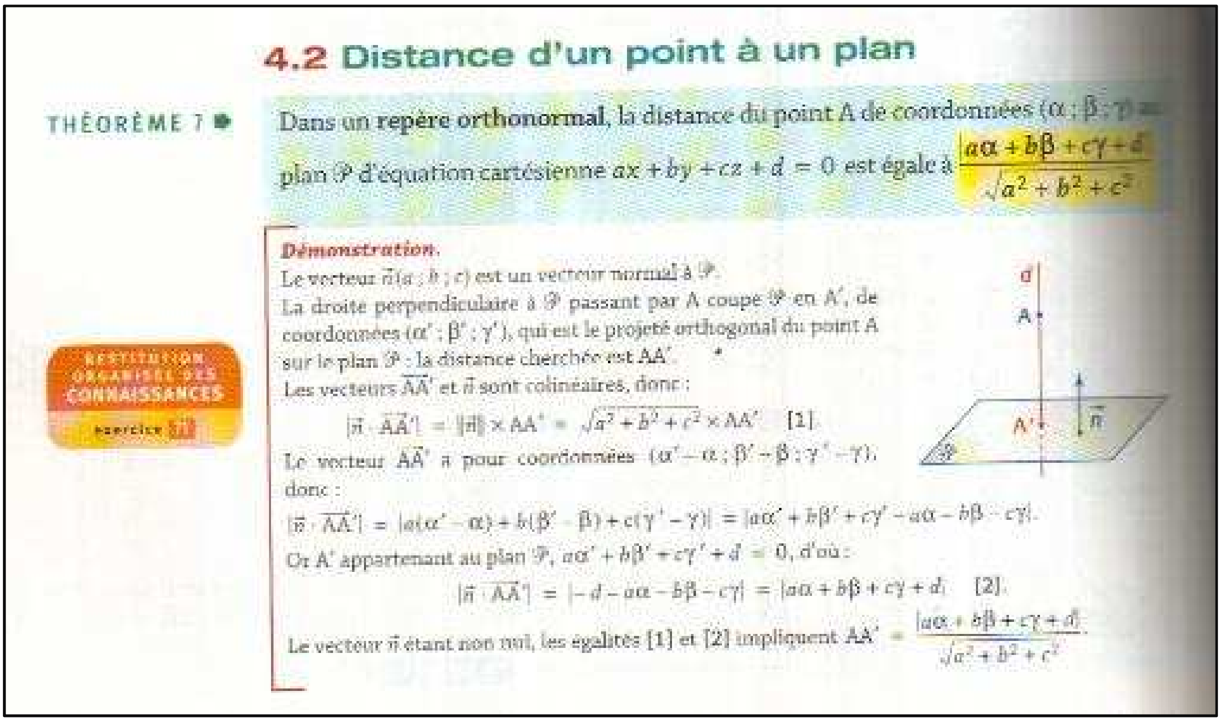
La deuxième démonstration peut s'obtenir à partir de la figure représentée sur le document 55. Cette figure peut servir d'Os de Cuvier en indiquant que les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires que le point A est un point de P. Il suffit donc d'exprimer le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes. La première manière utilise la colinéarité de ces deux vecteurs, la deuxième les coordonnées des points A et A' ainsi que le fait que les coordonnées de A' vérifie l'équation de P. L'enquête effectuée confirme cette propriété particulière de cette figure. Ainsi le professeur 4 mentionne :

24. *« Oralement. Et c'est quand il y a une nécessité de fixer par exemple il faut faire un petit graphique pour qu'il puisse voir, (5 min) comment se projette le point. Comment on a l'équation du plan. Quelle est le rôle si on passe par un autre point. Qu'est ce que l'on peut dire de la co-*

---

[129] R. Barra, J.Morin, A. Antibi (2006), *terminale S*, Nathan.

linéarité entre le vecteur projeté et le vecteur normal ? Est-il nécessaire d'utiliser le coefficient de colinéarité ou d'utiliser uniquement le produit scalaire ? »



4.2 Distance d'un point à un plan

THÉORÈME 7 Dans un **repère orthonormal**, la distance du point A de coordonnées (α ; β ; γ) au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est égale à $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES exercice 71

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

La droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A coupe $\mathcal{P}$ en A', de coordonnées (α' ; β' ; γ'), qui est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$: la distance cherchée est AA'.

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = \|\vec{n}\| \times AA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AA' \quad [1]$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées ($\alpha' - \alpha$; $\beta' - \beta$; $\gamma' - \gamma$), donc :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) + c(\gamma' - \gamma)| = |a\alpha' + b\beta' + c\gamma' - a\alpha - b\beta - c\gamma|.$$

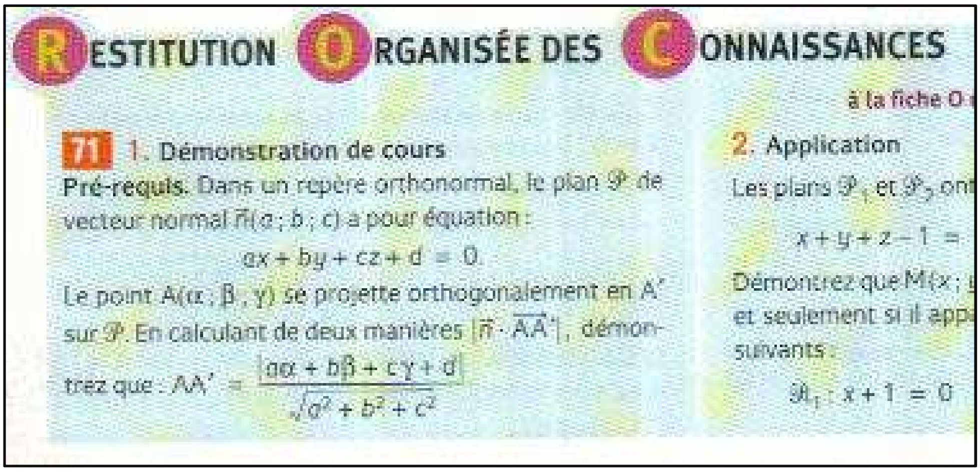
Or A' appartenant au plan $\mathcal{P}$, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d = 0$, d'où :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}| = |-d - a\alpha - b\beta - c\gamma| = |a\alpha + b\beta + c\gamma + d| \quad [2].$$

Le vecteur $\vec{n}$ étant non nul, les égalités [1] et [2] impliquent $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Document 55. Transmath, Terminale S, p.384

Nous pouvons remarquer dans le document 55 qu'une ROC est associée à cette démonstration (Document 56)



RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

à la fiche O

71 1. Démonstration de cours

Pré-requis. Dans un repère orthonormal, le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ a pour équation :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Le point A(α ; β ; γ) se projette orthogonalement en A' sur $\mathcal{P}$. En calculant de deux manières $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AA'}|$, démontrez que : $AA' = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

2. Application

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont

$x + y + z - 1 =$

Démontrez que M(x ;
et seulement si il app
suivants :

$\mathcal{R}_1 : x + 1 = 0$

Document 56. Transmath, Terminale S, p.402

Remarque

Toutes les démonstrations de cours étudiées n'utilisent pas la notion de système d'équations paramétriques tandis que dans la ROC étudiée cette notion devient le premier objet à utiliser.

3.2.3.5 Solution de la ROC

1. Une équation de P est $ax + by + cz + d = 0$ ainsi le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal à P. Or la droite Δ est orthogonale à P d'où $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ. Donc Δ passe par I(x_I, y_I, z_I) et a pour vecteur directeur $\vec{n}$(a,b,c) ainsi une représentation paramétrique de Δ est donnée par :

$$\begin{cases} x = x_I + at \\ y = y_I + bt \quad t \in R \\ z = z_I + c \end{cases}$$

2. a. H est un point de Δ donc le vecteur $\overrightarrow{IH}$ est orthogonal à P. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IH}$et $\vec{n}$ sont colinéaires. Par définition, il existe k réel tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b. Comme $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ et $\overrightarrow{IH}$ et $k\vec{n}$ sont de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_H - x_I \\ y_H - y_I \\ z_H - z_I \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{cases} x_H - x_I = ka \\ y_H - y_I = kb. \\ z_H - z_I = kc \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb. \\ z_H = z_I + kc \end{cases}$

Or H est un point de P donc ses coordonnées vérifient l'équation de P et ainsi,

$$a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0.$$

En regroupant les termes en k, il vient $ax_I + by_I + cz_I + k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$.

Or, d'après l'énoncé, on a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Donc $k = \frac{ax_I + by_I + cz_I}{a^2 + b^2 + c^2}$.

c. Comme $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$, on a $\|\overrightarrow{IH}\| = \|k\vec{n}\|$ or $\|k\vec{n}\| = |k|\|\vec{n}\| = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $\|\overrightarrow{IH}\| = IH$.

Donc

$$IH = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left|-\frac{ax_I + by_I + cz_I}{a^2 + b^2 + c^2}\right|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3.2.3.6 Construction du site mathématique local de la solution de la ROC

Dans la solution, les propriétés du produit scalaire et du vecteur normal à un plan sont utilisées. La projection est une application affine de l'espace tandis que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive dans un espace vectoriel réel ainsi les concepts (2) comportent ces deux notions.

Nous avons remarqué que des indices tels que le code de la notation d'un vecteur normal et la stratégie liée à un exercice à tiroir permettent au résolveur d'appréhender la solution, ils font assurément partie des choses appartenant au substrat (voir document 57)

Substrat : choses	Objets	Techniques	Concepts (2)
Projection orthogonale Démonstration Code : notation vecteur normal Stratégies : Exercice à tiroir	**R** Point Droite Plan Espace Repère orthonormal Vecteur Coordonnées Equation de plan Equation paramétrique de droite Distance	(**R**,+,×) corps Propriétés du produit scalaire (analytique, projection orthogonale, bilinéarité) Norme Vecteurs colinéaires Vecteur normal	(E,+,.) espace vectoriel euclidien ($\mathcal{E}$,.+,.) espace affine euclidien Applications affines Forme bilinéaire

Document 57. Site local de la réponse de la ROC

Nous avons montré que les manuels ne donnaient pas la démonstration demandée dans cette ROC. Pour savoir si les difficultés afférentes à cette ROC sont d'ordre organisationnel ou notionnel, nous recherchons les objets et les techniques présents dans les différents manuels de l'année 2006.

3.2.3.7 Etude des différents manuels

Nous allons étudier les différents manuels envoyés aux professeurs en 2006 par les maisons d'édition (Les livres d'éditions précédentes ont été édités en 2002, trois ans avant l'introduction des ROC et ne tiennent pas compte de cette introduction). La notion de projection sur un plan est étudiée dans presque tous les manuels en affirmant l'unicité de la droite perpendiculaire à un plan et passant par un point n'appartenant pas au plan.

3.2.3.7.1 *Manuel Collection Math'x (2006) Terminale S obligatoire*[130]

Deux chapitres sont consacrés à l'espace : « Barycentres. Droites et plans dans l'espace » et « Produit scalaire dans l'espace ». Le premier chapitre introduit la notion de représentation paramétrique d'une droite. Dans la partie cours du second chapitre, la propriété visée par la ROC étudiée ainsi que la définition du projeté orthogonal (à partir de la droite perpendiculaire au plan passant par le point) sont énoncées. Dans la partie « démonstrations », se trouvant sur la feuille située en regard, la démonstration est construite à partir des propriétés du produit scalaire, c'est-à-dire les formes utilisant soit une projection orthogonale, soit les coordonnées. Ces différentes propriétés sont rappelées au début du chapitre dans le plan puis étendues à l'espace. Notamment, il est dit que dans le plan, pour trois points ABC avec $A \neq B$, si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), l'expression du produit scalaire est

- si $H \in]AB), \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$,
- si $H = A, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$,
- si $H \notin]AB[, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

Pour l'espace cette précision n'est pas mentionnée. Cependant une forme proche de ce résultat est utilisée dans la démonstration :

> *Soit M(x,y) un point de (D),* $\vec{n}(a,b)$ *un vecteur normal à D.*
>
> *Par projection orthogonale,* $\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}$ *est égal à* $M_0H \times \|\vec{n}\|$ *ou* $-M_0H \times \|\vec{n}\|$

sans aucune référence à la colinéarité des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{MH}$. Un oubli de valeur absolue dans la fin de la démonstration ne doit pas prêter à confusion. Cette démonstration est reprise dans une ROC de façon détaillée dans le cadre d'un exercice tiroir[131].

[130] A. Carême, B. Chareyre, N.Cleirec, H Gastin, D. Guillemet, M.H. Le Yaouanq, C. Perfetta, Didier, Paris.
[131] p. 347.

3.2.3.7.2 *Déclic TS (2006)*[132]

Deux chapitres sont également consacrés à l'espace : « produit scalaire dans l'espace » et « plans et droites ». Le cours du chapitre « produit scalaire » rappelle ses propriétés et définit le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace comme étant le produit scalaire de deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans un plan contenant ABC. Dans la partie « Travaux dirigés », un exercice, de type tiroir, est construit à partir de l'expression de la distance d'un point A au plan P passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ ($AH = \frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$). La solution utilise les propriétés du produit scalaire. Dans le chapitre suivant la démonstration est demandée directement sans aide dans la partie « prépa bac » partie ROC. Le projeté orthogonal a été défini à partir de l'unicité de la droite perpendiculaire à un plan passant par un point (résultat admis). Ce dernier chapitre met en scène la représentation paramétrique d'une droite.

3.2.3.7.3 *Maths repères 2006*[133]

Les chapitres sont globalement moins nombreux. Un seul chapitre est consacré à l'espace : « géométrie dans l'espace ». A part cette différence d'organisation, le cours suit le même ordre que celui de la collection *Déclic*. Dans le cours, la propriété, « distance d'un point à un plan » est énoncée mais la démonstration est renvoyée à un exercice du type tiroir dans la rubrique « comme (au) bac… », au paragraphe « les restitutions de connaissances (ROC) ». La projection orthogonale d'un point sur un plan est définie à partir de la droite perpendiculaire au plan passant par ce point.

3.2.3.7.4 *Hyperbole mathématiques 2006*[134]

Deux chapitres sont consacrés à l'espace : « produit scalaire dans l'espace » et «plans et droites». Le cours suit la même progression que les précédents mais les auteurs développent, dans la partie « applications du produit scalaire », un paragraphe sur « définitions et propriétés » contenant la démonstration sur la distance d'un point au plan. On peut remarquer que la démonstration comporte une inversion de pas de raisonnement. Ainsi sa rédaction n'est pas

[132] J.P. Beltramone, V. Brun, C Felloneau, L. Misset, C. Talamoni, Hachette éducation.

[133] B.Hanouch, A. Choquet-Raoult, M. Cocault, Hachette éducation.

[134] J. Malaval, D. Courbon, J.M. Lécole, A. Crouzier, C.Demetz,D. Eynard,M. Fauconnet,M. Gonnard,H. Lample,M.C. Obert, C.Tardy, Nathan.

tout à fait « académique »[135]. Cependant dans la rubrique « s'entraîner au nouveau Bac », dans le paragraphe ROC, un exercice demande de redémontrer directement la distance d'un point à la droite. Dans la rubrique « aide à la démonstration », un exercice, à partir d'un concours GEIPI, donne deux méthodes différentes pour calculer la distance d'un point M à une droite à partir de la représentation paramétrique d'une droite. Mais aucune des deux n'utilise l'organisation et les techniques de cette ROC. La projection orthogonale d'un point sur un plan est définie à partir de la droite perpendiculaire au plan passant par ce point.

3.2.3.7.5 *Indice Maths Terminale S (2006)*[136]

Deux chapitres sont consacrés à l'espace : « produit scalaire» et «droites et plans de l'espace ». L'organisation du cours suit la progression du programme. La distance d'un point à un plan est définie avec le projeté orthogonal, lui même défini à partir de l'unicité de la droite perpendiculaire à un plan passant par un point (propriété admise). Une propriété énonce la caractérisation visée par la ROC étudiée. La démonstration n'est pas donnée mais une mention « Technique » indique qu'elle est analogue à celle effectuée dans le plan qui a été largement explicitée dans le modèle dans la première démonstration. Un exercice « démonstration de cours » reprend la démonstration en indiquant la méthode utilisée. On note l'absence de rubrique ROC.

3.2.3.7.6 *Transmath Term S (2006)*[137]

Deux chapitres sont consacrés à l'espace : « le produit scalaire dans l'espace» et « droites et plans dans l'espace ». L'organisation est identique à celle du manuel *Indice* : en particulier, dans le cours le théorème est énoncé et démontré de manière similaire. Une démonstration de cours dans la rubrique « nouveau bac » au paragraphe « restitution organisée des connaissances » reprend dans les mêmes termes que l'exercice de la collection *Indice* (Document 54). La notion de projection orthogonale sur un plan est évoquée dans la rubrique comprendre et dans les exercices résolus sans la définir.

[135] Voir annexe de cette ROC.

[136] R Gautier, G. Mison, Y. Guichard, G. Heng, B. Lefrançois, M. Poncy, M.C. Russier, Bordas, Espagne.

[137] R. Barra, J.Morin, A. Antibi (2006) *Transmath terminale S*,Nathan, Italie.

3.2.3.7.7 *Conclusion :*

Cette étude nous permet d'affirmer que la ROC étudiée demande une démonstration nouvelle en 2006 pour une bonne partie des élèves. Les élèves ont fatalement rencontré la notion de représentation paramétrique d'une droite, mais il reste probable que la plupart des professeurs de terminale S ne l'ont pas reliée à l'objectif de la ROC qui est de déterminer la distance d'un point à un plan. Ainsi les élèves connaissent les éléments des strates du site local : objets et techniques du site. Ces éléments sont rencontrés souvent séparément dans deux chapitres distincts. Cette ROC permet à l'élève de revisiter ces éléments du paysage mathématique par un chemin qui lui est inconnu. La nouveauté reste donc essentiellement organisationnelle.

Par ailleurs, l'organisation de cette ROC est celle d'un exercice tiroir. Cette organisation devrait rendre cette ROC « comestible ». Cependant la nécessaire réorganisation des connaissances privées et des savoirs demandent, pour le résolveur, un temps qui peut être conséquent.

Enfin dans la première question, pour amorcer sa réflexion, l'élève doit posséder l'habileté consistant à reconnaître le vecteur normal. Cette nécessité d' « amorçage » a été soulevée par le professeur 8 lors de l'enquête sur un autre exercice :

45. C. Quelle aide donnes-tu à tes élèves pour favoriser l'apprentissage de ta démonstration ?
46. P. *Je me concentre surtout sur la méthode de la première question. Je me dis que c'est cette méthode qu'il faut retenir. Par exemple pour les logarithmes et les fonctions associées : la méthode de la différence. Il faut montrer que la dérivée est nulle et donc tu as une fonction constante et donc tu as une égalité de fonction. Je reviens à la fin il faut penser à ln(a/a).*

3.2.4 En arithmétique : congruence d'un produit

Cette ROC se situe dans un cadre non encore étudié, celui de l'arithmétique, un des trois chapitres de la spécialité mathématiques. Les deux autres sont les similitudes et les sections planes de surface. Seuls les deux premiers cités sont concernés par des ROC jusqu'en 2007.

Exercice 2. *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*. (5 points)

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \bmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

Cette question constitue une restitution organisée des connaissances.

Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b \bmod 7$ et $c \equiv d \bmod 7$ alors $ac \equiv bd \bmod 7$.

En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b \bmod 7$,

alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \bmod 7$.

Document 58. Extrait de l'énoncé du Baccalauréat, série S, Amérique du Sud, novembre 2006

Cette ROC possède un prérequis libellé rappel (Voir document 58) : les formes d'une ROC ne sont pas encore stabilisées. Ce changement d'appellation convoque-t-il un contrat d'évaluation différent ? Nous ne le pensons pas. C'est sans doute la faiblesse des textes déclarant les intentions des conditions d'existence des ROC qui est en cause. En 2006, la notion de rappel est sans doute mieux connue des élèves que celle de prérequis. Pour des élèves de spécialité, a priori non dépourvus de mètis, le contrat posé par le rappel, ou le prérequis est sans doute clair.

Lors d'un contrôle de cours, un élève répond sans utiliser le rappel par une des méthodes ci-dessous, peut être sanctionné (comme nous l'avons dit au chapitre deux).

Cette ROC reprend une méthode déjà présente dans le livre « Eléments d'algèbre moderne » de 1958[138].

3.2.4.1 Les techniques de résolution

Les trois méthodes sont des variations autour de la propriété de compatibilité de la congruence avec l'addition avec l'utilisation de règles de calcul dans un anneau.

[138] A. Lentin et J.Rivaud (1958). Vuibert.

Question : congruence d'un produit

Soient a, b, c et d des entiers relatifs. Démontrer que : si $a \equiv b$ mod 7 et $c \equiv d$ mod 7 alors $ac \equiv bd$ mod 7.

Première méthode

Comme $a \equiv$ b mod 7 et $c \equiv d$ mod 7, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $a = b + 7k$ et $c = d + 7\,k'$. D'où

$$ac = (b + 7k)(\,d + 7\,k') = bd + 7\,(bk' + dk + 7kk') = bd + 7\,k''$$

avec $k'' = bk' + dk + 7kk' \in \mathbb{Z}$. Par définition $ac \equiv bd$ mod 7.

Deuxième méthode

Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7 lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$. Alors $a - b = 7k$ de même $c - d = 7k'$. Or

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b) = 7(k'a + kd)\,.$$

Or $k'a+kd$ est un entier relatif donc $ac \equiv bd$ mod 7.

Troisième méthode (variante de la seconde)

On a l'équivalence

$$\begin{cases} a \equiv b\ mod 7 \\ c \equiv d\ mod 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \equiv 0\ mod 7 \\ c - d \equiv 0\ mod 7 \end{cases}$$

(Facilement montrée en revenant à la définition.) Or, comme dans la deuxième méthode, on a

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b)$$

Comme $a - b$ et $c - d$ sont congrus à 0 modulo 7, $ac - bd$ est congru à 0 modulo 7. On obtient ainsi le résultat demandé.

Question : congruence d'une puissance

$a \equiv b$ mod 7, alors pour tout entier naturel n, $a^{n} \equiv b^{n}$ mod 7

Première méthode

Un élève habile reconnait dans l'enchaînement de ces deux questions une « convocation » d'une démonstration par récurrence. La démonstration par récurrence est le prototype de routine efficace qui s'articule ainsi :

- une propriété à démontrer pour tout n,

- une première question qui donne (en gros) la technique de passage $n -> \ n+1$ c'est-à-dire l'hérédité (ou parfois également l'initialisation),
- une deuxième question avec le « pour tout n ».

Une fois cette reconnaissance effectuée, la démonstration s'enchaîne facilement.

Deuxième méthode (utilisation d'une identité remarquable)

Une connaissance de l'identité $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ permet de répondre sans utiliser la première question. Cette identité est souvent utilisée dans les sujets du baccalauréat par exemple dans celui des centres étrangers de juin 2004. Son utilisation donne une réponse rapide à la question : comme $a \equiv b$ mod 7, il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$ i.e. $a - b = 7k$, on a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^n - 1) \\ &= 7k\ (a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = 7k' \ avec\ k' = k(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}). \end{aligned}$$

Donc $a^n - b^n \equiv 0 \ mod\ 7$.

Troisième méthode (variante de la seconde)

On a $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Donc $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ mod **7**. Mais par hypothèse, $a - b \equiv 0$ mod 7. Donc $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) \equiv 0$ mod **7**.

Puis $a^n - b^n \equiv 0$ mod 7 , donc $a^n \equiv b^n$ mod 7.

Quatrième méthode (utilisation de la formule du binôme de Newton)

L'utilisation du binôme de Newton permet aussi d'obtenir ce résultat, à partir du retour à la définition comme dans la deuxième méthode : si $a \equiv b$ mod 7, il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$. Or

$$a^n = (b+7k)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^i (7k)^{n-i} = b^n + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b^i (7k)^{n-i} = b^n + 7k \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b^i (7k)^{n-1-i}$$

donc $a^n - b^n$ est un multiple de 7.

3.2.4.2 Observations

Le concepteur du sujet veut privilégier, par l'organisation des questions, la déduction par raisonnement par récurrence. Cependant, comme nous venons de le voir, cette égalité modulo 7 peut être obtenue par d'autres raisonnements. Nous avons déjà montré dans l'analyse des programme (paragraphe 2.1.3) que, selon les périodes, l'institution ne préconise pas la même chose : l'appel au raisonnement par récurrence doit être explicité ou non.

Si le résolveur n'utilise pas la démonstration par transformation de la conclusion (i.e. $ac \equiv bd \mod 7$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $ac = bd + 7k$), alors pour s'engager dans le calcul de la première méthode de la première question, il faut savoir par avance que le produit ac va s'écrire bd plus un multiple de 7. Par ailleurs, les propriétés algébriques liées aux congruences sont en fait liées à la structure algébrique d'anneau, plus précisément ici à celle d'anneau quotient (ici Z/7Z). Les élèves (à la différence de ceux des années de la réforme) n'ont pas la connaissance de ces structures. Ainsi, la connaissance théorique, qui fonde l'action mathématique demandée, ce que C. Castella et A. Mercier[139] nomment savoir fondamental, est au delà de l'horizon institutionnel.

Des solutions techniques nécessitant moins de théorie existent. On peut supposer qu'elles ont servi en classe à faire la démonstration. La ROC engage un pas plus loin vers les techniques attendues.

Nous nommons la troisième méthode de la question 1, méthode de la différence. Rappelons que nommer une propriété permet de modifier le statut de la propriété en la rendant t-convoquée. Cette méthode possède un large champ d'application : les équations, les fonctions, … Cette particularité de la culture française de nommer les théorèmes (par exemple le nom « théorème de Thales » est un pur produit de l'enseignement français) est présente dans le corps professoral comme le montre l'enquête par entretien. Le professeur 8 nomme par le même nom une autre méthode dans le contexte de la fonction ln :

46. « Par exemple pour les logarithmes et les fonctions associées : la méthode de la différence »

3.2.4.3 Discussion

Partons des sites locaux des deux questions (documents 59 et 60)

[139] Savoir fondamental et savoir opératoire

Substrat	Objet	Techniques	Concept (1)
Quantificateurs **Rappel** Stratégies Transformation Hypo-thèse/conclusion Transformation d'écriture par ajout/retrait : Méthode des différences	Entiers relatifs Congruence Egalité Somme **Produit** Puissance	**Anneau** $(\mathbf{Z},+,\times)$ Identité Binôme de Newton Multiple	Anneau $(\mathbf{Z/7Z},+,\times)$ Corps $(\mathbf{R},+,\times)$

Document 59. Site local de la question 1 (Baccalauréat, série S, Amérique du Sud, novembre 2006)

Substrat	Objet	Techniques	Concept (2)
Quantificateurs **En déduire** Rappel Stratégies Transformation Hypo-thèse/conclusion	Entiers relatifs Congruence **Produit et con-gruence** Egalité Somme **Puissance**	Anneau $(\mathbf{Z},+,\times)$ **Principe de récur-rence** Identité Binôme de Newton Multiple	Axiome de Péano Anneau $(\mathbf{Z/7Z},+,\times)$ Corps $(\mathbf{R},+,\times)$

Document 60. Site local de la question 2 (Baccalauréat, série S, Amérique du Sud, novembre 2006)

Dans les « annales zéros » de la banque 2005, l'exercice suivant (document 61), qui ressemble au point de vue organisation à la ROC étudiée, se nomme démonstration de cours[140]. L'exercice demandait à la fois la congruence d'un produit et d'une somme. La ROC étudiée, simplification de cette question de cours, moins chronogène devient « comestible » dans une évaluation certificative.

[140] Pour rappel, les diverses nouvelles dénominations d'exercices ne sont pas stabilisées en 2005.

Définition de la congruence modulo 11 : On rappelle que si a et b désignent deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo 11, et on écrit $a \equiv b$ [11], si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 11k$.
1. (a) Démonstration de cours.
Prérequis : Définition de la congruence modulo 11.
Démontrer que si $a \equiv b$ [11] et $c \equiv d$ [11] alors $a + c \equiv b + d$ [11] et $ac \equiv bd$ [11] .
(b) En déduire que si $a \equiv b$ [11], alors pour tout n entier naturel on a : $a^n \equiv b^n$ [11].

Document 61. Extrait de la banque 2005 des annales zéro

Une question se pose : les professeurs possèdent-ils les éléments d'information permettant de préparer cette ROC ? Nous recherchons dans le prochain paragraphe un élément significatif de réponse à cette question en étudiant les différents objets ou techniques, du site mathématique local, présents dans les différents manuels envoyés aux professeurs de Guadeloupe.

Etude de manuels

- *Manuel Collection Math'x*[141] *(2006) et dans Transmath (2006)*[142]

La démonstration dans le cours de la première question est identique à la première démonstration. La deuxième question est également traitée par récurrence dans sa forme explicité pour *Math'x* (2006) tandis que pour *Transmath* (2006) elle est dite « immédiate par récurrence sur *n* ».
Dans la rubrique « c'est au nouveau bac » dans le paragraphe « restitution organisée des connaissances », l'exercice similaire mais modulo 11 d'« *après document ministériel* » est demandé dans *Transmath* (2006). Dans *Math'x* (2006) un exercice reprend la deuxième question mais dans le cas général avec comme prérequis la première question dans le cas général i.e. modulo *n*.

[141] Programme A. Carême, B. Chareyre, N.Cleirec, H Gastin, D. Guillemet, M.H. Le Yaouanq, C. Perfetta,(2006) Didier.
[142] R. Barra, J.Morin, A. Antibi (2006), *Transmath terminale S*, Nathan.

- *Hyperbole mathématiques 2006*[143]

La démonstration[144] de la première question est proposée dans le cours dans le cas général n. La deuxième question la déduction est réalisée de proche en proche (si $a \equiv b \; mod \; n$ on en déduit de proche en proche :
$a^2 \equiv b^2 \; mod \; n, a^3 \equiv b^3 \; mod \; n$ ...,.$a^p \equiv b^p \; mod \; n$) Dans la rubrique « s'entraîner au nouveau bac » dans le paragraphe « ROC » un exercice similaire mais modulo 9 est demandé. De plus dans la rubrique « objectif BAC », une page est consacrée à l'exercice de la « *DESCO 2003* » des annales zéro. Des commentaires traitent de la notion de prérequis (rappelant qu'il peut exister plusieurs présentations d'un même cours) et précisent une règle (du contrat d'évaluation) :

> *« le raisonnement par récurrence, qui fait partie de l'enseignement obligatoire, peut être utilisé même s'il ne figure pas dans prérequis ».*

Notons que cette phrase peut interroger et donner l'interprétation suivante : dans une ROC de la partie spécialité tout concept issu de l'enseignement obligatoire peut être utilisé. Cette règle ne pose pas de problème dans la partie arithmétique. Pour les ROC portant sur les complexes, cette règle est respectée.

Conclusion

Nous rappelons que le raisonnement par récurrence reste au programme de la partie commune. Certains livres invoquent ce raisonnement sans l'expliciter afin de permettre de traiter ce chapitre d'arithmétique indépendamment de la partie commune. Nous affirmons, que dans les manuels étudiés, le travail proposé et les savoirs exposés permettent une « balade guidée » du paysage mathématique de la ROC dans le chemin balisé par l'institution. Nous déduisons de cette recherche sur les manuels, que les élèves de spécialité sont bien armés pour résoudre la présente ROC. Les élèves connaissent certainement l'exercice dans un contexte très proche. La ROC avec le prérequis doit pouvoir être traité par l'ensemble des élèves malgré les difficultés mentionnées.

[143] J. Malaval, D. Courbon, J.M. Lécole, A. Crouzier, C.Demetz, D. Eynard, M. Fauconnet, M. Gonnard, H. Lample, M.C. Obert, C.Tardy, Nathan.

[144] Démonstration identique à la deuxième méthode présentée plus haut.

Nous avançons que :

- C'est le substrat qui permet de lever les doutes : dans l'ensemble des réponses possibles (il en existe souvent plusieurs), une seule est attendue. Le choix se fait en utilisant les indications du prérequis et les bons usages implicites appelés par les formes des questions et les notations.
- Les objets présents dans la question sont utiles pour résoudre la question. Dans le paysage de la ROC, la recherche des éléments pertinents dépend du niveau étudié.
- Le professeur a des outils pour résoudre l'exercice et pour recevoir les autres réponses. Il peut les juger comme des valeurs théoriques : la réponse attendue est la réponse minimale.
- Le professeur suit la progression des élèves dans la connaissance du paysage de la question: observation des élèves par le site mathématique local.
- Le professeur peut diriger l'étude autonome [A. Erdogan, 2005] des élèves sur les éléments du site.

Nous avons vu de nombreuses analyses de ROC que le site mathématique local permet de nourrir. Qu'en est-il dans le cas d'une question de cours ?
Cette dernière étude dans le cadre de l'analyse nous permettra d'ouvrir notre travail sur un autre type d'exercices.

3.2.5 En analyse la question de cours

La question porte sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle $y'=ay$ satisfaisant une condition initiale donnée. Mathématiquement il s'agit de la première rencontre de l'élève avec un problème de Cauchy et avec une forme simple du théorème de Cauchy-Lipchitz : deux pierres angulaires de la théorie des équations différentielles ordinaires.

3.2.5.1 Enoncé : équation différentielle du premier ordre

Voici le sujet proposé aux candidats au baccalauréat S de la Réunion, à la session 2005 (document 62).

<u>Réunion juin 2005</u> *2 QUESTION DE COURS* *a. On sait que la fonction* $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ *est solution de l'équation différentielle (E)* $y' = \frac{1}{16}y$*: Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions définies sur* ***R****, de la forme :* $x \mapsto ke^{\frac{x}{16}}$ *, où k est un nombre réel quelconque.* *b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.*

Document 62. Extrait du sujet de la Réunion 2005 du baccalauréat

La place dans les programmes de l'équation différentielle $y' = ay$.

Deux tableaux (documents 63 et 64) nous permettent d'apprécier l'évolution de la présentation prescrite de notre objet.

Programme de juillet 86 Classe de TC et TE	Programme de juillet 94 Enseignement obligatoire	Programme de juin 97 Enseignement obligatoire
Equations différentielles Equations différentielles linéaires et homogènes du premier et second ordre à coefficients constants.	Equations différentielles Pas de changements	Equations différentielles l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$. Le résultat est admis et la méthode est précisée s'il y a second membre. $y' = ay$ reste au programme à l'intérieur du chapitre sur les exponentielles.

Document 63. Tableau comparatif sur l'enseignement des équations différentielles des programme de 1986, 1994 et 1997

Étude de l'équation $f' = k\,f$. Théorème : "il existe une unique fonction f dérivable sur IR telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Relation fonctionnelle téristique. Introduction du nombre e. Notation ex Extension du théorème pour l'équation $f' = k\,f$.	L'étude de ce problème ra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la thode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on parera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole.	Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.

Document 64. Extrait du bulletin officiel N°4, 30 août 2001

Depuis plus de vingt ans notre objet est cité, sa place dans le corpus évolue à chaque modification de programmes. Dans celui de 1971, l'équation différentielle étudiée fait partie du corpus de Terminale C (mathématiques et physique) mais elle ne peut être évaluée au baccalauréat. Dans les programmes de 1986 et de 1994, les équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre à coefficient constant sont à traiter d'une manière algébrique proche des mathématiques savantes. Depuis 1996, la forme $y' = ay$ devient l'équation différentielle de référence en remplacement de $y' + ay = 0$. Depuis 2003 l'exponentielle occupe une place centrale, ce qui renforce l'importance de notre objet par rapport aux programmes.

3.2.5.2 Diverses méthodes

Nous remarquons que le principe de la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution vérifiant une condition initiale pour l'équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants est de même nature que pour le cas à coefficients constants. Rappelons-la brièvement. On considère l'équation différentielle du premier ordre (E) : $y' + \alpha(x)\,y = 0$ où α est continue sur un intervalle I. Comme la fonction α est continue sur un intervalle I, elle admet une primitive A sur I. Alors :

(y est une solution de (E) sur I) $\Leftrightarrow (\forall x \in I\ \ y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I\ \ e^{A(x)}(y'(x) + \alpha(x)y(x)) = 0)$

Soit $g : I \to R$ telle que $g(x) = e^{A(x)}y(x)$. D'après ce qui précède, on a

(y est une solution de (E) sur I) $\Leftrightarrow (\forall x \in I\ \ g'(x) = 0)$.

Or I est un intervalle. On a donc

(y est une solution de (E) sur I) $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbf{R} / \forall x \in I\ \ g(x) = K)$

$\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbf{R} / \forall x \in I\ \ y(x) = Ke^{-A(x)})$

Présentons les méthodes de résolution de la question de cours considérée en indiquant les techniques ou concepts utilisés.

Première méthode

Correction	Techniques ou concepts utilisés
• Analyse : Si $f(x) = Ke^{x/16}$ alors $f(x)e^{-x/16} = K$. La fonction h définie par $h(x) = f(x)e^{-x/16}$ est constante donc sa dérivée est nulle. • Synthèse : Soit f une solution quelconque de (E). Montrons que h définie par $h(x) = f(x)e^{-x/16}$ est une fonction constante. Comme h est le produit de deux fonctions dérivables sur **R**, elle est donc dérivable sur **R** et pour tout x, on a : *h'(x)*= $-\frac{1}{16}e^{-x/16}f(x) + e^{-x/16}f'(x)$.	Identité, inverse, dérivé d'une fonction constante Dérivabilité d'un produit de fonctions dérivables. Une fonction h, dont la dérivée est nulle, est constante. Espace vectoriel de l'ensemble des solutions.

Or f est solution de $f'(x)=\frac{1}{16}f(x)$. Donc $h'(x)= -\frac{1}{16}e^{-x/16}f(x)+e^{-x/16}\frac{1}{16}f(x)=0.$ Ainsi h est une fonction constante sur **R**, c'est-à-dire, qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x\in$ **R**, $h(x) = K$. On a donc $f(x)=Ke^{x/16}$ Réciproquement : On vérifie sans peine que, pour tout réel K, la fonction f définie sur **R** par $f(x)=Ke^{x/16}$ vérifie (E).	

Remarquons que la plupart des ouvrages ne mentionnent pas l'analyse. Le caractère heuristique de cette analyse nous parait fondamental.

Deuxième méthode

Correction	Techniques ou concepts utilisés
De façon évidente, pour tout $k \in$ ***R***, la fonction $x\mapsto ke^{x/16}$ est solution de l'équation différentielle (E). Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres on peut utiliser la méthode de la variation de la constante qui consiste, puisque $e^{(1/16)x}$ est toujours non nul, à chercher la solution de (E) sous la forme générale $y : x\mapsto k(x)e^{x/16}$ où k est une fonction dérivable. La fonction y est solution de (E) si, et seulement si, $k'(x)e^{x/16}+\frac{1}{16}k(x)e^{x/16}-\frac{1}{16}k(x)e^{x/16}=0$, i.e. $k'(x)e^{x/16}=0$. La fonction $x\mapsto k(x)$ est par conséquent une fonction constante, $x\mapsto ke^{x/16}$ sont donc les seules solutions de (E).	Espace vectoriel de l'ensemble des solutions. Dérivabilité d'un produit de fonctions dérivables et calcul de dérivée. Une fonction h, dont la dérivée est nulle, est constante.

Remarquons que c'est à Laplace (1749-1827) que l'on doit la méthode de la variation de la constante. Elle a un caractère plus mécanique que la précédente.

Troisième méthode

Elle décalque la méthode générale pour ce cas particulier.

Correction	Techniques ou concepts utilisés
(y est une solution de E sur $\mathbf{R}$) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ y'(x) - (1/16)y(x) = 0)$ $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ e^{-x/16}(y'(x) - (1/16)y(x)) = 0)$ Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $g(x) = e^{-x/16}y(x)$. On a (y est une solution de E sur $\mathbf{R}$) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = 0)$ Or $\mathbf{R}$ est un intervalle. Donc (y est une solution de E sur $\mathbf{R}$) $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbf{R} / \forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = K)$ $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbf{R} / \forall x \in \mathbf{R},\ y(x) = Ke^{x/16})$	Espace vectoriel de l'ensemble des solutions Dérivabilité d'un produit de fonctions dérivables et calcul de dérivée. Une fonction h, dont la rivée est nulle, est constante.

3.2.5.3 Le site de la question

Nous avons donné trois méthodes dont une technique commune est la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée (voir document 65).

Substrat : choses	Objet	Technique	Concept 2	Concept 3
Quantificateur Egalité Identité	Equation différentielle Identité Dérivabilité Fonction à dérivée nulle Equivalence	Calcul de dérivée Caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée.	Solution Inconnue Equivalence Espace vectoriel La symétrie de l'égalité	Equation différentielle du premier ordre

Document 65. Site mathématique local de la question de cours du baccalauréat (Réunion 2005)

Le pré requis, donnant une solution particulière de l'équation différentielle, sert à montrer que la fonction $x \mapsto k e^{x/16}$ est solution de l'équation par des techniques de calcul de dérivées.

3.2.5.4 L'organisation de la restitution

Pour introduire notre étude, nous allons commencer à étudier l'organisation d'un exercice tiroir de démonstration concernant le cas général $y' = ay$. Cet exercice a été donné par un professeur pour préparer la mise en place des ROC de 2005.[145]

<u>Equation du type (1) $y' = ay$ (a réel fixé)</u>

a. Recherche d'une solution particulière.

   On pose $u(x) = e^{ax}$.

   Prouver que la fonction u est une solution de (1).

b. D'autres solutions !

k étant un réel quelconque, prouver que la fonction ku est aussi une solution de (1).

c. A-t-on toutes les solutions ?

   Soit f une solution quelconque de (1). On pose $g(x)=f(x)e^{-ax}$.

   - Prouver que pour tout x réel, $g'(x) = 0$.
   - Que peut-on en déduire pour g ?
   - Que vaut f ?

d. Conclusion.

Cet exemple permet de comprendre les choix possibles d'organisation. Le professeur a choisi de questionner l'élève pour lui faire comprendre que la méthode étudiée est générale. L'organisation reste précise, tous les pas de démonstration cartésienne sont programmés.

L'avis de l'inspection générale dans son rapport d'avril 2006 sur l'évolution des épreuves de mathématiques au baccalauréat (rapport d'étape 2005) indiquait qu'

> *« un point assez technique mérite d'être signalé. Lorsqu'il s'agit alors d'établir rigoureusement, ce qui est l'un des points essentiels du programme, quelle est la forme générale de l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay + b$, le fait de ne plus disposer de quelques bases d'algèbre linéaire rend plus malaisée la construction, et les enseignants ont recouru, pour résoudre cette difficulté, à des méthodes variées.*

[145] Site internet Mathparadise http://mathparadise.free.fr/ consulté le 20 mai 2005

> *Lors de l'introduction des ROC, cela a posé des problèmes, car toute « question de cours » sur ce sujet, forcément inspirée d'une méthode particulière, risquait de prendre à contre-pied les élèves disposant d'un cours ayant utilisé une méthode différente. Il est important de noter que les difficultés ainsi signalées sont en bonne voie de résolution ; l'observation effectuée en 2004/05 porte sur une situation en mouvement, et la prise en compte de l'ensemble des programmes et de leur « esprit » s'améliore rapidement.*
> *ROC*
> *Deux exemples frappants sont l'étude des solutions d'une équation différentielle de la forme : y' = ay + b, ou bien la construction de la fonction exponentielle. Certains professeurs ont considéré que, s'ils employaient une certaine méthode de démonstration dans leur classe, une autre méthode serait incompréhensible par les élèves, et qu'il était donc gênant de demander une restitution relative à ce théorème parce que, si on demandait cette restitution sans guider les élèves, elle était beaucoup trop difficile, et si on guidait les élèves, on était amené à choisir un cheminement particulier et les élèves qui ne l'avaient pas suivi étaient incapables de répondre à la question ».*

Le rapport se termine en constatant que l'introduction des ROC a été difficile. Trois facteurs doivent être modifiés :

- les professeurs pas assez formés à l'enseignement de cette tâche ;
- les programmes ne sont pas conçus dans le but de favoriser l'évaluation de démonstrations ;
- le « niveau d'assimilation ou de travail » des élèves n'est pas maximisé.

Cependant le rapport conclut sur l'évolution rapide de l'enseignement des ROC et constate que l'évaluation ROC gagne toutes les classes du lycée.

Il mentionne, pour notre objet, la difficulté de ne pas disposer d'éléments d'algèbre linéaire ainsi que la réticence des professeurs à poser ce sujet face aux difficultés des élèves quel que soit l'organisation du sujet. Nous comprenons alors les réticences des professeurs à l'utiliser. La perte de sens au niveau de la justification oblige l'élève à apprendre l'organisation par cœur sans pouvoir comprendre les tenants et les aboutissants.

En effet, pour montrer directement que $x \mapsto e^{x/16}$ est solution de (E), l'élève utilisera l'outil dérivation en suivant la même procédure que celle nécessaire pour démontrer le prérequis. Nous préconisons donc d'organiser la QC en ROC comme ci-dessous.

Prérequis : On sait que la fonction u : $x \mapsto e^{x/16}$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$.

a. Soit k étant un réel quelconque. Prouver que la fonction ku est aussi une solution de (E).

b. Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions définies sur **R**, de la forme : $x \mapsto ke^{x/16}$, où k est un nombre réel quelconque.

c. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur *-4* en *0*.

L'intitulé ROC [146] peut sembler être en adéquation avec le travail demandé. En effet cette question est importante au niveau de la topogenèse du savoir par son caractère générique dans les équations différentielles du premier ordre. Elle se place à la fin de la chronogenèse, pour les diverses raisons évoquées dans le rapport de l'Inspection Générale.

Elle doit être organisée par le concepteur pour les raisons citées ci-dessus.

Pour conclure la justification principale de cette démonstration est un théorème admis. En effet, le fait que toute fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle non réduit à un point est constante, n'est pas justifiable en 1S comme nous l'avons déjà vu.

Le sujet de septembre 2007 (document 66) illustre tout à fait notre propos. Le terme *restituer* est remplacé par *exposer* qui fait davantage référence au cours. Mais l'élève est soumis à « *l'oubli des souvenirs* » [Y. Matheron, 2000]. L'exposition des souvenirs fait donc plus référence à un par cœur, un psittacisme, mais semble peut probable *« Ce que l'on conçoit bien s'exprime aisément et les mots pour le dire arrive aisément »* Boileau[147]. Cette citation présuppose que l'orateur n'a aucun problème avec la restitution, son style est clair et en bon

[146] Nous rappelons la définition de ROC et celle de question de cours que nous proposions en 2007: «*la ROC est une restitution d'une démonstration de cours, dans un contexte qui peut être particulier, dans le cadre de questions organisées par le concepteur du sujet qui a de l' « importance » sur le plan des connaissances finales au sens de la topogenèse du savoir et qui marque la fin d'un apprentissage*.».

« *La question de cours est un exercice qui demande d'adapter une démonstration dans un contexte ou de la reproduire une démonstration de cours entièrement. L'organisation des connaissances prérequises est à la charge de l'élève* »

[147] 1674 Art poétique.

français ! La calculatrice, utilisée comme base de données, est cependant rédhibitoire pour ce type d'exercice de récitation de cours.

Amérique du Sud (septembre 2007)

Exercice 1

4 points

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur **R** telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0)=1$.

Soit *a* un réel donné.

a. Montrer que la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que *h* est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Document 66. Extrait du sujet de baccalauréat, Amérique du Sud, septembre 2007

3.2.5.5 Conclusion

Ce travail montre la difficulté de choisir une organisation équitable d'une restitution portant sur une équation différentielle du premier ordre. La théorie absente à ce niveau d'étude ne permet pas de transposer l'étude « savante » et ainsi d'avoir une seule organisation référence. Le dernier essai en ce sens (document 66) expose une adaptation de la théorie en donnant l'ensemble des pas cartésiens de la démonstration. Cette exposition prépare l'étude des équations différentielles dans le premier cycle cependant les lacunes du programme en algèbre linéaire influe nécessairement sur la compréhension de l'organisation par les élèves résolveurs.

3.3 Conclusion de cette partie

Nous avons émis l'hypothèse de recherche que le site mathématique local permettrait de replacer la ROC dans son écosystème et de lever certaines résistances et certains obstacles. Pour répondre à cette hypothèse dans ce chapitre,

- Nous avons montré que le site s'avère être un outil efficace pour cet objectif général, par la mise en relation qu'il opère entre les différents éléments (substrat, objets, techniques, technologies,…) de l'énoncé en les hiérarchisant. Cette caractérisation de l'écosystème permet à celui qui l'appréhende de reconnaître la propre réorganisation de ses connaissances privées, demandée par la ROC.
- Nous avons mis en évidence l'apport du substrat dans l'analyse d'une ROC. La connaissance du substrat dégage certains implicites propres à un texte mathématique et montre les habiletés requises pour la résolution d'une ROC.
- Nous avons fait ressortir que certains implicites servaient à susciter l'amorce de solution. Cette clef pour entrer dans la démonstration peut être l'appel de la technique ou de l' « astuce » comme la nomment certains professeurs (par exemple, en analyse réelle : autour du couple exponentielle/logarithme).
- Nous avons dégagé que certains prérequis déclenchent le travail de l'élève comme un os de Cuvier (par exemple, en analyse réelle : autour du couple exponentielle/logarithme). Cette particularité de la ROC nous permet d'affirmer que le travail de démonstration d'une ROC est à mi-chemin dans le travail de démonstration d'une propriété. Cet exercice ROC permet ainsi l'apprentissage de la démonstration.
- Nous avons mis en évidence une des particularités du site qui permet de généraliser l'étude d'une démonstration par la connaissance de son écosystème. Cette généralisation d'une démonstration permet de rendre « comestible » une démonstration issue d'un paysage proche. En ce sens, l'étude en termes de site d'une ROC (ou des principales démonstrations du programme de terminale) est un outil qui nous semble bien plus efficace que de dresser une liste mythique de tous les ROC possibles (4^{e} résistance évoquée dans le chapitre 2) pour vaincre les résistances et obstacles.
- Nous avons constaté que le site mathématique local fait ressortir les trous de rationalité du programme de terminale S et permet ainsi de s'interroger sur la cohérence des programmes (par exemple : ROC en géométrie ou en analyse en analyse : la question de cours).
- Nous avons vérifié que le site mathématique interroge le cours d'un manuel sur la rigueur d'une démonstration (par exemple en analyse autour du calcul intégral).
- Nous avons établi que le site interroge l'organisation d'un manuel (par exemple, ROC en géométrie).

Chapitre

4

Extension du site local à d’autres contextes

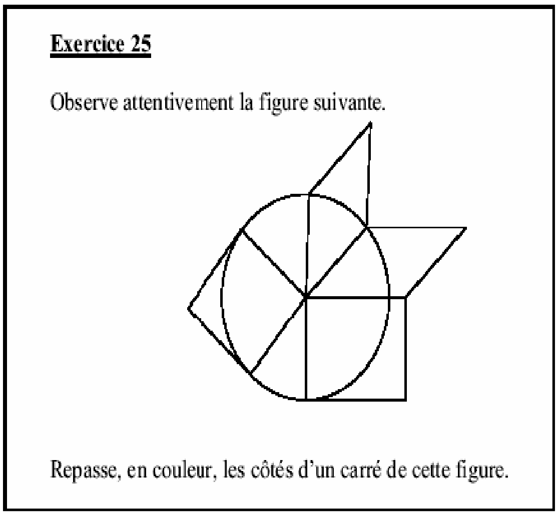
Nous avons montré dans la partie précédente que le site est un outil adapté pour comparer des manuels, pour comprendre une démonstration, pour replacer la démonstration dans son environnement, pour organiser les connaissances du professeur, des élèves. Par ailleurs la strate « substrat » permet de lever certains des implicites présents dans les exercices étudiés. Enfin, le travail effectué montre que le site mathématique local permet de questionner l’évidence.
Dans cette partie, dans l’objectif d’évaluer la « robustesse » du concept, la notion de site est étendue à d’autres activités d’évaluation que les ROC. Sous le paradigme : « l’examen final pilote la formation » nous prenons une question de chaque évaluation nationale du système français du cours moyen au baccalauréat. Au voisinage des ROC, les questions de cours (dont nous avons déjà étudié un spécimen) et l’oral 2 d’un concours de recrutement de professeur du second degré sont étudiés. L’extension de l’analyse par le site à d’autres corpus, théorème, blocs de rationalité permettra de poursuivre le test de robustesse. Le tableau (document 67) explicite cette problématique. Par bascule de lecture du tableau, nous indiquons que le site est un outil de formation d’enseignant. Le choix est effectué de manière suffisamment exhaustive pour balayer chaque activité et corpus des différentes évaluations. L’analyse d’exemples montre que cet outil aide le professeur à la construction de cours, de séquences, de progression ainsi qu’à la gestion d’implicite.Ainsi, nous montrons que le site mathématique local est un outil de formation initiale « du primaire à l’université ». La construction du site est, quant à elle, de nature épistémologique, et permet une autoformation.

<table>
<tr><th colspan="2">Cycle concerné / Elément analysé</th><th>CM1/CM2</th><th>Collège</th><th>Lycée</th><th>Université - IUFM</th><th rowspan="4">F O R M A T I O N D' E N S E I G N A N T</th></tr>
<tr><td rowspan="2">E V A L U A T I O N</td><td>Type d'évaluation</td><td>Evaluation 6°</td><td>Brevet</td><td>Bac</td><td>Capes</td></tr>
<tr><td>Activité analysée</td><td>En géométrie
Recherche d'un carré dans une figure complexe
Exemple1</td><td>En géométrie
Théorème de Thales
Exemple 2a</td><td>En géométrie
ROC et question de cours Argument d'un quotient de deux nombres complexes non nuls
Exemple 3</td><td>En analyse
Recherche de primitive
Exemple 4</td></tr>
<tr><td colspan="2">ELEMENT DU CORPUS</td><td></td><td>Th. de Thales en 3°
Exemple 2b</td><td colspan="2">Caractérisation FCD
Exemple 5</td></tr>
</table>

Document 67. Extension du concept site mathématique local à d'autres contextes

4.1 Exemple 1 : géométrie à l'évaluation nationale de 6^e

Le premier exemple porte sur l'étude d'une question de l'évaluation de 6^e de 2004 (document 68) reprise dans le sujet 2 du CRPE de 2006 (Concours de Recrutement de Professeurs des Ecoles). Cet exemple a été présenté au colloque de juin 2009 de la COPIRELEM. La construction du site permet de montrer que le « substrat » [C. Silvy & A. Delcroix, 2009(1)], terreau de l'exercice, prend une part importante, chargée d'implicite, dans l'élaboration de la solution.



Document 68. Evaluation 6° de 2004 [148]

Remarques introductives

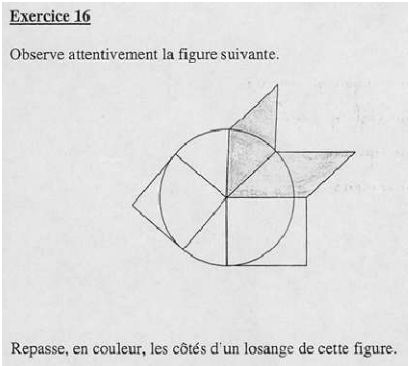
Pour construire le site mathématique de cet exercice, nous analysons ce texte. Une lecture experte du texte débute par la consigne. L'article « *''un'' n'est synonyme d'unique qu'autant qu'il est considéré comme qualificatif, et non comme déterminant numéral ou indéfini* »[149], tandis que l'article « du » est défini contracté. Ainsi la phrase du texte de l'énoncé «Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure » peut induire la non-unicité « du » carré demandé. En conséquence, la représentation acquise après lecture du texte en langue vernaculaire ne semble pas être en adéquation avec celle issue de la figure de l'énoncé. Trois productions d'élèves sur quatre données dans le sujet du CRPE (document 69) semblent montrer une

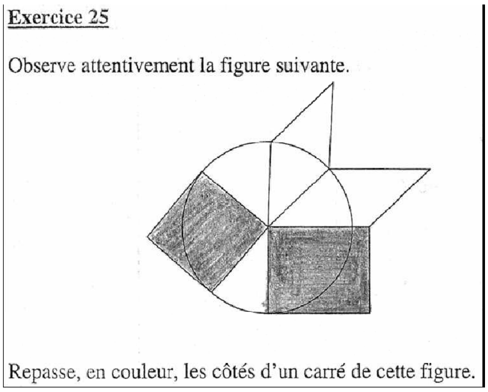
[148] Sur le document original la « courbe » est un cercle

[149] Dictionnaire des synonymes (1970), Larousse.

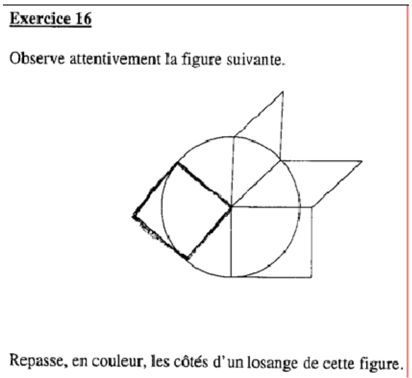
difficulté dans ce sens (un unique, un parmi plusieurs, plusieurs)[150]. En effet les élèves entourent deux quadrilatères différents au lieu d'un demandé.

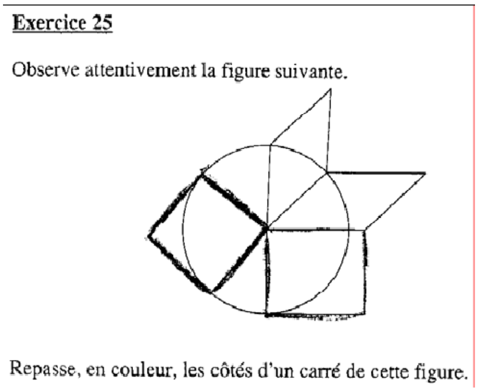
Elève A



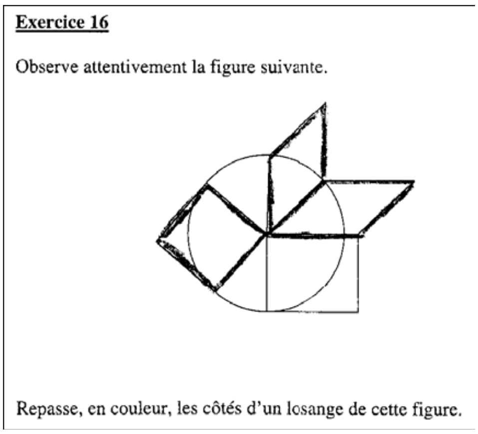


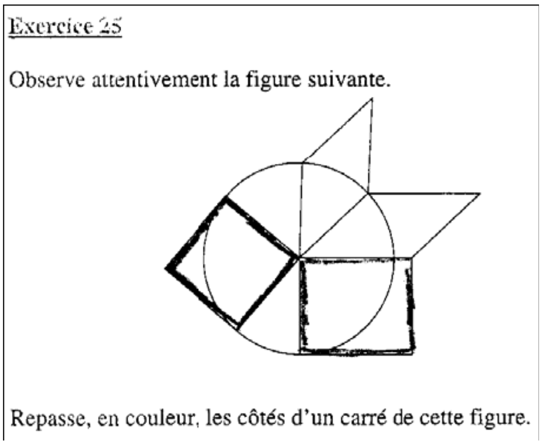
Elève B





Elève C



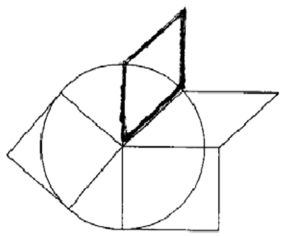


[150] Dans le même cahier, l'élève doit faire preuve d'habileté pour gérer les diverses nuances de l'article « un »(voir annexe 1).

Elève D

Exercice 16

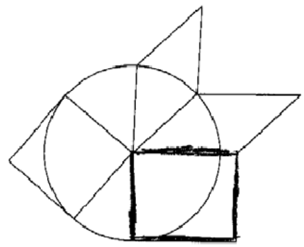
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Document 69. CRPE 2006 partie complémentaire, productions d'élèves

Par ailleurs, la figure construite semble être, pour beaucoup, une figure de l'espace. L'enfant rencontre dans les jeux vidéo des dessins similaires, l'adulte voit naturellement cette figure dans l'espace comme les participants au colloque IREM Antilles Guyane 2008 ou au colloque COPIRELEM 2009 le mentionnent[151]. En outre, deux quadrilatères seulement présentent des angles droits. Mais un des deux n'est pas dans sa position prototypique scolaire ainsi une rotation de ce seul carré (ou de la tête car l'élève travaille dans un cahier d'évaluation) est nécessaire pour "voir" la solution. Cette rotation est-elle naturelle ?

En maternelle les élèves manipulent des objets réels. L'objet carré se positionne naturellement dans plusieurs positions sauf si le professeur ne fait pas attention à ses représentations[152]. Dans la réalité des objets réels, par exemple des voitures, prennent des positions différentes, mais alors le forme est reconstruite : un carré n'apparaît jamais "carré".

Au Cours Préparatoire, les élèves sont confrontés au dessin d'objets géométriques. Ce passage des objets du monde sensible au premier pas vers le monde géométrique fige la position des objets. La « figure » dessinée par le maître au tableau renforce cette position qui devient alors prototypique scolaire. Le mot figure énonce que l'on se trouve en géométrie, plus dans le réel.

[151] Dans un autre contexte, une étude qualitative menée sur des enfants de Guadeloupe à propos de l'observation des phases de la lune montre que les enfants tenaient pour vrai le modèle d'enseignement (celui métropolitain) et non celui de leur latitude, [Leurette & Forissier (2009)], comme pour les figures géométriques le modèle du livre l'emporte sur celui du concret/réel.

[152] Voir par exemple : « L'apprentissage des formes géométrique en maternelle : réflexions sur une expérience », M. Sénèchal (2009). Bulletin Vert, N°482, APMEP.

Cependant, dans cet énoncé, le mot figure reste ambigu car une figure nécessite que les sommets soient nommés. De plus, la construction d'un carré dans la forme demandée demande davantage d'efforts à un élève, ainsi ce renforcement naturel agit sur la représentation du carré/figure au détriment du carré/objet réel. Enfin, pour pouvoir « repasser, en couleurs, les côtés d'un carré », il est nécessaire que le carré soit déjà tracé.
La consigne indique ainsi à l'élève en position de résolveur le chemin vers la solution. Ce chemin est tracé à partir de l'observation de la figure, une observation fine, peut-être aidée par les instruments.

Construction du site et discussion

Nous donnons quelques procédures de résolution (document 70).

Le résolveur pour répondre dans le temps imparti, isole les quadrilatères et élimine naturellement les objets triviaux (sans angle droit ou reconnaissance de "non carré") non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question. Le résolveur se trouve alors face à deux quadrilatères qui sont des rectangles qui ressemblent à des carrés.
Procédure 1 :
Tous les rayons du cercle sont de même longueur donc le quadrilatère de droite possède deux côtés consécutifs de longueurs différentes donc ce quadrilatère est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle de gauche est un carré.
Variante :
On vérifie que le rectangle de gauche est bien un carré avec le compas ou la règle graduée
Procédure 2
On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de gauche est un carré.
Procédure 3
On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de droite est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle est un carré.
Variante :
On vérifie que le quadrilatère de gauche est bien un carré avec le compas ou la règle graduée.

Document 70. Solutions de l'exercice

Le « **substrat** », terreau de la question, composé des « **choses »** sont des implicites, « du déjà là » (par exemple, dans l'exercice étudié, la consigne et les articles langagiers en font partie). Remarquons que lors d'un enseignement en 2008 dans un groupe de PE1[153] de l'IUFM de

[153] Etudiant préparant le concours de recrutement de professeur des Ecoles.

Guadeloupe sur la notion de site mathématique local construit sur cet exemple, une étudiante remarque la présence de l’article « un » et le met pour les raisons évoquées ci-dessus dans le substrat. Les notions de « figures » et de « côtés » sont préconstruites à ce niveau. En effet, pour un élève à ce niveau d’étude, la notion de figure et la notion de dessin ne sont pas définies, elles peuvent être confondues.

Le résolveur, pour répondre dans le temps imparti, isole les quadrilatères et élimine naturellement les objets triviaux non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question. Ce « process » au sens de savoir-faire est une des méthodes implicites mises en œuvre dans le contexte de l’école. Elle reste un « process » nécessaire même dans des sujets d’agrégation interne.

Le résolveur se trouve alors face à deux quadrilatères qui ressemblent à deux carrés. Il peut, soit identifier le rectangle et l’éliminer en sachant qu’un rectangle n’est pas un carré, alors il ne reste qu’un quadrilatère possible qui est, par contrat didactique, le carré, soit identifier directement le carré.

Les **objets mathématiques,** au nombre de sept, sont issus de la figure.

Remarquons que pour l’élève le rectangle-dessin peut être confondu avec le concept de rectangle.

*Les **techniques*** sont constituées des composantes de la définition du carré avec la vérification à l’aide des instruments adaptés. Comme nous l’avons remarqué plus haut, l’élève peut aussi utiliser la technique : un rectangle n’est pas un carré. L’élève peut aussi utiliser, pour vérifier que deux côtés sont de même longueur, la propriété qui mentionne que tous les rayons du cercle sont de même longueur.

Les **concepts deux** sont les techniques justificatives des niveaux inférieurs. Dans ce point de vue, un carré est un des premiers polygones réguliers rencontré par les élèves. Le cercle permet de confirmer, par une voie plus théorique, que l’un des quadrilatères est un rectangle. Pour conclure dans cette voie, le résolveur peut utiliser une des règles du contrat didactique : « l’existence de la solution » afin de donner la seule figure qui reste.

Les mots en gras dans le site mathématique local sont associés à la réponse attendue.

Le « process » indispensable (en gras dans le site mathématique local) à l’obtention de la réponse dans le temps imparti reste implicite.

Le paysage mathématique de cet exercice comporte un grand nombre de choses ou « process » particuliers, convoquant des habiletés du résolveur. Ces habiletés sont acquises dans les exercices nécessitant la reconnaissance de carré en géométrie perceptive, elles sont anciennes.

Ainsi la compétence institutionnelle : « reconnaître un carré dans une figure complexe » est, dans ce cas particulier, une compétence nécessitant la construction d'un réseau de compétences ou d'habiletés issues de registres différents.

Deux oppositions : longueur et mesure de longueur, figure et dessin nécessitent de la part du résolveur des habiletés mathématiques (voir document 71).

Substrat (ensemble de choses singulières et de process singuliers)	Objets particuliers	Concepts (1) Techniques	Concepts (2)
Nombre/grandeur (distance/longueur) Consigne Figure/dessin Articles langagiers Côtés Distance Longueur Angles Figure prototypique scolaire Rectangle Losange Parallélogramme Tangente Carré (rotation) **Isoler les quadrilatères dans la figure** **Élimination des cas particuliers triviaux (tri des quadrilatères dans la géométrie perceptive**) **Logique associée au contrat** Rotation donnant une figure prototypique Vérification à l'aide d'instruments Stratégie	Côtés Carré Cercle **Rayon du cercle** tangente Instruments: règle graduée compas équerre	**Tous les rayons d'un cercle ont même longueur** 4 côtés de même longueur et un angle droit **Un rectangle n'est pas un carré.** 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur angles droits (équerre) Côtés de même longueur Le rayon perpendiculaire à la tangente	Polygones réguliers Espace euclidien Algèbre des grandeurs Classification des quadrilatères Convexes

Document 71. Site mathématique local de la question

Cet exemple nous permet de montrer que d'une part le concept de site peut s'appliquer à des objets des mathématiques élémentaires (du primaire), et d'autre part que le site permet de revisiter les différentes formes de géométrie (instrumentée,…). Enfin il peut interroger l'« évidence » même à ce niveau. En effet, la construction du site questionne par les éléments du substrat la stratégie (choix de stratégie parmi trois possibilités), le texte (certains implicites langagiers propres à ce niveau) et les « process ».

Notre analyse permet ainsi de montrer que le professeur des écoles doit être conscient de la partie implicite de chaque exercice. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'exercice d'évaluation de 6^e a été repris dans une question de la partie didactique du concours CRPE de 2006. Les nombreux livres, ayant pour objectif de préparer le concours du CRPE, donnent une correction de cet exercice de concours mais les corrections passent sous silence les diverses choses singulières du substrat. Par coutume, l'évaluation aux concours CRPE est centrée sur les connaissances mathématiques. Nous proposons que l'épreuve du concours CRPE permette d'évaluer les étudiants sur les connaissances des habiletés nécessaires à la résolution d'un exercice.

4.2 Exemple 2 : brevet des collèges

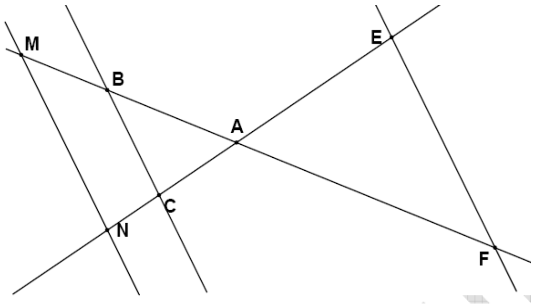
4.2.1 Le sujet du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane

Le brevet des collèges reste le premier examen que rencontre un élève depuis son entrée dans le système éducatif français. L'influence de cette évaluation certificative dans la formation de l'élève n'est pas négligeable.

L'exemple que nous traitons ici est une des questions du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane (document 72). A partir de son site mathématique local, qui caractérise le paysage mathématique de la question, une discussion permet de cerner certaines « choses particulières » du substrat. Pour appréhender les effets de la rédaction des énoncés de collège, nous avons effectué un travail d'enquête auprès de professeurs de collège ou de futurs professeurs des écoles.

Cette discussion nous mènera aux choix de l'institution de passer sous silence des « vieilleries », objets d'étude avant 1970 qui permettraient de redéfinir certains territoires du paysage mathématique de la question. En conséquence, nous discuterons la question suivante : « la nature du travail demandé dans ce brevet est-elle une argumentation ou une démonstration ? ».

La figure suivante n’est pas réalisée en vraie grandeur. Elle n’est pas à reproduire.



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

On donne : AB = 4,5 cm ; AC = 3 cm ; AN = 4,8 cm et MN = 6,4 cm.

1/ Calculer AM et BC.

2/ On sait de plus que AE = 5 cm et AF = 7,5 cm. Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Document 72. Le sujet du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane.

Remarque

Nous n’étudions que la question 1, l’élève résolveur doit considérer la sous-figure de gauche pour se retrouver dans l’application directe du théorème de Thalès (compétence du programme : isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question)[154].

L’indication « La figure n’est pas réalisée en vraie grandeur » suppose implicitement que la figure est à l’échelle. Ainsi la figure est implicitement un dessin technique (homothétique) qui respecte les angles et donc l’alignement.

4.2.2 Site mathématique local

Notre enjeu n’est pas ici de construire le site mathématique local mais nous allons montrer que la part du substrat et du contrat pèse sur le travail demandé à l’élève.

Nous donnons une solution de l’exercice dans le document 73.

[154] Programme collège, introduction générale, p 11, B.O. du 19 avril 2007.

1) D'après le dessin : Les 3 points *A*, *B* et *M* sont distincts et alignés, ainsi que les points *A*, *C* et *N*.

D'après l'énoncé (*BC*) et (*MN*) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès, en notant *l*(*AB*) la longueur du segment [*AB*]

$$\frac{l(AB)}{l(AM)} = \frac{l(AC)}{l(AN)} = \frac{l(BC)}{l(MN)}.$$

Ainsi $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$.

Or $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3 \times 1cm}{4{,}8 \times 1cm} = \frac{3}{4{,}8} \times \frac{1cm}{1cm} = \frac{3}{4{,}8}$ ou $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3\ cm \times 1cm^{-1}}{4{,}8\,cm \times 1cm^{-1}} = \frac{3}{4{,}8}$.

Donc $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3}{4{,}8}$, ainsi $l(AM) = 7{,}2$ cm.

De même $\frac{3}{4{,}8} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$, ainsi $l(BC) = 4$ cm.

Les longueurs demandées sont donc 7,2 cm pour le segment [*AM*] et 4 cm pour [*BC*].

Document 73. Une solution de la question

Le document 74 expose un site mathématique local de la question étudiée.

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Concepts (2)	Concepts (3)
Figure Grandeurs Aire Proportion Code symbolique distance, droite, longueur Contre-règle Equation aux dimensions Lecture perceptive alignement (instrumentée) Code graphique Point droite Stratégie	Nombres décimaux Egalité Fractions Longueur Distance Points distincts Droites Droites parallèles Alignement Intersection de droite	Transitivité de l'équivalence Simplification de fractions Règle du rapport grandeurs/ nombres Théorème de Thalès	Corps Q Algèbre des grandeurs Aire (additivité de l'aire) Distance entre deux droites parallèles	Corps R Equivalence, Classe d'équivalence Théorie de la mesure Espace euclidien

Document 74. Site mathématique local de la question

4.2.3 Discussion sur des choses particulières du substrat, cœur d'implicite

4.2.3.1 Registre figural/registre langagier

La lecture perceptive (ou instrumentée mais qui est peu probable) du point A comme point d'intersection des droites (MB) et (NC) est dans l'ordre des choses. En effet, dans la plupart des textes de brevet, l'alignement des points n'est pas mentionné dans le texte du sujet ; de plus, dans le cas de la réciproque du théorème de Thalès de la classe de 3^{e}, l'hypothèse portant sur l'« ordre des points » n'est presque jamais explicitée.

Pour les étudiants (PE1) préparant le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE), le contrat usuel attendu est différent, comme l'indique le rapport du jury du CRPE (2008) de l'académie de Lille

> *« concernant les questions géométriques, il est encore à signaler qu'une figure géométrique n'est qu'une aide visuelle pour se représenter la situation mais ne prouve rien. Seules les hypothèses, ici bien identifiées dans une rubrique « nous savons que », sont utilisables dans les démonstrations. Toute autre affirmation, même « visible » sur la figure, doit être démontrée ».*

Pour vérifier si le changement de paradigme mis en œuvre dans cet exercice qui consiste à prendre "figure" au sens de "dessin et figure technique", nous avons demandé en mars 2009 à 60 étudiants PE1 et 8 professeurs de mathématiques de collège de rédiger la solution de cet exercice ; aucun n'évoque cette légère déformation du contrat dans la rédaction d'une réponse en mentionnant que les hypothèses du raisonnement sont issues de l'observation de la "figure". Nous devrions lire, a minima, "d'après la figure..." Cette observation utilise la règle implicite du professeur ou de l'élève : quel que soit la taille d'une figure, elle conserve les mêmes propriétés. Cette règle utilise le caractère homaloïdal[155] de l'espace. Par conséquent, même si le sujet n'est pas conforme aux usages de rigueur, ce travail d'enquête montre que le contrat d'évaluation possède une certaine plasticité comme cela est déjà remarqué par C. Castella et A. Mercier (1994) : chacun procède comme s'il n'y avait là aucun problème.
Pourtant, les concours CRPE respectent l'usage d'écrire la position du point A dans le texte en langue vernaculaire. Ainsi, par voie de conséquence, cet usage peut permettre le respect de la rigueur au sens de B. Beauzamy (2001) :

> *« La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise, savoir distinguer une série convergente d'une série divergente, etc. »*

Dans ce contexte (CRPE) et dans celui de l'activité analysée,

> *« le théorème de Thalès ne se réduit pas à l'écriture d'égalités entre fractions[156]. Pour pouvoir écrire ces égalités, un certain nombre d'hypothèses doivent être vérifiées » :*

---

[155] « *Caractère d'un milieu spatial indéfini qui n'a pas de courbure propre et, dans lequel on peut, par conséquent, tracer des figures semblables à n'importe quelle échelle* ». A. Lalande (1983), vocabulaire technique et critique de la philosophie, Presse Universitaire de France.

[156] Ici le théorème de Thalès est énoncé dans l'espace euclidien.

les points A, B et M doivent être alignés ; les points A, C et N doivent être alignés ; (BC) doit être parallèle à (MN).

La solution présentée dans le document 75 n'explicite pas le cadre de l'alignement des points comme toutes les solutions de la population étudiée. A. Pressiat et I. Bloch (2007), lors d'un cours à la XIV° Ecole d'Eté de Didactique, rappellent que l'un des enjeux du collège est d'

> *« assurer la rupture entre la « géométrie perceptive et instrumentée » d'une part et la « géométrie théorique », d'autre part ».*

Ce texte réussit à mélanger les deux géométries sans qu'aucun étudiant ou professeur ne sente la nécessité d'expliciter la « chose ».

Exercice :

Hypothèses :

(BC) // (MN)

AB = 4,5 cm

AC = 3 cm

AN = 4,8 cm

MN = 6,4 cm

1) Calcul de AM :

Pour calculer AM, on va utiliser le théorème de Thalès. On sait que (BC) et (MN) sont parallèles et que A, B, M et A, C, N sont respectivement alignés dans le même ordre. On a donc d'après le Théorème de Thalès, dans le triangle AMN :

$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ or AB = 4,5 cm, AC = 3 cm, AN = 4,8 cm

d'où $\frac{4,5}{AM} = \frac{3}{4,8}$

$AM = \frac{4,5 \times 4,8}{3}$

$\boxed{AM = 7,2 \text{ cm}}$

Document 75. Solution d'une étudiante PE1

Une deuxième habileté implicite apparaît dans les textes : la gestion des deux espaces, grandeur (longueur) et mesure de grandeur i.e. l'algèbre des grandeurs et le corps des réels.

4.2.3.2 Cadre des grandeurs/réels

La solution d'un(e) étudiant(e) (voir document 75) montre la bascule alternative entre longueur et distance ou entre grandeur et nombre. Cette gestion implicite est une habileté au sens de M. Mauss (1950).

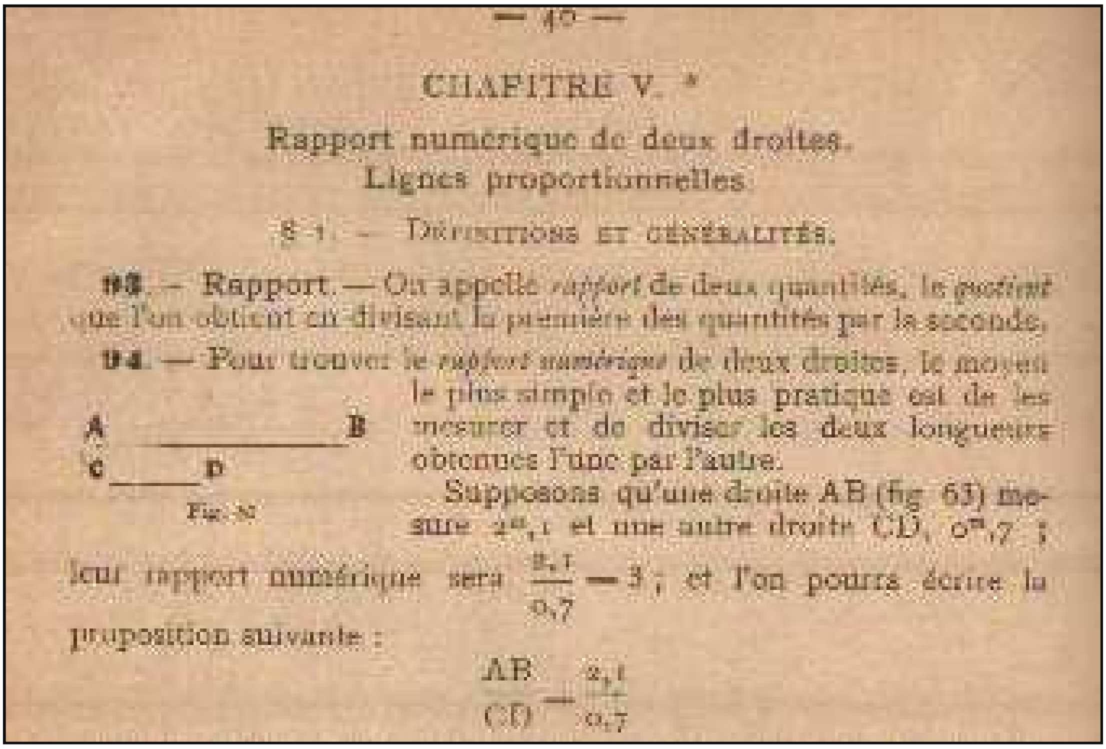
Ainsi la solution part des hypothèses dans le cadre des grandeurs pour passer dans le cadre des réels puis revenir dans le cadre des grandeurs. Ces changements de cadre implicites renforcent pour certains (nombreux) l'utilisation abusive des unités. Les unités apparaissent au début et à la fin sans aucune justification. On écrit AM=$\frac{4,5\times 4,8}{3} = 7,2cm$.

Dans le primaire des années 1900, les élèves ne pouvaient faire l'amalgame entre les deux espaces, les nombres réels et les grandeurs (longueurs), car l'appel à l'expérimentation matérielle (effective ou invoquée) validait leurs règles.

En effet, la règle suivante

> *« on peut dire par exemple que : le rapport de deux grandeurs est égale au rapport des nombres qui le mesurent, l'unité restant la même » [P. Rollet et E. Foubert, 1903]*

permet d'expliciter la justification de l'omission. A. Leclerc (1908) procède d'une autre manière comme le montre le document 76.



— 40 —

CHAPITRE V. *

Rapport numérique de deux droites.
Lignes proportionnelles.

§ 1. — Définitions et généralités.

93. — Rapport. — On appelle *rapport* de deux quantités, le *quotient* que l'on obtient en divisant la première des quantités par la seconde.

94. — Pour trouver le *rapport numérique* de deux droites, le moyen le plus simple et le plus pratique est de les mesurer et de diviser les deux longueurs obtenues l'une par l'autre.

A ______ B
C ___ D
Fig. 63

Supposons qu'une droite AB (fig 63) mesure $2^m,1$ et une autre droite CD, $0^m,7$;

leur rapport numérique sera $\frac{2,1}{0,7} = 3$; et l'on pourra écrire la proposition suivante :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2,1}{0,7}$$

Document 76. Rapport numérique de deux longueurs. A. Leclerc 1908

Mais comme l'écrit H. Lebesgue dès les années 1930, cette présentation cachait la place prépondérante de la notion de nombres réels :

> *« Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie ; on n'en parle qu'au troisième… Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité ; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait des produits en croix. À ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres...*
>
> *Mais là se place le scandale de l'incommensurabilité ; il fallait tourner la difficulté, éviter le nombre. C'est pourquoi on a parfois fait comme je disais tout à l'heure, posant une définition de ce que l'on appellera l'égalité ou l'inégalité de deux rapports par des moyens qui sont exactement ceux permettant de décider de l'égalité ou de l'inégalité de deux nombres déterminés chacun par une coupure ; mais on a soin de ne pas s'en apercevoir et d'éviter de parler de ces nombres que l'on compare. Alors on prétend que l'on ne s'est pas occupé de nombres, qu'un rapport de longueurs est autre chose que le nombre qui le mesure... Je n'y peux voir que le souci d'écarter un mot et je pense à celui qui dirait : je n'ai pas be-*

> *soin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur. »*

Aujourd'hui les nombres sont omniprésents tandis que la notion de grandeurs a du mal à occuper un espace comme le montre l'ensemble des réponses faites dans l'enquête.

Remarque

La notation AB possède plusieurs sens, selon sa place dans l'énoncé, soit la longueur d'un segment [AB], soit la distance AB. Ainsi elle désigne une longueur, soit la mesure de la longueur. Cette polysémie demande une habileté, qui conduit à supprimer "cm"[157] dans le texte pour faire ensuite une adjonction de ce même mot "cm" dans la réponse : exercice acrobatique, dont les conséquences didactiques ont été étudiées par Y. Chevallard et M. Bosch (2001-2002, 2003).

Au début de XXe siècle, le jeu nombre concret et nombre abstrait était joué par le rapport de grandeurs et le nombre abstrait. Aujourd'hui cela relève d'une habileté non mathématique des élèves.

Pour lever le problème il faudrait considérer qu'une figure est adimensionnelle, ce qui est fondé sur une propriété de l'espace euclidien : le rapport d'angle et de grandeur est conservé par changement d'échelles.

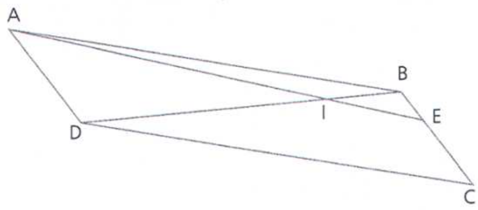
4.2.3.3 Un livre de 3e

L'étude d'un livre de 3e (voir document 77) montre la difficulté de cette gestion implicite. Dans la solution exposée, la notation ID, comme nous l'avons préalablement remarqué, indique la distance de I à D (la mesure de la longueur) ou la longueur. Aucun livre consulté ne se préoccupe de la polysémie associée à la notation distance. Or la rigueur en mathématique peut être vue comme l'«*adéquation entre le signifié et le signifiant* » [E. Rouy, 2007]. Ce problème n'est pas évacué par une rédaction de l'énoncé précisant que toutes les mesures sont faites dans la même unité, le centimètre.

[157] Ellipse en rhétorique

Savoir-faire 1 Déterminer une longueur dans une figure contenant des droites parallèles

Énoncé Le parallélogramme ABCD ci-contre est tel que AD = 6 cm. E est un point du segment [BC] tel que BE = 2 cm. I est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) et on donne : BI = 4 cm. Calculer la longueur DB.



Solution

ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles. ← La figure contient des droites parallèles, on peut donc penser à utiliser le théorème de Thalès pour calculer la longueur recherchée.

Les droites (BD) et (AE) sont sécantes en I et les droites (BE) et (AD) sont parallèles. ← On identifie les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de Thalès.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités de quotients :

$$\frac{IE}{IA} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{AD}.$$

← On applique le théorème de Thalès.

Or : AD = 6 cm, BE = 2 cm et IB = 4 cm.
Donc on a : $\frac{IE}{IA} = \frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$. ← On utilise les valeurs numériques données dans l'énoncé.

Calcul de ID

On a : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$. ← On connaît la longueur IB et on cherche la longueur BD. Le point I appartenant au segment [BD], il suffit de calculer ID. Pour cela, on utilise l'égalité : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

Donc : $6 \times 4 = 2 \times ID$. ← On écrit l'égalité des produits en croix.

Donc : $ID = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.

Calcul de BD ← On peut maintenant calculer BD.

I appartient au segment [BD], donc :
$BD = BI + ID = 12 + 4 = 16$.

[BD] mesure 16 cm. ← On conclut.

Document 77. Manuel 3° Prisme (2008)[158]

Une majorité de concepteurs de sujet de brevet utilisent pourtant cet artifice. Ainsi, en est-il dans le brevet de 2008 du groupement Nord (document 78).

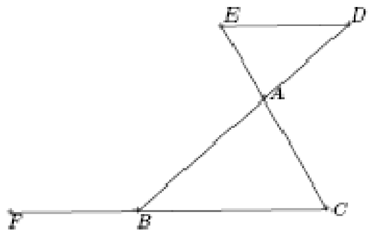
[158] Deschamps C., Cuaz L., Jacob N., Le Bourgeois D., Roulet-Descombes A., Sitbon A., Vissio J., Xoual I. (2008) Math programme 2008 3° collection Prisme, Belin.

Exercice 1 :

La figure suivante n’est pas réalisée en vraie grandeur.

L’unité de longueur est le centimètre.

On donne : AB= 8 ; BC= 9 ; AC= 6 ; AE= 4.



1) Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

Calculer AD.

Document 78. Extrait du brevet 2008 du groupement Nord

La figure n’a pas d’échelle, l’unité ne sert à rien, le sujet parle de droites mais les droites ne sont pas tracées. Le professeur et l’élève ne savent pas où se situe cet exercice. Cependant la question sur la principale technique demeure: le théorème de Thalès est-il énoncé en termes de distances ou en termes de longueur ?

A ce propos: « *Les Académiciens dénoncent à très juste titre la suppression radicale de l'indication des unités* ». [G. Brousseau, 2007]. Mais la transposition didactique n’est pas encore achevée, il faudrait peut-être inventer une notation pour la longueur d’un segment. Une proposition possible semble être « Pourquoi ne pas employer L(ID) pour la longueur du segment [ID] et ID pour la distance ? », mais il faut se garder des dérives du « *formulisme* » [J.-P. Ferrier, 2005]. En particulier, dans les autres pays, la notation [AB] n’est pas aussi prégnante, elle désigne souvent la longueur [J.-P. Ferrier, 2005]. Cependant il semble plus précis d’employer un codage différent pour marquer les étapes de la solution. En France, suite à la « crise des mathématiques modernes », l’usage de la rigueur n’est plus uniforme.

Un ou une étudiante PE1, en composant le texte nécessaire au passage du dessin à une figure, propose une rédaction de la solution en utilisant la notation (AB) pour la longueur (document 79).

Grp A1

1) Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
On donne (AB) = 4,5cm, (AC) = 3cm, (AN) = 4,8cm et (MN) = 6,4 cm
F et E sont deux droites sécantes en A. N et C sont deux points de E distincts de A, M et B sont deux points de F distincts de A
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{4,5} = \frac{4,8}{3} = \frac{6,4}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{4,5 \times 4,8}{3} = 7,2 \quad \text{et} \quad \frac{3 \times 6,4}{4,8} = 4$$

Nous pouvons donc dire que (AM) = 7,2 cm et (BC) = 4cm

Document 79. Résolution par un(e) étudiant(e)

Ce choix peut paraître original, mais un livre d' « arithmétique » [M. Faucheux, 1938] utilise cette écriture (voir le document 80).

= **229.** = En raison de la propriété précédente, il n'y a pas d'inconvénient à admettre que, dans la notation $\frac{AB}{CD}$, AB et CD représentent, soit des grandeurs, soit les nombres qui les mesurent avec une même unité. Quand nous tiendrons à préciser qu'il s'agit des grandeurs elles-mêmes, nous écrirons $\left(\frac{AB}{CD}\right)$.

Document 80. Extrait du manuel de Faucheux(1938) du programme 1920

Dans les usages actuels, à ce niveau d'étude, le manque d'explicitation de cette différence ne permet pas aux élèves de saisir tout le sens de la rédaction du professeur.

Mais cette discussion sur la rigueur cache le sens réel de l’affrontement entre deux paradigmes celui du concret et celui du monde mathématique, celui des grandeurs concrètes et celui des nombres : c’est le « seuil épistémologique » de N. Rouche (1994). Mathématiquement, le paradoxe de Banach-Tarski [D. Perrin, 2005,1 ; 2006] démarque une des limites de ce seuil épistémologique entre le monde mathématique et le monde physique en montrant que la notion de découpage n’est pas si naïve. C’est le « diabolus in mathematica » d’Antoine Delcroix.

A ce niveau, l’espace des nombres est de niveau 2 (numérique 2), le niveau des différentes collections N, Z, D, Q, R avec des opérations bien assimilées. Le niveau 0 est le niveau naïf de la comptine ou de la numérotation des pages d’un livre qui précède les définitions mathématiques du texte du savoir.

Le niveau 1 est celui des tables, du calcul réfléchi. Le niveau 3 est celui de l’axiomatique, dépassant aujourd’hui celui de la licence.

Le souci du métadiscours explicatif du programme sur l’introduction des grandeurs dans le monde mathématiques atteint ici sa limite. La rédaction de l’école de cette question est un chemin qui passe des « nombres concrets » aux nombres où l’utilisation des mathématiques permet d’élaborer une solution numérique qui donne par retour aux nombres concrets la solution. Ce chemin n’est-il pas l’évacuation de cet affrontement ?

Dans le Brevet supérieur, Nancy 1923 vu dans le manuel de Faucheux (1938), on demande dans la première question de « *Montrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent quand on les évalue avec la même unité* ». Ce théorème est absent des programmes et interroge ici la transparence du savoir impliqué.

Ainsi, ce texte de manuel, supposé générateur d’exemples de rédaction, montre bien les limites d’une mathématique scolaire qui ne veut pas prendre en compte le saut qualitatif des grandeurs concrètes aux réels. Ce rejet dans l’implicite de cette difficulté d’ordre épistémologique se retrouve avec la notion d’angle qui peu à peu est évacuée du programme scolaire : les triangles semblables re-disparaissent à en septembre 2009 en seconde et la notion cocyclicité reste à l’état de trace dans le chapitre des complexes de terminale.

Par ailleurs, dans les programmes, le théorème de Thalès, énoncé en termes de longueurs est justifié en termes de grandeurs à l’aide des aires. Du point de vue mathématique, la propriété de Thalès figurant dans le programme de troisième est une propriété utilisant la notion de longueur, elle est donc à un isomorphisme près une propriété euclidienne. Cependant le théorème de Thalès général est une propriété affine[159]. Or le procédé affine de la démonstration est basé les propriétés du corps des réels.

4.2.4 Conclusion partielle

Pour conclure sur l'exploitation du site, nous avons montré que le résolveur fait preuve de « mètis » [M. Detienne & J.-P. Vernant 1974] :

- la lecture perceptive de l'alignement des points,
- la gestion des grandeurs et des mesures des grandeurs ou « le saut épistémologique ».

L'élaboration du site et l'utilisation du site permettent de lever ces implicites et de caractériser le paysage mathématique de la question. En explicitant à la fois les objets, les techniques ainsi que les différentes stratégies possibles, le site caractérise le paysage et indique une partie du sens :

> *« Ainsi avons-nous également introduit le saut qualitatif accompli lorsque l'on passe du signifiant au signifié et du signifié au sens, à la façon dont le joueur d'échecs va de la structure matérielle du jeu à ses règles, puis de ces règles à la stratégie qui lui sera propre » [G. Magen, 2006].*

La construction de site permet de réinterroger la cohérence de la partie étudiée du curriculum en nécessitant une clarification des changements de cadre avec, par exemple, la règle du quotient de deux grandeurs de même espèce dans la même unité et l'explicitation des propriétés d'une figure (dessin ou technique). Sans cette clarification, les démonstrations mathématiques effectuées en collège sur le théorème de Thalès restent des argumentations axées pour une large part sur des implicites, des savoirs transparents : pour l'élève, la rédaction de la réponse passe par un "exercice d'usage" où le sens ne peut être très présent.

4.3 Site du théorème de Thales en 3°

L'étude précédente montre que ce théorème fait appel à un grand nombre de concepts (objets, techniques,…) venant de champs divers et dont l'existence est mal assurée dans les programmes. Le site suivant ne prétend pas à l'exhaustivité. (Document 81.)

[159] J. Frenkel (1973), *Géométrie pour l'élève –professeur*, Hermann, Pris

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Concepts (2)	Concepts (3)
Figure Stratégie Raisonnement cartésien Sur et sous figure	*Nombres Entiers rationnels* mesure de grandeur **Points distincts** **Droites** **Droites parallèles** **Alignement** ***Longueur***	Principe de récurrence Principe d'Archimède $\updownarrow$ Densité Théorème des parallèles équidistantes Rapport de grandeurs	Construction des ensembles classiques des nombres Géométrie axiomatique euclidienne Algèbre des grandeurs	Axiomatique des nombres Théorie de la mesure Programme d'Erlangen

Document 81. Site mathématique du théorème de Thales avant 1969

Nous nous posons alors la question : la transposition actuelle est-elle enseignable ?

4.4 Exemple 3 : champ de l'algèbre géométrie

Nous procédons à une analyse comparative de deux sujets voisins posés au baccalauréat. Le premier sujet, une ROC, porte sur le module et un argument d'un produit de deux nombres complexes. Le deuxième sujet, une question de cours, traite de l'argument d'un quotient de deux nombres complexes à partir du résultat de la ROC. L'analyse des exemples porte surtout sur les richesses historiques et curriculaires de l'introduction des nombres complexes. Un déchiffrage historique permet de cerner certaines composantes de l'écosystème de la ROC. Complété par une analyse de l'évolution curriculaire, il permet de construire chaque site local de la ROC à partir de l'analyse des techniques.

4.4.1 ROC : argument et module d'un produit (ROC)

Exercice 1 (commun à tous candidats)

Restitution organisée de connaissances

Prérequis *: On rappelle les deux résultats suivants :*

i) $\begin{cases} |z| = r \\ arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$

ii) Pour tous réels a et b

: $\begin{cases} \cos(a+b) = cosa\, cosb - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = sina\, cosb + sinb\, cosa \end{cases}$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls, démontrer les relations :

$|z_1\, z_2| = |z_1||z_2|$

$arg\,(z \times z') = arg\,(z) + arg\,(z')$ à 2π *près.*

Document 82. Enoncé de la ROC, baccalauréat série S, Madagascar et centre étrangers juin 2006

La notion arg z n'est pas bien définie dans cette ROC (document 82). En effet, dans l'usage mathématique, la notion à x_0 près est utilisée dans les valeurs approchées. Le programme n'explicite pas cette notion Mais dans les accompagnements (p 47), on lit :

> *« Par contre, il est crucial de parler de l'argument d'un nombre complexe, défini à 2kπ près, (…). Qu'en est-il des congruences modulo 2π ?*
> *Dans ce cadre limité, l'utilisation des congruences modulo 2π n'est pas pertinente; on en restera à des écritures du type : il existe k∈**Z** tel que*
>
> $a = b + k \times 2\pi$ *».*

La notation n'est pas conforme aux attentes de l'institution. Dans l'usage mathématique dans le contexte des nombres complexes la notation usuelle est soit une égalité/congruence modulo

2π, soit une égalité « $+2k\pi$ » avec k entier relatif, soit défini à $2k\pi$ près. Ainsi cette notation à 2π près est inhabituelle et peut prêter à confusion.

4.4.2 Question de cours : argument d'un quotient de deux nombres complexes non nuls

Exercice 3 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Dans tout l'exercice P\ {O} désigne le plan P privé du point origine O.

1. *<u>Question de cours</u> :*

On prend comme prérequis les résultats suivants:

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors

arg $(z \times z')$ = *arg (z) + arg (z') à* $2k\pi$ *près, avec k entier relatif.*

-Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ *non nul d'affixe z on a :*

arg (z) = $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ *à* $2k\pi$ *près, avec k entier relatif.*

a) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, démontrer que :

$arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$ *à* $2k\pi$ *près, avec k entier relatif.*

b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a :

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ *à* $2k\pi$ *près avec k entier relatif.*

Document 83. Énoncé d'une question de cours baccalauréat série S, France métropolitaine, 2006

Nous n'analyserons que la question 1.a) du document 83.

4.4.3 Déchiffrage historique

Pour localiser le site de cette ROC, nous choisissons d'effectuer un défrichage historique en nous basant essentiellement sur les travaux de J. Dhombres (2004). En 1535, un concours eut lieu entre Fior et Tartaglia pour résoudre les équations du troisième degré. Tartaglia fut déclaré vainqueur. Il confia sa solution à Cardan sous la condition de ne pas la publier. Toutefois, ce dernier en donna la solution dans *Ars Magna*. Or, à l'époque, l'ouvrage de référence reste *les Eléments* avec sa géométrie et ses grandeurs. Les négatifs n'existent pas encore en tant que nombres. Dans les équations, on les évacue au profit des solutions positives. Pour résoudre une équation du troisième degré possédant une racine positive, on introduit des « imaginaires ». Ils apparaissent et disparaissent au gré des auteurs. En 1830, Galois énonce :

> *« Il faut regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires, puisqu'elles ne satisfont pas aux questions des nombres entiers, symboles dont l'emploi dans le calcul sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire √-1 dans l'analyse ordinaire. » [J. Dhombres, 2004].*

En 1806, Jean Robert Argand donne une preuve du théorème fondamental de l'algèbre basée sur la nouvelle représentation des nombres complexes dans son livre : *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Mais ce livre sombre vite dans l'oubli. (Il n'en existe aucun exemplaire aujourd'hui.) Durant l'année 1811, Joseph Pierre Gergonne, enseignant à Montpellier, expose dans ses cours de l'Ecole Normale les travaux d'Argand :

> *« Il y eut un débat sur " l'interprétation géométrique des symboles imaginaires" et une discussion sur l'existence des objets mathématiques » [J. Dhombres, 2004].*

J.P. Gergonne permet la diffusion des travaux d'Argand dans les mathématiques professionnelles enseignées, malgré l'opposition marquée de la « noosphère » de l'époque :

> *« "Je persiste à croire qu'il est très difficile de ramener la démonstration de ce principe à des notions purement élémentaires " expliquait Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble, six ans après la parution du livre d'Argand » [J. Dhombres, 2004].*

Nous ne pouvons que remarquer que la rigueur impose déjà une certaine « gène » comme le remarque J. Dhombres :

> *« Aussi, à la fin de son Essai qui porte à la fois sur l'addition des « grandeurs dirigées » et sur la multiplication des nombres complexes, Argand indiquait-il que la représentation des nombres complexes " un degré suffisant d'évidence" ; les constructions ne pouvaient en être admises que " comme des hypothèses, que leurs conséquences ou des raisonnements plus rigoureux pourront faire admettre ou rejeter". »*

Ce nouvel état d'objet construit à partir de la géométrie, donc de nombre, fut accepté par la noosphère lorsque Cauchy l'incorpora à son architecture théorique. Cette incorporation permettra aux complexes de devenir le champ d'étude des « analystes » de l'époque :

> *«C'est que je développe une thèse historique : le champ complexe a fixé la pratique de l'analyse, et l'analyse réelle vint donc en second. » [J. Dhombres 2004]*

Les nombres complexes sont nés au XVI ° siècle pour trouver les racines réelles d'une équation du troisième degré à coefficients réels. Pendant près de trois siècles, ils furent appelés et perçus comme « imaginaires ». La géométrie leur donna une représentation qui leur permit de passer du stade de nombre impossible à celui d'objets mathématiques (Argand). Cependant les succès de l'analyse complexe (fonctions holomorphes,…) ont largement contribués à « affirmer » ce statut de nombre.

4.4.4 Evolution de l'introduction des nombres complexes dans les programmes.

A la richesse de l'histoire des nombres complexes, partis de l'algèbre (résolution d'équation) puis ayant finalement envahi la géométrie et l'analyse, correspond une richesse de l'histoire de leur enseignement. La compréhension de ces richesses va permettre d'appréhender l'organisation mathématique du site de cette ROC (site relativement local), comme elle permettrait d'appréhender un site plus global, celui du couple (module/argument).

Remarque introductive

Les élèves rencontrent avec les complexes, le premier ensemble de nombres ne possédant pas la propriété d'être totalement ordonné[160]. Cet obstacle est important mais n'est pas enseigné. Il reste donc transparent mais présent. Nous sommes ainsi à la frontière entre le système de nombres définie par Y. Chevallard[161](90) et le modèle du « corps algébriquement clos » dans lequel tout polynôme de degré non nul admet une racine.

[160] Pour être plus exact, C ne peut être muni d'un ordre prolongeant celui de R. Voir le dernier paragraphe de cette étude.

[161] Le passage des mathématiques à l'algèbre (1990) [p50]

Les années 60

Les complexes sont introduits dans le programme de géométrie de terminale C de juin 1966 dans le paragraphe III parlant des transformations ponctuelles sous la rubrique : similitudes. Le programme précise :

> *« relation avec la transformation définie dans le plan complexe par z'= az + b »*
> *[vu dans G. Cagnac & L. Thiberge, 1967].*

Ce programme marque un net changement avec le précédent, du 6 mars 1962, qui ne mentionnait pas les complexes. Mais le cours de géométrie [vu dans V. Lespinard & R. Pernet, 1965] démontre que « l'ensemble des similitudes directes (composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation [p.313] et des translations) constitue le groupe des similitudes ». Ce groupe est la base d'une des constructions des complexes dans les classes de mathématique supérieure. Dans son livre, R. Gouyon (1961) définit les nombre complexes ainsi que le produit de deux nombres complexes :

> *«Dans le plan xOy où OU est choisi sur Ox,(…). Nous appellerons nombre complexe un mode de détermination, à partir de OU par similitude directe de point double O, de rapport r = OM, d'angle θ =(Ox, OM), : nous dirons que le couple (r,θ) qui détermine OM, est un nombre complexe z appelé mesure complexe de OM (ou d'un vecteur égal) ou affixe de M(…)*
> *r et θ (qui sont les coordonnées polaires de M, soumises à la restriction r >0) sont les modules et argument de z. On écrit r=|z|, θ=Argz, que nous résumerons par z = (r, θ) (…)*
> *Multiplication et division a) Les nombres z et z' définissent des similitudes directes de centre O de rapports r et r', d'angles θ et θ', le produit est toujours, comme pour les nombres réels, le nombre qui définit la similitude produit.*
> *Le rapport et l'angle de cette similitude sont respectivement rr' et θ+θ' on a donc la règle (r,θ).(r',θ')=(rr',θ+θ')(…) »*

Dans cette approche, les propriétés classiques du quotient et du produit de deux nombres complexes sont obtenues directement par application de la règle. Ainsi l'ensemble des nombres complexes muni de la loi multiplicative est un groupe abélien, par conséquent le quotient de deux nombres complexes existe avec la relation « $\frac{(r',\theta')}{(r,\theta)} = (\frac{r'}{r},\theta'-\theta)$ » (p73-75).

Le chemin qui conduit à l'habitat de la ROC part de l'introduction des complexes à partir des transformations, et croise les structures dans sa mise en forme mathématique. Par ailleurs, nous remarquons que la définition d'une similitude évolue. La définition, pour le plan, devient « *le produit d'une homothétie positive par un déplacement* » en 1965. Cette définition était déjà adoptée auparavant dans l'espace[162].

Une approche, avec un point de vue didactique, venant de Belgique est explicitée par M. Schneider (2008). Les nombres complexes sont considérés comme des couples de nombres qui

> *« servent à coder des similitudes du plan dont l'origine est un point fixe » (…)*
> *« La multiplication des couples découle alors de la composée de deux similitudes »*

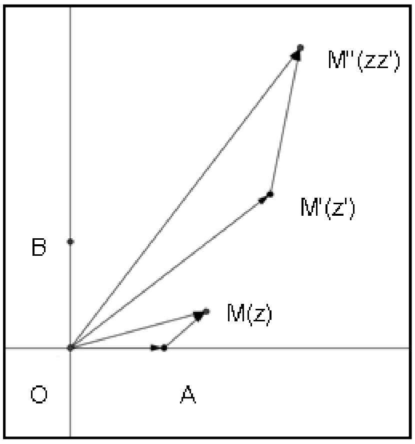
Autre introduction possible du produit de deux nombres complexes

La manière d'introduire le produit ne modifie pas la suite du cours mais permet seulement de construire le concept de produit de deux nombres complexes. Le niveau de rigueur n'est pas académique, nous le voulons assez proche de celui d'Argand.

Posons d'abord que : tout complexe z modélise un vecteur $\vec{u}$ ou un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ dans un repère (O; $\vec{U}, \overrightarrow{U'}$). La somme de deux nombres complexes modélise le vecteur somme des deux vecteurs. Ce vecteur se construit aisément en utilisant la technique du parallélogramme.

La question est alors celle du produit de deux nombres complexes. Le vecteur $\vec{U}$ unitaire d'affixe 1 et le vecteur $\vec{V}$d'affixe z permettent de représenter la multiplication de z×1 (Le triangle OAM est ainsi construit). La multiplication de z' par z s'obtient de même en construisant à partir du vecteur $\overrightarrow{V'}$, et donc du point M', le vecteur $\vec{W}$ obtenu en construisant un triangle OM'M'' directement semblable à OAM (document 84). Le cas particulier du produit de deux nombres réels peut être résolu par une application du théorème de Thalès à l'aide d'une droite auxiliaire. Cette construction est celle de Descartes dans la géométrie.

[162] vu dans Lespinard, 1965, p320.



Document 84. Représentation graphique du produit de deux nombres complexes

Rappelons la démonstration nous avons A(1), M(z), M(z'), M''(zz') avec les propriétés des triangles semblables. Comme l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments les angles

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''}\right)$$

Or, $\frac{OM}{OA}=\frac{OM''}{OM'}$,

en effet, $\frac{|z|}{1}=\frac{|zz'|}{|z|}$

En utilisant le théorème suivant : si deux triangles sont tels que la mesure d'un angle de l'un est égal à la mesure d'un angle de l'autre et que le rapport des deux côtés adjacents à cet angle est égal au rapport des côtés homologues alors ils sont semblables, on obtient le résultat.

Nous avons montré que le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe procédé semblable à celui du paragraphe suivant.

La construction géométrique de l'objet non ostensif au sens d'Y. Chevallard (1994) permet la construction du sens. Pour étayer cette affirmation, nous prenons l'exemple d'un test de positionnement, réalisé en 2007 sous forme d'un Q.C.M. et d'une construction, au début d'année et destiné aux PE1 de l'IUFM de Guadeloupe (document 85).

1. Construisez ci-dessus, la médiatrice d'un segment donné [AB] à l'aide du compas et de la règle non graduée. Précisez la (ou les) propriété(s) de la médiatrice utilisée(s)			
A	B	C	D
La médiatrice d'un segment [AB] est la droite perpendiculaire à ce segment, passant par le milieu de ce segment.	Si un point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors M est équidistant de A et de B.	Si un point M du plan est équidistant des points A et B, alors il appartient à la médiatrice du segment [AB].	Autre (à préciser)

Document 85. Q.C.M. de positionnement année 2007 IUFM Antilles Guyane

Le score obtenu à question 1 est 84% de réponses correctes mais lorsqu'on demande la propriété qui justifie la construction (question 2) on obtient 15% seulement du total de réponses. La construction de l'objet est donc pour une majorité d'étudiants (ayant des parcours différents mais possédant tous une licence), la seule trace qui reste. Elle est donc première dans la construction de concept. Les étudiants peuvent montrer par construction la médiatrice mais n'explicitent plus les propriétés.

La réforme (1971)

Le programme de 1971 (circulaire du 26 juillet 1971) introduit les nombres complexes comme le corps commutatif des matrices de la forme z =$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Cette présentation n'est pas obligatoire :

> *« Remarque : 1) Le professeur, pourra, s'il le préfère, donner tout autre mode de définition, algébrique ou géométrique, des nombres complexes ; dans ce cas, il fera connaître l'isomorphisme entre le corps ainsi constitué et le corps C des matrices* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
>
> *2) La bijection de C dans R² :* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *sera interprétée comme associant à z un vecteur-image (plan vectoriel euclidien) et un point image (plan affine euclidien) ; z est l'affixe du vecteur ou du point. L'addition et la multiplica-*

> *tion dans C peuvent être interprétées, soit dès à présent soit lors des similitudes»*[163].

Dans cette approche, le chemin menant à notre habitat passe par l'algèbre linéaire. Si une majorité d'ouvrages s'en tient au programme, certains utilisent la liberté procurée par le programme et préfèrent présenter **C** comme une extension quadratique du corps initial. Le manuel de la collection P. Vissiot[164] en est un exemple : il introduit la représentation trigonométrique des nombres complexes après « avoir associé à chaque nombre complexe $(a+\ ib)$ de module un, l'angle $\hat{\theta}$, unique, dont la mesure θ, en radian vérifie $\cos\theta = a$ et $sin\theta = b$. Alors le nombre complexe s'écrit $\cos\theta + i\ sin\theta$. Il définit alors « *le symbole* $[\rho,\theta]$ *appelé forme trigonométrique de z* » [p16] à partir du vecteur unitaire déterminé par la droite (OM) : « *Le produit de deux nombres complexes s'obtient aisément sous forme trigonométrique* », en appliquant les formules d'addition obtenues par isomorphisme de groupe entre les nombres complexes de module un et le groupe des angles.

La contre réforme

Les nombreuses critiques à propos de cette réforme modifient les objectifs du nouveau programme 1983 pour les classes de terminales[165]. Aucune méthode n'est imposée pour l'introduction des nombres complexes.

Dans le manuel de la collection *Istra*[166], une présentation historique du corps des complexes est faite, avec les équations du troisième degré. Elle se fait mathématiquement à partir de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ en définissant une multiplication dans $\mathbf{R}^2$ et en « confondant » le couple (a,0) avec le réel a et en notant *i* le vecteur (0,1). La définition de l'inverse et celle de l'argument d'un nombre complexe non nul (angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$) introduisent la forme

[163] Ministère de l'Éducation Nationale, INRDP, Mathématiques, classe de second cycle, horaires, programmes, instructions (1971) p119.

[164] Condamine M. (1971) *Algèbre* collection P Vissio Delagrave.

[165] Classes de seconde, première et Terminale : arrêtés des 26 janvier 1981, 30 août 1985, et notes de service des 10 octobre 1984 et 5 septembre 1985 in Mathématiques classes de seconde, première et terminale, Ministère de l'Education, édition CNDP, brochure 001F6010, réédition 1987.

[166] Istra (1983) *mathématiques terminale C et E* (équipe de professeurs de l'Université Louis Pasteur et de professeur de l'académie de Strasbourg).

trigonométrique du nombre complexe *z*. Le manuel de la collection *Gourion*[167] longe le même chemin sans incorporer de partie historique. Dans l'ouvrage de la collection *Dimathème* de 1983[168], la présentation procède par des extensions successives de l'ensemble des entiers naturel **N** pour permettre à certaines équations d'avoir des solutions. Dans cette introduction, la clôture algébrique de **C** est sous jacente. Les années 90 avec les livres des collections *Terracher* (1992)[169] et *Fractale (*1992)[170] suivent le même chemin en enlevant toute « construction détaillée » qui n'est pas envisagée conformément au BO de 1997.

En 1992, le chapitre nombres complexes du livre de Terracher commence sur un théorème admis qui fonde le chapitre :

> *« Théorème 1 : Il existe un ensemble C contenant IR, et vérifiant :*
> *C est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celle de R et suivent les mêmes règles de calcul.*
> *Il existe un élément i de C tel que i²=-1*
> *Tout élément de C s'écrit de manière unique : z=a+ ib (a et b réels)».*

Le reste du chemin est conforme aux cheminements précédents.

Et maintenant

L'introduction des complexes d'aujourd'hui part des coordonnées polaires (en 1°S en 2007) vers la forme algébrique en terminale S comme en 1962 mais le chemin emprunté n'a pas le même fondement :

- en 1962 : l'outil est celui du« groupe de transformations » ;
- en 2007 : l'histoire du nombre (passage du statut d'« astuce » à celui de nombre ou la construction du sens d'un nombre appelé nombre complexe).

En effet l'invention par Argand d'une réalité pour les nombres complexes (avec son plan) a permis la transformation d'un état d'« astuce » purement calculatoire (résolution d'une équation de troisième degré par Cardan) au concept de nombre. Mais la plupart des manuels n'ont

---

[167] Gourion et al. (1983). *Mathématiques TC algèbre et géométrie.* Nathan.

[168] Dimathème N. et al. (83) , I*nformation Terminale C. Collection N. Dimathème*.

[169] Terracher P. (1992) *Analyse et probabilités* Hachette lycées Collection C.Artigues

[170] Bontemps G.et al (1992) *Algèbre et Géométrie Collection FRACTALE*, Bordas.

pas suivi cette modification, l'introduction historique des nombres complexes reste encore celle des « Imaginaires ».

4.4.5 Construction du site de la ROC

Organisation mathématique

L'organisation mathématique de la ROC dépend essentiellement de la fonction exponentielle qui comme l'affirme W. Rudin (1974) :

> *« C'est sans aucun doute la fonction la plus importante en mathématiques ».*

Celle-ci est définie par la formule $exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Cette série est absolument convergente et uniformément convergente pour tout ensemble borné du plan ce qui sert à démontrer la continuité de cette fonction. Une conséquence de l'absolue convergente de cette série est : pour tout nombre complexe z et z' on a $exp(z) \times exp(z) = exp(z + z')$. Ce résultat donne en corollaire l'objectif de notre ROC. L'habitat de ce non-ostensif efficace est caché à ce niveau, la ROC permet d'appréhender une technique de l'enseignement naturalisée par la notation $e^z = cos\, z + i\, sin\, z$. Rappelons que la notation $e^{i\theta}$ est due à Euler.

Une solution de la question ROC

Soient z_1 *et* z_2 deux nombres complexes non nuls. Posons $|z_k| = r_k$ et $arg(z_k) = \theta_i$ pour $k = 1$ ou $k = 2$. On utilise le prérequis i) : les relations précédentes équivalent à

$$z_k = r_k (cos\ \theta_k + i\ sin\ \theta_k).$$

Ainsi

$$z_1\, z_2 = r_1\, (cos\theta_1 + i\, sin\theta_1)\, r_2\, (cos\theta_2 + i\, sin\theta_2)$$

$$= r_1\, r_2\, (cos\theta_1\, cos\theta_2 - sin\theta_1\, sin\theta_2 + i\, (cos\theta_1\, sin\theta_2 + sin\theta_1 cos\theta_2)).$$

D'après le prérequis ii), on a

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, (cos\, (\theta_1 + \theta_2) + i\, sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Or $r_1\, r_2$ comme produit de deux réels strictement positifs, est strictement positif. D'où, d'après le prérequis i), $|z_1\, z_2| = r_1\, r_2$ et $arg\, (z \times z') = \theta_1 + \theta_2$ *à* 2π près.

Finalement $|z_1\, z_2| = |z_1||z_2|$ et $arg\, (z \times z') = arg\, (z) + arg\, (z')$ *à* 2π près.

Une lecture attentive de l'énoncé permet de déterminer les objets particuliers. Ainsi dans le prérequis, les objets module et argument d'un nombre complexe, l'équivalence, les réels positifs, la forme trigonométrique des nombres complexes sont présents (document 86). Dans la partie ii) les quantificateurs, les réels et la trigonométrie sont les objets ou choses présents dans le paysage. Par ailleurs, le résolveur utilise dans sa solution la propriété : le produit de deux réels positifs est positif. Plus précisément, $\mathbf{R}^+$ muni de la loi $\times$ est un monoïde. Il doit aussi utiliser les opérations et leurs propriétés. Enfin, la notion de classe d'équivalence est prégnante dès le prérequis avec l'égalité modulo $2\,\pi$.

Les deux branches du prérequis referment la ROC : la forme trigonométrique d'un nombre complexe et les formules d'addition. Donnant les techniques principales, ce prérequis impose la forme trigonométrique, petite partie de la richesse du déchiffrage historique.

Substrat, choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Concept 2	Concept 3
Quantificateur Equivalence Egalité modulo $2\,\pi$ écritures mathématiques Stratégie	Trigonométrie Nombres complexes Module Argument forme trigonométrique opérations sur les nombres complexes Représentation géométrique	Règle de calcul dans **C** Compatibilité de l'ordre avec la multiplication dans R Classe d'équivalence Forme trigonométrique Trigonométrie	Corps **C** Monoïde $\mathbf{R}^+$ Relation d'équivalence R corps totalement ordonné	Théorie des corps Analyse complexe

Document 86. Site mathématique local de la ROC

4.4.6 Construction du site de la question de cours

Les différentes méthodes

Nous nous restreignons à rédiger des solutions dans les limites du programme officiel (2002-2010) de Terminale S (partie commune).

Notre rédaction n'est pas concise car nous recherchons dans chaque pas de la démonstration les notions protomathématiques, paramathématiques et mathématiques. Cette enquête permet construire les différentes strates du site.

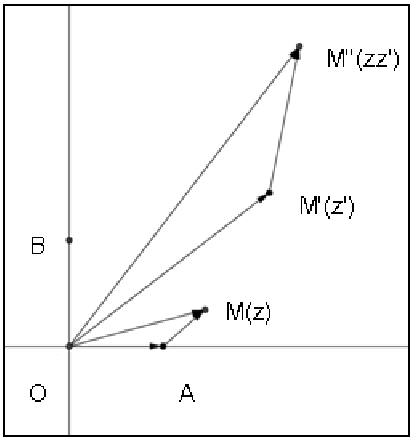
Première méthode

La première méthode consiste à procéder par équivalence pour conclure en utilisant une seule des composantes du prérequis. La "ruse" utilisée en référence à l'étude réalisée dans le paragraphe 3.2.1.intitulé « en analyse réelle autour du couple exponentiel/logarithme » est la définition du quotient de deux nombres complexes. La deuxième composante du prérequis n'est pas utilisée

Rédaction de la première méthode	*Concepts utilisés :*
Soient z et z'deux nombres complexes non nuls Notons que $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z') [2\pi]$ équivaut à $arg(\frac{z}{z'}) + arg(z') = arg(z) [2\pi]$. D'après le prérequis $arg(\frac{z}{z'}) + arg(z') = arg(\frac{z}{z'} \times z') [2\pi]$. Or $\frac{z}{z'} \times z' = z$. Ainsi $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z') [2\pi]$.	• Equivalence • les règles de simplification sur l'égalité ou translation d'une identité • le prérequis • quantificateur • la substitution • les règles de simplification • la commutativité de l'addition

Deuxième méthode

Cette méthode utilise la partie historique du paragraphe 3.2.3 intitulé en analyse/géométrie complexe : argument et module d'un produit. Nous reprenons les notations de ce paragraphe.

Rédaction de la deuxième méthode	*Concepts ou techniques utilisés*
En reprenant les notations $O(0), A(1), M(z), M'(z')$ du paragraphe 4.4.3 le pré requis rappelle que les triangles OAM et $OM'M''$ sont semblables Or $\frac{OM}{OA} = \frac{OM''}{OM'}$, en effet $\left\lvert\frac{z}{1}\right\rvert = \left\lvert\frac{zz'}{z}\right\rvert$. En utilisant le théorème suivant : si deux triangles sont tels que la mesure d’un angle de l’un est égal à la mesure d’un angle de l’autre et que le rapport des deux côtés adjacents à cet angle est égal au rapport des côtés homologues alors ils sont semblables, on conclut que les triangles sont semblables. Nous reproduisons le document 84.  Soit M’ le point d’affixe l’inverse de z. Le produit $z \times \frac{1}{z}$ étant un réel égal à 1, nous pouvons affirmer que l’inverse de z a pour argument l’opposé de z. En effet, en appliquant la construction de la partie historique reprèsenté ci-dessus, avec M'' étant le point A on a d’aprés les prérequis le triangle $OM'A$ doit être directement semblable à OAM donc l’angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ doit être égale à celui de $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA}\right)$. Pour le quotient de z/z’, on sait que $\frac{z}{z'} = \frac{1}{z'} \times z$. Le point $M(1/z')$ a déjà été construit, la constuction du produit nous donne directement que $arg(\frac{z}{z'}) = arg\left(\frac{1}{z'}\right) + arg(z) = -arg(z') + arg\ (z)[2\pi]$.	Définition de l’inverse, triangle directement semblable, Utilisant de la définition du produit.

Troisième méthode

Cette méthode consiste à utiliser la définition du module pour définir le quotient de deux nombres complexes. Les deux composantes du prérequis sont utilisées et l'utilisation reste d'importance égale.

Rédaction de la troisième méthode	*Concepts ou techniques utilisés*
Or $\frac{z'}{z} = z' \times (\frac{1}{\lvert z \rvert^2} \times \bar{z})$; on applique les prérequis à cette identité, pour obtenir : $arg\left(\frac{z'}{\lvert z\rvert^2} \times \bar{z}\right) = arg\left(\frac{z'}{\lvert z\rvert^2}\right) + arg(\bar{z})\ [2\pi]$. D'après les prérequis pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z' on a*:* $arg(z') = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)\ [2\pi]$. Remarquons que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{w}\right)$ *où* $\lambda \in \boldsymbol{R^{*+}}$ d'où $arg\left(\frac{1}{\lvert z\rvert^2} z'\right) = \arg(z')\ [2\pi]$. D'autre part $arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$. D'où $$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi].$$	Existence de l'inverse de z (lien entre le nombre son module et son complexe conjugué) Angle de vecteurs Argument du complexe conjugué

Quatrième méthode

Cette méthode utilise soit l'ostensif : forme trigonométrique, soit l'ostensif : forme exponentielle. Les deux composantes du prérequis sont nécessaires. Le raisonnement se morcelle en deux étapes

Rédaction de la quatrième méthode	*Concepts ou techniques utilisés*
Nous savons que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments sont égaux. Prenons la forme trigonométrique $z = [\|z\|, t]$ *et* $z' = [\|z'\|, t']$. D’une part, nous savons que $\| z\|. \|z'\|= \| z .z'\|$ et, d’autre part, nous avons dans les prérequis $arg\ (zz') = arg\ (z) + arg\ z'[2\pi]$. Donc nous avons $z.z' = [\ \|z.z'\|, t + t']$ ou $[\|z\|, t].[\|z'\|, t'] = [\|z.z'\|, t + t']$ $(*)$ Posons $z' = 1/z$, alors on a $z.z' = 1 = [1{,}0]$. En effet $\arg(1) = (\vec{u}, \vec{u})$ d’après la deuxième composante du prérequis. Donc $\|z.z'\|=1$ et $arg\ (z\ )+ arg\ z'=0[2\pi]$. D’où $arg(1/z) = - arg(z)\ [2\pi]$. De plus $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. Nous avons donc en prenant les mêmes notations et en utilisant $(*)$: $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'} = [\|z\|,t].[\|\frac{1}{z'}\|,-t'] = [\left\|\frac{z}{z'}\right\|, t-t']$. D’où $$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi].$$ **Nous ne refaisons la même démonstration en utilisant la notation** $e^{it} = cos\ t + i\ sint$.	Forme trigonométrique et notation de cette forme Définition de l’inverse Et lien entre quotient et produit par un inverse Angle de vecteurs Argument du complexe conjugué Forme exponentielle et unicité modulo 2π de cette forme

Cinquième méthode

La stratégie consiste à découper le raisonnement en deux étapes. Chaque étape est justifiée par une des composantes du prérequis. Pour la première étape, la ruse est la définition de la définition de l'inverse. Dans la deuxième étape, l'utilisation de l'inverse pour définir le quotient est une ruse nécessaire.

Rédaction de la cinquième méthode	*Concepts et techniques utilisés*
Calculons l'argument de *1/z,* pour cela utilisons le fait que *1/z* est l'inverse de *z*. On a donc	La définition de l'inverse de *z*
$arg\ (\frac{1}{z}\times z\ ) = arg\ (1)\ [2\pi].$	Argument des réels positifs
Or, d'après le prérequis,	« les choses sont inverses leurs arguments sont opposes »
$arg(1)=(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})\ [2\pi].$	
Ainsi	Symétrie de l'égalité
$arg\ (1)= 0\ [2\pi].$	Un quotient est le produit du numérateur par l'inverse du dénominateur et deux fois le prérequis
On utilise la relation donnée dans les prérequis *:*	
$arg\ (\frac{1}{z}\times z\ )= arg\ (1/z)+ arg\ z\ [2\pi].$	Quantificateur universel
D'où	
$arg(1/z) = - arg(z)\ [2\pi].$	
Par ailleurs, $arg(\frac{z}{z'}) = arg\,(z\times\frac{1}{z'})\,[2\pi].$	
On utilise à nouveau le prérequis :	
$arg(\ z\times\frac{1}{z'}\ )= arg\ z + arg\ (1/z').$	
Or $arg(1/z) = - arg(z)\ [2\pi]$. Ainsi	
$arg(\frac{z}{z'})= arg(z) - arg(z')\ [2\pi].$	

Sixième méthode

Cette méthode découpe la « difficulté » en deux étapes. La première étape consiste à déterminer la forme trigonométrique de l'inverse de z. La ruse de cette étape est la définition de l'inverse avec le module. La deuxième étape part d'une ruse, remplacer le quotient par un produit. A partir de cette forme on peut obtenir le résultat en utilisant la première étape.

Rédaction de la sixième méthode	*Concepts ou techniques utilisés*
On sait que $\lvert z.z'\rvert = \lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$ et nous connaissons la définition et l’unicité de la forme trigonométrique d’un nombre complexe. D’après les prérequis nous avons *zz’=* $\lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$ *(cos (t+t’) + i sin(t+t’)).*$(*)$ Si *z’* $\neq$ *0*, on a $z'^{-1} = \frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{1}{\lvert z'\rvert}(\cos t' - i\sin t') = \frac{1}{\lvert z'\rvert}(\cos(-t') + i\sin(-t')).$ Et toujours avec *z’* $\neq 0$ en utilisant $(*)$ $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'} = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}[\cos(t-t') + i\sin(t-t')].$ D’où $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi].$ **Remarque** Donnons une solution utilisant la même technique avec un ostensif différent. D’après les prérequis nous avons *zz’=* $\lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$ *(cos (t+t’)+ i sin(t+t’)).* Si z’ $\neq 0$ $z'^{-1} = \frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{\overline{z'}}{\lvert z'\rvert^2} = \frac{[r,-\theta]}{r^2} = [\frac{1}{r},-\theta].$ Et toujours avec z’ $\neq 0$ on en déduit le quotient en utilisant la formule du quotient et celle de l’inverse. D’où $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi].$	Module d’un produit, forme trigonométrique Définition et existence de l’inverse et lien avec le complexe conjugué. Angle de vecteurs Argument du complexe conjugué Complexe conjugué Argument du complexe conjugué Forme trigonométrique Définition et existence de l’inverse et lien avec le complexe

Septième méthode

Cette méthode utilise la définition de l'inverse à partir du nombre complexe conjugué. La deuxième composante du prérequis est utilisée d'une façon conséquente.

Rédaction de la septième méthode	*Concepts ou techniques utilisés*
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrons que $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')) \, [2\pi]$. Or $\frac{1}{z'} = \frac{1}{\lvert z'\rvert^2} \times \overline{z'}$; on applique les prérequis à cette identité, pour obtenir : $\arg(\frac{1}{z'}) = \arg(\frac{1}{\lvert z'\rvert^2}\overline{z'}) = \arg(\overline{z'}) = -\arg(z') \, [2\pi]$. En effet, d'après les prérequis, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe $\overline{z}$ on a : $arg\,\overline{z'} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) + 2k\pi$. Or, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$, on a $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{w}\right)$. D'où $\arg(\frac{1}{\lvert z'\rvert^2}\overline{z'}) = \arg(\overline{z'})$. Or $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'}$. Donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z.\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \, [2\pi]$	Définition de l'inverse et lien avec le complexe conjuguée Argument du nombre complexe Argument du nombre complexe conjugué

Construction du site local de la question de cours

Nous avons vu que chaque méthode utilise des organisations de connaissances différentes basées sur ce que nous avons appelé « ruse(s) ». Les ruses utilisées sont, soit des définitions à redécouvrir pour le résolveur car "triviales", soit l'utilisation d'autres concepts comme par exemple : le module. Le site local de la question de cours est restreint à la présentation actuelle de **C,** mais donne cependant la vision d'une partie de la richesse dévoilé par le déchiffrage historique (document 87).

Substrat	Objets	Techniques	Concepts 2	Concepts 3
Quantificateur Equivalence angles Egalité modulo 2π Stratégies	Plan complexe Repère orthonormal direct. Ensemble des naturels Ensemble des complexes Opérations dans les complexes Opération dans les réels Argument d'un produit d'un quotient de deux nombres complexes Vecteur Angle de vecteurs Identité Egalité à 2π près	Règles de calcul dans **C** Translation d'une identité Forme trigonométrie Module Complexe conjugué Forme exponentielle Représentation géométrique Produit de deux complexes Classes d'équivalence	corps **C** groupe **(R,+)** La symétrie de l'égalité La substitution Espace vectoriel Equivalence Quantificateur Jeu modèle-système Morphisme	Théorie des corps Analyse complexe

Document 87. Site mathématique local de la question de cours

Nous remarquons que l'exercice 7 des annales zéro[171] (document 88) est très proche de la question de cours étudiée. Le site voisin de cet exercice contient cependant un nouvel objet :

[171] Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Direction de l'Enseignement scolaire (eduscol.education.fr/bac).

le module. Ainsi les méthodes utilisant cet objet dans la définition du produit ou du quotient ou de l’inverse sont favorisées.

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormal direct (O, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$). On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : | z |= $\left\|\overrightarrow{w}\right\|$

arg (z) = $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ *définie à 2k π près, avec k entier relatif (avec k entier relatif).*

Dans cet exercice, on prend comme prérequis le résultat suivant :

Si z et z’ sont deux nombres complexes non nuls alors arg(zz’) = arg(z)+arg(z’) (à 2kπ près).

1/ Soit z et z_ sont deux nombres complexes non nuls, démontrez que

arg($\frac{z}{z'}$*) = arg(z) – arg(z’)(à 2k*π *près).*

Document 88. Extrait des annales zéro 2004

4.4.7 Complément : C non totalement ordonné (par une relation d’ordre prolongeant celle de R)

On ne peut définir une relation sur C « être strictement positif » vérifiant : Pour tout z complexe :

(i) une, et une seule, des trois relations z > 0, z = 0, z < 0 est vraie,

(ii) Si ω > 0 et si z > 0 alors :

  a. ω + z > 0 (conservation de positivité pour l’addition),

  b. ωz > 0 (conservation de la positivité pour la multiplication).

Preuve

Si z > 0 et z’ > 0 alors zz’ > 0. En effet, si z < 0, on a –z > 0 par (ii).a. et par (i). Ainsi, si z<0 et z’ < 0 alors zz’ = (–z)(–z’) > 0 par (ii).b.

En particulier, si on prend z = z’ on obtient $z^2 > 0$ pour tout complexe non nul. Or $i^2 = -1$ et i est non nul. C’est donc impossible.

4.4.8 Conclusion

La ROC (argument d’un produit de deux nombres complexes) étudiée est refermée par son prérequis et rend le site local peu complexe. Pour l’élève, les techniques présentes comme

objets dans la ROC ont été enseignées au cours de l'année de terminale : elles sont donc nouvelles, tandis que les ruses sont des techniques anciennes.
Dans l'étude de la question de cours, la première solution ne se servant que d'une composante du prérequis questionne l'élève ou le professeur sur le contrat d'évaluation. Pour chaque question doit-on utiliser toutes les composantes du prérequis pour établir la solution ? Ou cette autre question : chaque composante du prérequis est-elle reliée à chaque question ?
Ainsi cette question de cours donnant un prérequis sur deux questions laisse à l'élève le soin d'organiser sa solution. Elle reste ainsi ouverte.

Nous allons maintenant étudier un exercice de Capes d'oral 2 pour élargir le champ d'action du concept de "site mathématique local".

4.5 Exemple 4 : oral II de Capes.

Site et préparation à un concours : l'exemple d'un dossier proposé au CAPES externe

Nous illustrons l'utilisation du site dans le cadre de la préparation à un concours pour l'exemple du dossier proposé au CAPES externe de mathématiques. La forme des épreuves orales changera à partir de la session 2011. Cependant la première partie de l'épreuve sur dossier (Oral 2) reprend des caractéristiques voisines de l'épreuve actuelle.

4.5.1 L'épreuve d'oral choisie

Nous nous basons sur le dossier proposé le 3 juillet 2007 à la deuxième épreuve de l'oral du CAPES externe de mathématiques (document 89). Rappelons que l'objectif central attribué par l'institution aux épreuves orales de ce concours est d'*« évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné*[172] ». La première épreuve est la classique « leçon » tandis que, depuis trois ans, la deuxième épreuve repose sur un bref dossier sur un thème donné comportant un exercice proposé par le jury et un texte indiquant le travail demandé au candidat. Ce travail comprend obligatoirement la recherche d'exercices sur le thème du dossier. Pour chaque épreuve le candidat dispose de 25

[172] B.O.spécial n°5 du 21 octobre 1993, loc. cité rapport du jury CAPES 2007.

minutes d'exposé et de 20 minutes d'entretien avec le jury. Enfin, tous les candidats passant cette épreuve le même jour se voient proposer le même dossier.

Les difficultés de cette épreuve sont au moins au nombre de trois : la recherche de la solution de l'exercice proposé par le dossier, le choix des exercices et enfin les questions du jury. Ces trois difficultés sont renforcées par un temps de préparation limité à deux heures. Nous allons montrer que la construction du site au travers de l'élaboration d'une solution peut constituer un canevas du travail du candidat attendu par le jury.

Thème : Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. ***L'exercice proposé au candidat***

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln à partir d'un calcul d'aire. On suppose connue la fonction exp et la fonction ln est définie comme réciproque de cette fonction.

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

2) Soit x un réel strictement supérieur à 1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions ln et exp, calculer $\int_1^x \ln t \; dt$ *. En déduire une primitive de la fonction ln sur l'intervalle]0,+ ∞ [.*

2. ***Le travail demandé au candidat***

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.

Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) énoncer les propriétés utilisées pour résoudre cet exercice ;

Q.2) rédiger pour des élèves de terminale S un corrigé de la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question Q.2) ;

b) d'autres exercices sur le thème « Calcul d'intégrales par des méthodes variées ».

Document 89. Dossier du 3 juillet 2007

4.5.2 La construction du site de l'exercice proposé au candidat

Comme indiqué dans le chapitre 3, l'inventaire des objets du site se fait lors d'une lecture de l'énoncé. Ainsi, les objets de notre étude sont les suivants : réels, intervalle, fonction continue, fonction réciproque, fonction exp, fonction ln, primitive, intégrale, courbe, plan et repère orthonormal. Nous allons construire l'essentiel du site (substrat, techniques et concepts) autour d'éléments de correction commentés de l'exercice. (Voir document 90 pour la première question.)

On remarque que l'énoncé donne des conditions suffisantes (mais classiques) pour l'existence de la réciproque de *f*, valides pour l'application ultérieure à la fonction logarithme. Ne demandant pas explicitement de justifier l'existence de f^{-1}, l'énoncé laisse implicite la technique[173] justifiant cette existence.

Soit $M(x,y)$ un point de la courbe représentative de C_f. On rappelle que

$$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ y = f(x) \end{cases}$$

Soit S la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice et soit M' l'image de M par S. On sait que M' a pour coordonnées (y,x). Or

$$\begin{cases} x \in I \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(I) \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

Ainsi, on a

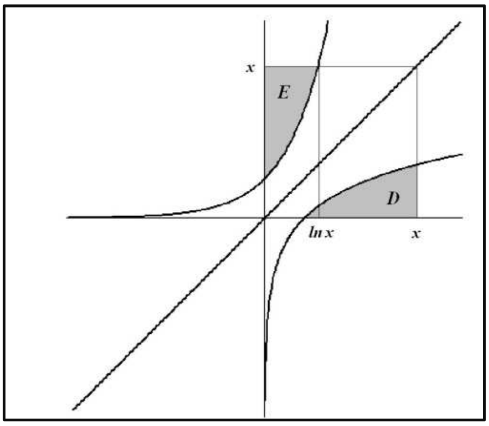
$$\begin{cases} y \in f(I) \\ x = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow M'(y,x) \in C_{f^{-1}}$$

Par transitivité de l'équivalence, il vient $M \in C_f \Leftrightarrow S(M) \in C_{f^{-1}}$.

Document 90: une correction possible de la première question

Pour faciliter la lecture, notons *D* l'ensemble du plan limité par la courbe représentative de la fonction *ln*, l'axe des *x* et la droite parallèle à l'axe des *y* et passant par le point de coordonnées (x,0) (voir document 91).

[173] Par exemple, le théorème de bijection suivant : toute fonction strictement monotone sur un intervalle *I* est une bijection de *I* sur *f*(*I*).



Document 91. Figure associée à la question 1

On attend du candidat qu'il remarque que $A(D) = \int_1^x \ln t\, dt$ (note au lecteur[174]) et qu'il sache, selon un contrat didactique classique, contextualiser la première question de l'exercice pour calculer $A(D)$. De fait, l'image par S de D est l'ensemble E limité par la courbe représentative de la fonction exp, l'axe des y et la droite parallèle à l'axe des x et passant par le point de coordonnées $(0,x)$. Toute réflexion[175] est une isométrie qui – à ce titre – conserve les aires. Ainsi, $A(D) = A(E)$. Or l'aire de l'ensemble E peut s'obtenir par différence entre l'aire du rectangle R de côtés de longueur respective $\ln x$ et x et celle de l'ensemble G limité par la courbe représentative de la fonction *exp*, l'axe des x et la droite parallèle à l'axe des y passant par le point $(\ln x,0)$.

La méthode s'appuie donc sur le concept d'aire vu sous deux entrées, celle de l'aire d'une figure géométrique élémentaire pratiquée par le candidat depuis le primaire et celle de l'aire sous la courbe. Cette notion reste protomathématique au niveau étudié, comme la lecture des commentaires du programme le montre :

> *« Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions; tout développement théorique est exclu ». La notion d'aire (en tant que telle) reste un des substrats majeurs[176], tandis que les deux entrées évoquées (calcul de*

[174] Le lecteur remarquera l'implicite qui veut que $A(D)$ désigne l'aire de l'ensemble D.

[175] La conservation d'aire par symétrie orthogonale est donc une des techniques essentielles du site.

[176] Mais la notion d'aire ne reste-t-elle pas à ce niveau protomathématique dans la plupart des cursus de formation d'enseignants de mathématiques ?

d’aire de polygones usuels avec additivité, lien entre l’intégrale et l’aire sous la courbe) ressortent des techniques du site mathématique de cet exercice.

Pour achever la résolution, la relation d’aires $A(D) = A(R) - A(G)$ donne

$$\int_1^x \ln t\, dt = x \ln x - \int_0^{\ln x} e^t dt\ .$$

Or

$$\int_0^{\ln x} e^t dt = \left[e^t\right]_0^{\ln x} = x - 1,$$

ce qui donne au théorème fondamental du calcul intégral le statut de technique du site mathématique. Au final, on obtient

$$\int_1^x \ln t\, dt = x \ln x - x + 1.$$

L’exercice proposé réserve une ultime difficulté au résolveur. La formule ci-dessus, n’est *a priori* valide que pour *x* strictement supérieur à 1 compte tenu de la technique de résolution proposée. Mais une simple dérivation permet de montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x - x + 1$ est bien une primitive de la fonction ln sur son domaine de définition.

Remarquons l’article indéfini « une » du nom primitive, qui s’oppose à « la primitive …», permettant de souligner de façon implicite l’existence de plusieurs primitives. Nous classons ainsi articles et nombres[177], ou plus exactement leur usage dans un texte de mathématiques, dans le substrat.

Remarques

La partie « Q.2 » du travail demandé au candidat est une question classique des trois dernières sessions du concours. Une réponse peut être obtenue par lecture des rapports du jury précédents ce concours. Cependant il est clair que l’intégration par parties est la technique classique pour obtenir une primitive du logarithme népérien.

[177] Pour un candidat résolveur l’article une de « une primitive » fait référence à la fois à une comme nombre 1 et à une parmi une infinité. Dans un texte de mathématiques, l’article indéfini « un » suivi d’un nom indique qu’on considère un exemple générateur de la catégorie auquel appartient le nom. Par exemple : « un carré dont la longueur du côté mesure trois centimètres », ou – dans le texte de l’exercice – « un intervalle ».

Substrat	Objet	Techniques	Concept (2)	Concept (3)
Transitivité de l'équivalence	Réel Intervalle Fonction continue Fonction réciproque Fonction exp Fonction ln	Th. de bijection Fonction exp	Th. des valeurs intermédiaires	Propriétés de **R**
Aire d'une partie du plan	Primitive Intégrale	Th. fondamental du calcul intégral	Caractérisation FCD Intégrale de Riemann Ensemble quarrable	Intégration
Implicites langagiers (articles et nombres)	Courbe Plan Repère orthogonal Symétrie	Propriété de l'aire Conservation d'aire par réflexion Forme analytique de la réflexion d'axe la première bissectrice	Isométrie	Espace affine euclidien

Document 92. Site mathématique local élémentaire du sujet[178]

4.5.3 Discussion : l'utilisation du site

Du point de vue mathématique, la niche de la fonction logarithme se confond avec celle de la fonction exponentielle, comme le montre le site de la ROC de la session 2006 du Baccalauréat série S Antilles Guyane (document 16). Ainsi un idéal (théorique) pourrait sembler être une découverte simultanée par l'élève des deux éléments de ce couple. Cependant l'organisation des connaissances prescrite par l'institution structure dans le temps l'introduction de ces fonctions. Nous ne développons pas l'approche institutionnelle du couple exponentielle/logarithme mais nous renvoyons le lecteur à notre étude liée à la ROC mentionnée (Chapitre 3).

Dans le sujet d'oral étudié, le prérequis organise donc les connaissances du couple ln/exp, selon la première introduction proposée par les commentaires du programme de 2002, celle où l'objet fonction logarithme possède comme technique la fonction exponentielle.

La rédaction du prérequis n'est pas d'une rigueur académique, les ensembles de définition, les ensembles image ne sont pas indiqués. Cette indication est fournie habituellement dans les

[178] La lecture du paragraphe 4.6 permet de comprendre le raccourci « implicité » par la flèche reliant la caractérisation FCD au corps des réels.

énoncés de terminale pour des raisons d'apprentissage du concept de bijection, complexe pour un élève de terminale. Cette absence, sans aucun doute volontaire, permet au passage d'évaluer une compétence parfois non acquise par les étudiants sortant de licence, comme le montrent les résultats d'un exercice posé pendant quatre ans aux étudiants préparant le CAPES de mathématiques à l'IUFM de Guadeloupe[179].

En outre, les organisations possibles en terminale S de la niche du couple ln/exp ne vivent que par leurs équivalences. (Un objet mathématique pouvant être défini par plusieurs propriétés caractéristiques équivalentes.) Cette particularité, propre aux organisations mathématiques, donne au professeur, si le programme le permet, un espace de liberté ou d'incertitude. L'exercice étudié ici joue sur les équivalences entre les diverses organisations possibles.

Construire des réponses au questionnement du jury

Les premières questions posées par le jury ont souvent pour objet de faire préciser aux candidats des éléments de sa prestation. Cette partie, propre à chaque prestation, n'est pas abordée ici. L'objet de ce paragraphe est plutôt une analyse des techniques présentes dans le site dans le cadre du programme de terminale. Ceci montrera qu'en construisant puis en analysant le site, le candidat peut effectivement se préparer aux questionnements du jury. Le site est structuré en trois parties :

- les théorèmes classiques sur les fonctions monotones, continues et dérivables,
- le « chapitre » intégration et notamment le théorème fondamental du calcul intégral,
- la symétrie et ses propriétés.

La première partie occupe une partie importante du programme de terminale et trouve sa pleine expression dans le début du premier cycle universitaire. Elle est donc centrale dans le programme du concours. Sans être exhaustif, nous pouvons préciser quelques questions relatives à la technique présente (un ou l'autre des théorèmes de bijection classiques). Le candidat doit se préparer à discuter les différents objets de cette technique (fonction injective, surjective, ensemble de définition, ensemble image, etc.) De manière concrète, le candidat peut

[179] Cet exercice demande de résoudre l'équation $\sin x = b$, d'inconnue x. Une première question, bien traitée à 50%, demande de résoudre $\sin x = \sin a$. Pour la résolution de l'équation initiale, l'oubli de l'ensemble image de la fonction sinus fait tomber le taux de succès à moins de 30%. La construction du site de l'équation permettrait de soulever cette question.

avoir à préciser l’hypothèse donnant l’injection, celle donnant la surjection dans ce théorème. Il aura à faire le lien entre les propriétés de monotonie et d’injection, à examiner certains cas particuliers (par exemple, à préciser l’image d’une application continue strictement monotone sur un intervalle ouvert, un segment). Il peut être confronté à d’autres exemples classiques d’application de ce théorème.

L’interrogation de la technique « théorème fondamental du calcul intégral » induit des questions portant, en premier lieu, sur l’introduction de l’intégrale (en classe de terminale) et, en deuxième lieu, sur la justification de ce théorème (par des concepts issus de la théorie de l’intégrale de Riemann, disponibles dans le cursus du candidat). Les premières questions ramènent à la notion d’aire, notion déjà mentionnée comme protomathématique. Elles demandent une certaine maîtrise au candidat qui devra « faire la part des choses » en se montrant conscient que cette notion n’est pas mathématisée à ce stade (ni, souvent, dans son cursus). Ces questions ramènent également au lien entre intégrale et primitive, à l’objet du calcul intégral. (Est-ce de calculer des aires, ou des primitives ?) Le rapport du jury en indiquant que *« le lien entre aire, intégrale et primitive a souvent été confus »* montre que ces questions ont bien été effectivement posées mais aussi qu’elles n’ont pas obtenu de réponses très satisfaisantes. Dans les technologies sous jacentes, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée (caractérisation FCD), permettant de déterminer l’ensemble des primitives d’une fonction donnée, va être largement abordée du point de vue mathématique dans le paragraphe 4.6 à laquelle nous renvoyons donc.

Le dernier point est celui pouvant donner lieu au questionnement le plus large d’un point de vue curriculaire et mathématique. Pour le premier aspect, le candidat devra être capable de se rappeler que la symétrie est présente dans l’enseignement des mathématiques dès le primaire. Cette notion fait l’objet en terminale d’un travail spécifique, dans le chapitre des nombres complexes pour le tronc commun, et des similitudes pour la spécialité. Nous ouvrons donc ici une possibilité d’interrogation du site ouverte sur des questions non mathématiques. Pour le deuxième aspect, la technologie « isométrie » mène à s’interroger sur les propriétés de ces transformations. La technique « forme analytique de la réflexion » présuppose un repère orthonormé dont le commentaire du jury remarque qu’il n’a pas fait l’objet d’un questionnement préalable des candidats : *« L’intérêt du repère orthonormal n’a pas été évoqué de manière spontanée »*. Certes, cette question ne fait pas l’objet d’étude dans les classes de terminale. Cependant, pendant sa préparation du concours, le candidat doit revenir sur les notions du cycle terminal en créant les liens entre des enseignements situés dans des temps et des systèmes différents. Comme le remarque Alain Mercier (2001)

> *« De ce fait, je peux quotidiennement constater que le jeune certifié a encore tout à apprendre, sur les mathématiques qui lui ont été enseignées et qu’il devra bientôt transmettre, parce que jamais ses études ne lui ont donné l’occasion de revenir sur ce qu’il savait pour le reconstruire, l’occasion de l’examiner selon la méthode : car souvent il ne sait, des mathématiques de l’école, que ce qu’il savait en “ passant de classe ”. En particulier, il ne sait pas toujours “ faire les exercices ” qu’il voudrait poser : il arrive même assez souvent qu’il n’ait jamais su, concernant la trigonométrie, ou la combinatoire, la géométrie dans l’espace ou les statistiques, le calcul barycentrique, la rectitude des droites ou la résolution des équations polynomiales, que ce qu’il faut pour être un élève moyen de la classe où de telles questions sont abordées »,*

L’outil « site mathématique » paraît alors un instrument majeur par ce tissage et cette hiérarchisation qu’il opère entre des éléments encore isolés pour le candidat. Dans notre cas particulier, l’éclairage, répondant aux attentes insatisfaites du jury, pourra se faire lors du recensement des objets du site dont le repère orthonormé[180] fait partie.

4.6 Site mathématique et formation professionnelle des enseignants : l’exemple de la caractérisation FCD

4.6.1 Motivations

Dans le cadre de l'analyse d'une restitution organisée de connaissance donnée au baccalauréat (série S, Antilles-Guyane 2006) [C. Silvy & A. Delcroix, 2009], la réflexion sur la caractérisation des fonctions constantes définies sur un intervalle par leur dérivée conduit à s'interroger sur la démontrabilité éventuelle de cette propriété en classe de terminale scientifique. La démonstration de

[180] Dans un autre registre, l’énoncé ne mentionne pas explicitement que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont tracés dans le plan rapporté à ce repère orthonormé. Il serait intéressant d’étudier si une rédaction de l’énoncé levant cet implicite, bien naturel pour alléger la rédaction de l’exercice, aurait amené les candidats à se s’interroger sur l’importance de la nature du repère.

$$f \text{ constante} \Rightarrow f \text{ dérivable et } f' \text{ nulle}$$

étant considérée comme une conséquence immédiate de la définition de la dérivée, c'est sur la réciproque que nous nous concentrons.

Cette étude est constituée pour une plus large part de contenus mathématiques, liés à une technologie du début du cycle universitaire. Dans le cadre de l'analyse de sujet d'oral présenté plus haut, une question incidente peut être posée concernant la caractérisation des fonctions constantes définies sur un intervalle par leur dérivée. Par ailleurs, cette étude montre que le site peut constituer une base pour un « cours commenté de mathématique » à usage des professeurs-étudiants ou bien de séminaires de master en formation initiale ou continue en donnant une autre organisation de cette partie des mathématiques du premier cycle universitaire en questionnant l'étudiant sur l'analyse des enjeux de toute modification d'organisation du savoir. En prenant comme étude de cas l'exemple de modification effectuée par les programmes de 2002 sur la fondation de l'analyse dans le cycle terminale : d'une part, le programme de 1997 s'appuie sur l'inégalité des accroissements finis[181] ; d'autre part, celui de 2002 sur la caractérisation FCD : f constante $\Leftrightarrow$ f dérivable et f' nulle.

Ce théorème, admis en première S, avec un habitat dans l'étude de fonction, est un des piliers de l'analyse de la classe terminale. En terminale S, son habitat se diversifie dans différentes parties du programme de terminale primitives, équations différentielles, il est ainsi un substrat du programme de terminale. Pour lever cet implicite, on peut s'interroger sur sa « démontrabilité » à ce niveau, où plus précisément, s'interroger sur les techniques, technologies et concepts mis en œuvre dans sa démonstration. L'objectif, que nous situons plutôt dans le cadre de la formation professionnelle des enseignants, est donc double : d'une part, compléter la construction de la branche FCD du site mathématique précédent (document 92); d'autre part, se questionner sur les différents systèmes possibles pour le programme d'analyse du cycle terminal.

La démonstration qui vient le plus souvent à l'esprit fait appel à l'inégalité (ou à l'égalité) des accroissements finis. Elle se situe aux bordures mouvantes du programme des classes scientifiques. Nous avons essayé – en nous situant à dire vrai plus dans le programme des classes préparatoires aux grandes écoles où d'un L1 scientifique – de recenser différentes démonstrations de cette caractérisation. Nous avons choisi d'exclure de notre étude les démonstrations

[181] Le programme de la décennie 80 s'appuyait sur l'égalité des accroissements finis.

faisant appel au calcul intégral qui, sous des hypothèses convenables, permettent une démonstration immédiate. (On retrouvera cependant des commentaires sur cette question dans la partie 5.3 ci-dessous.) Dans la pratique nous étendons notre analyse au principe de Lagrange, liant le sens de variation de la fonction au signe de la dérivée (caractérisation notée SVD dans la suite). En effet, la caractérisation FCD peut être facilement vue comme une conséquence de la caractérisation SVD, qui devient alors un résultat clé. Pour cette dernière, et pour une fonction dérivable, l'implication

$$f \text{ croissante (respectivement décroissante)} \Rightarrow f' \text{ positive (respectivement négative)}$$

étant de nouveau conséquence immédiate des définitions, nous nous intéressons également essentiellement à sa réciproque.

Cependant, notons une différence de nature entre ces deux résultats. La caractérisation SVD est étroitement reliée aux fonctions de la variable et à valeurs réelles, en fait à la relation d'ordre sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. La caractérisation FCD s'inscrit dans une question mathématique plus vaste, celle du noyau de l'opérateur linéaire qui à une fonction associe sa dérivée. C'est une question importante sur tout espace muni d'une dérivation. (Par exemple, sur l'espace des distributions de Schwartz, la question de la caractérisation des distributions de dérivée nulle reste un exercice relativement difficile lorsqu'on aborde la théorie : voir le paragraphe 4.6.6 ci-dessous.)

Par ailleurs, ce parcours autour des caractérisations FCD et SVD nous a conduit à remarquer qu'à la base de ce résultat figurent les propriétés essentielles du corps des nombres réels. Rappelons, pour faciliter les références ultérieures, les cinq propriétés équivalentes suivantes (Rogalski, 2001) pour des développements sur ce sujet :

(BS) *propriété de la borne supérieure* : toute partie du corps des réels $\mathbb{R}$ non vide majorée admet une borne supérieure ;

(MB) *convergence des suites monotones bornées* : toute suite réelle monotone bornée est convergente ;

(SE) *propriété des segments emboîtés* : une suite décroissante (pour l'inclusion) d'intervalles réels fermés bornés de longueurs tendant vers 0 possède une intersection non vide, réduite à un point ;

(CC) *complétude séquentielle* : toute suite réelle de Cauchy est convergente ;

(BW) *propriété de Bolzano-Weierstrass* : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Comme on le verra plus bas, les démonstrations basées sur l'inégalité des accroissements finis (ou sur des méthodes issues de démonstrations de cette inégalité) utilisent plutôt la propriété (BS) et la connexité des intervalles réels. Celle basée sur l'égalité des accroissements finis se réfère indirectement à la propriété (BW), utilisée pour démontrer les propriétés des images de segments par les fonctions continues. Enfin, une méthode basée sur un principe de dichotomie [Warufsel et *al.*, 2002] se rattache à la propriété (SE), puisque le principe de dichotomie est une autre lecture de la propriété (SE). Notons que cette dernière méthode pourrait *a priori* faire l'objet d'un problème en classe de terminale S, l'ensemble de ses ingrédients (principe de dichotomie, suites convergentes,...) figurant dans le programme des classes scientifiques du secondaire.

Au delà de ce simple recensement de techniques de démonstration, nous avons souhaité les mettre en rapport avec des notions mathématiques sous jacentes (propriété des pentes, stricte dérivabilité auquel un des lemmes utilisé dans la démonstration par dichotomie fait immanquablement penser). Nous remettons également en place l'équivalence entre le théorème de Rolle, celui des accroissements finis et, ce qui nous semble moins utilisé, l'ensemble formé par le théorème de Darboux et la caractérisation SVD. Nous apportons quelques commentaires sur la place de la caractérisation FCD en analyse, lorsque la dérivée devient un opérateur linéaire et la caractérisation FCD la recherche d'un noyau. Fort de ces éléments, nous construisons alors le site mathématique [Duchet et Erdogan, 2005 ; Silvy et Delcroix, 2009] de la caractérisation FCD.

Conventions

(i) Lorsqu'on parle d'un intervalle $[a,b]$ dans la suite, il est sous entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

(ii) Nous avons choisi de nous restreindre (sauf mention explicite du contraire) à des fonctions définies sur un segment $[a,b]$, continues sur ce segment et dérivables sur $]a,b[$ pour mettre notre étude dans le cadre d'hypothèses classiques en début de premier cycle d'études supérieures.

4.6.2 Démonstrations des caractérisations FCD et SVD par des propriétés d'accroissements finis

Nous abordons ici le cheminement le plus classique vers les deux caractérisations FCD et SVD, celui qui repose sur les propriétés d'accroissements finis. C'est celui privilégié dans le cursus français.

4.6.2.1 Trois inégalités des accroissements finis

Nous commençons par rappeler, pour le moment sans démonstration, trois variantes de l'inégalité des accroissements finis.

Proposition 2.1 ***(Inégalité des accroissements finis classique, IAF)*** *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable en tout point de* $]a,b[$ *et* k *un réel positif tels que :*

$\forall x\in\,]a,b[,\ |f'(x)|\leq k$. *Alors*

$$|f(b)-f(a)|\leq k(b-a).$$

Cette première version est souvent mise en exergue, puisque c'est la version par excellence généralisable au cas des fonctions à valeurs dans un espace normé. Dans le cycle terminal du secondaire, la formule suivante a pu être préférée.

Proposition 2.2 ***(Inégalité des accroissements finis, IAF')*** *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, continue sur* $[a,b]$ *et dérivable en tout point de* $]a,b[$ *et* $m,\ M$ *des réels positifs tels que :*

$$\forall x\in\,]a,b[,\quad m\leq f'(x)\leq M\ .$$

Alors

$$m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a).$$

Ces deux formes de l'inégalité des accroissements finis conduisent à une démonstration immédiate de la caractérisation FCD. En effet, sur tout intervalle $[a,\beta]\subset[a,b]$, les hypothèses de la proposition 2.1 (respectivement 2.2) sont satisfaites avec $k=0$ (respectivement $m=M=0$), conduisant à $f(a)=f(\beta)$ pour tout $\beta\in[a,b]$. Pour la troisième version de l'inégalité, nous suivons la démarche proposée par le *Cours de mathématiques spéciales* de Ramis *et al.* (3e édition 1991).

Proposition 3 ***(Inégalité des accroissements finis généralisée, IAFG)*** *Soit* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$*, continues sur* $[a,b]$ *et dérivables à droite en tout point de* $]a,b[$*, telles que :*

$$\forall x \in \left]a,b\right[,\ |f_d'(x)| \leq g_d'(x)$$ *(f_d' et g_d' désignent les dérivées à droite).*

Alors

$$|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a).$$

En fait, dans l'ouvrage cité, la démonstration est faite pour une fonction f à valeurs dans un espace normé, mais nous avons choisi de nous restreindre aux fonctions à valeurs réelles[182]. Ce résultat sert à établir qu'une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable à droite en tout point de $\left]a,b\right[$ est k-lipschitizenne sur $[a,b]$ si, et seulement si,

$$\forall x \in \left]a,b\right[,\ |f_d'(x)| \leq k.$$

On en déduit alors la caractérisation FCD, pour une fonction f dérivable à droite, par les équivalences

$$f \text{ constante} \Leftrightarrow f \text{ est } k\text{-lipschitzienne de constante } k=0 \Leftrightarrow f_d' = 0.$$

Remarques

(i) La proposition 2.3 sert aussi à établir le principe de Lagrange (caractérisation SVD), ici pris comme le lien entre le sens de variation d'une fonction $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable à droite sur $\left]a,b\right[$ et le signe de sa dérivée à droite. En effet, supposons par exemple g_d' positive sur $\left]a,b\right[$. En faisant $f=0$ dans la proposition 2.3, on obtient $0 \leq g(b)-g(a)$, d'où on déduit le résultat.

(ii) En supposant f_d' majorée sur $\left]a,b\right[$ par $k \geq 0$ et en faisant $g(x)=kx$, on retrouve l'inégalité classique des accroissements finis :

$$|f(b)-f(a)| \leq k(b-a).$$

[182]La démonstration est très similaire à celle que nous développons dans le paragraphe 4.6. 3 pour la caractérisation FCD par un argument de connexité. Elle repose, pour beaucoup, sur la connexité des intervalles réels et sur la propriété (BS).

4.6.2.2 Une propriété souvent oubliée : la majoration des accroissements

Pour des raisons d'homogénéité de l'exposé nous supposons dans ce paragraphe que la fonction f (et le cas échéant la fonction g) sont dérivables sur $]a,b[$. Commençons par introduire une propriété de majoration des accroissements.

Lemme 2.4. (**Majoration des accroissements, MAJA**) Soit $f : [a,b] \to \mathsf{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable en tout point de $]a,b[$ et M un réel positif tels que : $\forall x \in \left]a,b\right[, \quad f'(x) \leq M$. Alors

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Remarquons que :

(1) l'inégalité des accroissements finis classiques entraîne la propriété IAF' (elle lui est donc équivalente, la réciproque s'obtenant en prenant $m = -k$ et $M = k$),

(2) l'inégalité des accroissements finis généralisés entraîne la propriété MAJA,

(3) la propriété MAJA entraîne la caractérisation SVD,

(4) la caractérisation SVD entraîne l'inégalité des accroissements finis généralisés IAFG.

En effet pour montrer le (1), on applique, sous les hypothèses de la propriété IAF', la propriété IAF à $f_1(x) = f(x) - mx$. En remarquant que, pour tout $x \in \left]a,b\right[$, on a $0 \leq f_1'(x) \leq M - m$ (d'où $0 \leq \left| f_1'(x) \right| \leq M - m$), il vient $\left| f_1(b) - f_1(a) \right| \leq (M - m)(b-a)$. Puis, en particulier,

$$f_1(b) - f_1(a) = f(b) - f(a) - m(b-a) \leq (M - m)(b-a).$$

D'où $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. On renouvelle l'opération avec $f_2(x) = Mx - f(x)$ pour obtenir l'autre inégalité de IAF'[183]. Pour le (2), on applique la propriété IAFG au couple $(0, M - f)$. Le (3) est immédiat : si, par exemple, f' est positive sur $]a,b[$, on applique la propriété MAJA au couple $(-f, 0)$ pour obtenir $f(b) \geq f(a)$ et conclure à la croissance de f . Enfin le (4) repose sur la réécriture sans valeur absolue de l'hypothèse de majoration de la dérivée de f , id est

$$\forall t \in \left]a,b\right[, \quad -g'(t) \leq f'(t) \leq g'(t).$$

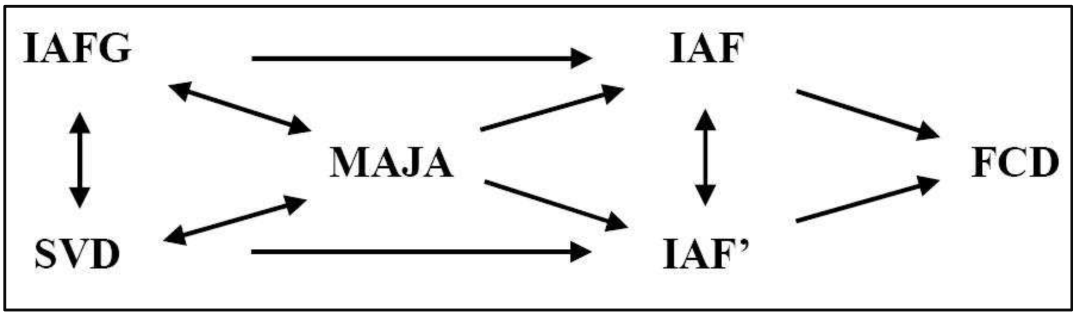
[183] On peut aussi appliquer IAF en prenant $k{=}M$

La caractérisation SVD entraîne alors que la fonction $g - f$ (respectivement $f + g$) est croissante. D'où

$$(g - f)(a) \leq (g - f)(b) \text{ id est } f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$
$$(\text{resp.}(g + f)(a) \leq (g + f)(b) \text{ id est } f(a) - f(b) \leq g(b) - g(a)).$$

D'où $\left| f(b) - f(a) \right| \leq g(b) - g(a)$.

A ce stade, nous avons obtenu les relations entre les différentes formes de propriétés d’accroissements finis résumées dans le diagramme du document 93[184]. Nous avons choisi de mettre en évidence la propriété MAJA, moins souvent utilisée. Nous allons nous intéresser aux démonstrations possibles des propriétés FCD, IAF et MAJA, en commençant ci-dessous par celle découlant du théorème des accroissements finis.



Document 93[185]

4.6.2.3 La place de cette démonstration dans les cursus

Le rappel précédent montre la place centrale que cette démonstration occupe dans un cursus mathématique, à l'articulation entre le cycle terminal des études secondaires et le début des études supérieures. Les principales propriétés ou arguments utilisés se situent en effet aux

[184] Dans la document 93, ainsi que dans les documents 97 et 98, les flèches unidirectionnelles sont des implications, les flèches bidirectionnelles des équivalences.

[185] Les implications MAJA → IAF et MAJA → IAF’ sont immédiates, en appliquant la propriété MAJA à f et $-f$. Pour l'implication IAF’→ FCD , il est clair que si f' est nulle, donc positive et négative, f est à la fois croissante et décroissante, donc constante.

bordures mouvantes du programme des classes scientifiques du lycée, mais font en tout état de cause partie du cursus de l'enseignant de collège ou lycée (document 94).

Nom du théorème	***Enoncé***	***Commentaires***
(IAF1) Inégalité des accroissements finis	On suppose qu'il existe *k* un réel positif tels que : $\forall x \in [a,b], \quad \lvert f'(x) \rvert \leq k$. Alors $\lvert f(b) - f(a) \rvert \leq k(b-a)$.	Version du programme TC/TS 1992/1999. Démonstration à partir du théorème SVD, principe de Lagrange
(IAF2) Inégalité des accroissements finis	On suppose qu'il existe *m* et *M* des réels tels que : $\forall x \in [a,b], \quad m \leq f'(x) \leq M$. Alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.	Version du programme TC/TS 1992/1999 Démonstration à partir du théorème SVD, principe de Lagrange
(IAFG) Inégalité des accroissements finis généralisée	Soit $g:[a,b] \to IR$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $\forall x \in [a,b], \quad \lvert f'(x) \rvert \leq g'(x)$. Alors $\lvert f(b) - f(a) \rvert \leq g(b) - g(a)$.	Forme fréquente dans les ouvrages de classes préparatoires, surtout des années 70-80.
(MAJA) Majoration des accroissements	On suppose qu'il existe *M* un réel tel que : $\forall x \in [a,b], \quad f'(x) \leq M$ Alors $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.	Rare sous cette forme. La forme fréquente est celle faisant intervenir la valeur absolue. Cette forme, simple à retenir, cache sa généralité
(SVD) Principe de Lagrange	*f* est croissante si, et seulement si, *f'* est positive *f* est décroissante si, et seulement si, *f'* est négative	Lien entre le sens de variation (SV) et le signe de la dérivée (D)[186].

Document 94. Les principaux théorèmes en jeu dans la caractérisation FCD

[186] Ce principe est un substrat pour l'analyse de terminale. Il est admis en première scientifique depuis 1971 : *« en s'appuyant sur le théorème énoncé sans démonstration, permettant de déduire, du signe de la dérivée , le sens de la variation de cette fonction sur cet intervalle »* (Mathématiques, classes du second cycle, ministère de l'éducation nationale 1971, p26). Notons l'exception de la période la décennie 80-90 où ce principe est accessible dans ces classes par le théorème des accroissements finis.

4.6.2.4 Les bases de la démonstration de l'égalité des accroissements finis

Rappelons l'égalité des accroissements finis sous sa forme la plus élémentaire.

Théorème 2.5. *Soit* $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe* $c\in\ ]a,b[$ *tel que* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Le théorème 2.5 entraîne immédiatement la caractérisation FCD, la caractérisation SVD, la propriété MAJA et l'inégalité classique des accroissements finis. La démonstration la plus courante de l'égalité des accroissements finis consiste à la faire découler du théorème de Rolle que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 2.6. *Soit* $g\ :[a,b]\to\mathbb{R}$, *continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$, *telle que* $g(a)=g(b)$. *Alors il existe* $c\in\ ]a,b[$ *tel que* $g'(c)=0$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à $g\ :\ x\mapsto f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ pour obtenir le théorème 2.5. Notons, réciproquement, que l'application de l'égalité des accroissements finis avec $f\ :=g$ permet de vérifier que l'égalité des accroissements finis et le théorème de Rolle sont deux énoncés équivalents. Focalisons-nous un instant sur la démonstration de ce dernier. On utilise le plus souvent deux résultats fondamentaux, l'un du cours sur les fonctions continues et l'autre du cours de calcul différentiel. On les rappelle ci-dessous.

Théorème 2.7. (**Image continue d'un segment**) *Soit* $g\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ *continue. Alors* g *est bornée et atteint ses bornes.*

Remarque.– Nous ne retenons pas ici que $g([a,b])$ est un intervalle compact, conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, dans la mesure où cela n'est pas utile à la démonstration du théorème de Rolle.

De manière classique, dans un cours du début d'enseignement supérieur, on démontre le théorème 2.7 à l'aide de la propriété (BW) de Bolzano-Weierstrass. On utilise la propriété (BW) une première fois pour démontrer que g est bornée. Cette démonstration se fait facilement par l'absurde[187]. On l'utilise une seconde fois pour démontrer par un raisonnement direct que g atteint ses bornes.

Théorème 2.8 (**Condition nécessaire d'extremum du premier ordre**) *Soit* $g : I \to \mathbb{R}$ *dérivable où* I *est un intervalle réel. En tout extremum appartenant à l'intérieur de* I *,* g' *s'annule.*

Une fois le théorème 2.7 acquis, la démonstration du théorème de Rolle est une simple application du théorème 2.8. Le cas où g est constante étant immédiat, on se place dans la situation où g ne l'est pas. La fonction g possède alors un maximum et un minimum dont l'un au moins est une valeur prise en $c \in \left]a,b\right[$. En appliquant la condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum, on obtient $g'(c) = 0$.

Remarque

Notons que l'hypothèse $g(a) = g(b)$ est exploitée pour vérifier que la fonction g possède un extremum pris à l'intérieur de $[a,b]$. On retrouvera cette situation ultérieurement.

4.6.3 Les caractérisations FCD et SVD comme conséquences d'un argument de connexité

Ces démonstrations ont en commun l'esprit des classes préparatoires des années 1970. La démonstration de l'inégalité des accroissements finis s'effectue de manière analogue. (Voir par exemple les ouvrages de Ramis *et al.*, dont la première édition serait de 1970 ou 1971[188] .) Une caractéristique de ces démarches est qu'elles s'étendent facilement au cas d'une fonction f à valeurs dans un espace normé. On trouve ici un témoignage du souci de prendre des cadres généraux, non contextuels, selon un des paradigmes de la réforme des mathématiques modernes [Charlot, 1984]. Nous nous basons ici sur l'ouvrage *Mathématiques générales* [Pisot et Zamanski, 1972].

[187] On peut aussi utiliser la propriété (IE) des segments emboîtés pour cette partie de la démonstration.

[188] source: http://publimath.irem.univ-mrs.fr/bibliocomp/M1U99048.htm, site consulté le 25 janvier 2008.

Caractérisation FCD

L'énoncé classique est le suivant.

Proposition 3.1 *Soit* $f : [\alpha,\beta] \to \mathrm{R}$ *une fonction continue sur* $[\alpha,\beta]$, *admettant en tout point de* $]\alpha,\beta[$ *une dérivée à droite nulle. Alors* f *est constante.*

Pour la démonstration, nous restons proches du texte de Pisot et Zamanski. Cependant, nous ne supposons pas la dérivabilité à droite aux points α et β, ce qui conduit à un petit artifice explicité en fin de démonstration. Soit a, b deux points de l'intérieur de l'intervalle I avec $a < b$. Soit ε strictement positif, donné quelconque. Considérons l'ensemble X_ε des points x de $[a,b]$ tels que

$$| f(x) - f(a) | /(x-a) \leq \varepsilon.$$

Comme $f_d'(a)$ existe et vaut zéro, l'ensemble X_ε n'est pas vide et contient un intervalle d'extrémité gauche a. Cet ensemble est majoré par b. Comme selon la propriété (BS), toute partie de R non vide majorée admet une borne supérieure, X_ε possède une borne supérieure ξ. Par une caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite de points $(x_n)_n$ de X_ε tendant vers ξ. Comme $| f(x_n) - f(a) | \leq \varepsilon(x_n - a)$ et f est continue, on a $| f(\xi) - f(a) | \leq \varepsilon(\xi - a)$. D'où $\xi \in X_\varepsilon$.

Démontrons maintenant par l'absurde que $\xi = b$. Supposons $\xi < b$. Il existe alors $\varsigma \in]\xi, b]$ tel que $| f(\varsigma) - f(\xi) | /(\varsigma - \xi) \leq \varepsilon$, en utilisant $f_d'(\xi) = 0$ comme on a utilisé $f_d'(a) = 0$ ci-dessus. On a alors

$$| f(\varsigma) - f(a) | \leq \underbrace{| f(\varsigma) - f(\xi) |}_{\leq \varepsilon(\varsigma - \xi)} + \underbrace{| f(\xi) - f(a) |}_{\leq \varepsilon(\xi - a)} \leq \varepsilon(\varsigma - a).$$

Ceci contredit le fait que ξ soit la borne supérieure de l'ensemble X_ε. On a donc $\xi = b$ et $X_\varepsilon = [a,b]$. Ainsi

$$| f(b) - f(a) | \leq \varepsilon(b-a).$$

Comme on a l'inégalité précédente pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on en déduit $f(b) = f(a)$. En utilisant la continuité de f sur $[\alpha,\beta]$, on en déduit facilement que f est constante sur $[\alpha,\beta]$.

Remarque.– En fait, moyennant des adaptations mineures, ce raisonnement montre la fermeture de l'ensemble X_ε dans I (lorsqu'on montre que $\xi \in X_\varepsilon$) et son ouverture (lorsqu'on montre que $\xi = b$). Ainsi, X_ε est un sous ensemble non vide, fermé et ouvert dans l'intervalle I. Comme I est connexe c'est que $X_\varepsilon = I$. On renvoie le lecteur à tout manuel classique, par exemple Godement (2001), Pisot et Zamansky (1972) ou Ramis (1991) pour plus de détails sur la notion d'ensemble connexe.

Il est très tentant de s'inspirer de la démonstration de la proposition 3.1 pour démontrer la caractérisation MAJA ou celle SVD, sans référence du moins directe à l'inégalité des accroissements finis. Le lecteur vérifiera (document 95) que l'on peut, en adaptant *a minima* le raisonnement précédent obtenir la légère généralisation suivante du lemme 2.4.

Proposition 3.2. *Soit* $f \ : [\alpha, \beta] \to \mathrm{R}$ *une fonction continue sur* $[\alpha, \beta]$, *admettant en tout point de* $]\alpha, \beta[$ *une dérivée à droite* $f_d^{'}$ *majorée par un réel* M. *Alors*

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Le cas $M = 0$ donne la démonstration de la propriété SVD, pour $f_d^{'}$ négative.

Avec les mêmes notations que dans la démonstration de la proposition 3.1, on considère ici l'ensemble Y_ε des points x de $[a,b]$ tels que

$$\left(f(x) - f(a)\right)/(x-a) \leq M + \varepsilon.$$

L'ensemble Y_ε est non vide (puisque $f_d^{'}(a) \leq M$) majoré par b et sa borne supérieure ξ lui appartient par l'argument de continuité déjà employé. De même, si on suppose $\xi < b$, on trouve $\varsigma \in]\xi, b]$ tel que $\left(f(\varsigma) - f(\xi)\right)/\left(\varsigma - \xi\right) \leq M + \varepsilon$, en utilisant $f_d^{'}(\xi) \leq M$, comme on a utilisé $f_d^{'}(\xi) = 0$ ci-dessus. On a alors

$$f(\varsigma) - f(a) = \underbrace{f(\varsigma) - f(\xi)}_{\leq (M+\varepsilon)(\varsigma - \xi)} + \underbrace{f(\xi) - f(a)}_{\leq (M+\varepsilon)(\xi - a)} \leq \left(M + \varepsilon\right)\left(\varsigma - a\right).$$

On contredit le fait que ξ soit la borne supérieure. Il vient donc $b = \xi$ et

$$f(b) - f(a) \leq \left(M + \varepsilon\right)\left(b - a\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La conclusion en découle.

Document 95. Démonstration du lemme 3.2

4.6.4 Démonstration des caractérisations FCD et SVD par un processus de dichotomie.

Nous nous inspirons assez librement de Warufsel et al. (2002) en présentant cette partie comme un canevas (très détaillé) pouvant servir d'activité par exemple en classes préparatoires aux grandes écoles ou en préparation aux concours de l'enseignement.

4.6.4.1 Un lemme préparatoire

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle réel) et $(x,y) \in I^2$ $x \neq y$, posons

$$P(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.$$

Dans un cadre géométrique, cette quantité, la fonction "pente", est interprétable comme la pente de la corde de l'arc du graphe de f d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. On remarque (simple calcul algébrique) que P est symétrique en x et y et qu'elle vérifie, pour $(x,y,a) \in I^3$ deux à deux disctincts,

$$P(x,y) = \frac{y-a}{y-x}\frac{f(y)-f(a)}{y-a} + \frac{a-x}{y-x}\frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \frac{a-x}{y-x}P(a,x) + \frac{y-a}{y-x}P(a,y).$$

Lemme 4.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Alors*

$$\lim_{x \to a^-, y \to a^+} P(x,y) = f'(a)$$

où $\lim_{x \to a^-, y \to a^+}$ veut dire limite pour x tendant vers a par valeurs strictement inférieures et y tendant vers a par valeurs strictement supérieures.

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'écrire

$$P(x,y)) = \frac{a-x}{y-x}P(a,x) + \frac{y-a}{y-x}P(a,y) \qquad (4.1.)$$

avec

$$\underbrace{\frac{a-x}{y-x}}_{>0} + \underbrace{\frac{y-a}{y-x}}_{>0} = 1.$$

La relation précédente est alors une relation barycentrique qui montre que $P(y,x)$ appartient au segments d'extrémités $P(x,a)$ et $P(y,a)$. Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \to a^-, y \to a^+} P(y,x) = f'(a)$.

Remarque

Le lecteur constatera que cette démonstration utilise en fait une propriété générale d'un triangle. On renvoie au paragraphe 4.6.5.1 pour plus de commentaires à ce sujet.

4.6.4.2 La démonstration

Pour une fonction f continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I , la contraposée de la propriété

$$f' \text{ nulle sur l'intérieur de } I \Rightarrow f \text{ constante sur } I$$

est

$$f \text{ non constante sur } I \Rightarrow f' \text{ non nulle sur l'intérieur de } I.$$

On démontrera donc le lemme suivant.

Lemme 4.2. (**Contraposée de la caractérisation FCD**) *Soit* $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[\alpha,\beta]$ *et dérivable sur* $]\alpha,\beta[$. *On suppose qu'il existe* $(a,b) \in [\alpha,\beta]^2$ *avec* $a < b$ *tels que* $f(a) \neq f(b)$. *Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tels que* $f'(c) \neq 0$.

Nous donnons dans le document 96 la démonstration du lemme 4.2

Preuve.– On pose

$$a_0 = a, \ b_0 = b; \ d = |f(b) - f(a)|$$

Etape 1.– On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(b_n) - f(a_n)| \geq \frac{d}{2^n}, \ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Cette construction, sans difficulté, est laissée au lecteur. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent, comme suites adjacentes, vers la même limite $c \in [a,b]$. (C'est, en fait, la propriété (SE) des segments emboîtés qui est utilisée.)

Etape 2.– Supposons l'une des suites $(a_n)_n$ ou $(b_n)_n$ constante à partir d'un certain rang. Par exemple, supposons qu'il s'agisse de la suite $(a_n)_n$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m$, $a_n = a_m = c$. On a alors, pout tout $n \geq m$, $a_n = c < b_n$. Alors, on peut considérer le quotient

$$P(b_n, c) = \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} P_n(b_n, c) = f'(c)$. Compte tenu des propriétés des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, on a

$$|P_n(b_n, c)| \geq \frac{d}{2^n}\frac{2^n}{b-a} = \frac{d}{b-a} > 0.$$

Par prolongement d'égalité, il vient $|f'(c)| \geq d/(b-a) > 0$.

Etape 3.– On se place dans le cas ou les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ne sont pas stationnaires. Rappelons que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c$. Avec l'hypothèse de non stationnarité, et en raisons de la croissance de la suite $(a_n)_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < c$ et, de même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c < b_n$. On peut alors appliquer le lemme 4.1 pour obtenir

$$P(b_n, a_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \overset{n\to+\infty}{\to} f'(c).$$

La conclusion est identique à l'étape 2, puisque

$$|P(b_n, a_n)| = \left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right| \geq \frac{d}{b-a} > 0.$$

Document 96. Démonstration du lemme 4.2

Remarques

- Notons que l'on peut toujours supposer que $(a,b) \in]\alpha,\beta[^2$, ce que nous ferons dans la suite. En effet, si par exemple $a=\alpha$, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à f permet de trouver $a' \in]\alpha,\beta]$ tel que $f(a') \neq f(b)$.
- Le cas d'une suite $(a_n)_n$ ou $(b_n)_n$ stationnaire peut survenir. Par exemple, en prenant $a=0$, $b=1$ et $f(x)=x$, on voit qu'un choix possible est de prendre la suite $(a_n)_n$ nulle et la suite $(b_n)_n$ égale à $(1/2^n)_{n\geq 0}$.

On laisse au lecteur l'étude de la question suivante.

Question : peut-on toujours construire $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ non stationnaires ?

Notons que le lemme 4.2 possède son exacte contrepartie pour le principe de Lagrange.

Lemme 4.3. (**Contraposée du principe de Lagrange**) *Soit* $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[\alpha,\beta]$ *et dérivable sur* $]\alpha,\beta[$. *On suppose qu'il existe* $(a,b) \in [\alpha,\beta]^2$ *avec* $a<b$ *tels que* $f(a)<f(b)$ *(respectivement* $f(a)>f(b)$*). Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tels que* $f'(c)>0$ *(respectivement* $f'(c)<0$ *).*

On s'assure de l'équivalence du lemme 4.3 et du principe de Lagrange soit par un raisonnement par l'absurde soit en écrivant le lemme 4.3 et le principe de Lagrange sous forme de propositions logiques formalisées. La démonstration du lemme 4.3 par dichotomie reprend exactement celle du lemme, en la simplifiant même légèrement, dans la mesure où l'on supprime les valeurs absolues. (On pose $d=f(b)-f(a)$.)

Plus intéressant, cette démonstration fournit également une preuve de la propriété de majoration des accroissements ou de l'inégalité des accroissements finis classique par dichotomie. Par exemple, sous les hypothèses de la Proposition 2.1, supposons $|f(b)-f(a)|>k(b-a)$. On pose alors $d=f(b)-f(a)=k'(b-a)$ avec $k'>k$ dans la preuve du lemme 4.2. On obtient alors l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $|f'(c)| \geq k' > k$, contredisant l'hypothèse.

4.6.5 Compléments dans le cadre de l'analyse réelle élémentaire

La démonstration par dichotomie et par le théorème des accroissements finis montre le rôle central de la fonction "pente", fonction sur laquelle non donnons quelques compléments ci-dessous. Ces démonstrations permettent également de se réinterroger sur un célèbre théorème de Darboux, affirmant que les dérivées possèdent la propriété des valeurs intermédiaires. Enfin, nous présentons quelques ouvertures mathématiques autour de la caractérisation FCD.

4.6.5.1 Pente et dérivée

Le lemme 4.1 est complété par la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Soit* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $a \in I$. *La fonction* f *est dérivable en* a *de nombre dérivée* l *si, et seulement si,*

$$\lim_{x \to a^-, y \to a^+} P(x, y) = l. \qquad (5.1.)$$

Notons que la relation (5.1) prend la forme équivalente

$$\lim_{h \to 0^+, k \to 0^+} P(a-h, a+k) = l. \qquad (5.2.)$$

plus facile à manipuler. L'existence de $f'(a)$ entraîne assez facilement la propriété (5.2). Pour ce faire, on écrit la relation (4.1) sous la forme

$$P(a-h, a+k) = \frac{h}{h+k} P(a-h, a) + \frac{k}{h+k} P(a, a+k).$$

On fait alors $h = k$ et on exploite l'existence d'une dérivée à gauche et à droite, ainsi que l'égalité de ces deux dérivées pour aboutir à l'existence de la limite figurant dans la relation (5.2). En revanche, la réciproque est un peu plus ardue. En reprenant la forme ci-dessus de la relation (4.1) on obtient

$$\frac{h+k}{h} P(a-h, a+k) = P(a-h, a) + \frac{k}{h} P(a, a+k) = P(a-h, a) + \frac{1}{h}\left(f(a+k) - f(a)\right).$$

La continuité de f en a permet de trouver, pour tout $h > 0$, un réel $k(h)$ tel que

$$\lim_{h \to 0^+} k(h) = 0 \text{ et } \left| f(a + k(h)) - f(a) \right| < h^2 .$$

De plus, on peut supposer que $\lim_{h \to 0^+} k(h)/h = 0$. Alors

$$\lim_{h\to 0^+}\left(1+k(h)/h\right)=1,\ \lim_{h\to 0^+} P(a-h,a+k(h))=l,\ \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(f(a+k(h))-f(a)\right)=0.$$

D'où $\lim_{h\to 0^+} P(a-h,a)=l$. Un raisonnement analogue montre que $\lim_{k\to 0^+} P(a,a+k)=l.$

Remarques

(i) Dans la proposition 5.1, la continuité au point a doit être supposée, pour éviter le cas d'une fonction mal définie au point a. On prend $I=\mathbb{R}$, f définie par $f(0)=0$ et $f(x)=c$, constante non nulle, pour tout $x\in \mathbb{R}^*$. On a $\lim_{h\to 0^+, k\to 0^+} P(a-h,a+k)=0$, tandis que f n'est pas dérivable en 0 puisque non continue en ce point.

(ii) La démonstration ci-dessus possède une interprétation heuristique (formalisable, éventuellement, dans le langage de la Théorie Relative des Ensembles Internes de Y. Péraire (1992) assez immédiate : le réel h étant un infiniment petit du premier ordre, k un infiniment petit du second ordre, la pente $P(a-h,a+k)$ est infiniment proche au premier ordre de l. De plus, la différence entre $P(a-h,a+k)$ et $P(a-h,a)$ est un infiniment petit du premier ordre, car la différence entre $f(a+k)$ et $f(a)$ est un infiniment petit du deuxième ordre et h un infiniment petit du premier ordre. Ainsi $P(a-h,a)$ est infiniment proche au premier ordre de l. (Le lecteur pourra s'appuyer sur un dessin.)

La proposition 5.1 peut introduire une discussion sur le rapport entre dérivabilité et stricte dérivabilité. (Voir par exemple : Michel (1977)).

Définition.– Soit I un intervalle réel ouvert non trivial, $f : I\to\mathbb{R}$, $a\in I$. On dit que f est strictement dérivable en a si $\lim_{(x,y)\to(a,a),\, x\neq y} P(x,y)$ existe.

Ce nombre, lorsqu'il existe est appelé la stricte dérivée de f au point a. On dit que f est *strictement dérivable sur* I si f est strictement dérivable en tout point de I. De manière claire, si f est strictement dérivable en $a\in I$, f est dérivable en a. En revanche, f peut être dérivable en a sans être strictement dérivable en a .

Exemple.– On utilise la célèbre famille de fonctions

$$f_{p,q} : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^p\sin(1/x^q) \text{ si } x\neq 0,\quad f(x)=0 \text{ si } x=0.$$

avec, ici $p=2$, $q=1$. En posant $f_{2,1}=f$, on a

$$f(x)=f(x)-f(0)=x\,\mathbf{o}(1)\ \textbf{pour}\ x\to 0.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$. Cependant ; considérons les suites

$$\forall n \in \mathrm{N},\ x_n = (\pi/2+(2n+1)\pi)^{-1}\ ;\ y_n = (\pi/2+2n\pi)^{-1}.$$

On a

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \overset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{\pi} \neq 0 = f'(0).$$

Ainsi, f n'est pas strictement dérivable en 0.

Remarque

Cet exemple montre également qu'il est essentiel dans le lemme 4.1 que la limite soit prise pour x tendant vers a par valeurs (strictement) inférieures et pour y tendant vers a par valeurs (strictement) supérieures.

De fait, les fonctions strictement dérivables de la variable et à valeurs réelles sont bien connues d'après le *théorème de la pente* rappelé ci-dessous.

Théorème (**de la pente**) Soit I un intervalle réel ouvert non trivial et $f\ :\ I \to \mathrm{R}$, sont équivalentes :

(1) la fonction f est strictement dérivable sur I ;

(2) la fonction f est de classe $\mathbf{C}^1$ sur I.

Preuve.– Le (2)$\Rightarrow$ (1) peut se déduire directement du théorème des accroissements finis. Soit, en effet, $a \in I$. On écrit, pour tout $(x,y)\in I^2$ avec $x \neq y$,

$$f(y)-f(x) = f'(c_{x,y})(y-x) \text{ avec } c_{x,y} \text{ compris entre } x \text{ et } y.$$

En utilisant la continuité de f' en a, on a immédiatement $\lim_{(x,y)\to(a,a),x\neq y} P(x,y) = f'(a)$.

Pour le (1) $\Rightarrow$ (2), nous allons proposer une démonstration élémentaire basée sur les définitions. Soit $a \in I$. Comme f est supposée strictement dérivable sur I, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_a > 0$ tel que $]a-\eta_a, a+\eta_a[\subset I$ et

$$0<|x-a|<\eta_a \ et\ 0<|y-a|<\eta_a \Rightarrow |P(x,y)-f'(a)|<\varepsilon/2. \qquad (5.2.)$$

Soit maintenant $b \in I$ tel que $|b-a|<\eta=\eta_a/2$. Soit $\eta_b>0$ un réel rendant vrai (5.2) pour b au lieu de a. Considérons $(x,y)\in I^2$ tels que $x\neq y$ et

$$|b-x|<\min(\eta_a/2,\eta_b),\ |b-y|<\min(\eta_a/2,\eta_b).$$

(Le lecteur s'assurera de l'existence d'un tel couple (x, y).) On a $\left|P(x,y)-f'(b)\right|<\varepsilon/2$ par définition de η_b. Comme $|x-a|<|x-b|+|b-a|<\eta_a$ et de même $|y-a|<\eta_a$, on a également $\left|P(x,y)-f'(a)\right|<\varepsilon/2$. D'où $\left|f'(b)-f'(a)\right|<\varepsilon$. Ainsi,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall b\in I,\ \ |b-a|<\eta\Rightarrow\left|f'(b)-f'(a)\right|<\varepsilon.$$

Remarque.– La fonction f peut être strictement dérivable en a sans être dérivable sur un intervalle voisinage de a.

Proposition 5.3. *Si f est strictement dérivable en $a\in I$, alors f est lipschitzienne au voisinage de a.*

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages classiques, par exemple Clarke (1990), pour plus de détails sur la stricte dérivabilité. Pour le lien entre la notion de dérivée et la tangente au graphe de la fonction (que nous avons utilisé implicitement pour introduire la fonction des pentes et pour l'argument géométrique à l'appui de la démonstration du lemme 4.1), nous renvoyons à Rouy (2007).

4.6.5.2 Le lemme 4.2 et le théorème de Darboux

Rappelons le résultat suivant qui donne le second exemple de fonctions, après les fonctions continues, possédant la propriété de la valeur intermédiaire.

Théorème 5.4. *Soit $f\ :\ [\alpha,\beta]\to\mathrm{R}$ une fonction continue sur $[\alpha,\beta]$ et dérivable sur $]\alpha,\beta[$. L'ensemble $f'(]\alpha,\beta[)$ est un intervalle.*

Ce théorème est souvent présenté comme une application de l'égalité des accroissements finis. Pour s'en convaincre, donnons les idées principales d'une démonstration très élémentaire et se limitant à considérer des fonctions de la variable réelle. Il s'agit de montrer que, pour tout $(a,b)\in\ ]\alpha,\beta[^2$ avec $a<b$, le segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$ est inclus dans $f'(]\alpha,\beta[)$. On introduit alors la fonction $\varphi\ :[a,b]\to\mathrm{R}$ (*respectivement* $\psi\ :[a,b]\to\mathrm{R}$) définie par

$$\varphi(a)=f'(a)\,;\ \forall x\in\ ]a,b],\ \varphi(x)=P(a,x)\ \text{(resp.}\ \psi(b)=f'(b)\,;\ \forall x\in[a,b[,\ \psi(x)=P(x,b)).$$

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$\forall x\in\ ]a,b],\ \exists c_x\in\ ]a,x[\ :\quad \varphi(x)=f'(c_x)\qquad (5.3.).$$

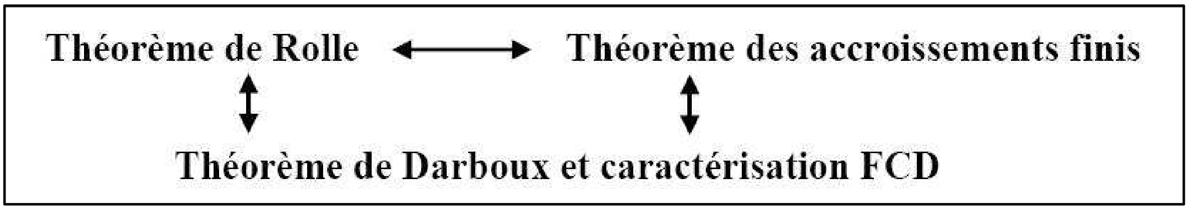
La propriété (5.3) entraîne que $\varphi([a,b])\subset f'(]\alpha,\beta[)$. De plus, la dérivabilité en a de f entraîne que $\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=f'(a)=\varphi(a)$ ce qui était la seule difficulté pour vérifier que φ est continue sur $[a,b]$. On établit de manière analogue la continuité de ψ sur $[a,b]$ et l'inclusion $\psi([a,b]) \subset f'(]\alpha,\beta[)$. Alors, $\varphi([a,b])$ et $\psi([a,b])$ sont des intervalles. Comme $\varphi(b)=\psi(a)$, $\varphi([a,b]) \cap \psi([a,b])$ est non vide et la réunion $\varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$ est un intervalle inclus dans $f'(]\alpha,\beta[)$. De plus, elle contient le segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$, ce qui entraîne la conclusion[189].

En fait, le théorème de Darboux, associé au lemme 4.2 (ou à la caractérisation SVD), est équivalent à l'égalité des accroissements finis comme le montre le raisonnement suivant. Soit $f : [\alpha,\beta] \to \mathrm{R}$ continue sur $[\alpha,\beta]$ et dérivable sur $]\alpha,\beta[$ telle que f' (définie sur $]\alpha,\beta[$) possède la propriété de la valeur intermédiaire. Supposons de plus que $f(\alpha)=f(\beta)$, hypothèse du théorème de Rolle. Si f est constante sur $[\alpha,\beta]$, on sait que f' est nulle et la conclusion du théorème de Rolle est satisfaite. Si f n'est pas constante sur $[\alpha,\beta]$, il existe $\gamma \in]\alpha,\beta[$ tel que $f(\alpha) \neq f(\gamma)$. Par exemple, supposons $f(\gamma) > f(\alpha)$. Il existe alors $a \in]\alpha,\gamma[$ tel que $f(a) < f(\gamma)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f . De même, il existe $b \in]\gamma,\beta[$ tel que $f(\gamma) > f(b)$. Le lemme 4.2 montre alors qu'il existe $c \in [a,\gamma]$ tel que $f'(c) > 0$ et $d \in [\gamma,b]$ tel que $f'(d) < 0$. D'après la propriété de valeur intermédiaire appliquée à f' , il existe $d \in]a,b[$ tel que $f'(d)=0$. On passe alors du théorème de Rolle au théorème des accroissements finis de manière classique.

Remarque.– Le petit détour par les points a et b vient du fait que f n'est pas supposée dérivable en α et β, alors que le lemme 4.2 nécessite a priori la dérivabilité aux extrémités du segment d'application.

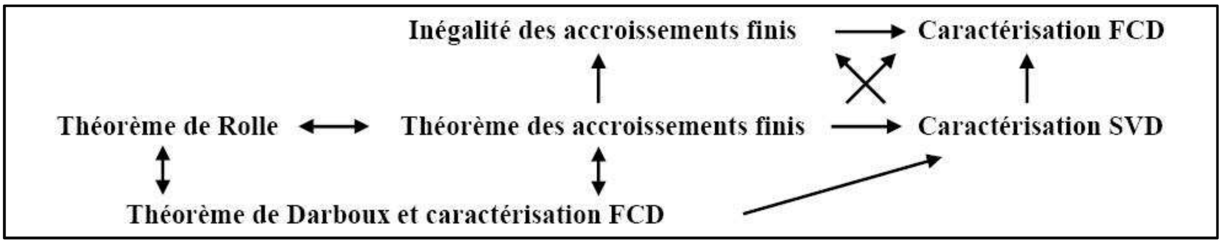
Ainsi, on a les équivalences synthétisées dans le document 97.

[189] Une démonstration, d'ailleurs plus courte, fait découler cette propriété de l'ensemble formé des théorèmes 2.7 et 2.8 Cette démonstration court-circuite, en quelque sorte, le passage par le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis. Voir Doubkhan et Sifre (2001), qui renvoie à W. Rudin (1976, 1998) pour cette démonstration.



Document 97

Les caractérisations FCD et SVD s'insèrent dans ce diagramme[190] pour former le réseau des relations entre ces différents énoncés (document 98) qui servira ultérieurement dans l'élaboration du site mathématiques de la question.



Document 98. Le réseau des relations entre les principaux énoncés étudiés

On a mis en valeur les techniques de démonstration de la caractérisation FCD, par les propriétés des accroissements finis et par le principe de Lagrange. (Il manque ici les démonstrations par le raisonnement de connexité et par le processus de Dichotomie.) Nous adressons ici, une nouvelle question au lecteur.

Question : la caractérisation FCD, associée au théorème de Darboux, entraîne-telle une des propriétés équivalentes du document 98 ?

4.6.5.3 La non trivialité de la caractérisation FCD dans le cadre des fonctions de la variable réelle

On rappelle ici que la conclusion des caractérisations FCD et SVD restent valables sous des hypothèses légèrement plus faibles. Pour des raisons d'homogénéité de l'exposé, on suppose donnée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

[190] L'implication (*) découle d'une application directe de l'égalité des accroissements finis au couple (a,b) tel que $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$.) Voir l'énoncé du lemme 4.2.

Théorème 5.4. *Si le nombre dérivée* $f'(x)$ *existe sauf, éventuellement, pour les points d'un ensemble dénombrable et s'il est nul (respectivement positif) lorsqu'il existe, alors f est constante (respectivement croissante.)*

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur au cours d'analyse de J. Dieudonné (1979), tout en mentionnant qu'elle constitue, en fait, un raffinement des démonstrations présentées dans le paragraphe 4.6.3. Le théorème 5.4 est, dans un certain sens, optimal, comme le montre le célèbre exemple suivant : si l'ensemble sur lequel *f* n'est pas dérivable n'est pas dénombrable, la conclusion du théorème est mise en défaut.

Exemple : L'escalier du diable[191] [Rudin, 1998].

Définissons K_n comme étant la réunion des $2n$ intervalles fermés $\left[a/3^n, (a+1)/3^n\right]$ où a est un entier naturel strictement inférieur à 3^n dont l'écriture en base 3 comporte au maximum n chiffres égaux à 0 ou 2. Posons $K = \cap_{n\geq 0} K_n$. On rappelle que K est l'ensemble triadique de Cantor. Il est compact, non dénombrable, totalement discontinu, de mesure nulle. Posons $f_0(x) = x$. On définit la fonction f_n comme étant la fonction continue, constante sur chacun des intervalles constituant le complémentaire de l'ensemble K_n, et affine de pente $(3/2)^n$ sur chacun des intervalles de K_n . On vérifie que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| f_{n+1}(x) - f_n(x) \right| \leq 2^{-n}$. Ainsi, la série de fonctions de terme général $f_{n+1} - f_n$ converge normalement et la suite $\left(f_n\right)_n$ uniformément. La limite *f* est une fonction continue sur $[0,1]$ croissante comme limite de fonctions croissantes, vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Or, f est dérivable sur le complémentaire de l'ensemble non dénombrable K, et de dérivée nulle sur cet ensemble.

Nous ne poursuivrons pas ici plus loin ces considérations. Ceci nous entraînerait vers la théorie de la mesure qui dépasse le cadre de la présente étude. Notons cependant la proximité de l'étude des généralisations de la caractérisation FCD et des conditions sous lesquelles la relation fondamentale du calcul intégral

[191]Voir aussi : http://www.mathcurve.com/fractals/ escalierdudiable/escalierdudiable.shtml, site consulté le 28 avril 2008.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

est vraie. On peut renvoyer au traité d'analyse de Rudin (1998) sur ce point. De la même façon nous n'aborderons pas les *cas de constance* pour une fonction de la variable complexe holomorphe.

4.6.6 Un horizon mathématique ultérieur : opérateur de dérivation et caractérisation FCD

L'application D qui à une fonction associe sa dérivée est un des premiers exemples d'application linéaire issue d'un cadre non géométrique que rencontre l'élève ou l'étudiant. Elle fournit, de plus, un exemple naturel d'application linéaire pouvant être considérée sur un espace vectoriel de dimension infinie. Elle est également l'élément premier de la théorie des équations différentielles, puisque la caractérisation FCD est la plus simple d'entre elles. De ce point de vue, cette caractérisation est un peu le *juge de paix*, le test de cohérence des extensions de la notion de dérivée : on attend d'une dérivée D, étendant la dérivée usuelle à un espace E contenant celui des fonctions usuellement dérivables, qu'elle vérifie $D(f) = 0 \Rightarrow D =$ *constante*.

Rendons cela plus précis en nous appuyant sur quelques exemples. Soit E un espace vectoriel ou une algèbre munie d'une dérivée D interne ($D(E) \subset E$) c'est-à-dire d'une opération linéaire ayant les propriétés de la dérivée usuelle des fonctions. Montrer la caractérisation FCD revient à résoudre l'équation $D(f) = 0$ à chercher. Dit autrement, c'est chercher le noyau $\ker D$ de l'application linéaire D. Dans le même ordre d'idées, on peut introduire le problème de l'existence de primitives pour l'opérateur D c'est-à-dire, étant donné $g \in E$, déterminer s'il existe $f \in E$ tel que $D(f) = g$. La question de l'existence de primitive est donc celle de la recherche de l'image $\mathrm{im}D$ de l'application D.

Exemple.– Soit $E = \mathsf{R}_n[x]$, l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). L'algèbre E est munie de la dérivée usuelle des fonctions que l'on notera D. On sait que $\ker D$ est constituée des fonctions polynomiales constantes (caractérisation FCD pour les fonctions polynômes : en admettant qu'on sache dériver une fonction polynôme, cette caractérisation possède alors une démonstration purement algébrique.) La relation

$$\dim \ker D + \dim \mathrm{im}\, D = n + 1,$$

Entraîne que $\dim \operatorname{im} D = n$. L'opérateur D n'est pas surjectif. Il est trivial, en effet, de vérifier que la fonction polynôme $p_n : x \mapsto x^n$ n'a pas de primitives (au sens usuel) dans $\mathrm{R}_n[x]$. En revanche, si l'on remplace $\mathrm{R}_n[x]$ par $\mathrm{R}[x]$, l'ensemble des fonctions polynômes, l'opérateur D est surjectif. C'est aussi le cas en prenant pour E l'ensemble $\mathbf{C}^\infty(\mathrm{R})$ des fonctions définies et de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur le corps des réels[192]. L'analyse moderne a multiplié les exemples où le rôle de test de la FCD a été important.

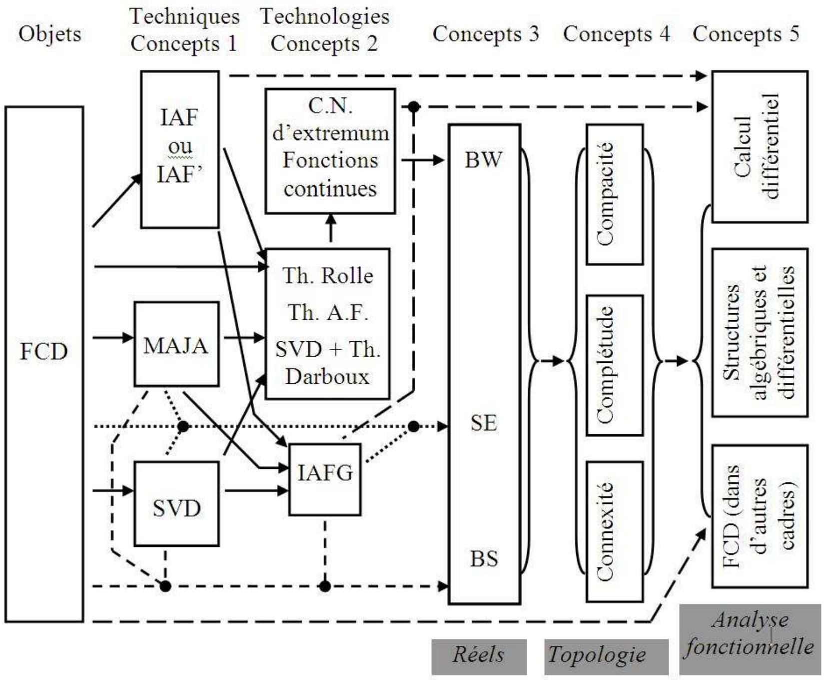
Exemple.– L'espace vectoriel $\mathbf{D}'(\mathrm{R})$ des distributions de Schwartz constitue un autre exemple d'espace dans lequel tous les objets sont dérivables. Cet espace contient l'espace $\mathbf{C}^0(\mathrm{R})$ des fonctions continues. (En ce sens on rend dérivable les fonctions continues.) La dérivée sur $\mathbf{D}'(\mathrm{R})$ (notée ici $\frac{d}{dx}$) prolonge la dérivée usuelle, dans le sens suivant : si $f \in \mathbf{C}^0(\mathrm{R})$ est dérivable, on a $\frac{d}{dx} f = f'$. Dans un manuel classique [Khoan, 1972], l'auteur lie bien la caractérisation FCD et le problème des primitives. La caractérisation FCD figure dans un paragraphe intitulé « Primitive d'une distribution sur R » avec une formulation très brève : « L'application $T \to \frac{d}{dx} T$ est surjective ; son noyau est un sous-espace vectoriel à une dimension, engendré par la fonction 1. »

4.6.7 Un site mathématique pour la caractérisation FCD

Le site mathématique local de ce théorème recourt aux concepts 4 et 5 que nous définissons. Les concepts 3 et 4 sont ceux de plus haut niveau. Ils constituent les justifications ultimes des concepts mis en œuvre dans le problème étudié. Il peut s'agir de théories situées dans un horizon ultérieur [J.T. Desanti, 1968] qui éclaireraient le problème mathématique étudié, comme ceux vus dans les paragraphes 4.6.5 et 4.6.6. A l'inverse, ils peuvent être au fondement des mathématiques mises en jeu dans ce problème. A l'inverse des objets préconstruits ou implicites mentionnés au début, ils doivent être explicités (jusqu'à un certain point) pour rendre claires les techniques, technologies et différents concepts mis en jeu dans ce site. Les notions de connexité, de complétude et de compacité, bref les notions de base en topologie, sont par l'éclairage qu'elles apportent aux propriétés (BW), (SE) et (BS), les principaux champs rele-

[192] Voici, d'ailleurs, de bons exemples pour illustrer une des différences entre espaces de vectoriels de dimension finie ou infinie.

vant du troisième niveau conceptuel. Mais le calcul différentiel, les structures algébriques et différentielles associées sont le cadre ultime dans lequel se développe la caractérisation FCD. Ce niveau conceptuel pourrait être résumé comme étant celui de l'analyse fonctionnelle.



Document 99 : un site mathématique pour la caractérisation FCD

En résumé de l'ensemble de l'analyse, nous proposons un site (document 99) pour la caractérisation FCD (nous n'avons pas fait figurer les objets implicites). Nous rappelons que les flèches unidirectionnelles indiquent les liens d'*inclusion dans la justification*, à interpréter à peu près « comme pertinent pour » [P. Duchet & A. Erdogan, 2005]. Pour rendre le site plus lisible, des flèches en pointillés et tirets marquent les inclusions sautant un niveau d'analyse. Les flèches ne sont en général pas indiquées à l'intérieur du même niveau d'analyse. Enfin, nous avons procédé à quelques regroupements : le théorème des accroissements finis, le théorème de Rolle, le théorème de Darboux sont dans un même cadre, en raison de leur équivalence mathématique ; la condition nécessaire d'extremum (théorème 2.8) et les propriétés des fonctions continues sur les segments (théorème 2.7), comme étant les deux éléments justificatifs du théorème de Rolle ; les propriétés (BW), (SE) et (BS) en raison de leur appartenance au groupe des cinq propriétés équivalentes du corps des réels rappelées dans les motivations.

Le site met bien en évidence le parcours de la démarche présentée, centré sur les théorèmes élémentaires du calcul différentiel. Ces derniers, concepts 1 ou technologies, ont toujours été quasi absents des programmes du secondaire. Seules les techniques sont accessibles, ce qui

nous renvoient à une des remarques introductives : la pratique des mathématiques à un niveau *n* oblige à passer sous silence des notions non disponibles à ce niveau, que cette non disponibilité vienne de choix institutionnels, de contraintes épistémologiques ou didactiques. (Comment, par exemple, dans l’espace d’une classe de terminale scientifique se livrer à une construction du corps des réels, qui mettrait en évidence les concepts 2 ?)
Mais l’intérêt du site est également de remettre en valeur d’autres démarches de démonstration de la caractérisation FCD[193]. Nous en avons abordé une, celle qui consiste à partir de la contraposée de la propriété à démontrer : en supposant *f* dérivable que se passe-t-il pour *f’* si l’on suppose *f* non constante ? Un raisonnement par dichotomie, portant sur le taux d’accroissement (ou la pente), permet de montrer l’existence d’un point où la dérivée ne s’annule pas. Le processus de dichotomie – équivalent à la propriété des segments emboîtés (SE) évoquée ci-dessus – doit être considéré comme une technique de cette démonstration (il n’y a pas d’intermédiaire). L’analyse du site (et des cursus) montre que l’accessibilité de cette technique se fait (ou peut se faire) au niveau considéré, les accompagnements des programmes mettant même l’accent sur la technique de dichotomie. Voici donc une démarche démonstrative que l’on pourrait qualifier de rudimentaire (dans le sens où elle ne fait appel à rien d’autre qu’un mode de raisonnement et à un processus) quasiment située dans l’écosystème du cycle terminal. Elle est, en tout cas, utilisée par des professeurs de classe préparatoire. En revanche, ce qui reste inaccessible à ce niveau c’est la justification de cette technique : l’équivalence des propriétés du corps des nombres réels, les propriétés topologiques (concepts 3 du site ci-dessus) sous jacentes.

4.6.8 Conclusion partielle

Les considérations mathématiques et l'analyse en termes de site présentées plus hauts nous semblent montrer que la caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la nullité de leur dérivée est loin d'être une trivialité, tant sur le plan mathématique que sur celui de leur enseignement.

D'un point de vue mathématique, elle plonge ses racines dans les fondements de l'analyse moderne et s'inscrit dans une classe de problèmes mathématiques plus généraux. Ses raffine-

[193] On renvoie à [Delcroix, Silvy, 2010] pour une description plus exhaustive des démonstrations de la caractérisation FCD.

ments ont été cruciaux dans la bonne compréhension de phénomènes liés à la théorie de la mesure (l'escalier du diable en est une des manifestations). Elle se trouve, également, assez naturellement liée à l'expression de conditions optimales pour lesquelles la relation fondamentale du calcul intégral est vraie. Nous mentionnons de nouveau ici cette propriété tant son statut semble similaire à celui de la caractérisation FCD : une évidence, mais jusqu'à quel point...

Du point de vue de son enseignement, elle se trouve au cœur d'un cursus d'analyse mathématique classique, le mot cursus étant pris ici au sens de culture générale qu'il faut posséder en mathématique au lycée. Ce cursus est situé pour ses premiers horizons à la frontière entre le cycle terminal et l'enseignement supérieur mais il se prolonge bien au delà. Ainsi, le site de la caractérisation FCD nous semble-t-il pouvoir être utilisé dans le cadre de la préparation aux concours du second degré et plus particulièrement en formation professionnelle des enseignants afin de montrer les articulations et connexions au sein de ce cursus et expliciter les choix didactiques effectués par les concepteurs des programmes.

Dans un ordre d'idées similaires, cet ensemble de connexions nous semble pouvoir également être une des raisons explicatives de la variabilité de la situation (présence, absence,...) des différents éléments de ce site (caractérisation FCD, SVD, propriétés d'accroissements finis,...) dans les programmes du secondaire. (Alors que dans le même temps le chemin le plus classique pour accéder à la caractérisation FCD, par l'inégalité des accroissements finis, semble faire presque consensus au sein des mathématiciens.) Mais par exemple, le rôle central de la propriété de majoration des accroissements (propriété MAJA), remis en évidence plus haut, semble suggérer une autre porte d'entrée pour l'étude des propriétés d'accroissements finis en fin de cycle terminal au moins aussi naturelle que celles adoptées dans un passé récent.

Nous espérons que la présentation de ce site mathématique de la caractérisation FCD et les commentaires associés pourront ajouter un élément à un débat qui ne nous semble non clos. Par ailleurs, nous souhaitons que le matériel présenté ici puisse servir à la conception d’activités d’enseignement autour de ces questions cruciales dans un cursus d’analyse mathématiques.

4.7 Conclusion du chapitre

Des travaux antérieurs (chapitre 3) montrent que le site mathématique est un outil précieux pour le résolveur, en mettant au jour les « ruses », volontaires ou non, du concepteur du sujet qui cache (dans un implicite nécessaire) des méthodes de résolution, des « pièges », ou plutôt des sources de questionnement. C'est particulièrement le cas dans des sujets d'oral de concours (voir 4.5) où le site mathématique permet de cerner les attentes du jury. Plus précisément, en dégageant certains implicites et en montrant la place du sujet dans l'organisation mathématique, le site répond à un double objectif : prévoir certaines questions probables sur le sujet, dégager les thèmes sur lesquels doivent porter les exercices que le candidat est invité à proposer. Ainsi, la construction du site mathématique permet une préparation plus fine de l'épreuve et une meilleure gestion du temps imparti à cette préparation.

Mais plus encore, dans le cadre de la formation des enseignants, l'analyse en termes de site mathématique peut être un outil précieux de formation mathématique et professionnelle. L'élaboration d'un site par un *étudiant–professeur* lui permet d'appréhender l'architecture mathématique du concept étudié. Il permet également de remettre en cause la progression scolaire ou universitaire reçue, en brisant les chaînes entre les savoirs et en suggérant des liens neufs. En accord avec Mercier (2001)

> *« une remise en ordre peut produire des savoirs (comme le montrent par exemple le Séminaire de Bourbaki, ou une nouvelle démonstration d'un théorème connu) »,*

le site est un moteur de formation de *l'apprenti–professeur*. Il est un outil adapté au travail constituant

> *« à reprendre officiellement, au niveau scolaire n+p, les savoirs étudiés au niveau n, pour tenter d'apprendre encore quelque chose de nouveau en utilisant les outils mathématiques formés entre temps »,*

comme le suggère Mercier (2001). L'exemple de la caractérisation FCD montre que le site permet de construire les relations entre des contenus que l'étudiant risque d'avoir perçu, au cours de sa licence, comme des éléments épars. La construction de sites aidera ainsi à fonder la culture scientifique du futur *professeur–mathématicien*. Dans le cadre de la préparation ou de l'analyse d'une activité de classe, le site mathématique rend plus explicite le contrat didactique de l'activité concernée. Ainsi le futur *professeur-concepteur* peut mener une réflexion sur les connaissances et les habiletés nécessaires à la conduite de l'activité. Lorsqu'il s'agit d'une préparation, le site devient ainsi un élément d'aide aux choix pédagogiques, par exemple par rapport aux libertés qu'offrent les programmes et l'institution aux enseignants.

Lorsqu'il s'agit d'une analyse de pratiques, le site permet l'explicitation des choix présents dans la séance analysée. Dans un autre ordre d'idées, l'explicitation par le site mathématique de ces connaissances et habiletés procure également des éléments au futur *professeur-évaluateur* pour construire des évaluations conformes aux objectifs qu'il se fixe (ou que l'institution lui fixe).

Nous nous proposons de poursuivre ultérieurement l'expérimentation de l'utilisation du site mathématique dans le cadre de la préparation aux concours (CAPLP2 mathématiques-sciences, CAPES mathématiques) à l'IUFM de Guadeloupe et de la formation professionnelle des stagiaires ou des futurs étudiants conduisant aux masters *éducation et formation*. L'intérêt manifesté pour l'outil, lors du colloque 2009 de l'IREM Antilles-Guyane, renforce notre conviction que le concept et son usage, tel qu'ils sont présentés ici, peuvent être étendus à d'autres disciplines scientifiques et constituer un des outils communs aux enseignants de ces disciplines.

Par ailleurs, nous avons aussi montré la robustesse du site mathématique dans les différentes évaluations nationales du primaire au baccalauréat : les propriétés du site, établies au chapitre 3, se retrouvent dans ces nouveaux contextes avec un substrat dont l'importance varie avec le niveau étudié.

CONCLUSION

Au travers d’une relecture des grandes lignes de cette recherche, nous pensons pouvoir apporter des éléments de réponses aux deux questions suivantes : Quelles sont les caractéristiques pertinentes de l’outil *site mathématique local* que nous avons façonné ? Cet outil peut-il outiller d’autres questions didactiques ? Ce faisant, nous dégagerons également les perspectives de travail qui s'ouvrent à nous.

Nous avons adopté une méthode fondée sur le cadre de la théorie anthropologique du didactique, qui permet une approche écologique de la transposition. Cependant, notre manière de procéder, qui consiste à produire le site local d'une question afin de remonter, le cas échéant, vers l'environnement global d'un thème d'étude, aborde la question de la transposition « à rebours », depuis la classe vers les savoirs qui pourraient légitimer la question qui y est posée, dans sa formulation même. C'est pour cela que nous avons dû faire intervenir dans les analyses une classe d'objets que nous avons nommée « le substrat », qui donne forme au site. Là sont regroupés les prérequis et les objets préconstruits, paramathématiques et protomathématiques, qui sont convoqués dans le milieu de l'action attendue des élèves par des indices plus ou moins soigneusement choisis par le professeur et qui sont donc présents « sous contrat ». Cela pour dire que c'est l'usage scolaire qui en donne les conditions d'emploi et les limites, soit qu'ils n'aient pas encore été construits comme objets mathématiques, soit qu'ils n'aient pas vocation à l'être jamais, soit que, objets précédemment enseignés, ils soient attendus ici sous une forme naturalisée, dans un emploi routinier. Ainsi, nous disposons aujourd'hui d'une technique qui nous permet, à partir de la recherche de l'ensemble des réponses possibles à une demande de restitution organisée de connaissances, de mettre en évidence leur écologie individuelle et de montrer, à partir de la réponse attendue qui se laisse ainsi deviner, quels sont les objets pertinents auxquels un élève doit avoir un rapport, pour répondre « comme il faut ». Ces objets ne sont pas seulement, nous venons de dire pourquoi, des objets du « niveau de la question » ou des objets pris dans le contrat didactique prévalent, mais aussi des techniques d'action à ce niveau, des théories relatives à ces techniques, et peut-être des objets qui vivent bien au delà de son horizon institutionnel.

Mais le choix des questions sur lesquelles portent des ROC est lui aussi digne d'analyse. Car l’étude de l'innovation institutionnelle révèle l’objectif de l’institution. Ce travail sur une innovation, située dans le cadre que l'on croirait intangible du baccalauréat, montre un effet sur les pratiques enseignantes : la quasi-disparition de la démonstration dans le cursus secondaire est révolue. La demande que les ROC induisent change aussi bien les pratiques que les manuels, de la seconde à la terminale, et l'on y retrouve quelques démonstrations. Cependant, cette innovation relevant du « pilotage des notions enseignées, par l'examen final » a rencontré des difficultés, et notre étude montre qu'elle n'a pas encore trouvé les conditions de sa stabilisation, qui la feront considérer comme « naturelle ». D'abord, parce que l'identification des questions possibles n'est pas aisée et que leur test est délicat : se sont des sujets de baccalauréat et il est de tradition de garder le secret sur ces choses. Mais surtout parce que les connaissances à mobiliser dans la restitution sont difficiles à reconnaître. Nous les identifions dans notre travail de description des sites locaux par la nécessité, que nous avons rencontrée d'autant plus forte que nous descendions dans les niveaux de la scolarité, d'organiser, de structurer, de mobiliser sous contrat des connaissances privées de plus en plus centrales dans le travail, avec des savoir publics de plus en plus rares.

Les questions que nous avions posées : « Comment organiser ses connaissances pour enseigner un sujet donné ? » ou « Comment produire l'organisation des connaissances d'un élève en vue de l'attaque d'une question ? » ont été fructueuses et elles trouvent au cas pas cas des éléments de réponse, développés dans le chapitres 3 et 4, avec l'outil didactique « site mathématique local ». Le site mathématique local est fondé sur des notions protomathématiques ou paramathématiques qui sont présentes mais trop souvent invisibles sur la scène de la question, et en composent la strate la plus profonde, le substrat. Des éléments du substrat peuvent se retrouver fondés en mathématiques, mais ils appartiennent alors à un au-delà de l'horizon mathématique du professeur ordinaire. La construction de son site permet de questionner le naturel du monde disciplinaire d'un niveau d'enseignement et ainsi de nommer le « *déjà là* » d'un exercice, qui fait le milieu de l'étude que sait convoquer un élève habile et instruit.

Notre enquête nous conduit en effet à appréhender le domaine privé de l'élève, son rapport au savoir et ses connaissances. Dans le cas des ROC, ces éléments peuvent être saisis par leur publication dans le texte des réponses, lorsque les élèves ont pris le risque d'énoncer les justifications de leur discours déductif. L'évaluation d'une ROC devrait donc permettre, à qui regarde les réponses à l'aide du site de la restitution demandée, de savoir si l'élève a compris le sens du résultat qu'il démontre, parce que pour lui, ce résultat appartient à un site suffisamment riche en objets :

> *«Comprendre une partie de jeu d'échecs est différent de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles. Comprendre la partie, c'est tout*

autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu…C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé». [H. Poincaré, 1902]

Le professeur pourrait percevoir la raison intime de l'auteur de la réponse, et observer ce que tel élève connaît et peut, à la demande, savoir, en s'appuyant sur sa connaissance du site car l'habileté professionnelle y suffit rarement. L'organisation du texte de l'élève n'est en effet pas plus transparente que l'organisation de tout autre discours mathématique, dont la rigueur ne tient jamais qu'à un accord sur ce qui est requis à cet effet, et à la vérification de sa présence.
Mais notre enquête sur le site d'une question, ensemble organisé d'objets pertinents pour les traitements possibles de la question et le choix d'un traitement institutionnellement attendu, qu'il soit mathématiquement minimal ou qu'il s'outille d'objets de haut niveau trophique, doit aussi identifier ces objets de savoir pertinents mais peut-être institutionnellement absents du lieu institutionnel où la question est rencontrée. Cette partie plus mathématique est hiérarchisée en strates correspondant aux niveaux technologique et théorique des techniques à mobiliser. Souvent même, des éléments plus lointains apparaissent : ils manquent alors dans le paysage.

Cela nous permet d'affirmer que la recherche du site des questions dont il traite et dont il prétend aider l'étude pourrait être un élément fondamental du bagage d'un enseignant de mathématiques. Cette recherche et ses résultats le conduiraient en effet à réorganiser ses connaissances privées en un savoir pour enseigner, et à éviter ce que E. Rouy (2007) a montré : l'irruption, chez les professeurs inexpérimentés, d'exigences de rigueur qui s'avèrent déplacées et formelles, parce qu'elles ne correspondent pas aux questions qui se posent aux élèves dans les situations que le professeur a organisées pour eux. Nous avons montré, tout au long du travail, diverses applications du site, dans la ligne que nous décrivons ici en conclusion. Sa construction et son analyse peuvent être un outil efficace pour un professeur qui cherche à :

- Engendrer, à partir de démonstrations étudiées comme exemples, des classes de situations voisines de démonstrations et ainsi explorer les objets de savoir d'un site.
- Déchiffrer un programme d'enseignement. Découvrir les notions paramathématiques et protomathématiques ainsi que les préconstruits qui le fondent.

- Transmettre les habiletés nécessaires à la compréhension d'une partie des éléments du contrat didactique[194]. L'exemple de la caractérisation FCD montre que le site mathématique local est une manière de répondre. Le professeur *« doit comprendre qu'il existe une variété de manières d'organiser la discipline »* [L. S. Shulman 1986 ; trad. G.Sensevy & C.Amade-Ascot, 2007]. et que ces manières influent sur les apprentissages.

Or, la construction du site d'une question n'est pas actuellement dans les compétences du professeur, qui le plus souvent anticipe peu sur les questions qu'il pose, confiant dans ce qu'il sait. Nous avons éprouvé la difficulté de l'opération, que pourtant les meilleurs élèves réussissent suffisamment pour ne plus être surpris des demandes qui leur sont faites. C'est en effet *un problème de la profession*, comme l'annonce par exemple J. Cirade (2008, 1, 2). Il nous semble que la connaissance du site des questions enseignées permettrait la présentation des objets pertinents et du substrat et qu'elle ne tuerait pas la question, ce qui est essentiel. Elle permettrait en revanche l'anticipation nécessaire à la réalisation de la tâche. Le professeur averti pourrait conduire cette action, qui rendrait peut-être possible le passage d'un système d'enseignement aristocratique élitiste ou bureaucratique principalement orienté par l'évaluation [M. Verret, 1978] à un système où chaque élève pourrait, individuellement, être responsabilisé sur l'investissement attendu de lui. Car, faute d'avoir autre chose à disposition, le professeur appuie sa pratique sur le manuel. En classe, cela implique que le professeur ne dispose que du point de vue du livre, pour aider et orienter les élèves, tandis que nous avons montré tout ce qui y manque, et qui échappe aux textes linéaires et aux descriptions en termes *d'activités*, de *savoirs à retenir*, de *techniques à mobiliser* et d'*exercices*, en particulier parce que ces descriptions ne donnent pas les connaissances pertinentes de ces tâches, qui sont toujours au delà ou en deçà de l'horizon institutionnel de la classe.

Notre étude a permis de montrer que cette notion peut être étendue à d'autres contextes que le cycle terminal et la préparation du baccalauréat, où nous avons engagé notre étude.

Elle nous est apparue robuste. Ainsi un exercice de fin de primaire, un exercice du brevet, un exercice d'oral de CAPES peuvent être analysés en vue d'une explicitation des composantes nécessaires à l'élaboration de la solution et au delà, des éléments de paysage nécessaires à la

[194] C .Margolinas, A. Mercier et S. de Cotret (2006) soulignent ainsi que « *Le problème qui se pose est de comprendre sous quelle forme il serait possible de mettre à la disposition des professeurs certains savoirs concernant l'organisation curriculaire mathématique.* »

prise de décisions stratégiques, qui suppose une anticipation de l'effet des décisions possibles. Nous avons montré en particulier que la construction et l'étude du site pouvaient permettre aux PE1 ou PLC1 de revisiter leur savoir mathématique en leur permettant de réorganiser à leur niveau des « blocs de rationalité » autour des mathématiques qu'ils ont apprises dans leur formation comme auparavant et que dorénavant ils devront transmettre.

De nouveaux usages de cette notion tiendraient à son extension à d'autres matières que les mathématiques. Notre étude nous permet de postuler que la notion de « site local » peut servir à d'autres matières scientifiques. Car nous y trouverons, tout autant sinon plus qu'en mathématiques, les éléments d'organisation que nous avons identifiés en mathématiques et qui nous montreraient, si nous en doutions, que les mathématiques sont une activité dont le fondement est expérimental et que dans ces conditions, le substrat des questions mathématiques est toujours composé de nombreux objets non mathématisés tandis que les niveaux supérieurs des questions scolaires sont le plus souvent bien au delà de l'horizon du niveau d'études considéré. Rappelons alors que la « Question de cours », un objet didactique proche de la ROC, est l'apanage des « Colles », qui appartiennent aux aides à l'étude fournies dans les classes préparatoires aux grandes écoles : on y pose des questions non nécessairement traitées telles quelles en cours, comme demandes d'une réorganisation explicite des connaissances d'un élève, orientées par une question. Et dans cet habitat particulier, la question n'est pas préparée en classe. L'anticipation des réorganisations nécessaires est sous la responsabilité de chaque élève et l'exercice, s'il est une aide à l'étude, devient aussi un outil de sélection.

Ainsi l'objet ROC aurait depuis longtemps d'autres habitats [A. Mercier, 2003], où des formes voisines vivraient sous d'autres noms locaux, et il survivrait au baccalauréat plus aisément en raison de sa présence dans l'enseignement supérieur et dans les préparations aux concours. On pourrait même le comparer à l'exercice « note de synthèse » étudié par J. M. Pérez (2007), comme exercice des concours comportant des écrits où l'exercice du jugement s'exerce sur la base d'une documentation abondante qu'il s'agit de mobiliser. On se rappellera alors que la recherche de démonstrations en géométrie se faisant naguère selon un « patron d'analyse synthèse » [J.Gascon, 1993] où la synthèse correspondait bien à la rédaction d'un exposé conduisant à une réponse, et que *sapere*, le terme latin qui donne l'étymologie de savoir signifie « avoir la capacité de juger »[195]. CAPES, Agrégation et CAPLP par exemple ont, à l'oral 1,

[195] Robert historique, article savoir.

une épreuve de type ROC. De même les concours, depuis les plus *élitistes* tels que l'Ecole Nationale de l'Administration, l'Ecole de la Magistrature jusqu'à celui de Professeur des Ecoles ont une épreuve de synthèse d'une documentation. Dans le cas du premier oral des concours de recrutement des professeurs du second degré, la plupart des admissibles « possèdent les connaissances nécessaires », comme l'on dit en pensant qu'elles sont simplement des prérequis. Or, si cette condition reste nécessaire, elle cache la forêt : ce que J. M. Pérez [2007] nomme « l'intuition travaillée », et qui correspond dans notre étude à ce que nous avons nommé « la construction du site de la question ». Pour disposer au moins partiellement du site mathématique local de l'exposé, le candidat travaille les diverses strates de ses connaissances et savoirs : substrat, objets et concepts, pour organiser un discours public conduit par la nécessité de répondre en mobilisant les arguments requis. Dans les rapports du jury de CAPLP externe de 2007 à 2009, on trouve le paragraphe suivant :

> *« Beaucoup de candidats se sont préparés aux épreuves d'admission et présentent un oral de qualité. Des efforts en matière de réflexion pédagogique sont notés. Ainsi certains candidats ont développé leur exposé selon une démarche d'investigation à partir d'une situation problème ou d'un fil conducteur. Deux exemples très pertinents de cette démarche peuvent être rapportés : pour le sujet Me 30*[196]*, à partir de la problématique de détermination du rayon du cercle inscrit en fonction des côtés d'un triangle quelconque, un candidat a présenté les différentes relations métriques qui lui ont permis, en conclusion, de répondre à sa problématique initiale… » .* [197]

Enfin, sans entrer ici dans un débat sur l'efficacité de l'enseignement qui demanderait à être instruit de manière solide, rappelons que L. Mâ (1999) montre qu'une différence essentielle entre professeurs chinois et occidentaux tient à l'organisation des connaissances mathématiques enseignées dont les premiers disposent collectivement. Il nous semble que ce qu'un auteur comme L. S. Shulman retient de cette idée et de l'ensemble des travaux qu'il a dirigés,

---

196 Me30 : Relations métriques et trigonométriques dans le triangle quelconque :

- exemples de telles relations,
- utilisation de ces relations.

197 Rapport du jury 2009 du CAPLP.sur le site du ministère de l'éducation nationale

http://www.education.gouv.fr/cid24247/sujets-caplpl-externe-2009.html (le21 octobre 2009) tout comme ce que Y. Chevallard dit avec ses étudiants et les chercheurs qui travaillent en Théorie Anthropologique du Didactique, sur les problèmes de la profession, sont des résultats compatibles avec ce que nous avons appris ici.

Bibliographie

ALAIN. (1952). *Propos sur l'éducation*, Paris, Presses universitaires de France

ANDLER M. (2004). Les mathématiques : démonstration,description, expèrience Brochure APMEP N°168, *la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*. St-Flour (Cantal): 3ème Université d'été Animathbulle.

ARTIGUE M. (2008). Didactique du numérique/ outils et instruments de calcul. In *Actes de la XIIIème École d'été de Didactique des Mathématiques*, Rouchier A. & Bloch I. (éditeurs). La Pensée Sauvage, Grenoble.

ANTIBI A. & BROUSSEAU G. (2002). Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Les Dossiers des Sciences de l'Education, N° 8*, p. 45-57. Presses universitaires du Mirail, Toulouse.

ARSAC G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. In Grenier, D. (ed.) Séminaire de didactique et technologies cognitives en mathématiques. Grenoble : IMAG.

ASSUDE T. (2003). *Étude du curriculum mathématique entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique*. Synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Éducation, Université de Provence, Marseille, France.

BACHELARD G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Réédition VRIN 1975.

BACHELARD G. (1951). Conférence au Palais de la Découverte, *L'actualité de l'histoire des sciences.*

BAILLEUL M. (1995). Sur une approche statistique des représentations de l'enseignement des mathématiques de Collège et de Lycée. *Recherche en didactique des mathématiques*. *Volume 15/2*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLANCHARD LAVILLE C., CHEVALLARD Y., et SCHUBAUER-LEONI M. L. (1989). *Regard croisé sur le didactique Un colloque épistolaire.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherche en didactiques des mathématiques*, volume 4.2, la Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11-2/3, p. 167-210.

BROUSSEAU G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie, dans *Actes du 2ième Colloque de Didactique des mathématiques (Rethymnon, Crète, Grèce)*, p. 67-83, Université de Crète, Rethymnon. Disponible à l'adresse suivante : http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/GeometrieElementaire.pdf (consulté 10/12/2009).

CABASSUT R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne.* Université Paris 7, thèse.

CAGNAC G & THIBERGE L. (1967). *Géométrie classes terminales C et T.* Masson, Paris.

CARON F. & DE COTRET S. (2007). Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective. In *Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec*. Disponible à l'adresse suivante : http://harfang.uqar.qc.ca/gdm/impres/Actes_GDM_2007.pdf#page=127 (consulté le 10/12/2009)

CASTELLA C. & MERCIER A. (1995). Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Petit x n° 41*, IREM de Grenoble.

CASTELA C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactiques des mathématiques. Volume 15/1*, p. 7-45. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CASTELA C. (2005). Travail de la question des enjeux ignorés d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique. Primero Congreso internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico, 27-30 Octobre 2005 (Baeza España).

CASTELA C. (2008). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. *Perspectives en didactique des mathématiques*. *Cours de la XIII*e *école d'été de didactique de mathématiques*, p. 89-114, (Eds Rouchier, Bloch). La Pensée Sauvage, Grenoble.

CAUTY A. (1984). Tropes et figures du discours mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*. *Volume 5.1*, p. 81-128. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHARLOT B. (1984). *Histoire de la réforme des " Maths modernes "; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique*, in Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques, Le Mans, Université du Maine, juillet 1984, p. 249-270. *Reproduit dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P., 352, février 1986.*

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée Sauvage, Grenoble (2ème édition augmentée: 1991).

CHEVALLARD Y. (1988). *L'univers didactiques et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements. Interactions didactiques* n°9, Université de Genève et de Neuchâtel.

CHEVALLARD Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des

mathématiques au collège. Troisième partie. *Petit x n° 30*. IREM de Grenoble.
CHEVALLARD Y. (1992, 1). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 12, n°1, p. 73-112. La Pensée sauvage, Grenoble.
CHEVALLARD Y. (1992, 2). Une réforme inaccomplie, Gazette des mathématiciens, no 54, p. 17-21.
CHEVALLARD Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. In *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis* (Turin, 3 février 1994) pour l'année 1993-1994, p. 190-200. Disponible à l'adresse suivante :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf
(Consulté le 10/12/2009).
CHEVALLARD Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 17/3, p. 17-54. La Pensée sauvage, Grenoble.
CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* volume 19/2, p. 221-226. La Pensée sauvage, Grenoble.
CHEVALLARD Y. (2001). Les TPE comme problème didactique, Séminaire national.
CHEVALLARD Y. (2002). Organiser l'étude. Cours. . In *Actes de la XIème École d'été de Didactique des Mathématiques*, Dorier, J.-L. Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (éditeurs). La Pensée Sauvage. Grenoble.
CHEVALLARD Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique
In *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*: L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007, p.705-746. Disponible à l'adresse suivante :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134 (Consulté le 10/12/2009).
CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2001).Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : Une Atlantide oubliée. *Petit x, n°55*, p. 5-32, IREM de Grenoble.
CHEVALLARD Y. & BOSCH M., (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations. *Petit x, n°59,* p. 43-76. IREM de Grenoble.
CIRADE G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I, Marseille.

CIRADE G. (2008a). Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*, p. 249-277. ARDM et IREM de Paris 7.

CIRADE G. (2008b). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x n°76*, p. 5-26. IREM de Grenoble.

CLARKE F. H. (1990). *Optimization and Nonsmooth Analysis. Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphie.

CONNE F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques. Volume 12/2.3*, p. 221-271. La Pensée sauvage, Grenoble.

DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J. (1986). *Une Histoire des mathématiques* - Routes et dédales. Collection Points Sciences, Seuil, Paris.

DAUBELCOUR J.P. (1999). *Evolution des programmes d'analyse et de géométrie, au XX^e^ siècle, en terminale scientifique.* IREM de Lille.

DAVID B. (2000). *Equité et arrangements évaluatifs. Certifier en E.P.S.* Paris INRP, Disponible à l'adresse suivante :

http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/david/equite/accueil.htm (Consulté le 10/12/2009).

DELBOS, G. & JORION, P. (1984), *La transmission des savoirs*, Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

DELCROIX, A. & SILVY, C. (2009). Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial... *Recherches et Ressources en Éducation et en Formation, n° 3*. Sous presse.

DÉTIENNE, M. & VERNANT, J.-P. (1974), *Les ruses de l'intelligence – la mètis des Grecs*, Flammarion, Paris.

DESANTI J.T. (1968). *Les idéalités mathématiques*. Le Seuil, Paris.

DHOMBRES J. (2004). Tours de main et méthodes. Un cheminement historique sur la valeur épistémologique de la concision en mathématiques. In Brochure APMEP, N°168. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation du secondaire*. Université d'été St Flour.

DIEUDONNE J. (1979). *Eléments d'analyse, Tome 1.* 3^è^ édition. Gauthiers-Villars, Paris.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil - objet. *Recherche en didactique des mathématiques. Volume 7/2*. La pensée sauvage, Grenoble.

DOUBKHAN P. & SIFRE J. C. (2001). *Cours d'analyse Analyse réelle et intégration*. Dunod, Paris.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005). *Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis.* In Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (Ed. Bosch), p. 663-674. Publication électronique 2006.

DUVERNEY D. (2002). *Réflexions sur la désaffection pour les études scientifiques.* Disponible à l'adresse suivante : http://www.smf.emath.fr/Enseignement/Divers/Duverney.pdf (Consulté le 10/12/2009).

EBBINGHAUS et al. (2002). *Les nombres.* Vuibert, Paris.

ERDOGAN A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques.* Thèse, université de Paris 7.

FRIEDELMEYER J.P. & VOLKERT K. (1997). *Histoire des problèmes Histoire des mathématiques,* IREM. Ellipses.

GASCON J. (1993). Développement de la connaissance mathématique et de l'analyse didactique. *Recherches en didactique des mathématiques. Volume 13/ 3*, p. 295-332. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GISPERT *H. (2007*). L'enseignement des mathématiques au XX^e siècle dans le contexte français, 5^e Université d'été européenne sur l'histoire et l'épistémologie des mathématiques dans l'enseignement (ESU-5), Prague en juillet 2007, publication électronique. Disponible à l'adresse suivante : http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gispert08-reformes/Gispert08.htm (Consulté le 10/12/2009).

GOUYON R. (1961). *Précis de mathématiques supérieures programmes A_1 et A_2.*Vuibert, Paris.

GONSETH F. (1926). *Les fondements des mathématiques, de la Géométrie d'Euclide à la Relativité générale et de l'Intuitionnisme,* Librairie Albert Blanchard, Paris.

GLASMAN D. (2004). Rapport établi à la demande du Haut conseil de l'évaluation de l'école, *Le travail des élèves pour l'école en dehors de l'école*, N° 15. Disponible à l'adresse suivante : http://cisad.adc.education.fr/hcee/documents/rapport_Glasman_Besson.pdf (Consulté le 10/12/2009).

HOUZEL C. (1996). *Analyse mathématique, Cours et exercices*. Collection Sciences SUP. Belin, Paris.

KAHANE J. P. (2002). *L'enseignement des sciences physiques,* Odile Jacob, France.

KHOAN V.K. (1972). *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*. Vol. 2., Vuibert, Paris.

LEGRAND M. (2006). *Le principe du "débat scientifique" dans nos classes et nos amphis, pourquoi et comment ?* Disponible à l'adresse suivante : *http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/Debat_scientifique/debat_s_principes.pdf* (Consulté le 10/12/2009).

LEON A. (1984). *L'histoire de l'éducation aujourd'hui*, UNESCO – Delachaux & Niestlé.

LESPINARD & R. PERNET (1965). *Géométrie cours complet, Terminale C*. A. Desvigne.

LEURETTE, S. & FORISSIER, T. (2009). La contextualisation dans l'enseignement des sciences et techniques en Guadeloupe. *Grand N, n° 83*, p. 19-26.

LICHNEROWICZ A (1970). Les mathématiques et leur enseignement. *Bulletin de l'APMEP*, novembre. Disponible à l'adresse suivante : http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/lichne70.htm (Consulté le 10/12/2009).

NOIRFALISE R., CHAZAL J. & VOLDOIRE C. (1996). *Rigueur au lycée?* Bulletin de L'IREM de Clermont Ferrand, n°53.

MA L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States (Studies in Mathematical Thinking and Learning.).* Mahwah, NJ :Lawrence Erlbaum Associates.

MARGOLINAS C., MERCIER A. et DE COTRET S. R. (2006). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In *Actes des journées mathématiques INRP de Lyon*. Disponible à l'adresse suivante : http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/math_inrp/jmj06/Actes.pdf

MAUSS M. (1950). *Sociologie et anthropologie.* Quadrige/Presse Universitaires de France, Paris. (Septième édition : 1997).

MAGEN A. (2001). Le projecteur rhétorique, Ombres et lumières sur les "erreurs" en algèbre et en géométrie au collège (et ailleurs). *Repère n° 45*, p. 24-54. Disponible à l'adresse suivante : www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/45magen.pdf (Consulté le 10 /12/2009).

MAGEN G. (2006). *Du radical du sens, Ethnométhode du spectateur, de l'auditeur et du lecteur*. Université de Paris 8, Les presses du LEMA.

MATHERON Y. (1993). Les répercussions de changements de programme entre 1964 et

1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès. *Petit x, n° 34*. IREM de Grenoble.

MATHERON Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée quelques exemples*. Thèse, université de Provence.

MERCIER A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse du troisième cycle, Université de Bordeaux I.

MERCIER A. (1995). La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, volume 15 (1)*, p. 97-142.

MERCIER A (1999). *Sur l'espace-temps didactique, Etudes du didactique, en sciences de l'éducation,* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université de Provence.

MERCIER A. (2001). Descartes : le temps de la construction du savoir. *L'Ouvert, n°103*. p.14-24. IREM de Strasbourg.

MERCIER A. (2002). *La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. Note de synthèse*. Revue Française de Pédagogie n°141, p. 135-171.

MERCIER A. (2003). *Evaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques. Conférence au PIREF*. Disponible à l'adresse suivante :
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/Piref_Mercier.pdf

MERCIER A. & BUTY C. (2003). *Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences*. Revue Française de Pédagogie, n°148, p. 47-59.

MICHEL P. (1977). *Condition nécessaire d'optimalité pour un système régi par des équations aux dérivés partielles non linéaires de type parabolique*. Bulletin de la Société Mathématique de France, n°105, p. 65-88.

MINSKY M. (1998). *La société de l'esprit.* Inter Editions, Paris.

MORIN E. (1998). *Compte-rendu des huit journées thématiques du Conseil scientifique* présidé par Edgar Morin, développant le problème de l'enseignement des savoirs dans les lycées. Ministère de l'Education nationale, de la recherche et de la technologie, Paris.

PARZYSZ B. (2003). *Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités.* APMEP n°143, p. 9-34.

PERAIRE. Y. (1992). *Théorie relative des ensembles internes*. Osaka Journal of Mathematics n°29, p. 267-297.

PÉRISSOL P.A. (2005). *Rapport d'information déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école* (Enregistré à la Présidence de l'Assemblée nationale le 13 avril 2005).

PERRENOUD P. (1986). *Vers une lecture sociologique de la transposition didactique* Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation et Service de la recherche sociologique, Genève.

PERRENOUD P. (2001). *Former à l'action, est-ce possible ?* Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation Université de Genève. Disponible à l'adresse suivante :
http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2001/2001_19.html
*(*Consulté le 10 /12/2009).

PERRIN D. (2005, 1). *Mathématiques d'Ecole : nombres, mesures et géométrie,* Cassini.

PERRIN D. (2005, 2). Aires, intégrales et primitives dans les programmes de lycée, intervention du 2 avril 2005 devant la commission Inter-IREM second cycle. Disponible à l'adresse suivante : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle/

Actes de la Commission Inter IREM Second Cycle.htm, nouvelle version : http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Bordeaux06-1.pdf *(*Consulté le 10 /12/2009).

PERRIN D. (2006). Aires et volumes : découpage et recollement.

Conférence du 12mai 2006 pour les IPR, disponible à l'adresse suivante : http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf *(*Consulté le 10 /12/2009).

PIEDNOIR J.L. (2001). *L'orientation scientifique,* disponible à l'adresse suivante : http://www.apmep-aix-mrs.org/bulletin/num10/orientation.htm *(*Consulté le 31/10/06).

PISOT C., ZAMANSKY M. (1972). *Mathématiques générales. Tome 2: nombres réels fonctions de variables réelles*. Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris.

POINCARE H. (1902). *La Science et l'Hypothèse,* (Flammarion réédité en 1968, Paris).

RAJOSON, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II.

RAMIS E., DESCHAMPS C. et ODOUX J. (1991). *Cours de mathématiques spéciales. Tome 3: topologie et éléments d'analyse*. 3è édition, Masson, Paris.

ROGALSKI. M. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie.* Avec la collaboration d'A. ROBERT & N. POUYANNE. Ellipse, Paris.

ROY M.F. & MADAY Y. (2006). *Discours prononcée le 22 août 2006 à l'Ambassade de France à Madrid à l'occasion de la tenue du Congrès International de Mathématiques* ICM-2006.

ROUY E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre institution secondaire et institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées*. Dissertation en vue d'obtenir le grade de Docteur en Sciences. Université de Liège, Académie Universitaire, Wallonie Europe.

RUDIN W. (1998). *Analyse réelle et complexe*. 3e édition, Dunod, Paris.

RUDIN W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. 3e édition, Mc Graw-Hill, New York.

SALIN M.H. (2002). Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, la Pensée Sauvage, Grenoble.

SCHWARTZ L. (1986). Série C1 « mathématiques-physique », *Les lycées demain*, CNDP & Ministère de l'Éducation nationale, le Livre de Poche, p. 121-130, Paris.

SCHNEIDER M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques.* Université de Liège, Liège.

SERIDJI D. & ali. (2008). Joan Santacana i Mestre, Taller de Projectes, universitat de Barcelona, Maria Carme Belarte Franco, *«de la restitution en archéologie »*, Institut Català d'Arqueologia Clàssica, Editions du patrimoine, centre des monuments nationaux. Disponible à l'adresse suivante :
http://editions.monuments-nationaux.fr/fr/le-catalogue/bdd/livre/662

SHULMAN L.S (1986). Traduction SENSEVY G. et AMADE ESCOT (2007). *Those who understand. Knowledge Growth in Teaching.* Education et didactique, vol n°1, université de Rennes 2.

SILVY C. (2006). *Restitution organisée de connaissances*, 14ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, ARDM, Sainte Livarde.

SILVY C. & DELCROIX A. (2009). Site mathématiques d'une ROC, une nouvelle façon d'interroger un exercice. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives,n° 14*, p. 103-122, Strasbourg.

TOCHON F. (1992). *Les cadres conceptuels de la recherche sur la connaissance pratique des enseignants.* Revue Française de Pédagogie, n° 99, p 89-113. Disponible à l'adresse suivante :

http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/INRP_RF099_7.pdf (Consulté le 10 /12/2009).

VERRET M. (1978). *« Le temps des études »*, Thèse, université de Lille III, librairie honoré champion.

VYGOTSKI V. (1934). *Pensée et langage*. Traduction de F Sèves. La dispute, édité en 1997.

WARUFSEL A. et al. (2002). *Mathématiques cours et analyse,* Vuibert, Paris.

ANNEXES

1 Annexe 1 du chapitre deux, exemples de questions de cours des années soixante.

En géométrie

Exercice 1 (Liban – Série mathématiques – 1966)

Enoncer et démontrer les théorèmes de Poncelet relatifs à la parabole.

En arithmétique

Exercice 2 (Liban – Série mathématiques – 1966)

Caractère de divisibilité par 11.

En analyse

Exercice 3 (Liban – Série mathématiques – 1966)

Trouver, à partir de la définition de la dérivée, la dérivée de y = sin x. On suppose connu que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x, exprimé en radians, tend vers 0.

Exercice 4 (Liban – Série mathématiques – 1967)

Trouver, à partir de la définition de la dérivée, la dérivée de la fonction y = cos(ax + b), où x est la variable indépendante et a et b des constantes. On supposera que la limite de $\frac{\sin x}{x}$, lorsque x, exprimée en radians, tend vers 0, est connue.

En trigonométrie

Exercice 5 (Liban – Série mathématiques – 1967)

Etablir les formules qui permettent de transformer en produit la somme de deux sinus et la somme de deux cosinus.

Algèbre et géométrie

Question de cours du baccalauréat (session de février 1960 – sections A', C, M et M')

Exercice 6

Le candidat doit traiter l'une des trois questions suivantes, au choix :

Question 1

Somme et produit des racines d'une équation du second degré. Recherche de deux nombres ayant pour somme et pour produit deux nombres donnés s et p

Question 2

Etudier le signe du trinôme $-5x^2 + 4x + 33$.

Question 3

Géométrie cotée : condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient parallèles.

Géométrie et trigonométrie

Question de cours du baccalauréat (session de février 1960 – section mathématiques)

Exercice 7

Le candidat doit traiter l'une des trois questions suivantes, au choix :

Question 1

Géométrie descriptive : un plan P quelconque est déterminé par une horizontale et une frontale. Un Point (a,a') est situé hors du plan. Déterminer la distance de ce point au plan P.

Question 2

Etablir les formules de transformation en produits de la somme et de la différence de deux sinus et de deux cosinus.

Application : Résoudre l'équation : cos x + cos 3x = sin x + sin 5x.

Placer sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs correspondant aux solutions trouvées.

Question 3

Discuter, selon les valeurs de m, le nombre des racines de l'équation : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = m$.

Déterminer effectivement ces racines pour $m = -\sqrt{2}$, et placer sur le cercle trigonométrique les Extrémités des arcs correspondants.

2 Annexe 2, transcription des enregistrements des entretiens:

2.1 Règles de transcription

[…] signifie inaudible.

[] signifie silence

P. signifie professeur

C. signifie chercheur

2.2 Lycée 1

2.2.1 Professeur 1

1. C. Nous allons essayer d'évoquer si tu le veux, une démonstration que tu as faite dans ta classe. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?
2. P. *Une démonstration que j'ai faite ? Tu parles en terminale ?*
3. C. Dans ta terminale S.
4. P. *Sur chaque chapitre j'en fais au moins une ou deux, c'est un minimum. (1min)*
5. C. Une dont tu te rappelles bien.
6. P. *Disons que … s'il y en a une dont me rappelle bien, c'est forcément une des dernières, mais ce n'est pas forcément celle que je préfère.*
7. C. On peut parler des deux.
8. P. *Disons une qui m'a marqué, c'est celle avec le théorème des gendarmes. Parce qu'on la fait en première et on la fait en terminale. En première on la fait avec les suites et en terminale avec les fonctions. Donc j'aime bien voir s'ils savent faire le lien entre les deux (2 min)*
9. C. As-tu la même classe ?
10. P. *Non. Justement ça permet de voir. Comme on doit la faire en première, ça permet de voir s'ils sont capables de la refaire.*
11. C. Comment as-tu procédé ?
12. P. *Forcément j'ai introduit les notions, j'ai fait des exercices pour qu'ils maîtrisent bien. Qu'ils voient bien qu'on allait utiliser ces définitions. Puis après je leur ai demandé d'appliquer les définitions dans ce contexte et voir s'ils arrivaient bien à faire le lien.*
13. C. Qu'as-tu écrit au tableau ?

14. P. *J'ai écrit au tableau d'abord la définition qui allait nous servir. Non, elle n'était pas au tableau, ils avaient une feuille où elle était dessus.*
15. C. Une feuille ?
16. P. *Les feuilles de cours avec toutes les définitions etc., et donc on fait les démonstrations ensemble, je les fais puis ils dirigent.*
17. C. Les feuilles de cours, Y-a-t-il des blancs ? (2min 30)
18. P. *Non c'est tout fait, c'est toutes les propriétés et les définitions. En fait, tout ce qui nécessite du recopiage. Tout ce qui nécessite de la réflexion cela on le fait ensemble, à côté. Par exemple pour en revenir au théorème des gendarmes, je le cite et je mets « démonstration à faire. On la fait sur la page à côté. Donc on l'a faite d'abord pour la définition on a par exemple appliqué la définition de limite. Et donc on arrive à le faire, le truc classique… Et après je dis « maintenant vous allez faire en sorte que celle-là tende vers l et que celle-là tende vers l, vous allez écrire vous-même ce qu'on peut dire ». Et bon, il y en a qui arrivent à le faire c'est toujours pareil, quand on parle dans la classe, il y a deux ou trois qui répondent. Donc on arrive à le faire. Et après j'ai demandé de choisir etc. Cela s'est fait assez bien au début mais après jusqu'au choix (…) Au bout d'un moment ils acceptent une fois qu'ils ont la réponse sous les yeux, c'est plus pareil. Il y en a toujours un qui va trouver, parce que quand on fait le dessin c'est facile à voir. Une fois qu'on a le dessin il y en a qui vont voir et après cela se passe assez bien. (3min 35) Mais je préférais au niveau de la première, c'est beaucoup plus intéressant. Parce qu'ils ont plus à prendre l'information, vu qu'ils ont déjà plus ou moins vu. Je préférais, tu vois ?*
19. C. Où es-tu ? Au tableau ?
20. P. *Disons, moi je suis au tableau et je leur demande qu'il y en ait un qui me dicte.*
21. C. Et après ?
22. P. *On la fait puis on la structure correctement puis, je la fait recopier.*
23. C. Parts-tu de ce qu'ils te disent ?
24. P. *Je pose des questions. En fait, je décompose, comme ils font dans un devoir. Vous allez donner des définitions pour çà et çà et après on va essayait de déduire à partir de là, comment on pourrait faire.*
25. C. La rédaction ?
26. P. *On la fait ensemble.*
27. C. Est-ce eux qui dictent dans ce cas particulier ?

28. P. *Disons. [] C’est eux qui dictent. Mais après on améliore au fur et à mesure et on valide ensemble. Disons si la phrase ne me plait pas, je les pousse à modifier. Je ne veux pas qu’ils recopient quelque chose qui ne va pas me plaire.*
29. C. Dans cette démonstration as-tu envoyé un élève au tableau ? (5min)
30. P. *Non. Celle là je n’envoie personne au tableau. C’est moi qui vais la faire, c’est dans le prolongement du cours. C’est moi qui rédige. En fait, j’en fais la synthèse.*
31. C. Y-en-a-t-il trois ou quatre qui répondent ?
32. P. *En général c’est çà.*
33. C. Dans ce cas particulier ?
34. P. *Disons, il y en a beaucoup plus qui participent mais c’est quatre élèves qui donnent les bonnes réponses.*
35. C. Comment tries-tu ?
36. P. *Quand je dis les « bonnes réponses », les autres posent des questions sur leur démarche : « est ce que j’ai bien commencé ? » Tandis qu’il y en a quatre vraiment qui en fait, me permettent d’avancer.*
37. C. En fait tu décomposes la démonstration en plusieurs questions ?
38. P. *Voilà, je dis première question « vous allez appliquer la définition à ces deux fonctions ». Puis après «Qu’est qu’on remarque ? Vous allez faire un dessin qui représente cette situation, vous allez dessiner trois fonctions». « Vous êtes d’accord que ça marche ?». Maintenant je fais le dessin et je demande : « Où se situe cette lettre sur la figure ? » Je montre puis ils répondent « non, oui, oui... » Comme ça va vite, ils participent tous.*
39. C. Et après ?
40. P. *On va s’aider du graphique, là ?…là ? Ça participe beaucoup ils sont quasiment tous obligés de participer. Mais après c’est une minorité qui parle mais j’avoue, je ne vais pas demander à tout le monde, il faut que cela avance. Et après il y a la conclusion.*
41. C. Et après, comment fais-tu ?
42. P. *J’ai la feuille de cours. Je la suis. (8min) Dans ce chapitre si je m’en rappelle bien, on fait les comparaisons, je fais une démonstration sur deux. On continue dans les démonstrations de cours. Le but ici n’est plus appliquer les définitions du cours pour faire les démonstrations donc après je ne mets pas forcément dans la minute qui suit le théorème en pratique. C’est plus après dans la phase d’exercices une fois qu’on a fait le bilan de tous le cours.*

43. C. Le bilan de cours, est-ce à la fin ?
44. P. *Il reste une heure et quart. On commence les exercices qu'on corrige la fois d'après. En deux heures en général, ça c'est une séquence, il y a une phase d'activités qui dure un quart d'heure, en général, ça va jamais plus loin parce que je passe après au cours. Souvent ces activités, en général, c'est un truc qu'ils ont eu à faire à la maison. Donc, le cours en lui-même, comme c'est photocopié (les définitions et les propriétés), on ne démontre que les points qui nécessitent une démonstration, que j'ai envie de démontrer.*
45. C. Comment choisis-tu les démonstrations ? (9min)
46. P. *Cela dépend. Par exemple le produit scalaire je démontre absolument tout. Je construis le produit scalaire et je leur montre la construction de a à z c.à.d. toutes les multi-propriétés sont démontrées et dans d'autres que j'estime, bon, un peu trop compliqué, et ça ne m'intéresse pas trop, je vois que ce n'est pas obligatoire, j'admets et je démontre des petites propriétés donc des fois ça peut durer vingt minutes de démonstration, quand les propriétés sont en quatre cinq lignes ça ne dure pas longtemps.*
47. C. Donc à chaque fois tu amènes le cours et ils n'ont rien à recopier ?
48. P. *Disons, à droite ils mettent le cours et à gauche ils mettent les démonstrations.*
49. C. Ont-ils un classeur ?
50. P. *Non, en fait ils collent une partie dans le cahier, la page d'à côté ils font la démonstration. Des fois quand je ne fais pas de démonstration ça peut-être un exercice d'application qu'ils font à côté, (10 min 30) ou un mini problème que je peux insérer… voilà.*
51. C. Et donc ?
52. P. *Le cours ne se limite pas à deux feuilles qu'ils reçoivent et après ils ne font rien. Ils ont toujours quelque chose à faire. Par exemple le dernier cours, c'était la semaine dernière, c'était les statistiques. Le cours, il n'y a quasiment rien à faire, c'est des applications directes. Donc là, comme applications ils ont eu les deux, trois des derniers sujets du bac.*
53. C. Prenons une autre démonstration, pour éclairer différemment. Une des dernières. (11min)
54. P. *Une des dernières…*
55. C. Que tu te rappelles bien. Une des dernières.
56. C. *Une des dernières que j'ai faîte, j'ai fait la distance d'un point à un plan, je l'ai faite avec le produit scalaire dans le cours et on leur a donné en devoir.*

57. C. A la maison ?
58. P. *Non, en classe. Le devoir type bac qui est tombé l'année dernière avec la droite. Etant donné qu'on avait fait tout le chapitre où on avait démontré l'intersection d'un plan et une droite. On avait fait cela de manière approfondie. (11min 30)*
59. C. Dans le cours ?
60. P. *Je l'ai faite avec le produit scalaire. Je la crée : « vous calculez ce produit scalaire », puis « vous le calculez d'une autre façon »*
61. C. Envoies-tu quelqu'un au tableau ?
62. P. *Comme c'est du cours, j'écris toujours. Cela va deux fois plus vite. Je n'aime pas quand ils écrivent. Par contre quand ils ont des exercices ça ne me dérange pas, par contre le cours je dirige. Puis après on a fait les intersections entre plan(s) -droite(s). On a démontré toutes les intersections. Et cela va relativement vite. On l'a fait sur des exemples. Je me suis dit que l'avantage c'est faire le mixe des deux. Voir s'ils arrivent (12min 30) en faisant la démonstration qui est proposée dans cet exercice. Pour revenir à ces démonstrations, j'aime bien que ce soit eux qui trouvent les démonstrations. Pour ça c'était bien de ne pas forcément donner la même. Par exemple quand il y en a des différentes, ce n'est pas parce que je trouve une différente dans les annales que je vais donner celle là dans mon cours (13 min). Je leur ai fait comprendre que la restitution de cours, de connaissances ce n'est pas réciter ce qu'ils ont fait dans le cours. C'est être capable de se poser un problème et de l'adapter dans la situation, donc c'est ma vision des choses. Nous, on montre différents types de démonstrations et c'est à eux justement en fonction des questions de voir laquelle il faut utiliser.*
63. C. Comment favorises-tu la mémorisation dans la démonstration ?
64. P. *Ha non, disons que ces démonstrations qu'on fait tout au début d'année, sur la technique avec la fonction exponentielle en dérivant etc. voilà l'idée : c'est de trouver une fonction constante donc sa dérivée vaut zéro, ça c'est l'idée principale, on va revenir plus tard et il faut qu'ils se rappellent de cette idée (13 min 36)*
65. C. A chaque fois fais-tu ça ?
66. P. *C'est être capable de se poser un problème et de l'adapter dans la situation. Ça c'est ma vision des choses. Nous, on leur montre différents types de démonstrations, et c'est à eux, en fonction des questions, de voir laquelle il faut utiliser (13min 40). Disons après, à la synthèse de chaque démonstration souvent je dis : « quand même vous avez vu l'idée principale qui est là-dedans ? » Donc ici, c'est appliquer le produit scalaire*

comme j'ai fait d'un point à un truc. Quand j'ai fait [] voilà l'idée, c'est pour démontrer une inégalité comme on a deux « trucs » on introduit une fonction et on cherche une propriété. […]

67. P. (20min) *Les maths c'est comme un jeu on a des règles on doit les appliquer. […]*
68. P. *(30 min) Maintenant quand j'ai le choix entre en faire une et ne pas en faire une, je la fait. Avant je ne le faisais pas j'estimais qu'il fallait mieux faire des exercices etc. ici avec cette pratique je me dis bon.*
69. P. (31min 30) *La restitution organisée de cours est une vision tout à fait différente d'un exercice classique. Dans un exercice classique on a le droit de tout utiliser pour arriver à bout, de tout ce que l'on a appris. Tandis qu'un ROC on a justement des contraintes. Pour moi c'est la grande différence.*
70. (37 min) P. *Moi je suis favorable à ce qu'ils apprennent par cœur : le cours ce que je mets sur les feuilles les propriétés ensuite un exercice ou une démarche. A la limite qu'ils me disent la définition de quelque chose c'est… ?. Ça éventuellement, ensuite, le cadre, les grandes lignes et qu'ils soient capables de l'appliquer.*
71. (39 min) *Disons que, quand il l'a restitué plus tard il lui reste sûrement des traces de quelques choses. Mais c'est pareil moi j'estime, je préfère lorsqu'ils font un devoir à la maison, je préfère qu'ils en fassent un qu'ils ont recopié sur quelqu'un plutôt qu'ils ne me rendent rien. Le simple fait de passer par le cerveau il y a une trace qui reste. Donc c'est pareil d'ailleurs je leur ai dit : hors de question de rendre une copie blanche. A la limite il faut mieux mettre quelque chose cela fera une trace et nous on peut évaluer la trace si c'est une mauvaise piste ou une bonne piste etc. donc c'est à eux, il ne faut pas qu'ils restent devant quelque chose en disant ça ne m'évoque rien. C'est quelque chose que j'essaye de proscrire. A la limite je préfère une bêtise à rien. Même si après on leur dit : « quand c'est faux, ne le fais pas ». Mais là ils sont encore en train de se construire. Ils ne sont pas encore assez forts pour justement se dire etc. et après… ils ne font plus et nous au moins on peut voir ce qu'il se passe dans leur tête.*

2.2.2 Professeur 2

1. C. Je te rappelle que cet entretien peut rester privé. Nous allons essayer d'évoquer, si tu le veux une démonstration que tu as faite dans ta classe. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?

2. P. *D'accord. Je vais écrire au tableau*
3. C. Non.
4. P. *D'accord. Une démonstration : démontrer l'unicité de la solution de l'équation différentielle f'=f et f(0)=0. Dans le programme, il nous est dit : « Pour la fonction exponentielle on admet l'existence et on démontre l'unicité ».*
5. C. Oui.
6. P. *On vérifie qu'il existe une fonction f qui vérifie ça et on considère une fonction g qui est égale à f multipliée par une autre et on démontre que la dérivée est nulle par conséquent. Je crois que c'est ça, si je me rappelle bien, on montre alors que g est forcément égale à exponentielle.*
7. C. Comment as-tu fait dans ta classe ?
8. P. *Dans le programme, en terminale, pour introduire cette fonction là, je me suis basé un petit peu sur les physiciens. Parce que l'équation différentielle y'=ay est vue très tôt parce qu'en physique ils en ont besoin. Mes points de départ ont été cette vision interdisciplinaire, physiques et aussi la méthode d'Euler. (5min) La méthode d'Euler, ils voient ça en première S. Avec la méthode d'Euler ils arrivent à approcher la fonction. C'est la méthode discrète avec le tableur Excel par exemple on arrive à avoir des points.*
9. C. Comment as-tu fait cette année dans ta classe ?
10. P. *Cette année, j'ai eu des difficultés car on n'avait pas de matériel. D'habitude, on fait cela avec le tableur Excel.*
11. C. Mais cette année ?
12. P. *Comme j'avais des documents que j'avais faits avec mes anciens élèves, on avait fait pour cela pour n=10, n=20, n=30. J'ai ramené cette feuille là. Mais auparavant on avait déjà travaillé avec la méthode d'Euler sur d'autres fonctions.*
13. C. As-tu montré les documents ?
14. P. *Avec les documents je leur ai montré en augmentant le nombre de points, que l'ensemble de cette suite de points discrète finalement devient continue, la courbe la fonction exponentielle apparaît, c'est un peu visuel.*
15. C. Après ?
16. P. *Comme le dit le programme, on admet l'existence et on démontre l'unicité. Pour l'existence ?*
17. C. Non pour l'unicité. Comment as-tu fait ?
18. P. *Il va falloir que je puisse te marquer ça.*

19. C. Non. Est-ce que c'est toi qui l'as fait au tableau ?
20. P. *Ha ! Au départ il a fallu quand même que je puisse leur proposer un artifice. On va considérer cette fonction g(x)=exponentielle… Et après avec eux il a fallu qu'on puisse voir qu'elles sont les étapes successives. Il y a eu échange.*
21. C. As-tu écris au tableau ?
22. P. *La fonction et après avec eux, il a fallu que j'aborde la démonstration. Cela étant c'est quelque chose d'assez difficile. Car j'ai une classe de terminale S où les élèves, si tu veux, ils ont reçu jusqu'à présent un enseignement béhavioriste. Ils sont encore scolaires et c'est ça qu'il faut casser justement. On veut qu'ils arrivent à construire, à être autonomes, à prendre du recul. Or, je n'ai pas eu cette classe en première S. J'ai fait cela très tôt en septembre octobre. Moi je veux en mathématiques qu'ils arrivent à construire leur savoir par eux-mêmes. Ils étaient un peu attentistes, comme on dit. C'est vrai que c'est gênant pour le professeur, c'est gênant aussi pour eux. Je veux qu'ils changent leur état d'esprit, qu'ils prennent des initiatives, échanger entre eux… Tu vois cela a été un peu difficile.*
23. C. Dans cette démonstration comment cela s'est passé ?
24. P. *J'étais au tableau, je marquais les idées, les pas de démonstrations, j'essayais de dialoguer avec eux, qu'ils échangent entre eux et puis finalement j'écrivais. La structure de la démonstration apparaissait, on mettait des liaisons. Puis finalement à la fin on prenait pas à pas les étapes de la démonstration.*
25. C. Ecrivais-tu sous la dictée des élèves ?
26. P. *Un tel pensait quelque chose, je peux marquer ça dans un petit coin. Je leur dis de ne pas noter ça. Et leur demande : « Qu'est ce que vous en pensez ? Je veux favoriser l'échange. Ils essayent d'interroger l'institution « Monsieur » et moi je ne réponds pas. (10 min). Lorsque tout le monde est d'accord pour la démonstration avec des outils, des objets mathématiques bien précis et moi en tant que garant de l'institution j'écris, je n'ai même pas à parler. J'écris la partie à droite j'écris les idées qu'ils proposent et à gauche le produit fini qu'ils notent.*
27. C. La partie rédaction, est-ce toi qui la fais ?
28. P. *Avec la classe que j'ai là, cette démonstration est un peu vicieuse. J'ai fait appel à un artifice [...]. Mais après toutes ces phases, les questions sont venues : « pourquoi cette fonction là ? ». Et c'est là que notre formation apparaît sur « est-que cette fonction ap-*

paraît naturellement chez les enfants ? ». J'ai proposé un matériel à leur disposition et ce matériel là finalement a permis de démontrer l'unicité.

29. C. Comment as-tu répondu ?
30. P. *Voilà, c'était ça. Tu as deux fonctions qui ont même dérivée sur un intervalle ouvert et qui ont même valeur en un point donné et elles sont donc identiques. Ceci avait été déjà travaillé avant. C'était cela le socle. Mais la fonction que je leur ai proposée au départ, un artifice. C'était une construction. J'ai posé un objet qui permet de résoudre le problème.*
31. C. Comment as-tu répondu à « est ce que c'est naturel »?
32. P. *J'ai fait un peu appel à l'histoire des mathématiques. J'ai dit : « Ne vous imaginez pas : il y a des idées de génie, du genre Einstein. Ils sont amenés à construire leur savoir mais il faut leur donner le matériau. Si tu as une classe brillante.*
33. C. Dans cette classe y a-t-il beaucoup d'échanges ?
34. P. *Alors je t'explique. Au départ les enfants… (15 min) et nous enseignants, nous devons évoluer dans nos pratiques d'apprentissage. Moi j'essaie de développer c'est l'approche socioconstructiviste avec Brousseau, Chevallard, etc. On travaille la dessus avec le comité. On veut que les élèves construisent leur savoir. On fait des analyses d'études d'erreur. Mais ces enfants là ils ont hérité y compris la première S de « le prof écrit, vous écrivez », ils ne savent pas ce que veut dire échanger.*
35. C. Dans cette démonstration là, y-a-t-il eu des échanges ?
36. P. *Oui il y a eu quelques échanges fructueux ça j'ai vu.*
37. C. Ils sont partis sur quoi ?
38. P. *Ils ont pris la dérivée, ils se sont ramenés à une étude de fonctions. Ils ont vu que la dérivée vaut zéro, tiens ? Et ensuite que l'image de telle valeur est telle valeur, tiens ? Ils ont essayé de se raccrocher à ce que l'on avait vu auparavant. Mais c'est sûr, sur une classe de trente trois élèves il y a un tel qui dit quelque chose un autre : « ce n'est pas ça », ils réalisent leur erreur.*
39. C. Te souviens-tu de quel élève a parlé ?
40. P. *Je ne me souviens pas, c'était en septembre octobre, mais c'est vrai il y avait déjà une élève qui déjà se faisait remarquer, une élève qui est très bonne élève. Mais elle est mal vue par les autres.*
41. C. A cette époque là ?

42. P. *Non j'ai vu ça plus tard. Mais là, ils ont voulu faire quelque chose. Combien se sont exprimés ? Une dizaine. Ils ont encore ce passé d'être là, de subir*
43. C. Peut-on évoquer une autre démonstration plus récente ?
44. P. *La distance d'un point à un plan.*
45. C. Comment as-tu fait ?
46. P. *On a déjà établi, depuis septembre octobre dans un devoir maison la distance d'un point à une droite. Ils se sont demandés : « Monsieur, est-ce qu'il n'y a pas un plus court chemin ?».*
47. C. Comment as-tu procédé?
48. P. *Le point de départ c'est le devoir. On a pris le devoir, avant on a fait auparavant un peu de révision sur le produit scalaire. (20 min). Je leur ai proposé deux objets* $\overrightarrow{AA'}$ *et le vecteur normal* $\vec{n}$*, calculons le produit scalaire, là ils ont su faire. « Peut-on calculer d'une autre façon» et lorsqu'on a voulu passer à la valeur absolue, un coup de pouce, on va prendre la valeur absolue et là il a fallu jongler. Les propriétés liées à la valeur absolue, ça ne se voit pas. J'ai dû un peu intervenir à ce moment là. Ils ont pu finir.*
49. C. Pour la distance d'un point par rapport à un plan
50. P. *Par rapport à une droite pour un plan, ils ont vu, ils ont adapt…*
51. C. As-tu écrit au tableau ?
52. P. *Deux parties dans le tableau : une partie où je note les idées, une partie où j'écris.*
53. *Pourquoi j'écris ? Je n'envoie jamais d'élève au tableau car l'inspecteur nous avait dit de ne jamais envoyer d'élève au tableau. A la rigueur, en atelier ou en groupe, on partage en deux parties et on note les idées pour favoriser les échanges sur une des parties du tableau. Les enfants, ils cherchent, je leur propose quelque chose.*
54. *C.* Les enfants échangeaient ?
55. P. *Là c'était mieux, mais ils ont toujours la tendance de se tourner vers le prof. C'était mieux.*
56. *C.* Comment est organisée la disposition de ta salle ?
57. P. *En terminale S, il n'y a pas d'atelier. Les élèves sont là et le professeur est là au tableau. Parfois je me mets au fond. Un tel propose quelque chose, il se tourne vers les autres, il ne se met pas debout. Moi je relance les dialogues.*
58. C. Et dans cette démonstration ?
59. P. *Pour la démonstration dans l'espace ils m'ont dit : « C'est comme dans le plan ». J'ai dit : « banco, on y va tout de suite, j'écris pour vous, qu'est ce qu'on fait en premier ? ».*

Ils ont pris leur cahier de cours. Le cahier de cours est structuré, facile à lire. Finalement, c'est passé comme une lettre à la poste.

60. C. Un élève parlait ? (25min)
61. P. *Toute la classe. […] Un proposait telle chose, l'autre autre chose. Ils adaptaient et tout, tout…*
62. C. Comment choisis-tu les démonstrations à faire à tes élèves ?
63. P. *Il fut un temps où on nous avait donné une liste de démonstrations exigibles. Nous on s'était limité à cette liste là. L'année suivante on nous a dit : « Non il n'y a plus de liste ».*
64. C. Comment choisis-tu ?
65. P. *Maintenant on va démontrer, tout démontrer. Le programme de TS est tellement long ! On a tendance à démontrer ce qui est difficile mais quand c'est quelque chose de vraiment évident je dis d'aller dans le livre. Mais je n'ai pas complètement tort car quand on regarde ce que demandent les universitaires aux élèves : c'est d'être autonome. Pour les rendre autonomes, on peut leur dire d'aller dans le livre telle page, lisez. On essaie de diversifier.*
66. C. Comment favorises-tu la mémoration dans cette démonstration ?
67. P. *En amont ils avaient un devoir maison. Mais je vais te dire quelque chose : « Le programme de première S est très long, très exigeant ». Généralement si on mène une enquête on verra soit […]. Il est faisable dans les délais, mais ça dépend de ce que l'on propose, comment on dirige. […]. (30 min). Justement on passe au contrat. Lorsqu'on a fait la démonstration, on fait la métacognition. On analyse un peu les pas qu'est ce qui a fait que cela ait marché, quelles sont les étapes ? On mémorise les étapes pour pouvoir la refaire.*
68. C. Fais-tu une évaluation ?
69. P. *Oui en ROC, sur le sujet équation différentielle, oui. J'aurais pu faire une interro de 10 minutes. Mais cette année je n'ai pas eu le temps de la faire.*
70. C. Dans un devoir maison ?
71. P. *Dans un devoir maison et en devoir en classe commun pour f'=f. Car le programme est tellement long, quand on voit une démonstration en ROC, comme il y en a plusieurs, on est obligé de cibler. […]*
72. P. *Les pas pour pourvoir le présenter. Les pas de la démonstration sont à savoir et une fois qu'on connaît, on peut apprendre par cœur. Les maths, c'est quand même la mé-*

moire. Le « par cœur » peut rendre service dans un concours par exemple mais après avoir compris les pas de la démonstration. (35 min)

73. C. Comment la ROC a modifié tes pratiques ?
74. P. *Je l'ai insérée dans mes pratiques. Parce que dans la pratique socioconstructiviste l'élève doit apprendre à relier ses connaissances, à structurer ses connaissances. C'est les fiches méthodes en particulier où il doit faire l'inventaire. Par exemple comment montrer que deux droites sont alignées ?*

2.2.3 Professeur 3

1 minute

1. C. Nous allons essayer d'évoquer une démonstration que tu as faite dans ta classe. Comment as-tu procédé pour faire une démonstration ? C'est toi qui choisis la démonstration. Est-ce que tu te souviens d'une démonstration que tu as faite en terminale ?
2. P. *Une démonstration que j'ai faite pour démontrer la relation qu'il y a entre les arguments et les angles.*
3. C. Comment as-tu fait pour commencer ?
4. P. *Je suis parti de la définition de l'argument : l'angle* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. *La relation de Chasles,* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. *Je connais la définition de l'angle* $(\vec{U},\vec{W})$, $\vec{U}$ *étant un vecteur unitaire.*
5. C. $\vec{U}$ vecteur unitaire. Avec les élèves comment fais-tu ?
6. P. *Je procède de façon à ce que les élèves participent à la démonstration, qu'ils soient actifs, qu'ils se justifient sous forme de question. Ils sont constamment sollicités.*
7. C. Comment as-tu fait dans ce cas ?
8. *Je peux rédiger un petit texte. En étant au tableau et en posant des questions à chaque étape clef pour leur permettre d'être acteur. Je pense qu'ils comprennent la démonstration sous forme de petit texte, un petit exercice : la distance d'un point à un plan. L'année dernière un sujet du bac proposait cette démonstration sous forme d'exercice. Cette démonstration est considérée comme ROC dans les programmes. Une partie ROC et une partie démonstration.*
9. C. Pour cette démonstration as-tu rédigé un texte ?
10. P. *Pour cette démonstration là je n'ai pas rédigé de texte, j'ai pu donc proposer cette démonstration aux élèves… donc en étant au tableau,[] si tu veux, en posant des ques-*

tions à chaque étape clef justement pour leur permettre (4min 38) d'être un petit peu acteur de cette démonstration. Moi je crois que […] (5min)

11. C. Comment procèdes-tu?
12. P. *Ça peut être sur la forme d'un petit texte que je vais rédiger, qui va ressembler à un petit exercice. En disant ça, je pense beaucoup à l'exercice par exemple où il s'agit de démontrer la distance d'un point à un plan.*
13. C. Comment as-tu fait ?
14. P. *Cette démonstration là. C'est très simple, il y a deux ans ou l'année dernière, il y a un sujet du bac qui proposait cette démonstration sous forme d'exercice. Moi j'ai repris carrément ce texte et je l'ai proposé aux élèves en exercice. (6 min)*
15. C. Cet exercice de l'année dernière ?
16. P. *Ce ROC était tombé en Inde l'année dernière.*
17. C. Tu as repris la ROC et tu l'as écrite au tableau ?
18. P. *Pour cette démonstration je l'ai faite polycopier et je l'ai donnée à préparer aux élèves à la maison. Je suis revenu deux jours après et donc on a fait la correction. En fait c'était tellement guidé que c'était pratiquement un exercice, ils n'avaient pas vraiment besoin de l'aide du professeur pour construire la démonstration. J'ai trouvé que c'était bien et d'ailleurs à chaque fois que je peux faire comme ça, je fais comme ça. Cela fait déjà un certain nombre d'années que les ROC sont présentes dans les sujets de bac et donc je commence à constituer une banque de sujets qui proposent des ROC. Ceux qui sont vraiment accessibles aux élèves, pour qu'ils puissent le faire de façon autonome. Souvent dans ma progression, au moment où je vais avoir besoin de cette démonstration je leur propose en exercice. Et après on corrige.*
19. C. Est-ce toi qui corrige au tableau ?
20. P. *Non. Quand c'est un exercice qu'ils ont eu à préparer, c'est un élève qui ne corrige pas forcément au tableau. Des fois je fais passer un élève au tableau ou des fois je leur demande de faire des propositions de leur place…*
21. C. Comment cela s'est passé pour cet exercice là *?*
22. P. *Pour cette démonstration là, pour cet exercice là, on a corrigé, heu, avec leur proposition, de leur place. Et sur certaines questions, un élève passait au tableau.*
23. C. C'est toi qui écrivais ?
24. P. *J'écrivais. j'écrivais.*
25. *C.* Combien d'élèves avaient trouvé ?

26. P. *C'est difficile à évaluer dans la mesure où je n'ai pas contrôlé tous les cahiers. (9min 30) Mais en fait comme j'ai interrogé pas mal d'élèves, j'ai fait tourner la parole et j'ai eu l'impression que c'est une démonstration qui ne leur avait pas posé trop de problème, sauf pour une question : « exprimer k en fonction d'autres paramètres » où il a fallu un petit peu les aider.*
27. C. Comment favorises-tu la mémorisation ? (10 minutes)… Tu reviens ?
28. P. *Non. Je ne reviens pas sur la démonstration, une fois que la démonstration est faite, elle est considérée comme acquise. En fait après, ça consiste beaucoup plus à les utiliser comme outil. Ils savent que de toute façon ce sont des démonstrations qui sont exigibles. D'ailleurs sur ce problème là, moi j'ai un peu évolué. Les premières années je les sensibilisais de façon forte sur la liste, la fameuse liste (11 min), la première liste qu'on nous a proposée pour les ROC. Quand on regarde les sujets, on se rend compte qu'en fait, certains sujets débordent un petit peu de cette liste et moi je ne suis plus aussi fermé sur la liste.*
29. C. D'accord.
30. P. *Moi, je leur dis que toutes les démonstrations, en principe, ils devraient pouvoir les restituer. Parce que quand on consulte les annales, on a vu des sujets qui portaient sur des démonstrations qui n'étaient pas dans la liste officielle entre guillemet. Je ne sais même plus si cette liste existe toujours. On en a beaucoup parlé au début et aujourd'hui moins. Moi, disons, j'accorde à peu prés presque la même importance à toutes les démonstrations. Ce qui pose un problème, le problème que ça pose : ça prend énormément de temps. Avant si elle n'était pas sur la liste si on n'a pas le temps ou ?*
31. C. Comment les choisis- tu ?
32. P *Je les fais toutes et ça prend énormément de temps. C'est pourquoi je pratique beaucoup sous la forme d'exercices. Par exemple là aujourd'hui, j'avais déjà fait* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ *etc et je généralise aux fonctions puissances. Je leur ai donné un petit texte sous forme d'exercice à faire à la maison. Evidemment le petit texte, ils sont un peu guidés sur la démonstration, et donc ça me permet de gagner du temps. Et là je vais arriver, je vais faire la correction. Sachant qu'ils auront peut être eu certaines difficultés mais au moins ayant déjà travaillé dessus, je pense pouvoir gagner du temps comme ça. C'est ça le problème, on a un gros problème de la gestion du temps. En fait j'essaye que cela ne se fasse pas au détriment de la pratique des exercices. C'est vrai qu'il y a cet aspect des*

choses qui a pris une certaine importance mais il ne faut pas non plus négliger la pratique d'exercices.

33. C. Avant comment faisais-tu ?
34. P. *Avant j'accordais beaucoup moins de temps aux démonstrations. Je choisissais les démonstrations par rapport à l'intérêt, par rapport au niveau de la classe, par rapport à l'intérêt que les élèves vont y porter. Mais maintenant je m'attelle à faire pratiquement toutes les démonstrations. (14min 30). Je m'efforce que cela ne se fasse pas au détriment de l'autre aspect de la formation des élèves aussi c'est qu'ils pratiquent des exercices, les outils il faut les faire fonctionner. Donc tout ça demande de l'entraînement. Donc c'est un équilibre qui est difficile à trouver.*
35. C. Est-ce que le par cœur te semble nécessaire ?
36. P. *Dans une certaine mesure… Le par cœur ? Le par cœur, pas mot à mot, le par cœur oui dans la mesure où il faut qu'ils retiennent le schéma de la démonstration.*
37. C. Ce schéma là, est ce que tu leur donnes ?
38. P. *Non mais après la démonstration on essaie de revoir les points clef, les passages clef, on revoit le cheminement.*
39. C. Est ce que tu écris au tableau ?
40. P. *Non c'est oral. Ils prennent des notes. Là c'est un passage clé, on revoit tout le cheminement. Je sais que pour eux c'est difficile de retenir toute ces démonstrations. C'est pourquoi je pense qu'il faut, à l'examen, lorsque l'on propose une ROC, il faut que ça ressemble à un exercice. Il faut qu'ils soient guidés. Il faut qu'ils soient capables de retranscrire la démonstration avec un fil conducteur à travers un certains nombre de questions. D'ailleurs le sujet de l'Inde dont je te parle je le trouve bien dans ce sens là, car il fait refaire la démonstration comme on le voit sur la plupart des livres, il y en a une que l'on retrouve, plus souvent. Pour un élève de terminale, surtout avec le public qu'on a maintenant, c'est difficile de demander, à froid comme ça, de faire une démonstration, de redémontrer un théorème sans donner une petite aide.*
41. C. Poses-tu souvent des démonstrations dans des évaluations ?
42. P. *Oui, pas dans des devoirs maisons mais en classe.*
43. C. Est ce que ça se passe bien ?
44. P. *Les devoirs d'évaluation en classe, c'est difficile, le pourcentage des élèves qui réussissent n'est pas très élevé. Avec le public qu'on a maintenant je vois plus les ROC sous la forme d'exercices où ils sont un peu pris par la main. Evidement on ne va pas faire*

l'exercice à leur place mais leur donner le fil conducteur, un peu : question par question, étape par étape. Par exemple si on leur demande brutalement de faire la démonstration du théorème de Gauss, un jour d'examen, s'ils ne l'ont pas mémorisée, il est difficile de recracher la démonstration. Si on ne part de rien, l'élève qui l'aura mémorisé d'accord, l'autre il ne sera pas capable de démarrer là dessus. Donc effectivement il y une part de par cœur à mon avis qui doit être pratiqué par les élèves.

45. C Comment la restitution a modifié ta pratique ? (20 min)
46. P. *Surtout dans la nécessité que je ressens de faire des démonstrations.*
47. C. C'est surtout ça ?
48. P. *C'est surtout ça. Malheureusement je trouve que l'équilibre est difficile à trouver. Quelquefois je n'ai pas fait d'exercices d'entraînement. Avec le public qu'on a, après avoir mis les outils en place, il faut les faire fonctionner il y a un certains nombre d'exercices simples à faire, des applications directes avec des questions enchaînées qui ne demandent pas des démarches trop complexes. Après il y a le travail d'approfondissement sous forme d'exercices plus difficiles qui leur demandent plus autonomie, plus de prise d'initiative, plus de réflexion dans leur démarche. Quand on pratique les ROC et les démonstrations de façon pratiquement exhaustive, on n'a pas toujours le temps pour développer toute cette partie là. Quand on analyse les derniers sujets du baccalauréat on constate qu'en fait, les sujets sont beaucoup plus variés maintenant. Les situations qu'on propose sont plus simples que celles qu'on avait avant. Mais ce que l'on demande de faire dessus est beaucoup plus varié. Avant il y avait les sujets types, les études de fonctions, les suites, les intégrales. Maintenant cela peut être n'importe quoi. Donc pour bien préparer les élèves, aujourd'hui il faut pendant l'année, diversifier un maximum les exercices et cela prend du temps. (22 min 48)*
49. C. Qu'évoque pour toi les mots restitution organisée de connaissances?
50. P. *Restitution ? Restituer une démonstration qu'ils ont vu au moins une fois, Organisée : justement d'après ce que j'avais compris au début comme il y avait une première liste pour éviter le bachotage, pour éviter qu'ils apprennent par cœur les dix ou douze démonstrations. J'avais compris, que le terme "organisé" cela voulait dire que l'on ne demande pas la démonstration dans le cas général, dans un cas particulier. On va jouer sur un paramètre qui fait qu'ils ne pourront pas utiliser la démonstration. Mais quand on regarde les sujets je ne retrouve pas l'aspect "organisée". Qu'est ce que tu en penses ?*

51. C. Je pense comme toi.
52. P. *Je trouve, quand je regarde les sujets, souvent, que ce sont des démonstrations générales. Sauf un sujet il y a deux ans : la primitive de la fonction f qui s'annule en a avec la fonction ln, c'était un peu organisé mais ça c'est rare.* (25min)
53. C. Et pour toi dans ta scolarité ça évoque autre chose ?
54. P. *Ma scolarité, ça ne ressemble pas du tout à ce qu'on a vécu.*
55. C. L'algèbre est elle pour toi un cadre où tu fais des démonstrations ? Comment ?
56. P. *Oui sur les complexes, il y a des démonstrations et même sur le calcul algébrique.*
57. C. Sur le calcul algébrique ? En fais-tu en terminale ?
58. P. *Sur les exercices on peut rencontrer des situations dans des exercices qui appellent à faire des démonstrations. Par exemple : "démontrer que le nombre de parties d'un ensemble de n élément est* 2^n*". C'est une démonstration dans le cadre un peu algébrique qui fait intervenir le binôme de Newton.*
59. C. Comment fais-tu cette démonstration ?
60. P. *Tu appliques le binôme de Newton avec 1+1 puissance n. Cela te donne les parties à zéro élément, les parties à 1 élément, les parties à deux éléments avec les cn. Cela te donne la somme de toutes les parties avec des cn des cn : le nombre de toutes les parties. Il faut faire sentir aux élèves qu'en algèbre, on fait des démonstrations. L'algèbre n'est pas que du calcul il faut qu'ils soient conscients de ça. (28 min)*
61. P. *(33 min 22) Les ROC, moi je pense qu'il faudrait revoir les ROC. A mon avis ça pose problème. Quand je discute chaque année avec les collègues, ils ont les mêmes soucis que moi, surtout que maintenant il n'y a pas vraiment de liste. C'est difficile, les démonstrations il faut les faire. Il y a des élèves qui ne sont pas suffisamment armés pour recevoir certaines démonstrations car il y a des démonstrations délicates. C'est pour ça quand je le peux, je les donne sous forme d'exercice. Le fait qu'ils aient fait eux-mêmes avec une aide, parce que sous forme d'exercices ils sont un peu guidés, mais cela ne suffit pas pour qu'ils puissent la restituer le jour de l'examen.*

2.3 Lycée 2

2.3.1 Professeure 4

1. C. Je vais te demander d'évoquer une démonstration que tu as faite dans ta classe. Une démonstration,… de me montrer ce que tu as fait. Comment as-tu procédé pour faire une démonstration ? C'est toi qui choisis la démonstration. Est-ce que tu te souviens d'une démonstration que tu as faite en terminale ?
2. P. *Oui, j'en ai fait beaucoup.*
3. C. Voilà tu en choisis une et on parle de cette démonstration en particulier.
4. P. *Je n'ai pas ça en tête.*
5. C. Tu n'as pas ?… La dernière que tu as faite, ça doit revenir !
6. P. *J'ai fait la distance du point au plan dans l'espace. Les démonstrations, je les fais sous la forme d'exercice avec un prérequis. Et comment dirais-je, j'amène l'utilisation des outils, pour arriver au résultat, au théorème qu'on énonce. En général j'ai fait comme ça, dans tous les ROC mis en place.*
7. C. Et dans cette démonstration, as-tu mis les questions au tableau ? Comment procèdes-tu ? Mets-tu une question ? Toutes les questions ?
8. P. *Je peux poser. Ça dépend des cas.*
9. C. Dans celui là.
10. P. *Dans celui là, qu'est ce que j'ai fait ? (1 min 47) J'ai… Comment j'ai fait ça ? J'ai parlé du projeté orthogonal, voilà, de la définition de la distance.*
11. C. Oui
12. P. *Voilà. Et puis j'ai donné la définition avec le produit scalaire et le vecteur normal. C'est ça. J'ai demandé de me trouver l'expression avec le prérequis, la définition de la distance.*
13. C. Donc tu mets au tableau ? Tu écris ? Tu dictes ? Comment tu fais ?
14. P. *Je l'écris au tableau. Car probablement, l'écriture est encore ancrée en moi. Et je reste persuadée qu'ils en ont besoin. Comme l'écoute n'est pas générale ni chronologique, comment on appelle ça ?.... Simultanée, chez tout le monde. Donc je préfère porter la note écrite au tableau pour qu'ils puissent savoir sur quoi on travaille.*
15. C. Et après ils travaillent seuls ?
16. P. *En principe, ils devraient travailler seul. J'attends des idées, voilà, comment dirais-je, parce que l'expression orale n'est pas structurée, donc il faut déjà décoder un peu ce*

qu'ils veulent dire, trouver les bonnes choses (3min27) pour pouvoir leur parfaire la solution.

17. C. En fait c'est toi qui écris au tableau ?
18. P. *Oui*
19. C. Les élèves vont au tableau dans ce cas particulier ?
20. P. *Dans ce cas particulier, non… Les élèves ne vont pas au tableau.*
21. C. Donc en fait tu as posé une question, après il y a une recherche ensuite un débat, et après ?
22. P. *La mise en forme, c'est moi.*
23. C. La mise en forme c'est toi. La démonstration c'est par parties ?
24. P. *C'est par parties, par enchaînement d'idée. Quand une idée se donne, il faut pouvoir les guider quand ils n'arrivent pas à aller jusqu'au bout.*
25. C. Dés qu'ils commencent à avoir une idée, tu notes, tu ne vas pas jusqu'au bout.
26. P. *Non je ne dis pas ça. Quand une idée se donne, je dis « qu'est que ça peut évoquer ? » etc.*
27. []
28. C. Ecris-tu au tableau ou est-ce oralement?
29. P. *Oralement. Et c'est quand il y a une nécessité de fixer par exemple il faut faire un petit graphique pour qu'ils puissent voir, (5 min) comment dis-je ? Pour qu'ils puissent voir comment se projette, comment on a l'équation du plan. Quel est le rôle si on passe par un autre point. Qu'est ce que l'on peut dire ? La colinéarité entre le vecteur projeté et le vecteur normal ? est-il nécessaire d'utiliser le coefficient de colinéarité ou d'utiliser uniquement le produit scalaire ?*
30. C. Comment choisis-tu le moment de rédiger la solution ?
31. P. *C'est-à-dire c'est à ce moment là qu'on décortique un peu les étapes, on fait une synthèse de la notion. A ce moment là il y a un organigramme qui se met en place et ce qui permet à l'élève de retenir le principe de cette démonstration.*
32. C. A la fin de l'organigramme tu donnes directement la rédaction, ou…?
33. P. *Dans ce cas précis oui. Mais en général, les idées amènent les idées la mise en forme se met et le principe de la démonstration risque de s'oublier. Par exemple [] quand on fait les propriétés algébriques de la fonction logarithme, il faut utiliser certains prérequis de l'exponentielle. Donc au fur et à mesure on a vu quelles étaient les propriétés de*

l'exponentielle qu'il fallait utiliser, qu'il fallait mettre dans le prérequis pour construire la suite. On a procédé un peu à l'envers.

34. C. Fais-tu toujours un organigramme ?
35. P. *Pas forcément.*
36. C. Dans celui là qu'est ce tu as mis dans l'organigramme ?
37. P. *Dans ce cas là [] c'est plus une question de savoir-faire. On part de la définition de vecteur normal du plan et du vecteur projeté avec le produit scalaire.*
38. C. Ordonnes-tu ?
39. P. *Dans ce cas là, oui. Dans ce cas là si on avait la vision du calcul, il n'y aurait pas forcément d'induction. C'était des utilisations d'outils qui nous permettaient d'arriver à un calcul, à une forme calculatoire. Ce n'est pas tout à fait une démonstration, c'est un résultat que l'on justifie au moyen de notions vues. Par contre dans le cas des propriétés algébriques de la fonction logarithme il y a des prérequis sous la fonction exponentielle qui permettent []*
40. C. Comment choisis-tu les démonstrations à faire ?
41. P. *Pas toutes les démonstrations mais les essentielles : tous les nouveaux concepts du programme (10 min).*
42. C. Après avoir fait la démonstration qu'attends-tu des élèves ?
43. *Tout ce que j'attends d'eux c'est qu'ils puissent donner un sens à ce qu'ils font. Comprendre le rôle d'une démonstration qui, en fait, justifie un résultat. Le résultat est démontré, on l'utilise. Parce qu'ils ne comprennent pas toujours l'utilisation du résultat et la démonstration du résultat. Ils sont habitués à* exécuter*, à appliquer des procédures, justifier des choses ne les intéresse pas forcément. Ce que j'attends c'est qu'ils soient capables de comprendre le lien et les articulations entre les résultats qui ont servi d'outils à démontrer quelque chose. Donc en fait la pensée déductive et à fixer les éléments importants qui permettent la déduction.*
44. C. Est ce que les éléments importants qui permettent la déduction sont dans l'organigramme ?
45. P. *Je n'ai pas les exemples précis là.*
46. C. Dans ce cas précis ?
47. P. *Dans ce cas précis []*
48. C. Est ce qu'ils doivent retenir l'organigramme ou, est ce que tu les guides là-dessus ?

49. P. *J'aurais préféré qu'ils ne retiennent que l'organigramme parce que le reste ils peuvent le retrouver.*
50. C. Est-ce que tu leur demandes de retenir l'organigramme ?
51. P. *[]*
52. C. Ou, est ce déjà dans le contrat ?
53. P. *En fait dans le contrat ils doivent savoir démontrer le résultat ; pas forcément sous cette forme là, peu importe la forme. Une ROC est l'apprentissage à la démonstration. C'est un résultat qu'ils vont utiliser par la suite. Mais leur rôle, c'est de les familiariser avec des déductions, des articulations dans les connaissances, des choses comme ça. Donc je ne leur demande pas de savoir ça précisément mais de comprendre quel est le rôle de chaque prérequis dans le résultat qui a été démontré.*
54. C. Est que tu demandes d'apprendre cette démonstration là ?
55. P. *L'apprendre par cœur ?*
56. C. Est que tu parles d'apprendre par cœur ?
57. P. *Jamais. Et c'est ça le malheur parce que les filles qui sont sérieuses, appliquées elles apprennent par cœur mais on sent qu'elles ne comprennent pas le rôle de chaque prérequis dans ce qu'il se passe.*
58. C. Tu as déjà répondu à deux de mes questions. Comment la restitution de connaissance a modifié tes pratiques ? (15 min)
59. P. *Mais cela me permet de voir dans un premier temps, si l'élève connaît le résultat qu'il manipule. Ils ne donnent pas de sens à ce qu'ils font. La plupart du temps ils sont habitués à faire des exercices de réflexe, ils ne prennent pas le temps de lire l'énoncé ou de voir que la consigne n'est pas habituelle, ils répondent tout à fait à côté. Mais ce n'est pas parce qu'ils n'ont pas compris ce que l'on demande. Ils ont vu quelque chose, qui évoquait quelque chose d'autre, qui leur avait été déjà indiqué. Donc ils vont dans cette voie là mais sans lire les consignes. Cette ROC c'est très bien dans la mesure où cela les oblige à donner un sens à ce qu'ils font. Et après quand il y a l'application du résultat, parce qu'il y en a certains, qui ne peuvent pas faire la démarche de la justification mais qui peuvent utiliser le résultat. C'est une pratique que j'utilise dés la classe de seconde voilà, cela me permet de voir quels sont ceux qui sont capables d'apprendre un résultat, de le manipuler dans sa forme primaire mais de ne pas pouvoir le réinvestir dans un cas plus complexe.*
60. C. Ton organigramme, ça ressemble à ce que tu as écrit au tableau ? Ou… ?

61. P. *Cela peut être comme ça, peut être aussi sous la forme de tableau dans un tableau où je mets le prérequis. Quelles sont les interprétations ou les problématiques et qu'est ce que l'on va garder pour pouvoir les utiliser ?*
62. C. Cela peut être un tableau et comment favorises-tu le travail à faire à la maison par les élèves sur une démonstration ?
63. P. *Avec ma classe que j'ai actuellement, j'avais déjà des difficultés à leur apprendre à appliquer une technique ainsi à la maison je préfère leur donner des applications de techniques, des méthodes et les exercices de ce genre je préfère les faire avec eux. Mais à partir de maintenant je vais leur donner des ROC en devoir maison pour les familiariser avec ça.*
64. *[…] Ils n'ont pas confiance dans ce qu'ils font. Ils préfèrent manipuler des outils car la ROC c'est un exercice plus rigoureux donc plus scientifique et ça leur pose problème. (20 min)*
65. C. Quand fais-tu les restitutions ?
66. P. C'est *toujours pendant le cours et après on peut utiliser le résultat.*
67. C. Qu'évoque pour toi les mots restitution organisée de connaissances ?
68. P. *Est ce que tu as la connaissance ? et grosso modo. Je prends un exemple très simple, beaucoup de gens qui n'ont pas fait de maths au-delà de la troisième, et quand ils apprennent que je suis prof de maths ils te demandent « C'est quoi y=a x+b, j'ai oublié » ou ceux qui ont quitté depuis la terminale «c'est quoi la fonction logarithme ». Ils ne savent pas ce que c'est. Alors que s'ils avaient retenu le principe au lieu de manipuler des équations à la chaîne dans le cas des équations de droite, ils auraient su le rôle de chaque élément. Cela permet de fixer les concepts.*
69. C. L'algèbre est elle pour vous un cadre où tu fais des démonstrations ?
70. P. *[…]* (24min)
71. P. *Avec ma classe qui n'a pas un esprit très scientifique, je ne leur ai fait que des ROC à la place des démonstrations traditionnelles dans le cours. Pour les motiver et leur faire marquer un peu d'intérêt.*
72. C Pour les élèves ils ont compris le sens ?
73. P. *Oui ils ont compris le sens, parce que c'était devenu obligatoire et il faut qu'ils réfléchissent sur ce genre d'exercices, qui ont en eux ce qu'il faut pour pouvoir y répondre. Sauf que ça demande une réflexion personnelle et ce n'est pas la lecture de la solution de quelqu'un d'autre, il s'approprie ainsi la connaissance.*

74. C. Comment as-tu commencé le début d’année ?
75. P. *Le premier chapitre c’est la dérivation.*
76. C Quelle démonstration est la première?
77. P. *Mon dieu qu’est que j’ai fait ? Oui, je reprends le cours de première un peu sur le taux de variation et la limite du taux et il y avait une limite à déterminer qui utilisait un taux de variation de façon à faire intervenir le nombre dérivé. J’avais une restitution comme ça au départ. Dans les annales ils peuvent récupérer les démonstrations sauf qu’il faut leur apprendre à faire un organigramme des solutions qui leur est donné dans les annales. Il faut qu’ils puissent apprendre à décortiquer la chose. Ils se sont arrêtés avant l’analyse. Le sens d’analyse des questions et des problématiques : ils n’y sont pas habitués. Je crois qu’il n’y a que les maths pour faire cela. En principe, ils font ça en géographie mais ils me disent qu’il faut être bête pour prendre ce sujet là. En fait ce qu’ils ont comme difficultés en mathématiques, c’est : se poser les problèmes, avoir la problématique qui va avec l’exercice, avec la question, dans quel sens aller... et je crois qu’en physique ils font des expérimentations et à partir des expérimentations ils peuvent mettre des problématiques. Mais je ne suis pas si sûre qu’ils aillent jusque là dans leur formation personnelle. (32 min)*

2.4 Lycée 3

2.4.1 Professeur 5

1. C. Je te rappelle que cet entretien peut rester privé. Nous allons essayer d’évoquer une démonstration que tu as faite pendant un cours. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?
2. P. *Une démonstration que j’ai déjà faite ?*
3. C. Avec des élèves.
4. P. *Avec des élèves, en terminale ?*
5. C. En terminale S.
6. P. *Oui tout plein ! Il y en a tout plein.*
7. C. Une qu’on va évoquer ensemble, une seule, un fait précis.
8. P. *Qu’est ce que j’ai fait de récent ?.... Qu’est ce que j’ai fait de récent qui soit intéressant. Je ne sais pas, moi !*
9. C. La dernière que tu te rappelles.

10. P. *La dernière que j'ai faite avec eux : ils ont justifié que c'était la représentation paramétrique d'une droite. J'avais tout de suite, mais ça c'est vraiment bête, un point et un vecteur directeur de la droite. C'est ça que j'ai fait aujourd'hui. Qu'est que j'ai fait d'autre comme démonstration aujourd'hui ? non on n'a fait que des exercices. Des exercices.*
11. C. On peut prendre celle là. ? Comment as tu fait pour commencer cette démonstration ?
12. P. *Comment j'ai fait pour commencer cette démonstration ? Eh bien je leur ai donnée. Non. C'est-à-dire en fait, dans un premier temps on était parti d'un problème de la classe où ils devaient chercher, ils devaient chercher, les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan et pour moi c'était la façon d'introduire la notion de représentation paramétrique d'une droite. Donc, dans un premier temps on a parlé de la façon de trouver les coordonnées de ce point. Ils m'ont dit : « oui on a déjà l'équation du plan. Si on a une équation de la droite on arrivera à trouver les coordonnées du point en utilisant l'intersection comme dans le plan ». Et donc on est parti de ça. Il y a eu une discussion sur le fait que s'il y avait une équation de droite dans l'espace, quelle serait son allure et comment on la trouverait ?*
13. C. Donc en fait tu posais des questions, ils répondaient, tu écrivais au tableau. (3min)
14. P. *Non. Le problème posé c'était de : « Trouver les coordonnées du projeté orthogonal du point F dont ils connaissaient les coordonnées sur le plan ». Je sais plus.*
15. C. Sur le plan simple ?
16. P. *Oui, ils avaient les coordonnées des trois points.*
17. C. Ha.! Ils avaient les coordonnées des trois points ?
18. P. *Donc ils avaient les coordonnées des trois points et ils avaient un vecteur normal au plan. Voilà, et le but c'était de trouver. C'est-à-dire on avait déjà démontré au préalable que le projeté orthogonal était l'intersection d'une droite (FD) et du plan en question. Notre problème c'était, si je veux le situer, si je veux dire exactement, c'était une question qui était venue d'une élève de la classe qui disait : « Mais madame, si on avait les coordonnées du point on pouvait le chercher ». 3min30. (…)*
19. P. *4 min. Tout de suite arrive le problème de, comment je cherche l'intersection. Tout de suite ils ont donné l'équation du plan, et le problème s'est posé de l'équation de la droite. On va chercher l'équation de la droite et donc ils ont voulu faire une méthode qui correspondait à celle du plan. Donc en partant de voilà une équation de la forme a x + b y + c = 0, j'ai eu de la chance, heureusement, il y en a un qui a quand même remarqué que a x*

+ b y + c = 0 ne peut être l'équation d'une droite puisque c'est l'équation d'un plan. Je leur ai posé la question à savoir « Comment dans le plan ils arrivaient à justifier qu'une droite avait comme équation cartésienne a x + b y+c=0 ».

20. C. C'était toujours en discussion (5 min).
21. P. *Toujours en discussion. La seule chose qui est écrite au tableau, c'était coordonnées du point, donc le problème posé. 1°/ L'équation de plan : on avait résolue, 2°/ équation de droite que j'ai effacé et on a remplacé par caractérisation de la droite (FD).Donc je les ai guidés : « comment dans le plan justifie-t- on qu'une droite a une équation cartésienne de ce type là ? » Et on est donc reparti sur les vecteurs colinéaires. On est arrivé à la notion de représentation paramétrique d'une droite. Alors ensuite c'est moi qui leur ai fait remarquer qu'au lieu.*
22. C Je te coupe, y-a-t-il quelqu'un qui est passé au tableau ?
23. P. *C'est moi qui écris la plupart du temps. J'écris ce qu'ils me disent. Bon il m'a dit j'aurais* $\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FD}$ *. Il y en a un qui traduit concrètement ce que ça a donné. Donc on est arrivé à un système où moi j'ai dit « ça s'appelle une représentation paramétrique de la droite ». Puis on a résolu notre problème de cette façon là : on a trouvé les coordonnées du point K. Alors j'ai repris les choses en main en leur faisant remarquer, qu'au lieu d'écrire* $\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FD}$ *j'aurais pu écrire* $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DF}$*. Je leur ai demandé ce que l'on obtenait. Cela a été le premier résultat, il n'y a pas eu de réaction particulière là-dessus. Maintenant je leur ai dit : « Au lieu d'écrire* $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DF}$*, je peux aussi écrire* $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$ *où* $\vec{u}$ *est un vecteur colinéaire à* $\overrightarrow{DF}$ *». Alors ils m'ont dit : « Oui ». Je leur ai demandé de me donner un vecteur* $\vec{u}$ *et je leur demandé de traduire à nouveau avec les coordonnées : « Qu'est ce que cela donnait ? ». Alors j'ai encore eu de la chance parce qu'une élève a dit : « Madame on aurait pu, finalement on a pris ces coordonnées là pour* $\vec{u}$*, on aurait pu prendre d'autres coordonnées ». J'ai dit : «Oui », elle me dit : « Une droite a une infinité de représentations paramétriques ». Le cours a avancé comme ça.*
24. C. Ce sont les mêmes élèves qui répondent ?
25. P. *Aujourd'hui c'était souvent les mêmes.*
26. C. Combien d'élèves parlent ?
27. P. *Ils n'étaient pas très nombreux aujourd'hui, ils devaient être une vingtaine. Qui intervenait régulièrement ? Qui posait des questions ? Qui faisait des remarques ? Il devait y en avoir cinq, qui faisaient avancer les choses je veux dire. (8min 30). Bon maintenant, il y a eu d'autres interventions par exemple certains m'ont demandé de reprendre certains*

points parce qu'ils n'ont pas compris. La classe, elle est à la fois spécialité math et spécialité SVT, la classe est très hétérogène.

28. C. Ce sont les élèves spécialité math qui répondent ?
29. P. *Pour la plupart à une exception prés. Il y en a un qui est en spécialité SVT qui a vraiment bien compris la géométrie dans l'espace.*
30. C. Etait-il présent ?
31. P. *Oui il était là, présent, il intervenait… D'ailleurs c'est lui qui a proposé au niveau de l'intersection sauf qu'il a parlé d'équation de droite, c'est les autres qui l'ont repris. C'est vrai que ces élèves de spécialité pour la plupart animent la classe, les autres pour certains ont de grandes difficultés. Ils ont du mal par rapport au calcul algébrique, au calcul algébrique tout simplement.*
32. C. Après attends-tu un travail particulier sur cette démonstration ? (10 min)
33. P. *La démonstration a été faîte, ensuite il y a eu un exemple, un exercice d'application, mais là on est dans un contexte particulier. Tout de suite après, on a continué sur un exercice d'approfondissement qui n'a pas de lien direct avec le théorème que j'ai démontré.*
34. C. Quel théorème ?
35. P. *On était en train de parler de représentation paramétrique de droite, donc progressivement on a mis en place des choses : 1°/ « Comment l'obtient-on dans un premier temps ? » 2°/ « il y en a une infinité » 3°/ « Quand j'en connais une, je peux connaître un point de la droite et un vecteur directeur de la droite ». Voilà, c'est vrai qu'on aurait été dans un contexte classique, j'aurais peut être insisté là-dessus en donnant des exercices d'application mais là en l'occurrence je suis allée directement dans les exercices de type bac. On est très en retard. Il faut finir.*
36. C. Si on revient sur la fille qui t'a aidé à la fin [].
37. P. *En fait elle a résumé le boulot qui venait d'être fait. Ma démarche était celle là, un point M appartient à la droite (FD) on l'a traduit comme ça, j'ai dit : « Donnez moi une autre façon de le traduire », ils l'ont traduit autrement. On a encore une autre façon de le traduire toujours en […].*
38. C. Procèdes-tu toujours comme ça pour une démonstration ?
39. P. *Pas systématiquement, il y a des théorèmes que je donne et à ce moment là l'exercice consiste à le démontrer. Par exemple, ça peut être un exercice à faire à la maison. Par exemple, on a utilisé des propriétés de l'intégrale, on savait que lorsque la fonction est*

positive l'intégrale est positive et lorsque la fonction est négative l'intégrale est négative. On avait admis la linéarité de l'intégrale. Je leur ai demandé : « Qu'est ce que je peux dire de l'intégrale de f(x) dx et de l'intégrale de g(x) dx si f est inférieure à g ? ». Je leur ai demandé de démontrer directement ça.

40. C. Pour préparer les ROC comment fais-tu ?
41. P. *Pour préparer les ROC je les entraine à des questions ROC, par exemple sur la fonction exponentielle je leur montre que (14min) […]*
42. C. (16 min) Comment as-tu fait ?
43. P. *La deuxième démonstration, c'était un exercice en plus que je donnais à faire à la maison. Je ne donne pas de ROC en* devoir. […]
44. P. (17min) *C'est-à-dire en l'occurrence sur exponentielle et le logarithme. Surtout au début, ça se passait plutôt au début de l'année il a fallu les guider parce que déjà, la difficulté des élèves sur ce type d'exercice c'est qu'il faut qu'ils lâchent ce qu'ils savent. Donc par exemple il y en a qui, systématiquement si je demande de démontrer que ln logarithme népérien de ab est égal à logarithme népérien de a plus logarithme népérien de b, ils ne comprennent pas pourquoi je ne vais pas utiliser d'emblée la fonction exponentielle. C'est ce qui a été donné il y deux ans je crois. Justement cette question là, finalement, on leur demandait quelque part d'adapter, enfin je me mets dans la place d'un élève à moi, d'un élève à moi qui fait cet exercice là, ça veut dire qu'il faut qu'il adapte à la fonction logarithme népérien la méthode que j'ai utilisé pour la fonction exponentielle. Tu comprends ce que je veux te dire* (18min).
45. C. Oui, oui tout à fait.
46. P. *Il faut qu'il ait suffisamment de recul par rapport à ça, pour se dire : là on ne veut pas que j'utilise la fonction exponentielle pour démontrer ça. On veut que j'utilise une méthode qui soit proche de celle que le prof a utilisée pour la fonction exponentielle, c'est ce qu'on demandait à mes élèves cette année là.*
47. C. C'est sûr, est-ce-que là tes élèves arrivent à faire quelque chose chez eux ? Ou ont-ils du mal ?
48. P. *C'est-à-dire il y en a qui ont fait, qui ont utilisé l'exponentielle à cette époque là. Maintenant ça a un peu progressé au niveau des, je veux dire ils ont compris qu'ils ne doivent se baser que sur les prérequis. C'est vrai aussi maintenant les démonstrations ne sont plus pareilles au niveau des questions ROC. C'est vrai que j'ai traité les plus difficiles au début, à mon sens. Celles qui tournaient autour du logarithme etc. où finalement il y a une*

multitude de points d'entrée, tu vois ? Par exemple, là dernièrement, ils ont eu à faire à la maison l'exercice qui consistait à démontrer que le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants. Mais ça ils l'ont fait sans problème parce qu'il n'y a pas trente six mille façons de rentrer dedans, tu vois ? Tu comprends ? Là il n'y a pas trente six mille façons de rentrer dedans. Alors que dans justement la fonction exponentielle la fonction...

49. C. La fonction exponentielle ?
50. P. *Oui, dans la fonction exponentielle dans la fonction logarithme népérien suivant la façon dont le prof aura choisi de rentrer dans le cours (20min).*
51. C. Le plan médiateur, l'as-tu donné directement à la maison ?
52. P. *Je l'ai donné à la maison directement. Par contre c'est devenu un théorème qu'ils ont retenu ensuite*.
53. C. Combien d'élèves ont trouvé ? 80% ?
54. P. *80% qui ont cherché, pas qui ont trouvé. Je suis passée dans les rangs il y en a.. non, ils avaient utilisé beaucoup les propriétés, ils avaient simplement fait une extension du plan à l'espace. Ils ont eu du mal par rapport à ça*.
55. C. Sont-ils partis de la médiatrice ?
56. P. *C'est ça, ils sont partis de la médiatrice, mais une fois que j'ai fait le dessin au tableau. Car en fait, c'était ça la difficulté pour eux, la représentation. Une fois que j'ai fait le dessin au tableau, la situation a été débloquée. Sur le nombre d'élèves je ne peux pas te dire.*
57. C. Demandes-tu un travail ensuite sur ce résultat ?
58. P. *Le contrat, à partir du moment où le résultat est écrit dans le cahier de cours avec la démonstration, il est sensé être connu ainsi que sa démonstration. C'est notre contrat. C'est vrai que la notion de plan médiateur est apparue plutôt comme une application.*

2.4.2 Professeur 6

1. C. Je te rappelle que cet entretien peut rester privé. Nous allons essayer d'évoquer si tu le veux, une démonstration que tu as faite dans ta classe. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?
2. P. *Les seules démonstrations que j'ai faites. (…) Ce n'est pas compliqué : tout ce qui concerne la fonction exponentielle. Les seules autres ROC que j'ai faites, il y en a un pe-*

tit peu dans les probabilités, un petit peu dans les complexes et un petit dans l'espace. Et il y en a plein que j'ai laissées tomber.

3. C. Une démonstration récente.
4. P. *Je viens de faire une ce matin mais je ne sais pas si ça fait partie des restitutions. La distance d'un point à une droite et la distance d'un point à une droite. En fait, j'ai fait d'abord la distance d'un point à une droite dans le plan et j'ai extrapolé la technique pour faire la distance d'un point à un plan*.
5. C. Comment as-tu procédé ?
6. P. *En fait, on est parti d'un exercice, un énoncé de bac où il y avait le calcul de la distance d'un point à un plan et comme ma clientèle est une clientèle qui a peu fait de géométrie apparemment en première S, on a fait un petit dessin, on a fait une représentation*.
7. C. Est-ce toi qui l'as fait ?
8. P. *Non ils sont venus, moi j'ai présenté mon plan qui est un livre. Le livre fait partie du plan, le bout de mon doigt c'est le point et ils sont venus me dire qu'est ce que c'est la distance entre le point et le plan. (…) Ensuite j'ai pris mon stylo et j'ai dit « Ça représente une droite. Que représente la distance entre le point à une droite. Ils ont vu que c'était le chemin le plus court et après on a dit ce qu'on voit on va le mettre (…) On est en processus accéléré. (…)*
9. C. Combien ont participé ?
10. P. *Aujourd'hui c'est déjà spécial, il y a 13 de présents sur 29. Ceux qui viennent, ce ne sont pas les bons Mais c'est les motivés pour apprendre les choses. Je viens de faire la moyenne : quatre de moyenne au trimestre, au dernier contrôle 2,5 de moyenne. A partir de là ceux qui viennent, même si le niveau n'est pas terrible, ils ont quand même une certaine motivation. On a commencé la semaine dernière la géométrie dans l'espace on est aujourd'hui mardi, on a commencé lundi dernier. On a accéléré, on a parlé sous forme d'exercice. Voilà, équation cartésienne de plan mais en même temps à chaque fois que tu vois quelque chose, tu t'aperçois que tu es obligé de faire un parallèle avec le cours de première S qui pour la plupart de ces élèves là, (en plus même s'il y a un niveau pas terrible dans les choses qu'ils ont vues) il y a plein de choses qu'ils n'ont pas vues en première S. Tu fais un retour mais un retour pas exhaustif. On fait des petits retours lorsqu'on s'en sert. J'ai donné la ROC de première S qu'on peut traduire en terminale S, mais je ne l'ai pas faite en terminale S, je n'aurai pas le temps. Par contre, je*

leur ai demandé d'essayer de la reproduire pour demain. (5min) Demain on continue pour travailler sur la géométrie dans l'espace. Là on est en révision de bac alors qu'on est en train d'apprendre des choses. On prend des énoncés de bac et on les exécute et dans le même temps on fait des rappels de première. Là par exemple à l'occasion de Liban 2006, on a été amené à parler de distance. Je leur ai donné comme conseil là […] finalement il a fallu décomposer avec la relation de Chasles et on s'est aperçu que la lettre h que l'on ne connaissait pas, elle pouvait disparaître et on revenait à quelque chose qu'on connaissait. Ensuite, il fallait utiliser les équations cartésiennes des droites dans le plan, pour faire des petites transformations et on est arrivé à une formule toute simple. Et finalement on fait le parallèle dans l'espace. Je leur ai dit : «Voilà un truc qu'il est préférable d'apprendre par cœur » et éventuellement savoir le faire. Ce n'est même pas pour l'écrit car il y en a beaucoup qui vont aller à l'oral. Il est bon de connaître la procédure même en tâtonnant un petit peu. Ils font une petite procédure et ils viennent m'appeler s'ils veulent voir en sachant qu'ils ont le procédé dans le livre, par forcément le même que le mien.

11. Qui est ce qui écrit au tableau ?
12. *En TS c'est moi qui écris au tableau. Par contre c'est eux qui dictent lorsqu'ils le peuvent. Avant on avait fait : équation d'un plan, connaissant trois points, dans un exemple. Ils ont eu du mal à comprendre qu'il fallait trouver un vecteur normal. Finalement on avait trois inconnues, deux équations cela les a un petit peu interpellés. On a fait ça puis, on a enchaîné sur autre chose. Là on est en accéléré. Au premier mois de l'année : exponentielle. On a passé des heures et des heures à faire des restitutions organisées de connaissances liées à la fonction exponentielle. Ça a pris énormément de temps, c'est très intéressant pour le professeur. Je l'ai dit récemment à l'inspecteur général parce que moi c'est un peu mon dada. Très intéressant aussi pour certains élèves, ils sont très à l'écoute. Par contre au niveau de la restitution, car je crois que dans le mot il y a le mot restitution, avec moi ça avoisinait le néant, ce qu'ils ont été capables de restituer à court terme. Ils participent, en plus, sachant qu'il faut avoir les idées, j'appelle ça : l'heuristique de la démonstration, les idées pour arriver à penser la démonstration. Là pour ces élèves qui sont un peu déconnectés de la démonstration mathématique (mais c'est notre faute), des fois il faut les mettre sur la piste. Et cette piste est très dure à comprendre. Parce que là je n'ai pas eu le temps, mais pour l'exponentielle j'essaye de leur donner des idées pour les mettre sur la piste. Quand c'est $f' = kf$, essayer de voir*

pour les fonctions qu'on connaît, déjà s'apercevoir que ça ne marche pas, on tâtonne, on fait de petits raisonnements. Pour ces démonstrations là, en particulier l'exponentielle, 80% des idées c'est moi qui les donne. (10 min) L'explicitation de ces idées je les fais travailler mais souvent je reviens sur l'exponentielle, il faut calculer des dérivées mais en fait c'est des fonctions à deux variables qu'on ne dit pas. C'est des dérivées de fonctions à deux variables mais en fait ils sont complètement paumés. Moi je trouve ça problématique, sous prétexte de faire des démonstrations qui sont très intéressantes d'introduire, sans le dire, des notions qui sont assez complexes : dérivées de fonctions à deux variables. En sachant qu'il y en a une qui est fixée, c'est une fonction à une variable. Mais dans la réalité de l'exercice c'est une fonction à deux variables. Après ils finissent, par au bout d'une dizaine d'heures, si on leur donne un exercice du même type, sans qu'il y ait de contrôle, ils arrivent des fois à créer des choses. Le jour où il y a le contrôle mais mélangé à d'autres choses, pour les miens, c'était le vide complet !

13. C. Qu'est ce que tu attends après ce travail de la part des élèves ?
14. P. *A partir de certaines questions qui sont des ROC, on essaye d'en faire d'autres qui n'ont pas le même énoncé. Je prends un exemple : on a un livre qui n'est pas trop mal, pour chaque chapitre, les restitutions organisées de connaissances font partie du cours. Et eux, ils ont inventé des restitutions organisées de connaissances qui sont un peu similaires à ce qu'on demande mais en changeant les données dans l'esprit des programmes. C'est Hyperbole, tous les livres n'ont pas ça. Par exemple un autre livre : Repère, là aussi ils reprennent les démonstrations mais c'est un peu compliqué. En exercice quand on n'est pas en contrôle il y a une production mais la production ne s'approche pas du tout de la réalité de l'exercice. Moi j'attends d'eux qu'ils soient capables lorsqu'il y a un énoncé d'essayer de faire une production, ce que j'appelle la recherche. Malheureusement très peu dans nos clients avaient une production qui se rapprochait de ce qu'on aurait attendu pour pouvoir résoudre l'exercice.*
15. C. Quelle est la cause ?
16. P. *Nous sommes certainement de mauvais enseignants, moi y compris, ou peut être la transmission de notre message n'est pas correctement passée. A priori nous avons l'impression qu'ils l'avaient à peu prés compris, en fait quand on passe sur un autre type d'exercice on s'aperçoit qu'ils sont incapables de restituer avec des changements d'énoncé. Soit notre enseignement est déficient, soit moi j'y vois aussi un corollaire : l'habitude qu'ils ont de faire ce type de processus, la complexité de ce que ça engendre*

fait qu'ils sont paumés. Mais le jour de contrôle en fait, en particulier au premier trimestre je donne comme énoncé exactement le même énoncé de la restitution organisée de connaissances que nous avons vue en cours sur laquelle nous avons passé le plus de temps. Je ne donne pas une restitution organisée de connaissances mais je demande une démonstration de cours. C'est le vide, là j'exagère : il y a 4 réponses correctes pour 29 élèves et ensuite toujours en contrôle j'ai changé (15 min) les donnés de choses qu'on avait faite donc ils se sont retrouvés à faire des restitutions organisées de connaissances avec des énoncés que nous n'avions, nous ensemble, jamais vu et là, 0% de réussite ! En sachant qu'ils avaient été préalablement prévenus qu'ils auraient des questions, soit des démonstrations de cours, soit des restitutions organisées de cours dont nous changeons les énoncés. Ils sont prévenus et on est au début de l'année que nous n'avions pas fait cinq cent cinquante mille chapitres. Je t'en parle toujours parce que j'y passe énormément de temps. On a changé de livre exprès pour attaquer tout de suite, de but en blanc, par exponentielle. Ce livre fait un cours particulier parce qu'il y a beaucoup de livres de terminale qui commencent par les fonctions, la dérivation etc., lui direct premier chapitre : exponentielle. Voilà je prends un exemple tout simple, on n'est pas sensé connaître la dérivée de composée de fonctions, ce n'est pas grave, on se sert de dérivatifs pour pouvoir arriver à un résultat dans le chapitre ce n'est qu'après que l'on fait intervenir la composée de fonctions.

17. C. Comment favorises-tu la mémorisation de la démonstration ?
18. P. *Par l'appropriation du sens, le temps que moi j'estime avoir passé, c'est le temps qui est lié, pour eux, à ce qu'on appelle compréhension. On appelle ça donné du sens. Tous ceux qui ont fait, qui ont essayé de faire, qui ne sont pas arrivés à faire, mais ils ont cherché et finalement, ils ont fait. Ensuite il y a eu plein de petites questions c. à. d. par rapport à une démonstration de cours, chaque fois que je lance une piste d'idées, ils ont une recherche et ensuite nous corrigeons. Et ensuite, comme je l'ai dit au tout début de l'année, parallèlement à l'avancé dans le cours au tout début de l'année, on fait une autre restitution. L'aspect mémorisation ? Je n'ai rien travaillé de plus. Je leur ai donné comme recette de mémorisation, ce n'est pas une recette, soit ils essayent de donner du sens à ce qu'ils ont fait, ils essayent de restituer des questions eux-mêmes c.à.d. voilà, ils disent exponentielle y'=ky : « qu'est ce que je peux faire ? Quelles questions je peux me poser ?» Ils essayent de le faire. Moi j'ai 6h 30 avec eux, je suis à l'horaire plancher. Par exemple dans notre lycée les autres enseignants ont 7h, on leur à rajouter ½ h, moi*

j'ai horaire plancher. C'est la classe qui est soit disant nulle en math. Moi j'ai 6h ½ mais ils ont 5h ½ avec moi. Dans notre lycée avant on avait une procédure une demi heure de plus, moi on nous l'a supprimée pour différentes raisons. On a préféré investir ailleurs puisque c'est une classe qui a un énorme taux d'échec, et on a dit que ça ne sert à rien de donner des heures de plus en math puisqu'ils ne comprennent rien. On va leur donner des heures de plus ailleurs ce qui n'est pas vrai d'ailleurs, ils sont : horaires plancher dans toute les matières. C'est comme ça. Il n'y a pas de processus spécifique pour la mémorisation.

19. C. L'apprentissage par cœur
20. P. *Je leur en parle mais ça ne me semble pas la bonne idée. En fait les quatre cinq qui ont réussi à restituer, je leur en parle, chacun peut voir en fonction de ce qu'il est. Si on arrive à donner du sens à la fois à ce qu'on fait mais aussi aux questions qu'on pose. La problématique de ces questions, même la personne qui a à peu prés compris, moi j'appelle ça a peu prés compris les démonstrations de cours entre guillemets lorsqu'elles ont été faites, souvent elle n'a pas les questions qui vont avec. Durant le processus, souvent pour les mettre sur la voie, moi j'ai posé des questions que j'ai écrites. Questions qu'on pouvait se poser au moment où ils ont tâtonné, ils se sont aussi posé des questions qui ne correspondaient pas obligatoirement à ce qu'on a envie qu'ils fassent, mais ce n'est pas grave. Moi j'ai posé un certain type de questions qu'on leur a faites écrire, qui permettent de donner du sens à leur réflexion. Soit ils arrivent à adhérer à ce processus et dans ce cas là ils ont peut être une capacité à restituer des choses et voir même quand on leur change les énoncés à se poser les bonnes questions et essayer d'y répondre dans un procédé de restitution organisée de connaissances, soit ils ont du mal à faire çà et ils apprennent par cœur et ça ils le savent. Mais je parle de ma clientèle mais ce n'est pas les seuls, je vais donner une anecdote puisque nous sommes en Guadeloupe, moi j'ai un chiffre : notre moyenne au bac grave. (20 min) La moyenne globale est faible : 6. Je rentre dans les détails. Moi j'ai l'option SVT et comme par hasard en option SVT on avoisine 5 - 4 de moyenne. L'option physique c'est entrain de monter ces temps-ci 6, 7, 8 et option math ça s'approche de 10. A partir de là, ça c'est une réalité, peut être qu'il y a aussi un problème de mémorisation des connaissances. […] Le système d'apprendre par cœur une langue étrangère : les mathématiques, c'est faisable on peut réussir en faisant comme ça mais c'est quand même très difficile. Et eux ils ont souvent montré qu'ils avaient déficience pour restituer correctement. Si en plus on leur de-*

mande de réfléchir un petit peu au sens des questions, c'est-à-dire que ce n'est pas un modèle prés donné c'est encore plus dur.

21. C. L'algèbre est elle pour vous un cadre où vous faites des démonstrations ? Comment ?
22. P. *A l'intérieur des nombres complexes un petit peu avec les arguments mais là par contre, ça restituent correctement (…) Dans les exercices sur les complexes on trouve plein d'énoncés où on va restituer des connaissances (…) Cette capacité à restituer la démonstration ou des démonstrations suivant les types d'énoncé ou prérequis, les élèves qui apprennent, ils finissent par y arriver. Mais à mon avis ils arrivent par mémorisation. D'ailleurs, si l'énoncé est un petit peu particulier, ça ne passe pas bien (…)*
23. *C.* Comment la restitution organisée de connaissance a modifié tes pratiques ?
24. P. Cela me donne beaucoup de travail donc moi je ne suis pas un client habitué des terminales S. (…) 25 min
25. P. *D'abord j'ai du mal. D'ailleurs, je me suis plaint auprès de l'inspecteur, auprès de l'inspecteur général de cette complexité du programme par rapport à notre clientèle. De cette complexité que j'avais moi, parce que moi j'avais du mal à faire certains exercices et pour ma pratique du coup ça me met au boulot, surtout que j'ai fait pas mal d'années de collège. C'est intéressant pour moi sur les mathématiques par contre dans la restitution, dans ce que je transmets, ça me met en échec. Dans ma pratique ça augmente mon échec. Professeur de math, c'est déjà pas facile au niveau de la réussite, moi j'ai l'impression, pour le moment que je suis un jeune client dans la terminale S, que ça agrandit mon échec, ça agrandit tout mon questionnement et malheureusement mes non réponses.*

2.5 Lycée 4

2.5.1 Professeur 7

1. C. Je te rappelle que cet entretien peut rester privé. Nous allons essayer d'évoquer si tu le veux une démonstration que tu as faite dans ta classe. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?
2. P. *Une démonstration que j'aurais faite dans ma classe de terminale.*
3. C. Oui, bien sur.

4. P. *Oui. J'en ai fait plusieurs, dont je me souviens, oui, j'ai les matières premières des ROC. Donc, ça va me permettre de mieux voir. J'en ai fait plusieurs.*
5. C. La dernière, celle que tu veux prendre, que tu veux.
6. P. *Que je veux évoquer pour l'instant. Voilà, montrer que la fonction à x associe intégrale de a à x est dérivable et que c'est la primitive de la fonction f qui s'annule en a.*
7. C. D'accord.
8. P. *Ça c'est la dernière démonstration en date*
9. C. et as-tu fait ça il y a longtemps ?
10. P. *Non c'est assez récent.*
11. C. C'était il y a une semaine ou un tout petit peu plus.
12. P. *Euh J'ai fait ça il y a environ deux trois semaines, trois semaines puisqu'il y a eu une semaine de battement à cause du bac blanc. Donc...pendant cette semaine je n'ai pas vu les élèves du tout.*
13. C. Donc d'accord c'était avant.
14. P. *C'était avant le bac blanc.*
15. C. Comment as-tu fait. As-tu préparé ? Qu'est que tu as fait exactement avec les élèves ?
16. (2 min 30s)P. Bon Euh.
17. C. C'est ce moment là qu'il faut évoquer.
18. P. *Oui, oui, oui parce que là tu vois c'est difficile d'en parler si je ne parle pas un peu de l'historique.*
19. C. Tu peux en parler.
20. P. *Je peux en parler.*
21. C. Oui.
22. P. *Parce que l'avantage que j'ai eu, c'est d'avoir mes élèves en première donc d'assurer la montée pédagogique avec mes élèves. Donc je les ai initiés au ROC, à la restitution organisée de connaissances, depuis la première (3min). Depuis la première on a fait quelques petites démonstrations en l'occurrence, par exemple « montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente ». Voilà par exemple, ça c'était des restitutions que je demandais de faire sans support au tableau. Et là progressivement, on a dé-diabolisé la notion de ROC, de restitution organisée, et là maintenant ils sont un peu plus coutumiers de la chose. (3min30)*
23. C. D'accord donc quand tu as fait cette démonstration. Qu'as-tu dit ? As-tu annoncé une démonstration tout simplement ?

24. P. *Quelle démonstration ?*
25. C. La dernière.
26. P *Tu parles de l'intégrale ? d'accord ?*
27. C. Oui.
28. P. *C'est du Blabla que je faisais.*
29. C. Non. je reviens toujours à ce moment là.
30. P. *Oui, d'accord O.K. d'accord.*
31. C. C'est celle là qui m'intéresse. Celle que tu as faite au tableau. Est-ce que tu as envoyé un élève au tableau ? Comment ça s'est passé ?
32. P. *Oui, c'est-à-dire j'ai annoncé donc le plan de la démonstration. J'ai annoncé le plan, j'ai annoncé les étapes parce que ce qui est important c'est de… il est important de structurer la démonstration. Qu'elle ait du sens, qu'elle prenne du sens aux yeux des élèves. Il ne faudrait pas que ce soit une démonstration qui soit pilotée par le professeur. Donc j'ai annoncé le plan si je me souviens bien, j'ai donc annoncé les étapes, les phases. J'envoyais les élèves au tableau ponctuellement. Ils n'ont pas fait toute la démonstration. Parfois je prenais la main. Mais j'envoyais les élèves au tableau ponctuellement pour mettre en forme cette démonstration. Je leur posais des questions (4min 30). C'était assez segmenté et là je les interrogeais par exemple oralement pour recueillir les réponses ou bien éventuellement je pouvais envoyer un élève au tableau.*
33. C. Tu te souviens quels élèves intervenaient ?
34. P. *En général ce sont les meilleurs.*
35. C. Est-ce que ce sont eux qui se sont proposés?
36. P. *Ce sont eux qui se sont proposés.*
37. C. Donc ça vient d'eux à chaque fois ?
38. P. *Voilà. Pour cette démonstration je ne me souviens pas trop. J'ai en tête trois ou quatre élèves qui interviennent toujours. Tu veux des noms* ?
39. C. Non, non. Pour cette démonstration là, si tu veux essayer d'aller plus loin ? Pour voir un peu comment tu procèdes. (5min 30)
40. P. *C'est-à-dire que les élèves, mes élèves de terminale S parce que l'on parle de mes élèves, sont souvent impressionnés quand il s'agit de démontrer. Ils sont souvent impressionnés malgré le fait que je les ai eus en première.*
41. C. Oui

42. P. *Ils n'ont pas su, les élèves moyens ont du mal à adhérer à ce type de démarche. Donc ils sont toujours un peu silencieux, ils sont peut être dans l'attente, ils sont toujours un peu dans la prospective si tu veux. Et… j'essaie de créer une émulation, j'essaie de les dynamiser, un peu, autour de cette démonstration. On ne la fait pas sur le papier nécessairement. Mais là, je la faisais pendant mon apprentissage. J'ai fait la démonstration comme je te l'ai dit. J'ai planifié la démonstration.*
43. C. Oui, Pour commencer as-tu fait le plan ?
44. P *J'ai fait le plan. Cela n'apparaissait pas comme une activité. Ce n'est pas une activité que les élèves ont préparée sur feuille. Mais j'ai fait le plan. Et j'ai essayé quand même de solliciter les élèves, de dynamiser la classe, pour qu'ils réagissent. Donc ils avaient leur feuille de brouillon et puis je leur posais des questions, je n'ai pas le détail des questions, mais je leur posais des questions progressivement. D'accord ?*
45. C. D'accord.
46. P. *On a mis en place le taux d'accroissement. Car il faut rentrer dans les détails .On a mis en place le taux d'accroissement, la limite du taux, parce que nous l'avons fait (6min 40). On a fait le travail un peu graphiquement.*
47. C. Avec quoi, as-tu essayé de démontrer ?
48. P. *A partir de la définition, la notion d'aire qu'ils avaient, la définition même de l'intégrale, la définition qu'ils ont eue en terminale, c'est à dire l'aire sous la courbe.*
49. C. L'aire sous la courbe.
50. P. *Voilà. Et à partir de ça, on a mis en place le taux d'accroissement, la limite du taux d'accroissement .On a montré la convergence du taux.*
51. C. Oui.
52. P. *D'accord ? Et là on a pu établir progressivement que la fonction f en question qui à x associe l'intégrale de a à x de f(t) dt est dérivable,*
53. C. d'accord.
54. P. *est dérivable à droite à gauche.*
55. C La fonction f, comment était-elle ?
56. P. *Non. Je n'ai pas pris une fonction particulière (7min 30). J'ai pris une fonction continue, positive et croissante. Donc je me suis placé dans ces conditions, de façon à ce qu'ils utilisent la définition première qu'ils avaient de l'intégrale. La première définition.*
57. C. D'accord. Donc tu as fait la démonstration par morceaux. Et à chaque morceau quand c'était toi qui prenais la parole, écrivais-tu au tableau ?

58. P. *Bon .Quand c'était moi parfois je prenais la main, j'écrivais au tableau. Parce que c'est moi qui était sensé faire la démonstration. Les élèves participaient. Et puis parfois quand par exemple un élève, avait une remarque, comment dirais-je ? Une remarque constructive, à ce moment là je lui demandais d'exprimer, de prendre le relais au tableau. Tu vois ? Donc j'ai fait toute la première partie, par exemple, avec h plus grand que zéro.*
59. C. Oui.
60. P. *Tu vois ? h plus grand que zéro. Ils voyaient les choses.*
61. C. Dans cette partie sont- ils passés au tableau ?
62. P. *Il y a un seul élève qui est passé au tableau (8min33). Un seul élève qui est passé au tableau .Pourquoi ? Parce qu' il avait une idée à me soumettre et comme ce n'était pas très clair, je ne comprenais pas trop A ce moment là, je l'ai envoyé au tableau pour essayer de clarifier la chose. D'accord ? Et apparemment, il était dans le ton de mon exercice. Cela a permis d'avancer. C'est lui qui a un peu fait avancer les choses. Et la deuxième partie : donc on a montré à droite. Je leur ai demandé de faire l'encadrement du taux, lorsque h est plus petit que zéro de façon à trouver la limite à gauche. Mais là c'était laissé à l'initiative des élèves. Et c'est là où j'en ai fait une activité.*
63. C. Donc après, tu as fait une activité. Et après est-ce-toi qui a corrigé ?
64. P. *Non, ce sont les élèves qui ont corrigé.*
65. C. Tu as bien fait la partie où h est positif et la partie h est négatif tu leur as faite faire en application ?
66. P. *Voilà exactement.*
67. C. Et refait par les élèves ?
68. P. *En résumé, c'est moi qui ai pris l'initiative pour la première partie en sollicitant les élèves oralement, il y a peut être un élève qui a été au tableau, pour expliciter sa pensée, et puis la deuxième partie était laissée à l'initiative des élèves.*
69. C. D'accord.
70. P. *Parfois on est obligé de faire ça. Pourquoi j'agis comme ça ? J'aurais pu faire ça en activité. J'aurais pu faire ça en activité. Le temps qui nous est imparti est trop court. Si on prenait trop de temps pour faire, peut être que je parle trop ?*
71. C. Non c'est très bien.
72. P. *Si on prenait trop de temps pour faire les démonstrations Euh (10min) On n'aurait pas pu faire le programme, on n'aurait pas pu finir le programme. Donc on est obligé de*

prendre l'initiative de façon à les motiver un petit peu. Et ensuite on leur laisse une part du travail.

73. C. Comment as-tu su que les élèves avaient compris ?
74. P. *Oui, c'est-à-dire on a mis en place toute la démarche. Je parle toujours de cette activité.*
75. C. Oui.
76. P. *On a mis en place on a fait l'encadrement du taux, on n'a pas fait la limite on a fait l'encadrement du taux et ensuite, du taux d'accroissement entre a et a+h pour h positif. Ensuite comme je te dis je leur ai laissé l'initiative pour h négatif. Les élèves ont été au tableau. Cette fois ci, les élèves ont été au tableau. Ils ont travaillé seul, je me suis tu, complètement. Et après lorsque cela était fait, oui j'intervenais simplement quand il y avait peut être (11min) une petite difficulté. Mais il y a des élèves qui ont un tel niveau qu'ils arrivent toujours à déblayer les situations un peu délicates. Et par la suite j'ai fait un bilan. Je leur ai dit : « bon maintenant on a eu un encadrement pour h positif pour h négatif ». Maintenant, « est-ce que l'on a le moyen de montrer pour dire que la fonction est dérivable, pas la fonction, le taux admet une limite ? La fonction est dérivable donc le taux admet une limite. (11min30) Et c'est là que j'ai attendu, que j'ai attendu. Bon ça était un peu difficile. Ils sont toujours impressionnés. Bon finalement c'est arrivé. Ils ont établi que la limite à droite est égale à f(a).*
77. C. Est ce que tu leur as donné quelque chose pour qu'ils trouvent ?
78. P. *Non je les ai laissé chercher. Car on a déjà fait ce type d'activité.*
79. C. Ils cherchent, ils cherchent et à un moment il y en a un qui trouve ?
80. P. *Oui il y en a un qui trouve. On avait fait ce type d'activité quand on avait introduit l'intégrale. On avait fait ce type d'activité, ce type d'encadrement. Il y a des élèves qui ont déblayé la situation et qui ont pu arriver au bout de l'exercice, permettre d'arriver au bout de l'exercice.*
81. C. Est que tu te rappelles la fin de la démonstration ? Y-a-t-il eu des questions ? Qu'est ce qui s'est passé à la fin ? Y-a-t-il eu quelque chose de particulier? (12min30)
82. P. *Qu'est qui s'est passé ? Euh. Ils ont établi que la limite à gauche est égale à la limite à droite. Ils ont établi que la limite à gauche est égale à la limite à droite. Evidemment il y avait certains élèves qui étaient un peu largués. Mais en général ils ont pu.*
83. C. Y-a-t-il eu des questions ?

84. P. *Par contre il y a eu des petites difficultés. Quand il s'agissait de faire le cas h négatif, là ils n'ont pas facilement compris. Ils n'ont pas tout de suite compris.*
85. C. Et là, circulais-tu dans la classe ?
86. P. *Oui, je circulais.*
87. C. C'étaient des élèves qui ne comprenaient pas. Comment ça se passait ?
88. P. *C'est-à-dire, c'est vrai que je n'ai pas fait de travail différencié. Ce n'était pas une activité. On a travaillé toujours un peu de façon collégiale. Donc Je m'adressais un peu toujours à toute la classe. J'essayais de leur donner par exemple des idées. Par exemple, je leur ai demandé de refaire le graphique. Et je crois que tu m'as posé la question de la fonction. Non c'était une fonction pas continue, seulement positive. C'était Euh. C'était une fonction particulière qu'on a dû prendre, pour la construire.*
89. C. Oui c'est ça.
90. P. *Mais on ne s'est pas attaché à cette fonction particulière.*
91. C. Au départ, as-tu donné une fonction particulière ?
92. P. *Oui je crois que j'avais donné une fonction particulière. Laquelle ? Euh... Non ce n'était pas, ce n'était pas... 1/t. Mais en tout cas c'était une fonction continue positive dérivable.*
93. C. Ce n'était pas 1/t ?
94. P. *Non ce n'était pas 1/t, on l'avait déjà fait. Mais là ils avaient du mal à, ils avaient du mal à comprendre comment gérer le cas h négatif. Parce qu'ils n'avaient pas la représentation de l'aire dans ce cas là. Il y eu des difficultés, Il y eu des difficultés au niveau de la gestion des inégalités (14min 30min). Quand ils ont fait des inégalités ils devaient diviser par h négatif. Ils ont eu tendance à oublier que h était négatif et donc on devait changer le sens etc. Donc c'est pour la mise en place de l'encadrement qu'ils avaient eu quelques difficultés. Mais à partir du moment où ça s'est mis en place, cela était très bien pour cette activité.*
95. C. Comment cela s'est terminé ?
96. P. *Mon activité ? A partir du moment où ils m'ont donné la conclusion. Ils ont fait eux-mêmes la conclusion.*
97. C. Qu'est- ce- qui t'a amené à procéder par étape en posant les questions ?
98. P. *Oui ce qui m'a amené à procéder comme ça, ce sont les antécédents. Les antécédents. Ça veut dire que quand je faisais des démonstrations en début d'année, je constatais, qu'il y avait une majorité d'élèves qui n'arrivaient pas à suivre. Les élèves n'ont vrai-*

ment pas cette culture de la restitution de connaissances, de la démonstration Ils n'agissaient pas en profondeur. J'ai même eu le temps, j'ai même eu l'occasion de faire des évaluations, d'évaluer certaines restitutions, certaines démonstrations. Pourtant je les ai avertis au préalable. Je leur ai dit que, « bon, vous avez cette démonstration ». Par exemple voilà. Je peux parler de cette démonstration. Voilà j'ai fait une évaluation par exemple sur cette propriété « si une suite U_n *est croissante et non majorée alors sa limite est plus infini ».*

99. C. Oui.

100.P. *On a un peu décortiqué, on l'a faite. Je leur ai même dit qu'ils auraient à restituer cette démonstration deux semaines après. Je ne leur fixe pas, j'essaie d'être souple, pour ne pas leur fixer une date (16 min 30). Puisque sinon ce serait un apprentissage par cœur. Et là j'ai constaté que la moyenne a été très basse. Au niveau de cette évaluation du ROC la moyenne a été très basse Alors moi je me suis dit que pour les autres situations il faudrait absolument que je décortique, que je planifie la chose et que j'intervienne. Par exemple, j'essaie de créer une émulation. Je ne sais pas si j'ai répondu.*

101.C. Ça va j'ai compris. Qu'attends- tu des élèves après avoir fait cette démonstration ?

*102.*P *Qu'est ce que j'attends ? J'allais dire, j'attends qu'ils puissent la restituer au besoin, tu vois ? Par exemple cette démonstration je la contextualise, qu'ils arrivent à la reconnaître dans un contexte bien particulier*

103.C. Est-ce que tu attends un travail à la maison ?

*104.*P. *Au sujet de cette démonstration ?*

105.C. Au sujet de cette démonstration.

106.P. *Non, pas nécessairement. Pas nécessairement. Non je poursuis le cours de toutes manières après il y a des conséquences quand même. Il y a l'intégrale par primitivation. L'existence de la primitive. Donc il y a des conséquences. Mais ce que je veux dire c'est que je leur ai bien précisé que cette démonstration à un moment donné, elle reviendra, elle reviendra en évaluation.*

107.C. D'accord

108.P. *Ce que je veux, voilà ce que j'attends d'eux, c'est qu'ils l'entretiennent, tout en sachant à un moment donné que je vais l'utiliser d'une manière ou d'une autre.*

109.C. Comment choisis- tu les démonstrations que tu fais au tableau ? Est que tu fais toutes les démonstrations ? Est-ce que tu fais des choix ? En fonction de quoi ?

110.P. *En fonction du programme officiel, les exigences du programme officiel. Il y a des démonstrations que je n'ai pas nécessairement faîtes, pour l'instant en tous cas (19min) Par exemple, il y a une démonstration, voilà : le principe de la démonstration du théorème de la dérivée d'une fonction composée. Là j'ai fait un peu l'impasse dessus, compte tenu de la difficulté de certains élèves.*

111.C. Tu as fait toutes les démonstrations qui sont…

112.P. *Voilà, je ne leur ai pas donné pour l'instant, je ne leur ai pas donné, j'ai essayé de répertorier un peu les démonstrations. Et à un moment donné, par exemple pendant les vacances, maintenant je peux leur donner le document.*

113.C. Entier de toute l'année ?

114.P. *Non, non, je leur donne… Le document, porte sur les démonstrations qui ont déjà été faîtes. Cela c'est un document ancien qui possède toutes les démonstrations C'est ce que je vais travailler ce soir, je vais repérer les démonstrations qui ont été faîtes de façon à ce qu'ils n'aient pas à aller chercher dans leur cahier. Ils arrivent à les cibler davantage.*

115.C. Après avoir fait ce travail là, tu leur donnes toutes les démonstrations que tu leur as faîtes.

116.P. *Voilà, je leur rappelle même si les démonstrations ont été faites sur leur cahier. Ils n'auront peut être pas, je ne sais pas. Est ce qu'ils prendront l'initiative d'aller chercher ? Retirer la démonstration de son contexte pour essayer de… Tu vois ! Je leur donne quand même les démonstrations, de façon à ce qu'ils soient bien conscients de l'importance du fait de les connaître.*

117.C. Dans quelles parties du programme se situent les démonstrations que tu fais dans tes classes ? (20 min 30)

118.P. *Dans quelles parties du programme ? Euh explique.*

119.C. Est-ce que ça se situe dans toutes les parties, Y a-t-il partout des démonstrations?

120.P. *Oui c'est assez diversifiée par exemple, il y en a en probabilité conditionnelle non il n'y en a pas, en probabilité conditionnelle c'est clair il n'y en a pas. Dans le domaine des suites c'est intéressant. Puisqu'ils ont déjà été un peu initiés à la démonstration dans le chapitre des suites, depuis la première. Là j'ai fait pas mal de démonstrations.*

121.C. Dans la partie géométrie, y a-t-il beaucoup de démonstrations?

122.P. *Dans les nombres complexes ou dans la partie géométrique ?*

123.C. L'espace par exemple.

124.P. *L'espace. On va commencer l'espace cette semaine, je n'ai pas encore fait de démonstration.*

125.C. En fait as-tu fait des démonstrations dans les complexes ? (21 min 30)

126.P. *Dans les complexes oui.*

127.C. Comment favorises-tu le travail de l'élève à la maison sur les démonstrations ?

128.P. *J'ai constaté qu'en seconde les élèves arrivaient davantage à gérer une démonstration lorsque tu la schématisais. Ils arrivaient à se faire une représentation de la démonstration, ce n'était plus un apprentissage par cœur, ils retenaient la structure de la démonstration et avec leurs propres mots ils arrivaient à la refaire. J'ai retenu le même système. Je leur dis : « Qu'est ce qui ont ? De quoi je dispose ? » ça c'est l'énoncé, les prérequis. Ensuite « quels sont les moyens mis en œuvre ? ». On met en évidence les moyens mis en œuvre au travers de la démonstration. Et après à quelle conclusion j'aboutis ? Donc on essaie de décomposer la démonstration.*

129.C. Qu'évoque pour toi les mots restitution organisée de connaissances ?

130.P. *Pour moi ça évoque les mots qui s'y rattachent c'est rigueur, profondeur. Il faut de la profondeur pour pouvoir restituer et structure et organisation. Ce sont les mots qui s'y rattachent. La restitution de démonstration de cours, ce n'est pas une restitution par cœur, mais c'est une restitution structurée de la démonstration de cours.*

131.C. Est-ce que l'algèbre est un cadre où tu fait des démonstrations (25 min)

132.P. *En terminale c'est plutôt en analyse, en algèbre on en fait dans le cadre de la résolution du second degré dans C mais elles ne sont pas exigibles en ROC.*

2.5.2 Professeur 8

1. C. Je te rappelle que cet entretien peut rester privé. Nous allons essayer d'évoquer si tu le veux une démonstration que tu as faite dans ta classe. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans ta classe ?
2. P. *Il y a plusieurs chapitres, des démonstrations sur des complexes.*
3. C. Une seule démonstration.
4. P. *Il y en a une qui me vient à l'esprit démontrer la propriété* $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$=arg$\left(\frac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right)$
5. C. Comment as-tu procédé ?
6. P. *En général j'envoie un élève au tableau, un élève moyen. Les élèves interviennent, moi je donne des pistes. Pour ce type d'exercice il faut donner beaucoup d'aides malgré*

le prérequis. Je dois gérer les bons élèves qui arrivent facilement. Les autres, ils utilisent facilement une propriété qui ne fait pas partie du prérequis (5min).

7. C. Dans ce cas là, est ce que tu te souviens des pistes dont ils sont parties ?
8. P. *Par exemple, on donne une propriété de l'argument. Il me semble dans l'exercice argument d'un produit argument de z fois z' et ils utilisent argument d'un quotient argument de z sur z' et cela vient après.*
9. C. As-tu déjà parlé de l'argument de z sur z' dans le cours ?
10. P. *Oui.*
11. C. Ça se situe après le cours sur les complexes ?
12. P. *Après le cours sur les complexes, juste après ou un mois après.*
13. C. Comment as-tu choisi ton élève ?
14. P. *Je m'attache à ne pas choisir parmi les trois meilleurs. J'avoue je n'ai pas trop vu l'influence du choix de l'élève. En général je demande qui veut passer au tableau. En général ce sont des élèves qui sont assez dynamiques, je ne vais pas envoyer quelqu'un d'assez réservé…*
15. C. Y-a-t-il un petit noyau ?
16. P. *Il y a un petit noyau : une dizaine d'élèves. Quand c'est une démonstration comme ça, cela tourne autour de ce petit noyau.*
17. C. As-tu prononcé le mot ROC ?
18. P. *Je ne le dis pas au début, on va faire une propriété. Et une fois qu'on l'a faite cette démonstration fait partie des ROC. Et là en général ils encadrent.*
19. C. Quand as-tu parlé des ROC ?
20. P. *Dés le premier jour, j'explicite la notion de ROC (10 min).*
21. C. Comment fait l'élève qui était au tableau pour prendre la démonstration ?
22. P. *Il recopie à la suite.*
23. C. Comment as-tu procédé ?
24. P. *Ça s'est relativement bien passé mais on a été un peu directif.*
25. C. Sur quoi as-tu été directif ?
26. P. *Surtout sur le prérequis. Bien faire comprendre aux élèves que la démonstration se fait dans le cadre du prérequis, c'est là où les élèves ont du mal.*
27. C. Les bons, que font-ils ?
28. P. *Dans ce cas particulier, je canalise parce que les bons, ils voient tout de suite en règle générale. Il y a quand même des ROC où ça peine un petit peu. Il y a une ROC*

pour démontrer ln(a/b)=ln a – ln b et le prérequis ln 1=0 et ln(ab)=lna +lnb. Je l'ai donnée en devoir maison. Et là ils peinent. La première étape, pour utiliser le prérequis en faisant ln(a/a) pour trouver ln(1/a). Ils ne voient pas l'astuce, un seul a trouvé. Après ça passe.

29. C. Comment as-tu dit ça ?
30. P. *J'ai dit : « je donne l'astuce » (rire) car effectivement je trouve qu'il y a toujours une petite astuce à avoir dans la première question du ROC. Si l'élève le fait plusieurs fois il se rappelle, mais pour la première fois, c'est une astuce.*
31. C. Dans quelle partie du programme se situent les démonstrations que vous faites dans vos classes ?
32. P. *Je ne fais pas toutes les démonstrations de cours. Comment je les choisis ? Je n'ai pas véritablement de liste précise. A vrai dire je me suis entretenu avec un autre professeur car il s'était penché là-dessus. On travaille en collaboration même jusqu'aux devoirs maison et devoirs en classe. On travaille ensemble cette année (10 min).*
33. C As-tu posé des ROC en devoir maison ?
34. P. *Non en classe.*
35. C. Ont-ils l'occasion de préparer les ROC à la maison ou c'est toujours en classe ?
36. P. *Toujours en classe, mais on en a fait beaucoup en classe, une bonne quinzaine.*
37. C. En évaluation combien en as-tu posé ?
38. P. *Tout le temps dans les sujets de quatre heures. Disons trois ou quatre dans l'année. Mais les élèves ne le font pas. Je leur dis de se pencher là dessus au départ mais après d'essayer d'avoir le maximum de points dans les autres exercices*.
39. C. Reviens-tu au tableau à la fin de la démonstration ?
40. P. *Comme j'interviens beaucoup dans la démonstration, je dis ce qu'il faut écrire, je suis au fond de la classe, j'essaie de ne pas aller au tableau. La disposition de classe est particulière, mon bureau est derrière les élèves, au fond derrière. Je ne reste pas toujours au fond, je circule mais je préfère cette disposition là.*
41. C. As-tu une disposition particulière au tableau ?
42. P. *Pour les ROC comme l'élève veut*. (20 min)
43. C. Fais-tu d'autres démonstrations ?
44. P. *Non on a une bonne liste ça suffit*.
45. C Quelle aide donnes-tu à tes élèves pour favoriser l'apprentissage de ta démonstration ?

46. P. *Je me concentre surtout sur la méthode de la première question. Je me dis que c'est cette méthode qu'il faut retenir. Par exemple pour les logarithmes et les fonctions associées : la méthode de la différence. Il faut montrer que la dérivée est nulle et donc tu as une fonction constante et donc tu as une égalité de fonction. Je reviens à la fin il faut penser à ln(a/a).*
47. C. Combien d'élèves passent tableau pour exposer cette démonstration ?
48. P. *Plus d'un, mais ce sont des méthodes qui reviennent au moins trois fois pour le logarithme. Je pense que s'ils ont cette méthode à l'examen, ils vont savoir la reconnaître. Mais il y a quand même des situations qui sortent de la liste donnée aux élèves. J'ai revu quelques sujets de 2006, je les appelle des ROC fabriquées. On donne un prérequis et c'est très difficile à préparer. Ils n'y a que les très bons élèves qui y arrivent. Je n'ai pas voulu aujourd'hui leur donner de liste car si ça sort juste à côté ils ont du mal. (25min)*
49. C. Le par cœur te semble t-il nécessaire ?
50. P. *Non pas par cœur. Je sais que certains collègues le disent mais moi non.*
51. C. Comment la restitution de connaissance a modifié tes pratiques ?
52. P. *Cela a modifié les pratiques dans la mesure où je dois faire bien plus attention à la démonstration. En tous cas à certaines plus qu'à d'autres. Avant on en faisait mais on en tenait moins compte, c'était plus dirigé vers les exercices, sous la forme de travaux dirigés. Tandis que là il faut faire très attention.*
53. C. Qu'évoque pour toi les mots restitution organisée de connaissances ?
54. P. *C'est une démonstration guidée.*
55. C L'algèbre est elle pour vous un cadre où vous faites des démonstrations ? Comment ?
56. P. *Dans les complexes oui*.

2.6 Professeur de métropole

1. C. Pouvez-vous me donner une démonstration que vous faites dans vos classes ?
2. P. *Par exemple la démonstration que j'ai faite hier. Je leur ai démontré que la fonction logarithme est dérivable et que sa dérivée c'était 1/x.*
3. C. Comment procédez-vous ?
4. P. *J'ai fait la démonstration au tableau mais en faisant intervenir la classe en leur demandant ce qui faudrait faire etc.*
5. C. Est-ce que les élèves participaient beaucoup ?

6. P. *Oui enfin, non il n'y avait que les bons qui participaient. Il n'y a que les bons élèves qui participent.*
7. C. Et ?
8. P. *En plus je leur ai dit que cela ne servait à rien pour le bac cette démonstration. Qu'on ne pouvait pas leur demander car à un moment donné on est obligé d'admettre que la fonction réciproque est continue et on ne le démontre pas ça. Donc on ne peut pas leur demander une démonstration où on admet un petit bout.*
9. C. Oui d'accord c'est pour… ?
10. P. *Je l'ai faite c'est uniquement pour leur montrer qu'en maths tout se trouve. C'est un peu leur faire comprendre ce que c'est que faire des maths.*
11. C. D'accord qu'attendez vous des élèves après cette démonstration ? (…)
12. P. *A plusieurs niveaux on peut avoir des retombés. Déjà le plus petit niveau, s'ils ont besoin de demander qu'une fonction est dérivable ils ont peut être l'idée de penser au taux d'accroissement. C'est le minimum qu'ils puissent retenir de ça. Mais je pense que c'est plutôt l'esprit des maths c'est-à-dire qu'il faut tout prouver. On ne peut pas faire des maths sans prouver.*
13. C. D'accord.
14. P. *Tu ne prouves pas, tu ne fais pas de maths. Il faut qu'à chaque fois qu'on dit quelque chose, il faut que cela soit prouvé sinon on ne fait pas des maths.*
15. C. Évaluez-vous cette partie de votre enseignement ?
16. P. *Celle là ? Non. Mais j'en ai déjà fait d'autres que j'ai déjà évaluées. En général j'évalue uniquement celles qui peuvent tomber au bac. D'après ce que j'ai commencé à comprendre, celles du bac, elles sont très courtes, celles qui sont très courtes, en fait. Elles sont assez courtes et ça repose sur une astuce. Tu connais l'astuce, c'est rien de faire cette démonstration, par exemple quand tu veux démontrer que l'argument du quotient c'est la différence des arguments.*
17. C. Oui
18. P. *Tu admets que l'argument du produit est la somme des arguments. Là, c'est une démonstration courte. Je l'ai vu apparaître plusieurs fois dans les annales enfin plusieurs fois non, je l'ai vue. Cette démonstration courte avec la petite astuce, ça revient plusieurs fois dans les annales.*
19. C. Donc en fait la démonstration que tu fais, sauf celle d'y hier sont plutôt des démonstrations utiles pour le bac.

20. P. *Non je démontre tout (rire)*
21. C. D’accord (rire)
22. P. *Je démontre tout.*
23. C. Qu’attends-tu des élèves par rapport à toutes ces démonstrations ? Rappelles-tu à chaque fois que cette démonstration peut être demandée au bac ?
24. P. *Dès le début d’année, je leur ai dit que tout peut être demandé. Il faut qu’ils sachent prouver.*
25. C. Comment les aides-tu pour qu’ils apprennent leur démonstration ? As-tu un moyen ?
26. P. *La seule façon de leur apprendre : c’est qu’ils la fassent. Donc, quand je leur fais en classe, je suis obligé, moi je suis obligé de la faire, sinon on passe beaucoup de temps. J’en ai fait quelques une où je leur ai distribué une feuille où c’était un peu guidé pour que ce soit eux qui la fassent. Je pense que si c’est le prof qui la fait ils ne retiennent pas grand-chose. Il n’y a que si c’est eux qui la cherchent. Je la donne aussi en D.M. des questions de cours.*
27. C. Ah, d’accord en devoir maison.
28. P. *A chaque fois c’est des questions de cours guidées, parce qu’il y a deux sortes de question de cours au bac. En fait, ou elles sont petites comme je disais tout à l’heure, ou il y a juste à démontrer normalement. Elles ne sont pas longues, ou alors les grosses démonstrations de cours, mais là c’est tout un exercice guidé.*
29. C. Ah oui d’accord.
30. P. *Par exemple, ils avaient posé à Pondichéry il y a deux ans je crois, que l’aire c’était une primitive de la fonction l’aire sous courbe, l’aire c’était une primitive de la fonction. Avant c’était guidé tout le long parce que c’est trop long pour demander à des élèves.*
31. *C. Comment favorises-tu la mémorisation d’une démonstration* ?
32. P. *Non je ne vois pas (rire). Je leur dis l’idée directrice. C’est ça. Il n’y que ça à retenir normalement le reste c’est des détails .Tu as la route il n’y a qu’à la suivre. De toute manière moi j’ai l’impression que qu’il n’y a que les bons qui pourront faire des restitutions parce qu’ils sont capables de restituer, les autres ou les autres ont dans leur calculatrice hein. Car sur le bac de l’année dernière il y en avait plein qui avaient la calculatrice. Notre sujet là, comme c’était une classique, ils l’avaient dans la calculatrice et ceux qui ont su faire je suis sûr que c’est parce qu’ils l’avaient dans la calculatrice. C’est vraiment une exception un élève qui peut refaire une question de cours. Il y a une prof je lui envoie plein d’élèves, elle les prend en cours particulier, elle est à la retraite*

et elle leur a donné je ne sais pas combien de démonstrations de cours et même c'est elle qui les tape et puis après elle leur met sur leur calculatrice.

33. C. Parce que ça te parait très difficile la question de cours ?
34. P. *Mais déjà ils ne sont pas habitués et c'est quand même très difficile pour eux. Par exemple, celle que j'ai demandée une question de cours et j'ai fait exprès, c'est-à-dire que j'avais démontré d'une certaine façon mais là, on donnait d'autres prés requis et on conseillait une autre méthode et bien il y en a eu très peu qui ont réussi à le faire.*
35. C. Ah oui, donc ?
36. P. *Il y en a qui ont fait la méthode que j'avais donnée. Donc ils ont retenu la méthode que j'avais faite en cours pourtant elle n'était pas bien adaptée. Non, ils ne savent pas ils ne savent pas chercher. (10 min)*
37. C. Et comment leur apprendre aussi à chercher ?
38. P. *Mais je pense qu'il faut le faire très tôt. Très tôt, il faut leur faire comprendre la nécessité de démontrer et d'apprendre à chercher à avoir des idées. J'ai essayé avec des secondes, de leur montrer que c'est utile de savoir le cours. C'est-à-dire je leur ai fait faire des exercices, mais à chaque fois j'ai demandé qu'ils me donnent la propriété qu'ils utilisaient. L'énoncé complet avec ses hypothèses et tout eh ben là carnage ! Aussi je crois le cours et c'est le cours complètement déconnecté de l'utilisation. Parce que ce qui m'a le plus surpris de mes élèves de TS, il parait qu'ils n'étaient pas des mauvais, mais ils sont incapables de chercher. Au bout de 3 secondes enfin dix secondes ils n'ont pas trouvé une idée, ils n'ont pas la solution parce que pour eux il n'y en a qu'une, ils n'ont pas trouvé la solution et ben c'est fini, ils ne cherchent plus.*
39. C. Donc en fait ils n'ont pas appris à chercher ?
40. *P. Ils ont à apprendre à avoir plein d'idées. Ça fait penser à ça, qui fait penser à ça, qui fait penser à ça et pourquoi ?*
41. C. Qu'évoque pour vous les mots restitution organisée de connaissances.
42. P. *Je le vois de deux façons l'évaluation du bac et la formation. C'est certain l'évaluation finale te fait faire des choses d'une certaine façon… Moi j'ai beau me dire qu'il faut que je les forme pour l'après bac, c'est quand même le bac qui prime. Elle te fait faire des choses d'une certaine façon... Moi je me souviens quand j'étais élève les démonstrations je ne les notais jamais sur mon cours. Je ne prenais que les théorèmes. Parce qu'on n'avait qu'à faire les exercices. Les démonstrations je savais que cela ne*

servaient à rien, je ne les notais pas. Je voulais savoir pourquoi c'était vrai. Comme cela ne servait pas, je ne la notais pas.

43. C. L'algèbre est elle pour vous un cadre où vous faites des démonstrations ? Comment ?
44. P. *Alors là je n'en sais rien.*
45. C. En quoi la restitution organisée de connaissances a-t-elle modifié ta pratique ?
46. P. *Déjà on démontre beaucoup plus en classe. C'est-à-dire, ça a un inconvénient, c'est qu'on passe beaucoup moins de temps à faire des exercices. On passe du temps à faire du cours. Ça c'est le côté négatif de l'histoire, mais moi le côté positif je trouve que c'est beaucoup plus intéressant parce qu'on ne fait plus du bachotage, on leur apprend à être intelligent parce que pour réussir une restitution de connaissances il faut vraiment réfléchir. Ça leur apprend à réfléchir. Parce que même dans les exercices j'essaie de leur dire « et pourquoi on a utilisé cette méthode ? Est-ce qu'on n'aurait pas pu utiliser une autre méthode ? ».C'est peut être comme ça qu'on leur apprend à avoir des idées, et… Cela va dans le sens où tu prouves tout, que tu t'entraines à raisonner. Et finalement quand tu réfléchis bien les élèves que tu as en terminale, combien y en a-t-il qui vont utiliser les résultats ? Aucun, peut être deux, trois même pas. Alors que si tu leur apprends à raisonner, à avoir un raisonnement bien structuré, c'est la seule chose qui serve.*
47. C. Oui d'accord.
48. P. *Pour eux, dés qu'ils ont une méthode ils sont contents, ils appliquent. Ils ne cherchent pas à savoir si on aurait pu utiliser une autre méthode, une autre méthode aurait été plus efficace. Du coup dés qu'ils ont un exercice qu'ils n'ont jamais vu, ils sont secs.*
49. C. D'accord
50. P. *Ou ils donnent les classiques et ils les ont sur la calculatrice, ou ils donnent les tordus et ils ne les font pas… Je leur dis l'idée directrice, c'est ça, il n'y que ça à retenir normalement, le reste c'est des détails .Tu as la route il n'y a qu'à la suivre… Pour les ROC, il a eu un virage entre 2005 et en 2006, il me semble que cette année il y avait plus de démonstration mais classique. Alors que l'année dernière il n'y avait plus de ROC. C'était tout tordu, c'était des machins qui sortaient d'on ne sait pas où. Ce n'était pas un exercice du tout. En 2006 c'était des prévisibles...* (15 min)

2.7 Enseignant d'IUFM

1. C. Peux-tu me donner une démonstration que tu as faite dans tes classes PLC ?
2. P. *Une démonstration quelconque ?*
3. C. un moment particulier
4. P. *Un moment particulier : toute application de E dans E où E est un espace affine de dimension supérieure ou égale à deux et qui transforme toute droite en une droite parallèle est une homothétie ou une translation. Ça c'est une démonstration particulière.*
5. C. Tu l'as faite directement au tableau ?
6. P. *Ha !*
7. C. Comment l'as-tu faite ?
8. P. *Ha ! en fait elle intervient à plusieurs endroits parce que tout ce qu'on fait est des choses qui sont à priori assez importantes. Donc ça intervient dans le cours lorsque je décide de parler des homothéties-translations, ce qui est le cas depuis quelques années, ou à l'oral, lorsqu'on l'a revoit après dans la préparation de l'oral. Au niveau de l'écrit actuellement c'est vrai que je la montre au tableau et on la travaille au tableau. Et je l'expose en posant des questions, mais ce n'est pas le but, ce n'est pas le but premier, c'est de comprendre la démonstration.*
9. P. Après avoir fait cette démonstration qu'attends-tu de la part des étudiants ?
10. C. *Déjà qu'ils retiennent le cours le résultat, qu'ils l'utilisent ensuite, en fait... C'est le problème du statut du cours dans la préparation du Capes. Il y a plusieurs façons de l'envisager et en plus je change assez souvent d'optique puisqu' on est en groupe restreint. Donc je dois m'adapter plus facilement aux demandes du groupe. Nous ne sommes que 8 ou 10, 8 pour le cours. Donc il est certain que, ce que j'attends déjà c'est qu'ils la comprennent, qu'ils repartent en ayant compris comment cela a fonctionné, les principes qui ont été à la base de la preuve pour pouvoir les réutiliser à l'écrit et pour pouvoir les réutiliser aussi lorsqu'ils auront à répondre aux questions orales. Donc déjà c'est comprendre comment on utilise les propriétés des homothéties translations ou bien comment on construit cette démonstration. Ensuite, c'est les comprendre point par point, bien comprendre dans le détail, de façon à être capable de décortiquer un peu, donner des indications très précises si on les demande, et de partir en sachant que c'est une caractérisation très importante des homothéties translations pour l'utiliser dans la suite dans les exercices.*

11. C. Ce que tu viens de me dire, est-ce que tu l'explicites auprès des étudiants ?
12. P. *Après avoir étudié les propriétés, des homothéties, des translations, on cherche des caractérisations et donc c'est à ce niveau qu'on place ce théorème.*
13. C. D'accord.
14. P. *Lorsqu'on envisage d'utiliser cela dans un cours structuré sur les homothéties translation c'est un théorème qui permet de dire qu'on peut affirmer beaucoup de chose à partir de peu de propriétés car il y a juste conservation d'une droite en une droite. (4min […], 5min 10)*
15. P. *Dans une restitution organisée de connaissances ma première réaction, mettre l'accent sur les fondamentaux, sur les capacités exigibles. Ensuite, deuxième réaction c'est lorsqu'on donne un exercice, on doit répondre à une question, on doit résoudre un problème ; là c'est un peu la même chose dans le sens où l'on doit répondre à une question Mais en même temps il s'agit, pour moi, de questions qui sont très importantes qui ont déjà été travaillées en cours et parfois en TD et... par conséquent ce sont des choses pour voir si ils ont compris* […]
16. M. Et dans ta pratique fais-tu souvent des restitutions organisées de connaissances ?
17. P. *Ben oui. D'abord on a été obligé parce qu'on devait avoir des tests d'évaluation initiaux et finaux dans le cursus étant donné le peu de réussite au Capes. Le Capes est un concours difficile, on peut le préparer sans le réussir. On fait néanmoins des progrès mais pour avoir un indicateur de progrès une solution possible c'est de commencer par un ROC, une ROC au début d'année et de terminer par une ROC à la fin. C'est très relatif, l'intérêt est très relatif parce que, en fait ce ne sont jamais les mêmes questions qui sont posées, ce sont les mêmes thèmes. Donc les résultats peuvent être différents, mais grosso modo on pourrait s'attendre à ce qu'ils y aient de meilleurs résultats à la fin de la préparation.*
18. C. Et l'année dernière as-tu posé une ROC au début et une ROC à la fin et qu'est ce que cela a donné ?
19. P. *Il y a eu des différences mais je n'ai pas les résultats ici. Il y a eu, en fait j'ai fait un indice 100 au début, pour le départ, je ne sais plus 120 ou 115, 120 ou 130 pour la ROC finale. Mais de toute façon on sait que c'est biaisé à la base. Cela peut être biaisé très facilement parce que j'intègre, à certain moment, je voudrais en intégrer plus, mais on n'a jamais le temps car le temps défile assez vite lorsqu'on travaille sur des exercices ou sur le cours, mais de temps en temps je me permets d'utiliser des questions, c'est nor-*

*mal, des questions dans le cours, ou après ou avant, qui sont en fait des questions qui seront posées lors des ROC. Je peux très bien pendant l'année, là je l'ai fait pour la ROC finale sur deux questions. Il y avait 8 questions ou 10 questions. Sur deux questions, en fait, j'ai reposé des questions qui ont été travaillées en TD. Comme par exemple(8min10), je sais pas par exemple , imaginons on donne une matrice 3 *3 et on demande de voir si il s'agit d'une matrice d'une similitude, des choses que l'on se pose quand on prépare le Capes et auxquelles on pourrait pouvoir répondre assez facilement si on est entrainé, si on a entendu la question et réfléchit plusieurs fois dessus. Ça permet de préparer à la fois l'oral et l'écrit parce que ça donne de bons reflexes pour débuter un bon travail à l'écrit et ça permet de réagir à l'oral ([…] 20 s) (9min)*

20. P. *Il est intéressant de penser à du rabâchage c'est-à-dire on raisonne d'autant… Pourquoi du rabâchage, on va critiquer, c'est de rabâchage, c'est comme les divisions ou les dictées il ne faut pas le faire, s'interdire c'est mauvais, rabâcher dans le sens positif, dans le sens où on va répéter les fondamentaux, retourner vers les fondamentaux de façon à ce qu'une personne qui est toute seule devant sa copie ou devant le jury puisse s'accrocher à des branches (10min 06) et répondre quelque chose sur des questions qui sont importantes. Donc ça c'est le but, il faut acquérir des automatismes et ces automatismes bien ma foi. […]*
21. P. *On peut se poser de tas de questions : « Qu'est ce que c'est le théorème de Fermat ? Si on ne se pose jamais la question bien ma foi Pour avoir des réflexes il faut se le poser assez souvent on l'oublie même si on le sait […]*
22. *S'accrocher à des branches c'est s'accrocher à ce qu'on connaît. Déjà il faut connaître quelques choses c'est certain, mais il faut surtout […] (12min06)*
23. *(15 min) Petit à petit ils arrivent à répondre à certaines questions parce qu'ils les revoient sur leurs parcours plusieurs fois. Il est certain que si l'on pose trois fois la question : « Qu'est ce qu'un espace affine ? » même si on ne sait rien répondre au début au bout de la troisième fois on a des reflexes, donc au niveau des reflexes après on pourrait dire que, si pour apprendre des reflexes , on est transformé en machine ou en animal savant, alors là je pense que c'est une mauvaise critique, dans le sens où les reflexes sont salvateurs et nous permettent d'aller plus loin dans le raisonnement. C'est un peu comme si on s'interdisait d'utiliser un dictionnaire pour pouvoir écrire en français. (16 min)[…]*

24. P. *Ou de cabri géomètre ou de travaux sur machine qui seraient lourd en investissement en temps, par contre tout ce qui serait utilisé mais en plus qui serait inutile dans la préparation d'un concours pour ce qui est de l'écrit du concours. Puisqu'il faut se mettre à la place du candidat qui sera devant une feuille pendant cinq heures et qui devra utiliser son brouillon, les outils de dessin et sa feuille et puis ses capacités, ils devraient être rédigés le plus rapidement possible. Il est proprement possible à partir d'un brouillon aussi sommaire soit-il d'y arriver. Cela ce sont les objectifs. Il est certain que l'utilisation d'un tableau ou des tableaux, s'il y en a plusieurs, est essentielle. L'utilisation du tableau comme brouillon par exemple ça c'est une première méthode, même dans le cadre d'un exposé qu'on pourrait appeler cours magistral lorsqu'il existe. Là, on pourrait revenir dessus car j'ai changé ma méthode dans des objectifs spécifiques parce que il y a eu d'autres objectifs on est en effectif réduit et puis c'était pour essayer de motiver les redoublants, pour les faire revenir en cours car sinon ils ne revoient pas le cours. On pourrait revenir dessus mais c'est une question différente. Mais ce que je veux dire dans le cadre d'un cours qu'on pourrait appeler magistral, j'utilise toujours une partie du tableau comme brouillon et l'utilisation de brouillon permet de donner les directions de recherche, ça permet de mémoriser le pourquoi, la façon dont on rentre dans une démonstration. Pouvoir écrire n'importe quoi sur une partie d'un tableau ou sur un brouillon papier c'est s'autoriser à imaginer, à dire des choses, à commencer des chemins, commencer des raisonnements qui n'aboutiront peut être pas mais qui nous donnerons peut être la solution. Cela c'est une façon de mémoriser, c'est de voir la multiplicité des choix papier et puis utiliser le brouillon c'est aussi la capacité de faire des dessins à main levé. Parce que le premier dessin que l'on fait, il ne faut pas se leurrer avec ce que l'on peut entendre des fois : « Il faut toujours faire des dessins propres. » Bon c'est abusif ! Il n'y a pas de loi dans la matière. L'objectif ici étant de réagir rapidement à une situation ([…] 1min 19min 10)*
25. C. Depuis combien de temps utilises-tu cette organisation au tableau ? ([…] 1min30 20min 33)
26. P. *A quoi ça peut servir l'utilisation de document accompagné comme Moodle ? Un peu tout, je vois ça comme un gros bouleversement donnant surtout des possibilités différentes. Cela ne veut pas dire que le cours magistral linéaire tel qu'il était envisagé était mauvais. Cela veut dire qu'on a le choix entre plusieurs solutions. Comme on est en effectif réduit, on peut choisir la solution suivant les personnes qui sont présentes. Il y a*

quelque chose d'important quand même sur l'utilisation des TICE de Moodle : on peut changer complètement son cours. Je prends un exemple, j'exagère pour que l'on comprenne les deux pôles, on peut imaginer un professeur qui aime bien écrire tout au tableau, bien proprement quelque chose de linéaire et de bien compréhensible (21min 27).

3 Annexe 3 du chapitre trois, étude de site de diverses questions de baccalauréat

3.1 Dans le champ de l'analyse

3.1.1 Dérivée d'une puissance (Septembre 2007) ROC

3.1.1.1 Enoncé

Exercice 1*5 points*

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Dans cet exercice *n* désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P. Soit *f* la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^n$; alors *f* est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée sur **R** par : $f'(x)=nx^{n-1}$.

Q : Soit *u* une fonction dérivable sur **R** et soit *f* la fonction définie sur **R** par $f = u^n$; alors *f* est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

3.1.1.2 Remarques introductives

Nous recherchons les choses particulières, le terreau de cet exercice c'est-à-dire les parts de l'implicite présent dans cette activité.

A propos de la première phrase, « La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. », notons que l'utilisation de cette formule est en principe assujettie à la vérification de ses conditions de validité. Or le concepteur indique « le supposé connu » sans le rappeler explicitement : il ne mentionne pas que « le produit de deux fonctions dérivables sur **R** est dérivable » alors qu'il l'explicite dans la question. La conception de ce prérequis est donc plus proche de celle d'une indication que de celle du prérequis.

Dans la deuxième question, le concepteur désigne la fonction u^n par *f* comme dans la première question. Ainsi il nomme deux objets conceptuellement différents (une fonction et une composée de fonctions) de la même manière. Ce fait semble indiquer qu'il ne désire pas que le résolveur utilise la démonstration du cours pour contredire cette deuxième affirmation.

3.1.1.3 Diverses solutions

1) Première question

P. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=x^n$; alors f est dérivable sur **R**, de dérivée f' donnée sur **R** par : $f'(x)=nx^{n-1}$.

Première technique *:* On utilise un calcul proche des méthodes de calcul de Leibnitz ou Newton utilisant la formule du binôme de Newton pour déterminer le taux d'accroissement. On a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}-x^n}{h}=\frac{x^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}-x^n}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}}{h}=\frac{h\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1} x^{n-k}}{h}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}=\binom{n}{1}x^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}$$

Or $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}$ tend vers zéro si h tend vers zéro.

On en déduit facilement le résultat.

Deuxième technique : la récurrence

Pour n égal à 1 la proposition est vraie. En effet d'une part $f'(x)=1$ et d'autre part $1x^0=1$.

Supposons la proposition vraie au rang n et montrons la au rang n+1. On écrit $f(x)=x^{n+1}=x^n.x$

Les deux fonctions $x\mapsto x^n \; et \, x\mapsto x$ sont dérivables sur **R**. On utilise alors le prérequis : f est dérivable et $f'(x)=nx^{n-1}.x+x^n.1=(n+1)x^n$.

2) Deuxième question

On donne la démonstration de cours du théorème sur la dérivée d'une fonction composée. On a alors comme conséquence que $f'=n\,u^{n-1}u'$. La fonction u est quelconque, on obtient une contradiction du résultat en prenant une fonction dont la dérivée est différente de la fonction constante égale à 1. Par exemple $u=exp$.

Variante

Contre exemple $u(x)=1$.

Remarquons que l'équation différentielle $y'=1$ a pour solution les fonctions affines f de la forme $f(x)=x+k$ où k est une constante réelle. Il est donc facile de donner un contre exemple.

3.1.1.4 Construction du site

Nous soulignons aussi que le concepteur utilise la notation u^n donc une opération dans une algèbre de fonctions et aussi l'égalité dans ce même ensemble. L'ensemble de nombres en arrière plan de la question P. est l'ensemble des réels. La deuxième se place dans l'ensemble des fonctions de la variable réelle.

Substrat : choses singulières	Objets	Techniques	Concepts (2)	Concepts(3)
Assertion Vraie Assertion fausse Démonstration Stratégie Contre exemple Démonstration	**N** **R** **Puissance** ↓ **produit** ↓ **fonction dérivable** **dérivée** ↓ **fonction polynôme** opération dans l'ensemble des fonctions	**(R,+,.) corps** **Récurrence** Binôme de Newton	Axiome de Péano Algèbre des fonctions dérivables	**N, R** $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$

3.1.1.5 Discussion

La technique 1 associée à la première question n'utilise pas l'indication du prérequis elle est donc hors contrat. Dans le site le mot en gras et les flèches représentent le chemin suivi par le résolveur. La formule à démontrer fait partie du programme de première S.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Dérivée des fonctions usuelles: $x \to x^{\mathrm{n}}$, $x \to x^n$, $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$		On pourra admettre les dérivées des fonctions sinus et cosinus.

Dans l'introduction aux programmes de première et terminale S on mentionne que : « *Le raisonnement par récurrence relève de la classe de terminale* ». Ainsi, seule une induction permet d'argumenter : pour n=1 c'est vraie, pour *n*= 2 c'est vrai, pour *n*=3 on peut le démontrer à partir de la formule de la dérivée du produit, pour *n*= 4 aussi donc c'est vrai pour tout *n*. La seule démonstration possible à ce niveau est d'utiliser le principe de récurrence qui n'est pas au programme de première. Cette ROC permet une révision des notions de première en lui donnant du sens grâce à un principe de terminale, elle a donc sa raison d'être. La recherche du contre exemple ne devrait pas poser de problème et il reste essentiel dans la formation d'un élève.

L'étude du site permet d'utiliser cette révision dans un autre contexte : il pointe donc l'astuce $x^{n+1}=x^n.x$ (définition de la puissance d'un nombre) en mettant la puissance au centre et rappelle l'obligation d'apprendre les formules avec leur hypothèse. En sachant cela cet exercice reste une bonne vérification de l'aptitude à utiliser le raisonnement de récurrence.

3.1.2 Suite croissante non majorée DC (Démonstration de cours)

3.1.2.1 Introduction

Le sujet de cette DC n'est pas un outil pour résoudre un exercice classique. Ainsi la DC vise à faire vivre un théorème qui n'existerait pas sans elle. Ce théorème est une illustration d'un critère fondamental de convergence des suites. Il est le fruit d'un questionnant des hypothèses du théorème de convergence monotone : toute suite croissante majorée converge. Cette notion n'est pas présente dans les programmes du secondaire de la décennie 1992/2002. Son habitat se situe entre les axiomes du corps des réels et les suites de Cauchy avant le théorème de Bolzano Weierstrass (De toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente). Ainsi la DC renait dans l'écotone entre le secondaire et l'université, avec deux démonstrations possibles, une faible dans l'écotone avec des conditions d'existences fragiles (ou faibles), l'autre, ordinaire dans l'écosystème universitaire.

3.1.2.2 Enoncé de la Réunion de juin 2005

Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

«Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel *A*, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à *A* ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

3.1.2.3 Remarques introductives

Le sujet débute par le passage d'un « pour tout réel A » à « pour un réel A arbitrairement choisi ». Ce passage non explicite est réalisé par l'élève-résolveur par mimétisme. Il fait ainsi partie des choses, objets protomathématiques. L'auteur du sujet aurait pu écrire « pour tout réel A donnée » dans ce cas là le sujet comporterait moins de connaissances implicites.
L'IREM de Strasbourg précise[198]

> *La définition de l'exercice n31 « Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».*
>
> *D'autre part, bien que la formulation des quantificateurs en langage « naturel » entraîne un niveau de complexité linguistique incompressible, les définitions qui les utilisent peuvent être exprimées de différentes manières dont l'expérimentation nous apprend qu'elles ne sont pas perçues comme équivalentes.*
>
> *Par exemple, la définition suivante d'une suite tendant vers $+\infty$:*
>
> *« Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ signifie que : pour tout réel A arbitrairement choisi, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les un sont supérieurs à A », bien qu'équivalente d'un point de vue sémantique à la définition de l'exercice n° 31 ne l'est pas du point de vue de l'apprenant.*
>
> *De nombreux tests et expérimentations nous ont montré que, même en DEUG, ces difficultés ne sont pas dépassées.*

[198] *http://irem2.u-strasbg.fr/spip/article.php3 ?id_article=103.*

> *Or la restitution organisée des connaissances se place à un niveau nettement plus élevé. Restituer des connaissances nécessite non seulement d'avoir compris les définitions et les démonstrations du cours, mais en plus de savoir les mémoriser, autre type d'exercice dévalorisé depuis des années par l'Education Nationale elle-même et auquel les lycéens ont donc été peu préparés.*
>
> *Les restituer de façon organisée exige en plus de savoir les réinvestir, les reformuler, les transformer et les intégrer à des démonstrations.*
>
> *Il semble que cela n'est accessible qu'à un très petit nombre d'élèves de terminale S ».*

Une autre formulation de la question pourrait être : « Montrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$ ». Cette formulation montre deux choses : la suite diverge et elle diverge vers plus l'infini. Pour montrer que la suite diverge, il suffit d'utiliser la contraposée de la propriété « Si une suite converge, elle est bornée ». Le théorème sous jacent est le suivant « Toute suite croissante a une limite, si majorée elle converge sinon elle tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$). »

3.1.2.4 Les démonstrations en accord avec l'IREM

1) Niveau « terminale + »

Soit A un réel fixé (quantificateur); la suite (u_n) étant non majorée, il existe un naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$ (définition d'une suite non majorée). Or la suite est croissante donc pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n \geq u_{n_0}$ (définition d'une suite croissante). D'où pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n > A$ (transitivité et antisymétrie de l'inégalité).

On a donc montré que, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A c'est à dire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

2) Niveau « terminale »

Dire que (u_n) est non majorée signifie que pour tout réel A arbitrairement choisi, il existe un réel p tel que $u_p > A$. La suite est croissante donc pour tout n supérieur à p on $u_n \geq u_p$. Donc pour $n \geq p$, $u_n > A$. C'est-à-dire que l'intervalle$]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Ainsi la suite (u_n) tend vers $+\infty$

3.1.2.5 Construction du site

Nous avons recherché dans la première remarque une partie des choses particulières de cette DC. Nous les énumérons : équivalence, quantificateur, antisymétrie, transitivité d'une inégalité, stratégie, démonstration.

Les connaissances de cours présentent dans cette DC sont les objets du site : équivalence, quantificateur, antisymétrie et transitivité de la relation d'inégalité. Les mots clefs sont au nombre de quatre : suite et trois définitions (définition d'une suite croissante, définition d'une suite non majorée, définition d'une suite tendant vers $+\infty$). Elles sont des connaissances utiles dans ce DC. Nous avons ainsi pour objets particuliers du site mathématique local : la notion de suite, de suite tendant vers plus l'infini, de suite croissante et de suite non majorée.

La technique associée à ces objets est la gestion d'inégalités. Une difficulté supplémentaire est liée à la présence d'inégalités strictes et larges, mélange que le résolveur doit gérer. (Le changement d'inégalités strictes en larges ne permet pas d'établir la solution.) La technologie est le critère de convergence de suite monotone. La théorie est la topologie, qui permet d'unifier toutes les notions de limites en une seule, via les voisinages : "Pour tout voisinage de + ∞ dans R, il existe un voisinage de +∞ dans N tel que...". A ce moment, la suite qualifiée de divergente vers + ∞ (ou -∞), se met à converger vers +∞ (ou -∞) : ce nouveau "diabolus in mathematica" peut être relié à l'obstacle épistémologique présent ici, qu'on retrouve dans l'usage du même symbole limite dans tous les cas. (convergence vers l réel, divergence vers infini). Et donc, relié à l'obstacle pédagogique classique qui en découle: que dire à un élève qui dit : « mais monsieur la suite converge vers infini. »

Remarque Voila comment on peut gérer une relation de transitivité intercalant une inégalité larges, id est

$$\begin{cases} x > y \\ y \geq z \end{cases} \Rightarrow x > z$$

Méthode 1 : On a $x > y \Rightarrow x \geq y$. Donc, par transitivité de l'inégalité large, on a $x \geq z$ Or, si on suppose $x = z$, on a $y \geq x$ (hypothèse $y \geq z$) et l'antisymétrie de l'inégalité large donne $y=x$.

Méthode 2 : On part de l'équivalence

$$\begin{cases} x > y \\ y \geq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y) > 0 \\ (y-z) \geq 0 \end{cases}$$

$$x - z = (x-y) + (y-z)$$

$$(x-y) > 0 \Leftrightarrow (x-y)+(y-z) > (y-z) (\textit{compatibilité de l'ordre avec la structure de groupe})$$

$$(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow (y-z)+(x-y) \geq (x-y)$$

$$or \begin{cases} x - z = 0 \\ (x-z) > (y-z) \end{cases} \Rightarrow 0 > y - z$$

On conclut en utilisant la distributivité de la loi $\leq$.

3.1.2.6 Le site de la DM

<u>Substrat : choses</u>	<u>Objets</u>	<u>Techniques</u>	<u>Concepts (2)</u>	<u>Concepts(3)</u>
Equivalence Quantificateur Antisymétrie Transitivité d'une inégalité Stratégie Démonstration	Réels $+\infty$ Inégalité Suite Suite tendant vers plus l'infini Suite croissante Suite non majorée.	Gestion d'inégalités	Relation d'ordre compatible sur le groupe (**R,+)**	**R** corps totalement ordonné Topologie $\bar{R}$

Cette démonstration de cours utilise peu de techniques sophistiquées mais que le substrat est composée de choses essentielles dans l'analyse et non au programme du cycle. Cette particularité indique la difficulté à élaborer un prérequis qui évacue l'importance du substrat.

3.2 Champ de l'algèbre géométrie

3.2.1 Rotation et nombres complexes non nuls. Exposition des connaissances

3.2.1.1 Enoncé

Baccalauréat Série S – Pondichéry – Avril 2007

Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit *R* la rotation du plan de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesureθ. L'image par *R* d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

1) $R(\Omega) = \Omega$

2) pour tout point *M* du plan, distinct de Ω , l'image *M*' de *M* est définie par Ω *M*' = Ω *M* et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$

On rappelle que, pour des points *A* et *B* d'affixes respectives *a* et *b*,

$$AB = |b - a| \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AB'}) == \arg(b - a)\ [2\pi].$$

Question : Montrer que les affixes *z* et *z*' d'un point quelconque *M* du plan et de son image *M*' par la rotation *R*, sont liées par la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

3.2.1.2 Les différentes méthodes

Technique 1

Pour $z = \omega$ d'après le pré requis $R(\Omega) = \Omega$ donc $z' = \omega$. Ainsi $z' - \omega = 0$ et $z - \omega = 0$. L'égalité est donc vérifiée.

Pour $z \neq \omega$, on a :

(Egalité de deux nombres complexes)

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow |z' - \omega| = |e^{i\theta}(z - \omega)|$ et $\arg(z' - \omega) = \arg(e^{i\theta}(z - \omega))\ [2\pi]$

(Module et argument d'un produit)

$$\Leftrightarrow |z' - \omega| = |e^{i\theta}|.|z - \omega)| \text{ et } \arg(z' - \omega) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(z - \omega))\ [2\pi]$$

(Module et argument de $e^{i\theta}$)

$$\Leftrightarrow |z' - \omega| = |z - \omega)| \text{ et } \arg(z' - \omega) = \theta + \arg(z - \omega))\ [2\pi]$$

(Rappel 2 sur la définition du module et de l'argument)

$$\Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}\right)[2\pi]$$

(Translation de l'égalité)

$$\Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta\ [2\pi]$$

(Propriété des angles)

$$\Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}) = \theta\ [2\pi]$$

(Relation de Chasles)

$$\Leftrightarrow \ \Omega M' = \Omega M \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$$

Technique 2

Si le point M est confondu avec le centre Ω de la rotation alors $z = \omega$. Mais dans ce cas, $R(M) = R(\Omega) = \Omega$ donc $z' = \omega$ également. D'autre part dans ce cas particulier, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est vérifiée (puisque les deux membres sont égaux à 0).

Supposons désormais que le point M est distinct du centre Ω de la rotation (donc $z \neq \omega$). On a :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}.$$

Puis

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg(e^{i\theta})$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta\,[2\pi]$$

Il faut et il suffit de montrer que

$\Leftrightarrow \ \Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$

Nous allons nous intéresser au nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$. D'une part $\Omega M' = \Omega M$, il vient $|z' - \omega| = |z - \omega|$, c'est-à-dire $\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$. D'autre part, modulo 2π, nous avons :

$\theta = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})[2\pi]]$.

$\theta = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}\right) + (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'})\ [2\pi]$ (Relation de Chasles sur les angles)

$= \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) - (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})\ [2\pi]$ (Propriété des angles)

$= \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega)$ (Définition de l'argument)

$= \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ (Propriété des arguments)

Ainsi, nous constatons que le nombre complexe $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et argument θ. D'où

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

En conclusion $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

3.2.1.3 *Site de l'exposition des connaissances*[199]

Substrat : choses	Objets	Techniques	Concepts (2)	Concepts (3)
Equivalence Quantificateur Disjonction des cas Démonstration Stratégie	Plan complexe point angle Module Argument affixe Exponentielle complexe Opérations dans **C** Rotation Centre point fixe Représentation géométrique Vecteur Forme complexe	Module AB Argument $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ Argument d'un produit de deux nombres complexes Module d'un produit de deux nombres complexes Module et argument de l'exponentielle complexe Relation de Chasles Produit dans **C** Translation d'une identité	Isométrie du plan similitudes nombre opérateur Isomorphisme d'espace affine La symétrie de l'égalité La substitution Les règles de simplification La commutativité de l'addition groupe	Quantificateur Egalité Disjonction des cas Espace affine Espace vectoriel module

[199] Un opérateur est une application d'un ensemble vers un autre qui à x associe x$a. Exemple : l'opérateur qui a x associe x+2

3.2.1.4 Conclusion

Le résolveur doit connaître le raisonnement par disjonction des cas pour séparer le nombre des cas possibles : partition est composée du point fixe et du reste. La forme complexe définie l'opérateur qui à z associe $e^{i\theta} z+ (1-e^{i\theta})\, z_{\Omega}$.

3.2.2 Similitude. DM

3.2.2.1 Enoncé

Amérique du nord juin 2005 exercice de spécialité

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que ;

AB=2 et AC= 1+$\sqrt{5}$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration de cours : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

3.2.2.2 Technique 1

On donne un triangle ABC donc on donne les points A, B et leur affixe z_A , z_B et $z_{C.}$ Comme (AB = 2) on a $A \neq B$ et de même AC= 1+$\sqrt{5} \Rightarrow (A \neq C)$ entraine $A \neq C$. Une application S est l'unique similitude directe transformant B en A et A en C si, et seulement si, il existe un unique *a* non nul et un unique *b* tel que

$$\begin{cases} z_A = az_B + b \\ z_C = az_A + b \end{cases}.$$

Or

$$\begin{cases} z_A = az_B + b \\ z_C = az_A + b \end{cases}. \Leftrightarrow \left(a = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_A}, b = z_A - az_B \right)$$

Remarquons que *a* existe $(A \neq B)$ et est non nul $(A \neq C)$

3.2.2.3 Remarques

Nous avons évité ici la contextualisation de la connaissance car elle n'est pas au centre de notre réflexion. Nous avons cependant organisé notre réponse en vérifiant les hypothèses de notre théorème de cours. Les objets présents dans ce sujet sont : le plan orienté, un triangle, la distance, les angles, la démonstration et les similitudes directes. Les techniques associées sont la séparation, l'isomorphisme, la forme complexe (existence et unicité), le système de deux équations à deux inconnues, la recherche de solution.

4 Annexe 4 de la ROC en géométrie du chapitre 3

Annexe ROC en géométrie :

Programme de TS de 2002

Produit scalaire dans l'espace :

Rappels sur le produit scalaire dans le plan. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace. Propriétés, expression en repère orthonormal.	Expression en repère orthonormal de la distance d'un point à une droite dans le plan. Plan orthogonal à un vecteur passant par un point. Equation cartésienne en repère orthonormal. Expression de la distance à un plan. Inéquation définissant un demi-espace.	On généralisera aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan; à cette occasion, on présentera la projection orthogonale sur une droite ou sur un plan.

Droites et plans dans l'espace :

Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace. *Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion*	*On reprendra les problèmes d'alignement et de concours déjà abordés en classe de première.* *On fera clairement raître que les problèmes géométriques considérés ici*	*Les élèves doivent aussi savoir qu'une droite de l'espace peut être représentée par un système de deux équations linéaires.*

métrique; discussion algébrique.	*sont aussi l'étude des tèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement.* *On traitera aussi quelques situations* *numériques (issues de l'analyse, de* *situations économiques ou autres)* *s'y ramenant.*	

Produit scalaire dans le plan (accompagnements du programme de première S)
La définition attendue est soit celle utilisant la projection orthogonale, soit celle utilisant le cosinus mais les deux formes doivent être connues. On notera que la notion de projection orthogonale n'a jamais été introduite comme telle dans les années antérieures: cela ne doit pas empêcher d'utiliser le mot (comme cela a pu être fait lors de la mise en place du repérage d'un point dans le plan ou dans l'espace, ou bien à propos de perspective cavalière) sans faire de développement théorique sur cette application.
La plupart des résultats et applications cités par le programme dans ce paragraphe peuvent être démontrés à ce niveau ; ceci étant fait (selon les modalités, magistrales ou autres, les plus favorables à la compréhension des élèves), la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes.

La projection orthogonale d'un point sur une droite du plan n'est pas définie au collège. Elle intervient en seconde, dans le cadre du repérage cartésien. On la retrouve en première, pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs du plan.
La définition de l'application « projection orthogonale », dans l'espace, n'apparaît qu'en terminale.
Ne faudrait-il pas définir l'application « projection orthogonale » dans le plan, en première ?
La classe de première est le moment opportun pour introduire la définition de l'application « projection orthogonale » dans le plan, la notion essentielle étant celle de **projeté orthogonal** *d'un point. On remarquera, au passage, qu'il ne s'agit pas d'une transformation. Au delà de ces simples considérations, l'étude de cette application n'est ni au programme de première, ni à celui de terminale.*