Pythagore et les angles droits, des exemples d'ouvertures de classes de mathématiques sur le monde

Jean-Jacques Salone

PYTHAGORE ET LES ANGLES DROITS

des exemples d'ouvertures de classes de mathématiques sur le monde

Jean-Jacques SALONE
EA 4671 ADEF, Aix-Marseille Université, Marseille, France
jjsan@free.fr

RESUME

Ouvrir les classes sur le monde est une façon de redonner du sens aux savoirs enseignés et du plaisir d'apprendre aux élèves. Dans nos travaux de recherche, nous avons identifié trois directions d'ouvertures possibles. La première concerne les savoirs eux-mêmes: au delà de ceux qui sont exclusivement disciplinaires et officiels, d'autres peuvent exister dans les classes comme ceux que les élèves possèdent déjà à titre personnel, ou encore ceux issus de l'histoire de la discipline ou des disciplines associées. La seconde direction concerne l'ouverture des topos : proposer aux élèves de devenir de véritables acteurs de leurs apprentissages et du cours. La troisième est l'ouverture du milieu : activer des liens, numériques en particulier, au monde et à la société en impliquant d'autres personnes ou d'autres institutions scolaires ou extra-scolaires. Nous les déclinons en dispositifs didactiques et en activités d'étude et de recherche que nous proposons de présenter au travers d'une séquence en classe de quatrième autour du théorème de Pythagore.

1 Introduction

Quand on entre en quatrième[1] dans l'étude du théorème de Pythagore et des racines carrées, pourquoi ne pas rencontrer aussi leur célèbre inventeur et découvrir leurs usages anciens ou actuels? Les intérêts d'un tel contexte socio-historique pour l'apprentissage des mathématiques sont nombreux et plusieurs équipes de didactique des mathématiques se sont emparées de cette question. Au delà de ce seul contexte, les approches pédagogiques actuelles s'appuient sur plusieurs théories pour resituer les élèves au cœur d'une activité conjointe (Sensevy, 2011) et pour entrer dans un paradigme de questionnement du monde (Chevallard & Ladage, 2010). Avec le théorème de Pythagore comme fil conducteur, nous aborderons ici ces questions en introduisant d'abord le concept d'ouverture écologique des classes.

Puis la question de la mise en œuvre effective dans les classes de ces approches pédagogiques sera traitée. Comment concevoir des séquences et animer des séances ouvertes sur le monde? Avec quels rôles pour les élèves? Avec quelles ressources? Des activités avec un arrière-plan historique seront alors décrites et analysées. Fruits d'une ingénierie, elles ont été conduites sur plusieurs années par des enseignants dans leurs classes[2] et ont fait l'objet d'observations et d'analyses rapportées dans (Salone, 2015). Elles amèneront, au delà de la seule question des savoirs de référence, à s'interroger sur les topos accordés aux élèves et sur le milieu matériel mobilisé pour assumer une co-construction effective du cours et entrer dans une forme de pédagogie de l'enquête.

[1] Dans le système éducatif français, la niveau quatrième correspond à des élèves de 13-14 ans.

[2] Le terrain de recherche a permis de suivre 4 années de suite les classes d'un collège marseillais (France), dont trois classes de quatrième par an.

2 Les ouvertures écologiques des classes

Les classes sont des institutions didactiques ancrées dans des réseaux sociaux qui les légitiment. Notre postulat initial de recherche consiste à supposer qu'activer les liens sociétaux qui lient ses agents, élèves ou enseignants, et les savoirs enseignés au reste du monde a des conséquences bénéfiques sur les apprentissages. Cela autorise d'une part l'alternance des décontextualisations et des recontextualisations nécessaires pour la mise en œuvre de l'activité, et, d'autre part, cela semble contribuer à redonner de la motivation et du goût pour l'étude aux élèves.

2.1 Ouvertures des savoirs

La première ouverture écologique des classes que nous distinguons est celle qui concerne les savoirs. Ouvrir les savoirs, c'est activer dans la classe les liens qu'ils tissent entre eux. Ces liens sont d'abord internes à la discipline, comme le sont, pour initier notre exemple, ceux qui associent le théorème de Pythagore, l'angle droit et les racines carrées. Ainsi les programmes officiels de 2008 (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008) situent ce théorème en classe de quatrième dans le domaine de la géométrie et le secteur des figures planes. Il y est associé aux trois théorèmes des milieux, au théorème de Thalès, au cosinus d'un angle, aux droites et aux cercles remarquables dans les triangles, aux notions de distance d'un point à une droite et de tangente à un cercle. L'étude de ce théorème s'inscrit donc officiellement dans un contexte praxéologique d'étude des triangles, avec une attention particulière portée aux triangles rectangles. Deux capacités sont associées, toutes deux exigibles pour le socle commun:

> Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore.
>
> Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.

Ainsi c'est davantage l'égalité de Pythagore qui est attendue dans les programmes officiels. Le théorème *stricto sensu* n'apparaît pas explicitement, ni le théorème réciproque ou sa contraposée. En outre la seconde capacité, calculer des longueurs, nécessite le recours aux racines carrées. Mais là aussi, en quatrième, il n'est nullement question de définir formellement ce que sont ces nombres nouveaux pour les élèves. L'étude de leurs propriétés algébriques est reportée dans la classe de niveau supérieur, en troisième. En quatrième il s'agit surtout de les découvrir de façon empirique et instrumentée. Les commentaires précisent que:

> On ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.

On peut encore ajouter que dans le corpus mathématique du XXe siècle, le théorème de Pythagore et sa réciproque sont valides dans un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels lorsqu'il est muni d'un produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

Mais les liens gnoséologiques sont aussi d'ordre plus culturel, se fondant sur des pratiques et des théories à la fois forgées par les contextes historiques ayant présidé à leur élaboration et par les contextes actuels où ils sont pertinents. Ainsi le théorème de Pythagore amène d'abord à un personnage célèbre, haut en couleur, qui vécu approximativement de 580 à 495 avant JC, et que les élèves peuvent rencontrer avec plaisir et curiosité. L'enquête épistémologique que nous avons conduite repose en grande partie sur une compilation de textes historiques rassemblés par et al. (2007). Elle permet de rencontrer des œuvres mathématiques anciennes ainsi que des usages relatifs au théorème de Pythagore et des triplets homonymes. Ainsi des techniques de calcul de longueurs ou d'aires dans les triangles rectangles, ou de façon équivalente dans les rectangles, sont connues au moins depuis l'âge du bronze ancien (de 1800 à 1400 avant JC) en Mésopotamie. En attestent plusieurs tablettes babyloniennes de l'ancienne période (de 2000 à 1600 avant JC). Les tablettes Plimpton 322 (Collumbia University) et Yale Babylonian Collection 7289 (New Haven) sont certainement les plus fameuses. Des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les triplets de nombres entiers (a,b,c) vérifiant l'égalité de Pythagore $c^2 = a^2 + b^2$ et qui correspondent à des côtés de triangles rectangles, apparaissent dans ces tablettes, ainsi que des triplets de nombres décimaux non entiers vérifiant cette même égalité et une technique d'extraction des racines carrées. L'usage de ces triplets, en particulier du 3,4,5, est toujours d'actualité, avec par exemple des techniques en maçonnerie issues du Moyen Âge et utilisant une corde à 13 nœuds. D'autres tablettes, comme la British Museum 96957 (London) ou la Vorderasiatisches Museum 6598 (Berlin), utilisent des techniques similaires pour résoudre des problèmes de calcul de longueurs dans des constructions rectangulaires, comme des murs en briques, des portails, des tombes... Ces techniques de calculs dans les triangles rectangles sont également connues dans l'Égypte ancienne, vraisemblablement par diffusion depuis la Mésopotamie. La civilisation chinoise connaissait également l'égalité de Pythagore, et, au delà des techniques, en formulait un énoncé, le Gou-gu (Imhausen et all., p. 213): dans un triangle rectangle, le carré du 'gou' (la base) augmenté du carré du 'gu' (la hauteur) est égal au carré du 'xian' (l'hypoténuse). Régulièrement, les mathématiciens chinois compilent et reprennent les textes mathématiques anciens, comme le Zhou bi suang ji (les classiques mathématiques du gnomon des Zhou) au premier siècle avant JC, ou le Jiu zhang suan shu écrit par Liu Hui au troisième siècle après JC, et qui rassemble vingt-quatre problèmes dans son neuvième chapitre. Nous exploiterons plus loin l'un d'entre eux, celui du calcul du volume d'une mare à l'aide d'un roseau.

Mais, contrairement à ce que l'on peut supposer des mathématiciens mésopotamiens ou égyptiens, leurs homologues chinois ne se contentaient pas d'une simple règle technique utile pour la construction; le Gou-gu était en effet un théorème démontré. Liu Hui par exemple propose une démonstration du théorème de Pythagore reposant sur l'invariance des aires par ajouts ou retraits de surfaces. D'ailleurs une enquête sur le Web révèlerait que démontrer le théorème de Pythagore est et a été un défi maintes fois accompli par de nombreux auteurs, au delà de la seule communauté des mathématiciens. La majorité des démonstrations reposent sur des théorèmes de géométrie euclidienne, comme la supplémentarité des angles d'un triangle ou les égalités angulaires associées à des droites parallèles et une sécante, et sur des calculs d'aires, généralement de carrés. Parfois elles peuvent également mettre en jeu des techniques de calcul algébrique. Euclide, qui a vécu de 350 à 290 avant JC et qui est fameux pour son encyclopédie en treize volumes intitulée ‘les éléments’, en propose une à la fin du premier livre. Que reste-t-il donc à la gloire de Pythagore (de 580 à 495 avant JC) ? A-t-il eu des contacts avec les mathématiciens égyptiens ? A-t-il voyagé en Orient ? Les témoignages archéologiques ne permettent pas d'affirmer qu'il ait inventé et démontré le théorème dont il est aujourd'hui éponyme. Cependant, les pythagoriciens ont certainement découvert et démontré l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré. Ce fut un secret lourdement gardé, car contraire à une des doctrines de l'école qui stipulait que toute grandeur pouvait s'exprimer à partir de nombres entiers.

Tableau 1. Catégorisation des sources de références (d'après Salone, 2015, p. 271)

Sources de références officielles	Sources de références scolaires
⅄ les élèves ou l'enseignant, pratiques issues de la vie courante ⅄ instances savantes de la discipline ⅄ instances savantes de l'histoire de la discipline ⅄ instances savantes des disciplines associées	⅄ instances savantes d'autres disciplines ⅄ instances de l'établissement scolaire **Sources de références externes** ⅄ instances du réseau social des élèves ou de l'enseignant ⅄ instances du réseau social de proximité de l'établissement scolaire

Revenons de façon plus générale à la question des ouvertures écologiques des savoirs dans les classes. Quelles sont les directions possibles? Une analyse du contenu des programmes officiels donne quelques pistes. Outre de se référer aux savoirs savants et à l'histoire de la discipline, ils préconisent aussi de s'intéresser aux autres disciplines, qu'elles soient scientifiques et donc en connexion directe, ou plus éloignées, comme les arts. Ils suggèrent également d'avoir recours à des pratiques sociales de référence (Martinand, 2005), issues de la vie courante ou de contextes professionnels. Le tableau 1 dresse une liste des ces diverses sources praxéologiques de référence. Dans une volonté d'avoir là un outil pragmatique susceptible d'aider les enseignants à concevoir des séquences ouvertes sur le monde, nous y indiquons des instances sociales, institutions ou personnes, scolaires ou non, qui pourraient fournir des ressources gnoséologiques, humaines ou matérielles. Nous y retrouvons d'abord les sources officielles sus-citées, puis en sont proposées d'autres, davantage tournées vers la société tout entière. Ainsi, les classes étant plongées dans des établissements scolaires, ces derniers offrent potentiellement d'autres possibilités pluridisciplinaires, notamment lorsqu'ils mettent en place des classes à thème (par exemple une des classes observées a une vocation scientifique) ou lorsqu'ils organisent des journées événementielles. Les enseignants des diverses disciplines sont alors autant de vecteurs possibles de savoirs, ainsi que les personnels non enseignants ou les parents d'élèves qui participent à ces systèmes didactiques auxiliaires. Nous décrirons ainsi plus loin comment un factotum a pu intervenir dans une des classes à propos de l'usage qu'il fait du triplet pythagoricien 3,4,5. Enfin le tableau 1 référence également des instances non scolaires qui peuvent être trouvées dans des réseaux sociaux de proximité des agents scolaires et qui pourraient être impliquées dans les apprentissages lors d'interventions dans les classes ou lors de sorties pédagogiques.

2.1 Ouverture des topos et du milieu matériel

Par topos d'un élève (Chevallard, 2007), nous entendons ici l'ensemble des tâches et des rôles qui lui sont dévolus par l'enseignant et dont a priori il s'empare lors des apprentissages en classe. Dans un esprit d'ouverture, ce topos est diversifié, allant de tâches purement disciplinaires à d'autres plus didactiques et sociales. Dans les classes observées les élèves se voient ainsi impliqués dans des activités contextualisées, avec des tâches individuelles ou coopératives variées et des rôles adaptés aux différentes situations didactiques (Brousseau, 1998) en jeu. Une façon de regarder leur topos est alors de suivre le devenir de leurs discours et de leurs travaux. À un premier niveau d'ouverture, leurs productions sont communiquées à la classe. Certains enseignants observés insistent ensuite sur la confrontation des idées, animant des débats publics dans leurs classes. C'est le second niveau. Puis, plus rarement, des enseignants conduisent aussi des négociations des savoirs, des pratiques et des énoncés. Les élèves occupent à ce niveau une position toute particulière dans la relation didactique: ils sont les coauteurs, avec l'enseignant, des textes du savoir qui constituent l'équipement praxéologique de la classe, partie écrite de sa mémoire didactique (Matheron, 2009) qui servira ensuite de référence locale (Sensevy et Mercier, 2007). Ainsi, par l'activité dialogique, se fonde une véritable communauté discursive. Accorder aux élèves un topos d'auteur du cours est, dans notre approche pédagogique, une condition *sine qua non* pour susciter leur adhésion à ce qu'il se fait en classe. Ainsi leurs discours publics sont repris dans certaines classes sous la forme de citations ou d'exercices modèles insérés dans le cours. Une classe est allée encore un peu plus loin dans cette ouverture: l'étude a été initiée par une enquête exploratoire conduite dans et en dehors de la classe (nous en rapportons une plus loin). Le topos des élèves est alors élargi: ils contribuent, avec l'enseignant, à une certaine programmation de l'étude. On peut synthétiser sur une échelle ces différents niveaux du topos des élèves relativement à la constitution de la trace écrite de la leçon:

- Productions communiquées
- Productions débattues et servant de référence locale
- Productions constitutives du cours
- Productions programmatiques de l'étude

D'autres dispositifs pédagogiques sont encore ponctuellement mis en œuvre. Il s'agit par exemple de '*sondages d'opinions'* lors d'émission de conjectures, avec recueils et analyses statistiques, ou de '*corrections en parallèles*' au cours desquelles plusieurs élèves présentent simultanément au tableau leurs solutions à un problème donné avant d'aboutir à une réponse commune, partagée et diffusée. Lors de moments d'exploration des types de tâches ou de travail des techniques (Chevallard, 2002), d'autres dispositifs tout aussi ouverts ont été observés: des temps d'*entrainement tutorés* dirigés par les enseignants au cours desquels les élèves s'entraident, et des temps de *révision en autonomie* relative. Dans ces deux cas, les élèves ont accès à des ressources, livres ou sites internet comme Labomep (www.labomep.net). Les topos des élèves s'ouvrent ainsi sur des compétences davantage didactiques.

Dans les exemples précédents, la composante matérielle du milieu, bien qu'en arrière plan, apparaît comme un élément essentiel. Comment en effet entrer dans une action conjointe si la classe ne disposent pas de ressources idoines? Une part importante de l'action didactique de l'enseignant est donc nécessairement de l'ordre du mésogénétique. Le premier niveau de structuration physique du milieu que nous avons observé est ainsi l'enrichissement des salles de classe. Les '*classes enrichies*' proposent des supports discursifs partagés (tableau, espaces d'affichage muraux), des moyens d'accès à des ressources multimédia (par exemple du matériel de vidéo-projection, une bibliothèque ou des ordinateurs). À un deuxième niveau, les classes deviennent des '*classes numériques'.* Toutes les classes observées sont ainsi connectées à internet, à partir d'accès partagés ou à partir de tablettes numériques personnelles, et les établissements scolaires offrent divers services via un espace numérique de travail, comme des cahiers de texte ou des cours en ligne, des espaces de partage de documents, des outils d'échange et de communication. Enfin, les ouvertures du milieu peuvent également consister à transporter la classe dans des lieux non classiques, internes à l'établissement scolaire, comme les centres de documentation et d'information ou les espaces récréatifs hors murs, ou extérieurs, comme tous ceux qu'offrent les espaces urbains ou les zones naturelles à proximité. Une des classes observées, la classe à vocation scientifique évoquée plus haut, a ainsi organisé tout au long de l'année des sorties pédagogiques en milieu naturel, le théorème de Pythagore et le cosinus d'un angle ayant alors servi pour calculer les profils topographiques des balades.

3 Un exemple de mise en œuvre

Dans chacune de leurs classes, les enseignants observés ont choisi librement la progression mathématique qu'ils souhaitaient adopter, l'ingénierie didactique ne leur fournissant que quelques thèmes d'activités et des descriptions des dispositifs pédagogiques évoqués plus haut. Dans l'exemple proposé ici, l'enseignant a choisi de ne pas aborder l'étude des racines carrées, en particulier de racine de 2, en même temps que le théorème de Pythagore. Étant informé de ce qui allait être observé, les ouvertures écologiques de sa classe, il met en œuvre quelques uns des dispositifs pédagogiques proposés. La progression retenue (Figure 1) commence l'étude par une enquête exploratoire de laquelle émergent des exercices conformes aux attentes des programmes officiels et qui seront ensuite travaillés dans le cadre d'un entrainement 'tutoré' avec Labomep puis qui seront cooptés pas la classe . L'étude se poursuit par l'intervention du factotum de l'établissement scolaire. Le triplet pythagoricien 3,4,5 est alors rencontré par la classe et est ensuite intégré au cours. La séquence s'achève finalement sur un nouvel entrainement 'tutoré' avec Labomep. Notons encore que dans cette progression aucune démonstration du théorème n'est étudiée.

L'enquête exploratoire est d'abord conduite par les élèves chez eux, avec les médias dont ils disposent dans leurs sphères familiales, puis en classe, avec les manuels scolaires et des accès à internet. Fermée par trois questions ciblées et une injonction de production d'énoncés, elle fait ressortir l'histoire du personnage, avec affichage dans la classe de quelques exposés, et les exercices officiels associés au théorème (annexe 1). En particulier les élèves rencontrent les types de tâches attendus: calculer une longueur dans un triangle rectangle et prouver qu'un triangle est rectangle ou non. Certains élèves, comme celui auteur de l'enquête en annexe 1, sont surpris par la diversité des usages du théorème dans la vie courante:

« Tous ceux qui travaillent dans la nature et qui ont besoin d'estimations des distances utilisent le théorème de Pythagore (militaires, géomètres, jardiniers). Les maçons utilisent 3,4,5 pour les angles droits des bâtiments. Les menuisiers pour découper, les géographes pour établir des diagnostics, les mathématiciens pour trouver des formules, etc... Je ne pensais pas que le théorème de Pythagore servait dans autant de métiers. »

- Calcul de longueurs dans un triangle rectangle

1. Enquête sur le théorème de Pythagore. Classe inversée. Questions de l'enquête: qui est Pythagore, qu'est-ce que le théorème de Pythagore, à quoi sert-il ? Trouver des énoncés d'exercices. L'enquête est conduite par les élèves hors de la Classe.
2. Travail de groupe. Production d'une synthèse sur les énoncés et les usages du théorème de Pythagore.
3. Entraînement tutoré avec Labomep.
4. Cooptation d'exercices modèles. À partir des exercices rencontrés par les élèves, des exercices d'application directe sont retenus et insérés dans les fichiers d'exercices modèles.

- Contrôles d'angles droits

5. Intervention du factotum. Le factotum contrôle les angles droits de la salle de Classe. Il montre également l'usage qu'il fait du triplet pythagoricien (3, 4, 5) pour construire des rectangles (le terrain de rugby).
6. Écriture de comptes-rendus d'observation. Travail individuel des élèves effectué à la maison.
7. Lecture de comptes-rendus et cooptation d'un exercice modèle.

- Construction de figures avec des angles droits

8. Enquête sur les triplets pythagoriciens et leurs usages. Ressources numériques de la Classe.
9. Cooptation d'une synthèse.
10. Entrainement tutoré à l'aide de Labomep.

Figure 1. Une programmation de l'étude du théorème de Pythagore

Cette ouverture écologique des savoirs amène donc d'une part à des compétences mathématiques officielles et, d'autre part, à des compétences transversales non routinières de l'ordre de l'enquête et de la production d'énoncés. L'enquête en elle-même aura eu pour fonction didactique de dévoluer et d'initier l'étude.

La phase d'enquête est suivie d'une production cooptée du cours. Les élèves, en groupes, produisent des énoncés du théorème, puis des énoncés d'exercices qui lui sont associés, puis de leurs solutions. Ces travaux sont ensuite communiqués et débattus et certains sont sélectionnés, après validation par l'enseignant, pour venir constituer le cours commun (Figure 2). Nous retrouvons là l'ouverture des topos qui consistent à octroyer aux élèves un rôle d'auteur.

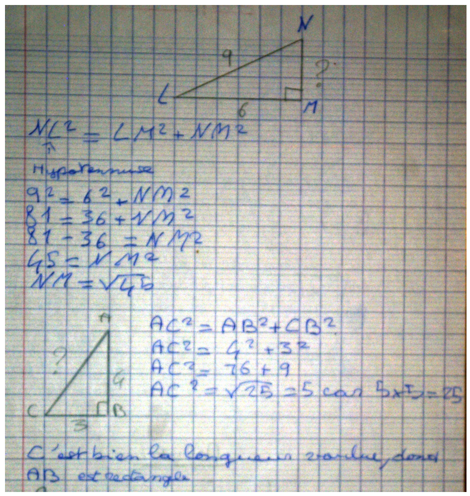


Figure 2: Exercices cooptés

Entre la phase de production d'énoncés et celle de cooptation du cours, le dispositif 'entraînement tutoré' est mis en œuvre à l'aide du site internet Labomep. Des énoncés d'exercices sont d'abord vidéo-projetés et les élèves cherchent individuellement des réponses. L'enseignant circule dans la classe et valide les résultats. Les premiers élèves qui réussissent sont alors désignés pour devenir des tuteurs: ils se rendent disponibles pour aider leurs camarades. Une solution commune est enfin cooptée et saisie avant de passer à l'exercice suivant. Ce dispositif assume ainsi pleinement son objectif d'ouverture des topos: les élèves mettent en œuvre leurs compétences didactique en devenant des aides à l'étude.

La séquence se poursuit ensuite par l'intervention du factotum, l'homme à tout faire de l'établissement scolaire de notre terrain de recherche. Celui-ci expose publiquement l'usage qu'il fait du triplet pythagoricien (3,4,5) et des cordes à 13 nœuds pour tracer le terrain de rugby de l'établissement et pour contrôler la perpendicularité des murs de la salle de classe par rapport au sol. Les techniques qu'il met en œuvre sont elles fort anciennes, déjà évoquées dans les tablettes babyloniennes et largement répandues au Moyen Âge lors de la construction des cathédrales. Les élèves sont alors invités à tracer de grands rectangles au sol ou sur le tableau et à effectuer des contrôles de perpendicularité. C'est l'occasion pour eux de manipuler des cordes à 13 nœuds et des instruments de mesure de longueurs qui ne font pas partie de leurs instruments classiques, comme le mètre en bois de l'enseignant et les décamètres de maçons. Ils ont ensuite pour tâche de produire un compte-rendu d'observation (annexe 2) de cette expérimentation. Toujours dans un esprit d'ouverture des topos, un de ces comptes-rendus est ensuite coopté et diffusé, puis un exercice 'modèle' est coproduit.

Dans cette phase de l'étude, l'ouverture des savoirs est donc poursuivie en direction d'une pratique sociale de référence fort ancienne et encore utilisée aujourd'hui par un professionnel non enseignant. Elle aura aussi conduit à un milieu physique et des types de tâches non routiniers. Elle aura maintenu l'ouverture des topos des élèves qui ont continué d'être auteurs du cours et qui ont eu des rôles d'expérimentateurs proches de ceux qui leurs sont octroyés dans les disciplines scientifiques.

La fin de la séquence suivra le même schéma, avec une ouverture des savoirs réalisée par une enquête en classe sur les triplets pythagoriciens, et une ouverture des topos autour d'une cooptation d'exercices 'modèles' puis un nouvel entraînement 'tutoré'.

4 Conclusion et perspectives

Dans cet exemple, le contexte historique a donc sous-tendu la progression de l'étude de l'égalité de Pythagore. Il a d'abord eu pour fonction de dévoluer et d'initier l'étude à partir d'une enquête multimédia, puis il a fourni des énoncés, des exercices et des solutions cooptés par la classe, et enfin, avec l'intervention d'un professionnel non enseignant, il a permis de rencontrer des usages anciens et actuels des triplets pythagoriciens. Ces ouvertures écologiques des savoirs ont été associées à des ouvertures des topos élèves qui ont été auteurs de l'équipement praxéologique de la classe et qui, lors des entrainements 'tutorés', ont mis en œuvre leurs compétences didactiques. Un milieu physique idoine a été nécessaire pour tout cela, enrichi d'espaces de communication partagés et de moyens numériques d'accès à des ressources.

Un tel contexte socio-historique est-il bénéfique pour les apprentissages ? Est-il efficace, plaisant et motivant pour les élèves ? Même si nous le postulons dans nos travaux et si nous nous inscrivons dans les paradigmes pédagogiques actuels, il nous semble difficile de l'affirmer ici. C'est pourquoi dans nos travaux de recherche actuels, nous tentons de réunir dans un collectif des enseignants, des chercheurs et des formateurs afin d'expérimenter et de concevoir des dispositifs pédagogiques et des activités d'étude et de recherche comme ceux et celles qui viennent d'être présentés.

REFERENCES

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels: Idécimalité et racines carrées*. Thèse de doctorat. Grenoble: Université J. Fourier (Grenoble 1).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude, 3, écologie et régulation. In *Actes de l'a XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier Garcia (Eds.), *Sociedad, Escuela y Mathematicas: Aportaniones de la Teoria Antropologica de la Didactico* (pp 705-746). Baeza (Espagne): Universidad de Jaen.

Chevallard, Y., & Ladage, C. (2010). *Enquêter pour connaître: L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet* (Communication au Colloque Yves Chevallard). Liège, Belgique: Université de Liège.

Imhausen, A., Robson, E., Dauben, J., Plofker, K., & Lennart Berggren, J. (2007). Chapters in V. Katz (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam : A sourcebook*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques: Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Martinand, J. L. (2001). *Pratiques de référence et problématique de la référence curriculaire*. In A. Terrisse (Éd.), *Didactique des disciplines, les références au savoir* (pp. 17-24). Bruxelles: éditions De Boeck Université, Perspectives en éducation et formation.

Ministère de l'éducation nationale (2008). *Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008. Programmes de l'enseignement de mathématiques*., de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège (RLR : 524-2a ; 524-2b ; 524-2c) arrêté du 9-7-2008 – j.O. du 5-8-2008 (NOR : MENE0817023A).

Salone, J. J. (2015). *Les références praxéologiques dans les systèmes didactiques*. Thèse de doctorat. Marseille: Aix-Marseille Université.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir, éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique.* Bruxelles: De Boeck.

Sensevy, G., & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble: L'action didactique conjointe*. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), *Agir ensemble: L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 187-211). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Annexes

Annexe 1: l’enquête exploratoire d’un élève

K DYLAN 4e SATIE

DM : PYTHAGORE

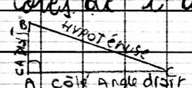
NOTE	APP	SIGNATURE

Pythagore : philosophe et Mathematiciens grecque et scientifique présocratique qui serait né aux environs de 580 av Jc à SAMOS. On etabli sa mort vers 495 av J. Pythagore serait le premier penseur grecque à s'être identifier lui-même philosophe

Enoncé du théoreme

le côté le plus grand dans un triangle s'appelle l'hypotenuse

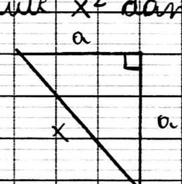
Dans un triangle rectangle le carré de la longueur de l'hypotenuse est égal à la somme des carrés des longueurs des cotés de l'angle droit



Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

exercice

Calcule x^2 dans le triangle



$a^2 + a^2 = x^2$, donc $x^2 = 2a^2$

Annexe 2: compte-rendu d'observation d'un élève

A
Camilia
4 Satie

Compte rendu de l'observation

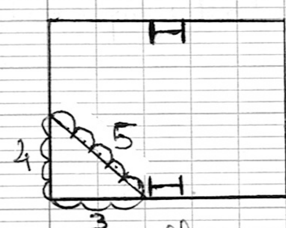
Intervenant :

Questions :

Que fait-il ?
Explication mathématique
Recherches internet sur des autres façons de faire.

Que fait il ?

M. Pelassy fait de nombreux travaux dans notre écol
par exemple c'est lui qui trace le terrain de rugbi
pour effectuer ce travail il procède de cette magnèr



Un terrain de rugbi est un rectangl
donc il dois avoir 4 angles droit. Mais un
terrain de rugbi est beaucoup plus grand
qu'un carré sur une feuille, donc une éq
ne suffira pas pour tracer des angles droits. Pour tra
des angles droit M. Pelassy utilise une technique qui s'a
le 3-4-5 ou "La réciproque du théorème de Pythagores".
a dire qu'il trace un triangle en prenant la mesure d
quelque chose et pour faire les côtés du triangle il pren u
qui est égal à la chose X 3 un côté qui est égal à
la chose X 4 et un côté qui est égal à la chose X 5

2/2

à revoir

Comment verifier que ce triangle sera rectangle ?

D'après la réciproque de Pythagores :

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$25 = 25$

Ce triangle est bien rectangle
la réciproque de Pythagores dis que si
carré de l'hypoténuse est égale a la somm